

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
NÍVEL MESTRADO

Síntese de Funções Racionais para Estudos de Transitórios
Envolvendo Linhas de Transmissão

Djalma de Melo Carvalho Filho

Campina Grande - Paraíba
2000

Djalma de Melo Carvalho Filho

Síntese de Funções Racionais para Estudos de Transitórios
Envolvendo Linhas de Transmissão

Dissertação apresentada à Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Mestre em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Energia

Washington Luiz Araújo Neves, Ph.D.
Orientador

Campina Grande - Paraíba
2000

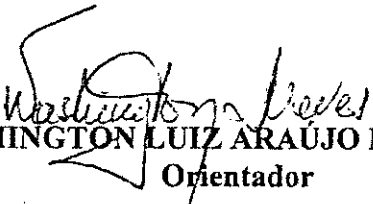


C331s	<p>Carvalho Filho, Djalma de Melo Síntese de funções racionais para estudos de transitorios envolvendo linhas de transmissão / Djalma de Melo Carvalho Filho. - Campina Grande, 2000. 116 f.</p> <p>Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia.</p> <p>1. Linhas de Transmissão - Engenharia Elétrica 2. Modelagem - Linhas de Transmissão - Estudos de Transitorios 3. Síntese de Funções Racionais - Linhas de Transmissão 4. Dissertação I. Neves, Washington Luiz Araújo II. Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB) III. Título</p> <p>CDU 621.372.2(043)</p>
-------	--

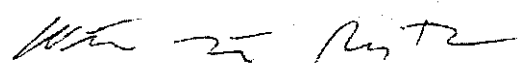
SÍNTESE DE FUNÇÕES RACIONAIS PARA ESTUDOS DE TRANSITÓRIOS
ENVOLVENDO LINHAS DE TRANSMISSÃO

DJALMA DE MELO CARVALHO FILHO

Dissertação Aprovada em 21.07.2000


PROF. WASHINGTON LUIZ ARAÚJO NEVES, Ph.D., UFPB
Orientador


PROF. BENEMAR ALENCAR DE SOUZA, D.Sc., UFPB
Componente da Banca


PROF. WELLINGTON SANTOS MOTA, Ph.D., UFPB
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB
Julho - 2000

Dedico este trabalho
a minha esposa e
aos meus pais

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado força para concluir este trabalho;

A minha esposa, Thamara, pelo amor e compreensão, e que sempre presente me incentivou a prosseguir e concluir este projeto;

Aos meus pais e familiares, pelo carinho e constante incentivo;

Ao Professor Washington Neves pela dedicação e amizade, nunca medindo esforços para que eu conseguisse atingir meus objetivos;

Ao Professor Benemar Alencar de Souza pelas contribuições durante a etapa de correções;

Ao amigo Alécio Barreto Fernandes pela colaboração e incentivo durante toda a elaboração deste trabalho;

Aos amigos do laboratório: Damásio, Diana, Mário e Hélio pela amizade e apoio;

Ao Professor Edson Guedes por ter sido o primeiro a acreditar no meu trabalho;

Aos funcionários do Laboratório de Alta Tensão e em especial a Selma;

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas.....	ix
Resumo.....	xi
Abstract.....	xii
Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1. Objetivos.....	6
Capítulo 2 - Representação de Linhas de Transmissão no Domínio Modal. 7	7
2.1. Fenômeno de Ondas Viajantes em Linhas Monofásicas.....	7
2.2. Equações de Ondas em Linhas de Transmissão Polifásicas	10
2.3. Teoria de Transformação Modal.....	12
Capítulo 3 - Modelos Computacionais.....	15
3.1. Modelo de Dommel	15
3.2. Modelo de Budner.....	18
3.3. Modelo de Snelson, Meyer e Dommel.....	19
3.4. Modelo de J. Marti	23
3.5. Síntese de Funções Racionais no Plano Z e o Modelo de Noda Nagaoka e Ametani.....	29
Capítulo 4 - Descrição dos Métodos Implementados.....	31
4.1. Considerações iniciais.....	31
4.2. Identificação de parâmetros.....	33

4.3. O Algoritmo implementado para ajustes utilizando o Plano S	
(Método Não-Linear em S).....	34
4.3.1. Algoritmo de Cálculo do Fator de Propagação.....	35
4.3.2. Algoritmo de Cálculo da Admitância Característica.....	38
4.3.3. Considerações adicionais sobre a Rotina Implementada.	39
4.4. Algoritmos implementados para Ajuste utilizando o Plano Z...	41
4.4.1. Método de Ajuste Linear - Resolução por Transformação	
de Householder.....	42
4.4.2. Método de Ajuste Linear - Resolução por Decomposição	
do Valor Singular (svd).....	44
4.4.3. Método de Ajuste Não-Linear - Método de Levenberg-	
-Marquardt.....	45
Capítulo 5 - Análise dos Resultados	46
5.1. Síntese de Circuitos RLC.....	46
5.1.1. Caso 1 - Pólos e zeros reais.....	48
5.1.2. Caso 2 - Pólos e zeros complexos.....	65
5.1.3. Considerações sobre os Ajustes no Plano S e no Plano Z	
na Síntese dos Circuitos RLC.....	80
5.2. Linha de Transmissão Monofásica.....	80
5.2.1. Admitância Característica.....	84
5.2.2. Fator de Propagação.....	90
Capítulo 6 - Conclusão	95
Referências Bibliográficas	97

Apêndice A - Convolução Recursiva.....	103
Apêndice B - Método dos Mínimos Quadrados Generalizado.....	104
B.1. Resolução por Equações Normais.....	105
B.2. Resolução por Decomposição do Valor Singular.....	108
Apêndice C - A Transformação de Householder e o Método de Golub..	110
Apêndice D - Método de Ajuste Não-Linear.....	113
D.1. O Método de Levenberg-Marquardt.....	115

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Circuito equivalente para um elemento de linha monofásica	7
Figura 3.1 - Linha de Transmissão sem perdas.....	16
Figura 3.2 - Circuitos equivalentes de Norton e de Thévenin de uma linha de transmissão sem perdas.....	17
Figura 3.3 - Circuitos equivalentes de Norton e de Thévenin de uma linha de transmissão com parâmetros dependentes da frequência segundo Dommel & Meyer.....	22
Figura 3.4 - Linha de transmissão segundo modelo de J. Marti.....	23
Figura 3.5 - Circuitos equivalentes de Norton e de Thévenin de uma linha de transmissão com parâmetros dependentes da frequência segundo J. Marti.....	24
Figura 3.6 - Equivalente RC para a impedância característica.....	25
Figura 4.1 - Definição da Frequência de Referência para o fator de propagação.	36
Figura 4.2 - Definição da Frequência de Referência para a admitância característica.....	39
Figura 4.3 - Critério de estabilidade no plano z	44
Figura 5.1 - Circuito RLC proposto	46
Figura 5.2 - Módulo da Função de Transferência em baixas frequências.....	48
Figura 5.3 - Erro percentual no ajuste não-linear em s para baixas frequências..	49
Figura 5.4 - Fase da Função de Transferência em baixas frequências.....	49

Figura 5.5 - Erro de fase no ajuste não-linear em s em baixas frequências.....	50
Figura 5.6 - Módulo da Função de Transferência em altas frequências.....	50
Figura 5.7 - Erro percentual no ajuste não-linear em s para altas frequências.....	51
Figura 5.8 - Fase da função de transferência em altas frequências.....	51
Figura 5.9 - Erro de fase no ajuste não-linear em s em altas frequências.....	52
Figura 5.10 - Módulo da Função de Transferência em baixas frequências	52
Figura 5.11 - Erro percentual para ajustes no plano z para baixas frequências...	53
Figura 5.12 - Fase da função de transferência em baixas frequências.....	53
Figura 5.13 - Erro de fase para ajustes em z em baixas frequências	54
Figura 5.14 - Módulo da Função de Transferência em altas frequências.....	54
Figura 5.15 - Erro percentual para ajustes no plano z em altas frequências.....	55
Figura 5.16 - Fase da função de transferência em altas frequências.....	55
Figura 5.17 - Erro de fase para ajustes no plano z em altas frequências.....	56
Figura 5.18 - Módulo da função de transferência para toda a faixa de frequência	56
Figura 5.19 - Erro percentual para ajustes no plano z para toda a faixa de frequência.....	57
Figura 5.20 - Fase da função de transferência para toda a faixa de frequência...	57
Figura 5.21 - Erro de fase para ajustes no plano z para toda a faixa de frequência.....	58
Figura 5.22 - Erro percentual utilizando ajuste linear (Householder-Golub) aumentando-se o número de pólos e zeros em altas frequências.....	62
Figura 5.23 - Erro de fase utilizando ajuste linear (Householder-Golub) aumentando-se o número de pólos e zeros em altas frequências.....	63

Figura 5.24 - Erro percentual utilizando ajuste linear (Householder-Golub) com 7 pólos e 7 zeros e ajuste linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros.....	63
Figura 5.25 - Erro de fase utilizando ajuste linear (Householder-Golub) com 7 pólos e 7 zeros e ajuste linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros.....	64
Figura 5.26 - Erro percentual utilizando ajuste linear (Householder-Golub) com 16 pólos e 16 zeros e ajuste linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros.....	64
Figura 5.27 - Erro de fase utilizando ajuste linear (Householder-Golub) com 16 pólos e 16 zeros e ajuste linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros.....	65
Figura 5.28 - Módulo da função de transferência em baixas frequências.....	66
Figura 5.29 - Erro percentual no ajuste não-linear em s para baixas frequências..	66
Figura 5.30 - Fase da função de transferência em baixas frequências.....	67
Figura 5.31 - Erro de fase no ajuste não-linear em s em baixas frequências.....	67
Figura 5.32 - Módulo da função de transferência em altas frequências.....	68
Figura 5.33 - Erro percentual no ajuste não-linear em s para altas frequências...	68
Figura 5.34 - Fase da função de transferência em altas frequências.....	69
Figura 5.35 - Erro de fase no ajuste não-linear em s em altas frequências.....	69
Figura 5.36 - Módulo da função de transferência em baixas frequências.....	70
Figura 5.37 - Erro percentual para ajustes no plano z para baixas frequências....	70
Figura 5.38 - Fase da função de transferência em baixas frequências.....	71
Figura 5.39 - Erro de fase para ajustes em z em baixas frequências.....	71
Figura 5.40 - Módulo da função de transferência em altas frequências.....	72
Figura 5.41 - Erro percentual para ajustes no plano z para altas frequências.....	72
Figura 5.42 - Fase da função de transferência em altas frequências.....	73

Figura 5.43 - Erro de fase para ajustes no plano z em altas frequências.....	73
Figura 5.44 - Módulo da função de transferência para toda a faixa de frequência	74
Figura 5.45 - Erro percentual para ajustes no plano z para toda a faixa de frequência.....	74
Figura 5.46 - Fase da função de transferência para toda a faixa de frequência...	75
Figura 5.47 - Erro de fase para ajustes no plano z para toda a faixa de frequência.....	75
Figura 5.48 - Erro percentual utilizando ajuste linear (Householder-Golub) com 16 pólos e 16 zeros e ajuste linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros.....	79
Figura 5.49 - Erro de fase utilizando ajuste linear (Householder-Golub) com 16 pólos e 16 zeros e ajuste linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros.....	79
Figura 5.50 - Linha de transmissão monofásica	81
Figura 5.51 - Módulo da admitância característica	82
Figura 5.52 - Fase da admitância característica.....	82
Figura 5.53 - Módulo do fator de propagação	83
Figura 5.54 - Fase do fator de propagação.....	83
Figura 5.55 - Erro percentual para ajustes no plano s para a admitância característica.....	85
Figura 5.56 - Erro de fase para ajustes no plano s para a admitância característica.....	85
Figura 5.57 - Erro percentual para ajustes no plano z para a admitância característica.....	86

Figura 5.58 - Erro de fase para ajustes no plano z para a admitância característica.....	86
Figura 5.59 - Erro percentual para ajustes no plano z considerando toda a faixa de frequência	89
Figura 5.60 - Erro de fase para ajustes no plano z considerando toda a faixa de frequência	89
Figura 5.61 - Erro percentual para ajustes no plano s para o fator de propagação.....	91
Figura 5.62 - Erro de fase para ajustes no plano s para o fator de propagação...	91
Figura 5.63 - Erro percentual para ajustes no plano z para o fator de propagação.....	93
Figura 5.64 - Erro de fase para ajustes no plano z para o fator de propagação..	93
Figura 5.65 - Erro percentual para ajustes no plano z. Comparação entre o ajuste linear (Householder-Golub) e o ajuste linear (svd) para aproximações de mesma ordem.....	94
Figura 5.66 - Erro de fase para ajustes no plano z. Comparação entre o ajuste linear (Householder-Golub) e o ajuste linear (svd) para aproximações de mesma ordem.....	94
Figura B.1 - Desenho esquemático da matriz do problema de ajuste A	105

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 - Resultados obtidos a partir do Ajuste Não-linear no plano s.....	59
Tabela 5.2 - Pólos e zeros obtidos a partir do Ajuste Não-linear no plano s.....	59
Tabela 5.3 - Resultados obtidos para Ajustes no plano z	60
Tabela 5.4 - Pólos e zeros em s obtidos a partir de ajustes no plano z	60
Tabela 5.5 - Resultados obtidos a partir do Ajuste Não-linear no plano s	76
Tabela 5.6 - Pólos e zeros obtidos a partir do Ajuste Não-linear no plano s	76
Tabela 5.7 - Resultados obtidos para ajustes no plano z	77
Tabela 5.8 - Pólos e zeros em s obtidos a partir de ajustes no plano z	77
Tabela 5.9 - Dados da linha de transmissão monofásica.....	81
Tabela 5.10 - Resultados obtidos para o ajuste da admitância característica no plano s	84
Tabela 5.11 - Resultados obtidos para o ajuste da admitância característica no plano z	86
Tabela 5.12 - Resultados obtidos para o ajuste da admitância característica no plano z para a faixa de frequência de 100Hz-1MHz.....	88
Tabela 5.13 - Resultados obtidos para o ajuste do fator de propagação no plano s	90
Tabela 5.14 - Resultados obtidos para o ajuste do fator de propagação no plano z	92

Tabela 5.15 - Comparação entre Ajuste Linear por Householder-Golub e Ajuste Linear por decomposição (svd) para o fator de propagação no plano z com polinômios de mesma ordem.....	92
--	----

Resumo

Para representar uma linha de transmissão corretamente em programas como o EMTP (*Electromagnetic Transients Program*), é necessário levar em consideração a dependência dos seus parâmetros em relação à frequência. Nestes programas, linhas polifásicas são inicialmente desacopladas através da transformação modal e cada modo é analisado como uma linha monofásica. No domínio da frequência, uma linha de transmissão é representada pela sua admitância característica $Y_c(\omega)$ e o fator de propagação $A(\omega)$. Neste trabalho, é apresentada uma revisão de modelos de linhas de transmissão aéreas com parâmetros dependentes da frequência. Diferentes métodos de ajuste são propostos para obter funções polinomiais racionais de baixa ordem que aproximam $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$. São considerados ajustes no plano z e no plano s . Os métodos de ajuste no plano z produzem resultados precisos para a síntese de circuitos RLC e para aproximações de $A(\omega)$. Para a admitância característica $Y_c(\omega)$, o sucesso da modelagem no plano z depende da faixa de frequência considerada. Mostra-se ainda que todo método de otimização deve realizar simultaneamente ajustes das curvas de módulo e de fase, de forma a garantir melhores resultados. As técnicas apresentadas podem também ser empregadas no desenvolvimento de equivalentes de rede dependentes da frequência e no projeto de filtros passivos.

Abstract

In order to accurately represent a transmission line in programmes such as the EMTP (*Electromagnetic Transients Program*), it is necessary to take into account the frequency-dependence of its parameters. In such programmes, multiphase lines are first decoupled through modal transformation matrices and each mode is subsequently analysed as a single-phase line. In frequency-domain a transmission line is perfectly defined by its characteristic admittance $Y_c(\omega)$ and the propagation constant $A(\omega)$. In this work, an overview of overhead frequency-dependent transmission line models is presented. Different methods are proposed to fit rational functions to $Y_c(\omega)$ and $A(\omega)$. Both z-domain and s-domain approaches are considered. Z-domain fitting is shown to be effective when obtaining approximations to the transfer function of RLC circuits and to the propagation constant $A(\omega)$. When fitting rational functions to $Y_c(\omega)$, the success of the z-domain formulation proved to be dependent on the range of frequency considered. It is also shown that any optimization procedure should fit phase and magnitude simultaneously so as to ensure better results. The presented techniques can also be applied to the development of frequency-dependent network equivalents (FDNE) and the design of passive filters.

Capítulo 1

Introdução

O estudo de transitórios eletromagnéticos é fundamental durante o projeto de um sistema de energia elétrica. Através da análise de transitórios eletromagnéticos é possível dimensionar os demais equipamentos elétricos de forma a reduzir o risco de ruptura do isolamento quando da ocorrência de surtos de tensão. No caso de sistemas já em operação, o estudo de transitórios eletromagnéticos é também bastante importante pois mediante este é possível identificar a causa de falhas, permitindo a correção imediata destes sistemas.

A confiabilidade de um sistema de energia elétrica é determinada pela frequência e duração de interrupções no suprimento. Muitas vezes estas interrupções são provocadas pela ocorrência de sobretensões que em algumas situações chegam a comprometer o isolamento de equipamentos. Portanto, as sobretensões podem ser classificadas em:

- *Sobretensões externas*: Aquelas que são resultantes exclusivamente de descargas atmosféricas.
- *Sobretensões internas*: Aquelas que são geradas internamente e são comumente denominadas *surtos de manobra*. Ocorrem devido à mudança brusca da condição de operação ou configuração dos sistemas, tais como: energização ou

desenergização de elementos do circuito, início ou interrupção de faltas e rejeição de carga.

Durante o processo de planejamento de um sistema de energia elétrica, o projetista tem o compromisso de realizar um projeto economicamente viável e ao mesmo tempo apresentando um alto nível de confiabilidade. O projeto deve ser idealizado de forma a garantir o menor distúrbio na operação e o mínimo de prejuízo no que se refere a equipamentos elétricos, quando da ocorrência de faltas. Para tanto, faz-se necessário determinar a magnitude, forma, frequência e duração das sobretensões, e adaptar as características de suportabilidade do isolamento aos esforços aos quais o equipamento poderá ser submetido.

Para tensões de operação de até 230kV, o nível de isolamento das linhas e dos equipamentos é definido unicamente pela necessidade de proteger o sistema de descargas atmosféricas. Para tensões de operação entre 230kV e 700kV, as operações de chaveamento, assim como os surtos atmosféricos, são determinantes do nível de isolamento. Para tensões acima de 700kV, somente os surtos de manobra são considerados para a determinação do nível de isolamento do sistema. [GRAINGER et al, 1994].

O comportamento dinâmico de um sistema de energia elétrica pode ser caracterizado por equações diferenciais. Devido à complexidade dos sistemas reais, a solução analítica se torna inviável. Para a utilização de métodos computacionais é preciso modelar os diversos elementos que compõem o sistema.

Para ser realmente fiel o modelo de linha de transmissão deve incluir a natureza distribuída e a dependência da frequência de seus parâmetros [HUMPAGE, 1982; MARTI et al, 1985; COSTA Jr.,1995; FERNANDES, 1996; NGUYEN et al,

1997; TAVARES et al, 1997]. Para frequências variando de 0,1 Hz a 50 MHz [CIGRE 1990], a resistência e a indutância das linhas de transmissão variam significativamente devido às características de retorno pela terra, efeito pelicular e ao acoplamento mútuo existente entre as fases. A capacitância é função exclusivamente da geometria da linha e, portanto, permanece constante com a frequência [GALLOWAY et al, 1964; DOMMEL, 1996]. Ao levarmos em consideração a variação de parâmetros com a frequência, estamos, no entanto, aumentando os esforços computacionais. Por outro lado, a utilização de modelos de linha de transmissão com parâmetros constantes, em muitos casos, implica distorção das formas de onda e picos elevados de tensão devido à amplificação dos harmônicos mais elevados [MARTI, 1982].

Ao longo das últimas décadas grande progresso foi feito na elaboração de programas computacionais para simulações de transitórios eletromagnéticos. Programas do tipo EMTP (*Electromagnetic Transients Program*), inicialmente desenvolvido na concessionária americana BPA (*Bonneville Power Administration*) com base em estudos realizados por DOMMEL (1969), são talvez os mais utilizados para o estudo do comportamento dinâmico de sistemas de energia elétrica.

O EMTP utiliza as vantagens de uma análise no domínio do tempo para obter a solução. Mudanças súbitas na configuração do sistema e a modelagem de elementos não-lineares, podem ser considerados mais facilmente que em métodos de análise que empregam o domínio da frequência. A solução é então determinada para cada passo de tempo Δt , em geral, prefixado. Partindo-se das condições iniciais em $t=0$, as tensões em cada nó do sistema em análise são determinadas em $t=\Delta t, 2.\Delta t, 3.\Delta t, \dots$, até o tempo máximo de simulação $t_{m\acute{a}x}$. No processo de cálculo das tensões e correntes em cada terminal, é necessário conhecer as tensões e correntes até um certo tempo

anterior, isto é, em $t-1.\Delta t$, $t-2.\Delta t$, $t-3.\Delta t$, ... $t-\tau$ (sendo τ o tempo de propagação de ondas ou tempo de trânsito da linha).

A representação correta de uma linha de transmissão em programas como o EMTP é tarefa bastante difícil devido ao acoplamento existente entre as fases e à forte dependência de seus parâmetros com a frequência. Ao longo das duas últimas décadas vários modelos foram propostos. Entre os quais podemos destacar:

a) Modelos no domínio modal

Nestes modelos as linhas polifásicas são primeiramente desacopladas através da utilização de matrizes de transformação modal [WEDEPOHL, 1963; DOMMEL, 1969]. Desta forma, cada modo pode ser analisado como um circuito monofásico. Para a transição entre os domínios de modos e fases é utilizada uma matriz de transformação complexa, função dos parâmetros da linha e, por esta razão, também dependente da frequência. Com o objetivo de evitar convoluções no tempo nas transições entre os domínios modal e de fases, costuma-se considerar a matriz de transformação real e constante com a frequência. Este procedimento é válido para linhas de transmissão aéreas que apresentam alto grau de simetria, visto que nestes casos as matrizes de transformação são praticamente constantes com a frequência [TAVARES et al, 1997]. O modelo proposto por J. MARTI (1982) é o mais comumente. Várias técnicas para aumentar a eficiência destes modelos já foram propostas [HUMPAGE et al, 1980; MARTI, 1982; FERNANDES, 1996; TAVARES et al, 1997].

b) Modelos no domínio de fases

Nestes modelos procura-se evitar a transformação modal e, conseqüentemente, possíveis erros decorrentes da substituição de matrizes de transformação modais complexas e fortemente dependentes da frequência por matrizes reais e constantes com a frequência, como no caso de linhas aéreas polifásicas assimétricas e cabos subterrâneos [CASTELLANOS et al, 1995; MORCHED et al, 1999]. A modelagem da linha de transmissão é realizada diretamente no domínio de fases. Entre as técnicas já propostas podemos destacar: a aplicação de matrizes “idempotent” [CASTELLANOS et al, 1995; CASTELLANOS et al, 1997; MARCANO, 1996; MARCANO et al, 1997], a técnica recursiva bilateral [ANGELIDIS et al, 1995], o método de transferência ARMA (*Auto Regressive Moving Average*) [NAKANISHI et al, 1986; NODA et al 1996; NODA et al, 1997; NGUYEN et al, 1997] e o método de ajuste vetorial (*Vector fitting*) [GUSTAVSEN et al, 1997; MORCHED et al, 1999].

Um procedimento comumente empregado no desenvolvimento dos modelos acima é o ajuste da resposta em frequência de uma linha de transmissão a funções polinomiais racionais. Estas funções polinomiais racionais poderão ser escritas tanto no plano s como no plano z , utilizando a transformada de Laplace e a transformada z , respectivamente [MARTI, 1982; NODA et al, 1996; MORCHED et al, 1999]. A transição frequência-tempo para posterior análise no domínio do tempo é então realizada através de transformadas inversas. A qualidade destas aproximações é o que determina a

precisão do modelo implementado. A utilização de funções racionais de ordem elevada pode resultar em erros locais significativos em extremos do espectro de frequência [FERNANDES et al, 1997]. Por outro lado, funções de baixa ordem, além de mais estáveis possibilitam simulações em tempo real [SOUSA et al, 1997].

1.1. Objetivos

O objetivo deste trabalho é estudar a modelagem de linhas de transmissão com parâmetros distribuídos dependentes da frequência no domínio modal realizando uma análise comparativa entre modelos que empregam o plano s para a síntese de funções racionais e outros que utilizam a transformada z como ferramenta. As vantagens e desvantagens de cada abordagem serão apresentadas.

Mostra-se que os métodos apresentados podem ser empregados de forma adequada na síntese de circuitos a parâmetros concentrados e também a parâmetros distribuídos. As técnicas apresentadas são particularmente úteis para o desenvolvimento de equivalentes de rede dependentes da frequência e para o projeto de filtros passivos.

A eficiência destes modelos é avaliada mediante uma análise de resultados obtidos com o auxílio do MICROTRAN[®] [MICROTRAN, 1992].

Capítulo 2

Representação de Linhas de Transmissão no Domínio Modal

2.1. Fenômeno de Ondas Viajantes em Linhas de Transmissão Monofásicas

Consideremos, inicialmente, o circuito equivalente de um elemento incremental de uma linha de transmissão monofásica com um condutor e retorno pela terra, como mostra a Figura 2.1.

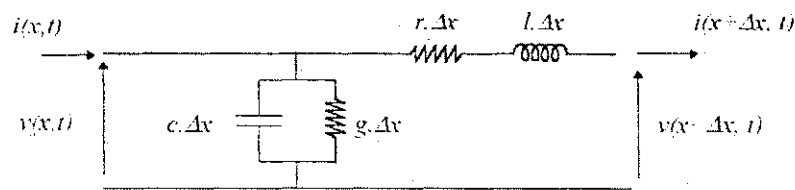


Figura 2.1 - Circuito equivalente para um elemento de linha monofásica.

Os parâmetros de linha são considerados uniformemente distribuídos, e portanto, temos:

r - Resistência em Ωkm ;

g - Condutância de dispersão em $\Omega^{-1} km$;

l - Indutância em $H km$;

c - Capacitância em F/km .

A partir do circuito equivalente, a queda de tensão na linha pode ser obtida por:

$$v(x,t) = v(x + \Delta x, t) + r \cdot \Delta x \cdot i(x + \Delta x, t) + l \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t}$$

$$v(x + \Delta x, t) - v(x, t) = -r \cdot \Delta x \cdot i(x + \Delta x, t) - l \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t}$$

Dividindo a equação anterior por Δx obtemos:

$$\frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{\Delta x} = -r \cdot i(x + \Delta x, t) - l \cdot \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t}$$

Quando, $\Delta x \rightarrow 0$, temos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -r \cdot i - l \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{ou,}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = r \cdot i + l \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.1)$$

Analogamente, a corrente de linha pode ser obtida por:

$$i(x,t) = i(x + \Delta x, t) + g \cdot \Delta x \cdot v(x, t) + c \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$$

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) - g \cdot \Delta x \cdot v(x, t) - c \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$$

$$i(x + \Delta x, t) - i(x, t) = -g \cdot \Delta x \cdot v(x, t) - c \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$$

Dividindo a equação anterior por Δx obtemos:

$$\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = -g \cdot v(x, t) - c \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$$

Quando, $\Delta x \rightarrow 0$, temos:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g \cdot v + c \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.2)$$

As equações diferenciais (2.1) e (2.2) governam as variações da tensão e da corrente no espaço e no tempo.

No domínio da frequência (2.1) e (2.2) se tornam

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= (R + j\omega L)I = Z \cdot I \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= (G + j\omega C)V = Y \cdot V \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que V e I representam os fasores de tensão e corrente, respectivamente.

Diferenciando-se (2.3) com relação a x , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -Z \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= -Y \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) em (2.4) obtemos as equações telegráficas abaixo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= ZYV \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= YZI \end{aligned} \quad (2.5)$$

A solução do sistema de equações diferenciais (2.5) é dada por

$$\begin{aligned} V &= V_f \cdot e^{-\gamma x} + V_b \cdot e^{-\gamma x} \\ I &= \frac{1}{Z_c} \cdot V_f \cdot e^{-\gamma x} - \frac{1}{Z_c} \cdot V_b \cdot e^{-\gamma x} \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que $\gamma = \sqrt{Z \cdot Y}$ é a constante de propagação e $Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$ é a impedância característica.

As expressões da tensão e da corrente acima correspondem à soma de duas ondas viajantes em direções opostas e à mesma velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.7)$$

Essas ondas são denominadas *onda progressiva* e *onda regressiva*.

2.2. Equações de Ondas em Linhas de Transmissão Polifásicas

Generalizando (2.1) e (2.2) para uma linha polifásica, obtemos:

$$\begin{aligned} e \quad -\frac{\partial [v]}{\partial x} &= [L] \cdot \frac{\partial [i]}{\partial t} + [R] \cdot [i] \\ -\frac{\partial [i]}{\partial x} &= [G] \cdot [v] + [C] \cdot \frac{\partial [v]}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.8)$$

sendo, $[R]$ é a matriz de resistências por unidade de comprimento;

$[L]$ é a matriz de indutâncias por unidade de comprimento;

$[G]$ é a matriz de condutâncias por unidade de comprimento;

$[C]$ é a matriz de capacitâncias por unidade de comprimento.

No domínio da frequência as equações (2.8) se tornam:

$$\begin{aligned} e \quad -\frac{\partial [V]}{\partial x} &= [Z] \cdot [I] \\ -\frac{\partial [I]}{\partial x} &= [Y] \cdot [V] \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que $[V]$ e $[I]$ são vetores de tensões e correntes, respectivamente e representam grandezas de fase.

A matriz $[Z]$ é denominada matriz de impedância série e é complexa e simétrica, ou seja, $[Z] = [Z]^T$.

Os elementos diagonais $Z_{ii} = R_{ii} + j\omega L_{ii}$ representam as impedâncias próprias por unidade de comprimento enquanto que os elementos não-diagonais

$Z_{ik} = Z_{ki} = R_{ik} + j\omega L_{ik}$ representam a impedância mútua por unidade de comprimento entre os condutores i e k .

Fórmulas para o cálculo de Z_{ii} e Z_{ik} foram inicialmente desenvolvidas por CARSON (1926) para linhas telefônicas e depois generalizadas para linhas de transmissão aéreas. DERI et al (1981) propuseram uma formulação mais simplificada para o cálculo da impedância série.

A matriz $[Y]$ é denominada matriz de admitância shunt e também é complexa e simétrica.

Para linhas de transmissão aéreas a matriz de admitância pode ser reduzida a $[Y] = j\omega[C]$ sendo a capacitância $[C]$ considerada função exclusivamente da geometria da linha [DOMMEL, 1996].

Diferenciando-se (2.9) com relação a x obtemos

$$\frac{\partial^2[V]}{\partial x^2} = -[Z] \frac{\partial[I]}{\partial x} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2[I]}{\partial x^2} = -[Y] \frac{\partial[V]}{\partial x}$$

Substituindo (2.9) em (2.10) obtemos as equações telegráficas abaixo

$$\frac{\partial^2[V]}{\partial x^2} = [Z].[Y].[V] \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2[I]}{\partial x^2} = [Y].[Z].[I]$$

A resolução de (2.11) é tarefa bastante difícil devido ao acoplamento mútuo existente entre as fases. Este processo de resolução pode ser simplificado através do uso de transformações modais como descrito a seguir.

2.3. Teoria de Transformação Modal:

As equações (2.11) podem ser desacopladas com a ajuda das matrizes $[T_v]$ e $[T_i]$ que transformam grandezas de fase em grandezas modais.

Para as tensões temos então:

$$[V] = [T_v][V_{\text{mod } o}] \text{ e} \tag{2.12}$$

$$[V_{\text{mod } o}] = [T_v]^{-1} \cdot [V].$$

Para as correntes temos:

$$[I] = [T_i][I_{\text{mod } o}] \text{ e} \tag{2.13}$$

$$[I_{\text{mod } o}] = [T_i]^{-1} \cdot [I].$$

Substituindo (2.12) e (2.13) em (2.11) obtemos

$$\frac{\partial^2 [V_{\text{mod } o}]}{\partial x^2} = [T_v]^{-1} \cdot [Z][Y][T_v][V_{\text{mod } o}] \tag{2.14}$$

e

$$\frac{\partial^2 [I_{\text{mod } o}]}{\partial x^2} = [T_i]^{-1} \cdot [Y][Z][T_i][I_{\text{mod } o}]$$

em que

$$\begin{aligned} [T_v]^{-1} \cdot [Z][Y][T_v] &= [\gamma^2] \\ [T_i]^{-1} \cdot [Y][Z][T_i] &= [\gamma^2] \end{aligned} \tag{2.15}$$

e $[\gamma^2]$ é a matriz diagonal dos autovalores tanto de $[Z][Y]$ como de $[Y][Z]$;

$[T_v]$ é a matriz cujas colunas são os autovetores de $[Z][Y]$;

$[T_i]$ é a matriz cujas colunas são os autovetores de $[Y][Z]$.

e $[T_v]$ e $[T_i]$ se relacionam por

$$[T_i] = \left([T_v]^T \right)^{-1} \tag{2.16}$$

Substituindo (2.15) em (2.14) obtemos as equações modais

$$\frac{\partial^2 [V_{\text{mod } o}]}{\partial x^2} = [Y^2] [V_{\text{mod } o}]$$

e

$$\frac{\partial^2 [I_{\text{mod } o}]}{\partial x^2} = [Y^2] [I_{\text{mod } o}]. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.12) e (2.13) em (2.9) obtemos

$$-\frac{\partial [V_{\text{mod } o}]}{\partial x} = [T_v]^{-1} [Z] [T_i] [I_{\text{mod } o}]$$

e

$$-\frac{\partial [I_{\text{mod } o}]}{\partial x} = [T_i]^{-1} [Y] [T_v] [V_{\text{mod } o}]. \quad (2.18)$$

De (2.18) obtemos as matrizes de impedância e admitância modais dadas por

$$[Z_{\text{mod } o}] = [T_v]^{-1} [Z] [T_i]$$

$$[Y_{\text{mod } o}] = [T_i]^{-1} [Y] [T_v]. \quad (2.19)$$

WEDEPOHL (1963) mostrou que ambas $[Z_{\text{mod } o}]$ e $[Y_{\text{mod } o}]$ são diagonais.

