

**Universidade Federal da Paraíba**  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

***INFLUÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DE CORRENTE ELÉTRICA EM MALHAS  
DE ATERRAMENTO SOBRE O CÁLCULO DO POTENCIAL.***

Alessandro Pontes Cavalcanti  
[alessand@router.uepb.rpp.br](mailto:alessand@router.uepb.rpp.br)

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA  
PARAÍBA, EM CUMPRIMENTO PARCIAL DAS  
EXIGÊNCIAS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Campina Grande - Dezembro de 1996



### Ficha Catalográfica

Cavalcanti, Alessandro Pontes  
Influência da distribuição não-uniforme de corrente elétrica sobre o cálculo do potencial / Alessandro Pontes Cavalcanti. - Campina Grande, 1996.  
102 p.

Dissertação (Mestrado) UFPB / CCT

1. Malhas de aterramento 2. Distribuição não-uniforme de corrente 3. Cálculo do potencial na superfície do solo I. Título

621.3 Engenharia elétrica

621.3.16.99 Aterramento

***INFLUÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DE CORRENTE ELÉTRICA EM MALHAS  
DE ATERRAMENTO SOBRE O CÁLCULO DO POTENCIAL.***

Alessandro Pontes Cavalcanti

***INFLUÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DE CORRENTE ELÉTRICA EM MALHAS  
DE ATERRAMENTO SOBRE O CÁLCULO DO POTENCIAL***

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA  
PARAÍBA, EM CUMPRIMENTO PARCIAL DAS  
EXIGÊNCIAS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Orientador:  
Prof. Benemar Alencar de Souza, D. Sc., UFPB

Campina Grande - Dezembro de 1996

**INFLUÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DE CORRENTE ELÉTRICA EM MALHAS DE  
ATERRAMENTO SOBRE O CÁLCULO DO POTENCIAL.**

**ALESSANDRO PONTES CAVALCANTI**

Dissertação Aprovada em 06.12.1996

*Benemar Alencar*

**PROF. BENEMAR ALENCAR DE SOUZA, D. Sc., UFPB**  
**Orientador**

*Washington Luiz Araújo Neves*

**PROF. WASHINGTON LUIZ ARAÚJO NEVES, Ph. D., UFPB**  
**Componente de Banca**

*Wellington Santos Mota*

**PROF. WELLINGTON SANTOS MOTA, Ph. D., UFPB**  
**Componente de Banca**

Campina Grande - PB  
Dezembro de 1996

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a DEUS que, com certeza, em todas as horas está sempre comigo;

Ao professor Benemar Alencar de Souza, pela idéia do tema e pela excepcional orientação ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Thereza Pontes e José Elmano, a quem tanto devo em minha vida e até o momento retribuí tão pouco.

Aos meus irmãos, Elmano, Denise e Márcia, pelo incentivo à realização deste trabalho.

A todas aquelas pessoas que contribuíram ou não para realização deste trabalho, mas que sempre enviaram energias positivas para mim.

À Universidade Federal da Paraíba e à CAPES pelo apoio financeiro.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	9
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	12
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	13
<b>RESUMO</b> .....	15
<b>ABSTRACT</b> .....	16
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	17
1.1 Modelos de solo .....	18
1.2 Modelos de eletrodo .....	19
1.3 Tipos de aterramento em subestações .....	20
<b>2. METODOLOGIA BÁSICA</b> .....	24
2.1 Fundamentos .....	24
2.2 Método do somatório .....	27
Exemplo A .....	28

2.3 Método da integral.....	31
Exemplo B.....	32
2.4 Comparação dos métodos.....	32
2.5 Método do somatório modificado.....	33
Exemplo C.....	35
2.6 Sistema de aterramento formado de elementos paralelos ou ortogonais.....	37
a) Elementos horizontais.....	37
b) Elementos verticais.....	38
2.7 Método do somatório modificado aplicado à malha de aterramento.....	39
<b>3. MÉTODOS BASEADOS NO MODELO DO POTENCIAL CONSTANTE.....</b>	<b>41</b>
3.1 Método matricial.....	42
Exemplo D.....	45
3.2 Método matricial modificado com segmentação uniforme.....	46
Exemplo E.....	57
3.3 Método matricial modificado com segmentação não-uniforme.....	59
Exemplo F.....	60
3.4 Uma comparação dos métodos.....	62
Exemplo G.....	65
Exemplo H.....	69
<b>4. SIMULAÇÃO DE MALHAS DE ATERRAMENTO.....</b>	<b>73</b>
4.1 Simulação da malha de aterramento da subestação de Barra do Peixe/SP.....	74
4.2 Simulação da malha da subestação de Boa Vista/PB.....	78
<b>5. CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>84</b>
5.1 Conclusões.....	84
5.2 Sugestões.....	86



a) Modificação da modelagem do solo .....	86
b) Otimização da segmentação .....	86
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>88</b>
<b>APÊNDICE .....</b>	<b>91</b>
Apêndice A .....	92
Apêndice B .....	97

## LISTA DE FIGURAS

1.1	(a) Segmento de um eletrodo. (b) Circuito equivalente.....	19
1.2	Sistema radial de aterramento.....	21
1.3	Sistema de aterramento em anel .....	22
1.4	Sistema de aterramento em malha .....	23
2.1	Eletrodo puntiforme em solo uniforme e um ponto em que o potencial é de interesse .....	25
2.2	Eletrodo puntiforme em solo homogêneo a profundidade $h$ e seu eletrodo-imagem.....	26
2.3	(a) Trecho de um eletrodo subdividido em elementos finitos. (b) Modelo matemático do elemento.....	27
2.4	Eletrodo parabólico do exemplo A.....	29
2.5	Eletrodo retilíneo.....	34
2.6	Malha de aterramento típica.....	37
2.7	Elementos retilíneos. (a)Horizontal na direção $y$ (b)Vertical.....	38
3.1	Malha simples de aterramento. (a) Trecho da malha subdividida em $n$ elementos finitos. (b) Modelo matemático.....	42
3.2	Eletrodo retilíneo do exemplo D.....	45
3.3	Densidade de corrente ao longo do condutor retilíneo do exemplo D.....	46
3.4	Segmentos de condutores de comprimentos $2l_1$ e $2l_2$ distribuição uniforme de corrente no segmento $l$ .....	48
3.5	Segmento de eletrodo representado por fonte linear de densidade de	

	corrente constante.....	50
3.6	Segmentos de eletrodos de comprimentos $2L_1$ e $2L_2$ nas direções das coordenadas $x$ e $y$ respectivamente .....	53
3.7	Superfície cilíndrica infinitesimal de um segmento de eletrodo localizada em $(x, y_1, z_1)$ .....	55
3.8	Densidade de corrente ao longo do condutor. Distribuição não-uniforme de corrente e segmentação uniforme .....	58
3.9	Potencial na superfície do solo para um eletrodo de 3 m. Distribuição não-uniforme de corrente.....	59
3.10	Métodos de segmentação do eletrodo. (a) Uniforme. (b) Não-uniforme .....	59
3.11	Segmentação não-uniforme do condutor .....	60
3.12	Erro percentual do potencial ao se variar o segmento central do condutor .....	61
3.13	Densidade de corrente ao longo do condutor. Distribuição de corrente e segmentação não-uniforme.....	62
3.14	Malha com seie condutores .....	65
3.15	Densidade de corrente ao longo dos condutores. Segmentação uniforme.....	66
3.16	Erro percentual do potencial, ao se variar o segmento central dos condutores da malha ...	67
3.17	Densidade de corrente ao longo dos condutores. Distribuição e segmentação não-uniforme.....	67
3.18	Malha composta por dez condutores e quatro hastes enterrados a 0,5 m.....	69
3.19	Potencial na superfície do solo sobre o eixo de simetria da malha .....	70
3.20	Potencial na superfície do solo de uma malha de dez condutores e quatro hastes enterradas a 0,5 m. (a) Distribuição uniforme de corrente elétrica. (b) Distribuição não-uniforme.....	72
4.1	Geometria da malha de aterramento da subestação de Barra do Peixe. ....	74
4.2	Curvas do potencial de toque na subestação de Barra do Peixe. (a) Região de mapeamento. (b) Direções consideradas. Curvas na direção: (c) Central e perimetral. (d) diagonal.....	77

4.3	Potencial na superfície do solo da malha da subestação de Barra do Peixe.....	78
4.4	Malha da subestação de Boa Vista. Vista superior.....	79
4.5	Curvas do potencial na superfície do solo na subestação de Boa Vista. (a) Região de mapeamento.(b) Direções consideradas. Curvas nas direções. c) Longitudinal. (d) Transversal. (e) Diagonal.....	81
4.6	Potencial na superfície do solo da malha da subestação de Boa Vista. (a) Distribuição uniforme de corrente. (b) Distribuição não-uniforme de corrente .....	83
A.1	(a) Fonte de corrente enterrada em solo de resistividade finita. (b) Reflexão do ponto $A_s$ em relação ao plano de interface.....	93

## LISTA DE TABELAS

2.1	Referente aos dados do exemplo A.....	30
2.2	Comparação dos métodos .....	33
2.3	Valores obtidos pela resolução do problema do exemplo C.....	36
3.1	Equações para os fatores de distribuição de potencial - VDF .....	49
3.2	Potencial na superfície do solo, acima do centro do eletrodo. Calculado de três maneiras diferentes .....	63
3.3	Resultados do método matricial modificado .....	70
4.1	Validação do programa desenvolvido com base em valores calculados para a subestação de Barra do Peixe .....	75
4.2	Dados referentes à malha da subestação de Boa Vista .....	79
4.3	Segmentação nos elementos da malha da subestação de Boa Vista.....	80
4.4	Valores calculados para a subestação de Boa Vista .....	80
B.1	Equação para o fator de distribuição de potencial entre um segmento de eletrodo e um ponto (resistência transferida) .....	98
B.2	Equação para o fator de distribuição de potencial entre dois segmentos de eletrodos (resistência mútua).....	99
B.3	Equação para o fator de distribuição de potencial próprio .....	102

## LISTA DE SÍMBOLOS

$I_G$	Componente da condutância de dispersão da corrente dissipada no solo pelo segmento considerado.
$I_C$	Componente capacitivo da corrente dissipada no solo pelo segmento considerado.
$I_R$	Componente resistivo da corrente que circula os segmentos adjacentes da malha de aterramento.
$I_L$	Componente indutivo da corrente que circula os segmentos adjacentes da malha de aterramento.
$R$	Resistência.
$L$	Indutância.
$C$	Capacitância.
$(x, y, z)$	Coordenadas cartesianas de um ponto genérico da superfície do solo.
$(x, \phi, z)$	Coordenadas cilíndricas de um ponto genérico da superfície do solo.
$(x_e, y_e, z_e)$	Coordenadas de uma fonte pontual.
$\rho$	Resistividade do solo.
$E$	Campo elétrico.
$J$	Densidade de corrente.
$\sigma$	Condutividade do solo.
$\epsilon$	Permisividade do solo.
$V$	Potencial num ponto genérico do solo.
$V_P$	Potencia num ponto $P$ do solo.

$\nabla$	Operador diferencial vetorial del.
$\theta(k)$	Função arbitrária da variável de integração $k$ .
$J_0$	Função de Bessel de ordem zero.
$h$	Profundidade do eletrodo no solo.
$r'$	Distância entre o eletrodo e um ponto genérico no solo.
$r''$	Distância entre o eletrodo imagem e um ponto genérico no solo.
$n$	Número de segmentos do sistema de aterramento.
$I_T$	Corrente total que emana para o solo.
$I_j$	Corrente em um segmento $j$ qualquer do sistema de aterramento.
$l(x,y,z)$	Comprimento do trecho do eletrodo entre os pontos $(x_o, y_o, z_o)$ e $(x, y, z)$ .
$L$	Comprimento total do condutor.
$L_C$	Comprimento central de uma das subdivisões do condutor.
$A, B, \Gamma$	Cossenos diretores da reta que contém o eletrodo.
$a$	raio do eletrodo.
$GPR$	Elevação de potencial de terra, GPR.
$[F]$	Matriz dos fatores de distribuição de potencial.
$[1]$	Matriz coluna de elementos unitários.
$[I]$	Matriz das correntes do segmento do eletrodo.
$K_m$	Fator do potencial da malha.
$K_i$	Fator de irregularidade da distribuição de corrente elétrica.
$V_m$	Tensão da malha.
$V_p$	Tensão de passo.

## RESUMO

Um dos objetivos desta dissertação é a realização de um estudo comparativo, em termos de exatidão oferecida e de esforço computacional exigido, dos modelos de eletrodo *densidade-de-corrente-constante* e *potencial-constante*.

O outro objetivo é estudar o *método matricial modificado* e implementá-lo para simular malhas de aterramento. Espera-se que esse método exija menor esforço computacional e ofereça precisão, favorecendo assim o estudo de malhas complexas. O método matricial modificado é resultante da junção do *método do somatório modificado* com o modelo potencial-constante.

Neste trabalho será empregado o modelo de solo uniforme. Outro projeto que está se desenvolvendo em paralelo, no curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPB, emprega o modelo de duas camadas, mas não contempla a problema da não-uniformidade de corrente, como se busca fazer aqui. É possível que um terceiro projeto, subsequente a estes, procure congregiar os resultados que estão sendo obtidos agora.

As rotinas computacionais desenvolvidas serão aplicadas, na sua versão final, ao estudo da malha de aterramento da subestação de Boa Vista, da CELB - Companhia de Eletricidade da Borborema, Campina Grande, Estado da Paraíba.



## ABSTRACT

This research work aims at a comparative study of the *constant current density* and *constant voltage electrode models* in terms of accuracy and computational effort.

Another objective of this work is to study and implement the *modified matrix method*, to simulate grounding grids. This method is supposed to require less computational effort and to provide accuracy, in order to promote the study of complex grids. The modified matrix method derives from the *modified summation method* in conjunction with the constant voltage model.

The uniform soil model will be applied. Another project is being developed in parallel under the same guidance. The two two layer model is used, but current distribution is considered to be uniform. third project may bring together the results which are being obtained at the present.

The developed computational procedures will be applied, in their ultimate version to the study of the grounding grid from Boa Vista substation which belongs to CELB - Companhia de eletricidade da Borborema, Campina Grande, Estado da Paraíba.

## 1. INTRODUÇÃO

Os sistemas elétricos necessitam ser ligados à terra em pontos estratégicos, para efeito de dispersão de correntes de defeito e de impulso geradas por chaveamentos ou descargas atmosféricas. Tais conexões se fazem através de eletrodos ou conjunto de eletrodos enterrados, em contato direto com o solo, formando assim o que se denomina *sistema de aterramento* ou, simplesmente *aterramento*.

O conhecimento do comportamento do sistema de aterramento é um problema difícil. O solo é um meio extremamente complexo, cujas propriedades mudam no tempo e no espaço. Mas não é só por isso. Há outros fatores que concorrem para a dificuldade do problema, podendo-se destacar os seguintes:

- a) O aterramento é um sistema multifuncional. Isto é, ele deve desempenhar uma variedade de funções, algumas até conflitantes. Deve servir ao sistema de alimentação (subestação), com o objetivo principal de oferecer segurança às pessoas contra os efeitos da corrente de curto-circuito; deve prover um caminho de baixa impedância para a corrente de descarga na sua direção preferencial para o solo (aterramento da proteção contra descargas atmosféricas); deve minimizar os efeitos de interferências associados à irradiação na faixa de alta frequência como aqueles oriundos de sistemas de comunicação.
- b) O desempenho do aterramento depende das próprias condições impostas pelos fenômenos que provocam sua intervenção.
- c) O comportamento do sistema de aterramento precisa ser conhecido com antecedência já na fase de projeto.

A solução do problema está relacionada com a disponibilidade de modelos apropriados, capazes de representar os aspectos fundamentais do comportamento que se quer conhecer.

## 1.1 Modelos de solo

O mais simples é o *modelo uniforme*, que supõe o solo homogêneo e isotrópico<sup>1</sup>. Embora um modelo assim seja completamente irreal, sua aplicabilidade é alta, por conta da facilidade que oferece à formulação matemática dos problemas. Ainda hoje, muitos sistemas de aterramento são projetados seguindo procedimentos que adotam esse modelo (IEEE-80, 1986).

Para não ser mantido tão distante da realidade, utiliza-se o conceito de *resistividade aparente* (ENDRENY, 1963 ; TAKAHASHI & KAWASE, 1990).

Os solos reais, não-uniformes, são classificados em *regulares e irregulares*. Os primeiros são mais comuns e se caracterizam por apresentarem pouca ou quase nenhuma variação da resistividade na direção horizontal, em comparação ao que acontece na direção vertical.

Os modelos mais sofisticados de solos regulares aproximam a resistividade por uma função contínua (exponencial) da profundidade (SUNDE, 1968). Entretanto, os modelos mais usuais consideram que o solo é constituído de um certo número de camadas horizontais homogêneas, isto é, com resistividades constantes, de espessuras finitas, exceto a mais profunda, que é infinita. Dentre os modelos em camadas, o mais empregado é o de duas camadas (DAWALIBI & MUKHEDKAR, 1975; KOSTIC & SHIRKOOHI, 1993). CAVALCANTI (1991) estudou o solo do Nordeste e concluiu que 75% dele pode ser modelado em duas camadas.

Os solos irregulares, em que a resistividade não pode ser considerada função exclusiva da profundidade, não tem recebido muito atenção. Ma *et al.* (1993) apresentam um modelo em camadas hemisféricas para representar solos com irregularidades em região finita. Tais irregularidades, ocorrem em solos regulares que tenham submetido-se a cortes ou aterros.

---

<sup>1</sup> Um solo homogêneo e isotrópico apresenta as mesmas propriedades físicas em todas as direções, portanto tem resistividade constante em toda sua extensão (SALAMA et al, 1995 ).

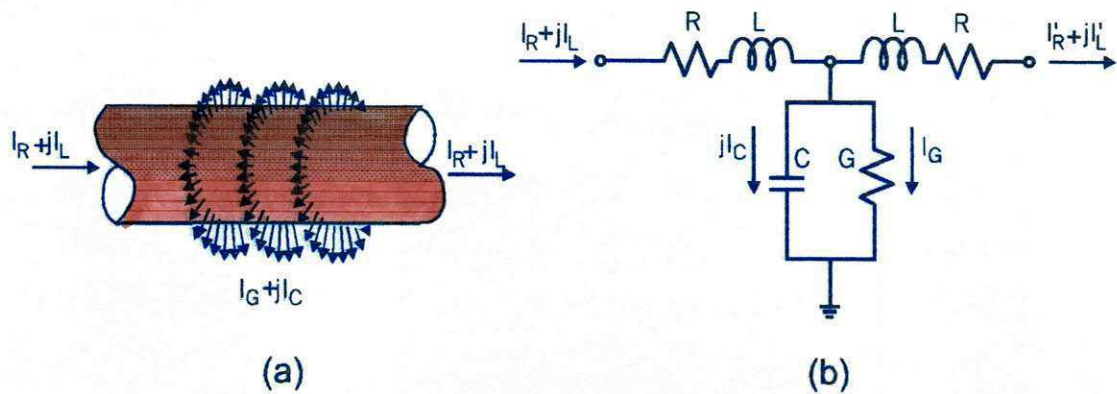


Fig. 1.1: (a) Segmento de um eletrodo. (b) Circuito equivalente.

## 1.2 Modelos de eletrodo

O modo como a corrente se dispersa no solo é uma característica física fundamental para compreender-se o comportamento do sistema de aterramento. Um segmento de eletrodo é mostrado na Fig. 1.1a, onde são indicadas três correntes.  $I_G + jI_C$  é a corrente dispersada no solo pelo segmento considerado. As outras são correntes que vêm ou vão para segmentos adjacentes ao considerado. O campo elétrico no solo determina as correntes de condução e capacitiva que compõem a corrente total dispersa no solo. A relação entre tais correntes não depende da geometria do eletrodo, mas sim exclusivamente da relação  $\sigma / \omega \epsilon$ , sendo  $\sigma$  e  $\epsilon$  respectivamente a condutividade e a permissividade do solo e  $\omega$  a frequência angular. Sendo assim, pode-se tomar o circuito da Fig. 1.1b como equivalente do segmento de eletrodo. Os efeitos mútuos, em termos de indutância, capacitância e condutância, entre cada um dos segmentos do eletrodo, devem ser considerados. A determinação de cada elemento, próprio ou mútuo, é apresentada por VISACRO & PORTELA (1993).

Em condições de baixa frequência, como aquelas que são próprias de fenômenos lentos<sup>2</sup>, a impedância longitudinal e também a corrente capacitiva<sup>3</sup> no solo são desprezíveis. Nesses casos, o aterramento pode ser representado por uma condutância ou resistência equivalente.

Nos projetos de sistemas de aterramento supõem-se, usualmente, condições de regime permanente. De fato, em certas circunstâncias é muito provavelmente isso que ocorre. Os métodos mais usuais de cálculo do potencial, devido à dispersão de corrente no solo, consideram constante a densidade de corrente,  $J$ , na superfície dos condutores que constituem o sistema de aterramento. Essa hipótese é muito

<sup>2</sup> Os fenômenos lentos mais comuns são aqueles associados a curtos-circuitos e a desequilíbrio de carga em circuitos trifásicos.

<sup>3</sup> O valor da corrente capacitiva é proporcional à frequência.

simplicativa, porém inconsistente, pois, segundo ela, o campo elétrico,  $E$ , ao longo de toda a superfície de um eletrodo, é constante<sup>4</sup>. Sabe-se que isso não é verdade, visto que o valor do campo elétrico no extremo do eletrodo é muito diferente daquele no entremeio.

Uma alternativa para a hipótese de que a densidade de corrente seja constante é supor que essa densidade seja tal que o potencial da superfície do eletrodo seja constante em toda sua extensão. Aceitar esta hipótese significa pressupor que a impedância<sup>5</sup> longitudinal dos eletrodos tenha valor tão reduzido que a queda de tensão ao longo deles possa ser desprezada.

A elevada condutividade do material empregado na formação do eletrodo<sup>6</sup> permite desprezar o componente real da impedância longitudinal, mesmo no caso de malhas convencionais de aterramento de subestação, cujas dimensões são realmente grandes. Por outro lado, pensando-se nos casos em que o sistema de aterramento deva atender a solicitações elétricas associadas a fenômenos lentos<sup>7</sup>, a reatância longitudinal também pode ser desprezada.

A hipótese da densidade de corrente constante é sustentada na prática pela simplificação que empresta aos cálculos de potencial. Os métodos que a empregam, corrigem, *a posteriori*, os valores calculados, por meio de fórmulas empíricas (IEEE-80, 1986).

### 1.3 Tipos de aterramento em subestações

Os princípios de aterramento são semelhantes para todas as subestações. Entretanto, devido às variações dos tipos de serviço e exigências operativas de cada subestação, será abordado apenas o aterramento de subestação ao tempo.

O aterramento em uma subestação pode ter várias finalidades. Porém, houve tempo em que a prática era instalar sistemas de terra isoladamente. Por exemplo, as estruturas e as carcaças dos aparelhos tinham seu próprio sistema de aterramento, enquanto que os pára-raios possuíam outro sistema de aterramento, independente do

---

<sup>4</sup> Segundo a lei de Ohm, o campo elétrico na superfície do eletrodo é  $E = \rho J$ , onde  $\rho$  é a resistividade, suposta constante, do meio envolvente do eletrodo. Logo, a densidade de corrente,  $J$ , constante implica campo elétrico constante.

<sup>5</sup> A ela correspondem as impedâncias  $R + j\omega L$  no circuito equivalente da Fig. 1.1b.

<sup>6</sup> Os eletrodos de aterramento são constituídos de cobre, como os cabos empregados na construção de malhas de aterramento de subestações, ou de aço com revestimento de cobre, ou ainda de ferro zincado, como as hastes de aterramento.

<sup>7</sup> Nesses casos, a frequência não é muito diferente da frequência industrial.

primeiro. Mais tarde, verificou-se que, interligando-se os diferentes sistemas de aterramento, obtinha-se maior eficácia, visto que a condutância de cada sistema completava a deficiência dos outros. Nos projetos atuais de aterramento de subestações usa-se um único sistema de aterramento para todas as finalidades.

Segundo JENSEN (1974), existem três classes gerais de sistemas de aterramento em subestações: radial, barramento em anel e malha.

O tipo de aterramento radial (Fig. 1.2) mostra os quatro grupos de hastes ou esteiras de aterramento na periferia da área ocupada pelos equipamentos e outro grupo pequeno de hastes ao lado da casa que abriga o painel de comando. Essa localização das esteiras de aterramento ligeiramente afastada da placa de aterramento faz com que os condutores de ligação à terra sejam excessivamente longos, ocasionando uma alta impedância, podendo prejudicar a passagem das correntes de defeitos para a terra.