Diferenciando-se (2.18) com a relação a x , obtemos

$$\frac{\partial^2 [V_{\text{mod } o}]}{\partial x^2} = -[Z_{\text{mod } o}] \frac{\partial [I_{\text{mod } o}]}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial^2 [I_{\text{mod } o}]}{\partial x^2} = -[Y_{\text{mod } o}] \frac{\partial [V_{\text{mod } o}]}{\partial x}. \quad (2.20)$$

Substituindo (2.18) e utilizando (2.19), obtemos

$$\frac{\partial^2 [V_{\text{mod } o}]}{\partial x^2} = [Z_{\text{mod } o}] [Y_{\text{mod } o}] [V_{\text{mod } o}]$$

e

$$\frac{\partial^2 [I_{\text{mod } o}]}{\partial x^2} = [Y_{\text{mod } o}] [Z_{\text{mod } o}] [I_{\text{mod } o}]. \quad (2.21)$$

As equações (2.21) representam modos independentes que podem ser analisados separadamente como circuitos monofásicos. Desta forma, para cada modo a solução é dada por:

$$\begin{aligned} V_{\text{mod } \sigma-k}^+ &= V_f^+ \cdot e^{-\gamma x} + V_b^+ \cdot e^{+\gamma x} \\ I_{\text{mod } \sigma-k}^+ &= \frac{1}{Z_c} \cdot V_f^+ \cdot e^{-\gamma x} - \frac{1}{Z_c} \cdot V_b^+ \cdot e^{+\gamma x} \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que $\gamma = \sqrt{Z_{\text{mod } \sigma-k} \cdot Y_{\text{mod } \sigma-k}}$ é a constante de propagação no modo k e

$Z_c = \sqrt{\frac{Z_{\text{mod } \sigma-k}}{Y_{\text{mod } \sigma-k}}}$ é a impedância característica no modo k .

Análogas a (2.6), as expressões acima representam a soma de duas ondas viajantes que se deslocam em direções opostas e a uma mesma velocidade.

Como podemos observar, o problema de se resolver as equações para linhas polifásicas (2.11) restringe-se à síntese das matrizes de transformação $[T_v]$ e $[T_i]$ que diagonalizam os produtos matriciais $[Z].[Y]$ e $[Y].[Z]$, respectivamente.

Para linhas assimétricas, as matrizes de autovetores $[T_v]$ e $[T_i]$ são complexas e têm os seus elementos dependentes da frequência. Para linhas balanceadas ou perfeitamente transpostas, $[T_v]$ e $[T_i]$ podem ser reais e constantes com a frequência [DOMMEL, 1996]. Nesse último caso as matrizes se relacionam por

$$[T_v] = [T_i] = [T] \quad (2.23)$$

e

$$[T]^{-1} = [T]^T. \quad (2.24)$$

A dificuldade na síntese das matrizes de transformação modais $[T_v]$ e $[T_i]$ está no fato de que estas matrizes de autovetores não são unicamente definidas, ao contrário da matriz de autovalores $[\gamma^2]$, e esta liberdade de localização dos autovetores no plano complexo pode resultar em graves problemas numéricos [HEDMAN, 1965; NAREDO, 1987; BRANDÃO FARIA, 1988; DOMMEL, 1996].

Capítulo 3

Modelos Computacionais

Vários modelos computacionais de linhas de transmissão para a simulação de transitórios eletromagnéticos em sistemas de potência foram propostos nos últimos 30 anos. Alguns dos principais modelos para linhas de transmissão com parâmetros distribuídos e dependentes da frequência são apresentados a seguir.

3.1. Modelo de Dommel

DOMMEL (1969) desenvolveu um modelo considerando uma linha de transmissão sem perdas, ou seja, tanto a resistência r como a condutância g por unidade de comprimento são consideradas nulas. Desta forma, a constante de propagação é dada por

$$\gamma = j\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} = j\omega \cdot \left(\frac{\tau}{\ell}\right) \quad (3.1)$$

em que τ é o tempo de trânsito ℓ é o comprimento da linha em km .

A impedância característica Z_c é independente da frequência e portanto, uma constante

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.2)$$

Combinando as equações (2.6) obtemos,

$$V + Z_c \cdot I = 2V_f \cdot e^{-\gamma x} \quad (3.3)$$

Considerando a linha monofásica sem perdas e de comprimento ℓ da

Figura 3.1.

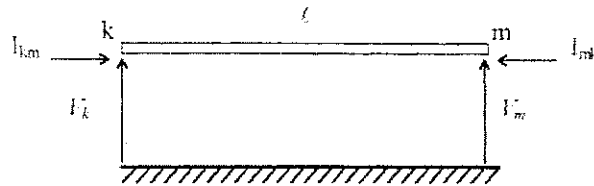


Figura 3.1 - Linha de transmissão sem perdas

Aplicando a equação (3.3) ao terminal k , onde convencionamos $x = 0$, portanto,

$$V_k + Z_c \cdot I_{km} = 2V_f \quad (3.4)$$

No terminal m temos $x = \ell$ logo,

$$V_m - Z_c \cdot I_{mk} = 2V_f \cdot e^{-\gamma \ell} \quad (3.5)$$

Substituindo (3.4) em (3.5)

$$(V_k + Z_c \cdot I_{km}) \cdot e^{-\gamma \ell} = V_m - Z_c \cdot I_{mk} \quad (3.6)$$

Fazendo $e^{-\gamma \ell} = e^{-j\omega \tau}$ em (3.6) temos

$$(V_k + Z_c \cdot I_{km}) \cdot e^{-j\omega \tau} = V_m - Z_c \cdot I_{mk} \quad (3.7)$$

No domínio do tempo, a equação (3.7) se torna

$$v_k(t - \tau) + Z_c \cdot i_{km}(t - \tau) = v_m(t) - Z_c \cdot i_{mk}(t) \quad (3.8)$$

Para um observador fictício viajando do terminal k para o terminal m à mesma velocidade que a onda progressiva V_f , a expressão $V + Z_c \cdot I$ encontrada pelo

observador em k no instante $t - \tau$ será a mesma que ele encontrará no terminal m no instante t , como mostra (3.8).

Definindo

$$I_m(t - \tau) = \frac{1}{Z_c} \cdot v_k(t - \tau) - i_{km}(t - \tau)$$

e

$$I_k(t - \tau) = \frac{1}{Z_c} \cdot v_m(t - \tau) - i_{mk}(t - \tau), \tag{3.9}$$

obtemos das eqs. (3.8) e (3.9), respectivamente,

$$i_{mk}(t) = \frac{1}{Z_c} \cdot v_m(t) - I_m(t - \tau)$$

e

$$i_{km}(t) = \frac{1}{Z_c} \cdot v_k(t) - I_k(t - \tau) \tag{3.10}$$

Com base nas equações (3.9) e (3.10), obtemos os circuitos equivalentes

da Figura 3.2.

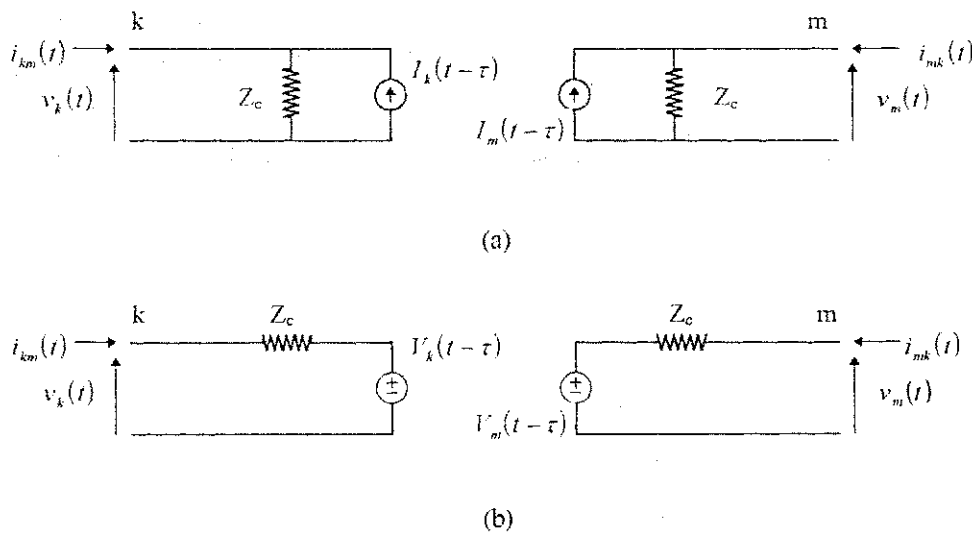


Figura 3.2 - Circuitos equivalentes para uma linha de transmissão sem perdas.
 (a) Equivalente de Norton; (b) Equivalente de Thévenin.

Para linhas polifásicas, cada modo independente será representada pelos circuitos da Figura 3.2.

3.2. Modelo de Budner

BUDNER (1970) propôs um dos primeiros modelos de linha de transmissão com parâmetros dependentes da frequência. Neste modelo, a linha de transmissão é considerada um quadripolo e portanto, as equações (2.6) são reescritas em termos de parâmetros de quadripolo.

Para a linha de transmissão da Figura 3.1, temos no domínio da frequência que

$$\begin{aligned} I_{km} &= Y_{kk} \cdot V_k + Y_{km} \cdot V_m \\ I_{mk} &= Y_{mk} \cdot V_k + Y_{mm} \cdot V_m \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que

Y_{kk} (Y_{mm}) representa a admitância de entrada vista no terminal k (m) quando o terminal m (k) é curto-circuitado;

Y_{km} (Y_{mk}) representa a admitância de transferência entre k (m) e m (k) com o terminal k (m) curto-circuitado.

Devido à linha ser bilateral, teremos $Y_{mm} = Y_{kk}$ e $Y_{mk} = Y_{km}$.

Logo, no domínio do tempo, as equações (3.1) se tornam:

$$\begin{aligned} i_{km}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{kk}(t-u) \cdot v_k(u) \cdot du + \int_{-\infty}^{\infty} y_{km}(t-u) \cdot v_m(u) \cdot du \\ i_{mk}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{km}(t-u) \cdot v_k(u) \cdot du + \int_{-\infty}^{\infty} y_{kk}(t-u) \cdot v_m(u) \cdot du \end{aligned} \quad (3.12)$$

$y_{kk}(t)$ e $y_{km}(t)$ são denominadas *funções de peso* e caracterizam a linha de transmissão no que se refere ao fenômeno de ondas viajantes.

Para proceder à resolução das integrais de convolução acima, Budner inicialmente calcula Y_{kk} e Y_{km} para todo o espectro de frequência e obtém as grandezas

equivalentes no domínio de tempo y_{kk} e y_{lm} através da transformada inversa rápida de Fourier (FFT).

A maior desvantagem deste método reside justamente no fato de que ao representar a linha de transmissão como um quadripolo, BUDNER(1970) ignora a natureza distribuída dos parâmetros.

3.3. Modelo de Snelson, Meyer e Dommel

SNELSON (1972) introduziu uma mudança de variáveis para relacionar correntes e tensões e o conceito de funções de peso já utilizado por BUDNER (1970), para obter um modelo mais simplificado e que, portanto, requer um menor esforço computacional quando implementado.

As novas variáveis foram definidas como:

- Funções de ondas progressivas:

$$\begin{aligned} e \quad f_k(t) &= v_k(t) + Z_c \cdot i_{km}(t) \\ f_m(t) &= v_m(t) + Z_c \cdot i_{mk}(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

- Funções de ondas regressivas:

$$\begin{aligned} e \quad b_k(t) &= v_k(t) - Z_c \cdot i_{km}(t) \\ b_m(t) &= v_m(t) - Z_c \cdot i_{mk}(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Substituindo (3.13) e (3.14) em (3.9) e (3.10), que são válidas para linhas sem perdas, obtemos:

$$\begin{aligned} e \quad b_m(t) &= f_k(t - \tau) \\ b_k(t) &= f_m(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.15)$$

De acordo com (3.15), um impulso de tensão aplicado em um terminal no instante $t = 0$ será visto no outro terminal após τ segundos. τ é o tempo de trânsito da componente de frequência mais elevada.

Levando-se em consideração as variações dos parâmetros com a frequência, as equações (3.13) e (3.14) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} F_k(\omega) &= V_k(\omega) + Z_1 \cdot I_{km}(\omega), \\ F_m(\omega) &= V_m(\omega) + Z_1 \cdot I_{mk}(\omega), \\ B_k(\omega) &= V_k(\omega) - Z_1 \cdot I_{km}(\omega), \\ B_m(\omega) &= V_m(\omega) - Z_1 \cdot I_{mk}(\omega), \end{aligned} \quad (3.16)$$

sendo Z_1 é a impedância de surto dada por

$$Z_1 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_c = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L_c}{C_c}}. \quad (3.17)$$

As variáveis V_k , V_m , I_{km} e I_{mk} podem ser eliminadas das equações acima para obtermos

$$\begin{aligned} B_k(\omega) &= A_1(\omega) \cdot F_m(\omega) + A_2(\omega) \cdot F_k(\omega) \\ B_m(\omega) &= A_1(\omega) \cdot F_k(\omega) + A_2(\omega) \cdot F_m(\omega). \end{aligned} \quad (3.18)$$

$A_1(\omega)$ e $A_2(\omega)$ são as transformadas de duas novas funções de peso, conforme descrito adiante.

No domínio do tempo, temos

$$\begin{aligned} b_k(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t-u) \cdot a_1(u) \cdot du + \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t-u) \cdot a_2(u) \cdot du \\ b_m(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t-u) \cdot a_1(u) \cdot du + \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t-u) \cdot a_2(u) \cdot du. \end{aligned} \quad (3.19)$$

As funções $a_1(t)$ e $a_2(t)$ são as novas funções de peso. O significado físico destas funções de peso pode ser visualizado ao fazermos $F_m(\omega) = 0$ e $F_k(\omega) = 1$ em (3.18), ou seja, aplicando um impulso de tensão no terminal k e terminando a linha no terminal m com a impedância Z_1 . Logo, obtemos

$$\begin{aligned} e \quad B_k(\omega) &= A_2(\omega) \\ B_m(\omega) &= A_1(\omega). \end{aligned} \quad (3.20)$$

que correspondem no domínio do tempo respectivamente a

$$\begin{aligned} e \quad b_k(t) &= a_2(t) \\ b_m(t) &= a_1(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

As funções de peso $a_1(t)$ e $a_2(t)$ são, respectivamente, as ondas regressivas no terminais receptor e emissor devido à excitação da linha por um impulso de tensão.

Como nenhuma resposta pode ocorrer antes que qualquer excitação seja aplicada, $a_1(t)$ e $a_2(t)$ são nulas para qualquer tempo negativo e as equações (3.19) podem ser escritas

$$\begin{aligned} e \quad b_k(t) &= \int_0^{\infty} f_m(t-u) \cdot a_1(u) \cdot du + \int_0^{\infty} f_k(t-u) \cdot a_2(u) \cdot du \\ b_m(t) &= \int_0^{\infty} f_k(t-u) \cdot a_1(u) \cdot du + \int_0^{\infty} f_m(t-u) \cdot a_2(u) \cdot du. \end{aligned} \quad (3.22)$$

As novas funções de peso $a_1(t)$ e $a_2(t)$, propostas por Snelson, são menos oscilatórias que as empregadas no modelo de BUDNER (1970) e, portanto, são mais fáceis de ser obtidas.

MEYER & DOMMEL (1974), utilizando como base o trabalho de SNELSON (1972), obtiveram os circuitos equivalentes da Figura 3.3.

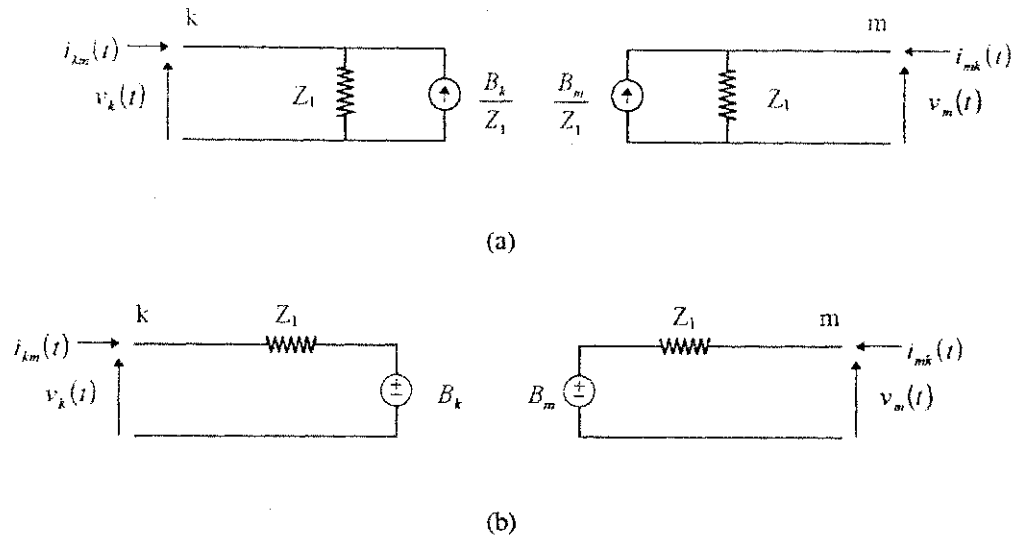


Figura 3.3 - Circuitos equivalentes, (a) de Norton e (b) de Thévenin, de uma linha de transmissão com parâmetros dependentes da frequência segundo MEYER & DOMMEL(1974).

Os efeitos da frequência sobre os parâmetros e a resposta da linha de transmissão ao fenômeno de ondas viajantes estão concentrados nas fontes de corrente e de tensão nos circuitos equivalentes propostos.

Para linhas polifásicas, cada modo independente será representado pelos circuitos da Figura 3.3.

MEYER & DOMMEL (1974) mostraram, através de uma análise de erros, a importância de se levar em consideração a cauda das funções de peso $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ no cálculo das integrais de convolução (3.22).

Embora este modelo tenha representado grande avanço na modelagem de linhas de transmissão, apresenta ainda uma série de problemas como: a dificuldade de se resolver integrais de convolução para cada intervalo de tempo e a utilização de transformadas inversas de Fourier no cálculo das funções de peso.

3.4. Modelo de J. Marti

J. MARTI (1982) sugeriu a substituição da impedância de surto Z_1 pela impedância característica Z_c nas equações (3.16). Com este procedimento, ao energizarmos a linha de transmissão, como mostra a Figura 3.4., não teremos mais nenhuma reflexão no terminal k .

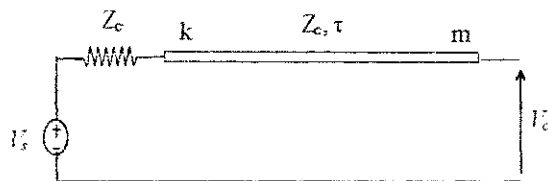


Figura 3.4 - Linha de transmissão segundo modelo de J. MARTI (1982).

As funções de peso $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$, descritas por MEYER & DOMMEL (1974), assumem formas diferentes. $\alpha_1(t)$ representa a resposta da linha a um impulso de tensão aplicado no terminal k visto no terminal m após τ segundos. τ sendo o tempo que a componente de frequência mais rápida leva para chegar até a outra extremidade da linha de transmissão. Devido à inclusão das perdas no modelo, o impulso de tensão que chega ao terminal receptor terá sofrido atenuações. $\alpha_2(t)$ é agora nula, o que torna o modelo mais simples e fácil de ser implementado.

Desta forma, as equações (3.18) se tornam

$$\begin{aligned}
 B_k(\omega) &= A(\omega) \cdot F_m(\omega) \\
 B_m(\omega) &= A(\omega) \cdot F_k(\omega)
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

em que $A(\omega) = A_1(\omega) = e^{-\gamma \ell}$ é denominado *fator de propagação*.

No domínio do tempo, as equações (3.23) assumem a forma

e

$$b_k(t) = \int_x^t f_m(t-u) \cdot a(u) \cdot du$$

$$b_m(t) = \int_x^t f_k(t-u) \cdot a(u) \cdot du.$$

(3.24)

O circuito equivalente proposto por J. MARTI (1982) para a linha de transmissão é mostrado na Figura 3.5.

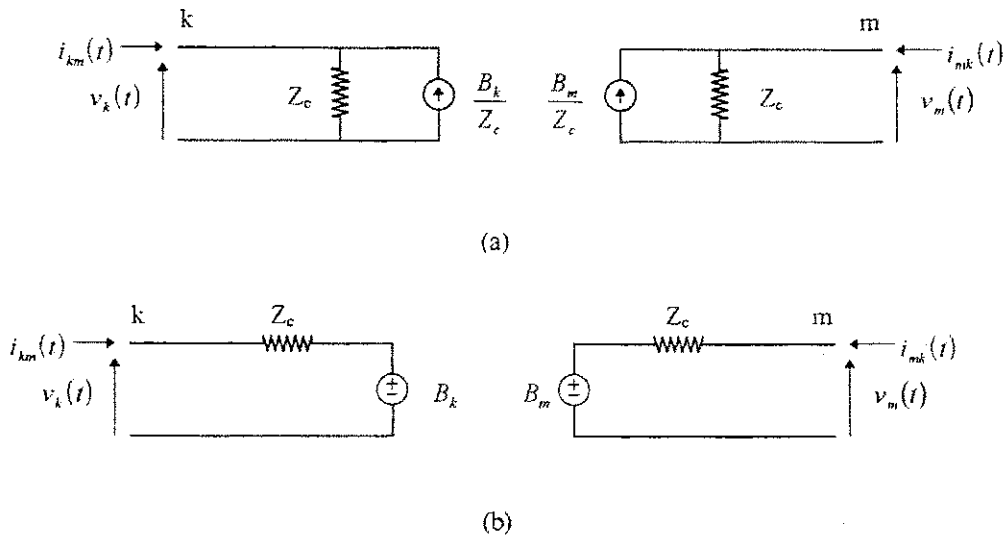


Figura 3.5 - Circuitos equivalentes (a) de Norton e (b) de Thévenin de uma linha de transmissão com parâmetros dependentes da frequência segundo J.MARTI (1982).

A impedância característica contém agora as informações relativas aos efeitos da variação da frequência sobre os parâmetros, enquanto que as fontes de tensão e corrente contêm as informações sobre a resposta da linha ao fenômeno de propagação de ondas.

Para as simulações no domínio do tempo, J. MARTI (1982) propôs a utilização de uma conexão série-paralela de blocos RC (*Realização Foster-I*) para aproximar a impedância característica $Z_c(\omega)$ como mostra a Figura 3.6. O número de blocos RC necessários para uma representação precisa da linha de transmissão depende da configuração da linha em questão e do modo sendo simulado.

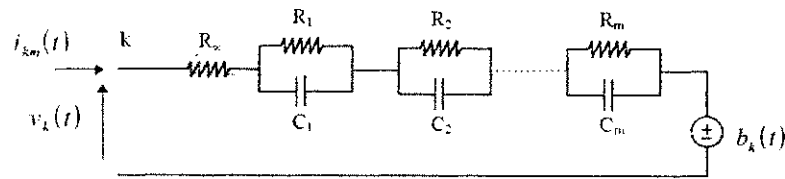


Figura 3.6 - Equivalente RC (Realização Foster-I) para Z_c .

A impedância característica pode então ser escrita sob a forma de uma função polinomial racional no plano s ($s = \sigma + j\omega$).

$$Z_{eq}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H \cdot \frac{(s + ze_1) \cdot (s + ze_2) \cdot (s + ze_3) \cdots (s + ze_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot (s + p_3) \cdots (s + p_m)} \quad (3.25)$$

Como $Z_c(\omega)$ corresponde à resposta de um sistema passivo que tende para um valor constante quando $\omega \rightarrow \infty$, o número de zeros n deverá ser igual ao número de pólos m . Portanto, teremos $n = m$ em (3.25) e todos os pólos e zeros são negativos, reais e com multiplicidade um [FERNANDES, 1996].

Expandindo a equação (3.25) em uma soma de frações parciais temos

$$Z_{eq}(s) = k_x + \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \cdots + \frac{k_m}{(s + p_m)} \quad (3.26)$$

da qual obtemos os parâmetros do circuito RC da Figura 3.6. como sendo, $R_x = k_x$; $R_i = k_i/p_i$; $C_i = 1/k_i$ para $i = 1, 2, \dots, m$.

De acordo com as equações (3.24), para obtermos $b_k(t)$ e $b_m(t)$, teremos que inicialmente determinar $a(t)$ aplicando a transformada inversa de Fourier a $A(\omega)$.

Como $a(t) = 0$ para $t < \tau$, o fator de propagação pode ser expresso como uma função deslocada no tempo em τ segundos dada por

$$a(t) = p(t - \tau). \quad (3.27)$$

No plano complexo s ($s = \sigma + j\omega$), temos,

$$A(s) = P(s) \cdot e^{-s\tau}. \quad (3.28)$$

Para facilitar a transição frequência-tempo, J.MARTI (1982) sugeriu a representação de $P(s)$ na forma de uma função racional

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H \cdot \frac{(s + ze_1) \cdot (s + ze_2) \cdot (s + ze_3) \cdots (s + ze_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot (s + p_3) \cdots (s + p_m)}. \quad (3.29)$$

Como $A(\omega)$ é a resposta de um sistema físico passivo, e tende para zero quando $\omega \rightarrow \infty$, o número de zeros n deverá ser menor que o número de pólos m . Logo, teremos $n < m$ na equação (3.29). Todos os pólos e zeros são negativos, reais distintos com multiplicidade um [MARTI, 1982].

Expandindo $P(s)$ em uma soma de frações parciais e substituindo em (3.28), obtemos

$$A_{eq}(s) = \left\{ \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{k_m}{s + p_m} \right\} \cdot e^{-s\tau}. \quad (3.30)$$

No domínio do tempo, temos

$$a_{eq}(t) = \left\{ k_1 \cdot e^{-p_1(t-\tau)} + k_2 \cdot e^{-p_2(t-\tau)} + \cdots + k_m \cdot e^{-p_m(t-\tau)} \right\} u(t - \tau). \quad (3.31)$$

O número de frações parciais utilizado na aproximação do fator de propagação depende também da configuração da linha e do modo analisado.

Substituindo (3.31) em (3.24)

$$\begin{aligned}
 e \quad h_k(t) &= \int_{\tau}^t f_m(t-u) \alpha_{\omega_q}(u) \, du \\
 h_m(t) &= \int_{\tau}^t f_k(t-u) \alpha_{\omega_q}(u) \, du.
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

As integrais de convolução (3.32) foram reduzidas a integrais da forma

$$s(t) = \int_{\tau}^t g(t-u) \cdot k \cdot e^{-\alpha(u-\tau)} \, du.
 \tag{3.33}$$

De acordo com SEMLYEN & DABULEANU (1975), SEMLYEN & ROTH (1977) e SEMLYEM (1981), o processo de resolução de integrais de convolução como (3.33) pode ser bastante acelerado através da técnica de convolução recursiva, que consiste em obter $s(t)$ a partir do valor $s(t - \Delta t)$, conhecido no passo de tempo anterior e da história de g em τ e em $\tau + \Delta t$ unidades de tempo anteriores (Apêndice A).

$$s(t) = c_1 \cdot s_1(t - \Delta t) + c_2 \cdot g(t - \tau) + c_3 \cdot g(t - \tau - \Delta t)
 \tag{3.34}$$

em que c_1 , c_2 e c_3 são constantes que dependem de k , α e do passo de tempo Δt .

O sucesso da técnica aplicada por J. Marti para a modelagem de linhas de transmissão com parâmetros dependentes da frequência depende exclusivamente da qualidade das aproximações para $A(\omega)$ e $Z_c(\omega)$. J. Marti utilizou o procedimento assintótico de Bode em suas aproximações. Como as funções racionais só possuem zeros no semiplano esquerdo do plano complexo, as funções de fase correspondentes podem ser determinadas a partir de suas amplitudes [MARTI, 1982; DOMMEL, 1996].

No algoritmo de Bode, a curva é aproximada através de segmentos de reta que são horizontais ou apresentam uma inclinação múltipla de 20dB/década. Os pontos onde há mudanças na inclinação definem os pólos e zeros da função racional aproximada. Os números de zeros e pólos não são obtidos diretamente. A aproximação é feita passo a passo iniciando no nível DC e seguindo até a frequência mais elevada. Este

processo assintótico, no entanto, resulta, em alguns casos, em um número elevado de pólos e zeros para o polinômio aproximado [NODA et al, 1996].

Para obter aproximações de baixa ordem utilizando o método de ajuste assintótico, L.MARTI (1983) teve que reduzir consideravelmente a faixa de frequência e a precisão para as suas aproximações.

FERNANDES (1996) utilizou um método de ajuste otimizado para a obtenção de funções racionais aproximadas para a admitância característica $Y_c(\omega) = [Z_c(\omega)]^{-1}$ e para o fator de propagação $A(\omega)$.

No método implementado por FERNANDES (1996), $Y_{eq}(s)$ e $P(s)$ em (3.28) são determinados diretamente das amplitudes das funções de fase-mínima $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$.

Para $s = j\omega$, teremos

$$|Y_c(\omega)|^2 = H^2 \cdot \frac{(A_1 \cdot \omega^2 + 1) \cdot (A_2 \cdot \omega^2 + 1) \cdot \dots \cdot (A_n \cdot \omega^2 + 1)}{(B_1 \cdot \omega^2 + 1) \cdot (B_2 \cdot \omega^2 + 1) \cdot \dots \cdot (B_m \cdot \omega^2 + 1)} \quad (3.35)$$

e

$$|P(\omega)|^2 = H^2 \cdot \left(\frac{(A_1 \cdot \omega^2 + 1)}{(B_1 \cdot \omega^2 + 1)} \right) \dots \left(\frac{(A_n \cdot \omega^2 + 1)}{(B_n \cdot \omega^2 + 1)} \right) \dots \left(\frac{1}{(B_m \cdot \omega^2 + 1)} \right) \quad (3.36)$$

para $n < m$.

O método de Levenberg-Marquardt [PRESS et al, 1992] é então utilizado para se obter iterativamente os parâmetros H , A_i e B_i .

De posse dos valores de A_i e B_i , os zeros e pólos de $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$ são, respectivamente, obtidos de

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{A_i}} \text{ e } p_i = \frac{1}{\sqrt{B_i}} \quad (3.37)$$

Através da utilização do método proposto por FERNANDES (1996) foi possível obter funções racionais precisas e de menor ordem das que foram obtidas com o método de ajuste assintótico. O modelo de baixa ordem gerado com o método implementado produziu resultados muito próximos dos obtidos com o método assintótico, mas utilizando menor esforço computacional.

3.5. A Síntese de Funções Racionais no Plano Z e o Modelo de Noda, Nagaoka e Ametani

Para o desenvolvimento de modelos de linhas de transmissão no domínio de fases, ANGELIDIS & SEMLYEN(1995) e mais recentemente NODA et al (1996), utilizaram a transformada Z [OPPENHEIM et al, 1997] para obter funções racionais aproximadas. Por ser um operador de tempo discreto, os resultados do ajuste, já livres de erros de discretização, podem ser implementados diretamente em programas do tipo EMTP.

NODA et al (1996) ajusta funções polinomiais racionais da forma

$$G(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_n z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-N}} \quad (3.38)$$

para obter a função de transferência do modelo.

No domínio do tempo, temos

$$y(n) = \alpha_0 x(n) + \alpha_1 x(n-1) + \dots + \alpha_N x(n-N) - b_1 y(n-1) - \dots - b_N y(n-N) \quad (3.39)$$

A equação acima mostra que o operador $z^{-n} = e^{-jn\omega\Delta t}$ acrescenta um atraso de n amostras no domínio de tempo e sua aplicação é semelhante à técnica de convolução recursiva (Apêndice A).

O tempo de amostragem Δt é definido diretamente da frequência de Nyquist

$$\Delta t = \frac{1}{2f_{max}} \quad (3.40)$$

A função erro definida por

$$erro = (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}) - (1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}) \cdot G(z) \quad (3.41)$$

é então obtida utilizando um método de mínimos quadrados linearizado baseado na transformação de Householder (Apêndice C).

O peso implementado na resolução dos mínimos quadrados para o i -ésimo ponto é dado por

$$w_i = \frac{1}{|D(z_i) \cdot G_i|^2} \quad (3.42)$$

com $D(z_i) = 1 + b_1 z_i^{-1} + \dots + b_N z_i^{-N}$.

De acordo com NODA et al (1996), a transformação de Householder torna o método mais estável, rápido e preciso.

Capítulo 4

Descrição dos Métodos Implementados

Neste capítulo são apresentados os métodos implementados neste trabalho para a modelagem de linha de transmissão com parâmetros distribuídos dependentes da frequência. São considerados métodos nos quais a síntese de funções racionais é realizada no plano s assim como métodos que utilizam a transformada z .

4.1. Considerações iniciais

Para a perfeita caracterização de uma linha de transmissão no domínio da frequência, é necessário conhecer apenas dois parâmetros: a admitância característica $Y_c(\omega) = [Z_c(\omega)]^{-1}$ e o fator de propagação $A(\omega)$. No caso de linhas polifásicas, estes parâmetros devem ser obtidos independentemente para cada modo.