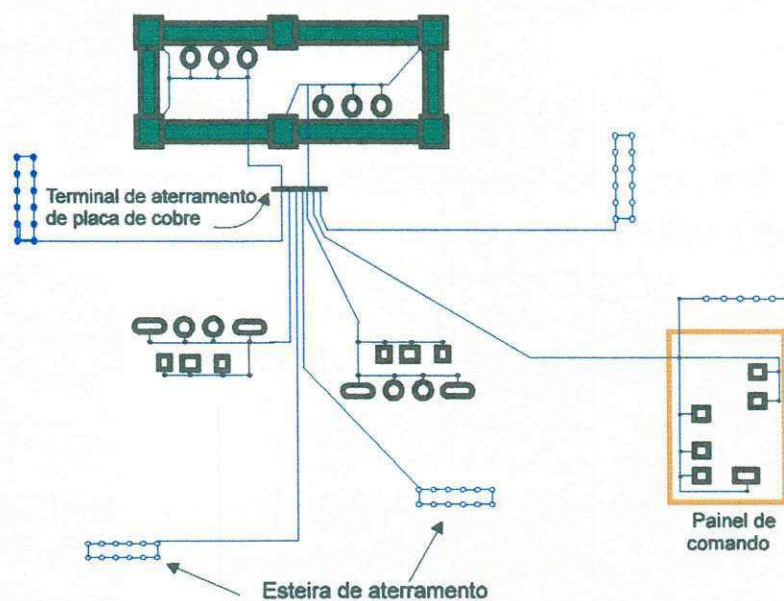


Fig. 1.2: Sistema radial de aterramento

O maior problema do aterramento radial está numa falha em um dos condutores de ligação à terra, o que isolaria o grupo de equipamentos ligados a ele, com possibilidades de surgimento de perigosos gradientes de potencial. Todavia, o aterramento radial é de grande utilidade em casos de condições adversas no solo, como, por exemplo, locais que apresentam dificuldades de fincamento de hastes no solo devido à presença de rochas.

Outro sistema de aterramento de subestações é o tipo barramento em anel, mostrado na figura abaixo.

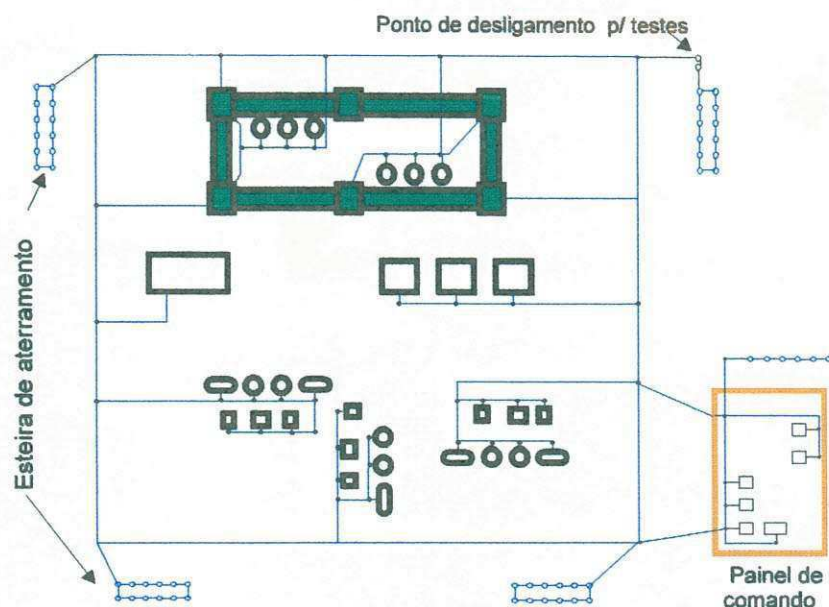


Fig. 1.3: Sistema de aterramento em anel .

Nesse sistema, instala-se um barramento em anel ao redor de todos os equipamentos da subestação. Todas as estruturas individuais são ligadas ao barramento o qual, por sua vez, encontra-se ligado a todas as esteiras de aterramento. Facilmente se percebe que o comprimento de qualquer ligação entre a estrutura e o barramento é mais curto. Devido ao elevado número de caminhos em paralelo, a resistência relativa de aterramento do conjunto será menor. Essa multiplicidade de caminhos reduz a possibilidade de falhas devido a um possível rompimento de um dos condutores do anel. Portanto, o sistema de aterramento em anel é bem mais vantajoso, se comparado ao radial.

O terceiro sistema de aterramento denomina-se malha, ou seja, uma rede de cabos que é instalada de forma a cobrir todo ou quase todo o terreno da subestação (Fig. 1.4). Os equipamentos e as estruturas são ligados à malha no ponto mais próximo.

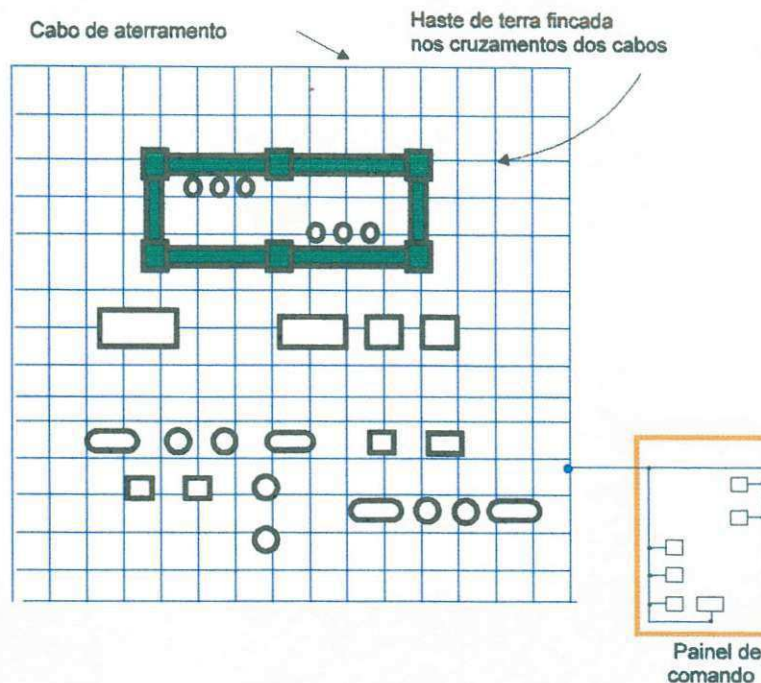


Fig. 1.4 : Sistema de aterramento em malha.

Esse sistema pode apresentar uma maior condutividade, se comparado aos outros, devido ao fato de apresentar um maior número de caminhos em paralelo. Do ponto de vista do controle do gradiente do potencial e eficiência, o sistema tipo malha é o mais adequado. Os sistemas de aterramento radial e em anel têm suas aplicações particulares, sendo usados e tem sido usado em muitas instalações. Do ponto de vista econômico os sistemas radial e em anel são consideravelmente menos onerosos, se comparados ao sistema tipo malha. Entretanto, devido ao fato de os sistemas de malha de aterramento convencionais de maior importância serem formados por elementos retilíneos paralelos ou ortogonais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , o equacionamento se reduzirá a apenas três situações possíveis.



## 2. METODOLOGIA BÁSICA

Um sistema de aterramento conectado ao neutro de um sistema de potência entra em atividade quando ocorre um curto-circuito. Em consequência, o potencial do sistema de aterramento se torna diferente de zero. Esse valor não-nulo de potencial denomina-se *potencial do sistema de aterramento*, também chamado *elevação de potencial de terra* ou simplesmente *GPR*. Concomitante ao GPR, surge uma corrente da superfície dos elementos do sistema de aterramento que se dispersa na terra. Essa corrente dispersa na terra é de frequência industrial mais um componente c.c. de decaimento rápido. Desse modo, a atenção deve ser concentrada na corrente de baixa frequência que se estabelece na terra.

Considerando os valores comuns de resistividade do solo (50 a 1000  $\Omega\text{m}$ ) e de dimensões de sistemas de aterramento típicos (de poucos metros a 200 m), MELIPOULOS (1988) demonstra que a análise c.c. é suficiente na maioria dos estudos práticos de sistemas de aterramento.

Neste trabalho, a análise c.c. será aplicada a sistemas de aterramento. O procedimento de cálculo será desenvolvido passo a passo, começando pelo problema mais simples e estendendo os resultados a casos progressivamente mais complexos.

### 2.1 Fundamentos

A Fig. 2.1 mostra um eletrodo puntiforme, imerso em solo uniforme. Uma esfera tão diminuta não tem, evidentemente, aplicação prática direta, embora seja de grande utilidade na simulação de qualquer eletrodo real.

A esfera, localizada no ponto E do solo, é uma fonte puntiforme de corrente. Dela emana para a terra uma corrente total,  $I$ , que faz surgir um potencial  $V$  num ponto

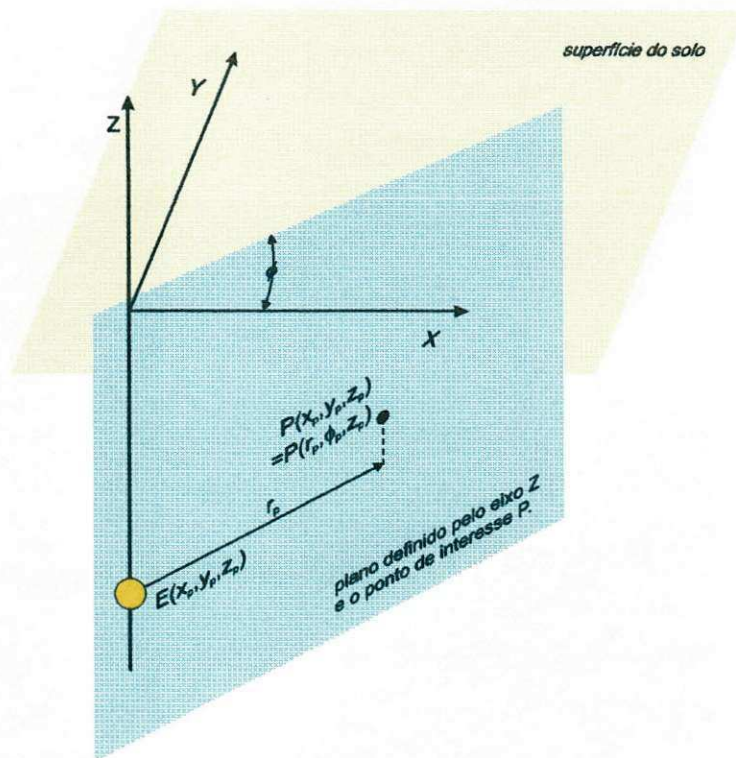


Fig. 2.1 Eletrodo puntiforme em solo uniforme e um ponto em que o potencial é de interesse.

genérico P do solo. Esse potencial  $V$  satisfaz a equação de Laplace:  $\nabla^2 V = 0$ . Nesse caso, é conveniente expressar a equação de Laplace em coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 V(r, \phi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V(r, \phi, z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V(r, \phi, z)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V(r, \phi, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

onde  $r$ ,  $\phi$ ,  $z$  são as coordenadas do ponto P. Por causa da simetria, o potencial é independente da coordenada  $\phi$ , isto é,  $V(r, \phi, z) = V(r, z)$ . Logo a eq. (2.1) se reduz a:

$$\nabla^2 V(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V(r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2)$$

A solução geral desta equação é dada em termos de funções de Bessel, de ordem zero,  $J_0$  (KRAUS & CARVER, 1986):

$$V(r, z) = \frac{\rho I}{4\pi} \int_{k=0}^{\infty} \theta(k) J_0(kr) e^{\pm kz} dk \quad (2.3)$$

onde  $\theta(k)$  é uma função arbitrária da variável de integração  $k$ , determinada pelas condições de contorno. Essas condições de contorno indicam que, na interface dos dois meios (solo e ar), o potencial e a corrente devam ser funções contínuas. O resultado final é que o potencial em um ponto genérico do solo de coordenadas cartesianas  $x, y$  e  $z$  se expressa do seguinte modo:

$$V(x,y,z) = \frac{\rho I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x_e)^2 + (y-y_e)^2 + (z-z_e)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_e)^2 + (y-y_e)^2 + (z+z_e)^2}} \right\} \quad (2.4)$$

O apêndice A apresenta detalhadamente o desenvolvimento da equação 2.4 através da da equação de Laplace, mostrada em 2.1.

A interpretação da equação (2.4) é a seguinte: O potencial em qualquer ponto do solo é idêntico ao potencial produzido por duas fontes pontuais de corrente  $I$  localizadas nos pontos  $(x_e, y_e, z_e)$  e  $(x_e, y_e, -z_e)$  em uma região infinita de resistividade  $\rho$ . Em outras palavras, a interface entre os meios solo e ar tem o efeito de criar uma imagem da fonte puntiforme com relação ao plano de interface. Esta interpretação está ilustrada na figura abaixo.

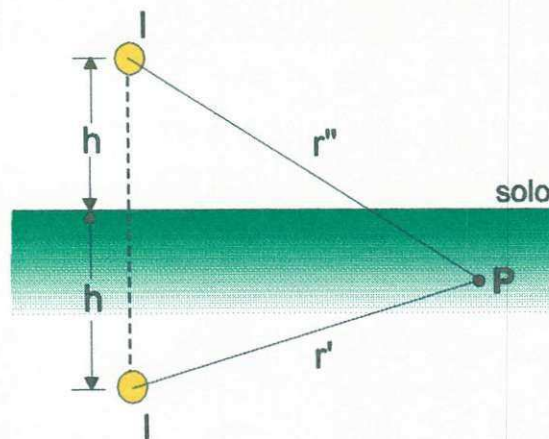


Fig. 2.2: Eletrodo puntiforme em solo homogêneo a profundidade  $h$  e seu eletrodo-imagem.

O resultado deste item, expresso pela equação (2.4) é a base de todo o procedimento de análise numérica de sistemas de aterramento que se desenvolverá a seguir.

## 2.2 Método do somatório

O cálculo do potencial em um ponto  $P$  do solo pode ser efetuado utilizando o método do somatório. A idéia básica é dividir o sistema de aterramento em pequenos segmentos. Cada um deles é substituído hipoteticamente por uma fonte puntiforme de corrente, localizada no seu centro. Em tese, quanto menores forem esses segmentos, maior é a aproximação. Uma parte de um sistema de aterramento genérico é mostrada na Fig. 2.3a, enquanto o modelo do segmento  $i$  é mostrado na Fig. 2.3b. O potencial em um ponto  $P$  do solo, de coordenadas  $(x, y, z)$ , é determinado por superposição dos efeitos de cada um dos  $n$  segmentos em que tenha sido subdividido o sistema de aterramento:

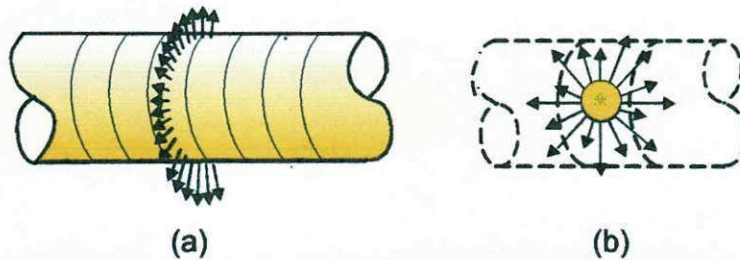


Fig. 2.3: (a) Trecho de um eletrodo subdividido em elementos finitos.  
(b) Modelo matemático do elemento.

$$V(x, y, z) = \frac{\rho}{4\pi} \sum_{j=1}^n I_j \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z-z_j)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z+z_j)^2}} \right\} \quad (2.5)$$

Numa notação mais compacta que a da equação (2.5), a expressão do potencial do ponto  $P$ , de coordenadas retangulares  $x$ ,  $y$  e  $z$ , é a seguinte:

$$V_P = \frac{\rho}{4\pi} \sum_{j=1}^n I_j \{ f_{Pj}^+ + f_{Pj}^- \} \quad (2.6)$$

onde,

$$f_{Pj}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z \pm z_j)^2}} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Para que a equação (2.6) possa ser efetivamente utilizada, é preciso informação a respeito da distribuição de corrente no sistema de aterramento, antes de irradiar para o solo. O modelo densidade-de-corrente-constante pressupõe que a corrente total do sistema de aterramento se distribua uniformemente em toda sua extensão. Ou seja,  $I_j = \frac{I}{n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Portanto, a equação (2.6) particularizada para esse modelo, é:

$$V_P = \frac{\rho I}{4\pi n} \sum_{j=1}^n \{f_{Pj}^+ + f_{Pj}^-\} \quad (2.8)$$

O método de cálculo do potencial baseado nas equações gerais (2.6) e (2.7) é referenciado como *método do somatório*. Esta denominação é uma alusão ao fato de que o princípio do método é o somatório das contribuições dos segmentos em que foi subdividido o sistema de aterramento.

Para pontos na superfície do solo,  $z = 0$ ,

$$f_{Pj}^+ = f_{Pj}^- = f_{Pj} \frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + z_j^2}} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

e,

$$V_P = \frac{\rho I}{2\pi n} \sum_{j=1}^n f_{Pj} \quad (2.9)$$

### Exemplo A

O condutor parabólico apresentado na Fig. 2.4 dispersa 10 A no solo cuja resistividade é 100  $\Omega\text{m}$ . Calcula-se o potencial no ponto da superfície do solo, acima do centro do eletrodo. Emprega-se o modelo densidade-de-corrente-constante e o método do somatório.

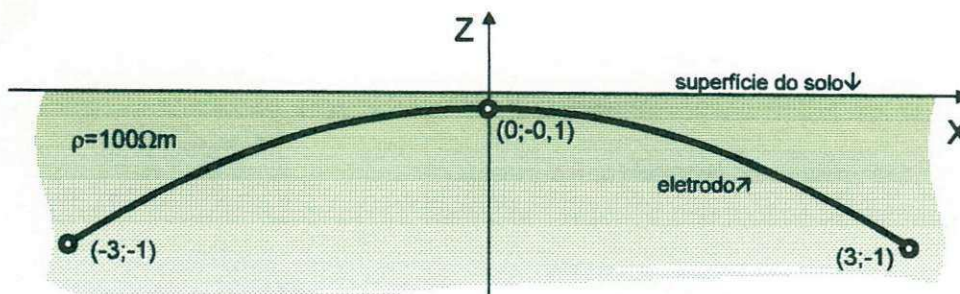


Fig. 2.4: Eletrodo parabólico do exemplo A.

O referencial foi escolhido de modo que o plano XY seja a superfície do solo e o eletrodo esteja por completo no plano XZ. Dessa maneira, o problema é bidimensional, ou seja, a dimensão  $y$  não precisa ser levada em conta. Aqui os pontos estão sendo definidos por  $(x, z)$ .

A equação da parábola a que pertencem os pontos  $(-3; -1)$ ,  $(0; -0,1)$  e  $(3; -1)$ , indicados na figura, é:

$$z = -0,1(x^2 + 1), \quad (2.9)$$

cuja diferencial é

$$dz = -0,2 x dx. \quad (2.10)$$

Um elemento infinitesimal do eletrodo tem comprimento

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}$$

ou,

$$dl = \sqrt{1 + 0,04x^2} dx. \quad (2.11)$$

Para conhecer-se a densidade linear de corrente, é preciso antes determinar-se o comprimento do eletrodo. A parte do eletrodo à esquerda de um ponto  $(x, z)$  tem comprimento:

$$l(x) = \int dl = \int_{-3}^x \sqrt{1 + 0,04x^2} dx$$

ou,

$$I(x) = 0,1x\sqrt{x^2 + 25} + 2,5\ln(x + \sqrt{x^2 + 25}) - 0,85225 \quad (2.12)$$

O comprimento total do eletrodo é determinável através da equação (2.12), fazendo-se  $x=3$ :

$$L = I(3) = 6,343 \text{ m.}$$

Portanto, a densidade linear de corrente, suposta constante, é

$$i = \frac{I}{L} = 1,5766 \text{ A/m.}$$

Para efeito de cálculo, o eletrodo é subdividido em seis trechos de igual comprimento, os quais são modelados por fontes puntuais de corrente. As coordenadas dessas fontes, iguais às dos centros dos trechos respectivos, são:

Tabela 2.1 Referente aos dados do exemplo A.

trecho	$x$	$z$	$r$
1	-2,5377	-0,7440	2,6445
2	-1,5607	-0,3436	1,5981
3	-0,5276	-0,1278	0,5429
4	0,5276	-0,1278	0,5429
5	1,5607	-0,3436	1,5981
6	2,5377	-0,7440	2,6445

Na coluna mais à direita da tabela aparecem as distâncias dos centros dos trechos ao ponto em que se quer calcular o potencial. Esses valores correspondem ao inverso da função  $f_{P_j}^{\pm}$ , ou seja,  $r_j = 1/f_{P_j}^{\pm}$ . A solução é determinada, aplicando-se as equações (2.7) e (2.8) e levando-se em conta a simetria do problema:

$$V_P = \frac{100 \cdot 10}{4\pi \cdot 6} \left( \frac{4}{\sqrt{2,6445}} + \frac{4}{\sqrt{1,5981}} + \frac{4}{\sqrt{0,5429}} \right) = 146,59 \text{ V}$$

### 2.3 Método da integral

No limite, quando o número de subdivisões do sistema de aterramento tende para infinito, o somatório na equação (2.6) transforma-se em integral. Daí o nome desse método. Em outros termos, se, ao invés de dividir-se o eletrodo em segmentos finitos,

forem tomados elementos infinitesimais, cada um deles contribuirá para o potencial num ponto P do solo com:

$$dV_P = \frac{\rho dl}{4\pi} \{f_{PE}^+ + f_{PE}^-\} \quad (2.13)$$

onde  $dl$  é a fração da corrente total que é dispersa no solo pelo elemento infinitesimal.

O eletrodo deve ser definido em termos dos pontos do solo que ele ocupe. Isso pode ser feito por uma equação ou um conjunto de equações. No caso de o eletrodo não ser uma linha fechada, é preciso definir seus pontos extremos ou então, senão, sua origem e seu comprimento.

Supondo-se que seja possível expressar o comprimento de um trecho do eletrodo compreendido entre sua origem e um ponto genérico, em função das coordenadas desse ponto, então, a diferencial dessa função é:

$$dl = \frac{\partial l}{\partial x} dx + \frac{\partial l}{\partial y} dy + \frac{\partial l}{\partial z} dz. \quad (2.14)$$

Além disso, se a densidade linear de corrente dispersa é uma função conhecida:

$$\frac{dl}{dl} = i(x, y, z), \quad (2.15)$$

então a equação (2.7) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$dV_P = \frac{\rho}{4\pi} i(f_{PE}^+ + f_{PE}^-) \left\{ \frac{\partial l}{\partial x} dx + \frac{\partial l}{\partial y} dy + \frac{\partial l}{\partial z} dz \right\}$$

ou,

$$dV_P = \frac{\rho}{4\pi} i(f_{PE}^+ + f_{PE}^-) \left\{ \frac{\partial l}{\partial x} dx + \frac{\partial l}{\partial y} \frac{dy}{dx} dx + \frac{\partial l}{\partial z} \frac{dz}{dx} dx \right\} \quad (2.16)$$

no caso de  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$ .

Para o modelo densidade-de-corrente-constante, o valor da função  $i(x, y, z)$  é constante. O potencial no ponto P é:



$$V_P = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} (f_{PE}^+ + f_{PE}^-) \left( \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial l}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right) dx \right\} \quad (2.17)$$

### Exemplo B

O condutor parabólico da Fig. 2.4 dispersa 10 A no solo, cuja resistividade é 100  $\Omega\text{m}$ . Calcula-se o potencial no ponto da superfície do solo, acima do centro do eletrodo. Emprega-se o modelo densidade-de-corrente-constante e o método da integral.

Esse problema é o mesmo apresentado no exemplo A. Modifica-se apenas o método de solução. A contribuição do elemento infinitesimal do eletrodo em  $(x, z)$  para a definição do potencial no ponto  $(0, 0)$  de interesse, segundo a equação (2.6) e de acordo com a equação (2.7) é:

$$dV_P = \frac{\rho i}{2\pi\sqrt{x^2 + z^2}} dl \quad (2.18)$$

Da combinação das equações (2.9), (2.11) e (2.18) resulta:

$$dV_P = \frac{\rho i}{2\pi} \frac{\sqrt{1+0,04x^2}}{\sqrt{x^2 + 0,01(x^2 + 1)^2}} dx$$

ou

$$V_P = \frac{\rho i}{\pi} \int_{-3}^3 \sqrt{\frac{x^2 + 25}{x^4 + 102x^2 + 1}} dx \quad (2.19)$$

Substituindo-se os valores dos parâmetros e efetuando-se a integração indicada na equação (2.19), encontra-se  $V_P = 207,09 \text{ V}$ .

## 2.4 Comparação dos métodos

A simplicidade do método do somatório é evidente. Contudo, para que as fontes pontuais de corrente possam representar o eletrodo com fidelidade, é preciso que ele seja subdividido em trechos bem pequenos. Para sistemas de aterramento de grandes dimensões, esse número de subdivisões eleva demais o tempo de processamento.

Embora uma comparação expressiva dos métodos só seja possível com sistemas de aterramento de configuração e dimensões realistas, os resultados dos exemplos A e B podem ser usados como uma preliminar. Tomando-se como exato o resultado do método da integral, tem-se a seguinte tabela:

Tabela 2.2 Comparação dos métodos

Número de subdivisões	Erro (%)	Tempo de processamento (p.u.) <sup>1</sup>
6	29,4	1
60	17,1	3
300	0	12

O método da integral, na forma genérica em que foi apresentado no item 2.3, é inconseqüente sob o ponto de vista prático. Dependendo da configuração do eletrodo, pode não ser viável se chegar a uma equação como a equação (2.19). Ou então, essa equação pode ser tão complexa que a integração analítica seja impraticável. Há casos em que o equacionamento só é possível em coordenadas cilíndricas ou esféricas. A falta de sistemática afasta a possibilidade de implementação em computador do método na sua forma genérica.

## 2.5 Método do somatório modificado

A qualidade do método do somatório é melhorada, se o modelo do eletrodo é modificado. Em vez de ser aproximado por esferas puntiformes, podem-se usar segmentos de reta com densidade de corrente constante. A contribuição de cada segmento para o potencial num ponto qualquer pode ser dado por função análoga àquela da equação (2.6). Para encontrar a expressão dessa função, emprega-se o método da integral.

Ao eletrodo retilíneo (Fig. 2.5), cujos extremos são os pontos  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $(x_1, y_1, z_1)$ , pertencem os pontos  $(x, y, z)$  que satisfazem a:

$$\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad (2.20)$$

O comprimento do trecho do eletrodo compreendido entre os pontos  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $(x, y, z)$  é

<sup>1</sup> 1 pu = 2,1 segundos.

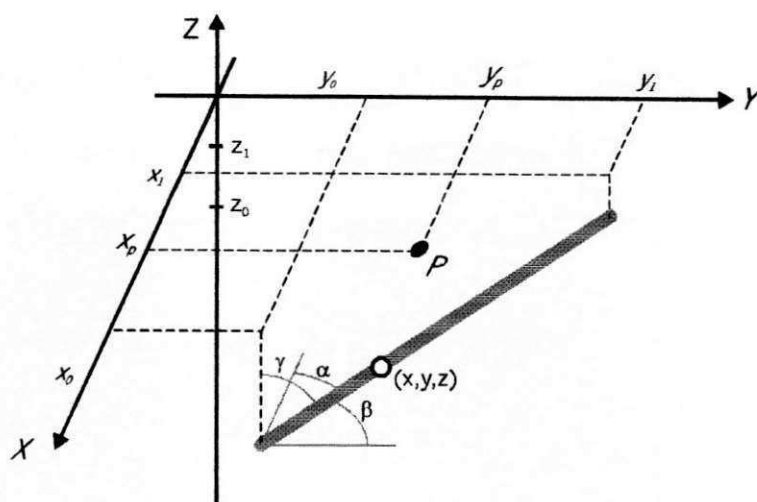


Fig. 2.5 Eletrodo retilíneo.

$$l(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad (2.21)$$

e o comprimento total do eletrodo é:

$$L = l(x_1, y_1, z_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}. \quad (2.22)$$

A equação (2.20) pode ser reescrita como

$$\frac{z - z_0}{\Gamma} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{x - x_0}{A} \quad (2.23)$$

onde

$$A = \cos \alpha = \frac{x_1 - x_0}{L} \quad (2.24a)$$

$$B = \cos \beta = \frac{y_1 - y_0}{L} \quad (2.24b)$$

$$\Gamma = \cos \gamma = \frac{z_1 - z_0}{L} \quad (2.24c)$$

são os cossenos diretores da reta que contém o eletrodo, os quais se relacionam diretamente por:

$$A^2 + B^2 + \Gamma^2 = 1 \quad (2.25)$$

A contribuição do elemento infinitesimal em  $(x, y, z)$  para o potencial no ponto  $(x_p, y_p, 0)$  é:

$$dV_P = \frac{\rho i}{2\pi} \frac{dl}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + z^2}} \quad (2.26)$$

Combinando-se as equações (2.23), (2.25) e (2.26) encontra-se:

$$dV_P = \frac{\rho i}{2\pi} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + 2bl + c^2}} \quad (2.27)$$

onde

$$b = A(x_0 - x_p) + B(y_0 - y_p) + \Gamma z_0 \quad (2.28)$$

$$c = \sqrt{(x_0 - x_p)^2 + (y_0 - y_p)^2 + z_0^2} \quad (2.29)$$

Portanto, o potencial no ponto P é

$$V_P = \frac{\rho i}{2\pi} \int_0^L \frac{dl}{\sqrt{l^2 + 2bl + c^2}}$$

ou,

$$V_P = \frac{\rho i}{2\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{L^2 + 2bL + c^2} + L + b}{b + c} \right) \quad (2.30)$$

### Exemplo C

O condutor parabólico da Fig. 2.4 dispersa 10 A no solo cuja resistividade é 100  $\Omega\text{m}$ . Calcula-se o potencial no ponto da superfície do solo, acima do centro do eletrodo. Emprega-se o método somatório modificado.

Este problema é o mesmo dos apresentados nos exemplos anteriores. Aqui também, altera-se o método de solução.

$$V_P = \frac{\rho i}{2\pi} \sum_{i=1}^6 \Delta V_{P_i}$$

onde,

$$\Delta V_{P_i} = \frac{\rho_i}{2\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{L_i^2 + 2b_i L_i + c_i^2} + L_i + b_i}{b_i + c_i} \right)$$

$$b_i = A_i (x_{0_i} - x_p) + B_i (y_{0_i} - y_p) + \Gamma_i z_{0_i}$$

$$c_i = \sqrt{(x_{0_i} - x_p)^2 + (y_{0_i} - y_p)^2 + z_{0_i}^2}$$

Dividindo-se o eletrodo em seis partes iguais, como foi feito no exemplo A, tem-se:

$$L_i = \frac{L}{6} = \frac{6,343}{6} = 1,057 \text{ m}$$

A Tabela 2.3 mostra os valores intermediários obtidos ao longo da resolução do problema:

Tabela 2.3 Valores obtidos pela resolução do problema do exemplo C.

trecho	$x_{0_i}$	$z_{0_i}$	$A_i$	$\Gamma_i$	$b_i$	$c_i$	$(\Delta V_P)_i$
1	-3,0000	-1,0000	0,8915	0,4509	-3,1255	3,1623	0,4055
2	-2,0575	-0,5233	0,9536	0,2963	-2,1171	2,1230	0,6877
3	-1,0494	-0,2101	0,9926	0,1042	-1,0635	1,0702	2,8294
4	0,0000	-0,1000	0,9926	-0,1042	0,0104	0,1000	2,9642
5	1,0494	-0,2101	0,9536	-0,2963	1,0629	1,0702	0,6879
6	2,0575	-0,5233	0,8915	-0,4509	2,0703	2,1230	0,4055
						$V_p =$	200,2342

A influência do modelo de eletrodo é evidente. Comparando-se o resultado acima, observa-se que está próximo do valor encontrado com o método da integral. O número de subdivisões aqui é o mesmo utilizado no exemplo A, mas o resultado é muito melhor. Embora o número de subdivisões seja o mesmo, o esforço computacional aqui é maior.

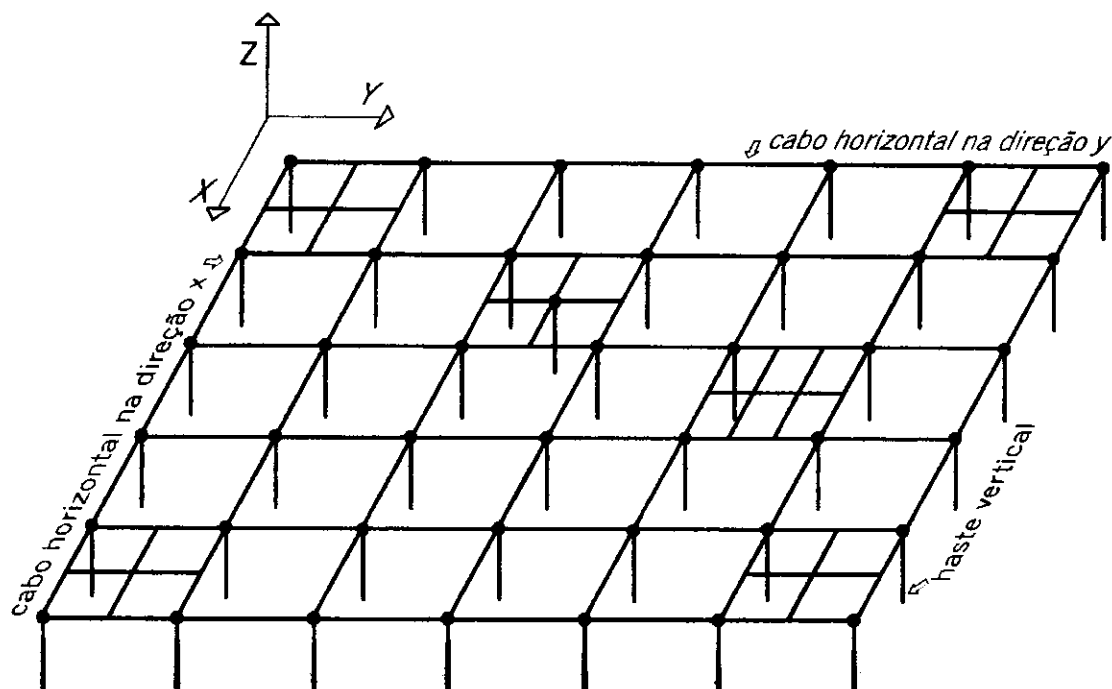


Fig. 2.6 Malha de aterramento típica.

## 2.6 Sistema de aterramento formado de elementos paralelos ou ortogonais

Os sistemas de aterramento convencionais de maior importância são formados de *elementos*<sup>2</sup> retilíneos, paralelos ou ortogonais, conforme ilustração da Fig. (2.6). Sendo assim, é interessante particularizar a equação geral (2.30), para que essa característica seja explorada.

Em termos do que se desenvolveu no item 2.5, pode-se dizer que agora o interesse estará restrito a elementos retilíneos em que um dos cossenos diretores é unitário e os outros são nulos. Há três situações possíveis, as quais serão analisadas a seguir.

### a) Elementos horizontais

Um elemento retilíneo horizontal de comprimento  $2L$  e profundidade  $h$  é mostrado na Fig. 2.7a. O elemento está na direção  $Y$ . A contribuição de uma parte infinitesimal desse elemento em  $(x_c, y_c, -h)$  para o potencial em  $(x_p, y_p, 0)$  é:

$$dV_p = \frac{\rho i}{2\pi} \frac{dy}{\sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + h^2}}$$

<sup>2</sup> Condutores que formam as malhas de aterramento. Podem ser os cabos nas direções  $x$  e  $y$  ou as hastes verticais.

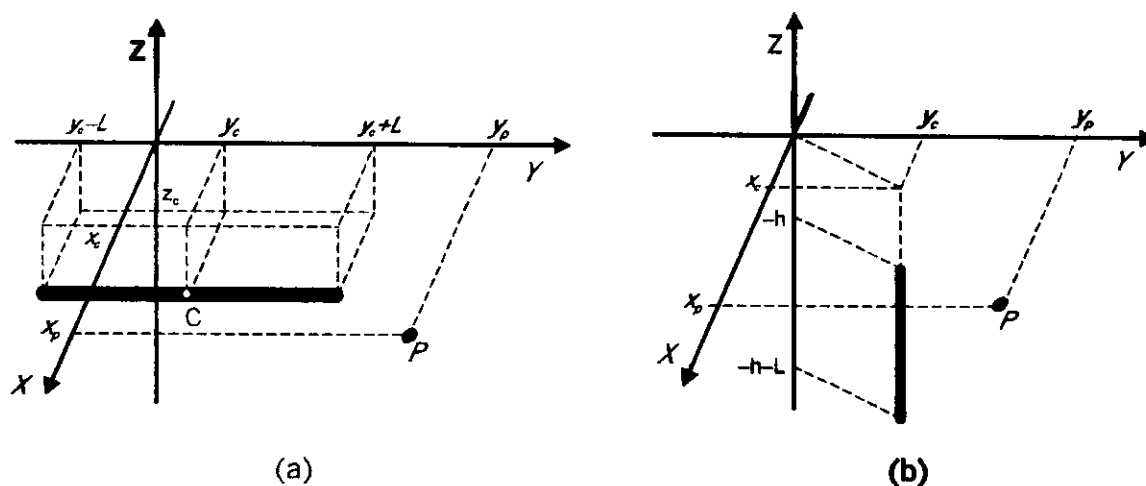


Fig. 2.7: Elementos retilíneos. (a) Horizontal na direção  $y$ ; (b) Vertical.

De modo que o potencial em P é

$$V_P = \frac{\rho i}{2\pi} \int_{y_c-L}^{y_c+L} \frac{dy}{\sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + h^2}},$$

ou seja,

$$V_{P(y)} = \frac{\rho i}{2\pi} \ln \left( \frac{y_c - y_p + L + \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p + L)^2 + h^2}}{y_c - y_p - L + \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p - L)^2 + h^2}} \right). \quad (2.31)$$

Uma equação análoga à equação (2.31) pode ser encontrada para elementos retilíneos horizontais na direção  $X$ . Isto é,

$$V_{P(x)} = \frac{\rho i}{2\pi} \ln \left( \frac{x_c - x_p + L + \sqrt{(x_c - x_p + L)^2 + (y_c - y_p)^2 + h^2}}{x_c - x_p - L + \sqrt{(x_c - x_p - L)^2 + (y_c - y_p)^2 + h^2}} \right). \quad (2.32)$$

## b) Elementos verticais

Um elemento retilíneo vertical de comprimento  $L$  e profundidade  $h$  é mostrado na Fig. 2.7b. O elemento está na direção  $Z$ . A contribuição de uma parte infinitesimal desse elemento em  $(x_c, y_c, -h)$  para o potencial em  $(x_p, y_p, 0)$  é:

$$dV_P = \frac{\rho i}{2\pi} \frac{dz}{\sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + z^2}}$$

Desse modo o potencial em  $P$  é :

$$V_P = \frac{\rho i}{2\pi} \int_{-L-h}^{-h} \frac{dz}{\sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + z^2}}$$

ou seja,

$$V_{P(\omega)} = \frac{\rho i}{2\pi} \ln \left( \frac{-h + \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + h^2}}{-L-h + \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + (L+h)^2}} \right). \quad (2.33)$$

## 2.7 Método do somatório modificado aplicado à malha de aterramento.

As expressões obtidas no item 2.6 compõem o coração do método do somatório modificado, em sua versão específica para sistemas de aterramento, formados de elementos paralelos ou ortogonais. Isso cobre as configurações usuais de malhas de aterramento.

O algoritmo para levantamento do potencial na superfície do solo é simples. Em linhas gerais devem ser cumpridas as seguintes etapas:

1. Início.
2. Entrar com os dados gerais: resistividade do solo, corrente total de defeito e profundidade da malha.
3. Definir a área a ser mapeada: ponto inicial, ponto final e número de pontos onde o potencial deve ser calculado.
4. Entrar com os dados dos elementos da malha de aterramento: tipo (horizontal na direção  $X$ , horizontal na direção  $Y$  ou vertical), posição e comprimento.
5. Calcular o comprimento total de condutores da malha e a densidade linear de corrente.
6. Fazer os seguintes cálculos para cada ponto da região de mapeamento:



- calcular a contribuição de cada elemento, usando as equações (2.31), (2.32) ou (2.33), dependendo do tipo do elemento;
- calcular o potencial do ponto, somando a contribuição de todos os elementos.

7. Pare.

8. Fim.

### 3. MÉTODOS BASEADOS NO MODELO DO POTENCIAL CONSTANTE

Os métodos de cálculo do potencial na superfície do solo, apresentados no capítulo anterior, consideram a densidade de corrente constante em todos os eletrodos da malha de aterramento. De fato, não é exatamente isso que acontece. Segundo DAWALIBI & SOUTHEY (1994) e DAWALIBI & MUKHEDKAR (1979), “ a distribuição de corrente elétrica é mais ou menos uniforme ao longo dos eletrodos, exceto nos finais ou em cruzamentos ”. o que foi facilmente constatado e será mostrado nesse capítulo.

Como foi visto no capítulo 1 , a maioria dos métodos usuais para o cálculo do potencial considera constante a densidade de corrente  $J$ , na superfície dos condutores. Sabe-se que o valor do campo elétrico  $E$ , no extremo do condutor, é muito diferente do valor do entremeio. Então, não se justifica o uso de uma densidade de corrente constante em toda a extensão do eletrodo, já que:  $E = \rho J$ , onde  $\rho$  é a resistividade do solo considerada constante.

Procura-se , portanto, um procedimento de cálculo do potencial na superfície do solo, com base numa distribuição não-uniforme de corrente. Segundo (SVERAK, 1989), “ a densidade de corrente elétrica não pode ser igual para diferentes pontos da superfície do eletrodo ”. Por isso, deve-se considerar o modelo potencial-constante, que será demonstrado neste capítulo.

### 3.1 Método matricial

Considera-se um eletrodo de um sistema de aterramento subdividido em um número finito de elementos, como ilustra a Fig. 3.1, suponha-se que cada elemento infinitesimal é substituído por uma fonte puntual de corrente localizada em seu centro.

O potencial na superfície do elemento  $i$  é  $V_i$ . Esse potencial é influenciado pelas correntes de todos os  $n$  elementos  $I_j$  conforme expressa a equação( 3.1) abaixo.

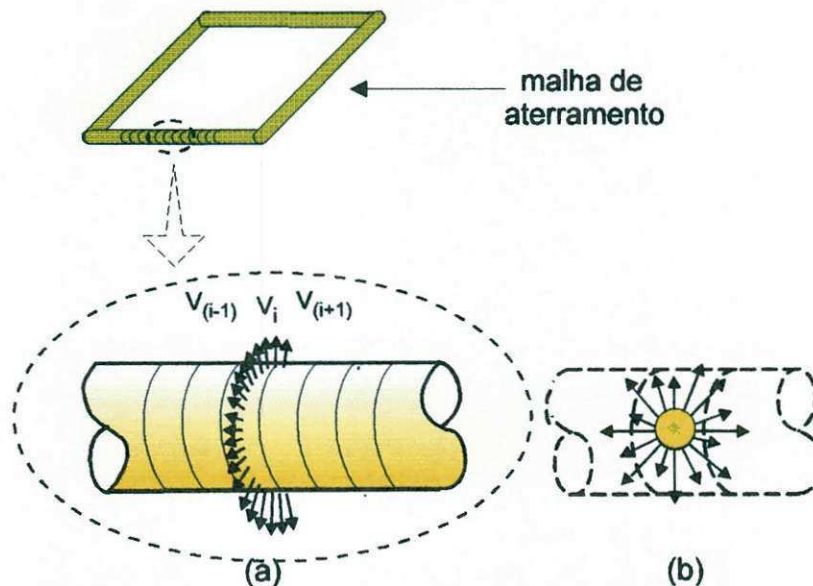


Fig. 3.1 Malha simples de aterramento. (a) Trecho da malha subdividido em  $n$  elementos finitos. (b) Modelo matemático.

$$V_i = \sum_{j=1}^n \frac{\rho I_j}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x_{si} - x_j)^2 + (y_{si} - y_j)^2 + (z_{si} - z_j)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_{si} - x_j)^2 + (y_{si} - y_j)^2 + (z_{si} + z_j)^2}} \right\} \quad (3.1)$$

ou

$$V_i = \frac{\rho}{4\pi} \sum_{j=1}^n I_j \{ f_{s_i j^+} + f_{s_i j^-} \} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

onde

$$f_{s_i j^\pm} = \frac{1}{\sqrt{(x_{s_i} - x_j)^2 + (y_{s_i} - y_j)^2 + (z_{s_i} \pm z_j)^2}}$$

Para cada um dos  $n$  elementos em que se tenha subdividido o eletrodo, pode-se escrever uma equação baseada em (3.2). Como os sistemas de aterramento são constituídos de cobre, material de alta condutividade, todos os  $n$  elementos do condutor estão no mesmo potencial, conhecido como elevação de potencial de terra ou simplesmente GPR<sup>1</sup>. Desta forma as  $n$  equações (3.2) para os segmentos do eletrodo podem ser igualadas:  $V_1 = V_2 = \dots = V_n = V$

$$\frac{4\pi V}{\rho} [\mathbf{1}] = [F][I] \quad (3.3)$$

onde

$$[\mathbf{1}] = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad (3.4)$$

$$[I] = [I_1 \ I_2 \ I_3 \ \dots \ I_n]^T \quad (3.5)$$

$$[F] = [F_{ij}] \quad (3.6)$$

Conhecido o valor da GPR, as correntes dos vários segmentos podem ser determinadas pela equação (3.3)

$$[I] = \frac{4\pi V}{\rho} [F]^{-1} [\mathbf{1}] \quad (3.7)$$

A corrente total  $I_T$ , dispersada no solo através do eletrodo, será:

$$I_T = \sum_{j=1}^n I_j = [\mathbf{1}]^T [I] \quad (3.8)$$

Pelo fato de se utilizar a *matriz dos fatores de distribuição de potencial*  $[F]$ , o método apresentado é conhecido como *método matricial*. Esse método é resultante do método do somatório com o modelo potencial-constante. Da combinação das equações (3.7) e (3.8), é estabelecida uma relação direta entre a corrente total  $I_T$  e a tensão  $V$ :

<sup>1</sup> Do inglês, Ground Potential Rise.

$$V = \frac{\rho}{4\pi} \{ [\mathbf{1}]^T [F]^{-1} [\mathbf{1}] \}^{-1} I_T \quad (3.9)$$

As equações (3.1), (3.7) e (3.9) representam a base do método matricial, cujo algoritmo para se encontrar o potencial na superfície do solo é :

1. Início.
2. Entrada dos dados gerais :
  - a) resistividade do solo, diâmetro do eletrodo, comprimento do eletrodo, profundidade da malha, corrente de defeito;
  - b) área a ser mapeada: ponto inicial, ponto final, número de pontos onde o potencial na superfície do solo deve ser calculado;
  - c) número de eletrodos e número de subdivisões;
  - d) dados dos elementos da malha de aterramento: tipo ( horizontal na direção X, horizontal na direção Y, ou vertical ), coordenadas de centro.
3. Cálculo:
  - a) Cálculo do potencial pela utilização da equação (3.9) com o uso da corrente de defeito e das coordenadas de centro de cada condutor;
  - b) Cálculo do vetor de corrente  $[ I ]$  em cada eletrodo pela equação (3.7);
  - c) Cálculo do potencial na superfície do solo pela equação (3.1);
  - d) Repetição dos passos a, b, e c para todos os segmentos da malha;
4. Saída dos resultados:
  - a) arquivo de saída das correntes em cada segmento do eletrodo;
  - b) arquivo de saída do potencial na região de mapeamento;
  - c) arquivo de saída do potencial longitudinal, transversal e central da malha.
5. Pare.
6. Fim.

### Exemplo D

O condutor retilíneo de 3m de comprimento dispersa 2 A no solo, cuja resistividade é de  $100 \Omega\text{m}$ , conforme Fig. 3.2. Calcula-se o potencial no ponto da superfície do solo acima do centro do eletrodo. Emprega-se o método matricial.

O referencial é escolhido de modo que o plano  $XY$  seja a superfície do solo e o eletrodo esteja por completo no plano  $XZ$ . Dessa maneira o problema é bidimensional, ou seja, a dimensão  $y$  não precisa ser levada em conta. Aqui os pontos estão sendo definidos por  $(x,z)$ .