Com o objetivo de facilitar a simulação de transitórios eletromagnéticos no domínio do tempo, J. MARTI (1982) sugeriu a utilização de funções polinomiais racionais para aproximar com erro mínimo a admitância característica e o fator de propagação.

No plano complexo s com $(s = j\omega)$, temos

$$Y_{eq}(s) = H \cdot \frac{(s + ze_1) \cdot (s + ze_2) \cdot (s + ze_3) \cdots (s + ze_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot (s + p_3) \cdots (s + p_m)} \quad (4.1)$$

e

$$A_{eq}(s) = \left[H \cdot \frac{(s + ze_1) \cdot (s + ze_2) \cdot (s + ze_3) \cdots (s + ze_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot (s + p_3) \cdots (s + p_m)} \right] e^{-s\tau_{min}} \quad (4.2)$$

ou ainda,

$$Y_{eq}(s) = P(s)$$

e

$$A_{eq}(s) = P(s) \cdot e^{-s\tau_{min}} \quad (4.3)$$

Como mostra o capítulo anterior, o número de zeros n deve ser menor que o número de pólos m ($n < m$) para $A_{eq}(s)$, enquanto que para $Y_{eq}(s)$ temos o número de zeros n igual ao número de pólos m .

A eficiência do método proposto por J. MARTI (1982) depende da qualidade destas aproximações obtidas para a admitância característica $Y_c(\omega)$ e o fator de propagação $A(\omega)$. O número de frações parciais (3.26) e (3.30) utilizadas em cada aproximação depende da configuração da linha, do seu comprimento e do modo analisado.

Durante a síntese das funções racionais aproximadas, deve-se ainda levar em consideração o fato de que um número excessivo de termos, devido à utilização de um número elevado de zeros e pólos, implicará maior esforço computacional para o cálculo de tensões e correntes numa linha de transmissão em regime transitório. É necessário, portanto, encontrar um número mínimo de zeros e pólos tal que garanta

aproximação das funções polinomiais racionais de $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$, respectivamente, com erro mínimo. Uma vez que este mínimo tenha sido encontrado, não haverá nenhum esforço computacional adicional.

Como as funções racionais só possuem zeros no semiplano esquerdo do plano complexo, é necessário calcular apenas as suas amplitudes [DOMMEL, 1996]. Logo, $Y_{eq}(s)$ e $P(s)$ em (4.3) são determinados diretamente das magnitudes das funções de fase mínima $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$ definidas abaixo.

Para $s = j\omega$, temos

$$|Y_c(\omega)|^2 = H^2 \cdot \frac{(A_1 \cdot \omega^2 + 1) \cdot (A_2 \cdot \omega^2 + 1) \cdot \dots \cdot (A_n \cdot \omega^2 + 1)}{(B_1 \cdot \omega^2 + 1) \cdot (B_2 \cdot \omega^2 + 1) \cdot \dots \cdot (B_n \cdot \omega^2 + 1)} \quad (4.4)$$

e

$$|P(\omega)|^2 = H^2 \cdot \left(\frac{(A_1 \cdot \omega^2 + 1)}{(B_1 \cdot \omega^2 + 1)} \right) \dots \left(\frac{(A_n \cdot \omega^2 + 1)}{(B_n \cdot \omega^2 + 1)} \right) \dots \left(\frac{1}{(B_m \cdot \omega^2 + 1)} \right) \quad (4.5)$$

para $n < m$.

4.2. Identificação de Parâmetros

A identificação de parâmetros é geralmente utilizada para resumir ou condensar dados de forma a ajustá-los a um modelo. Na literatura, existem diferentes métodos de ajuste para casos de dependência linear ou não-linear do modelo com os parâmetros [PRESS et al, 1992].

O procedimento de ajuste é em síntese um problema de minimização. Inicialmente, uma função de mérito é escolhida para medir a concordância entre uma solução aproximada, obtida com um conjunto particular de parâmetros calculados, e a

solução real. Os parâmetros são, então, ajustados com o objetivo de se obter um mínimo na função de mérito.

O método dos mínimos quadrados [PRESS et al, 1992] é bastante utilizado em procedimentos de ajuste. Os parâmetros do modelo são obtidos minimizando a função erro dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i; a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (4.6)$$

em que

y_i é o i -ésimo valor da variável dependente de um conjunto de N dados;

x_i é o i -ésimo valor da variável independente de um conjunto de N dados;

a_1, a_2, \dots, a_M representa o conjunto de parâmetros ajustáveis;

$y(x_i; a_1, \dots, a_M)$ é o valor aproximado da variável dependente calculado a partir de x_i e dos parâmetros do modelo;

σ_i é o desvio padrão do i -ésimo ponto do conjunto de dados.

4.3. O algoritmo implementado para ajustes utilizando o plano s (método não-linear em s)

O modelo implementado combina o método dos mínimos quadrados generalizado (Apêndice B) com o método não-linear proposto por Levenberg-Marquardt (Apêndice D) para obter funções polinomiais racionais de baixa ordem que aproximam a admitância característica $Y_c(\omega)$ e o fator de propagação $A(\omega)$ com bastante precisão.

O uso de aproximações de baixa ordem, conseguido com um número reduzido de pólos e zeros nos polinômios racionais evitará qualquer esforço computacional adicional na determinação das condições transitórias do sistema em análise.

Uma rotina computacional para a síntese das funções racionais aproximadas foi implementada em FORTRAN. Esta rotina possui dois módulos: um para o ajuste da admitância característica e outro para o fator de propagação. Os algoritmos em que cada um desses módulos se baseia são apresentados a seguir.

4.3.1. Algoritmo de cálculo do fator de propagação

1. Ler o número de pólos que irá determinar a ordem da função polinomial racional a ser obtida.
2. Ler a diferença entre pólos e zeros a ser considerada no ajuste. Não aceitar número de zeros n maior ou igual ao número de pólos m .
3. Ajustar pontos acima da frequência de referência ω_{ref} como mostra a Figura 4.1.
4. Dividir a faixa de frequência que inicia em $\omega_{ref} \geq \omega_{min}$ e termina em ω_{max} em m intervalos iguais em escala logarítmica.
5. Escolher valores iniciais de A_i e B_i em (4.5) de forma a garantir pólos no centro de cada intervalo e definir o valor inicial de H como $H = Y_c(\omega_{min})$.

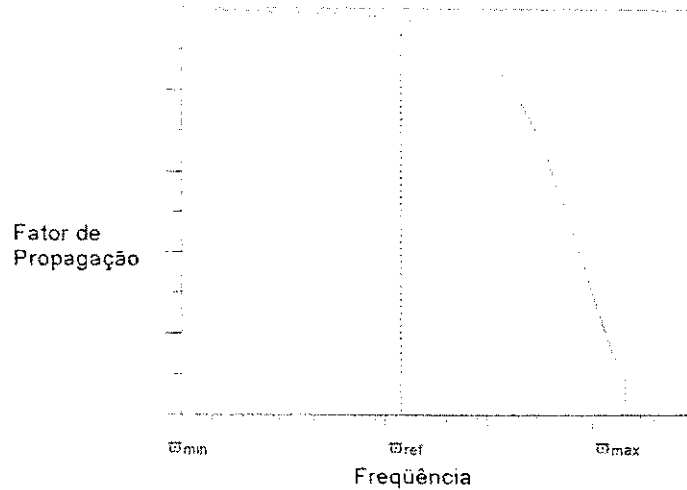


Figura 4.1 - Definição da Frequência de Referência para o Fator de Propagação.

6. Supor B_1, \dots, B_m constantes em

$$|P(\omega)|^2 = k_1 \cdot \frac{1}{(B_1 \cdot \omega^2 + 1)} + \dots + k_m \cdot \frac{1}{(B_m \cdot \omega^2 + 1)} \quad (4.7)$$

ou seja,

$$|P(\omega)|^2 = k_1 \cdot X_1(\omega) + k_2 \cdot X_2(\omega) + \dots + k_m \cdot X_m(\omega), \quad (4.8)$$

e obter parâmetros k_1, k_2, \dots, k_m através do método dos mínimos quadrados linear generalizado com o uso de equações normais (Apêndice B).

7. Iniciar o método não-linear de Levenberg-Marquardt (Apêndice D) para obter a função aproximada (4.7). Utilizar como chutes iniciais para as variáveis k_1, k_2, \dots, k_m e B_1, B_2, \dots, B_m os valores previamente conhecidos. Realizar uma iteração completa do algoritmo de Levenberg-Marquardt é realizada.

8. Definir (4.5) como modelo para a função polinomial racional aproximada. Determinar χ^2 para os valores atuais de A_i , B_i e H através do método de Levenberg-Marquardt.

9. Iniciar o processo iterativo para determinar os parâmetros A_i , B_i e H que minimizam χ^2 . Utilizar todos os pontos.
10. Obter parâmetros e calcular zeros e pólos, respectivamente, de

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{A_i}} \quad \text{e} \quad p_i = \frac{1}{\sqrt{B_i}} \quad (4.9)$$

Uma das características particulares desta modelagem é a liberdade que o usuário tem de modificar $P(s)$, adicionando ou retirando pólos conforme seja necessário para garantir maior precisão aos resultados, desde que se mantenha a relação $n < m$. No ajuste implementado por FERNANDES(1996) são consideradas apenas duas situações distintas:

- a) Número de pólos $m = \text{Número de zeros } n + 1$: Quando $P(s)$ apresenta fase sempre menor que 90° para toda a faixa de frequência;
- b) Número de pólos $m = \text{Número de zeros } n + 2$: Quando $P(s)$ apresenta fase maior que 90° em algum valor da faixa de frequência. Ao encontrar uma fase maior que 90° , o programa acrescenta automaticamente um segundo pólo adicional e repete o processo de ajuste considerando $m = n + 2$.

Para alguns casos o ajuste com $m = n + 3, 4, \dots$ produz resultados mais precisos e estáveis para o fator de propagação.

Com o objetivo de acelerar o processo de convergência do método, apenas os pontos acima de uma dada frequência de referência ω_{ref} são ajustados. Para a frequência de referência é geralmente escolhido um valor na terceira década, como

mostra a Figura 4.1. Neste trabalho, a frequência de referência foi definida como sendo 200 Hz.

4.3.2. Algoritmo de cálculo da admitância característica

A diferença entre a forma das funções polinomiais racionais que aproximam, respectivamente, o fator de propagação e a admitância característica diz respeito apenas ao número de pólos e zeros considerados no ajuste e ao posicionamento relativo entre estes.

Tanto $Y_{eq}(s)$ como $P(s)$ descreve uma curva que oscila entre seus zeros e pólos. No caso do fator de propagação, esta curva descreve uma função monotonicamente decrescente enquanto que para a admitância característica temos uma função monotonicamente crescente.

Para uma função monotonicamente crescente, $z_i < p_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto, cada zero deve ser alocado antes de um pólo. Para uma função monotonicamente decrescente, $z_i > p_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto, cada zero deve ser alocado depois de um pólo [FERNANDES, 1996].

O procedimento empregado no cálculo da admitância característica é essencialmente o mesmo descrito anteriormente.

1. Ler o número de pólos que irá determinar a ordem da função polinomial racional a ser obtida.
2. Ajustar pontos abaixo da frequência de referência ω_{ref} como mostra a Figura 4.2.

3. Dividir a faixa de frequência que inicia em ω_{min} e termina em $\omega_{ref} \leq \omega_{max}$ em m intervalos iguais em escala logarítmica.
4. A partir deste ponto, o algoritmo segue igual ao utilizado para o cálculo do fator de propagação.

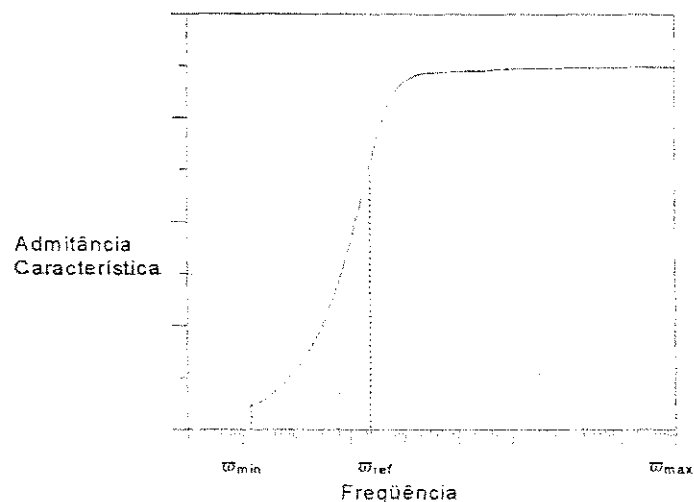


Figura 4.2 - Definição da Frequência de Referência para a Admitância Característica.

4.3.3. Considerações adicionais sobre a rotina implementada

O algoritmo elaborado conforme descrito anteriormente foi inicialmente implementado utilizando-se as vantagens do software matemático MATLABTM (Versão 4.0). O processo de elaboração da rotina computacional foi bastante acelerado com a ajuda das funções matriciais pré-existentes (built-in functions), características do ambiente MATLABTM. Desta forma, a eficácia deste método apresentado pôde ser testada ainda nas etapas iniciais do seu desenvolvimento. Embora os resultados obtidos apresentassem grande precisão, o tempo de processamento necessário para a finalização

do processo iterativo e, portanto, um maior esforço computacional não justificaria a continuidade deste estudo fazendo-se uso de tal ferramenta matemática. Resultados igualmente precisos com esforço computacional reduzido foram obtidos com a utilização de rotinas em linguagem FORTRAN.

Para a resolução dos sistemas de equações lineares no método dos mínimos quadrados generalizado (Apêndice B) e no método de Levenberg-Marquardt (Apêndice D), optou-se pela utilização do método de eliminação de Gauss-Jordan. O método de decomposição em valores singulares (SVD), bastante empregado em problemas de mínimos quadrados, quando aplicado ao problema em questão acarreta um aumento considerável no esforço computacional, o que torna o processo de convergência mais lento. No entanto, a precisão dos resultados não é alterada.

O ajuste de curvas utilizando o método de Levenberg-Marquardt, conforme descrito no item anterior, apresenta algumas desvantagens. A mais significativa destas está no fato de ser dependente de chutes iniciais precisos. Por ser um método não-linear, chutes iniciais imprecisas poderão resultar em inúmeras iterações até que o método consiga convergir para um resultado satisfatório.

A utilização de apenas a curva de módulo para obter ajustes para módulo e fase representa também uma outra limitação no método implementado. As aproximações para as fases do fator de propagação e da admitância característica podem ser melhoradas consideravelmente se forem incluídas no processo de ajuste grandezas de módulo e fase ou grandezas complexas.

4.4. Algoritmos implementados para ajustes utilizando o plano z :

Com o intuito de investigar a eficiência e a precisão de ajustes realizados diretamente no plano z , foram implementadas três rotinas.

Tendo como base o trabalho de NODA et al (1996), o fator de propagação $A(\omega)$ e a admitância característica $Y_c(\omega) = [Z_c(\omega)]^{-1}$ foram modelados por funções polinomiais racionais

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}} \quad (4.10)$$

em que n representa o número de zeros, m representa o número de pólos

$$e \quad z^{-n} = e^{-jn\omega\Delta t} = \cos n\omega\Delta t - j\sin n\omega\Delta t \quad (4.11)$$

$$\text{com} \quad \Delta t = \frac{1}{2f_{\text{max}}} \quad (4.12)$$

Resolvendo a equação (4.10) para $G(z)$

$$a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} - G(z) \cdot (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) = G(z) \quad (4.13)$$

Fazendo $G(z) = R_a(z) + jX_a(z)$ em (4.13) obtemos

$$a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} - [R_a(z) + jX_a(z)] \cdot (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) = R_a(z) + jX_a(z) \quad (4.14)$$

em que $R_a(z)$ e $X_a(z)$, correspondem, respectivamente, às componentes reais e imaginárias de $G(z)$.

Substituindo (4.11) em (4.14) obtemos

$$a_0 + a_1 e^{-j\omega\Delta t} + a_2 e^{-j2\omega\Delta t} + \dots + a_n e^{-jn\omega\Delta t} - [R_a(\omega) + jX_a(\omega)] \cdot (b_1 e^{-j\omega\Delta t} + b_2 e^{-j2\omega\Delta t} + \dots + b_m e^{-jm\omega\Delta t}) = R_a(\omega) + jX_a(\omega) \quad (4.15)$$

Separando partes real e imaginária em (4.15) chegamos a um sistema linear sobredeterminado

$$[A] \cdot [X] = [B] \quad (4.16)$$

Para um ajuste no qual são considerados k pontos distintos, temos:

$[A]$ é a matriz do problema de ajuste, de dimensões $(2k) \times (n+m+1)$. Os elementos das linhas $1 \dots k$ são formados pelas componentes reais e os elementos das linhas $(k+1) \dots 2k$ são formados pelas componentes imaginárias de (4.15).

$[X]$ é o vetor de parâmetros ajustáveis e de tamanho $m+n+1$.

$[B]$ é um vetor de tamanho $2k$. Os elementos $1 \dots k$ são constituídos por $R_a(\omega)$ e os elementos $(k+1) \dots (2k)$ correspondem a $X_a(\omega)$.

Para solucionar o sistema sobredeterminado (4.16) foram propostos: a transformação de Householder (Apêndice C), a decomposição em valores singulares (SVD) (Apêndice B) e o método de Levenberg-Marquardt (Apêndice D).

As rotinas computacionais foram implementadas em FORTRAN. Os algoritmos descritos a seguir são utilizados para obtermos aproximações tanto para a admitância característica como para o fator de propagação. A única diferença é que para o fator de propagação, o número de zeros n é considerado menor que o número de pólos m .

4.4.1. Método de Ajuste Linear - Resolução por Transformação de Householder:

1. Ler o número de pólos e o número de zeros que irão determinar a ordem da função polinomial racional a ser obtida.

2. Converter grandezas de módulo e fase (coordenadas polares) em coordenadas cartesianas.
3. Inicializar a matriz $[A]$ e o vetor $[B]$ e os pesos para a resolução do sistema sobredeterminado. Definir pesos como 1.0. Definir o vetor $[F_s(\omega)]$ de comprimento $2k$ onde os elementos $1 \dots k$ são constituídos por $R_a(\omega)$ e os elementos $(k+1) \dots (2k)$ correspondem a $X_a(\omega)$.
4. Iniciar o processo iterativo. Resolver o sistema de equações lineares utilizando a Transformação de Householder e o Método de Golub (Apêndice C).
5. Obter pólos e zeros a partir dos parâmetros a_0, \dots, a_n e b_1, \dots, b_m , extraíndo-se as raízes do numerador e do denominador em (4.10).
6. Estabilizar pólos e zeros instáveis.
7. Obter zeros e pólos equivalentes no plano s , respectivamente, de

$$r_{si} = \frac{\ln r_i}{\Delta t} \quad \text{e} \quad p_{si} = \frac{\ln p_i}{\Delta t} \quad (4.17)$$

A idéia principal deste método consiste em ajustar a função para $F_s(\omega) + e$, quando a diferença entre o valor calculado e o real for positiva e para $F_s(\omega) - e$, quando a diferença entre o valor calculado e o valor real for negativa. e é definido como o desvio médio absoluto. A cada iteração é calculada uma nova matriz do modelo $[A]$ e o novo sistema de equações lineares é resolvido. A função racional aproximada (4.10) é então avaliada. Os novos parâmetros calculados são comparados aos obtidos na iteração anterior e os pesos são atualizados.

No plano z a região de estabilidade corresponde à região $|z| \leq 1$, que representa um círculo unitário centrado na origem do plano complexo, como mostra a Figura 4.3.

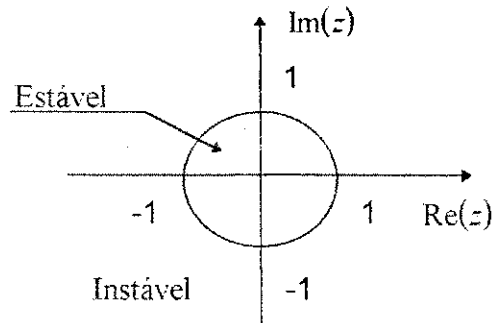


Figura 4.3 - Critério de Estabilidade no Plano z

Na rotina de estabilização implementada, pólos e zeros que estejam fora do círculo unitário são refletidos para dentro do mesmo. Matematicamente, pólos e zeros complexos instáveis são substituídos pelo inverso do seu conjugado.

$$r_i \rightarrow \frac{1}{r_i^*} \quad \text{e} \quad p_i \rightarrow \frac{1}{p_i^*} \quad (4.18)$$

4.4.2. Método de Ajuste Linear - Resolução por Decomposição em Valores Singulares (SVD)

Esta rotina de ajuste difere da anterior unicamente no que se refere ao método de resolução do sistema linear sobredeterminado escolhido. Aqui utilizamos a decomposição em valores singulares (SVD).

4.4.3. Método de Ajuste Não-Linear - Método de Levenberg-Marquardt

O método descrito a seguir combina o método anterior com o método não-linear proposto por Levenberg-Marquardt (Apêndice D).

O algoritmo segue igual ao descrito na seção 4.4.1 até o item 4, quando optamos pelo uso da decomposição em valor singulares (SVD) para solucionar o sistema linear sobredeterminado. Por esta razão, iniciamos a sua exposição a partir do item 5.

5. Utilizar os parâmetros a_0, \dots, a_n e b_1, \dots, b_m como chutes iniciais para a rotina de Levenberg-Marquardt.
6. Repetir processo iterativo até que a função de mérito χ^2 definida pela equação (4.6) atinja um mínimo.
7. Obter pólos e zeros extraíndo-se as raízes do numerador e do denominador em (4.10).
8. Estabilizar pólos e zeros instáveis seguindo procedimento já descrito anteriormente.
9. Calcular pólos e zeros equivalentes no plano s a partir de (4.16).

No capítulo seguinte, os resultados obtidos com os métodos implementados são apresentados e analisados.

Capítulo 5

Análise de Resultados

A análise dos resultados obtidos com os métodos propostos no Capítulo 4 é subdividida em duas seções. Inicialmente, são analisados os resultados obtidos para a síntese de circuitos RLC, quando é feito um estudo comparativo entre a modelagem no plano s e a modelagem no plano z . Em seguida, os resultados para uma linha de transmissão monofásica são analisados.

5.1. Síntese de Circuitos RLC

Consideremos o circuito RLC da Figura 5.1 cuja resposta em frequência desejamos ajustar a uma função racional aproximada.

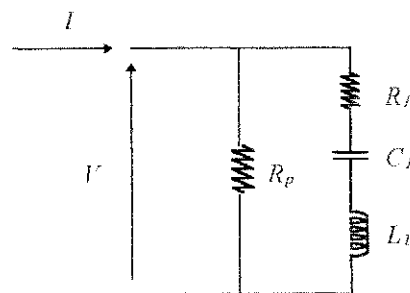


Figura 5.1 - Circuito RLC proposto.

Desejamos considerar ajustes no plano s e no plano z . Para isso calculamos analiticamente sua função de transferência:

$$\frac{V}{R_p} + \frac{V}{R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = I \quad (5.1)$$

$$\frac{V}{I} = \frac{R_p - \omega^2 R_p L_1 C_1 + j\omega R_p R_1 C_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1 + j\omega C_1 (R_1 + R_p)} \quad (5.2)$$

Fazendo $s = j\omega$ em (5.2) obtemos

$$\frac{V}{I} = \frac{s^2 R_p L_1 C_1 + s R_p R_1 C_1 + R_p}{s^2 L_1 C_1 + s C_1 (R_1 + R_p) + 1} \quad (5.3)$$

Extraindo-se as raízes do numerador e do denominador em (5.3) obteremos, respectivamente, os zeros e os pólos da função de transferência.

Os pólos são dados por

$$p_{1,2} = \frac{-C_1 \cdot (R_p + R_1) \pm \sqrt{[C_1 \cdot (R_p + R_1)]^2 - 4L_1 C_1}}{2L_1 C_1} \quad (5.4)$$

e os zeros são dados por

$$r_{1,2} = \frac{-R_p R_1 C_1 \pm \sqrt{(R_p R_1 C_1)^2 - 4R_p^2 L_1 C_1}}{2R_p L_1 C_1} \quad (5.5)$$

A eficiência dos métodos de ajuste propostos é avaliada através de dois casos distintos.

5.1.1. Caso 1 - Pólos e zeros reais

Fazendo $R_p = 100\Omega$, $R_1 = 200\Omega$, $C_1 = 20\mu F$ e $L_1 = 100mH$ em (5.4) e

(5.5) obtemos

$$p_{1,2} = -177,12434446$$

$$r_1 = -292,89318 \quad r_2 = -1707,1067818$$

Utilizando um programa implementado em FORTRAN, foram gerados arquivos de dados com valores do módulo e da fase da função de transferência para baixas frequências (1Hz-10kHz) e para altas frequências (100Hz-1MHz). Passamos agora a apresentar os resultados obtidos.

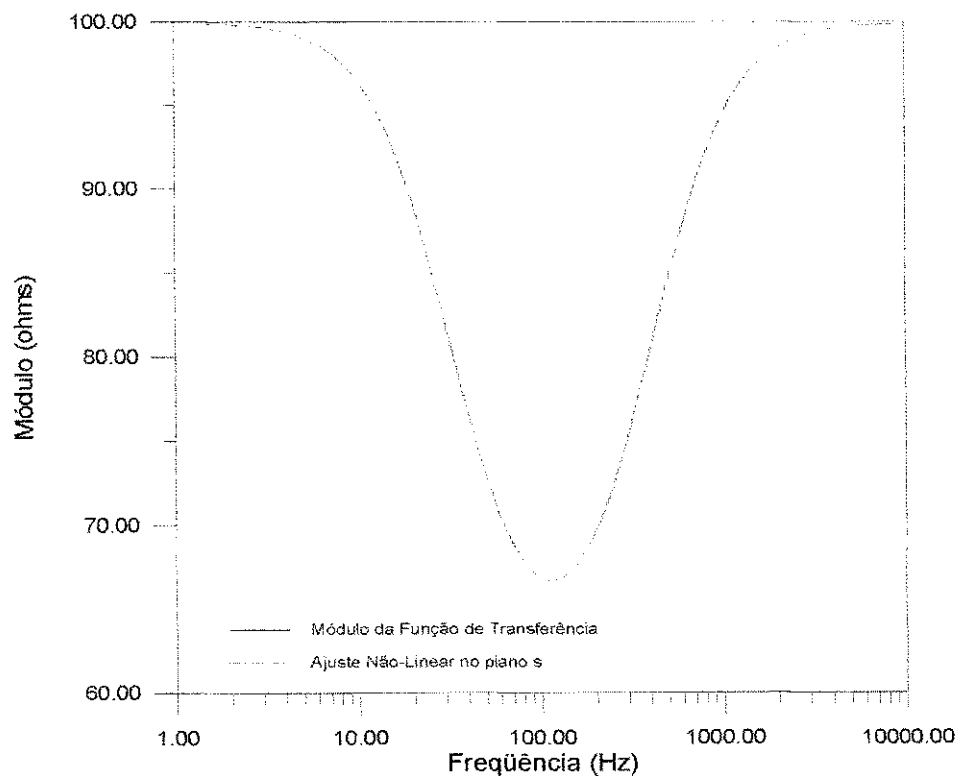


Figura 5.2 - Módulo da Função de Transferência em baixas frequências (1Hz-10kHz).

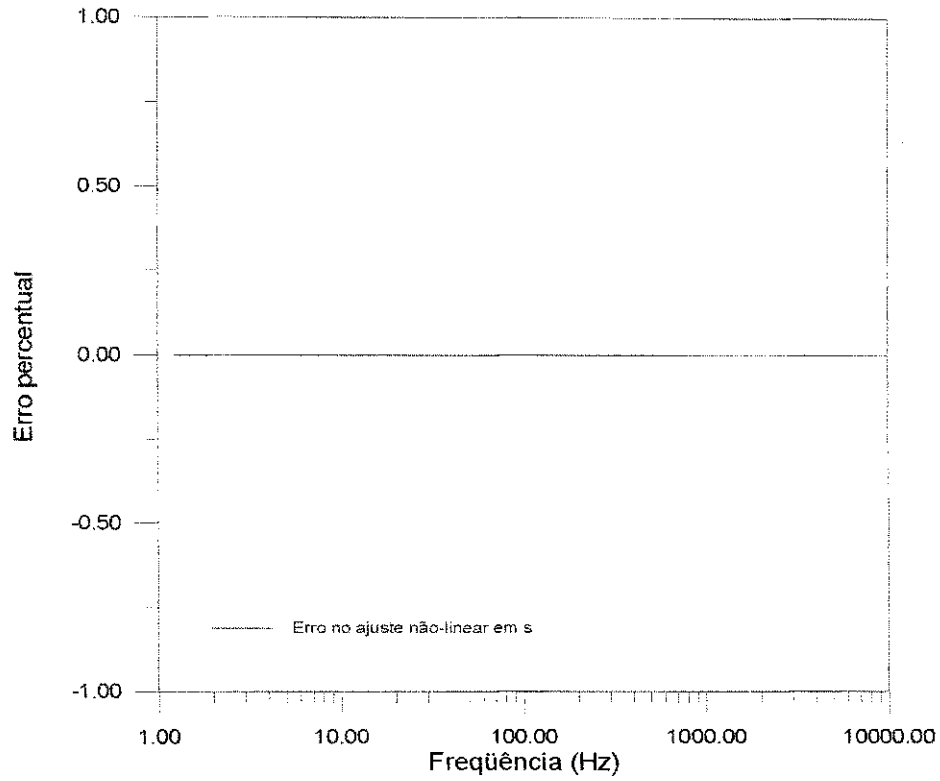


Figura 5.3. - Erro percentual no ajuste não-linear em s para baixas frequências.

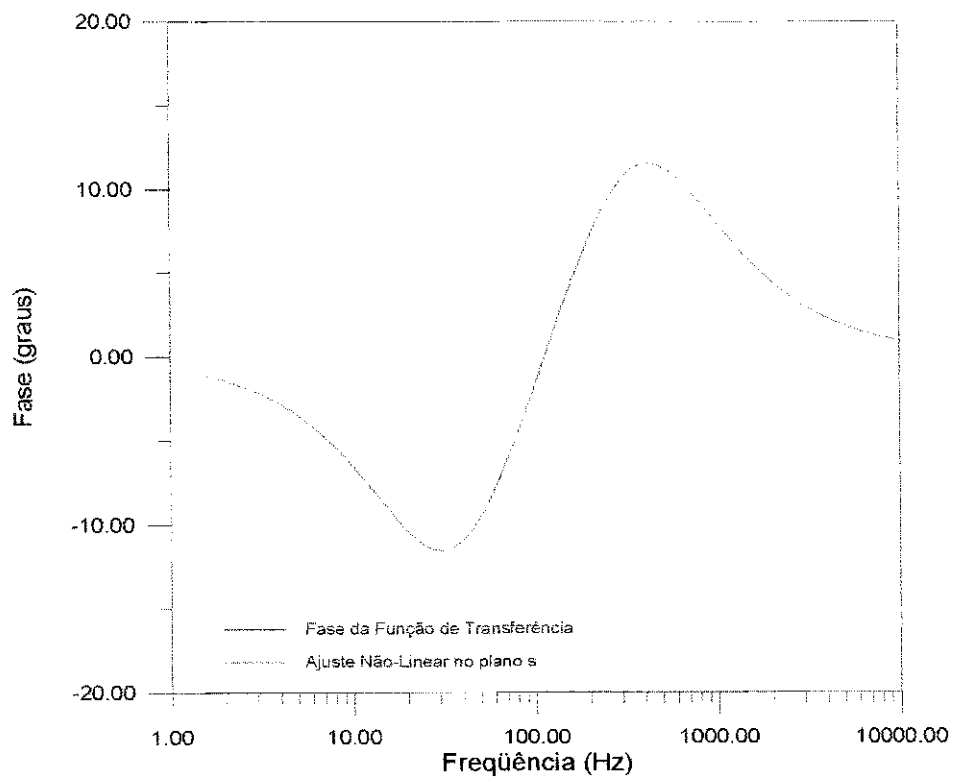


Figura 5.4 - Fase da Função de Transferência em baixas frequências (1Hz-10kHz).

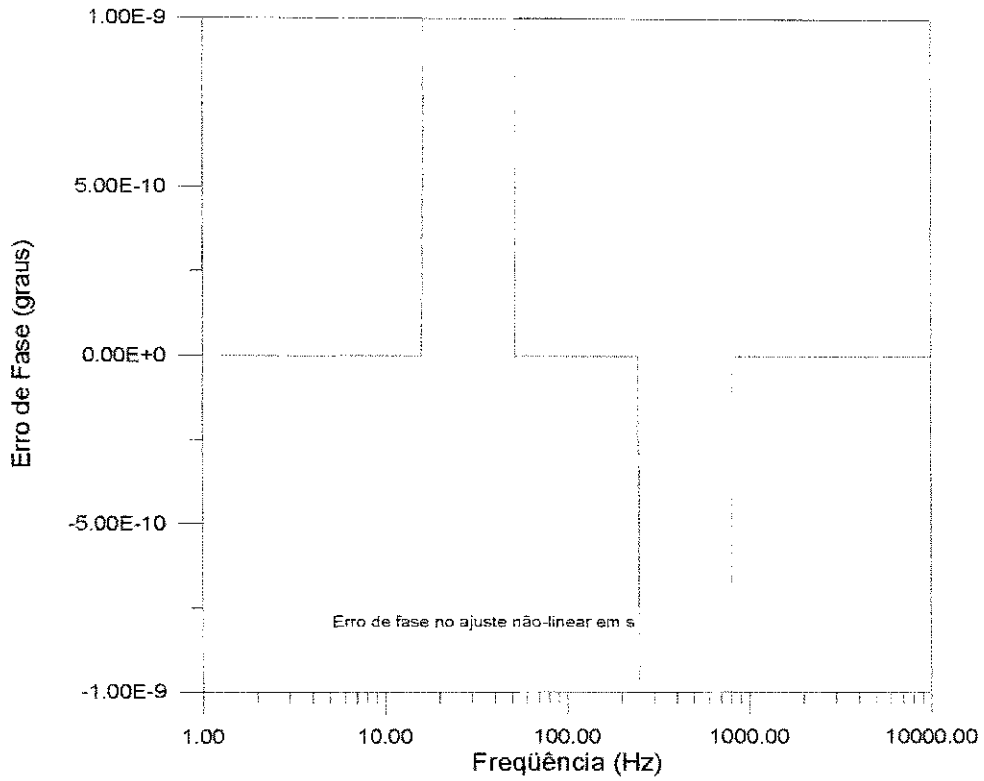


Figura 5.5 - Erro de Fase no ajuste não-linear em s em baixas frequências (1Hz-10kHz).

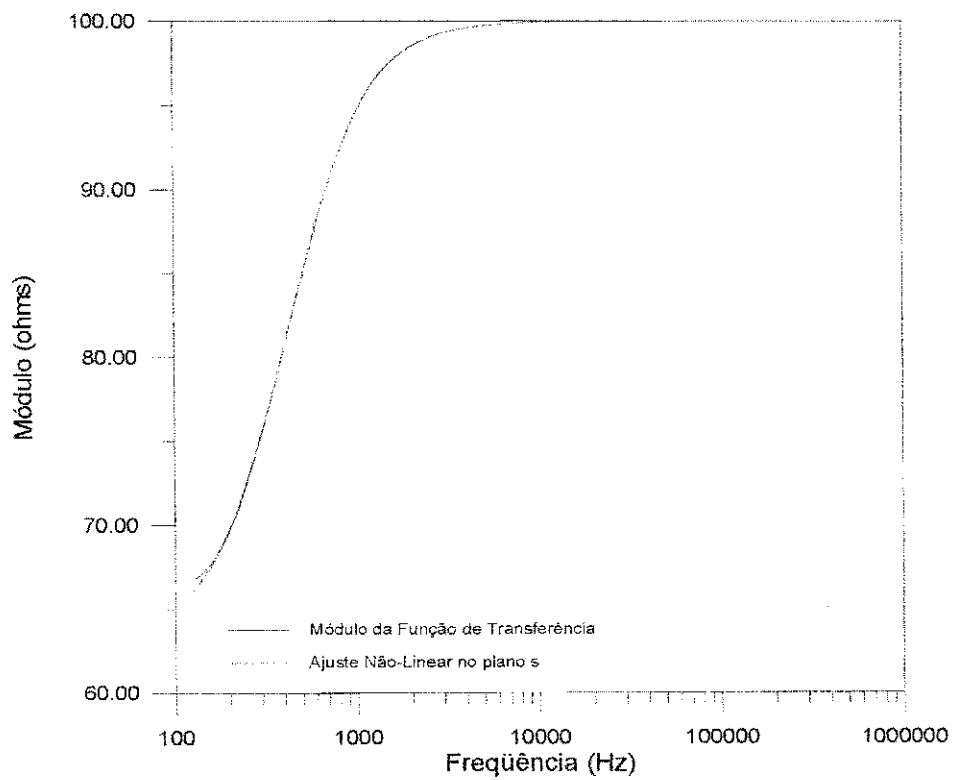


Figura 5.6 - Módulo da Função de Transferência em altas frequências (100Hz-1MHz).

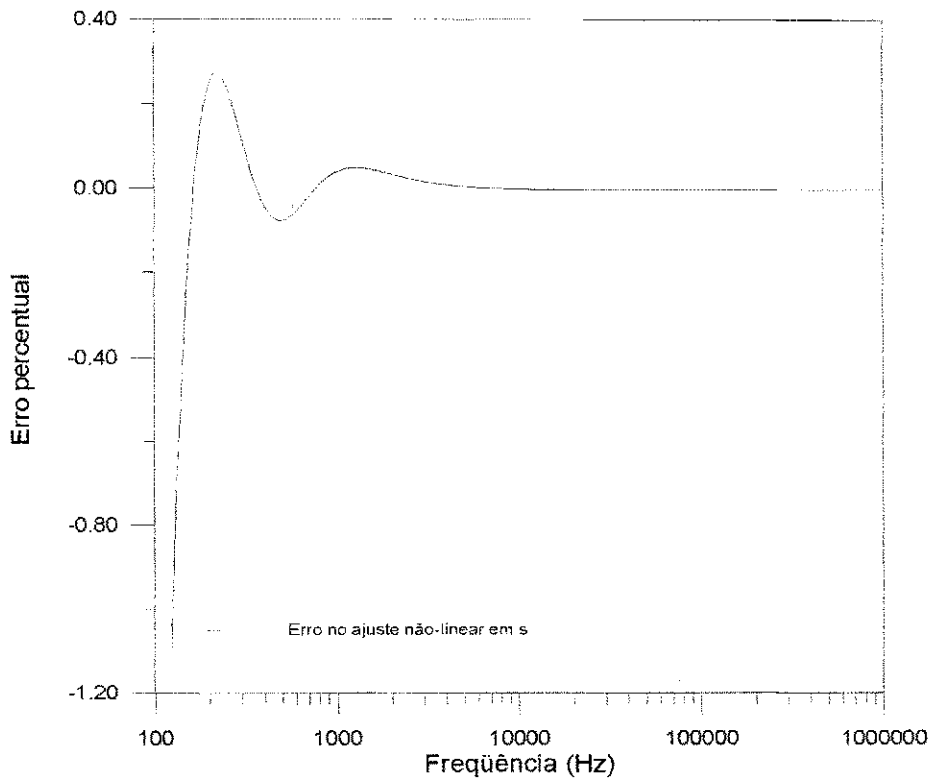


Figura 5.7 - Erro percentual no ajuste não-linear em s para altas frequências.

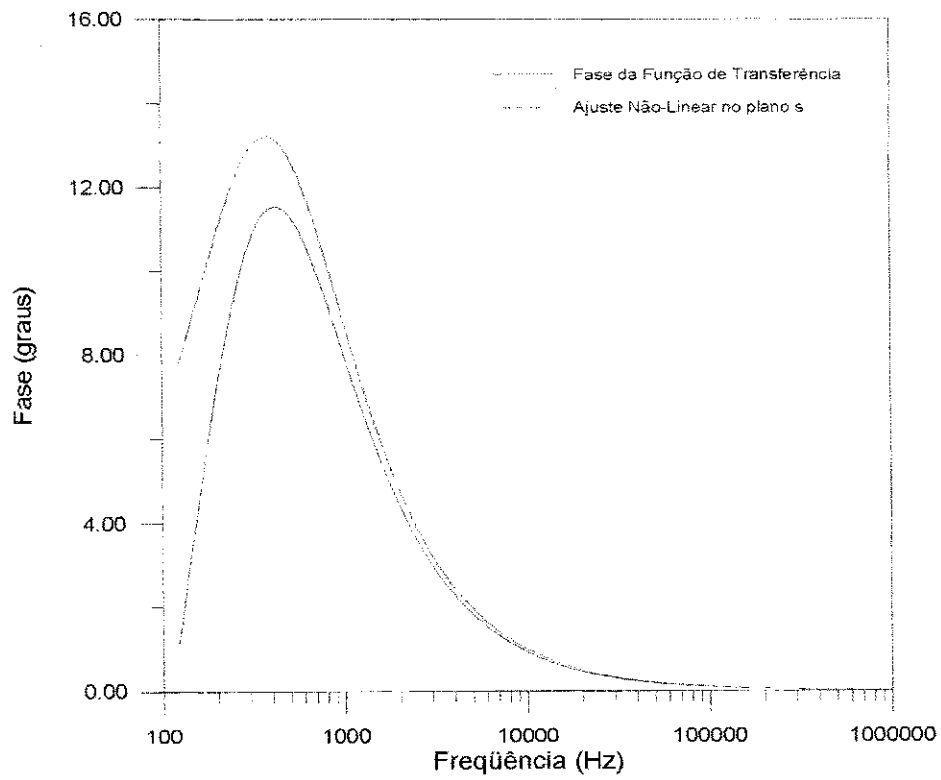


Figura 5.8 - Fase da Função de Transferência em altas frequências (100Hz-1MHz).

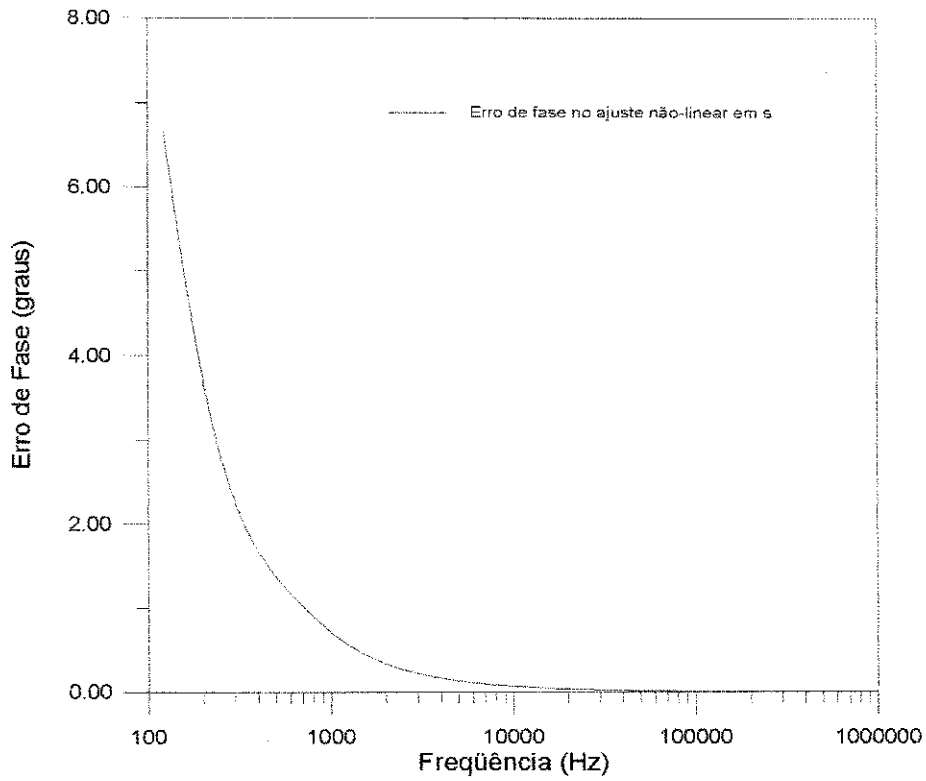


Figura 5.9 - Erro de Fase no ajuste não-linear em s em altas frequências (100Hz-1MHz).

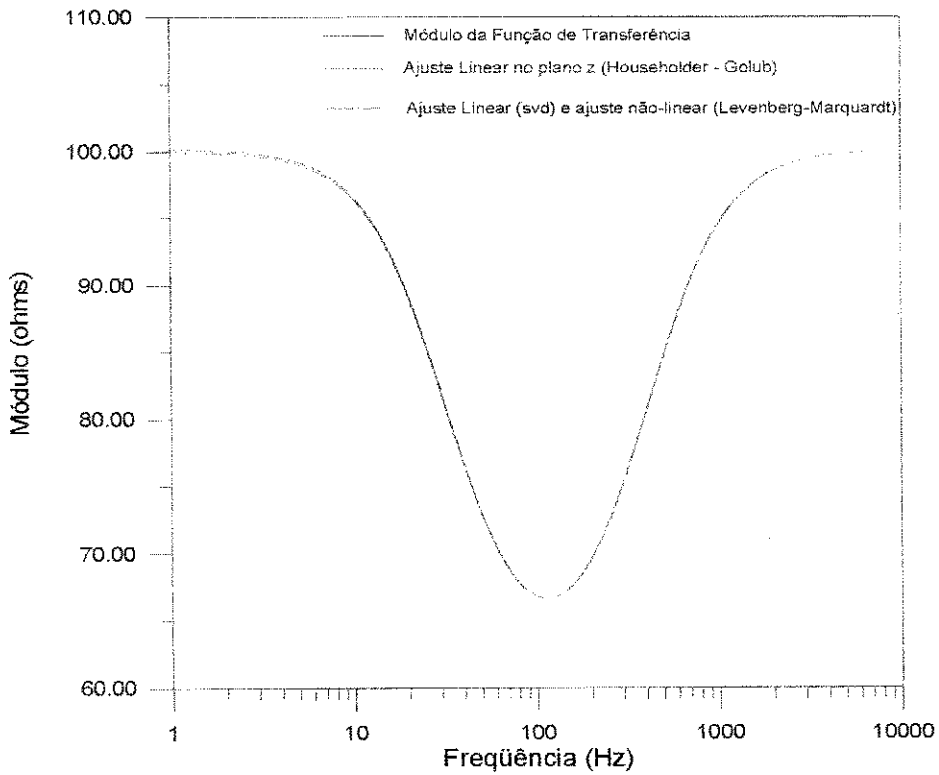


Figura 5.10 - Módulo da Função de Transferência em baixas frequências (1Hz-10kHz).

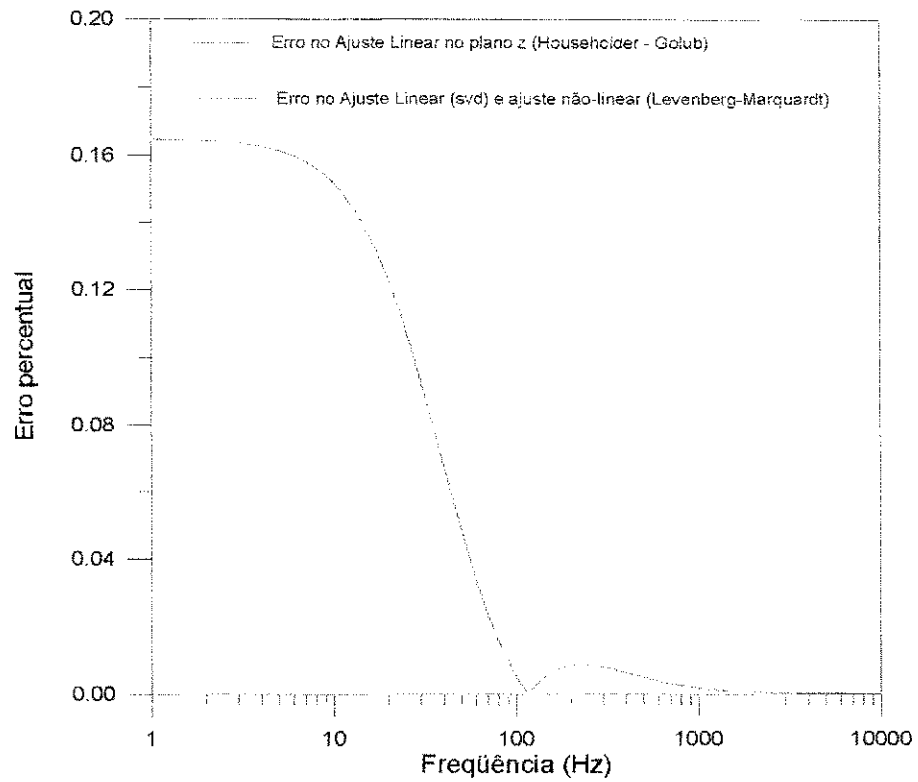


Figura 5.11 - Erro percentual para ajustes no plano z para baixas frequências.

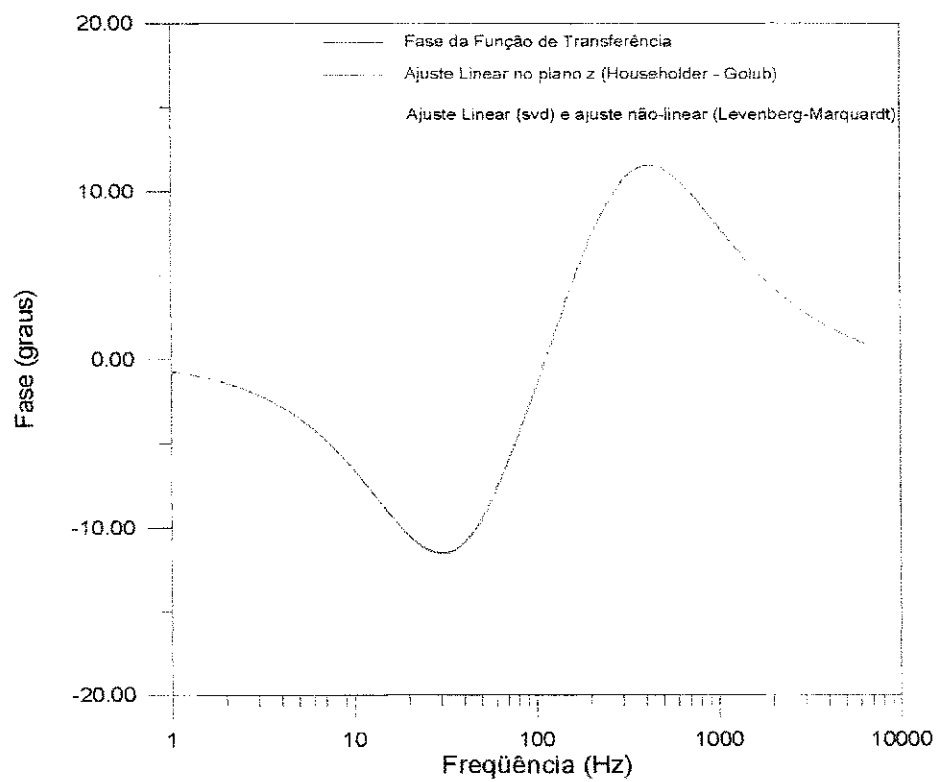


Figura 5.12 - Fase da Função de Transferência em baixas frequências (1Hz-10kHz).

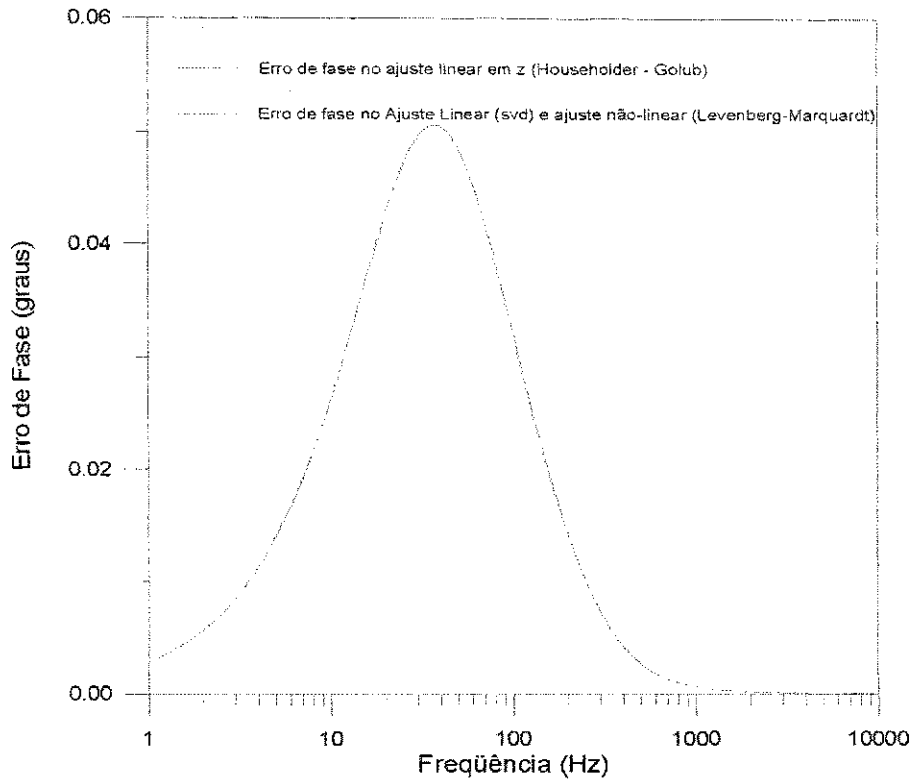


Figura 5.13 - Erro de Fase para ajustes em z em baixas frequências (1Hz-10kHz).

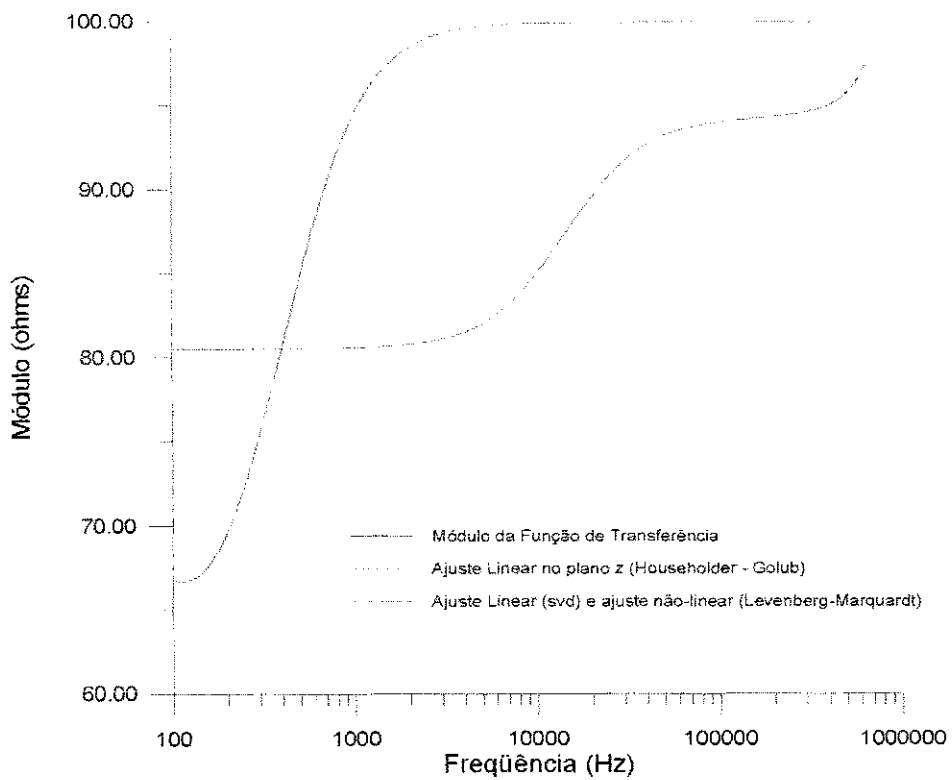


Figura 5.14 - Módulo da Função de Transferência em altas frequências (100Hz-1MHz).

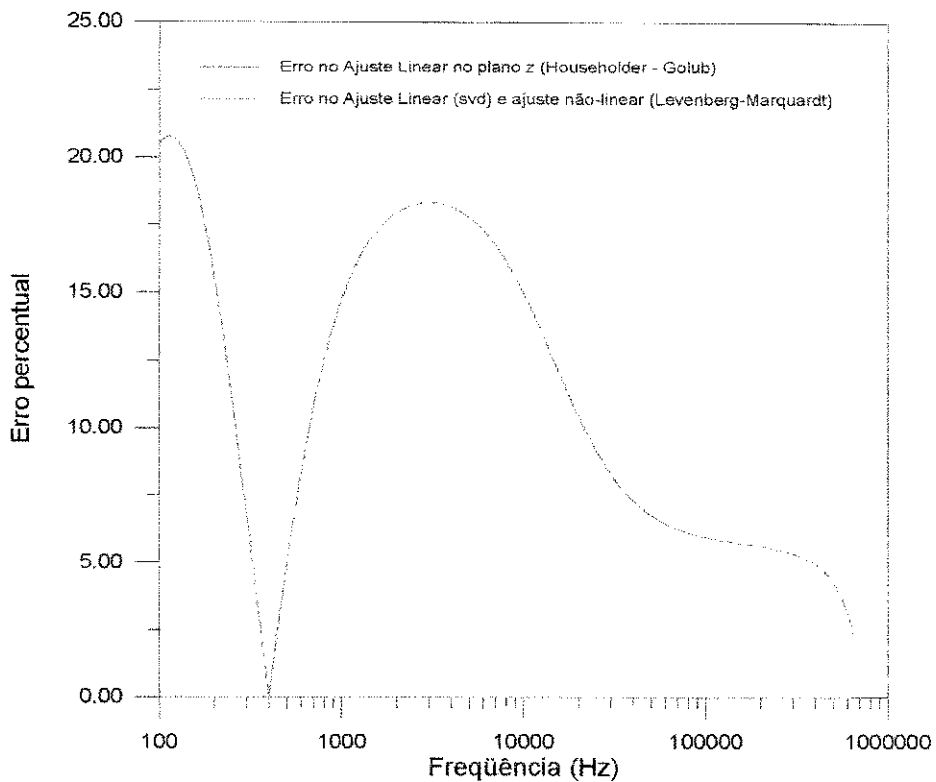


Figura 5.15 - Erro percentual para ajustes no plano z para altas frequências.

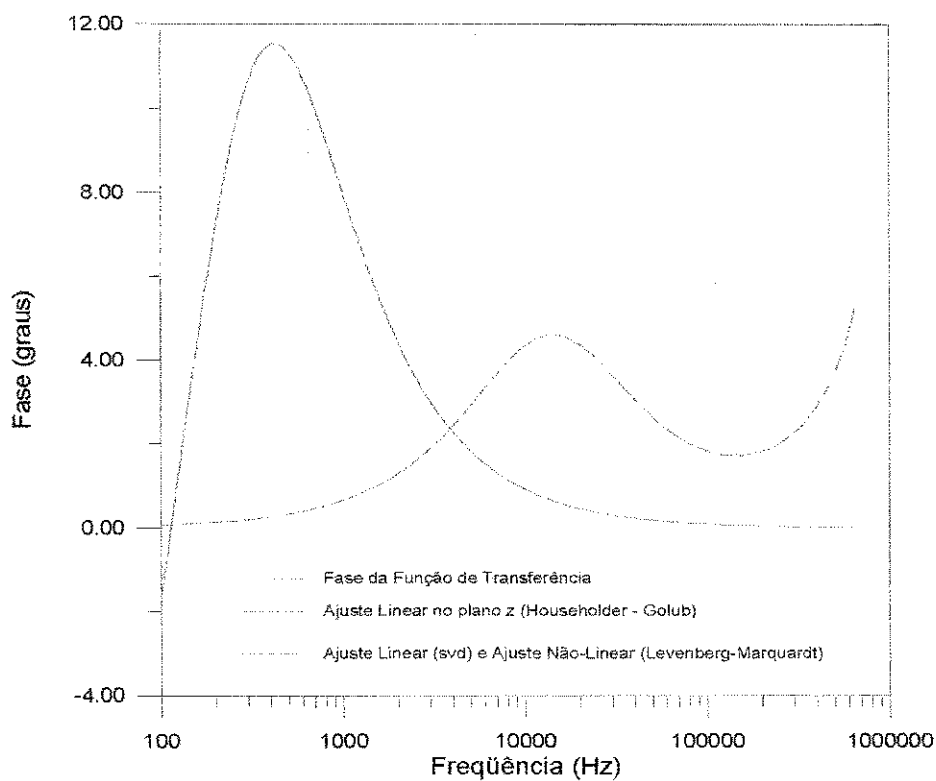


Figura 5.16 - Fase da Função de Transferência em altas frequências (100Hz-1MHz).

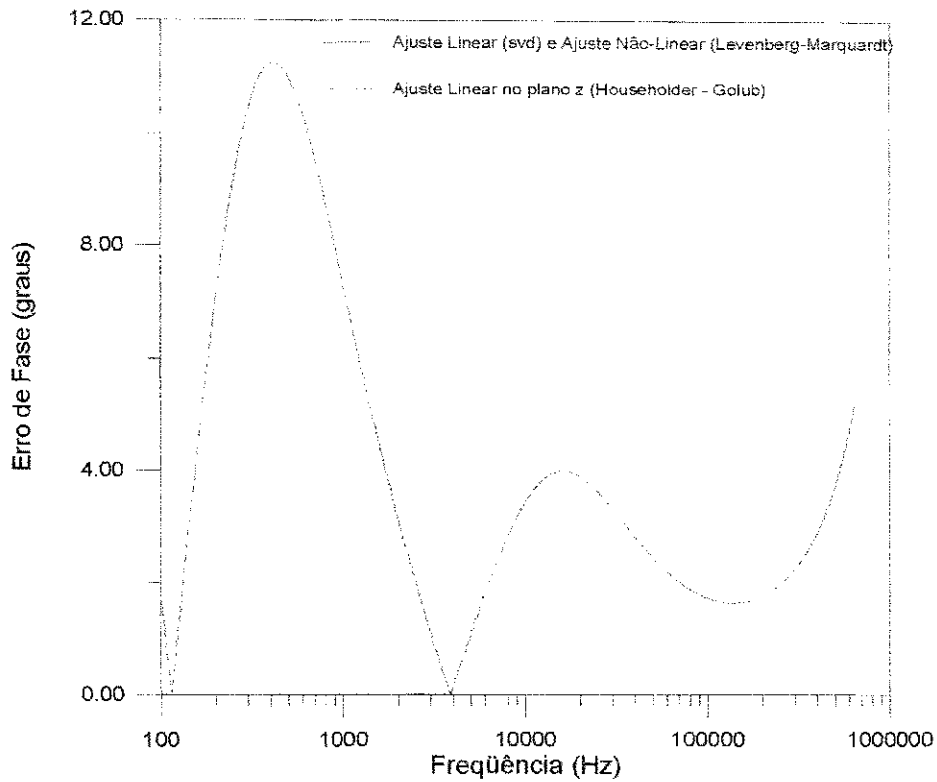


Figura 5.17 - Erro de fase para ajustes no plano z em altas frequências.

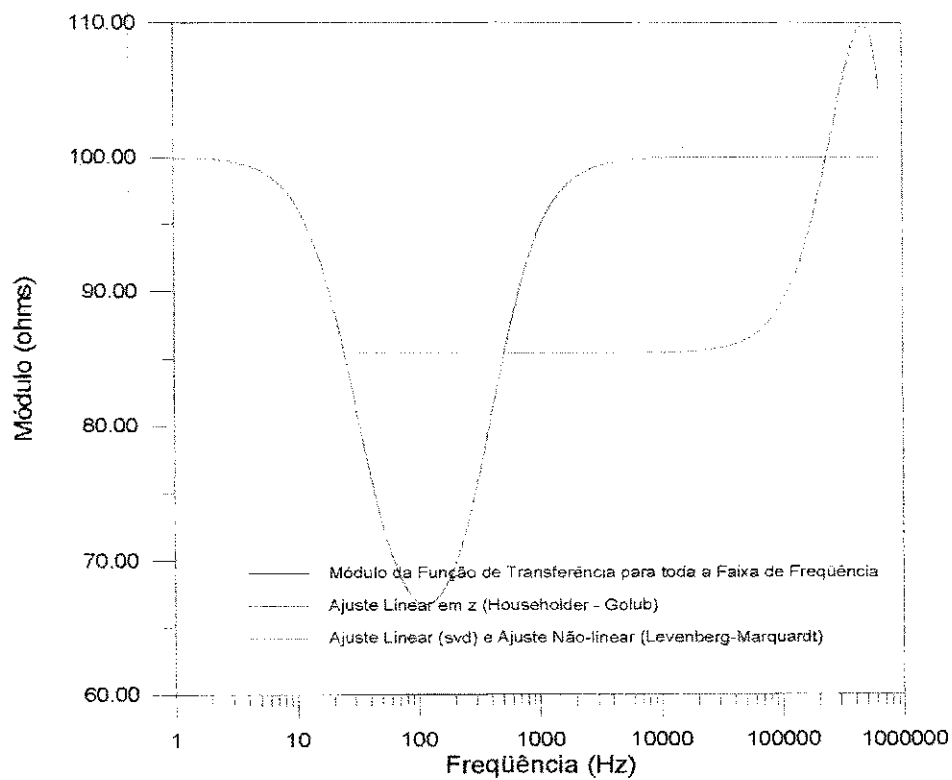


Figura 5.18 - Módulo da Função de Transferência para toda a faixa de frequência.

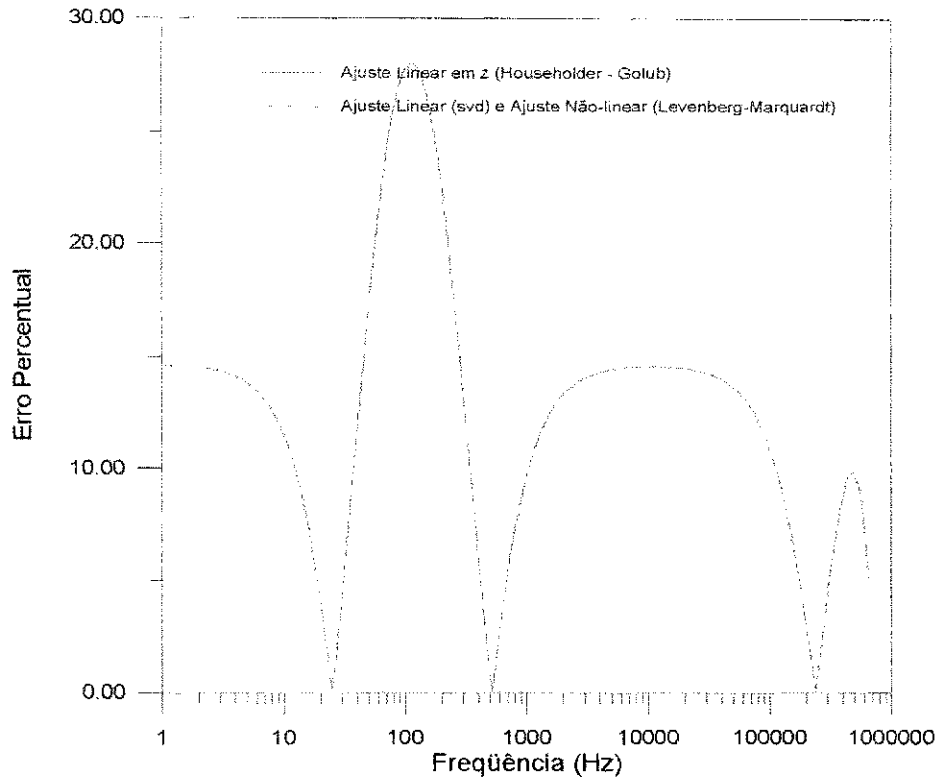


Figura 5.19 - Erro percentual para ajustes no plano z para toda a faixa de frequência.