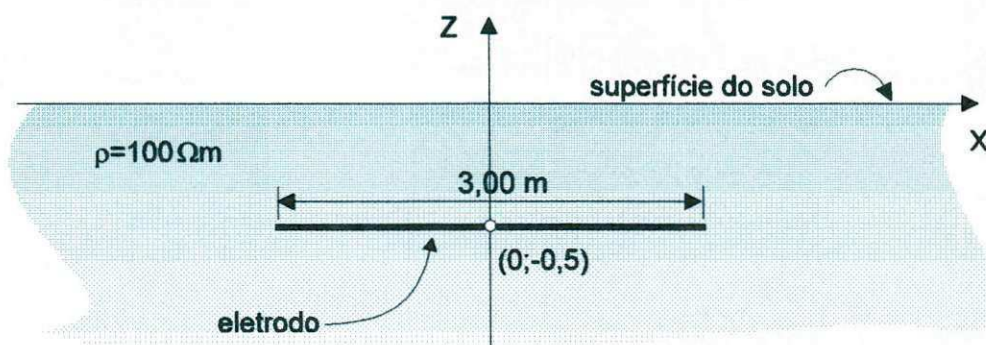


Fig. 3.2 Eletrodo retilíneo do exemplo D

A solução do exemplo D é determinada, aplicando-se um programa de computador desenvolvido em linguagem Fortran 77<sup>2</sup>, com base no método matricial e seguindo o algoritmo descrito anteriormente.

Considerando-se 300 subdivisões no eletrodo da Fig. 3.2, encontra-se um valor para o potencial na superfície do solo, acima do centro do eletrodo,  $V_p = 38,5$  volts, satisfatório, comparado-se ao resultado do método da integral,  $V_p = 38,6$  volts, com uma densidade de corrente constante. O esforço computacional necessário para simulação desse exemplo com 300 subdivisões foi de 53,1 pu.

A densidade de corrente ao longo do comprimento do condutor é mostrada na Fig. 3.3.

<sup>2</sup> Power Station® Fortran 4.0 da Microsoft<sup>MR</sup>.

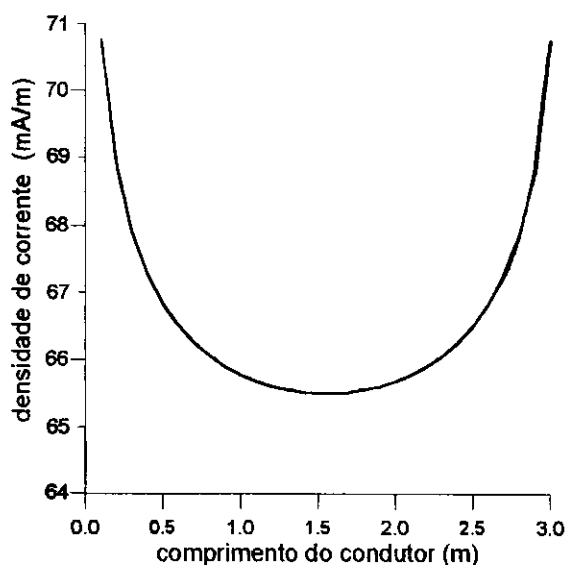


Fig. 3.3 : Densidade de corrente ao longo do condutor retilíneo do exercício 3.1

Uma análise preliminar do exemplo D mostra que o resultado obtido para o potencial na superfície do solo, considerando-se uma distribuição não-uniforme de corrente ao longo do condutor, não demandou em um esforço adicional que colocasse em questão sua aplicação no cálculo do potencial. Dessa forma, pode-se considerar, de agora em diante, o cálculo do potencial na superfície do solo, baseado na distribuição não-uniforme de corrente.

### 3.2 Método matricial modificado com segmentação uniforme

O método matricial é bastante simples. Porém, “torna-se impraticável sua aplicação à medida que o número de subdivisões do condutor aumenta”, (MELIOPOULOS & JOY, 1981), (MELIOPOULOS, A. P. S, 1988) e (SVERAK, 1989). Esse fato foi comprovado em simulações e será mostrado posteriormente. Cada vez que o condutor é subdividido, a matriz dos fatores de distribuição de potencial  $[F]$  torna-se maior. Tem-se então a inversão de matrizes de ordem mais elevada, acarretando a um maior esforço computacional.

De acordo com DAWALIBI & SOUTHEY (1994) e DAWALIBI & MUKHEDKAR (1979) e ainda conforme a distribuição da corrente na Fig. 3.3, observa-se que, ao se aproximar dos extremos do condutor, a densidade de corrente é bastante variada, fato esse que não ocorre com tanta intensidade no entremeio do condutor. Como a densidade de corrente no entremeio apresenta-se bem mais uniforme, comparada aos extremos, podem-se, portanto, considerar segmentos de maior comprimento com densidade de corrente constante em cada um. Dessa forma, a curva da distribuição de

corrente da Fig. 3.3 pode ser representada por uma *função-escada*<sup>3</sup>. Essa premissa leva ao desenvolvimento do método matricial modificado.

De início, o eletrodo é dividido em um número finito de segmentos. Para demonstração das equações do método matricial modificado, fez-se o estudo com um comprimento igual para todos os segmentos do condutor. Posteriormente será dada ênfase à segmentação não-uniforme, ou seja, comprimentos diferenciados para os segmentos do condutor. A densidade de corrente, ao longo de cada segmento do eletrodo, é considerada constante, mas desconhecida *a priori*.

Equações para o potencial na superfície do solo são desenvolvidas, relacionando-se o potencial em um ponto  $P(x, y, z)$  com a corrente total que flui no segmento 1, conforme mostra a Fig. 3.4.

Utiliza-se o método matricial para encontrar os valores desconhecidos da corrente elétrica. As matrizes envolvidas serão proporcionais ao número de segmentos do condutor. Quanto mais subdividido for o condutor em segmentos, mais a função-escada se aproxima da curva da densidade real de corrente. Entretanto, um maior esforço computacional é exigido.

Uma aplicação apropriada desse método requer um compromisso entre precisão e eficiência, ou seja, se o eletrodo tiver poucas subdivisões, os resultados para os potenciais na superfície do solo não retratam a realidade, visto que a função escada não se aproxima de uma real distribuição de corrente ao longo do eletrodo. Caso o condutor seja segmentado em um elevado número de subdivisões, a função-escada se aproximará bastante da distribuição não-uniforme de corrente. Contudo, o esforço computacional é bastante significativo, não compensando, às vezes, tal procedimento. Esse método recebe o nome de matricial modificado, porque envolve a integração ao longo do segmento, de distribuição uniforme de corrente, com a aplicação do método matricial através do somatório das contribuições dos potenciais *dos*  $n$  segmentos do condutor.

A aplicação da combinação dos métodos integral e matricial requer o desenvolvimento de relações entre a corrente elétrica total que flui na superfície de comprimento finito do eletrodo e o potencial em um ponto genérico do solo.

Consideram-se inicialmente dois segmentos de eletrodos de comprimentos  $2L_1$  e  $2L_2$  conforme a Fig. 3.4. As coordenadas dos centros dos segmentos dos condutores são  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$ . Um fluxo de corrente uniforme sai do segmento do eletrodo 1 para o solo.

<sup>3</sup> Representação da curva densidade de corrente através de segmentos de retas.



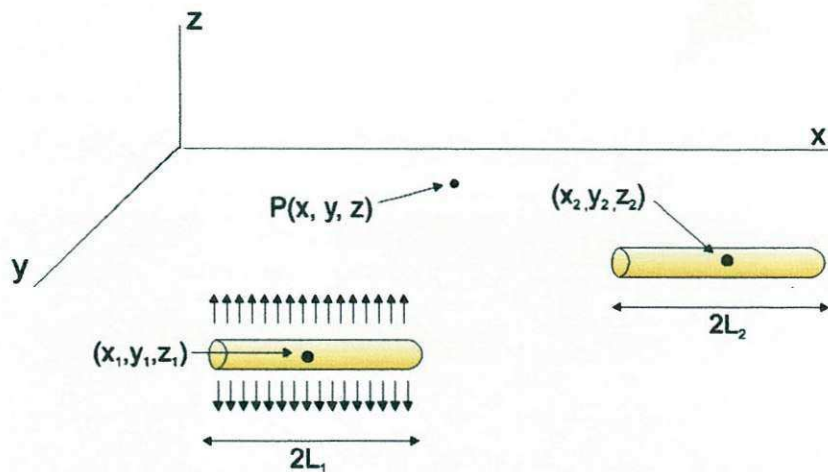


Fig. 3.4 - Segmentos de eletrodos de comprimentos  $2l_1$  e  $2l_2$ .  
Distribuição uniforme de corrente no segmento 1.

De acordo com a Fig. 3.4, são levantadas as seguintes equações para o potencial em um ponto na superfície do solo:

- equação do potencial em um ponto genérico no solo  $P(x, y, z)$ , devido ao fluxo de corrente elétrica  $I_1$  no segmento de condutor 1;
- equação do potencial “transferido” para o segmento do condutor 2, devido ao fluxo de corrente elétrica  $I_1$  no segmento de condutor 1;
- equação do potencial do segmento do condutor 1, devido ao fluxo próprio de corrente elétrica  $I_1$ .

O potencial no ponto  $P(x, y, z)$ , o potencial “transferido” e o potencial de um segmento próprio, são proporcionais à corrente total que flui no segmento do condutor, isto é :

$$V = R_t I, \quad (3.10)$$

onde  $I$  é a corrente elétrica total que flui do segmento do condutor 1 para o solo e  $R_t$  é função da geometria do sistema e da condutividade do solo.  $R_t$  tem dimensão de resistência.

Por causa do grande número de configurações espaciais que os eletrodos de um sistema de aterramento podem assumir, tomam-se apenas três disposições geométricas ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Com isso apenas doze equações para  $VDF$  precisam ser definidas.

O fator de distribuição de potencial  $VDF$  nada mais é do que: a relação entre dois segmentos; relação entre um segmento e um ponto.

Na tabela 3.1 estão especificados os possíveis casos para a construção das equações de  $VDF$ :

Tabela 3.1 Equações para os fatores de distribuição de potencial  $VDF$

$VDF$ entre “segmento de eletrodos” e “um ponto”		
$VDF_x$	segmento na direção $X$	e um ponto genérico
$VDF_y$	segmento na direção $Y$	e um ponto genérico
$VDF_z$	segmento na direção $Z$	e um ponto genérico
$VDF$ entre dois segmentos de eletrodos		
$VDF_{x-x}$	segmento na direção $X$	segmento na direção $X$
$VDF_{y-y}$	segmento na direção $Y$	segmento na direção $Y$
$VDF_{z-z}$	segmento na direção $Z$	segmento na direção $Z$
$VDF_{x-y}$	segmento na direção $X$	segmento na direção $Y$
$VDF_{x-z}$	segmento na direção $X$	segmento na direção $Z$
$VDF_{y-z}$	segmento na direção $Y$	segmento na direção $Z$
$VDF$ próprio		
$VDF_{xx}$	segmento na direção $X$	
$VDF_{yy}$	segmento na direção $Y$	
$VDF_{zz}$	segmento na direção $Z$	

a)  $VDF$  entre um segmento na direção  $X$  e um ponto genérico

O objetivo será o cálculo do potencial em um ponto genérico  $P(x, y, z)$  devido ao fluxo de corrente  $I_1$  do segmento de eletrodo 1 localizado em  $(x_1, y_1, z_1)$ , conforme Fig. 3.5, esquecendo a presença de todos os outros segmentos que porventura, venham a existir. A corrente  $I_1$  é considerada uniformemente distribuída na superfície do segmento do eletrodo 1. A corrente elétrica em um segmento infinitesimal  $dx_s$  do condutor é  $I_1 dx_s / 2L_1$ . A contribuição dessa corrente para o potencial em um ponto  $P(x, y, z)$  é dada pela equação (3.11) e apresentado em MELIPOULOS (1988):

$$dV(x, y, z) = \frac{I_1 \rho dx_s}{8L_1 \pi} \left\{ \left[ (x - x_s)^2 + A^2 \right]^{-0.5} + \left[ (x - x_s)^2 + A_+^2 \right]^{-0.5} \right\}, \quad (3.11)$$

onde,

$$A_{\pm}^2 = (y - y_1)^2 + (z \pm z_1)^2. \quad (3.12)$$

A Fig. 3.5 mostra o segmento  $dx_s$  de densidade de corrente constante e um ponto de interesse  $P(x, y, z)$ .

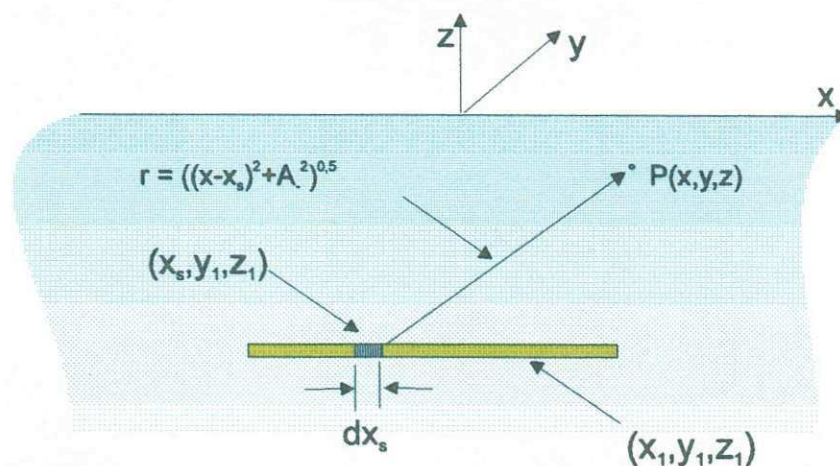


Fig. 3.5 Segmento de um eletrodo representado por fonte linear de densidade de corrente constante.

O potencial no ponto  $P(x, y, z)$  é resultante da contribuição de todas as fontes de corrente de todos os segmentos que constituem o eletrodo.

$$V(x, y, z) = \int dV(x, y, z) \quad (3.13)$$

$$V(x, y, z) = \frac{I \cdot \rho}{8L\pi} \int_{x_2=x_1-L}^{x_1+L} \left\{ \left[ (x-x_s)^2 + A_-^2 \right]^{-0,5} + \left[ (x-x_s)^2 + A_+^2 \right]^{-0,5} \right\} dx. \quad (3.14)$$

Resolve-se a integral acima com a ajuda da seguinte integral indefinida:

$$\int (t^2 \pm u^2)^{-0,5} \cdot dt = \ln \left[ t + (t^2 \pm u^2)^{0,5} \right] \quad (3.15)$$

O resultado para o potencial no ponto  $P(x, y, z)$  de interesse será:

$$V(x, y, z) = \frac{I \cdot \rho}{8L\pi} \left[ F_1(x - x_1 + L, A_-) - F_1(x - x_1 - L, A_-) + F_1(x - x_1 + L, A_+) - F_1(x - x_1 - L, A_+) \right], \quad (3.16)$$

onde

$$F_1(t, u) = \ln \left[ t + (t^2 + u^2)^{0.5} \right]. \quad (3.17)$$

O fator de distribuição de potencial  $VDF$  entre um segmento de condutor e um ponto  $(x, y, z)$  é dado por :

$$VDF = \frac{I \cdot \rho}{8L\pi} \left[ F_1(x - x_1 + L, A_-) - F_1(x - x_1 - L, A_-) \right. \\ \left. + F_1(x - x_1 + L, A_+) - F_1(x - x_1 - L, A_+) \right] \quad (3.18)$$

b)  $VDF$  entre dois segmentos de eletrodos na direção do eixo  $x$

O objetivo é calcular a expressão para o  $VDF$ , devido à presença de dois segmentos de eletrodos na mesma direção. Considera-se a configuração de dois segmentos de eletrodos, conforme a Fig. 3.4. As coordenadas dos centros dos segmentos dos eletrodos são  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$ . Os comprimentos dos segmentos são consideradas  $2L_1$  e  $2L_2$  e a corrente elétrica total que flui pelo segmento do eletrodo 1 para o solo é  $I_1$ . Um potencial “transferido” surge no segmento do eletrodo 2, devido à presença de campos magnéticos no solo, originados pela corrente  $I_1$  que flui do segmento do eletrodo 1 para o solo.

O problema se resume em encontrar uma equação  $VDF$  para o potencial médio no centro do segmento do condutor 2, devido à contribuição de todos os pontos ao longo do comprimento do eletrodo 2.

Em princípio, admite-se que o eletrodo 2 não existe. As coordenadas do ponto onde se deseja encontrar o potencial são  $(x, y_2, z_2)$ , onde  $x$  varia no intervalo

$$x_2 - L_2 \leq x \leq x_2 + L_2 .$$

O potencial é obtido pela seguinte equação, ( MELIOPOULOS, 1988):

$$V_2(x, y_2, z_2) = \frac{I_1 \cdot \rho}{8L_1\pi} \left[ F_1(x - x_1 + L_1, B_-) - F_1(x - x_1 - L_1, B_-) \right. \\ \left. + F_1(x - x_1 + L_1, B_+) - F_1(x - x_1 - L_1, B_+) \right] \quad (3.19)$$

onde

$$B_{\pm} = \left[ (y_2 - y_1)^2 + (z_2 \pm z_1)^2 \right]^{0.5} \quad (3.20)$$

O potencial médio no centro do segmento do eletrodo 2 é definido pela seguinte expressão:

$$V_2 = \frac{1}{2L_2} \int_{x=x_2-L_2}^{x_2+L_2} V_2(x, y_2, z_2) \cdot dx, \quad (3.21)$$

Resolvendo-se a equação 3.21 com a ajuda da integral indefinida,

$$\int F_1(t, u) dt = t \cdot \ln \left[ t + (t^2 + u^2)^{0.5} \right] - (t^2 + u^2)^{0.5}, \quad (3.22)$$

obtém-se a seguinte expressão final para  $VDF$ :

$$\begin{aligned} VDF = \frac{\rho}{16 L_1 L_2 \pi} & [F_2(x_2 - x_1 + L_1 + L_2, B_-) + F_2(x_2 - x_1 + L_1 + L_2, B_+) \\ & - F_2(x_2 - x_1 + L_1 - L_2, B_-) - F_2(x_2 - x_1 + L_1 - L_2, B_+) \\ & - F_2(x_2 - x_1 - L_1 + L_2, B_-) - F_2(x_2 - x_1 - L_1 + L_2, B_+) \\ & + F_2(x_2 - x_1 - L_1 - L_2, B_-) + F_2(x_2 - x_1 - L_1 - L_2, B_+)] \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde

$$F_2(t, u) = t \cdot \ln \left[ t + (t^2 + u^2)^{0.5} \right] - (t^2 + u^2)^{0.5} \quad (3.24)$$

c)  $VDF$  entre um segmento na direção  $x$  e outro segmento na direção do eixo  $y$

Considera-se o segmento de eletrodo na direção  $x$  de comprimento  $2L_1$  centrado nas coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$ . Da mesma forma, o segmento na direção  $y$  tem comprimento  $2L_2$  e seu centro na coordenadas  $(x_2, y_2, z_2)$ . Uma corrente  $I_1$  percorre o segmento 1. O objetivo é calcular o potencial “transferido” para o segmento 2, devido à circulação de corrente do segmento 1. A Fig. 3.6 mostra a configuração dos dois segmentos de eletrodos nas suas respectivas direções.

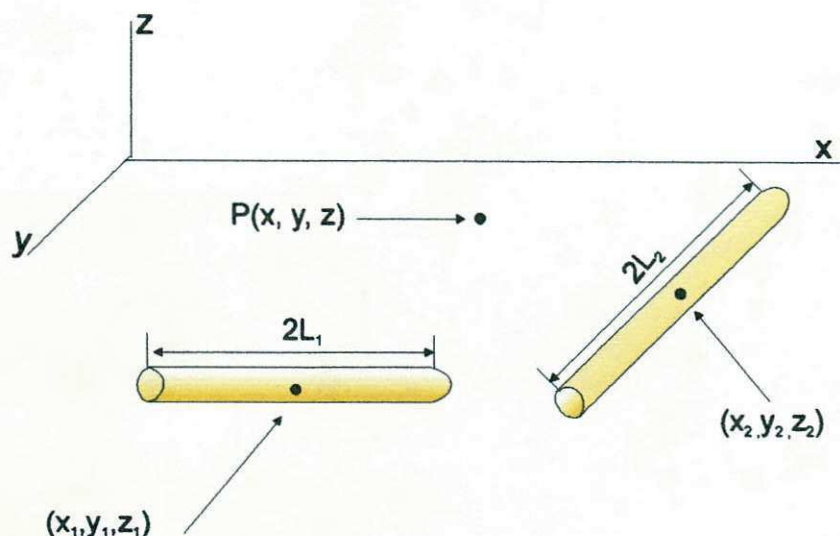


Fig. 3.6 Segmentos de eletrodos de comprimentos  $2l_1$  e  $2l_2$  nas direções das coordenadas  $x$  e  $y$  respectivamente.

O problema se resume em encontrar uma equação *VDF* para o potencial médio no centro do segmento do eletrodo 2, devido à contribuição de todos os pontos ao longo do comprimento do mesmo segmento de eletrodo 2. As coordenadas relativas ao centro do eletrodo 2 são  $(x_2, y, z_2)$ , onde  $y$  varia no intervalo,  $y_2 - L_2 \leq y \leq y_2 + L_2$ .

O potencial no ponto  $(x_2, y, z_2)$ , devido à corrente do segmento de eletrodo na direção  $x$ , resulta da contribuição de todas as fontes de correntes infinitesimais que constituem o segmento 1. Então:

$$V_2(x, y, z) = \int dV(x, y, z) \quad (3.25)$$

$$V_2 = \frac{1}{2L_2} \int_{y=y_2-L_2}^{y_2+L_2} V_2(x_2, y, z_2) \cdot dy, \quad (3.26)$$

logo a integral (3.26) é resolvida com auxílio da seguinte integral indefinida:

$$F_3(t, u, v) = \int \ln[t + (t^2 + u^2 + v^2)^{0,5}] du \quad (3.27)$$

A expressão final para *VDF* é :

$$\begin{aligned}
VDF = \frac{I_1 \rho}{16 L_1 L_2 \pi} & \left[ F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 - z_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 - z_1) \right. \\
& + F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 + z_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 + z_1) \\
& - F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 - z_1) + F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 - z_1) \\
& \left. - F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 + z_1) + F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 + z_1) \right]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde

$$\begin{aligned}
F_3(t, u, v) = -u + u \operatorname{Ln} \left[ t + (t^2 + u^2 + v^2)^{0,5} \right] + t \operatorname{Ln} \left[ u + (t^2 + u^2 + v^2)^{0,5} \right] \\
+ 2v \tan^{-1} \left[ \frac{t + u + (t^2 + u^2 + v^2)^{0,5}}{v} \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

d) VDF próprio de um segmento de eletrodo na direção x

O cálculo dos *VDF* próprios requer uma consideração a respeito do raio do segmento do eletrodo em estudo.

O segmento de eletrodo é modelado como sendo uma fonte de corrente linear localizada sobre o eixo do eletrodo. Adota-se uma densidade de corrente constante ao longo da fonte linear de corrente. Então o potencial do segmento do eletrodo é calculado pelo potencial médio da superfície cilíndrica do segmento do eletrodo. Devido ao fato de o comprimento do eletrodo ser muito maior do que o raio, as duas superfícies finais do segmento são ignoradas.

Sabendo-se que o eletrodo tem um comprimento  $2L$ , corrente total  $I$ , a densidade de corrente da fonte linear é então definida por:

$$K = \frac{I}{2L} \tag{3.30}$$

Considera-se uma superfície cilíndrica infinitesimal de um segmento de condutor localizado sobre o eixo  $x$ , conforme ilustra Fig. 3.7. Um comprimento infinitesimal  $dx$ , é mostrado na mesma figura. Esse comprimento representa uma fonte de corrente

infinitesimal de corrente  $\frac{I dx_s}{2L}$ . Considera-se agora um ponto  $P(x, y, z)$  localizado na superfície cilíndrica. O potencial desse ponto devido à fonte infinitesimal será:

$$dV(x, y, z) = \frac{I \rho dx_s}{8L\pi} \left\{ \left[ (x_s - x)^2 + a^2 \right]^{-0.5} + \left[ (x_s - x)^2 + A_+^2 \right]^{-0.5} \right\} \quad (3.31)$$

onde

$$A_+ = \left[ (y - y_1)^2 + (z + z_1)^2 \right]^{0.5} \quad (3.32)$$

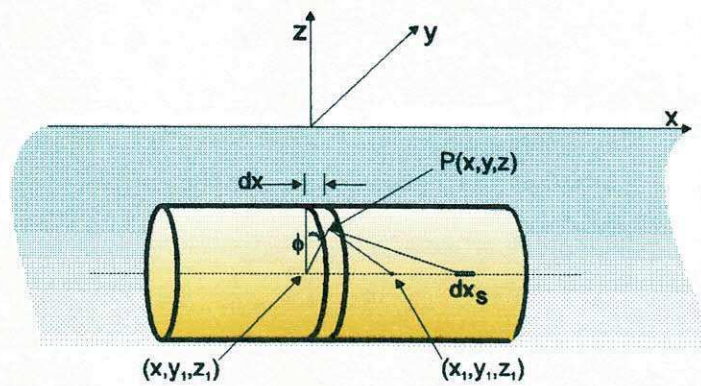


Fig. 3.7: Superfície cilíndrica infinitesimal de um segmento de eletrodo localizado em  $(x, y_1, z_1)$ .