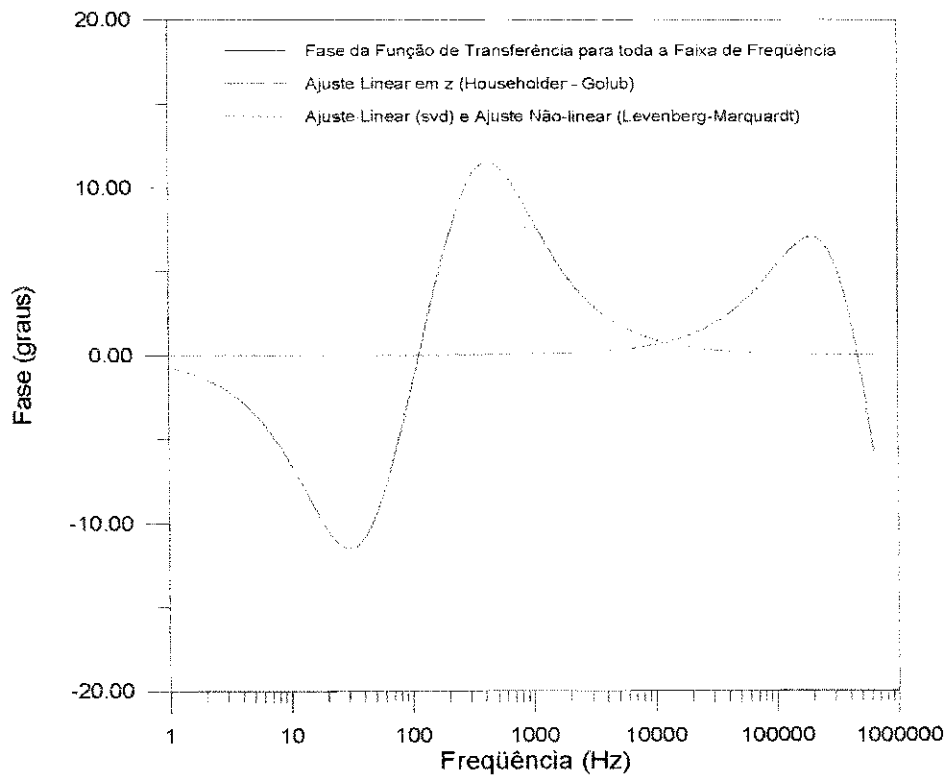


Figura 5.20 - Fase da Função de Transferência para toda a faixa de frequência.

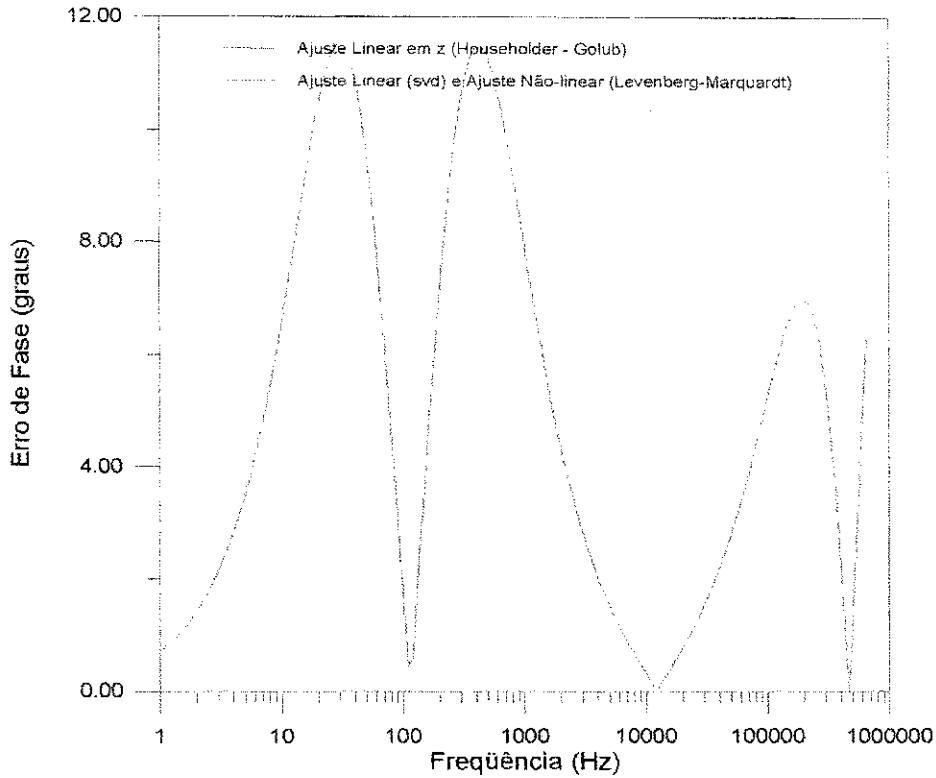


Figura 5.21 - Erro de fase para ajustes no plano z para toda a faixa de freqüência.

Como critério de avaliação para a precisão das aproximações obtidas para a função de transferência, são considerados: o erro percentual acumulado e o erro percentual máximo.

O erro percentual acumulado E_{ac} é definido como a soma dos erros percentuais absolutos nas aproximações para cada ponto.

$$E_{ac} = \sum_{i=1}^{npt} \left| \frac{\text{Valor real} - \text{Valor calculado}}{\text{Valor real}} \right| \cdot 100\% \quad (5.6)$$

O número de iterações necessárias para a convergência assim como os pólos e zeros calculados ao final de cada ajuste são também determinantes da eficiência de cada método.

Nos ajustes considerando toda a faixa de frequência são utilizados 606 pontos enquanto que nos demais são utilizados 804 pontos.

As Tabelas 5.1 e 5.2 a seguir mostram os resultados obtidos com o método de ajuste não-linear no plano s .

Ajustes no plano s

	Ajuste Não-Linear em s		
	Número de Iterações	Erro Acumulado	Erro máximo
1Hz-10kHz	101	$1,088 \cdot 10^{-11}\%$	$6,423 \cdot 10^{-14}\%$
100Hz - 1MHz	468	20,477%	1,091%

Tabela 5.1 - Resultados Obtidos a partir do Ajuste Não-Linear plano s .

Ajustes no plano s

	Valores Teóricos	Ajuste Não-Linear em s	
		1Hz-10kHz	100Hz - 1MHz
p_1	-177,124	-177,124	-3453,645
p_2	-177,124	-2822,876	-3453,645
z_1	-292,893	-292,893	-1922,730
z_2	-1707,11	-1707,110	-3915,382

Tabela 5.2 - Pólos e zeros obtidos a partir do Ajuste Não-Linear em s .

Como mostram as Figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 e a Tabela 5.1, o ajuste não-linear no plano s consegue reproduzir as curvas de módulo e fase da função de transferência com grande precisão em baixas frequências (1Hz-10kHz).

Em altas frequências (Figuras 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9) percebemos que tanto a curva de módulo como a curva de fase obtidas apresentam algumas distorções já na primeira década.

Quanto aos pólos e zeros resultantes do ajuste, percebemos que embora a resposta em frequência seja perfeitamente reproduzida, o ajuste não-linear em s não

retorna pólos reais idênticos. Verificamos ainda na Tabela 5.2. que os valores calculados em altas frequências não concordam com os valores teóricos.

As Tabelas 5.3 e 5.4 reúnem resultados referentes à modelagem no plano z . Os valores obtidos através do método não-linear com o uso de Levenberg-Marquardt são exatamente iguais aos resultantes do ajuste linear com decomposição em valores singulares (svd). Isto ocorre porque os parâmetros calculados pelo método linear (svd), que servem como chutes iniciais para a rotina de Levenberg-Marquardt, são suficientes para garantir o mínimo para a função de mérito χ^2 .

Ajustes no plano z

	Ajuste Linear (Householder - Golub)			Ajuste Linear (svd)		
	Número de Iterações	Erro Acumulado	Erro máximo	Número de Iterações	Erro Acumulado	Erro máximo
1Hz-10kHz	1	44,02%	0,17%	1	$0,518 \cdot 10^{-6}\%$	$0,233 \cdot 10^{-8}\%$
100Hz - 1MHz	1	7878,82%	20,79%	1	$0,172 \cdot 10^{-5}\%$	$0,219 \cdot 10^{-7}\%$
1Hz - 1MHz	1	7535,58%	28,03%	1	$0,163 \cdot 10^{-4}\%$	$0,200 \cdot 10^{-6}\%$

Tabela 5.3 - Resultados Obtidos para Ajustes no plano z .

Ajustes no plano z

	Ajuste Linear (Householder - Golub)		
	1Hz-10kHz	100Hz-1MHz	1Hz-1MHz
p_1	-176,99	-94212,87	-94212,87
p_2	-2827,66	-885647,56+j6283185,3	-885647,56+j6283185,3
z_1	-293,23	-80444,57	-80444,57
z_2	-1707,79	-98775,26+6283185,3	-98775,26+6283185,3

Tabela 5.4 - Pólos e zeros em s obtidos a partir de ajustes no plano z .

Ajustes no plano z

	Ajuste Linear (svd)		
	1Hz-10kHz	100Hz-1MHz	1Hz-1MHz
p_1	-177,13	-177,12	-177,12
p_2	-2827,58	-2822,88	-2822,88
z_1	-292,90	-292,89	-292,89
z_2	-1708,14	-1707,11	-1707,11

Tabela 5.4 (continuação) - Pólos e zeros em s obtidos a partir de ajustes no plano z .

Como podemos observar nas Figuras 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 e nas Tabelas 5.3 e 5.4, os métodos de ajustes no plano z , em baixas frequências, também produzem resultados bastante precisos. No entanto, o método linear com a decomposição svd apresenta desempenho um pouco melhor que o método que utiliza a transformação de Householder.

Em altas frequências (Figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17), encontramos algumas limitações no método de ajuste linear (Householder-Golub). O ajuste por este método apresenta erros elevados ao longo de toda a faixa de frequência considerada para as curvas de módulo e fase da função de transferência. Este erros no processo de ajuste são extensivos aos cálculos de pólos e zeros como mostra a Tabela 5.4.

Ao aumentarmos a ordem da função polinomial aproximada (maior número de pólos e zeros), conseguimos melhorar o ajuste pelo método de Householder-Golub como mostra as Figuras 5.23 e 5.24. As Figuras 5.24 e 5.25 comparam o melhor ajuste em altas frequências utilizando o método de Householder-Golub ao ajuste por decomposição svd com 2 pólos e 2 zeros.

A superioridade do método de ajuste linear por decomposição svd em relação ao ajuste linear (Householder-Golub) se torna evidente nas Figuras 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.26 e 5.27, quando consideramos toda a faixa de frequência. As Figuras 5.26 e 5.27 comparam o melhor ajuste conseguido utilizando o método de Householder - Golub (16 pólos e 16 zeros) com o ajuste por decomposição svd (2 pólos e 2 zeros).

Assim como o método não-linear no plano s , o método linear por decomposição (svd) utilizando o plano z é capaz de reproduzir a resposta em frequência do circuito RLC, mas o ajuste não retorna pólos reais idênticos. Isto se deve à própria natureza do método implementado, visto que ao considerarmos o sistema que define o modelo como linear, estamos supondo pólos distintos.

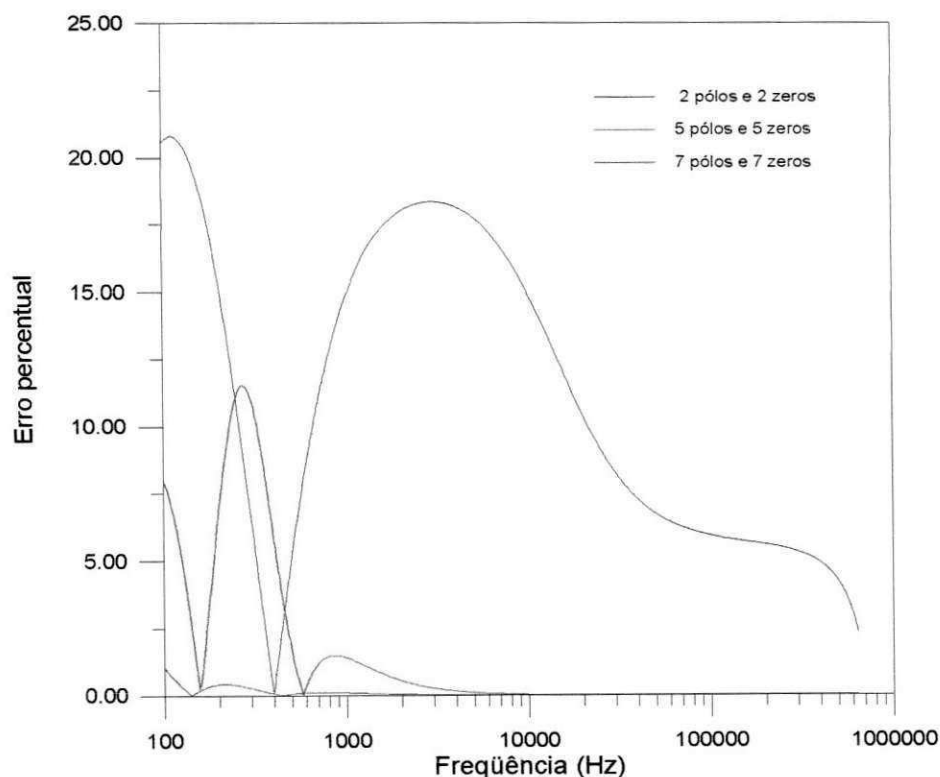


Figura 5.22 - Erro percentual utilizando Ajuste Linear (Householder -Golub) aumentando-se o número de pólos e zeros em altas frequências (100Hz-1MHz).

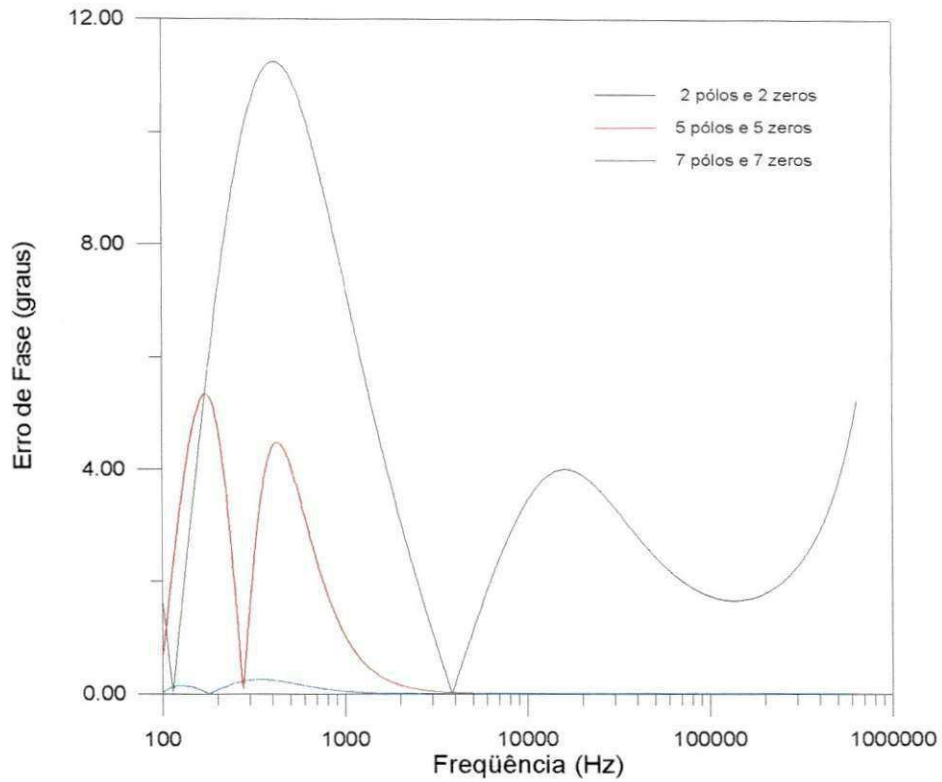


Figura 5.23 - Erro de fase utilizando Ajuste Linear (Householder -Golub) aumentando-se o número de pólos e zeros em altas freqüências (100Hz-1MHz).

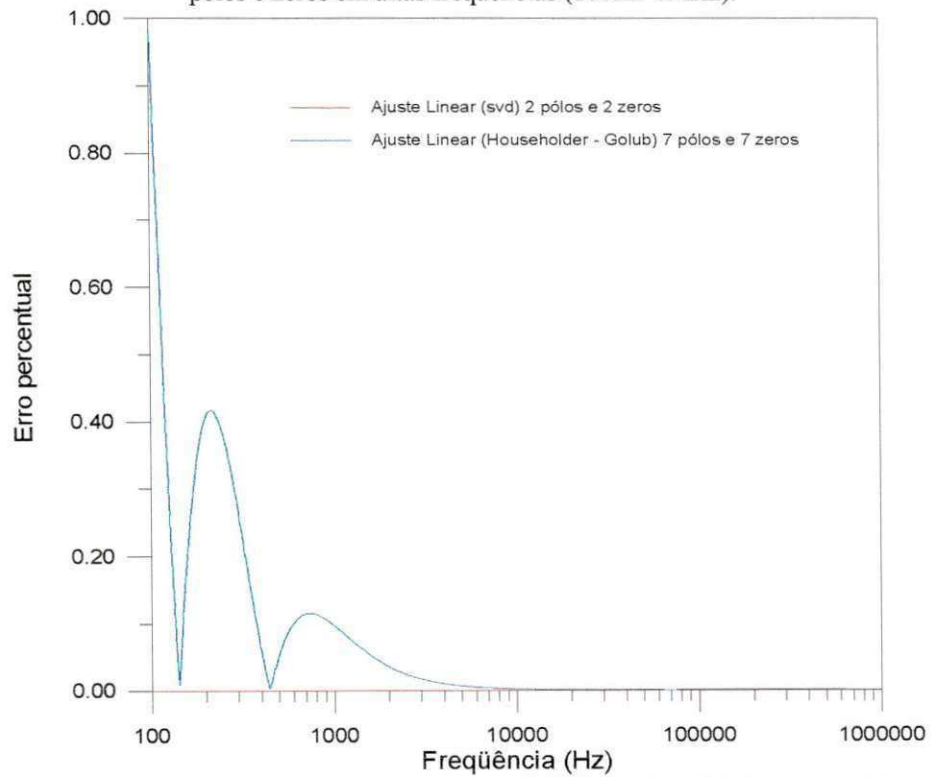


Figura 5.24 - Erro percentual utilizando Ajuste Linear (Householder -Golub) com 7 pólos e 7zeros e Ajuste Linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros em altas freqüências (100Hz-1MHz).

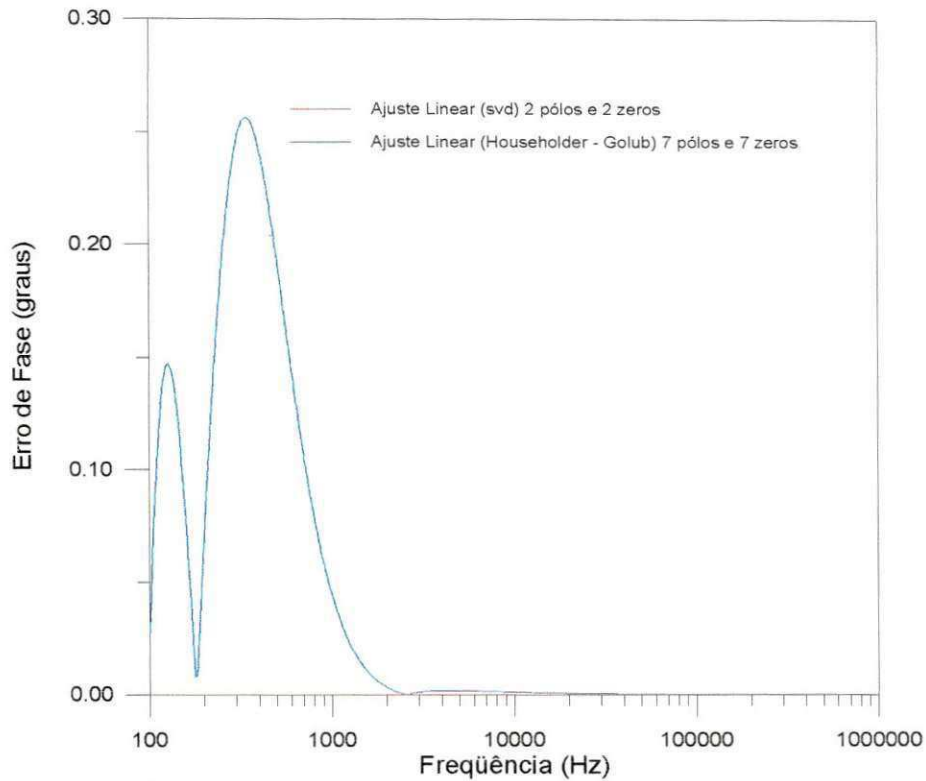


Figura 5.25 - Erro de fase utilizando Ajuste Linear (Householder -Golub) com 7 pólos e 7 zeros e Ajuste Linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros em altas frequências (100Hz-1MHz).

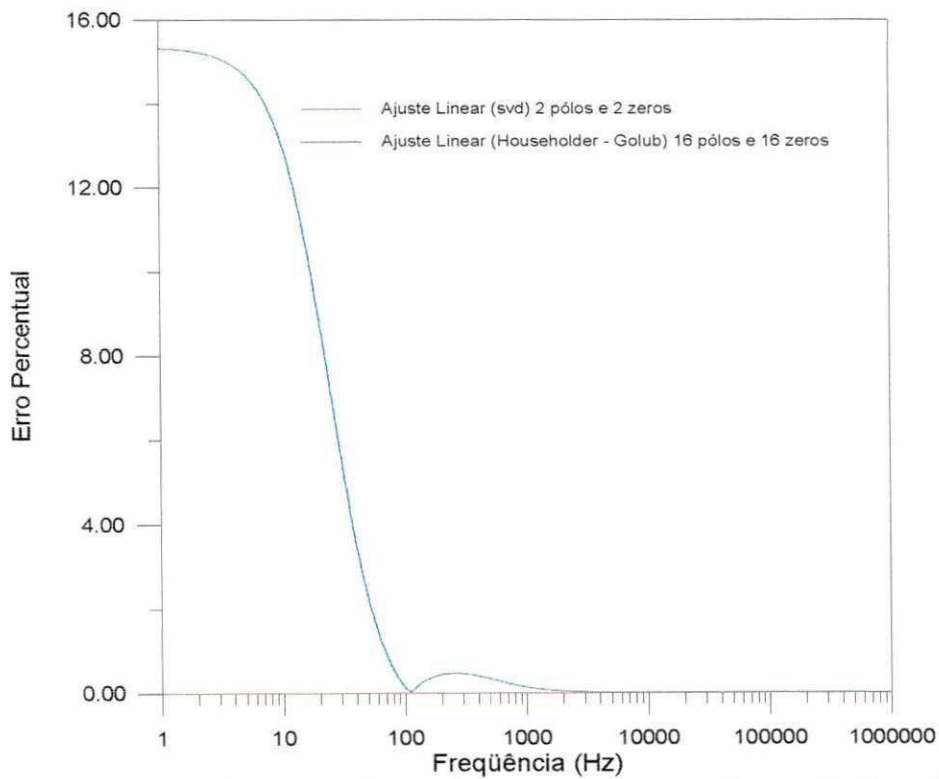


Figura 5.26 - Erro percentual utilizando Ajuste Linear (Householder -Golub) com 16 pólos e 16 zeros e Ajuste Linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros para toda a faixa de frequência.

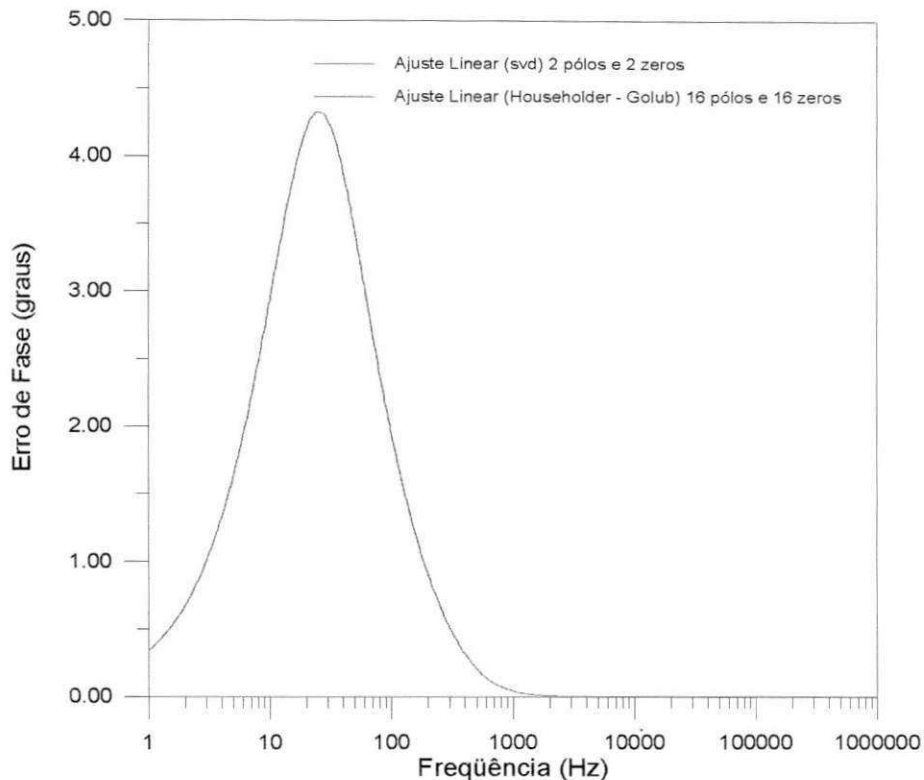


Figura 5.27 - Erro de fase utilizando Ajuste Linear (Householder -Golub) com 16 pólos e 16 zeros e Ajuste Linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros para toda a faixa de freqüência.

5.1.2. Caso 2 - Pólos e zeros complexos

Fazendo $R_p = 100\Omega$, $R_1 = 10\Omega$, $C_1 = 10\mu F$ e $L_1 = 100mH$ em (5.4) e

(5.5) obtemos

$$p_1 = -549,9999 + j835,16465$$

$$p_2 = -549,9999 - j835,16465$$

$$r_1 = -49,9999 + j998,7492$$

$$r_2 = -49,9999 - j998,7492$$

Utilizando um programa implementado em FORTRAN, foram gerados arquivos de dados com valores do módulo e da fase para a função de transferência para baixas freqüências (1Hz-10kHz) e para altas freqüências (100Hz-1MHz). Passamos agora a apresentar os resultados obtidos.

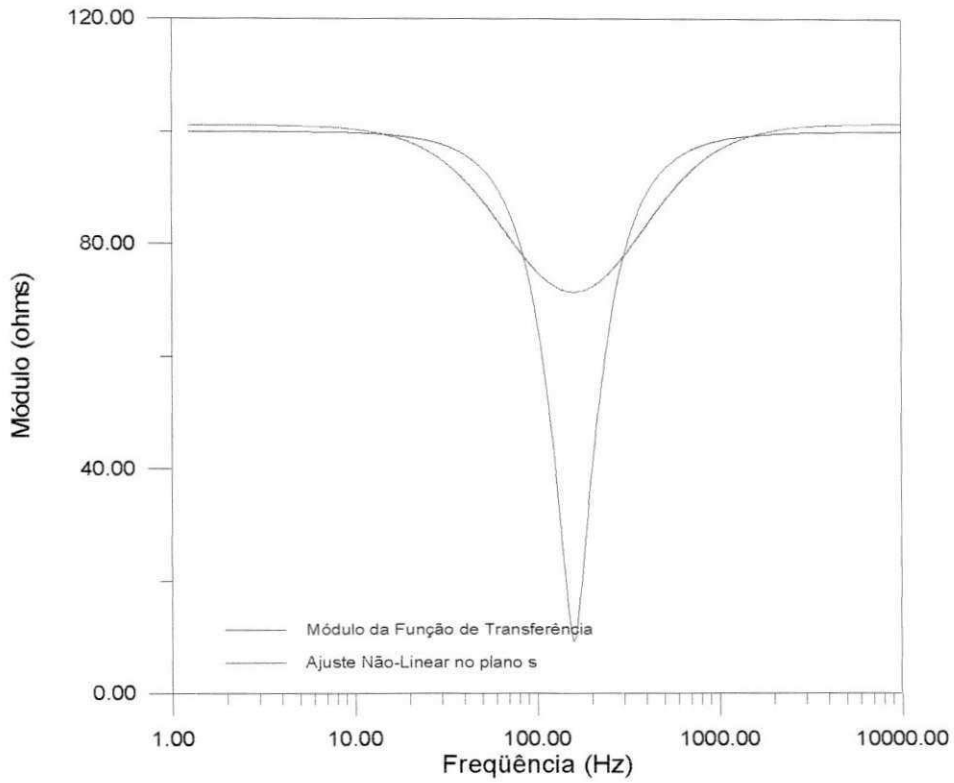


Figura 5.28 - Módulo da Função de Transferência em baixas frequências (1Hz-10kHz).

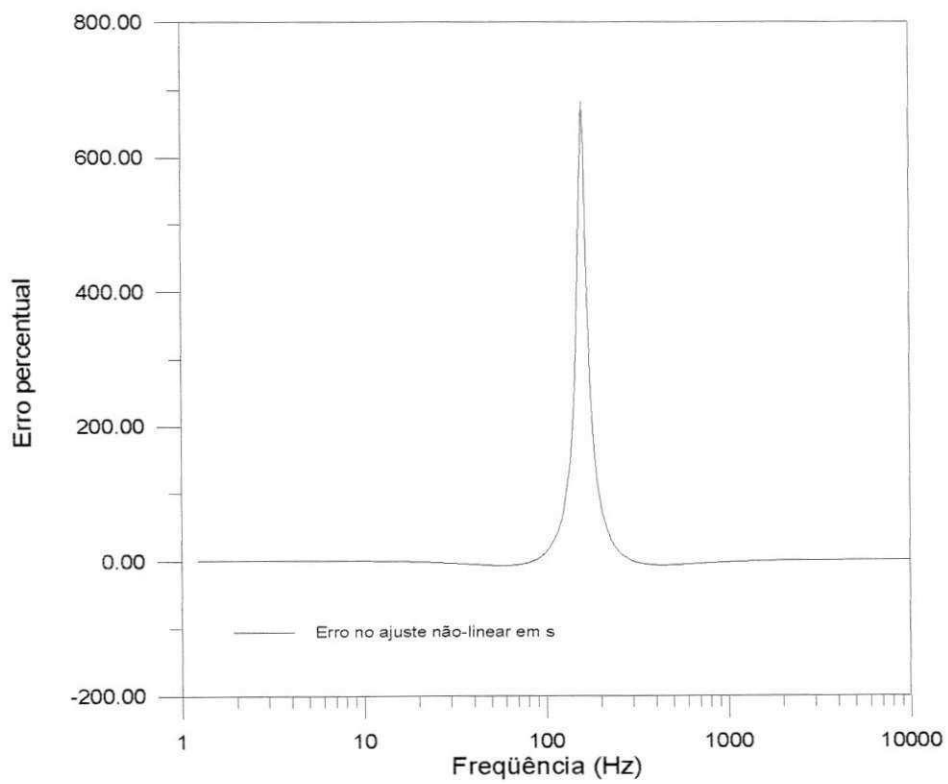


Figura 5.29 - Erro percentual no ajuste não-linear em s para baixas frequências.

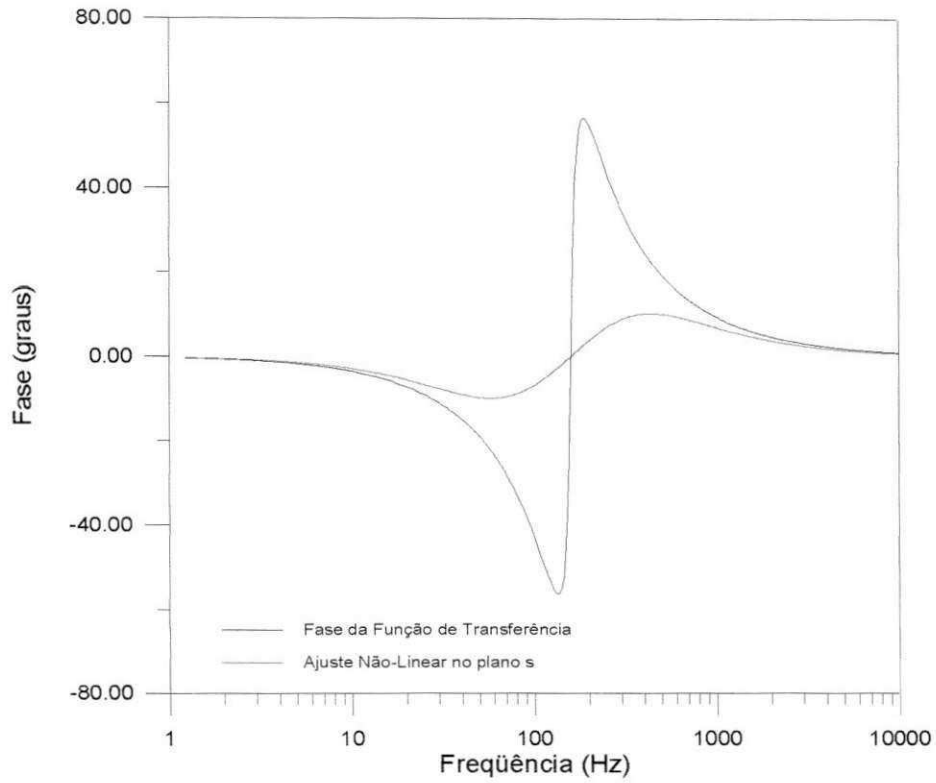


Figura 5.30 - Fase da Função de Transferência em baixas frequências (1Hz-10kHz).

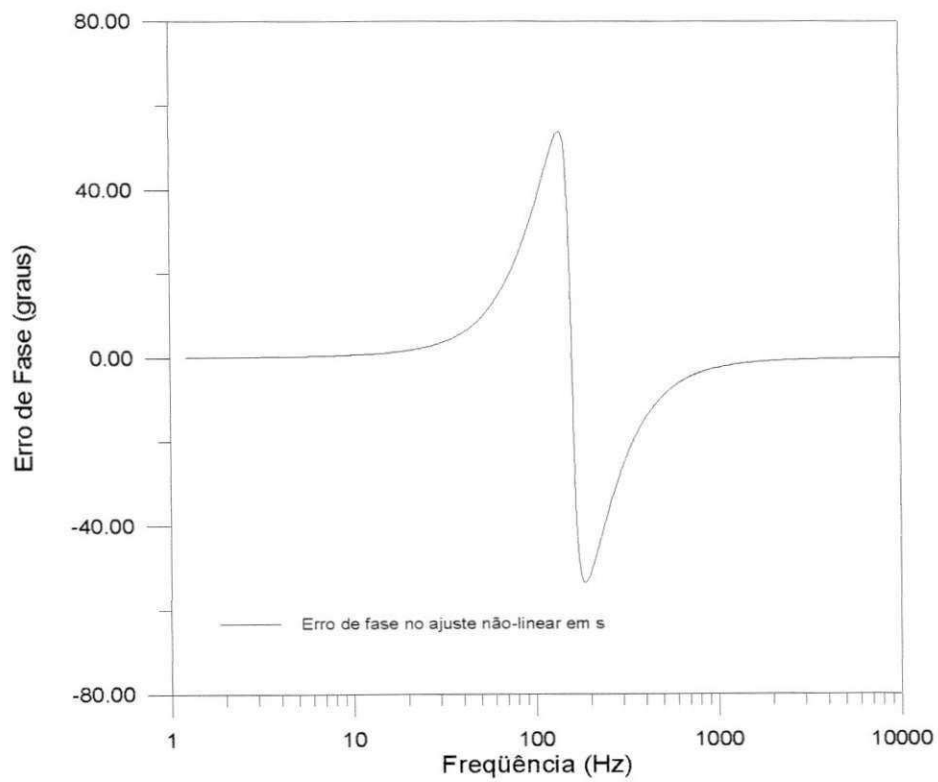


Figura 5.31 - Erro de fase no ajuste não-linear em s em baixas frequências (1Hz-10kHz).

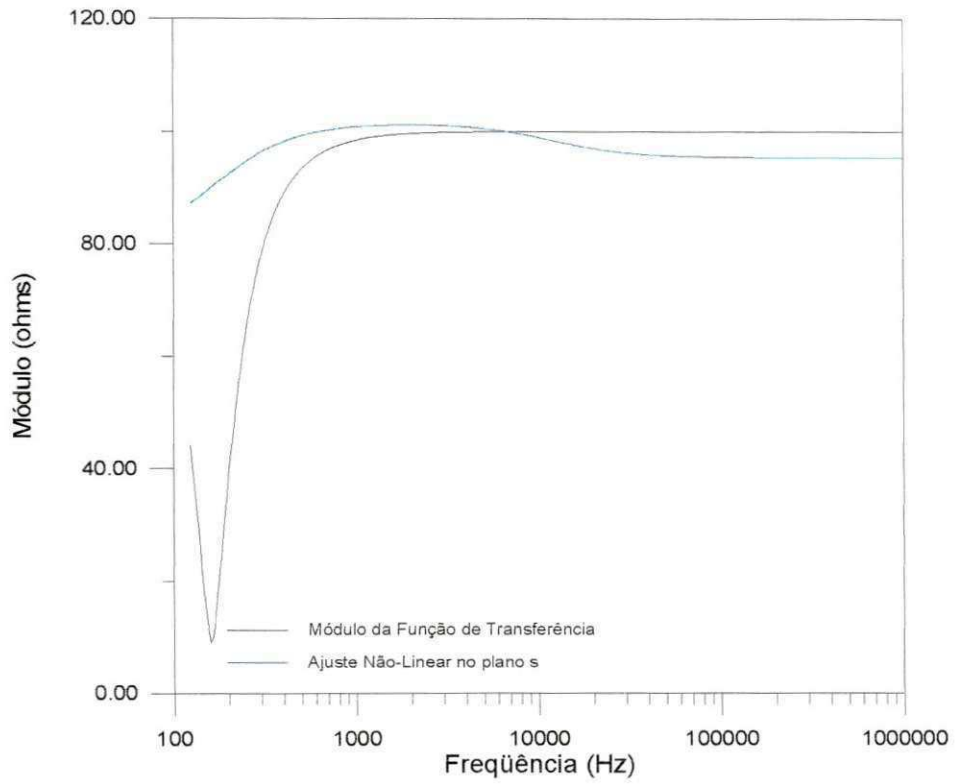


Figura 5.32 - Módulo da Função de Transferência em altas frequências (100Hz-1MHz).

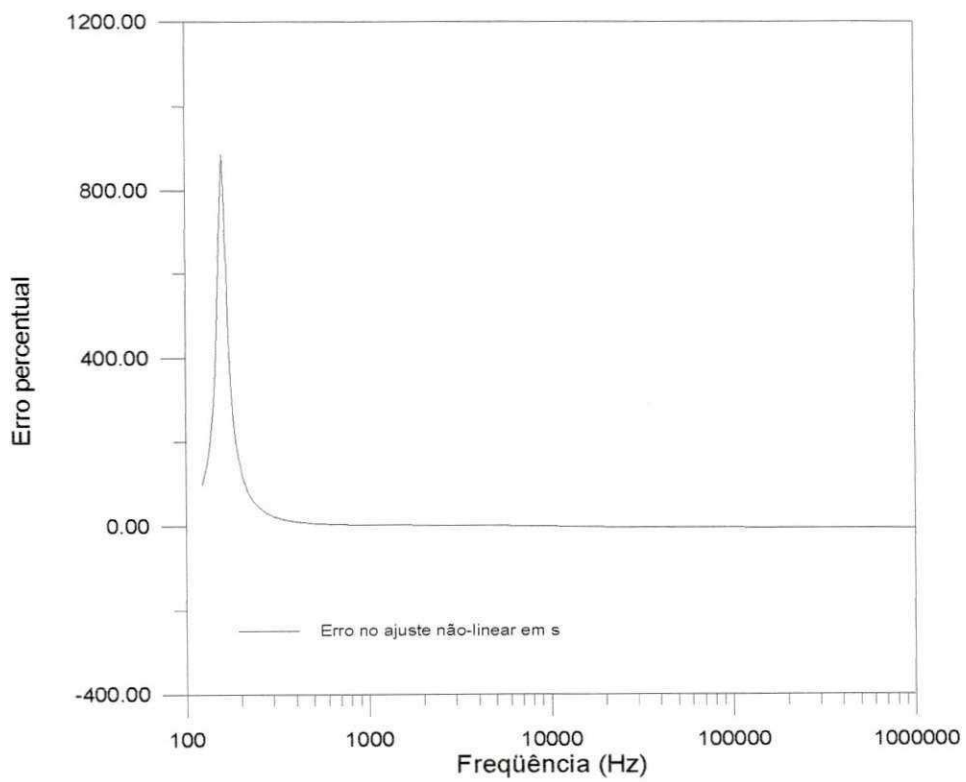


Figura 5.33 - Erro percentual no ajuste não-linear em s para altas frequências.

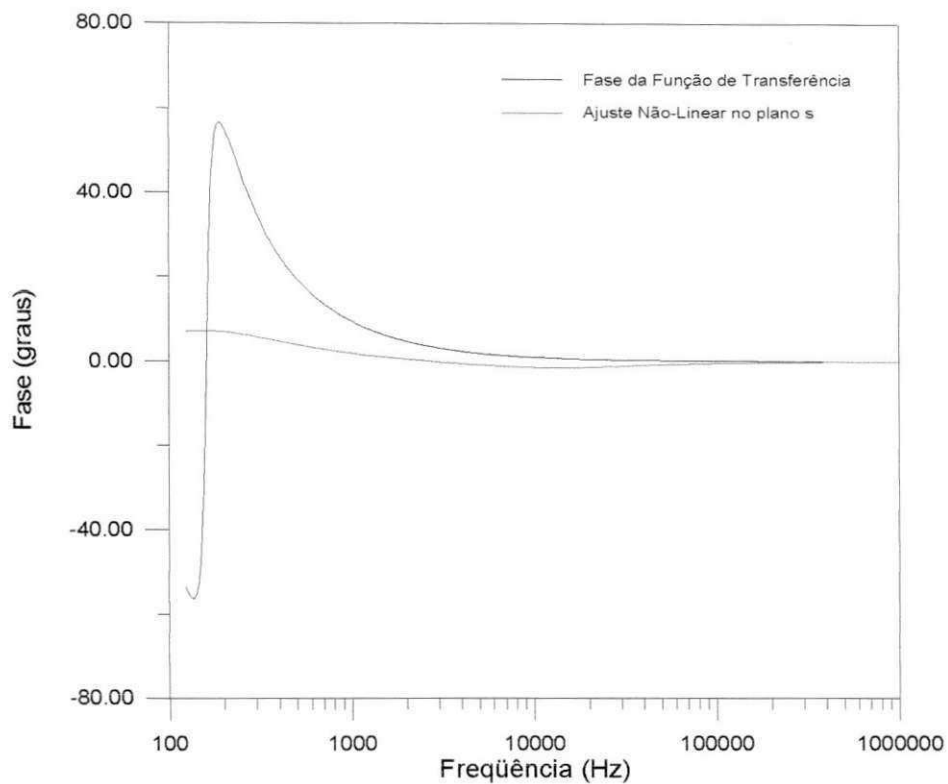


Figura 5.34 - Fase da Função de Transferência em altas frequências (100Hz-1MHz).

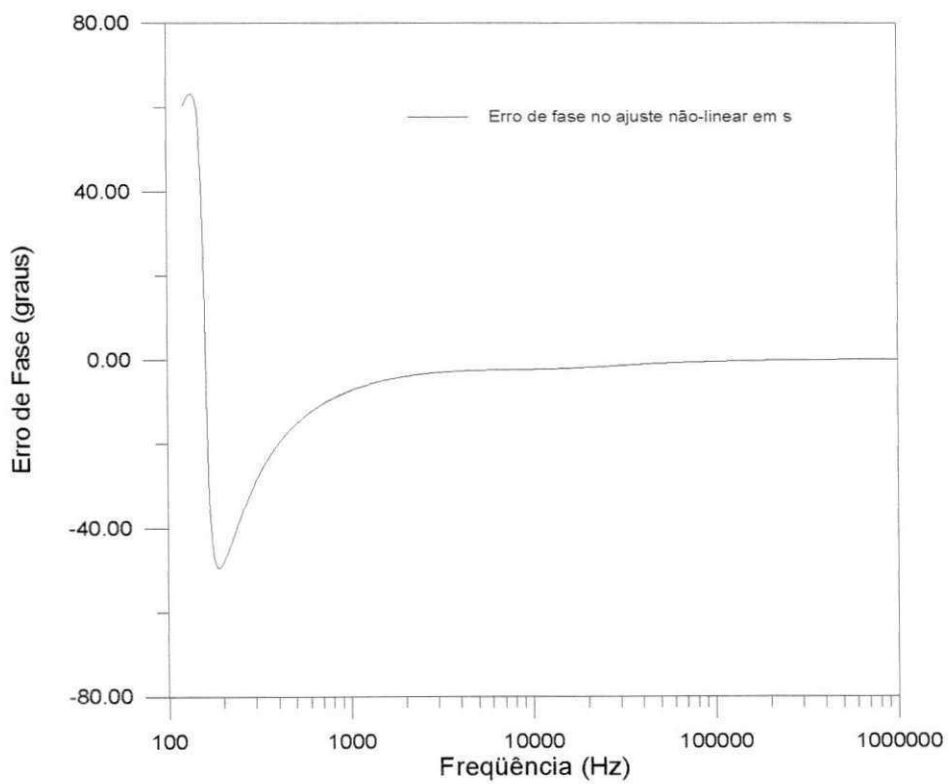


Figura 5.35 - Erro de Fase no ajuste não-linear em s em altas frequências (100Hz-1MHz).

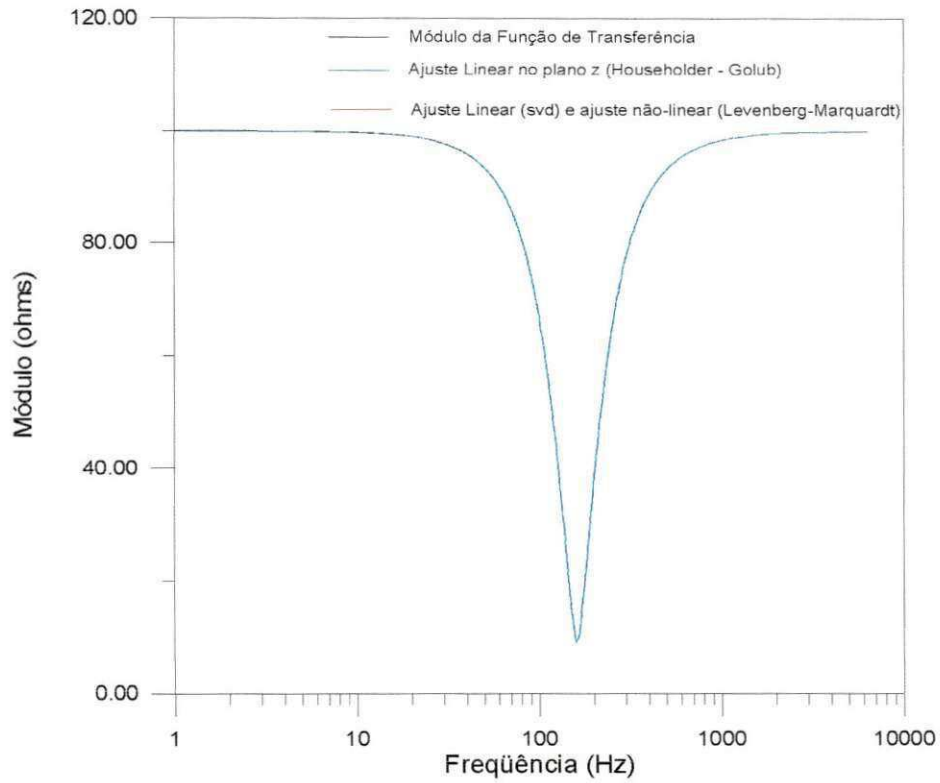


Figura 5.36 - Módulo da Função de Transferência em baixas frequências (1Hz-10kHz).

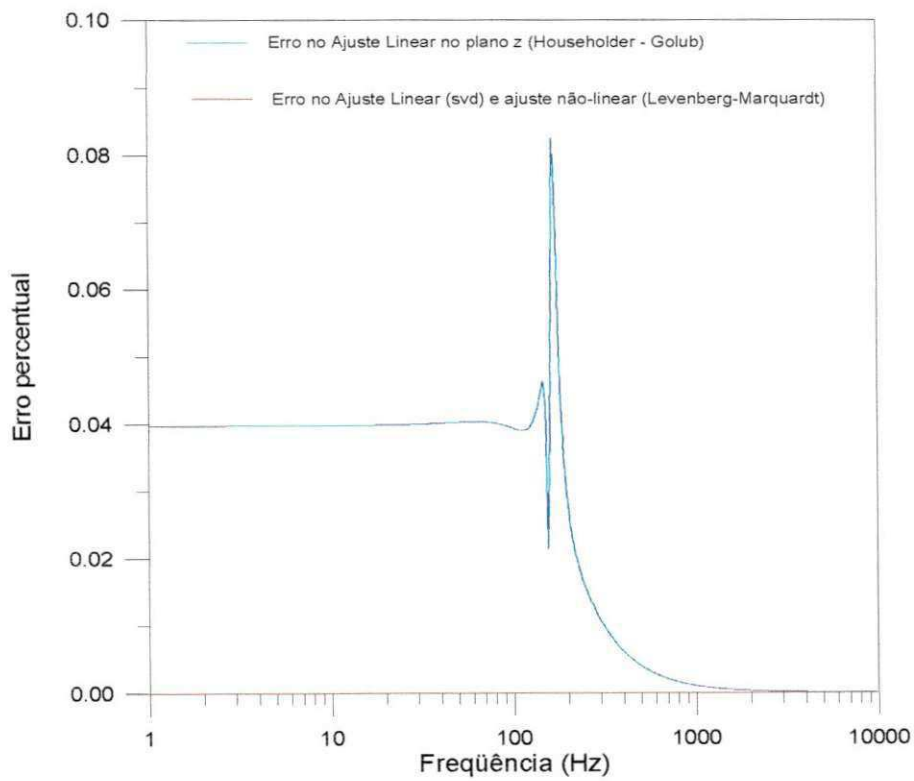


Figura 5.37 - Erro Percentual para ajustes no plano z para baixas frequências.

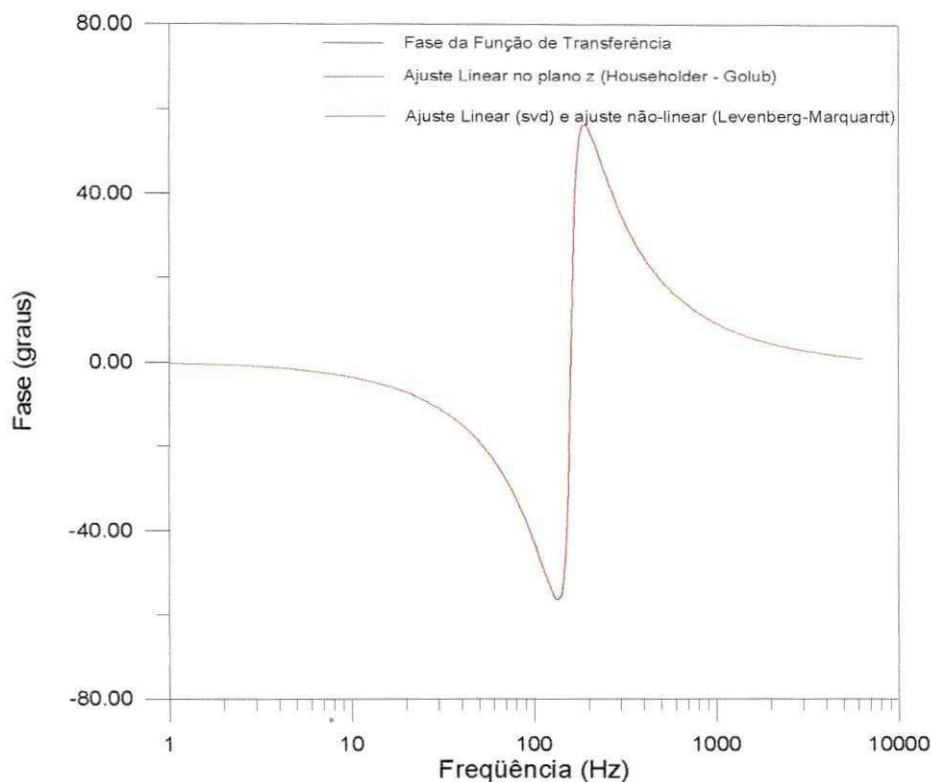


Figura 5.38 - Fase da Função de Transferência em baixas frequências (1Hz-10kHz).

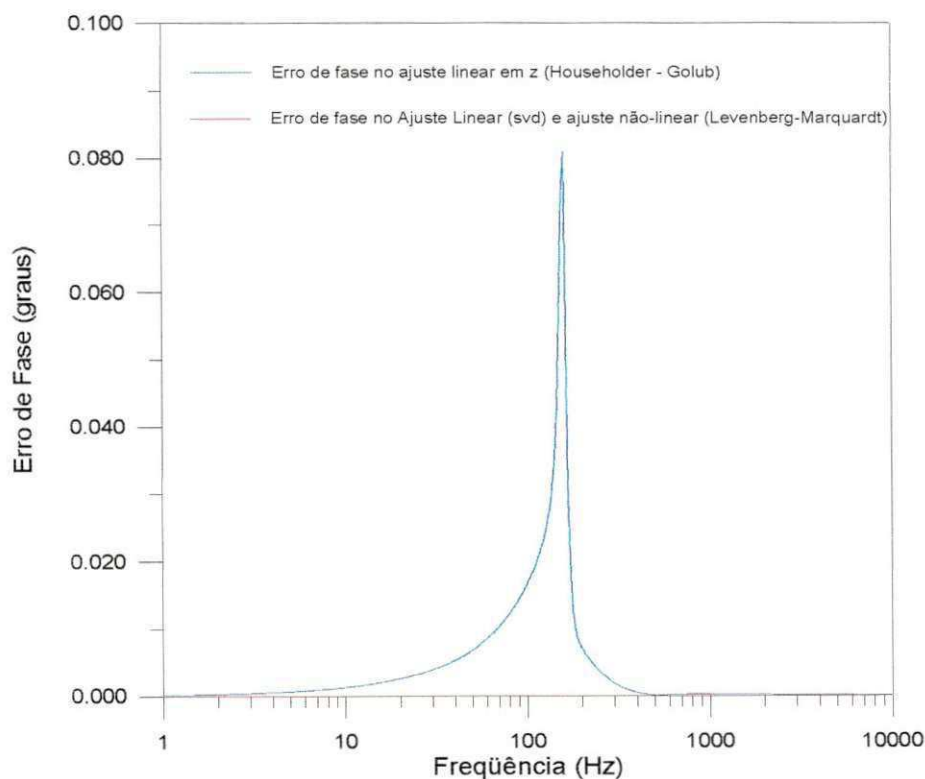


Figura 5.39 - Erro de Fase para ajustes em z em baixas frequências (1Hz-10kHz).

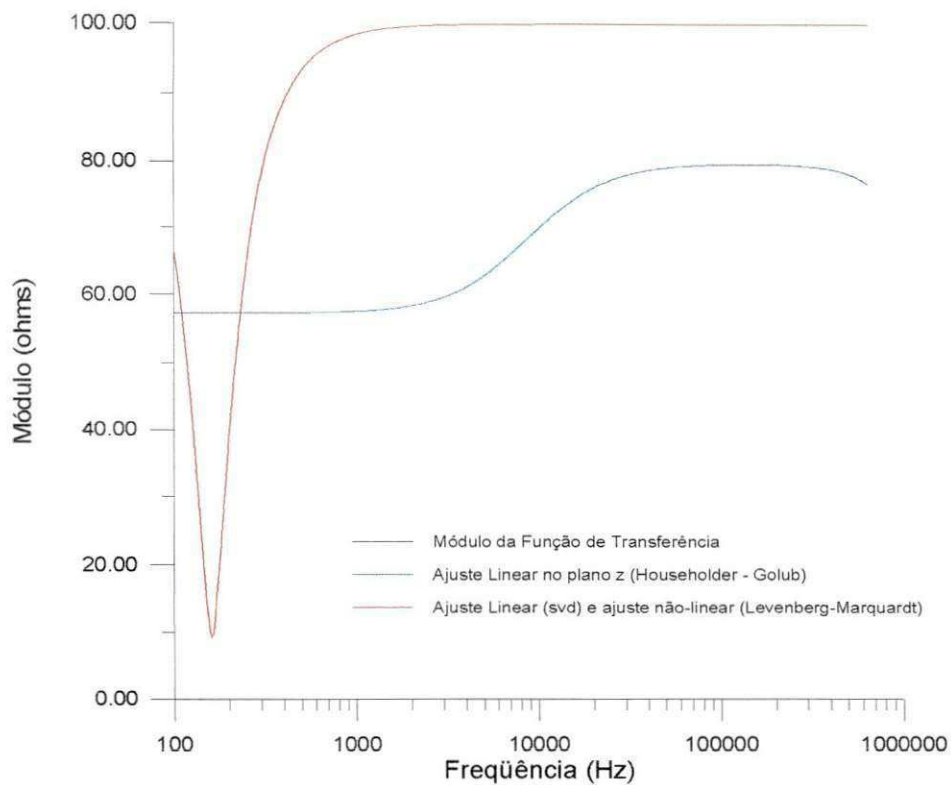


Figura 5.40 - Módulo da Função de Transferência em altas frequências (100Hz-1MHz).

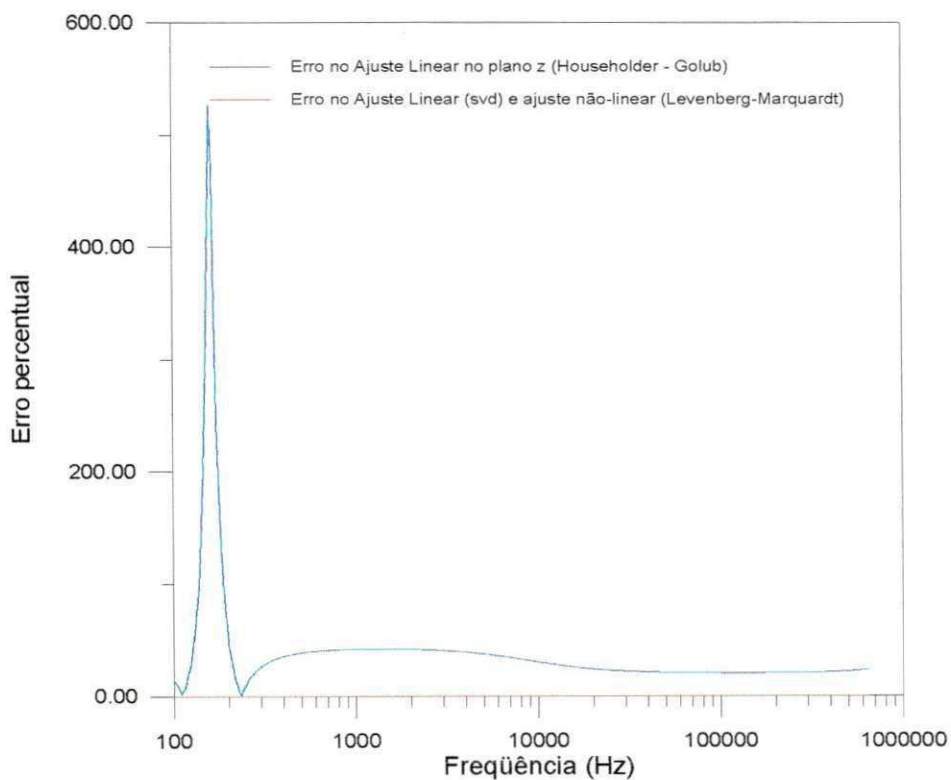


Figura 5.41 - Erro percentual para ajustes no plano z para altas frequências.

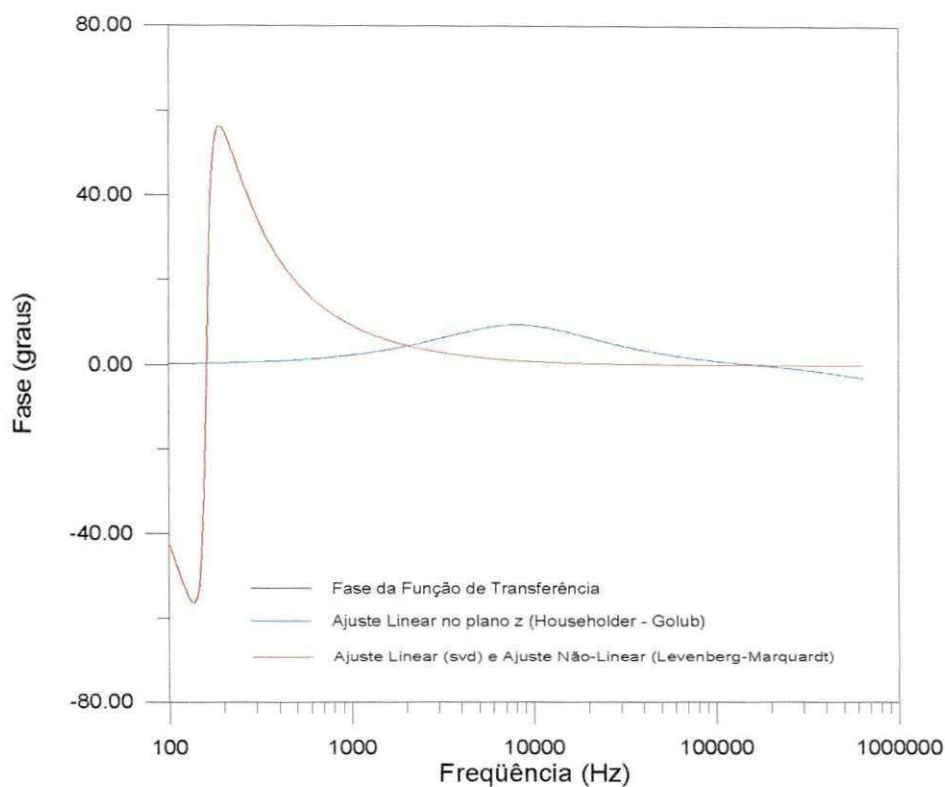


Figura 5.42 - Fase da Função de Transferência em altas frequências (100Hz-1MHz).

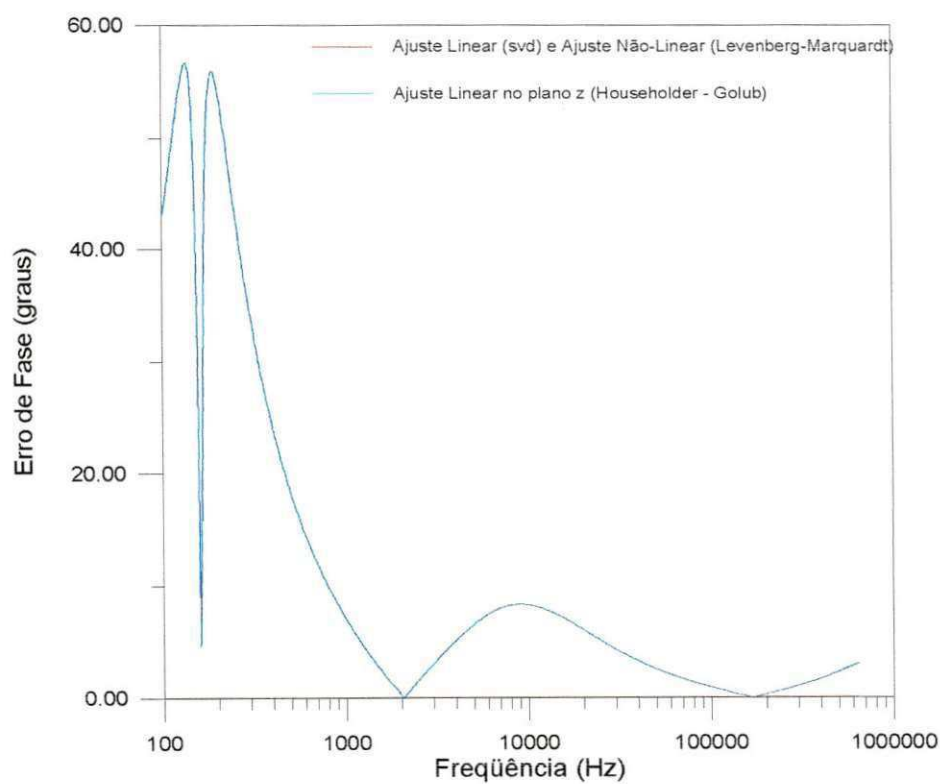


Figura 5.43 - Erro de Fase para ajustes no plano z em altas frequências.

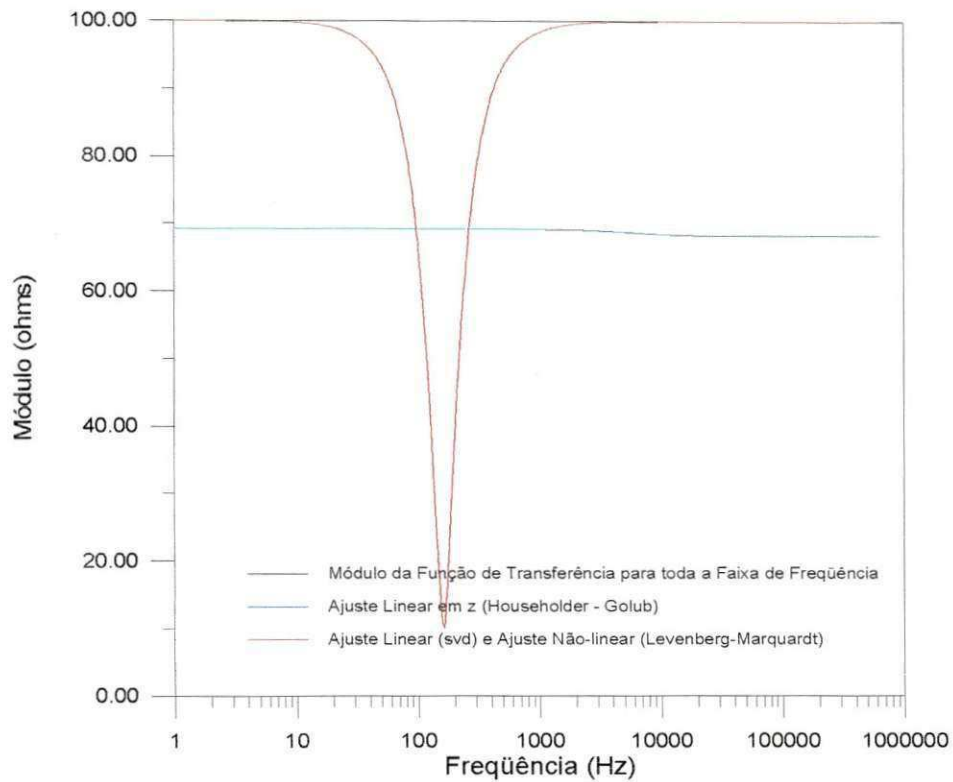


Figura 5.44 - Módulo da Função de Transferência para toda a faixa de frequência.