Como o tamanho da profundidade de um sistema de aterramento é bem maior que o raio dos eletrodos enterrados, a expressão (3.32) se reduz a:

$$A_+ = (2z_1^2)^{1/2} \quad (3.32a)$$

O potencial no ponto  $P(x, y, z)$  será igual à soma das contribuições de todas as fontes infinitesimais:

$$V(x, y, z) = \int_{x_1-L}^{x_1+L} dV(x, y, z) \quad (3.33)$$

O potencial médio ao redor da superfície infinitesimal cilíndrica será dado por  $V(x, y, z)$ , desde que a equação (3.33) dependa apenas da coordenada  $x$ :

$$V(x) = V(x, y, z) \quad (3.34)$$



Então a elevação de potencial é calculada pelo potencial médio ao longo da superfície infinitesimal cilíndrica:

$$V_1 = \frac{1}{2L} \int_{x=x_1-L}^{x_1+L} V(x) dx, \quad (3.35)$$

resultando na equação:

$$V_1 = \frac{I\rho}{16\pi L^2} \left[ F_2(2L, a) - F_2(0, a) - F_2(0, a) + F_2(-2L, a) + F_2(2L, |z_1|\sqrt{2}) \right. \\ \left. - F_2(0, |z_1|\sqrt{2}) - F_2(0, |z_1|\sqrt{2}) + F_2(-2L, |z_1|\sqrt{2}) \right] \quad (3.36)$$

onde,

$$F_2(t, u) = t \ln[t + (t^2 + u^2)^{0,5}] - (t^2 + u^2)^{0,5} \quad (3.37)$$

Deve-se observar que:

$$F_2(0, a) = -a$$

$$F_2(0, |z_1|\sqrt{2}) = -|z_1|\sqrt{2}$$

$$VDF = \frac{\rho}{16\pi L^2} \left[ F_2(2L, a) + F_2(-2L, a) + 2a + F_2(2L, |z_1|\sqrt{2}) \right. \\ \left. + F_2(-2L, |z_1|\sqrt{2}) + 2|z_1|\sqrt{2} \right] \quad (3.38)$$

O apêndice B mostra as tabelas B.1, B.2 e B.3, com todas as equações para os fatores de distribuição de potencial *VDF*.

Foi elaborado um programa na linguagem Fortran para aplicação do método matricial modificado, seguindo o algoritmo abaixo:

1. Início.
2. Entrada dos dados gerais:
  - resistividade do solo, diâmetro do eletrodo, comprimento do eletrodo, profundidade da malha, corrente de defeito;

- área a ser mapeada: ponto inicial, ponto final, número de pontos onde o potencial na superfície do solo deve ser calculado;
- número de condutores e número de subdivisões de cada condutor;
- dados dos elementos da malha de aterramento: tipo( horizontal na direção  $X$ , horizontal na direção  $Y$ , ou vertical), coordenadas de centro.

### 3. Cálculo:

- determinação das coordenadas de centro de todos os segmentos do condutor;
- determinação da matriz  $[F]$  com o auxílio das equações constantes nas tabelas B.1, B.2 e B.3 do apêndice B;
- inversão da matriz  $[F]$  e cálculo da elevação de potencial de terra;
- cálculo do vetor de corrente;
- cálculo do potencial na superfície do solo;
- repetição do passo terceiro passo para todos os segmentos do condutor.

### 4. Saída dos resultados:

- arquivo de saída das correntes em cada segmento do condutor;
- arquivo de saída do potencial na região de mapeamento;
- arquivo de saída do potencial longitudinal, transversal e central da malha.

### 5. Fim.

#### **Exemplo E**

O condutor retilíneo apresentado na Fig. 3.2 dispersa 2 A no solo cuja resistividade é de  $100 \Omega\text{m}$ . Calcula-se o potencial no ponto da superfície do solo acima do centro do eletrodo. Emprega-se o método matricial modificado. Esse problema é o mesmo do exemplo D, mudando-se apenas o método de solução.

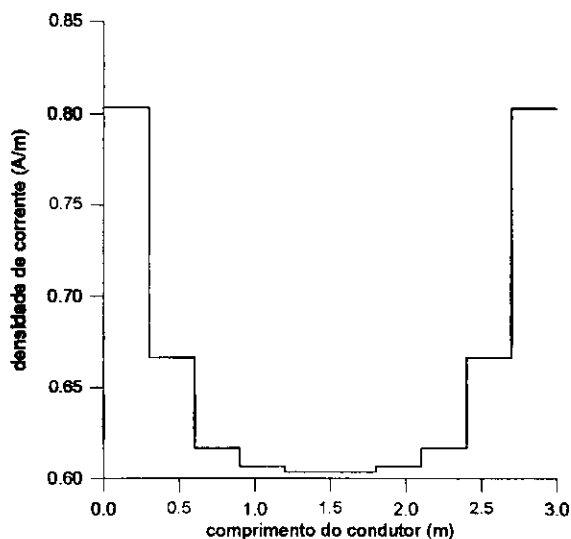


Fig. 3.8 Densidade de corrente ao longo do condutor. Distribuição de corrente e segmentação não-uniforme.

A solução é determinada, aplicando-se o programa elaborado na linguagem Fortran, seguindo o algoritmo descrito anteriormente.

Após várias simulações, observou-se que dez subdivisões do condutor eram suficientes para se obter um valor do potencial na superfície do solo, acima do centro do condutor, igual ao método matricial,  $V_p = 38,6$  volts, em um menor tempo de processamento, comparado-se ao do exemplo D. O esforço computacional foi de 2,3 pu. Espera-se que, para configurações mais complexas, as conclusões preliminares estabelecidas até o momento se repitam, para que assim se justifique o uso do método matricial modificado.

A densidade de corrente ao longo dos dez segmentos do condutor de 3m é mostrada na Fig. 3.8. Observa-se que em cada subdivisão de 0,3m do condutor a densidade de corrente é uniforme. A Fig. 3.9 mostra o potencial na superfície do solo em uma região do solo definida acima do eletrodo da Fig. 3.2.

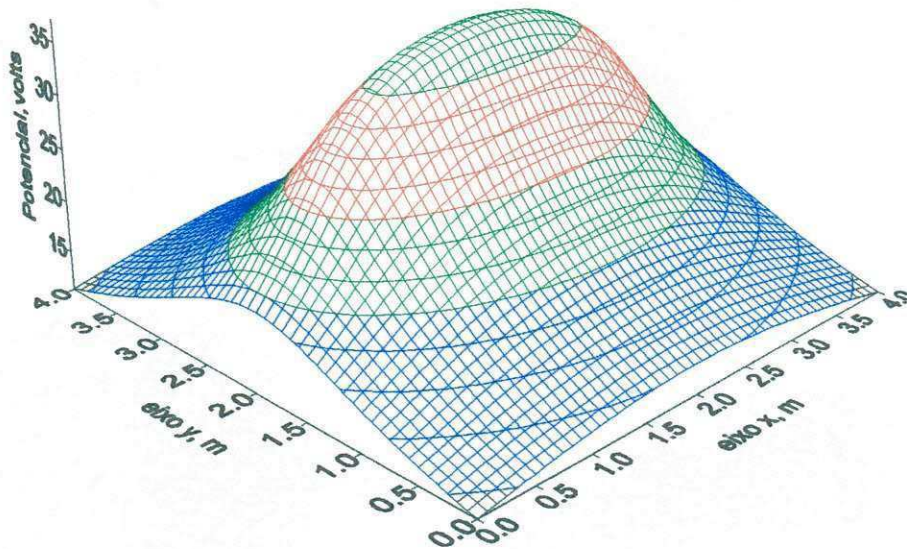


Fig. 3.9 : Potencial na superfície do solo para um eletrodo retilíneo de 3 m . Distribuição não-uniforme de corrente.

### 3.3 Método matricial modificado com segmentação não-uniforme.

A distribuição não-uniforme de corrente pode ainda ser representada da seguinte maneira: ao invés de se utilizar segmentos uniformes ao longo de cada *elemento*<sup>4</sup> da malha de aterramento, considera-se um segmento no entremeio, de comprimento bem maior comparado aos outros segmentos dispostos mais próximos das extremidades, tendo em vista que, no centro do condutor, a densidade de corrente não varia tanto quanto nas extremidades.

Como nesse procedimento o número de segmentos totais é menor, conseqüentemente o tempo de processamento também se reduzirá. A Fig. 3.10 (a) mostra o eletrodo dividido em segmentos uniformes, enquanto que a Fig. 3.10 (b) apresenta uma segmentação não-uniforme ao longo do condutor.

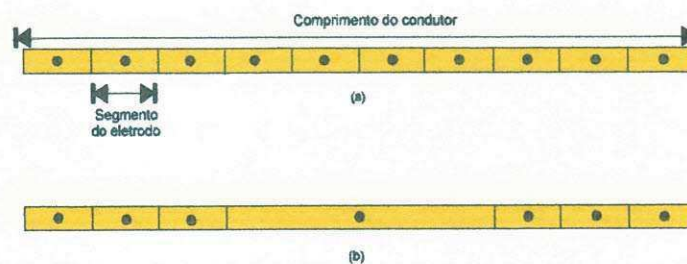


Fig. 3.10 : Métodos de segmentação do eletrodo. (a) Uniforme. (b) Não- uniforme.

<sup>4</sup> Qualquer um dos condutores retilíneos horizontais ou das hastes verticais que constituem a malha de aterramento.

O comprimento do segmento central deve ser determinado de forma a oferecer resultados precisos para os potenciais na superfície do solo em tempo de processamento reduzido.

Pela densidade de corrente apresentada na Fig. 3.3 para um condutor retilíneo, pode-se representar essa distribuição não-uniforme de corrente através da função-escada com um número mínimo de subdivisões igual a três: o meio e os dois extremos. Caso ocorram junções de conectores fora de suas extremidades, o número de subdivisões será diferente de três degraus. Posteriormente será explicado como determinar esse número de subdivisões mínimas para cada configuração de malha de aterramento.

### Exemplo F

Calcula-se o potencial no ponto da superfície do solo acima do centro do condutor retilíneo da Fig. 3.2. A corrente dispersada no solo pelo condutor é de 2 A e a resistividade é de 100  $\Omega\text{m}$ . Emprega-se o método matricial modificado com segmentação não-uniforme.

Tomando-se o condutor do exemplo D com três subdivisões, foram realizadas várias simulações, variando o tamanho do segmento central, com o objetivo de se encontrar um valor otimizado para o seu comprimento, de forma a oferecer resultados compatíveis com o encontrado pelo método matricial,  $V = 38,6$  volts.

De acordo com a Fig. 3.11, foram feitas variações no tamanho do segmento central,  $L_c$ , de 10 a 90% do comprimento do condutor  $L$ . Em seguida foi traçada a curva do erro percentual, (Fig. 3.12) entre os resultados dos potenciais para os dois métodos: matricial e matricial modificado. O valor do potencial na superfície do solo para  $L_c = 0,4L$  é  $V_p = 37,1$  V. Esse valor difere do resultado encontrado através do método matricial,  $V_p = 38,6$  V, em 4%. Tomando-se outros pontos na superfície do solo, a diferença do potencial entre os dois métodos não difere de 4%. Usando-se o método matricial modificado com três subdivisões, o esforço computacional foi de 1,1 pu. No exemplo anterior, com segmentação uniforme, o esforço computacional foi de 2,3 pu para dez subdivisões.

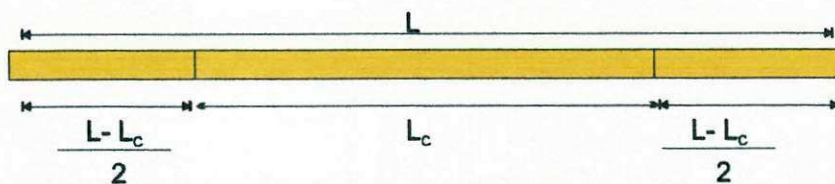


Fig. 3.11: Segmentação não-uniforme do condutor.

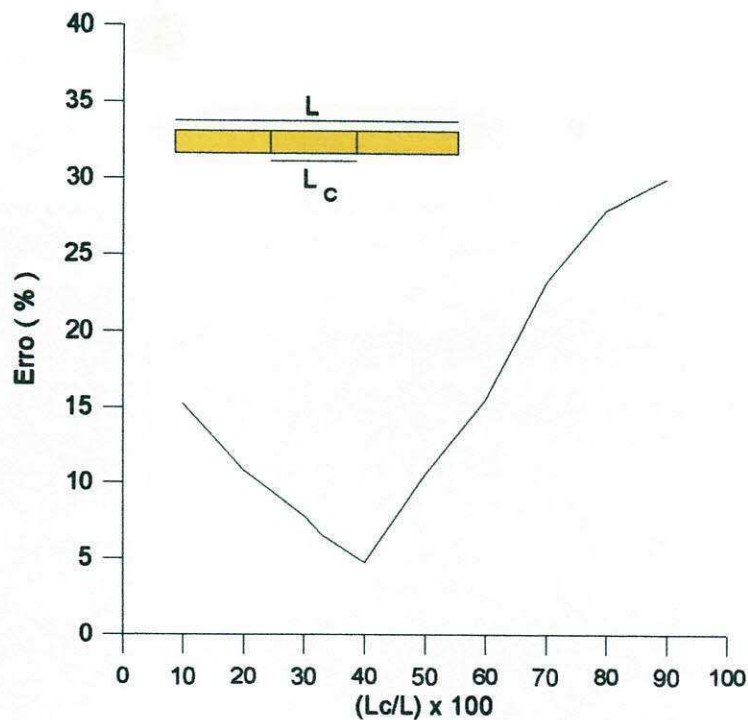


Fig. 3.12 : Erro percentual do potencial ao se variar o segmento central do condutor.

A Fig. 3.13 mostra a função-escada para a densidade de corrente nos três segmentos não-uniforme. Nos dois segmentos das extremidades de 0,9 m cada um, tem-se uma densidade de corrente de 0,802 A/m. No segmento central de 1,2m tem-se 0,462 A/m .

Portanto, pode-se representar uma distribuição não-uniforme de corrente através de uma segmentação não-uniforme nos segmentos do condutor. Aumentando-se o número de subdivisões, a curva da Fig. 3.13 tende a se aproximar da densidade de corrente apresentada na Fig. 3.3. Caso o número de subdivisões seja maior que o mínimo adotado nesse exemplo, a otimização para o comprimento do condutor encontrado aqui pode não ser a mesma do exemplo F. Desse modo, um estudo de otimização da segmentação não-uniforme, aliado ao número de subdivisões e ao tipo de configuração, foge dos objetivos deste trabalho, ficando como sugestão para futuros trabalhos nessa área de pesquisa.

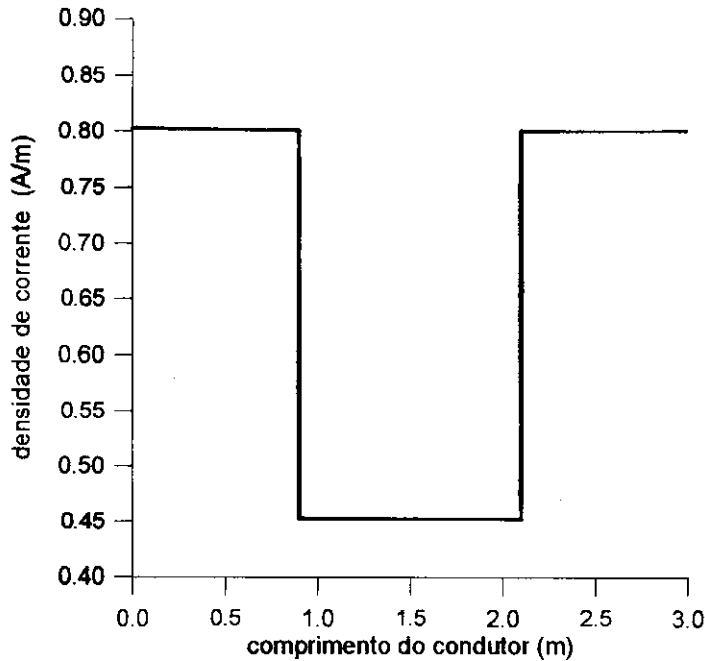


Fig. 3.13: Densidade de corrente ao longo do condutor. Distribuição de corrente e segmentação não-uniforme.

### 3.4 Uma comparação dos métodos

O método matricial é bastante simples, porém tende para a inviabilidade na medida em que aumenta o comprimento total de condutores da malha de aterramento. A solução trivial para reduzir o tempo de processamento é subdividir menos cada elemento da malha. Entretanto, para configurações compostas de dezenas de condutores, o método matricial torna-se inviável a sua implementação, devido ao fato de que o tempo de processamento está relacionado diretamente com o aumento do número de subdivisões que, por sua vez, está também relacionado com o número de condutores da malha.

Uma alternativa para se manter a mesma exatidão dos resultados, em um menor tempo de processamento, é a utilização do método matricial modificado. A Tabela 3.2 mostra uma comparação dos dois métodos em estudo: matricial e matricial modificado. Sem dúvida, o método matricial modificado, com segmentação uniforme, é bem mais eficiente do que o matricial. A referida tabela mostra que dez subdivisões já são suficientes para que o resultado do potencial na superfície do solo atinja praticamente o mesmo valor encontrado pelo método matricial.

Tabela 3.2 : Potencial na superfície do solo, acima do centro do eletrodo, calculado de três maneiras diferentes.

Método		Número de subdivisões	V (volts)	Tempo de processamento (p.u.)
Matricial		300	38,6	53,1
Matricial modificado	seg. uniforme	10	38,5	2,3
	seg. não-uniforme	3	37,1	1,1

A segmentação não-uniforme possibilita uma redução ainda maior do número de subdivisões do condutor da malha. A Tabela 3.2 mostra que dividindo-se o condutor em três segmentos e admitindo-se o segmento central com 40% do condutor, o resultado encontrado para o potencial irá diferir do método matricial em 4%, com uma vantagem de reduzir pela metade o tempo de processamento em relação à segmentação uniforme.

O método matricial modificado, com segmentação não-uniforme, mostrou-se bastante eficaz em simulações de eletrodos isolados ou em configurações em que não apareciam cruzamentos. Um número mínimo de subdivisões possíveis para uma distribuição não-uniforme de corrente ao longo do condutor foi adotado para um estudo de otimização do comprimento do segmento central. Não necessariamente, a otimização do segmento central deve ser de 40% do comprimento do condutor, caso o mesmo seja repartido em mais de três subdivisões.

Uma análise da otimização do valor do segmento central, em relação ao aumento do número de subdivisões, não faz parte dos objetivos desta dissertação, mas o tema é aqui referido como uma das propostas para trabalhos futuros.

Como já foi dito, o objetivo básico de aplicação de uma segmentação não-uniforme é a redução do esforço computacional pelo uso de um segmento de maior tamanho no entremeio do eletrodo, já que a distribuição de corrente nesse segmento deve ser considerada uniforme.

Em resumo, no caso do condutor horizontal, que foi objeto de estudo nos exemplos D a F, a eficiência do método matricial modificado, com segmentação não-uniforme, é comprovada. Para se perceber isso, basta comparar os tempos de processamento expostos na Tabela 3.2.



Em caso de malhas compostas de vários eletrodos nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , o estudo da segmentação não-uniforme deve ser também efetuado, de forma a garantir a eficiência no cálculo dos potenciais na superfície do solo, tendo em vista que, ao longo do segmento central, outros condutores perpendiculares serão conectados. Daí a dúvida acerca da viabilidade de se implementar ou não a segmentação não-uniforme.

A análise da distribuição de corrente pela função-escada para uma configuração de condutores em malha segue o mesmo princípio que foi adotado para um condutor isolado. Para representar a distribuição não-uniforme de corrente em uma malha, observou-se que o número mínimo de subdivisões de cada elemento obedece a seguinte expressão:

$$2n_j + 3, \tag{3.1}$$

onde  $n_j$  representa o número de junções pertencentes a um condutor, desconsiderando-se as junções das extremidades. A expressão (3.1) é absolutamente geral, valendo inclusive para o condutor isolado do exemplo F, onde ( $n_j = 0$ ).

Tomando-se a configuração mais simples de malha de aterramento composta de seis condutores, conforme Fig. 3.14, tem-se apenas uma junção em cada condutor. Pela expressão 3.1 são necessário cinco subdivisões para se representar a distribuição de corrente da malha através da função-escada.

O próximo passo é otimizar o tamanho do segmento central em relação às quatro outras subdivisões, de forma a verificar-se o grau de influência da variação da distribuição de corrente provocada pelas junções sobre o cálculo do potencial na superfície do solo. Ou seja, cada segmento do condutor terá uma distribuição de corrente uniforme. Então, o objetivo é determinar qual o tamanho do segmento central, de forma a oferecer resultados precisos para os potenciais na superfície do solo.

A configuração da Fig. 3.14 é inicialmente simulada pelo método matricial, tomando trinta subdivisões em cada condutor da malha. Vários pontos no solo foram tomados para comparação dos resultados. No entanto, para efeito de simplificação, será mostrado o resultado do potencial em apenas um ponto da superfície do solo.

### Exemplo G

Consideram-se seis condutores retilíneos de 3m cada um (Figura 3.14), dispersando 2A no solo, cuja resistividade é de  $100 \Omega\text{m}$ . A malha se encontra enterrada a 0,5m. Calcula-se o potencial na superfície do solo acima do centro da malha, empregando o método matricial e matricial modificado com segmentação não-uniforme.

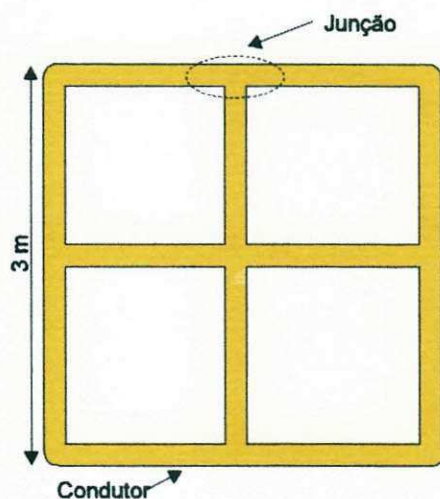


Fig. 3.14 : Malha com 6 condutores.

Utilizando-se o método matricial com trinta subdivisões em cada condutor, segmentação uniforme, encontra-se  $V_p = 22,4 \text{ V}$  para o potencial na superfície do solo acima do centro da malha, com um tempo de processamento de 39,6 p.u. A densidade de corrente, ao longo de cada condutor da malha está apresentada na Fig. 3.15. Observa-se que, no centro do condutor, o comportamento da densidade de corrente é modificado devido à presença da junção.

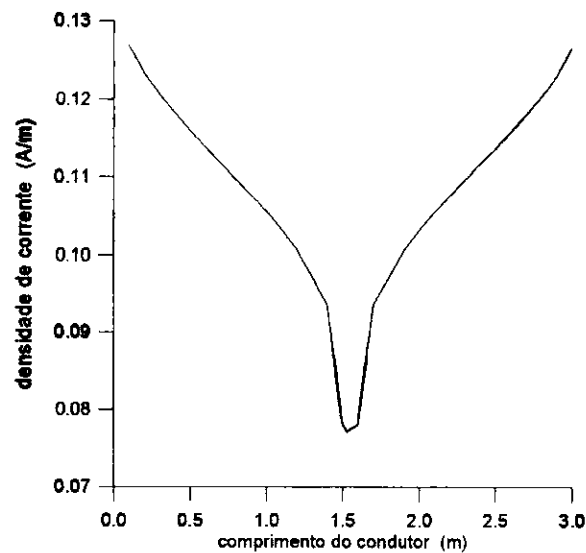


Fig. 3.15: Densidade de corrente ao longo dos condutores. Segmentação uniforme.

Com o objetivo de otimizar o tamanho do segmento central do condutor pelo método matricial modificado, com segmentação não-uniforme, altera-se o tamanho do segmento central da malha,  $L_c$ , de 3 a 50% do comprimento total do condutor. Toma-se uma variação de  $L_c$  até  $0,5L$  de forma a ser analisado o efeito da uniformidade da corrente do segmento central sobre o cálculo do potencial na superfície do solo.

Para cada valor de  $L_c$  são encontrados valores para o potencial na superfície do solo, sendo estes comparados com o valor do método matricial com trinta subdivisões,  $V_p = 22,4$  V.

A Fig. 3.16 mostra a curva do erro percentual entre os resultados para o potencial na superfície do solo em relação aos dois métodos. Em um segmento com 5% do condutor, o erro percentual entre os dois métodos é de 7,68%. O tempo de processamento para o método matricial modificado com segmentação não-uniforme foi de 4,5 p.u.