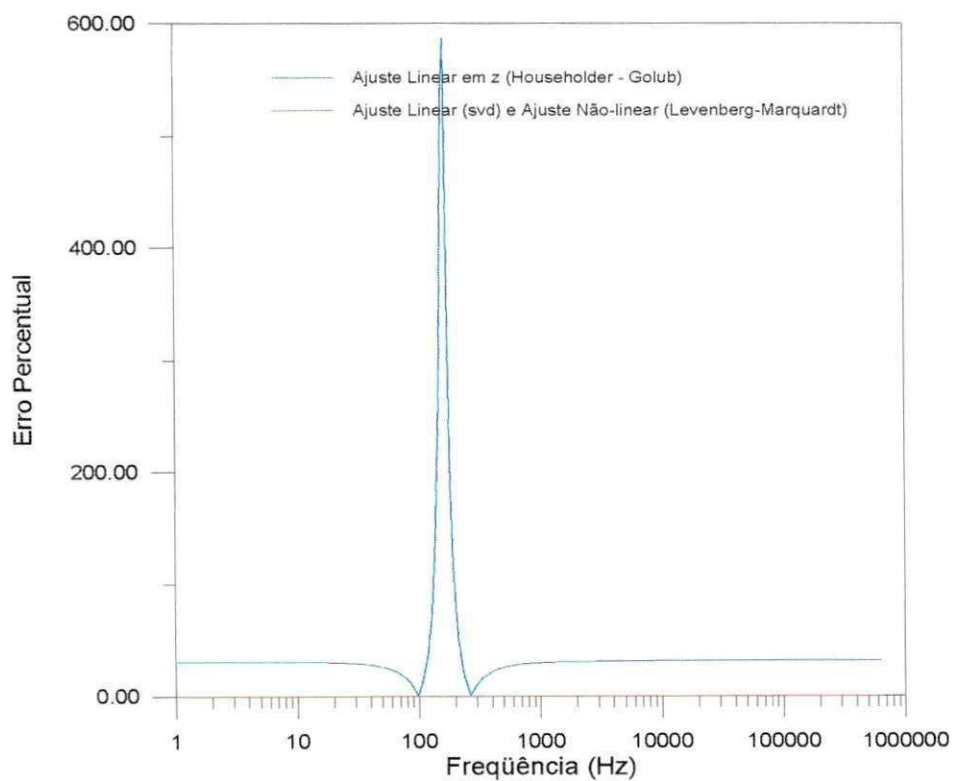


Figura 5.45 - Erro percentual para ajustes no plano z para toda a faixa de frequência.

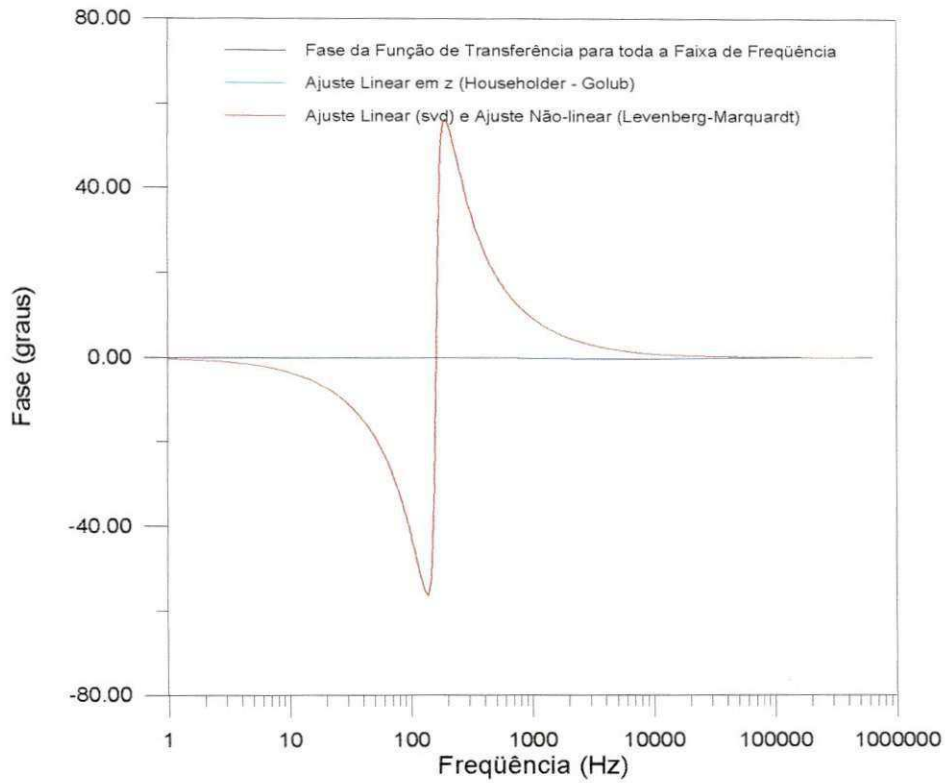


Figura 5.46 - Fase da Função de Transferência para toda a faixa de frequência.

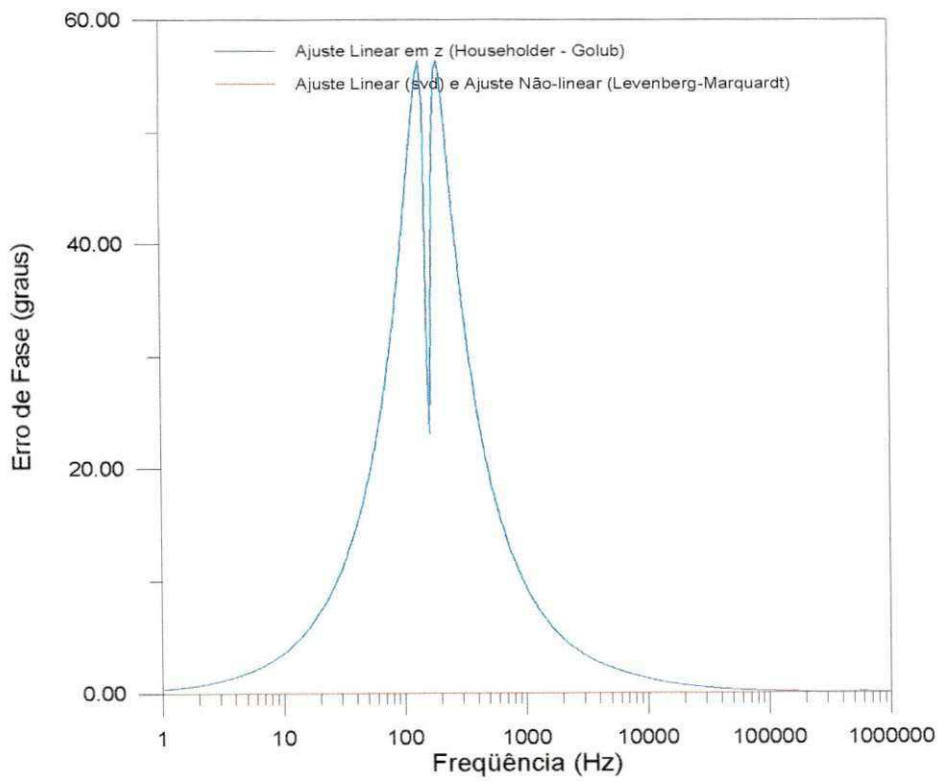


Figura 5.47 - Erro de Fase para ajustes no plano z para toda a faixa de frequência.

Nos ajustes considerando toda a faixa de frequência são utilizados 606 pontos enquanto que nos demais são utilizados 804 pontos.

As Tabelas 5.5 e 5.6 a seguir mostram os resultados obtidos com o método de ajuste não-linear no plano s .

Ajustes no plano s

	Ajuste Não-Linear em s		
	Número de Iterações	Erro Acumulado	Erro máximo
1Hz-10kHz	207	7341,83%	682,39%
100Hz - 1MHz	117	10523,03%	886,18%

Tabela 5.5 - Resultados Obtidos a partir do Ajuste Não-Linear plano s .

Ajustes no plano s

	Valores Teóricos	Ajuste Não-Linear em s	
		1Hz-10kHz	100Hz - 1MHz
p_1	-549,9999+j835,16	-411,79	-1091,55
p_2	-549,9999-j835,16	-2428,75	-75050,70
z_1	-49,9999+j998,75	-998,32	-852,10
z_2	-49,9999-j998,75	-998,32	-79778,23

Tabela 5.6 - Pólos e zeros obtidos a partir do Ajuste Não-Linear em s .

Para funções de transferência com pólos ou zeros complexos, observamos que com o método de ajuste não-linear em s proposto, não é possível obtermos aproximações precisas de baixa ordem para as curvas de módulo e fase. Este problema pode ser verificado em baixas frequências (Figuras 5.28, 5.29, 5.30 e 5.31) e em altas frequências (Figuras 5.32, 5.33, 5.34 e 5.35). A Tabela 5.6 mostra que os pólos complexos são erroneamente modelados como reais.

As Tabelas 5.7 e 5.8 mostram resultados referentes a métodos de ajustes no plano z . Como já havia ocorrido no caso anterior, os valores resultantes do ajuste

linear com decomposição em valores singulares (svd) são suficientes para garantir o mínimo para a função de mérito χ^2 . Por esta razão, apenas os valores resultantes do ajuste linear com resolução por decomposição svd figuram nestas tabelas.

Ajustes no plano z

	Ajuste Linear (Householder - Golub)			Ajuste Linear (svd)		
	Número de Iterações	Erro Acumulado	Erro máximo	Número de Iterações	Erro Acumulado	Erro máximo
1Hz-10kHz	1	17,91%	0,082%	1	$0,479 \cdot 10^{-6}\%$	$0,105 \cdot 10^{-7}\%$
100Hz - 1MHz	1	26069,71%	527,07%	1	$0,116 \cdot 10^{-3}\%$	$0,162 \cdot 10^{-4}\%$
1Hz - 1MHz	1	19439,15%	587,08%	1	$0,475 \cdot 10^{-4}\%$	$0,399 \cdot 10^{-5}\%$

Tabela 5.7 - Resultados Obtidos para Ajustes no plano z.

Ajustes no plano z

	Ajuste Linear (Householder - Golub)		
	1Hz-10kHz	100Hz-1MHz	1Hz-1MHz
p_1	-549,78+j835,04	-885647,56+j6283185,3	-951028,95+j6283185,3
p_2	-549,78-j835,04	-59887,82	-35759,82
z_1	-49,94+j998,6	-98675,26+j6283185,31	-956432,14+j6283185,3
z_2	-49,94-j998,6	-43018,54	-36267,32

Tabela 5.8 - Pólos e zeros em s obtidos a partir de ajustes no plano z.

Ajustes no plano z

	Ajuste Linear (svd)		
	1Hz-10kHz	100Hz-1MHz	1Hz-1MHz
p_1	-549,80+j835,2	-549,99+j835,16	-549,99+j835,16
p_2	-549,80-j835,2	-549,99-j835,16	-549,99-j835,16
z_1	-49,97+j998,54	-49,99+j998,75	-49,99+j998,75
z_2	-49,97-j998,54	-49,99-j998,75	-49,99-j998,75

Tabela 5.8 (continuação) - Pólos e zeros em s obtidos a partir de ajustes no plano z.

Conforme mostram as Figuras 5.36, 5.37, 5.38 e 5.39 e as Tabelas 5.7 e 5.8, os métodos de ajustes que utilizam o plano z , em baixas frequências (1Hz-10kHz), conseguem reproduzir as curvas de módulo e fase com grande precisão. Como no caso anterior, o desempenho do método de ajuste utilizando decomposição svd é um pouco melhor. Os pólos e zeros resultantes de ambos ajustes concordam com os valores teóricos.

Em altas frequências (100Hz-10kHz), o método de ajuste linear que utiliza a transformação de Householder e o método de Golub produz erros elevados ao longo de toda a faixa de frequência como mostram as Figuras 5.40, 5.41, 5.42 e 5.43. Já o método de ajuste linear por decomposição svd produz resultados bastante satisfatórios.

Ao levarmos em consideração toda a faixa de frequência (Figuras 5.44, 5.45, 5.46 e 5.47), a robustez do método de ajuste linear svd é mais uma vez comprovada. O método de Householder-Golub, utilizado por NODA et al (1996) para o desenvolvimento de um modelo de linhas de transmissão com parâmetros dependentes da frequência no domínio de fases, e mais tarde implementado na versão mais recente do software para estudos de transitórios ATP (*Alternative Transients Program*), desenvolvido pela BPA (*Bonneville Power Administration*), não consegue reproduzir de forma alguma as curvas de módulo e fase da função de transferência do circuito RLC em questão, quando consideramos toda a faixa de frequência (1Hz-1MHz).

As Figuras 5.48 e 5.49 comparam o melhor ajuste obtido utilizando o método de Householder-Golub (16 pólos e 16 zeros) com o ajuste por decomposição svd (2 pólos e 2 zeros).

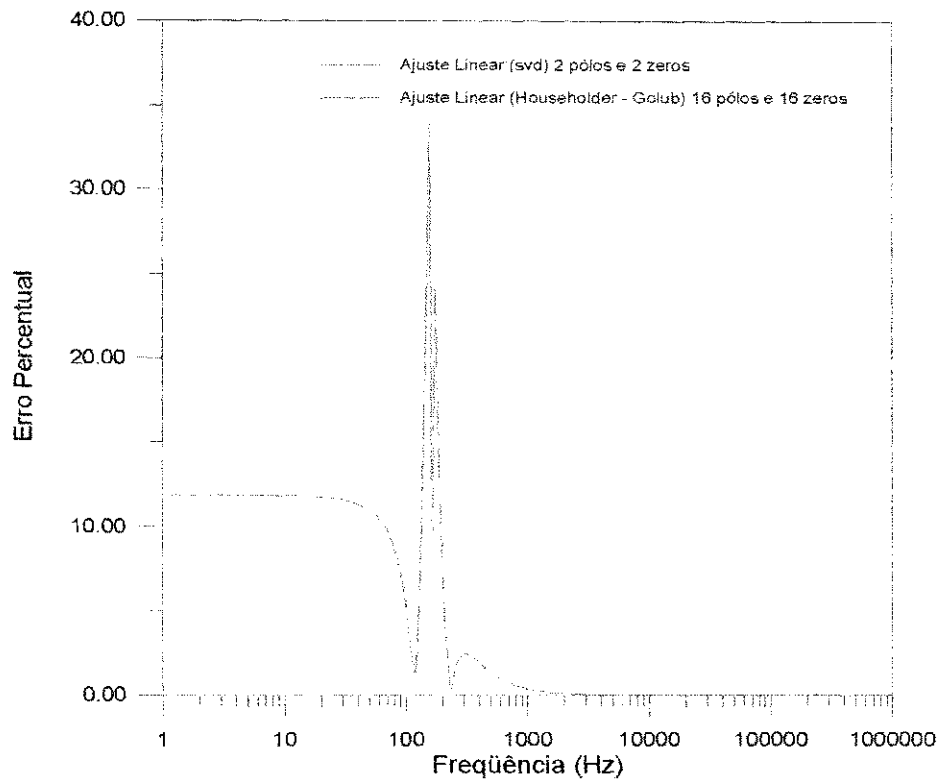


Figura 5.48 - Erro percentual utilizando Ajuste Linear (Householder -Golub) com 16 pólos e 16 zeros e Ajuste Linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros para toda a faixa de freqüência.

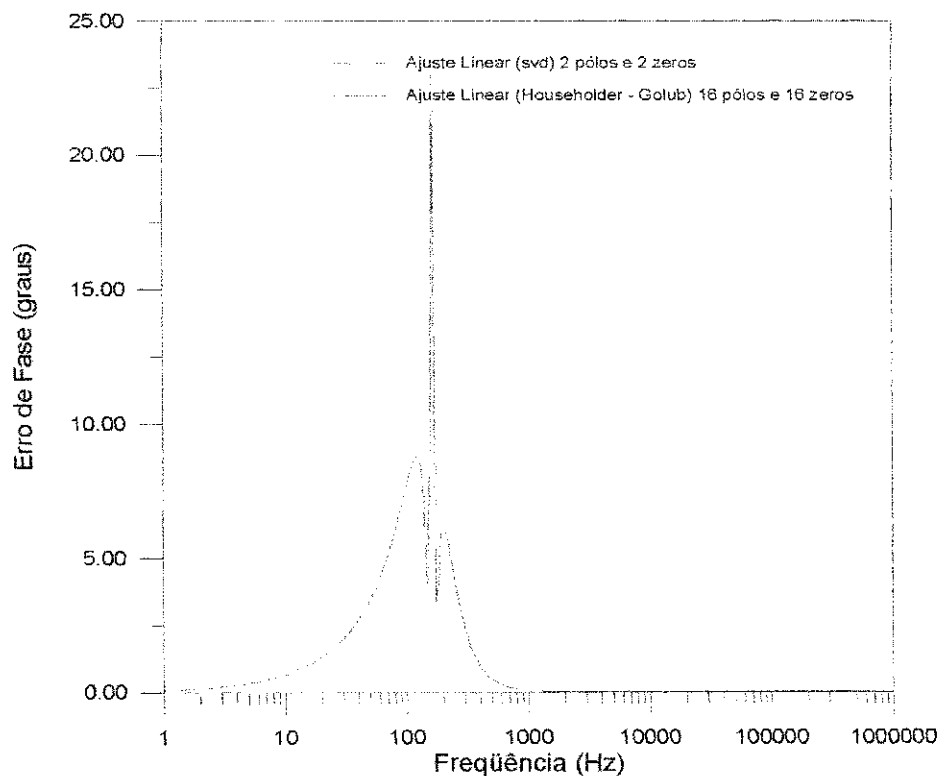


Figura 5.49 - Erro de fase utilizando Ajuste Linear (Householder -Golub) com 16 pólos e 16 zeros e Ajuste Linear (svd) com 2 pólos e 2 zeros para toda a faixa de freqüência.

5.1.3. Considerações sobre os ajustes no plano s e no plano z na síntese dos circuitos RLC

Ao compararmos os resultados obtidos para o primeiro caso, através do ajuste não-linear no plano s , aos ajustes no plano z (Tabelas 5.1 e 5.3), devemos levar em consideração que nos valores obtidos do ajuste não-linear no plano s , ainda não estão incluídos erros de discretização. Por ser um operador discreto, os valores decorrentes de ajustes com a aplicação da transformada z , já se encontram livres de quaisquer erros adicionais.

Uma desvantagem da utilização de métodos não-lineares como o proposto, é o fato de eles serem dependentes de chutes iniciais. Chutes iniciais imprecisos podem resultar em um número elevado de iterações até o método convergir para a resposta. Para a síntese dos circuitos RLC, o método de ajuste linear por decomposição svd no plano z , mais rápido e preciso, apresentou melhor desempenho.

Independentemente do plano s ou z escolhido, os métodos de ajuste devem realizar simultaneamente ajustes das curvas de módulo e de fase, de forma a garantir melhores resultados.

5.2. Linha de Transmissão Monofásica

Para fazermos uma análise comparativa entre os métodos apresentados neste trabalho, preferimos utilizar uma linha de transmissão monofásica de configuração relativamente simples como mostra a Figura 5.50.

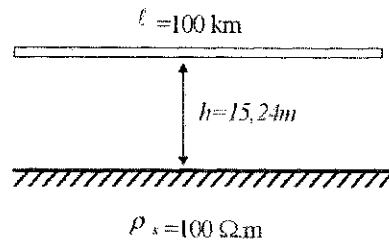


Figura 5.50 - Linha de Transmissão Monofásica

A Tabela 5.9 mostra os dados da linha de transmissão da Figura 5.50.

Resistência DC do condutor da fase	32,40 mΩ/km
Diâmetro do condutor	40,6908mm
Altura do condutor ao solo	15,24m
Resistividade do solo	100Ω.m
Comprimento da linha	100km

Tabela 5.9 - Dados da Linha de Transmissão Monofásica

Utilizando o software FDDATATM (MICROTRAN, 1992), calculamos a admitância característica $Y_c(\omega) = [Z_c(\omega)]^{-1}$, para a faixa de frequência de 0,01Hz a 1MHz e o fator de propagação $A(\omega)$, para a faixa de frequência de 0,01Hz a 0,1MHz.

As Figuras 5.51, 5.52, 5.53 e 5.54 mostram as curvas de módulo e fase para a admitância característica e o fator de propagação de acordo com os dados obtidos.

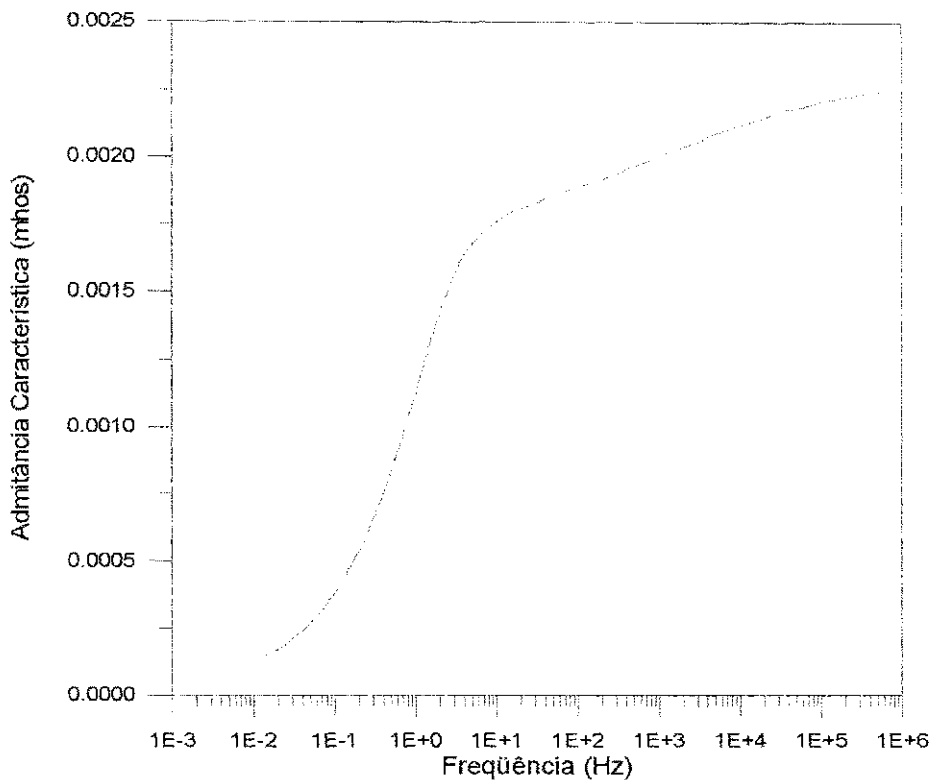


Figura 5.51 - Módulo da Admitância Característica $Y_c(\omega)$.

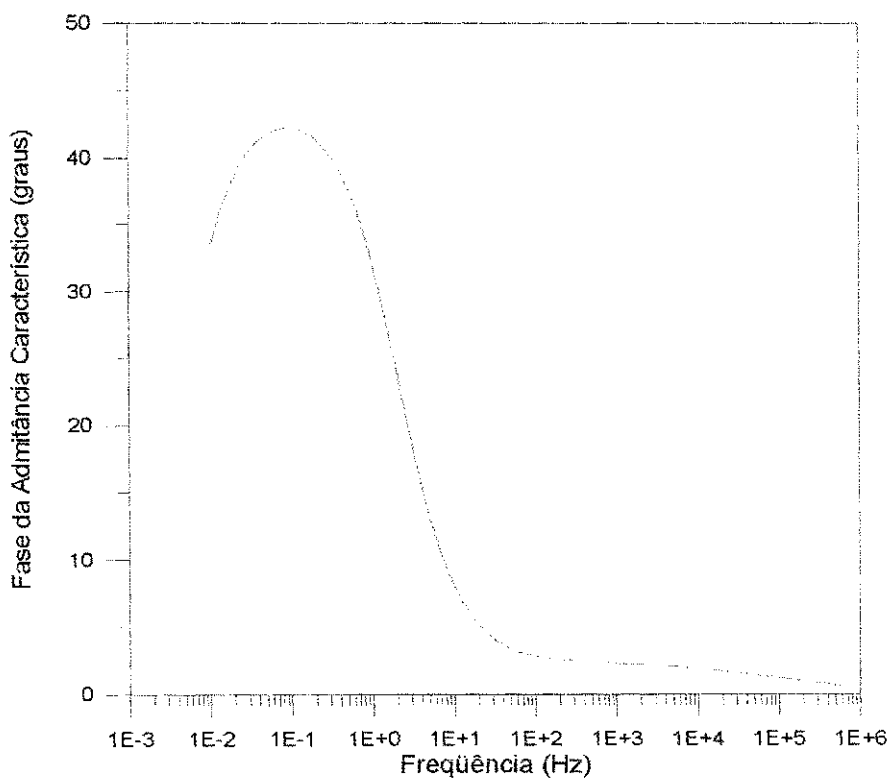


Figura 5.52 - Fase da Admitância Característica $Y_c(\omega)$.

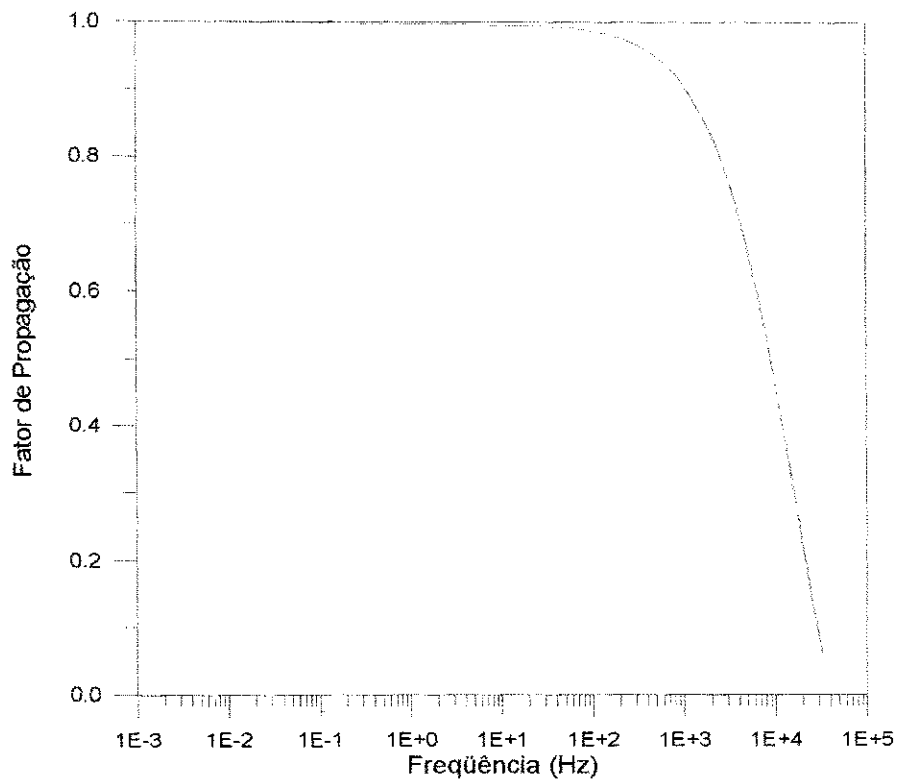


Figura 5.53 - Módulo do Fator de Propagação $A(\omega)$.

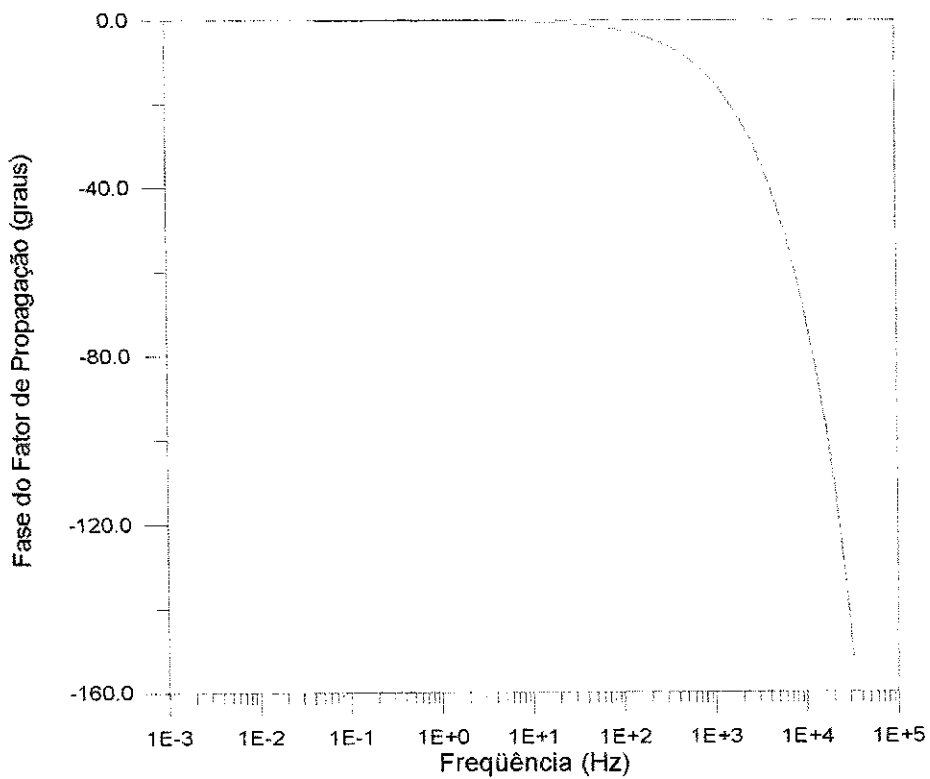


Figura 5.54 - Fase do Fator de Propagação $A(\omega)$.

Foram obtidas aproximações para a admitância característica e o fator de propagação utilizando todos os métodos descritos no Capítulo 4. Para ajustes no plano s , empregou-se ainda o método assintótico, desenvolvido por J.MARTI (1982), e implementado no software FDDATATM.

Os resultados destes ajustes são apresentados a seguir nas seções 5.2.1 (aproximações para a admitância característica) e 5.2.2 (aproximações para o fator de propagação).

5.2.1. Admitância Característica

Ajustes no plano s para a Admitância Característica

	Ajuste Assintótico				Ajuste Não-Linear			
	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase
Y_c	17	17	10,78%	12,84°	8	8	0,58%	1,11°

Tabela 5.10 - Resultados Obtidos para o ajuste da Admitância Característica no plano s

Como podemos observar na Tabela 5.10 e nas Figuras 5.55 e 5.56, o método de ajuste não-linear utilizando o plano s apresenta desempenho superior em relação ao método assintótico. O método não-linear produz erros inferiores tanto no cálculo do módulo da admitância característica como na fase utilizando aproximações de baixa ordem, ou seja, com número bastante inferior de pólos e zeros.

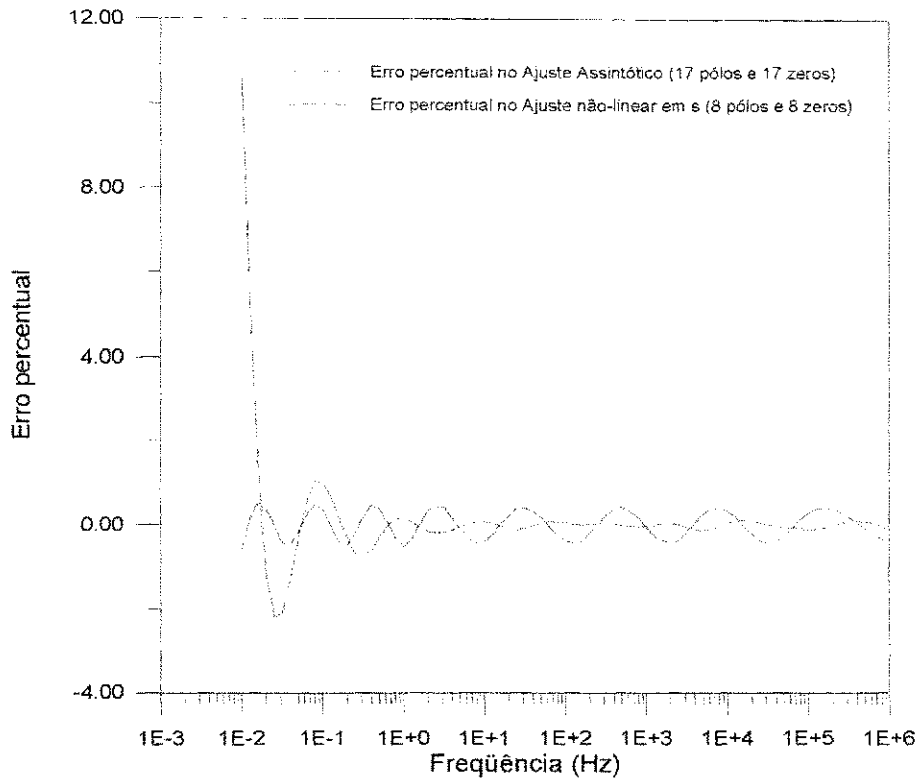


Figura 5.55 - Erro percentual para ajustes no plano s.