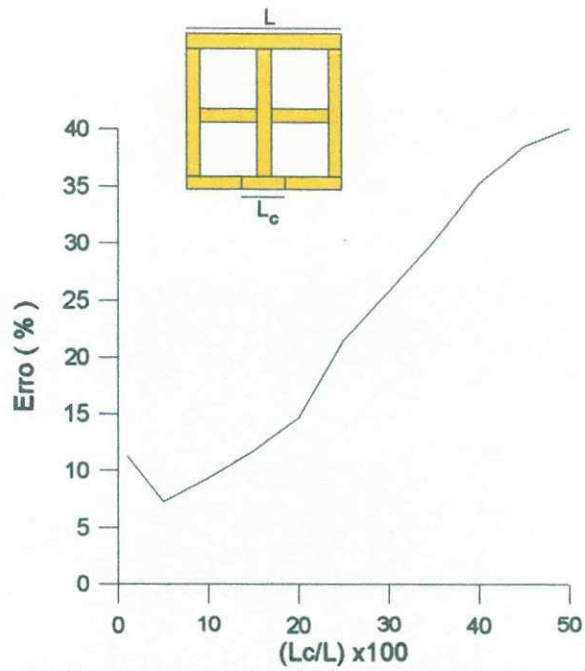


Figura 3.16: Erro percentual do potencial ao se variar o segmento central dos condutores da malha.

A curva da densidade de corrente para as cinco subdivisões mínimas do condutor está apresentada na Fig. 3.14.

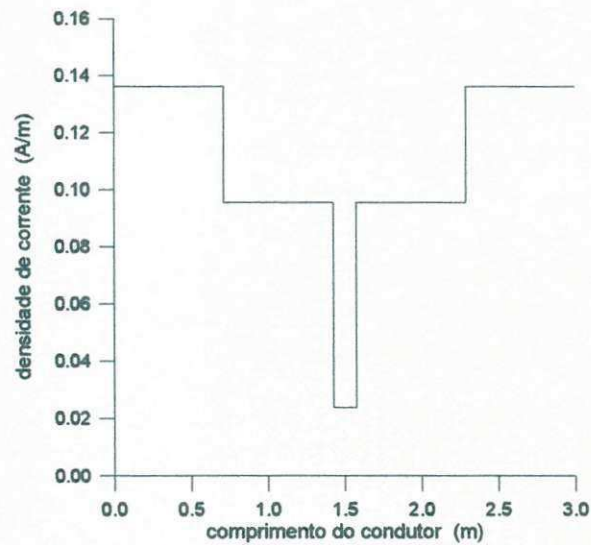


Fig. 3.17: Densidade de corrente ao longo dos condutores. Distribuição e segmentação não-uniforme.

Observa-se que, para a configuração da malha da Fig. 3.14, o melhor resultado para o potencial na superfície do solo encontrado foi considerando-se o segmento central com 5% do comprimento total do condutor. Isso mostra que, no centro do condutor, deveria haver mais segmentos com dimensões próximas ou até mesmo inferiores à 5% do comprimento, de forma que a função-escada da Fig. 3.17 fosse mais aproximada da curva apresentada pelo caso matricial na Fig. 3.15.

Como a variação de corrente ocorre mais nas extremidades do que no centro da malha, não há motivo para se aumentar o número de subdivisões dos segmentos próximos das junções da malha.

Para cada configuração de malha em estudo, vários são os fatores que modificam os resultados dos potenciais na superfície do solo. Dentre eles pode-se citar: número de subdivisões de cada condutor da malha ; tamanho do segmento central  $L_c$  ; número total de condutores da malha e espaçamento entre os condutores. Não é, entretanto, objetivo deste trabalho a otimização da segmentação de cada condutor, nem tão pouco, a determinação do número de subdivisões.

A opção por uma segmentação não-uniforme, apresentada nos exemplos D a G teve como objetivo analisar o grau de influência do tamanho do segmento central sobre o cálculo dos potenciais na superfície do solo, já que nesse segmento a corrente é uniformemente distribuída, enquanto nas junções ocorre uma variação nessa distribuição. Para isso, usou-se uma segmentação não-uniforme sobre as subdivisões onde se encontravam as conexões dos condutores.

A preocupação, de agora em diante, será analisar a influência ou não de uma distribuição não-uniforme de corrente sobre os condutores da malha. Dessa forma, a segmentação uniforme será adotada, não esquecendo que, para cada configuração de malha apresentada posteriormente, uma otimização na segmentação dos condutores pode ser determinada.

### Exemplo H

Considera-se uma malha de aterramento composta de dez condutores e quatro hastes de 24 e 2,4 m respectivamente, enterrados em um solo cuja resistividade é de  $100 \Omega\text{m}$ . Supondo-se que uma corrente de defeito de 20 A seja dispersa no solo pelos respectivos eletrodos, como mostra a Fig. 3.18.

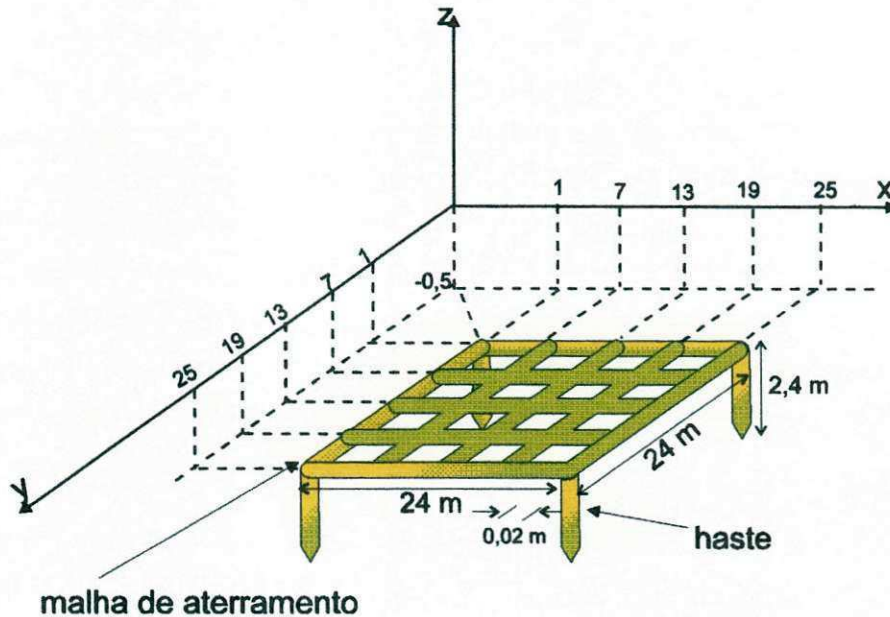


Fig. 3.18: Malha composta por dez condutores e quatro hastes enterrados a 0,5 m.

Aplicando-se o método matricial modificado para a configuração de malha da Fig. 3.18 e considerando-se ambas as distribuições de corrente, uniforme e não-uniforme, é feita uma análise do perfil do potencial na superfície do solo. Também foram calculados o *potencial de malha*<sup>1</sup> e de *passo*<sup>2</sup> para cada distribuição de corrente. A Tabela 3.3 mostra os resultados desse estudo.

<sup>1</sup> É o máximo valor do potencial de toque encontrado na área acima.

<sup>2</sup> Diferença de potencial entre dois pontos na superfície do solo, afastados por 1 m.

Tabela 3.3 Resultados do método matricial modificado.

Grandeza	Com distribuição de corrente	
	uniforme	não-uniforme
Resistência da malha de terra, $R$ ( $\Omega$ )	1,85	1,94
Potencial da malha, $V_m$ (volts)	8,02	9,29
Potencial de passo, $V_p$ (volts)	7,02	6,98
Elevação de potencial da malha, $GPR$ (volts)	37,12	38,81
Tempo de processamento, p.u.	47,2	48,1

A Fig. 3.19 mostra o perfil do potencial na direção diagonal, D. Considerando-se uma distribuição uniforme de corrente, o potencial de *malha*<sup>3</sup> encontrado foi de  $V_{m1} = 8,02$  volts. Para uma distribuição não-uniforme de corrente, o potencial de malha encontrado foi de  $V_{m2} = 9,29$  volts. O potencial de *passo*<sup>4</sup> para os dois casos são praticamente o mesmo,  $V_{p1} = 7,02$  e  $V_{p2} = 6,98$  volts.

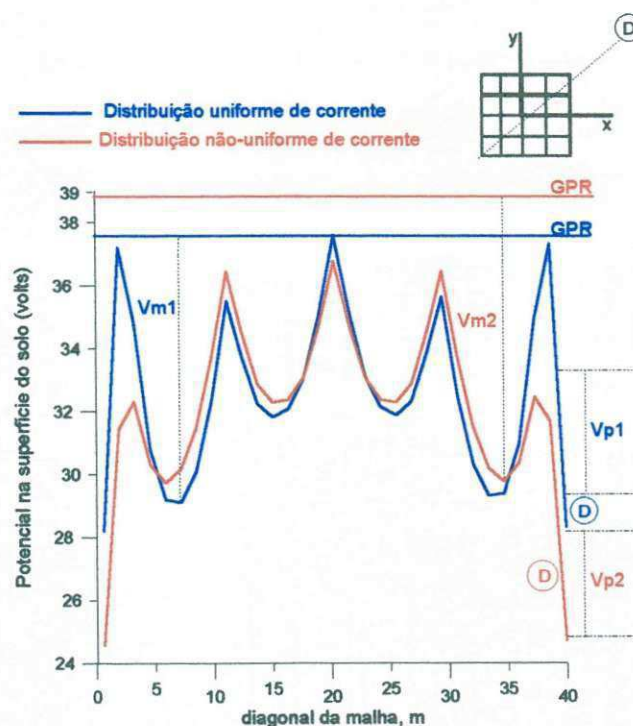


Fig 3.19 : Potencial na superfície do solo sobre o eixo de simetria da malha.

Os valores máximos que os potenciais de toque e de passo possam vir a assumir determinam se o sistema de aterramento é ou não seguro para as pessoas e equipamentos.

<sup>3</sup> Máximo potencial de toque encontrado dentro de uma malha de aterramento.

<sup>4</sup> Diferença de potencial na superfície do solo entre os pés de uma pessoa com afastamento de 1m.

Nas curvas apresentadas na Fig. 3.19, a distribuição não-uniforme de corrente apresenta uma vantagem em relação à distribuição uniforme, tendo em vista de os valores máximos que os potenciais venham assumir determinam a segurança do sistema de aterramento, ( IEEE, 1986).

A fig. 3.20 mostra o comportamento do potencial na superfície do solo para os dois tipos de distribuição de corrente. Observa-se que a curva do potencial, correspondendo à distribuição não-uniforme de corrente apresenta-se mais lisa do que a outra.

Tendo em vista os resultados encontrados para o potencial na superfície do solo, para as duas distribuições de correntes, uniforme e não-uniforme, o próximo capítulo terá como objetivo fundamental reproduzir os resultados encontrados na literatura e assim validar o programa em estudo. Será adotado no programa o método matricial modificado, com segmentação uniforme e distribuição não-uniforme de corrente.



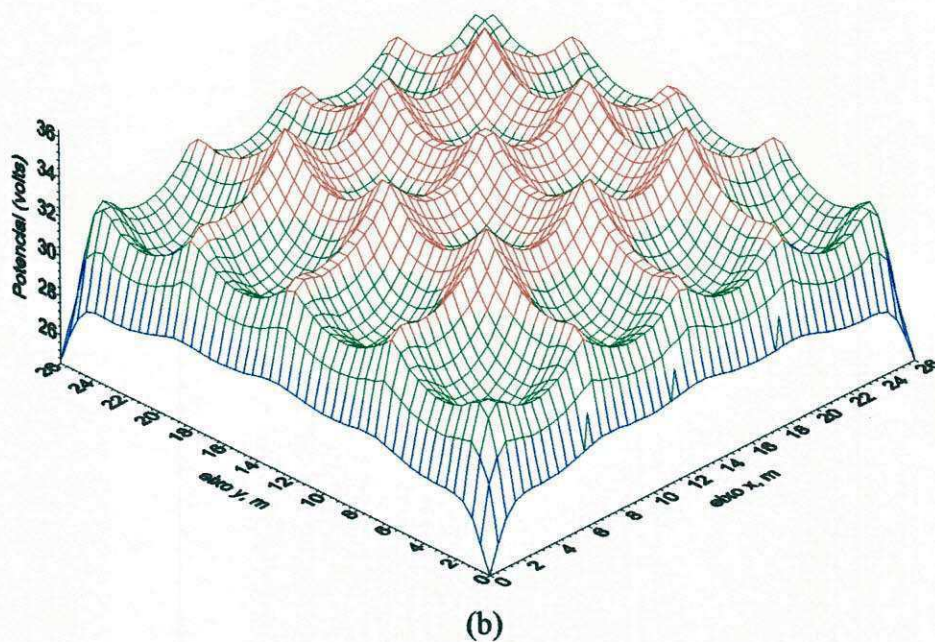
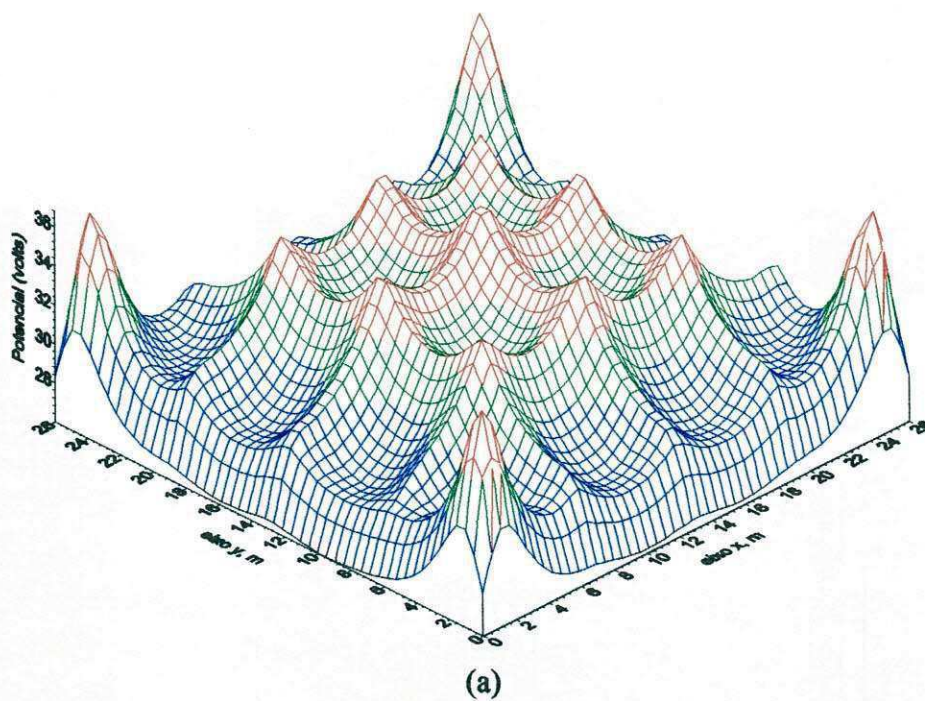


Fig. 3.20 : Potencial na superfície do solo de uma malha de dez condutores e quatro hastes enterrados a 0,5 m. (a) Distribuição uniforme de corrente. (b) Distribuição não-uniforme de corrente.

## **4. SIMULAÇÃO DE MALHAS DE ATERRAMENTO**

Este capítulo trata da questão central da dissertação, que é o efeito da influência da distribuição não-uniforme de corrente sobre o cálculo do potencial na superfície do solo em malhas de aterramento.

Foi visto no final do capítulo anterior que, em se tratando de segurança do sistema de aterramento, o potencial de malha que apresentou melhor resultado foi aquele que considerou uma distribuição não-uniforme de corrente. O objetivo é então avaliar esse efeito não só quanto à precisão de resultados, mas também quanto à variação de esforço computacional. Essa questão começou a ser tratada no capítulo 3, empregando configurações simples de eletrodos.

Um programa de computador foi desenvolvido em linguagem Fortran 77 com base no método matricial modificado, para realizar simulações que deram suporte a esta dissertação.

Embora os resultados das simulações dos eletrodos simples (exemplos D e E) se mostrassem totalmente consistentes, teve-se o cuidado de validar o programa de modo efetivo, tomando-se um sistema real, que será mostrado nos itens 4.1 e 4.2 deste capítulo. Para tanto, adotou-se o procedimento comum de procurar reproduzir os resultados dos casos já estudados anteriormente na literatura em relação a outros. Inicialmente foi pesquisado um trabalho que pudesse ser tomado como fonte para comparação e validação do programa. Embora a literatura referente ao aterramento elétrico seja vasta, sobretudo no que diz respeito aos aspectos práticos, não há abundância de publicações completas de casos estudados. Geralmente, quando se apresentam os resultados detalhados, os dados de entrada

referentes à malha de aterramento e ao solo estão incompletos ou podendo ocorrer também o contrário.

Da bibliografia consultada, um único artigo pode ser tomado como referência para validação do programa (VILLAS et al, 1986). Esse artigo pode ser classificado como um trabalho de aplicação, típico de um período em que muitas técnicas foram propostas para o cálculo de malhas de aterramento de subestação (MELIOPOULOS et al, 1981; JOY, 1983; SVERAK, 1984). Esses métodos, numéricos, diferem fortemente apenas nas fórmulas empíricas a que recorrem para se completarem. Em seu trabalho Villas et al (1986) tem por objetivo aplicar diferentes métodos para calcular a malha de aterramento de uma subestações, em particular, Barra de Peixe SP, e analisar o efeito de variações nas dimensões da malha.

#### 4.1 Simulação da malha de aterramento da subestação de Barra do Peixe.

A subestação de Barra do Peixe, do sistema CESP<sup>1</sup>, tem 57.600 m<sup>2</sup> de área. Sua malha de aterramento é regular quadrada, constituída de cinquenta condutores de 12,6 mm de diâmetro e 240 m de comprimento cada (Fig. 4.1), todos enterrados a uma profundidade de 0,6 m. A corrente dispersa pela malha é de 6 kA. A resistividade aparente do solo é de 1.430  $\Omega\text{m}$  (VILLAS et al, 1986). A tensão nominal e a capacidade dessa subestação são respectivamente de 230 kV e 2.363 MVA.

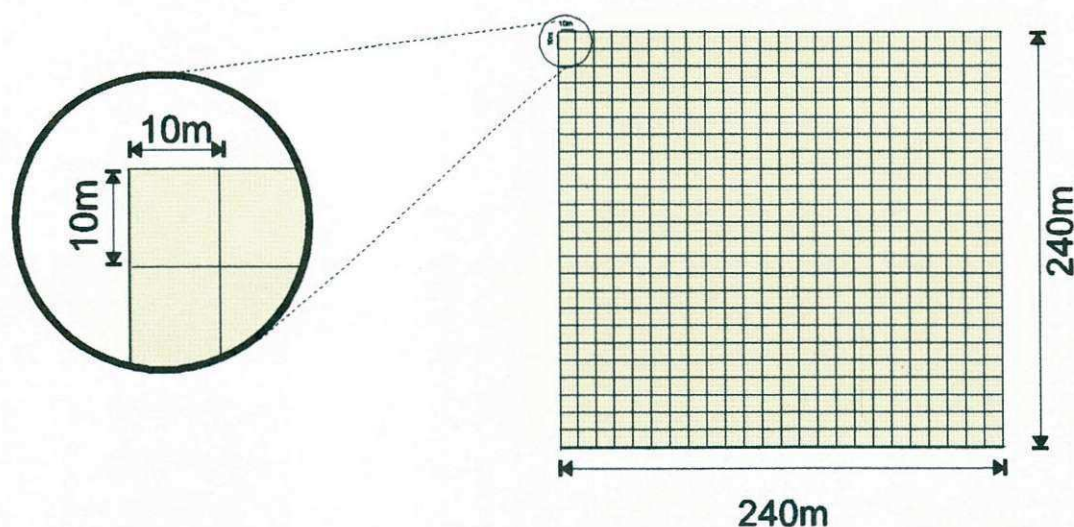


Fig. 4.1: Geometria da malha de aterramento da subestação de Barra do Peixe.

<sup>1</sup> Centrais Elétricas de São Paulo.

Como , em geral, as malhas de aterramento possuem um elevado número de elementos (condutores e ou hastes), o programa foi desenvolvido de forma a facilitar a entrada de dados.

Foram definidos, no arquivo de dados do programa, os seguintes parâmetros: resistividade do solo; profundidade de aterramento da malha; diâmetro, número, coordenadas de centro, número de subdivisões e comprimento de cada condutor; região de mapeamento do potencial na superfície do solo; corrente dispersa na malha e direção de cada condutor em relação às coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O programa divide cada condutor pelo número de subdivisões e encontra as coordenadas de centro e comprimento de cada segmento nas suas respectivas direções.

O potencial na superfície do solo, em cada ponto da região de mapeamento, dá-se devido à contribuição de todos os segmentos de cada condutor da malha.

As dimensões da malha são de fato muito grandes. Embora esta seja perfeitamente regular, pode-se explorar a simetria. Isto é, para efeito de mapeamento do potencial, é preciso se considerar apenas um dos quadrantes da malha: o que acontece num quadrante se repete nos demais. Entretanto, como os resultados apresentados por VILLAS et al (1986) não foram fornecidos através de gráficos e sim em tabelas, resolveu-se traçar o perfil do potencial de toque, ao longo de toda a extensão da malha.

Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 4.1 (coluna à direita), ao lado dos resultados encontrados por VILLAS et al (1986), os quais são rotulados como "valores de referência".

Tabela 4.1: Validação do programa desenvolvido com base em valores calculados para a subestação de Barra do peixe.

Grandeza	valor	
	de referência	calculado
Resistência da malha de terra, $\Omega$	3,01	2,79
Potencial da malha, kV	3,93	3,72
Potencial de passo, kV	0,98	0,93
Elevação do potencial da malha, kV	16,68	16,73
Tempo de processamento, p.u.		553,1

Os valores calculados concordam muito bem com os de referência. Em média, o desvio não atinge 5%, o que é perfeitamente admissível em sistemas de simulações de malhas de aterramento. Os valores correspondentes de ambas as colunas (tabela. 4.1) foram obtidos por rotinas computacionais que têm a mesma fundamentação, qual seja, modelos potencial-constante e solo uniforme.

Para se chegar aos valores calculados foi considerada a malha com segmentação uniforme. Cada elemento foi dividido em sessenta segmentos de 4m. Isso totaliza três mil segmentos, o que dá ao problema uma dimensão considerável. Sendo assim, empregando-se um microcomputador 486 DX-2 66 MHz 8 Mbytes de RAM, o tempo de processamento foi de 19:12'. Não se conhece o modo como os valores de referência foram encontrados, com esse nível de detalhe, mas certamente foi diferente. Essa diferença é atribuída em parte, aos pequenos desvios verificados.

A comparação de resultados para efeito de validação do programa se completa com a Fig. 4.2, que superpõe as curvas de potencial de toque calculadas e de referência em três direções distintas. As direções consideradas incidem sobre o condutor central, sobre o condutor perimetral e na direção diagonal. Elas são designadas respectivamente por C, P e D ( Fig. 4.2b). Em todos os casos, a origem do referencial cartesiano é tal que o canto inferior da malha tem coordenadas  $x= 10$ ,  $y= 10$  e  $z= -0,6$  m. A região de mapeamento do potencial na superfície do solo vai de  $(0 \leq x \leq 300)$  e  $(0 \leq y \leq 300)$  conforme mostra a Fig. 4.2a.

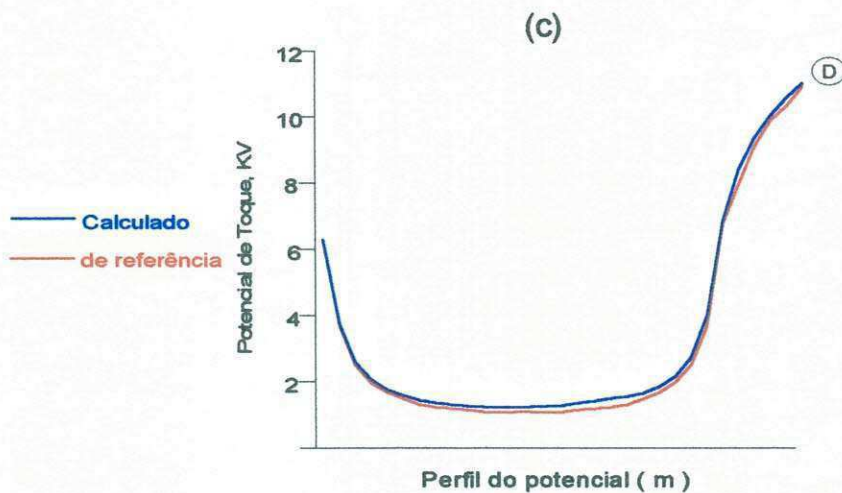
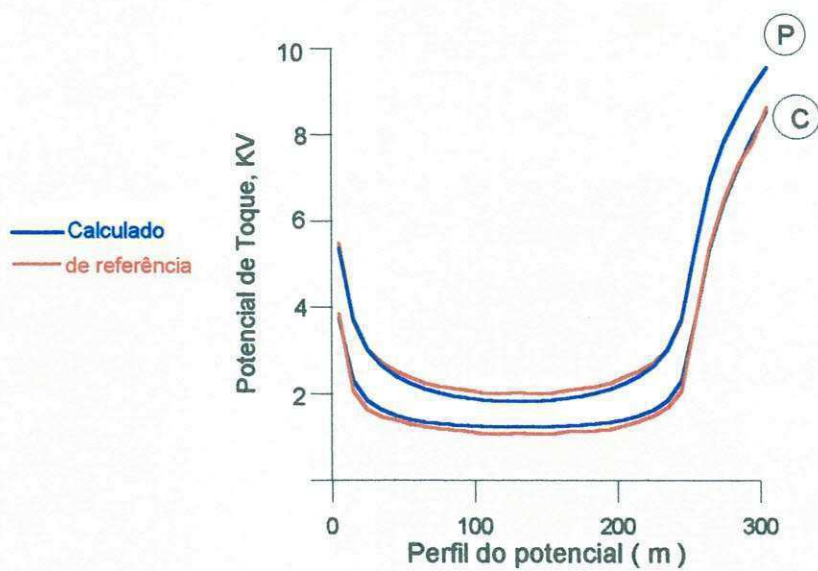
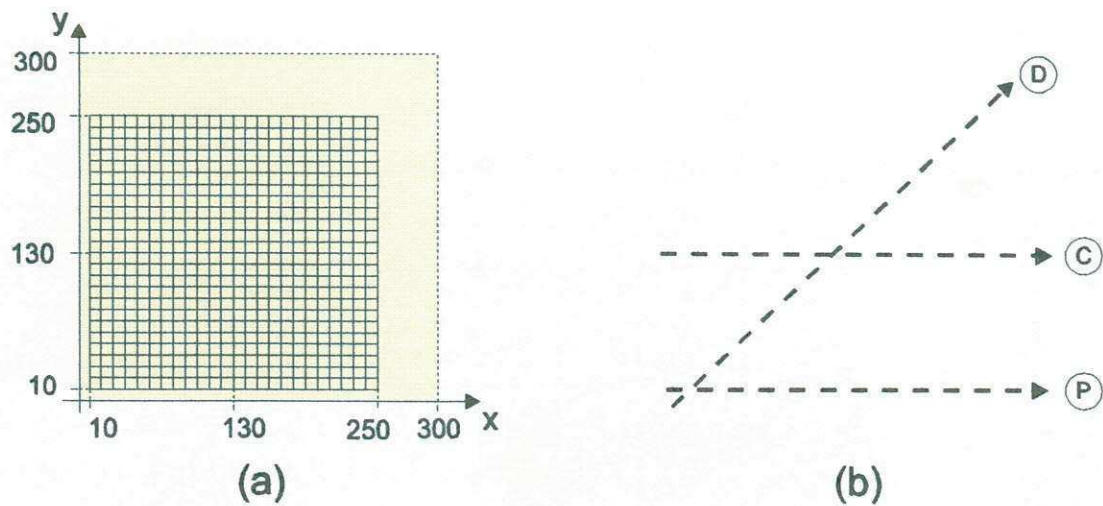


Fig. 4.2: Curvas de potencial de toque na subestação de Barra do Peixe. (a) Região de mapeamento. (b) Direções consideradas. (c) Curvas na direção central e perimetral. (d) Curvas na direção diagonal.

Analisando-se as Figs 4.2c e 4.2d, constata-se que, mais uma vez, há concordância dos resultados. As curvas quase se sobrepõem por completo. Nas três direções em que o potencial de toque foi comparado, o maior desvio relativo foi de 6,2%. Certamente essa diferença poderia ser atenuada, se fossem conhecidos detalhes de como os valores de referência foram conseguidos.

Para finalizar, mostra-se na Fig. 4.3 o gráfico tridimensional do potencial na superfície do solo para a malha da subestação de Barra do Peixe.

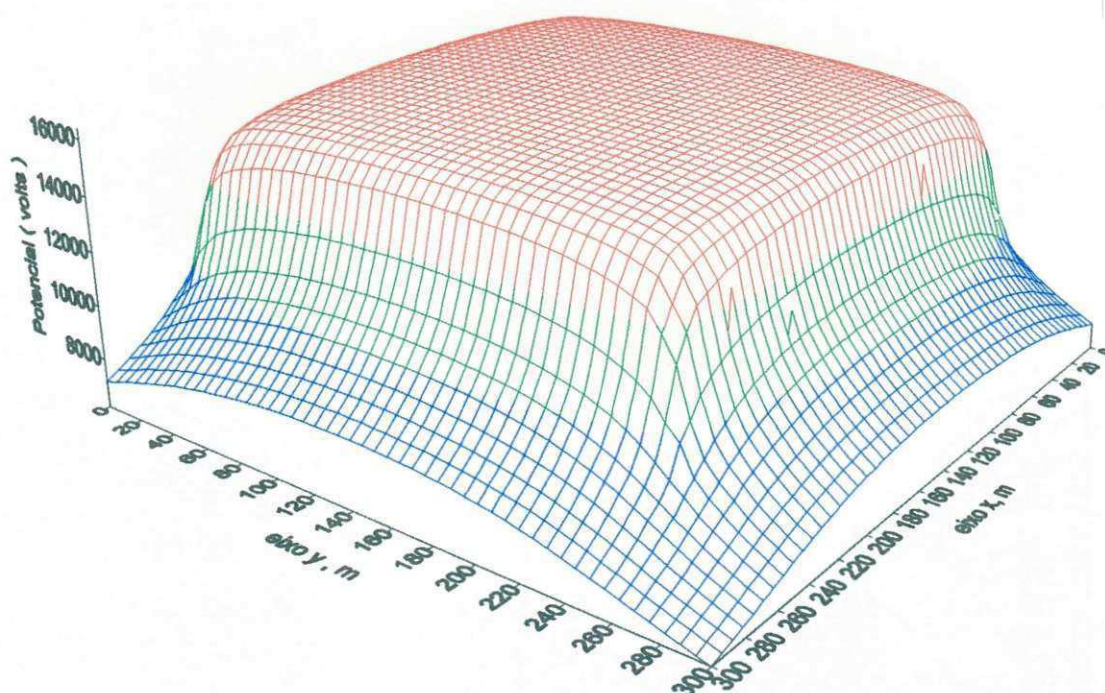


Fig. 4.3 : Potencial na superfície do solo da malha da subestação de Barra do Peixe.

#### 4.2 Simulação da malha da subestação de Boa Vista/PB

O estudo apresentado no item 4.1 serviu especificamente para validar o programa desenvolvido pelo método matricial modificado, com segmentação uniforme e distribuição não-uniforme de corrente. Vencida esta etapa importante do projeto, passa-se a tratar da do objetivo desta dissertação, que é uma aplicação prática do trabalho desenvolvido.

A análise que se desenvolverá a seguir tem por base a subestação de distribuição de Boa Vista ( 69/13.8kV, 2,5 MVA), da CELB<sup>2</sup>. Um dos motivos da escolha dessa malha de aterramento deu-se pelo fato de ser um projeto da região Nordeste, onde há um interesse

<sup>2</sup> Companhia de Eletrificação da Borborema, Campina Grande/PB.

futuro em desenvolver outros trabalhos no Estado da Paraíba. Outro motivo foi devido à própria configuração dessa malha. Além dos condutores horizontais paralelos à superfície do solo, há também os condutores perpendiculares a estes, que são as hastes.

Diferentemente da malha da subestação de Barra do Peixe, a subestação de Boa Vista não é regular quadrada. A não-simetria de sua malha ocorre devido a dois fatores: espaçamentos diferentes entre os condutores da periferia e os do centro; o posicionamento das hastes. Sua configuração está mostrada na figura abaixo.

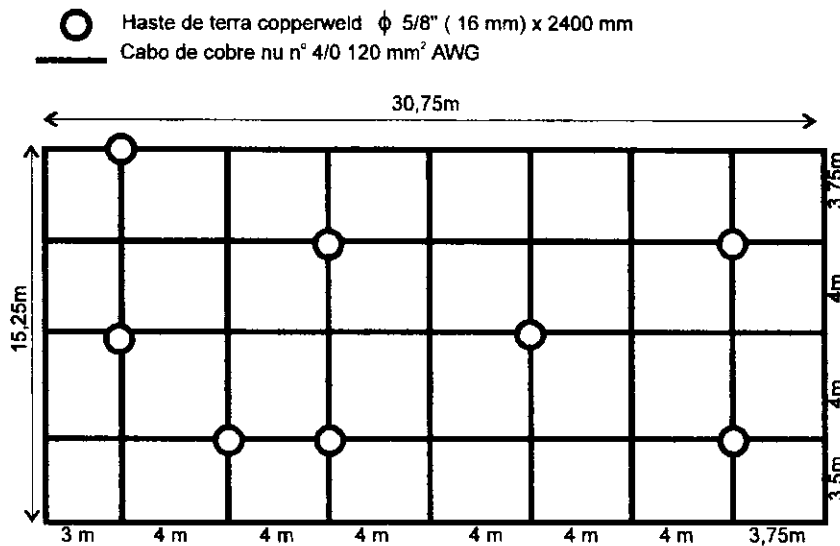


Fig. 4.4 : Malha da subestação de Boa Vista. Vista superior.

Os dados referentes à malha, Tabela 4.2, foram processados mediante emprego do programa desenvolvido, escolhendo-se o método matricial modificado e segmentação uniforme nos segmentos.

Tab. 4.2 Dados referentes à malha da subestação de Boa Vista.

	área	469 m <sup>2</sup>
Condutores	tipo	cobre nu 4/0
	seção	120 mm <sup>2</sup>
	quantidade	14
Hastes	tipo	copperweld 5/8"
	diâmetro	16 mm
	comprimento	2400 mm
	quantidade	8
curto-circuito fase-terra		529 A
resistividade aparente		500Ωm
profundidade de aterramento		0,6 m



Como forma de manter-se uma segmentação uniforme nos condutores, considerou-se uma divisão dos elementos de forma proporcional ao comprimento destes. A Tabela 4.3 (coluna à direita) mostra o tamanho de cada segmento utilizado no programa.

Tabela 4.3: Segmentação nos elementos da malha da subestação de Boa Vista.

Elemento	Direção	Comprimento	Número de divisões	Total de segmentos	Tamanho dos segmentos
Condutores	Paralela ao eixo $x$	30,75 m	40	200	0,768 m
	Paralela ao eixo $y$	15,25 m	20	180	0,762 m
Hastes	Perpend. ao plano $xy$	2,4 m	3	24	0,800 m

A Tabela 4.4 a seguir mostra os resultados obtidos para os dois tipos de distribuição de corrente ao longo dos elementos da malha.

Tabela 4.4 Valores calculados para a subestação de Boa Vista.

Grandeza	Distribuição de corrente	
	uniforme	não-uniforme
Resistência da malha de terra, $\Omega$	10,55	10,41
Elevação do potencial da malha, KV	5,58	5,51
Tempo de processamento, p.u.	91,3	93,5

Os valores encontrados na Tabela 4.4 para ambas as distribuições de corrente foram obtidos por rotinas computacionais que têm a mesma fundamentação, qual seja, modelo potencial-constante e solo uniforme. O número total de segmentos da malha foi de 404. Empregando-se um microcomputador 486 DX-2 66 Mhz 8 Mbytes de RAM, o tempo de processamento para ambas as distribuições de corrente foi de aproximadamente 3:30'.

A malha está disposta de tal forma que a coordenada de centro localiza-se em  $x= 18$ ,  $y= 10,5$  e  $z= -0,6$  m. A região de mapeamento do potencial na superfície do solo, (Fig. 4.5a) é de  $(0 \leq x \leq 40)$  e  $(0 \leq y \leq 25)$ . As direções consideradas são no sentido longitudinal, transversal e diagonal da malha. Elas são designadas respectivamente por L, T e D, Figura 4.5b.

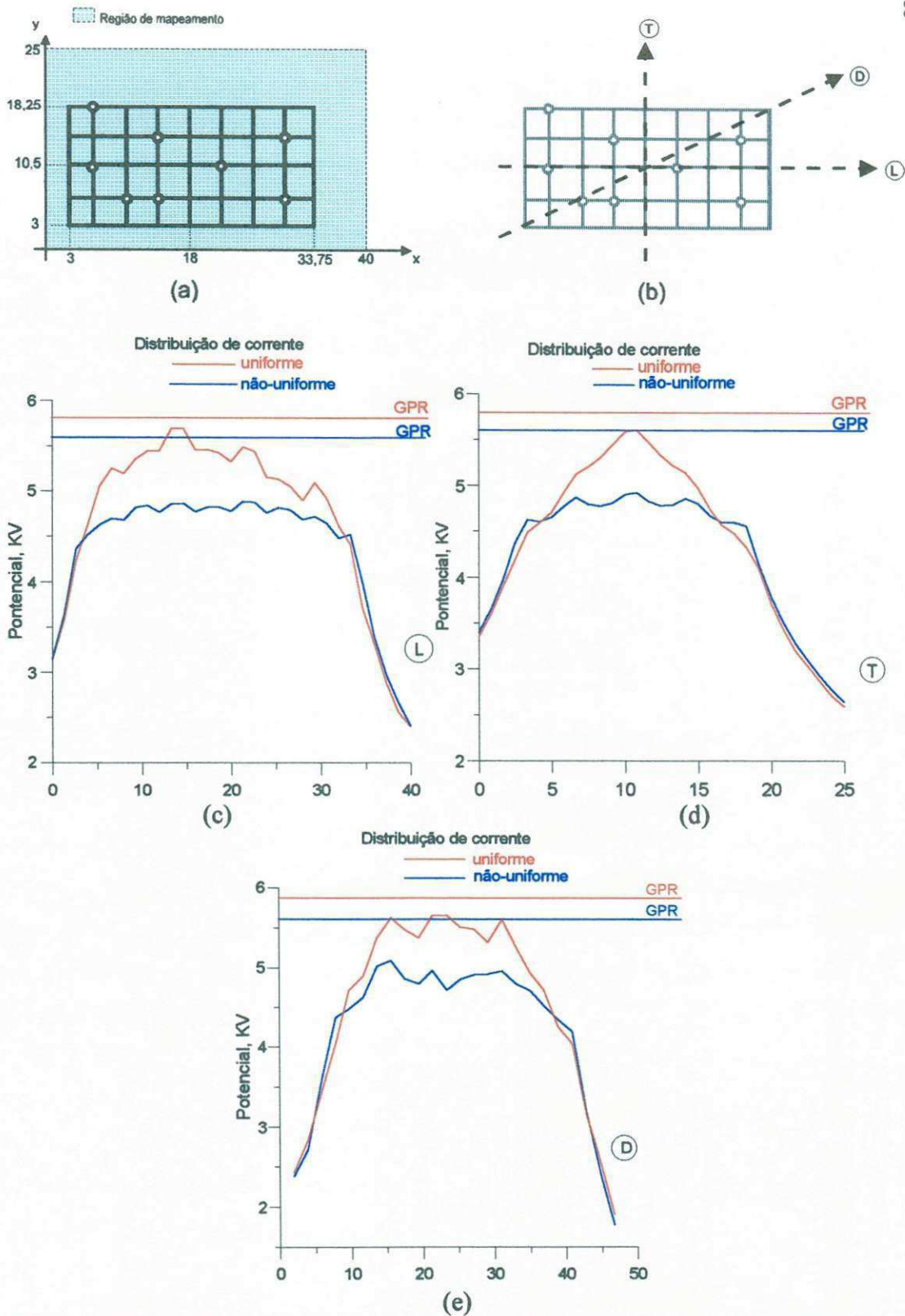


Fig. 4.5 : Curvas de potencial na superfície do solo na subestação de Boa Vista. (a) Região de mapeamento. (b) Direções consideradas. Curvas nas direções; (c) Longitudinal. (d) Transversal. (e) Diagonal.

Há algumas considerações a serem feitas mediante as Figuras 4.5c, 4.5d e 4.5e. Foi visto anteriormente que os valores máximos encontrados para os potenciais de toque e de passo, bem como o risco de ocorrência de potencial transferido, determinam se o sistema é ou não seguro.

As curvas da Figura 4.5 mostram o potencial na superfície do solo e a elevação de potencial da malha para as duas distribuições de corrente; uniforme e não-uniforme. Observa-se que no interior da malha, o potencial de toque, que é a diferença entre o *GPR* e o potencial em um ponto da superfície do solo, assume valores, para a distribuição não-uniforme de corrente, superiores aos resultados para uma distribuição uniforme de corrente. Embora o potencial transferido<sup>3</sup> fora do interior da malha seja ligeiramente maior considerando-se uma distribuição uniforme, ainda assim a aplicação de uma distribuição real de corrente elétrica sobre os condutores é mais aconselhável, tendo em vista a precisão dos resultados e o esforço computacional despreendido para o cálculo dos potenciais de interesse.

Para finalizar, mostra-se nas Figs. 4.6a e 4.6b o gráfico tridimensional do potencial na superfície do solo da subestação de Boa Vista para as duas distribuições de corrente (uniforme e não-uniforme). O objetivo da aplicação de hastes em malhas de aterramento justifica-se, tendo em vista a necessidade de se tentar equalizar ao máximo o potencial na superfície do solo, em determinados pontos de interesse. A Fig. 4.6a mostra que para uma distribuição uniforme de corrente isso não ocorre. A uniformidade na distribuição da corrente nos segmentos dos condutores da malha e a contribuição de todos esses segmentos para o cálculo do potencial na superfície do solo em pontos acima das hastes contribuem para valores superiores aos encontrados pela distribuição não-uniforme de corrente, Fig. 4.6b.

---

<sup>3</sup> caso especial do potencial de toque onde o potencial é transferido para fora da área da subestação.

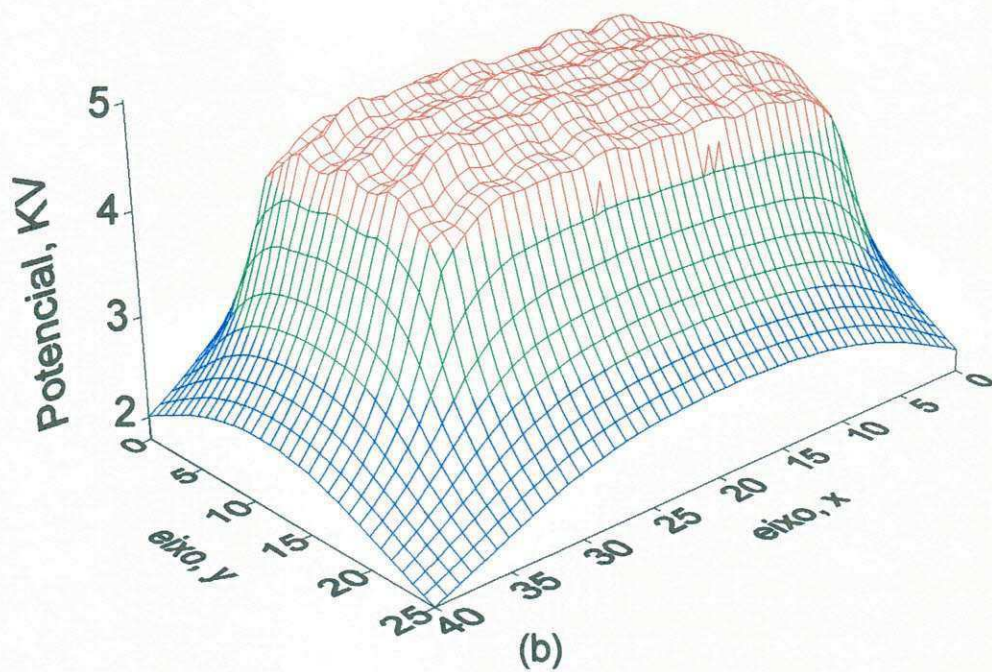
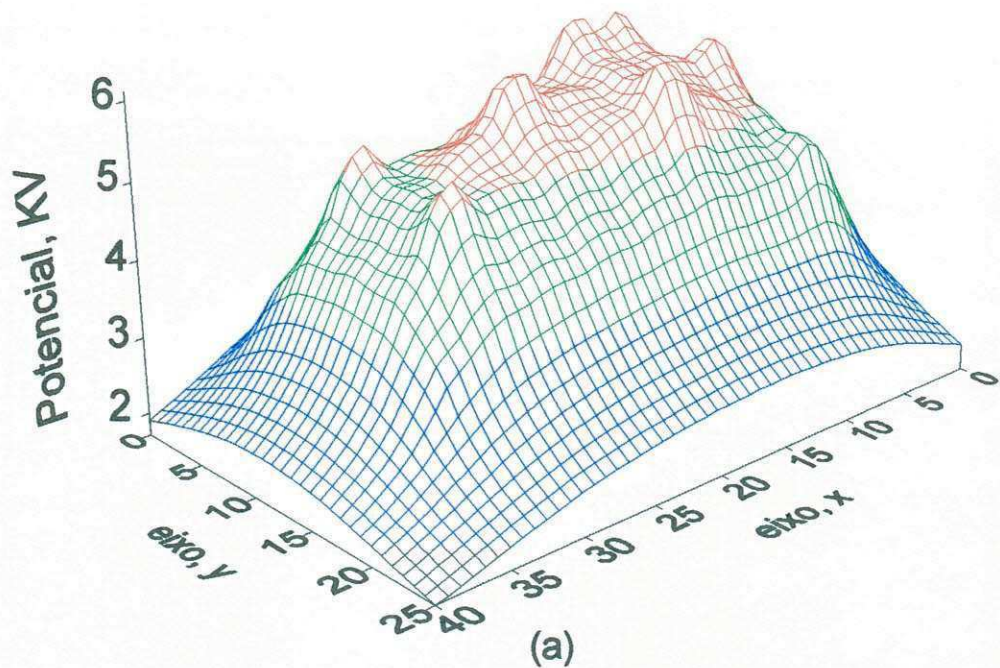


Fig. 4.6 : Potencial na superfície do solo da malha da subestação de Boa Vista.  
(a) Distribuição uniforme de corrente. (b) Distribuição não-uniforme de corrente.

## **5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Este capítulo tem os seguintes objetivos principais: apresentar as conclusões obtidas acerca da metodologia utilizada em termos de melhoria do esforço computacional e exatidão dos resultados encontrados para o cálculo dos potenciais na superfície do solo, apontar as vantagens obtidas da distribuição não-uniforme de corrente nos condutores do sistema de aterramento, sugerir algumas idéias que possam ser utilizadas em paralelo a esta dissertação e desenvolvimento de outros trabalhos.

### **5.1 Conclusões**

O estudo do modelo de eletrodo potencial-constante tornou-se necessário tendo em vista a indisponibilidade de um programa que servisse como fonte de estudo e análises de sistemas de aterramento. Várias são as literaturas encontradas que contemplam tanto o modelo de eletrodo densidade-de-corrente-constante quanto ao modelo de eletrodo potencial-constante. Infelizmente, em nenhuma das obras pesquisadas, foi dada ênfase a um estudo comparativo, em termos de esforço computacional exigido pelos dois modelos. Também não se observa ênfase quanto ao grau de exatidão oferecido, ao se considerar uma distribuição uniforme de corrente sobre os condutores ou se representar a distribuição real de corrente ao longo dos condutores da malha de aterramento.

Dois foram os métodos desenvolvidos e comparados nesse trabalho: matricial e matricial modificado. O método matricial baseia-se no fato de que cada subdivisão do

condutor é aproximada por uma fonte puntual de corrente. Dessa forma, sua aplicação torna-se inviável, para configurações de malhas com dezenas de condutores, pelo fato de envolver um elevado esforço computacional quando se aumenta o número de subdivisões da malha.

Na busca de reduzir esse esforço computacional, procurou-se na literatura um método que pudesse substituir o matricial. O método matricial modificado utilizado nessa dissertação é resultante da combinação dos métodos integral e somatório. A distribuição não-uniforme de corrente pode ser então aproximada por uma função-escada, onde as subdivisões dos condutores, de comprimento finitos, passam a ser representada por segmentos de retas com densidade de corrente constante. O número de subdivisões dos condutores determina a precisão da distribuição não-uniforme de corrente que é representada por uma função-escada. Muitas subdivisões resultaram em uma melhor aproximação dos resultados para o potencial, contudo, o esforço computacional é maior. Uma aplicação apropriada do método matricial modificado requer um compromisso entre precisão e eficiência dos resultados.

Nas simulações de eletrodos isolados e em configurações de malhas, o método matricial modificado apresentou uma redução bastante considerável no esforço computacional exigido em comparações com o método matricial. Essa redução se deve ao fato de ser bem menor o número de subdivisões necessária à obtenção dos resultados dos potenciais. Os resultados encontrado para os potenciais na superfície do solo utilizando-se o método matricial modificado com um número reduzido de subdivisões apresentou valores bem aproximados aos do método matricial.

Na busca de encontra-se uma forma que diminuísse ainda mais o esforço computacional do método matricial modificado, os condutores foram divididos em uma segmentação não-uniforme. Com esse procedimento, a precisão dos resultados foi mantida em um tempo computacional ainda mais reduzido. Foi visto no exemplo G que, para a configuração de malha simulada pelos dois tipos de segmentação (uniforme e não-uniforme), os esforços computacionais foram de 39,6 e 4,5 pu respectivamente, com uma diferença nos resultados para o potencial de 7,68%.

Para validação do programa e aplicação em uma malha realística adotou-se então o método matricial modificado e segmentação uniforme. Tanto o esforço computacional, utilizando esse método, foi reduzido, quanto a precisão dos resultados foi mantida em comparação com outros trabalhos. A utilização de uma distribuição não-uniforme de

corrente no programa mostra-se vantajoso, tendo em vista, não só a representação real de corrente ao longo dos condutores, quanto nos resultados obtidos para o cálculo dos potenciais de segurança para a malha de aterramento.

## 5.2 Sugestões

Durante o desenvolvimento dessa dissertação e com a obtenção dos primeiros resultados, surgiram idéias que poderiam ser implementadas para uma maior complementação do presente trabalho. Muitas delas foram aproveitadas, enquanto outras, infelizmente, não puderam ser tratadas, tendo em vista o risco que o autor corria em fugir dos objetivos iniciais do trabalho.

Como uma forma de colaborar na área de pesquisa de sistemas elétricos, algumas sugestões serão apresentadas, objetivando despertar interesse a outros profissionais para a realização de trabalhos futuros. As sugestões estão divididas em dois blocos:

### a) Modificação na modelagem do solo.

Uma metodologia adotada neste trabalho foi o modelo uniforme para a representação do solo. Isso devido ao fato de oferecer facilidade à formulação matemática que, mesmo assim, apresenta complexidade, devido ao fato de que as equações envolvidas para o desenvolvimento do potencial na superfície do solo são ainda bastante complexas, exigindo um esforço computacional considerável. Isso é percebido quando se analisam as equações do apêndice B, que foram utilizadas no método matricial modificado. A análise desse método pode ser estendida para solos reais, não-uniformes, com duas ou mais camadas com resistividade diferentes. Entretanto, as equações envolvidas para o cálculo dos potenciais na superfície do solo serão bem mais complexas, devido a própria complexidade do modelo do solo envolvido, como também pelo número de reflexões do eletrodo. Entretanto, isso não impossibilita a implementação de um programa. Então a sugestão é a implementação de um programa que dê ênfase à solos não-uniformes e à distribuição real de corrente elétrica nos condutores da malha de aterramento.

### b) Otimização da segmentação

Foi visto no método matricial modificado que a distribuição de corrente em cada segmento dos condutores era representada de maneira uniforme. A representação de uma distribuição não-uniforme de corrente ao longo dos condutores da malha dá-se devido à

contribuição todos os segmentos do condutor, resultando na função-escada. Como a precisão dos resultados para os potenciais e o esforço computacional estão relacionados com o número de subdivisões dos condutores, e tendo em vista que a distribuição de corrente é mais ou menos uniforme ao longo dos condutores exceto nas extremidades e cruzamentos, uma sugestão seria fazer um estudo de otimização do número de subdivisões e dos tipos de segmentação dos elementos da malha, uniformes e não-uniformes.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANSI, IEEE. ANSI/ IEEE Standard 80, **IEEE guide for safety in AC substation grounding**. New-York : ANSI/ IEEE, 1986.
- CAVALCANTI, C. V. A. & SOUZA, B.A. Estratificação do solo do Nordeste em várias camadas usando técnica de otimização. **XI SNPTEE**. 1991.
- DAWALIBI, & MUKHEDKAR, D. Optimum design of substation grounding in a two layer earth structure, part I - analytical study. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-94, p. 252-257, march / april 1975.
- DAWALIBI, & MUKHEDKAR, Parametric analysis of grounding grids. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-98, n. 5, p. 1659-1668, september / october 1979.
- \_\_\_\_\_. & BARBEITO, N. Measurements and Computations of the performance of grounding Systems buried in multiplayer soils. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 6, n. 3, p. 1483-1489, october 1991.
- \_\_\_\_\_. & SOUTHEY, R.D. Behaviour of grounding systems in multiplayer soils : Aparametric analysis. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 9, n. 1, p. 334-340, january 1994.
- ENDRENYI, J. Evaluation of resistivity Tests for design of Station Grounds in non-uniform soil. **IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems** v. PAS-84, n. 12, p. 966-970, december 1963.
- HEPE, R. J. Computation of Potential at surface above an energized grid or other electrode, allowing for non-uniform current distribution. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-98, n. 6, p. 1979-1989, november 1979.
- \_\_\_\_\_. Step potentials and body currents near grounds in two-layer earth. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-98, n. 1, p. 45-57, january / february 1979.

IEEE, **IEEE brown book**, IEEE standard 399-1980, power system analysis. New- York, 1980.

JENSER, C. H. Aterramento em subestações. **Copperweld industries international, INC.**, São Paulo, 1984.

JOY, E. B. et al., Graphical data for Ground Grid Analysis. **IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems**. v. PAS-102, n. 9, p. 3038-3048, september 1983.

JOY, E. B. et al., Analysis Techniques for Power Substation Grounding Systems. **EPRI Report EL-2682**, july 1982, Atlanta, GA.

KRAUS, J. D. & CARVER, K. R., **Eletromagnetismo**, 2<sup>a</sup>. ed., Rio de Janeiro: Guanabara, 1986.

KOSTIC, M. B. & SHIRKOOHI, G. H., Numerical analysis of a class of foundation grounding systems surrounded by two-layers soil. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 8, n. 3, p. 1080-1087, june 1993.

MA, J. & DAWALIBI, F.P. Analisis of Grounding systems in soils with hemispherical layering. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 8, n. 4, p. 1773-1781, october 1993

MELIOPOULOS, A. P. S. **Power system grounding and transients: an introduction**. New York: Marcel Dekker. 1988. 450p.

\_\_\_\_\_. Webb, R. P. & Joy, E. B. Analysis of Grounding Systems. **IEEE Transactions on power Apparatus and Systems**. v. PAS-100, n. 3, p. 1039-1047, march 1981.

SUNDE, E. D. **Earth conduction effects in transmission Systems**. New York: Dover Publications, 1968.

SOUZA, E. V. N. **Potencial produzido por dispersão de corrente em solos de duas camadas**: Uma rotina computacional baseada no método do somatório modificado.

Projeto de dissertação de mestrado submetido ao Colegiado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPb, Campina Grande, setembro, 1996.

SVERAK, J. G. et al , Simplifield Analysis of Eletrical Gradients above a ground grid, part I - How Good is the Present Method ? **IEEE Transactions on power Apparatus and Systems**. v. PAS-103, n. 1, p. 7-23, january 1984.

\_\_\_\_\_, Simplifield Analysis of Eletrical Gradients above a ground grid, part II - The beauty of Improper Approximations for an Efficient Optimization of Progressively Spaced Grids Under a Dominant Safety Constraint. **IEEE Transactions on Power Delivery**. v. 4, n. 1, p. 272-279. january 1989.

\_\_\_\_\_, Optimized Grounding Design Using Variable Spacing Technique. **IEEE Transactions on power Apparatus and Systems**. v. PAS-95, p. 362-374, january 1976.

TAKAHASHI, T. & KAWASE T. Analysis of apparent resistivity in a multi-layer earth structure. **IEEE Transactions on Power Delivery**. v. 5, n. 2, p. 604-610, 1990.

VISACRO, F. S. & PORTELA, C. M. Modelagem de aterramentos elétricos para fenômenos rápidos. **Anais do XII SNPTEE**. Recife, outubro, 1993.

XAVIER, D.C **Aterramento**, Recife, 1981.

## **APÊNDICE**

## APÊNDICE A

A equação básica para o cálculo do potencial na superfície do solo é desenvolvida neste apêndice, a partir da equação de Laplace para ser utilizada nos referidos métodos: do somatório, matricial e matricial modificado.

Considera-se uma seção infinitesimal de condutor enterrado em um solo, cuja resistividade é  $\rho_1$ , admitindo-se que essa seção dispersa para o solo uma corrente elétrica  $I$ , representada por um ponto de fonte de corrente. A localização dessa fonte de corrente é o ponto  $A$ , como está ilustrado na Fig. A.1. O potencial  $V(r, \phi, z)$  na terra satisfaz a equação de Laplace.

$$\nabla^2 V(r, \phi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V(r, \phi, z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V(r, \phi, z)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V(r, \phi, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde  $r, \phi, z$  são as coordenadas do ponto  $B$ , relativo ao sistema de coordenadas cilíndricas mostrado na Fig. A.1. Devido à simetria do problema, a solução da equação de Laplace independe da coordenada  $\phi$ . Então  $V(r, \phi, z) = V(r, z)$ . Nesse caso, a equação A.1 se reduz a:

$$\nabla^2 V(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial V(r, z)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 V(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

A solução dessa equação é obtida em termos de função de Bessel de ordem zero,  $J_0$  :

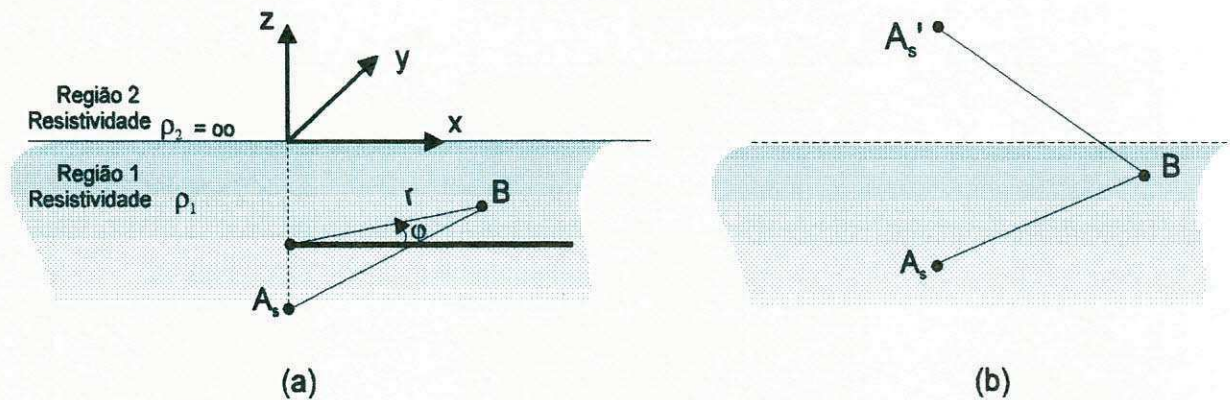


Fig. A.1: (a) Fonte de corrente enterrada em solo de resistividade finita. (b) Reflexão do ponto  $A_s$  em relação ao plano de interface.

$$V(r, z) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \int_{k=0}^{\infty} \theta(k) J_0(kr) e^{\pm kz} dk, \quad (\text{A.3})$$

onde  $\theta(k)$  é uma função arbitrária da variável de integração  $k$ , determinada pelas condições de contorno. Deve-se notar que a solução tem duas formas possíveis, correspondendo aos sinais + e -, que são as propagações nas direções  $+z$  e  $-z$ . A solução geral para o potencial na região 2 da Fig. A.1 é:

$$V(r, z) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \int_0^{\infty} \theta_2(k) J_0(kr) e^{-kz} dk \quad z > 0 \quad (\text{A.4})$$

O termo correspondente à propagação na direção  $+z$  foi omitido da equação A.3 pelo fato de que  $V_2(r, z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ .

A solução geral para o potencial na região 1 da Fig. A.1 é :

$$V_1(r, z) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left[ \int_0^{\infty} J_0(kr) e^{-k|z-z_s|} dk + \int_0^{\infty} \theta_1(k) J_0(kr) e^{kz} dk \right] \quad z \leq 0 \quad (\text{A.5})$$

O termo correspondente à propagação na direção  $-z$  foi omitido da equação A.4 pelo fato de que  $V_1(r, z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow -\infty$ .

Em cada uma das equações A.4 e A.5, há uma função desconhecida que é respectivamente  $\theta_2(k)$  e  $\theta_1(k)$ . Na interface entre os dois meios, ar e solo, o potencial e a corrente elétrica devem ser considerados como uma função contínua. Essa consideração resulta nas seguintes condições de contorno:

$$V_1(r, 0) = V_2(r, 0) \quad \text{para todo } r \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1(r, 0)}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2(r, 0)}{\partial z} \quad (\text{A.7})$$

Note-se que:

$$V_2(r, 0) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \int_0^\infty \theta_2(k) J_0(kr) dk$$

$$V_1(r, 0) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left[ \int_0^\infty J_0(kr) e^{+kz_s} dk + \int_0^\infty \theta_1(k) J_0(kr) dk \right]$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1(r, 0)}{\partial z} = \frac{Ik}{4\pi} \left[ -\int_0^\infty J_0(kr) e^{+kz_s} dk + \int_0^\infty \theta_1(k) J_0(kr) dk \right]$$

$$\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2(r, 0)}{\partial z} = 0$$

Substituindo-se as condições de contorno, obtém-se:

$$\theta_2(k) = e^{+kz_s} + \theta_1(k)$$

$$-e^{kz_s} + \theta_1(k) = 0$$

Resolvendo-se as funções  $\theta_1(k)$  e  $\theta_2(k)$  obtém-se:

$$\theta_1(k) = e^{kz_s}$$

$$\theta_2(k) = 2e^{kz_s}$$

Finalmente a solução geral para o potencial nas regiões 1 e 2 é obtida por :

$$V_1(r, z) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left[ \int_0^\infty J_0(kr) e^{-k|z-z_s|} dk + \int_0^\infty J_0(kr) e^{k(z+z_s)} dk \right] \quad (\text{A.8})$$

$$V_1(r, z) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \int_0^\infty 2J_0(kr) e^{-k(z-z_s)} dk \quad (\text{A.9})$$

As integrais que aparecem na equação A.8 são resolvidas, utilizando-se a seguinte função de Bessel;

$$\int_0^\infty J_0(kr) e^{ka} dk = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

O resultado final é:

$$V_1(r, z) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-z_s)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+z_s)^2}} \right],$$

que, em coordenadas cartesianas, passa a ser:

$$V_1(r, z) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z+z_s)^2}} \right] \quad (\text{A.10})$$



O resultado da equação (A.10) é interpretado da seguinte forma: o potencial na região 1 é igual ao potencial gerado por duas fontes pontuais de corrente  $I$  localizadas nos pontos  $(x_s, y_s, z_s)$  e  $(x_s, y_s, -z_s)$  em uma região de resistividade  $\rho_1$ .

Em outras palavras, a interface entre as duas regiões 1 e 2 tem o efeito de criar uma imagem da fonte puntual com relação ao plano que separa as regiões. Essa interpretação está ilustrada na Fig. A.1 (b).

## APÊNDICE B

Técnicas de análises numéricas para cálculo do potencial na superfície do solo em sistemas de malhas de aterramentos foram desenvolvidas por MELIOPOULOS (1988) para calcular o potencial, utilizando-se a combinação dos métodos integral e matricial.

Serão apresentadas nas Tabelas B.1, B.2 e B.3 as equações básicas para a construção da matriz  $[F]$  e utilização em programas para o cálculo do potencial na superfície do solo, utilizando-se o método matricial modificado baseado, no modelo do potencial-constante.

Tabela B.1 : Equação para o fator de distribuição de potencial entre um segmento de eletrodo e um ponto. (resistência transferida)

Direção do segmento do eletrodo <sup>a,b</sup>	Fator de distribuição de potencial <sup>c</sup> - VDF
Direção - x	$\frac{\rho}{8L\pi} \left[ F_1(x - x_1 + L, A_x^-) - F_1(x - x_1 - L, A_x^-) + F_1(x - x_1 + L, A_x^+) - F_1(x - x_1 - L, A_x^+) \right]$
Direção - y	$\frac{\rho}{8L\pi} \left[ F_1(y - y_1 + L, A_y^-) - F_1(y - y_1 - L, A_y^-) + F_1(y - y_1 + L, A_y^+) - F_1(y - y_1 - L, A_y^+) \right]$
Direção - z	$\frac{\rho}{8L\pi} \left[ F_1(z - z_1 + L, A_z^-) - F_1(z - z_1 - L, A_z^-) + F_1(z + z_1 + L, A_z^-) - F_1(z + z_1 - L, A_z^-) \right]$

<sup>a</sup> Segmento de eletrodo de comprimento  $2L$ .<sup>b</sup> Segmento de eletrodo de comprimento  $2L$ .

$$^c F_1(t, u) = \ln \left[ t + (t^2 + u^2)^{0.5} \right]; \quad A_x^\pm = \left[ (y - y_1)^2 + (z \pm z_1)^2 \right]^{0.5}; \quad A_y^\pm = \left[ (x - x_1)^2 + (z \pm z_1)^2 \right]^{0.5}; \quad A_z^- = \left[ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \right]^{0.5}$$

Tabela B.2 : Equação para o fator de distribuição de potencial entre dois segmentos de eletrodo - ( resistência mútua)

Direção do segmento do eletrodo <sup>a,b</sup>		Fator de distribuição de potencial <sup>c,d</sup> - VDF
Segmento 1	Segmento 2	
Direção - x	Direção - x	$\frac{\rho}{16L_1L_2\pi} [F_2(x_2 - x_1 + L_1 + L_2, B_x^-) - F_2(x_2 - x_1 + L_1 - L_2, B_x^-)$ $- F_2(x_2 - x_1 - L_1 + L_2, B_x^-) + F_2(x_2 - x_1 - L_1 - L_2, B_x^-)$ $+ F_2(x_2 - x_1 + L_1 + L_2, B_x^+) - F_2(x_2 - x_1 + L_1 - L_2, B_x^+)$ $- F_2(x_2 - x_1 - L_1 + L_2, B_x^+) + F_2(x_2 - x_1 - L_1 - L_2, B_x^+)$
Direção - y	Direção - y	$\frac{\rho}{16L_1L_2\pi} [F_2(y_2 - y_1 + L_1 + L_2, B_y^-) - F_2(y_2 - y_1 + L_1 - L_2, B_y^-)$ $- F_2(y_2 - y_1 - L_1 + L_2, B_y^-) + F_2(y_2 - y_1 - L_1 - L_2, B_y^-)$ $+ F_2(y_2 - y_1 + L_1 + L_2, B_y^+) - F_2(y_2 - y_1 + L_1 - L_2, B_y^+)$ $- F_2(y_2 - y_1 - L_1 + L_2, B_y^+) + F_2(y_2 - y_1 - L_1 - L_2, B_y^+)$

Tabela B.2 : ( continuação)

Direção do segmento do eletrodo <sup>a,b</sup>		Fator de distribuição de potencial <sup>c,d</sup> - VDF
Segmento 1	Segmento 2	
Direção - z	Direção - z	$\frac{\rho}{16L_1L_2\pi} [ F_2(z_2 - z_1 + L_1 + L_2, B_z^-) - F_2(z_2 - z_1 + L_1 - L_2, B_z^-) \\ - F_2(z_2 - z_1 - L_1 + L_2, B_z^-) + F_2(z_2 - z_1 - L_1 - L_2, B_z^-) \\ + F_2(z_2 + z_1 + L_1 + L_2, B_z^-) - F_2(z_2 + z_1 + L_1 - L_2, B_z^-) \\ - F_2(z_2 + z_1 - L_1 + L_2, B_z^-) + F_2(z_2 + z_1 - L_1 - L_2, B_z^-) ]$
Direção - x	Direção - y	$\frac{\rho}{16L_1L_2\pi} [ F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 - z_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 - z_1) \\ - F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 - z_1) + F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 - z_1) \\ + F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 + z_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 + z_1) \\ - F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 + z_1) + F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 + z_1) ]$

Tabela B.2 : ( continuação)

Direção do segmento do eletrodo <sup>a,b</sup>		Fator de distribuição de potencial <sup>c,d</sup> - VDF
Segmento 1	Segmento 2	
Direção - x	Direção - z	$\frac{\rho}{16L_1L_2\pi} [F_3(x_2 - x_1 + L_1, z_2 - z_1 + L_2, y_2 - y_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, z_2 - z_1 - L_2, y_2 - y_1)$ $- F_3(x_2 - x_1 - L_1, z_2 - z_1 + L_2, y_2 - y_1) + F_3(x_2 - x_1 - L_1, z_2 - z_1 - L_2, y_2 - y_1)$ $+ F_3(x_2 - x_1 + L_1, z_2 + z_1 + L_2, y_2 - y_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, z_2 + z_1 - L_2, y_2 - y_1)$ $- F_3(x_2 - x_1 - L_1, z_2 + z_1 + L_2, y_2 - y_1) + F_3(x_2 - x_1 - L_1, z_2 + z_1 - L_2, y_2 - y_1)$
Direção - y	Direção - z	$\frac{\rho}{16L_1L_2\pi} [F_3(y_2 - y_1 + L_1, z_2 - z_1 + L_2, x_2 - x_1) - F_3(y_2 - y_1 + L_1, z_2 - z_1 - L_2, x_2 - x_1)$ $- F_3(y_2 - y_1 - L_1, z_2 - z_1 + L_2, x_2 - x_1) + F_3(y_2 - y_1 - L_1, z_2 - z_1 - L_2, x_2 - x_1)$ $+ F_3(y_2 - y_1 + L_1, z_2 + z_1 + L_2, x_2 - x_1) - F_3(y_2 - y_1 + L_1, z_2 + z_1 - L_2, x_2 - x_1)$ $- F_3(y_2 - y_1 - L_1, z_2 + z_1 + L_2, x_2 - x_1) + F_3(y_2 - y_1 - L_1, z_2 + z_1 - L_2, x_2 - x_1)$

<sup>a</sup> Comprimento do segmento de eletrodo 1 é  $2L_1$ . Comprimento do segmento de eletrodo 2 é  $2L_2$ .

<sup>b</sup> Segmento do eletrodo 1 está centrado em  $(x_1, y_1, z_1)$ ; Segmento do eletrodo 2 está centrado em  $(x_2, y_2, z_2)$ .

$$B_x^\pm = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 \pm z_1)^2} ; B_y^\pm = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 \pm z_1)^2} ; B_z^\pm = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ; {}^c F_2(t, u) = t \ln[t + \sqrt{t^2 + u^2}] - \sqrt{t^2 + u^2} ;$$

$${}^d F_3(t, u, v) = -u + u \cdot \ln[t + \sqrt{(t^2 + u^2 + v^2)}] + t \cdot \ln[u + \sqrt{(t^2 + u^2 + v^2)}] + 2v \cdot \tan^{-1} \frac{t + u + \sqrt{(t^2 + u^2 + v^2)}}{v}$$

Tabela B.3 : Equação para o fator de distribuição de potencial próprio .

Direção do segmento do eletrodo <sup>a,b</sup>	Fator de distribuição de potencial <sup>c</sup> - VDF
Direção - x	$\frac{\rho}{16L^2\pi} [F_2(2L,a) + F_2(-2L,a) + 2a + F_2(2L, z_1 \sqrt{2}) + F_2(-2L, z_1 \sqrt{2}) + 2 z_1 \sqrt{2}]$
Direção - y	$\frac{\rho}{16L^2\pi} [F_2(2L,a) + F_2(-2L,a) + 2a + F_2(2L, z_1 \sqrt{2}) + F_2(-2L, z_1 \sqrt{2}) + 2 z_1 \sqrt{2}]$
Direção - z	$\frac{\rho}{16L^2\pi} [F_2(2L,a) + F_2(-2L,a) + 2a + F_2(2 z_1 +2L,a) + F_2(2 z_1 -2L,a) + 2F_2(2 z_1 ,a)]$

<sup>a</sup> Segmento de eletrodo de comprimento  $2L$ .

<sup>b</sup> Segmento de eletrodo centrado no ponto  $(x_1, y_1, z_1)$ .

<sup>c</sup>  $F_2(t,u) = t \ln[t + \sqrt{t^2 + u^2}] - \sqrt{t^2 + u^2}$ .