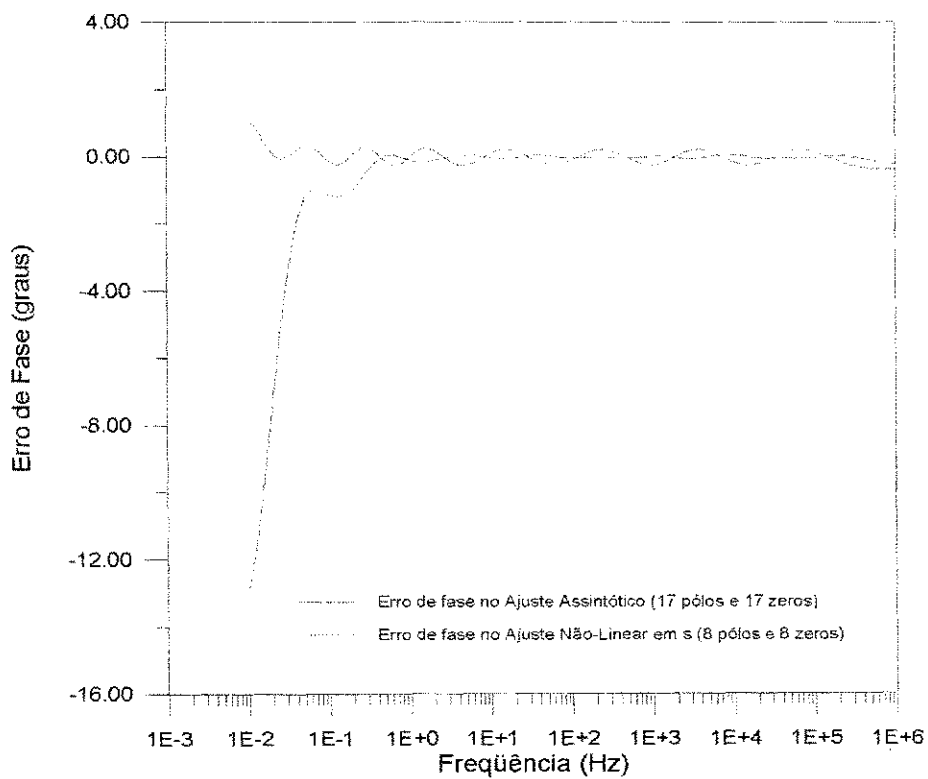


Figura 5.56 - Erro de Fase para ajustes no plano s.

Ajustes no plano z para a Admitância Característica

	Ajuste Linear (Householder - Golub)				Ajuste Linear (svd)			
	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase
Y_c	7	7	96,17%	67,16°	16	16	72,74%	31,94°

Tabela 5.11 - Resultados Obtidos para o ajuste da Admitância Característica no plano z .

Ajustes no plano z para a Admitância Característica

	Ajuste Não-Linear (Levenberg-Marquardt)			
	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase
Y_c	8	8	34,17%	26,63°

Tabela 5.11 (continuação) - Resultados Obtidos para o ajuste da Admitância Característica no plano z .

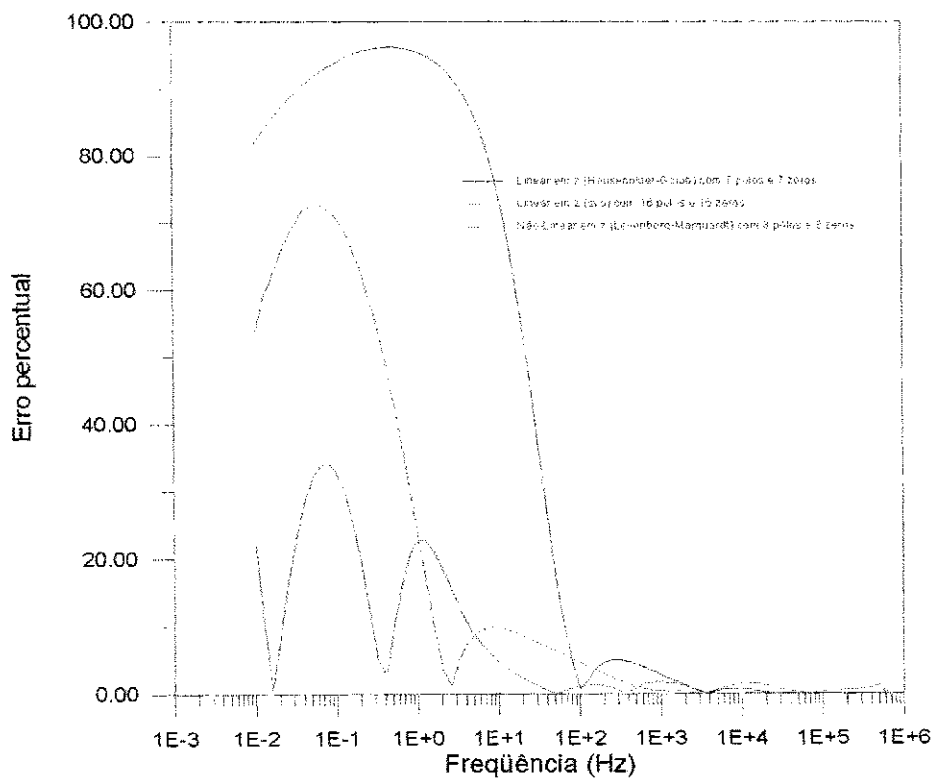


Figura 5.57 - Erro percentual para ajustes no plano z .

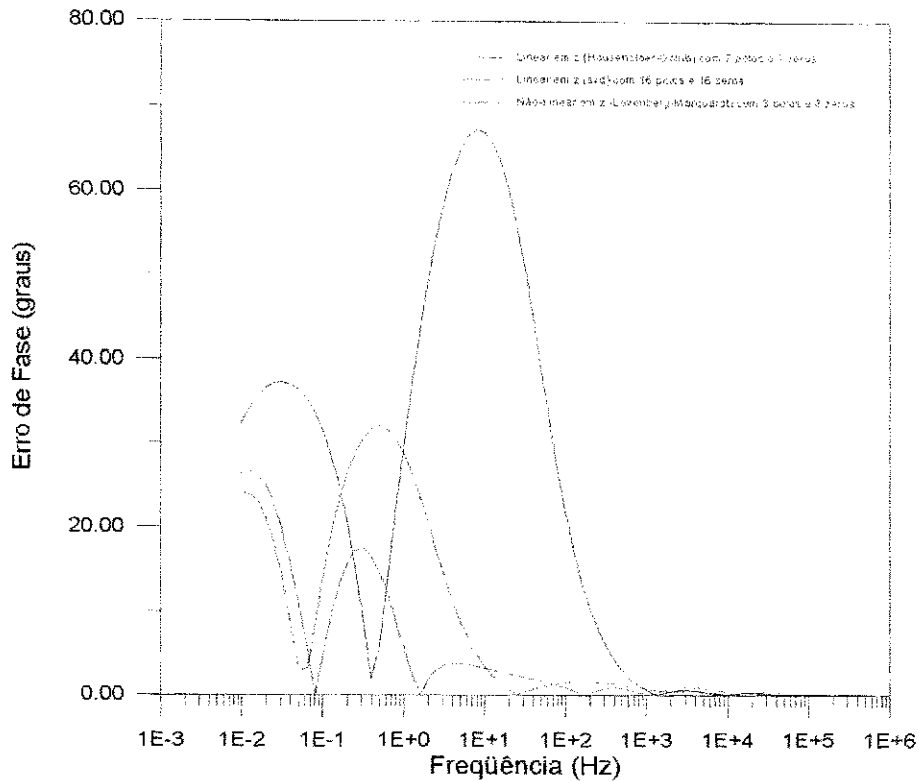


Figura 5.58 - Erro de Fase para ajustes no plano z .

Conforme mostram as Figuras 5.57 e 5.58 e a Tabela 5.11, os métodos de ajuste propostos utilizando a transformada z , não produzem resultados precisos para o ajuste da admitância característica. O método de ajuste linear baseado na resolução por transformação de Householder e o método de Golub é o que apresenta pior desempenho. À medida que aumentamos a ordem dos polinômios as aproximações se degeneram, pois a inclusão de pólos e zeros tornam os ajustes mais instáveis. A inclusão do método não-linear, utilizando o algoritmo de Levenberg-Marquardt, permite uma distribuição melhor dos erros.

A dificuldade em se obter aproximações precisas para a admitância característica se deve ao mau condicionamento da matriz $[A]$ que representa o modelo. É importante ressaltar ainda a dependência dos métodos apresentados em relação à faixa

de frequência considerada para o ajuste e, conseqüentemente, o tempo de amostragem Δt definido.

A Tabela 5.12 e as Figuras 5.59 e 5.60 mostram os resultados obtidos quando reduzimos a faixa de frequência para 100Hz-1MHz. Como podemos observar, o desempenho dos três métodos implementados no plano z é melhorado consideravelmente. Através do método de ajuste não-linear empregando o algoritmo de Levenberg-Marquardt conseguimos obter os melhores resultados.

No desenvolvimento de um modelo no domínio da frequência utilizando o método linear, com resolução pela transformação de Householder e o método de Golub, NODA et al (1996) só apresentam resultados dentro da faixa de frequência de 100Hz-1MHz. Como pudemos comprovar, a eficiência do método implementado é questionável quando consideramos toda a faixa de frequência.

Ajustes no plano z para a Admitância Característica

	Ajuste Linear (Householder - Golub)				Ajuste Linear (svd)			
	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase
Y_c	13	13	1,102%	2,041°	14	14	1,808%	1,71°

Tabela 5.12 - Resultados Obtidos para o ajuste da Admitância Característica no plano z para a faixa de frequência de 100Hz-1MHz.

Ajustes no plano z para a Admitância Característica

	Ajuste Não-Linear (Levenberg-Marquardt)			
	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase
Y_c	16	16	0,959%	0,095°

Tabela 5.12 (continuação) - Resultados Obtidos para o ajuste da Admitância Característica no plano z para a faixa de frequência de 100Hz-1MHz.

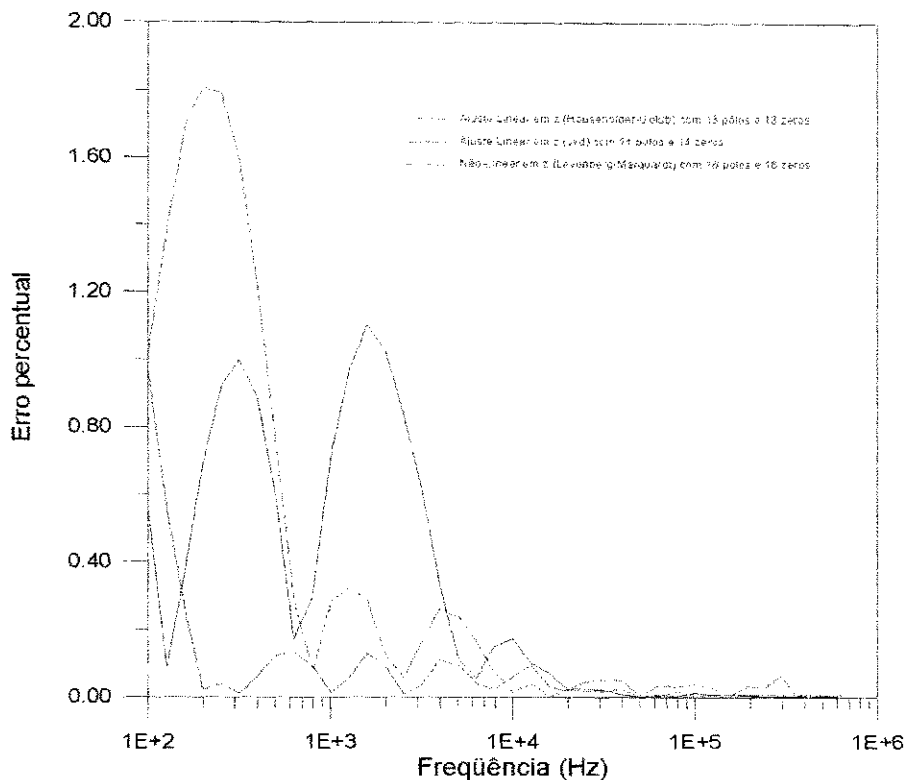


Figura 5.59 - Erro percentual para ajustes no plano z considerando a faixa de frequência (100Hz-1MHz).

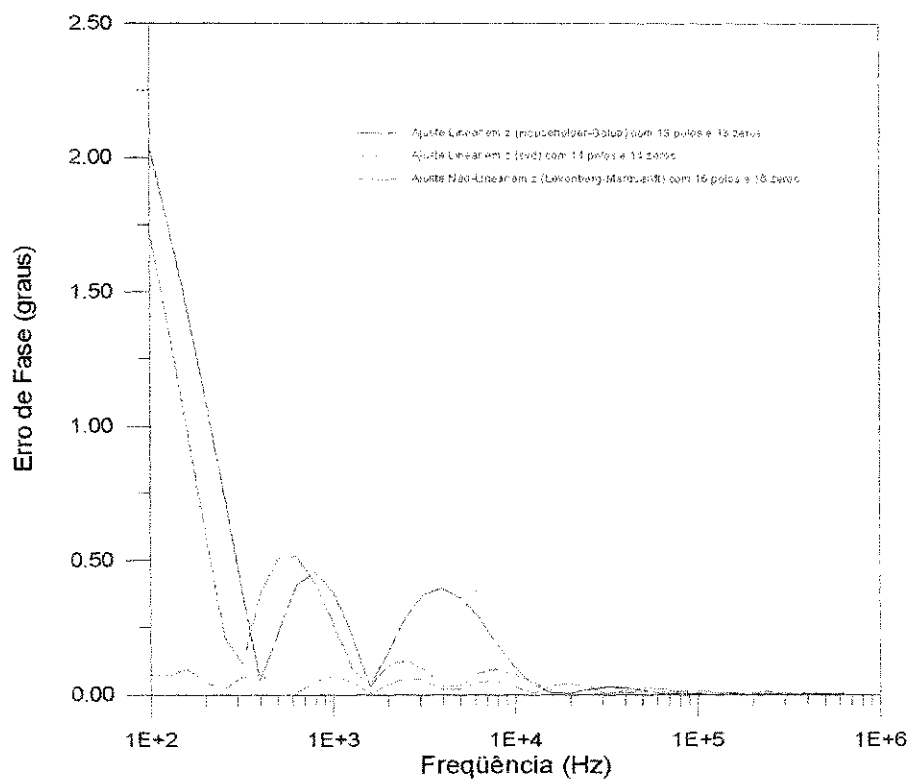


Figura 5.60 - Erro de fase para ajustes no plano z considerando a faixa de frequência (100Hz-1MHz).

Durante o desenvolvimento deste trabalho, repetimos os procedimentos de ajuste utilizando a matriz do modelo $[A]$ complexa mas não obtivemos êxito. Além da matriz $[A]$ ser também mal condicionada, os parâmetros resultantes do ajuste são igualmente complexos e portanto não têm significado físico algum. O software matemático MATLABTM (Versão 4.0) foi utilizado durante esta etapa.

Faz-se necessário ainda algumas modificações nos pesos empregados na resolução dos sistemas lineares sobredeterminados, de forma a permitir melhores ajustes utilizando toda a faixa de frequência.

5.2.1. Fator de Propagação

	Ajuste Assintótico				Ajuste Não-Linear			
	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase
A	26	24	3,77%	6,85°	10	8	3,21%	8,17°

Tabela 5.13 - Resultados Obtidos para o ajuste do Fator de Propagação no plano s

Com o método de ajuste não-linear utilizando o plano s (Tabela 5.13 e Figuras 5.61 e 5.62), conseguimos obter resultados com a mesma precisão dos obtidos utilizando o método de ajuste assintótico, mas com um número inferior de pólos e zeros. Ao contrário do que ocorreu no ajuste da admitância característica, o método não-linear tem alguma dificuldade em diminuir o erro máximo e o erro de fase quando ajustamos o fator de propagação.

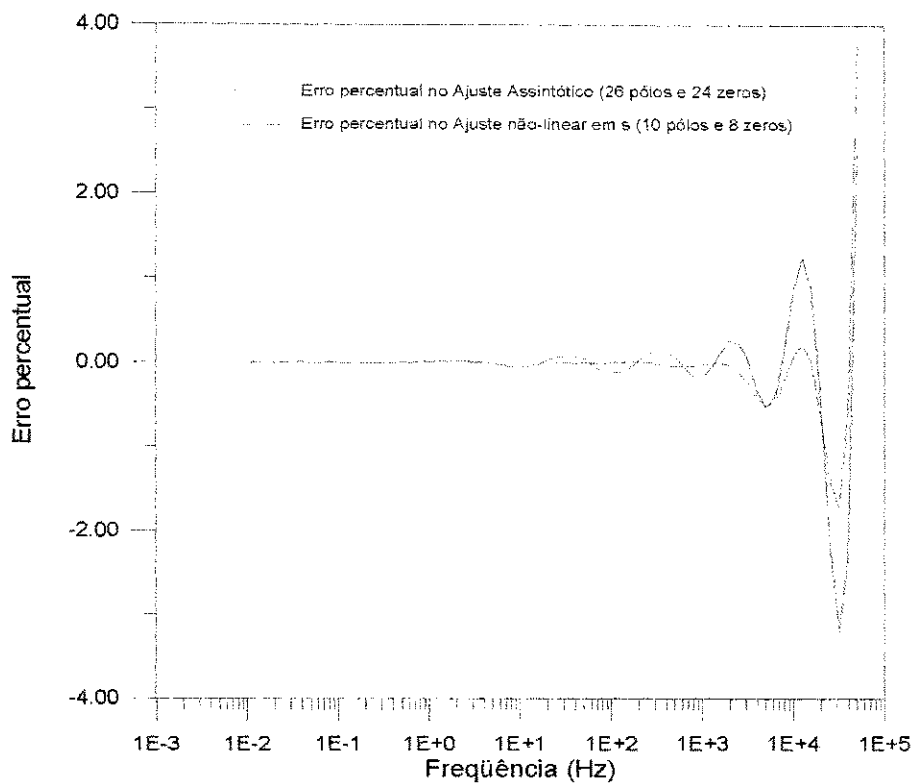


Figura 5.61 - Erro percentual para ajustes no plano s.

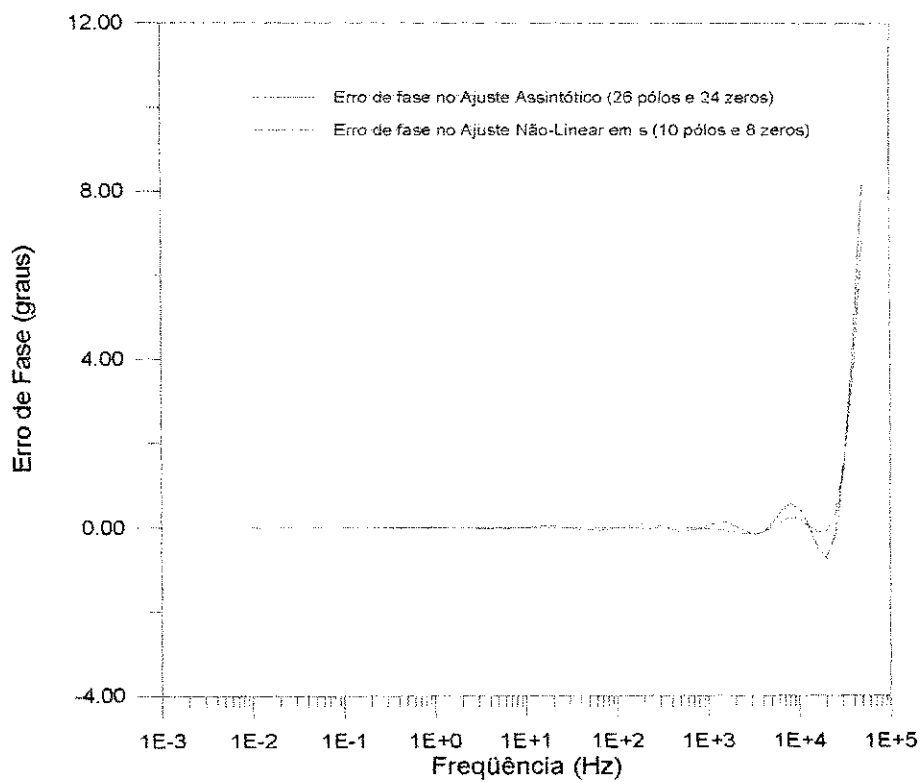


Figura 5.62 - Erro de fase para ajustes no plano s.

A Tabela 5.14 e as Figuras 5.63 e 5.64 mostram os resultados dos ajustes obtidos com os métodos que empregam a transformada z . Os resultados obtidos através do método de ajuste não-linear (Levenberg-Marquardt) para o fator de propagação apresentam algumas incongruências que ainda estão sendo investigadas. Acreditamos que os erros sejam provenientes da forma com que a função e suas derivadas estão sendo avaliadas.

	Ajuste Linear (Householder - Golub)				Ajuste Linear (svd)			
	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase
A	10	8	1,207%	0,364°	15	13	0,163%	0,101°

Tabela 5.14 - Resultados Obtidos para o ajuste do Fator de Propagação no plano z .

Como podemos observar, tanto o método linear com resolução por transformação de Householder quanto o método linear com decomposição svd produzem aproximações bastante precisas.

O método que emprega a decomposição svd é ligeiramente superior como podemos verificar na Tabela 5.15 e nas Figuras 5.65 e 5.66, quando comparamos o desempenho dos dois métodos na obtenção de aproximações de mesma ordem.

	Ajuste Linear (Householder - Golub)				Ajuste Linear (svd)			
	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase	Número de pólos	Número de zeros	Erro máximo	Erro de fase
A	10	8	1,207%	0,364°	10	8	0,994%	0,329°

Tabela 5.15 - Comparação entre Ajuste Linear por Householder-Golub e Ajuste Linear por decomposição (svd) para o Fator de Propagação no plano z com polinômios de mesma ordem.

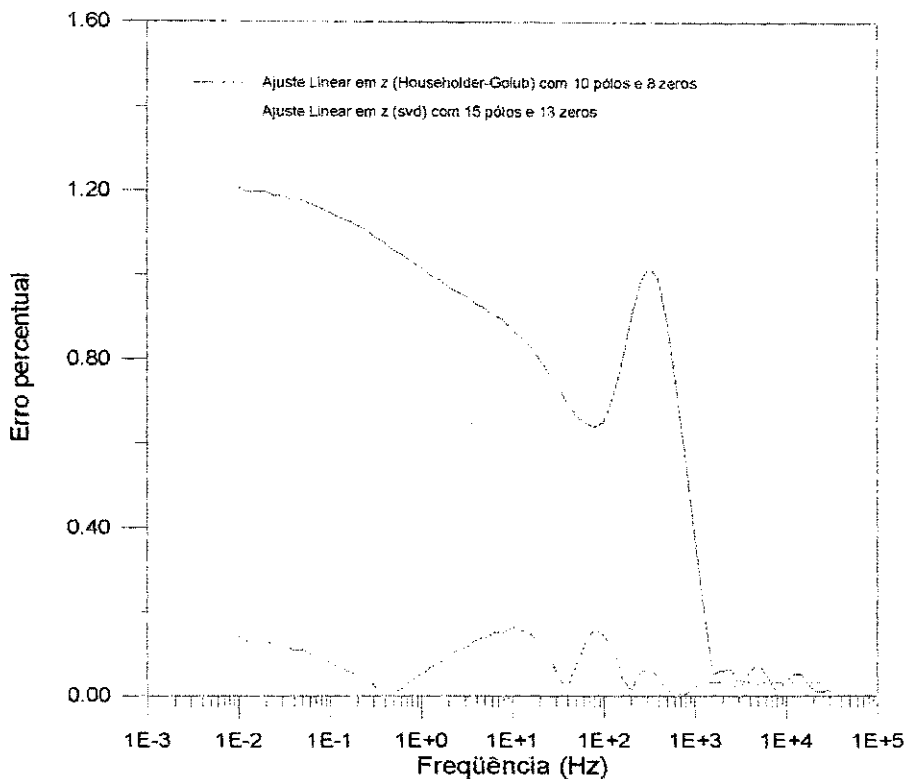


Figura 5.63 - Erro percentual para ajustes no plano z.

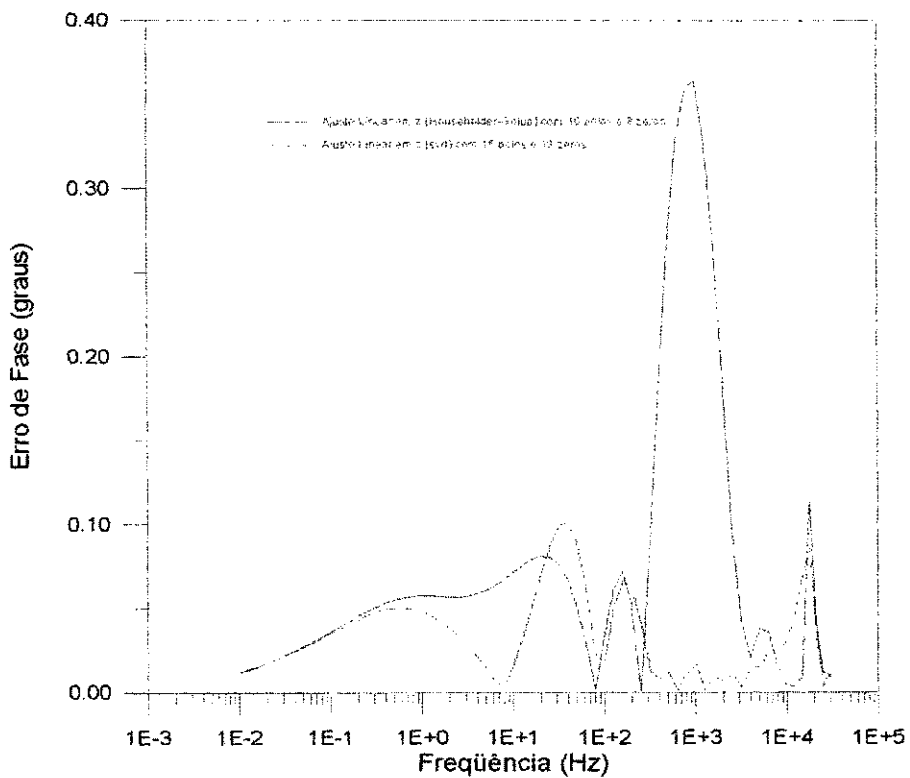


Figura 5.64 - Erro de fase para ajustes no plano z.

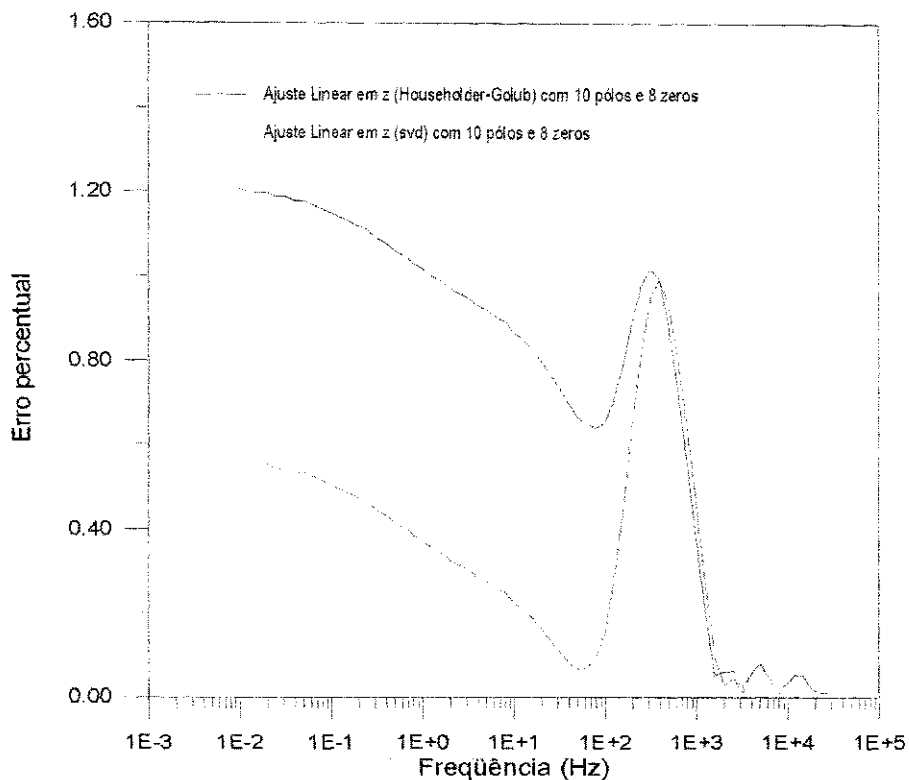


Figura 5.65 - Erro percentual para ajustes no plano z. Comparação entre o ajuste linear (Householder-Golub) e o ajuste linear (svd) em aproximações de mesma ordem.

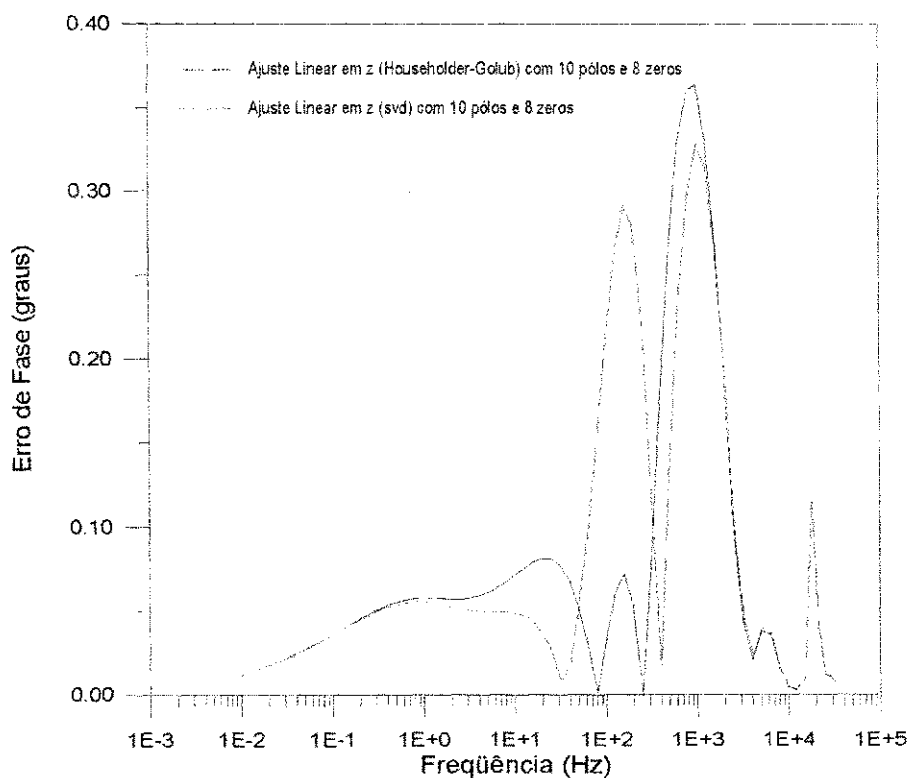


Figura 5.66 - Erro de fase para ajustes no plano z. Comparação entre o ajuste linear (Householder-Golub) e o ajuste linear (svd) em aproximações de mesma ordem.

Capítulo 6

Conclusão

Estudamos a modelagem de linhas de transmissão com parâmetros distribuídos dependentes da frequência no domínio modal. Diferentes métodos de ajustes foram implementados para obter funções polinomiais racionais de baixa ordem que aproximam a admitância característica e o fator de propagação. Na síntese destas funções racionais foram considerados tanto modelos que empregam o plano s , com a utilização da transformada de Laplace, como aqueles que utilizam a transformada z .

O desempenho dos métodos implementados foi testado através da síntese de circuitos RLC e de aproximações obtidas para a admitância característica e o fator de propagação de uma linha monofásica.

Com os métodos de ajuste no plano z , foi possível obter resultados bastante precisos para a síntese de circuitos RLC e para as aproximações obtidas para o fator de propagação. Entre os métodos apresentados, podemos destacar o método linear que utiliza a decomposição em valores singulares (svd) para solucionar o sistema de equações sobredeterminado. Para ajustes da admitância característica, observamos que o sucesso da modelagem no plano z depende da faixa de frequência considerada. Ao considerarmos frequências acima de 100Hz, o desempenho destes modelos é melhorado.

Os ajustes que realizamos no plano s apresentaram em linhas gerais bom resultado. Através do método não-linear que utiliza o algoritmo de Levenberg-Marquardt foi possível obtermos aproximações de baixa ordem para a admitância característica e o fator de propagação. Mostramos ainda que os métodos de ajuste devem realizar simultaneamente ajustes das curvas de módulo e de fase, de forma a garantir melhores resultados.

Uma comparação direta entre métodos de ajustes no plano s e ajustes no plano z é tarefa bastante difícil, visto que os resultados obtidos de ajustes no plano s precisam ser ainda discretizados.

Os métodos de ajustes apresentados neste trabalho e que utilizam a transformada z precisam ainda ser melhorados. Os pesos utilizados na resolução dos sistemas de equações sobredeterminados precisam ser reavaliados, de forma a garantir convergência para toda a faixa de frequência, no caso de aproximações para a admitância característica.

As técnicas apresentadas neste trabalho podem ser utilizadas no desenvolvimento de equivalentes de rede dependentes da frequência e no projeto de filtros passivos.

Referências Bibliográficas

- ANGELIDIS, G., SEMLYEN, A. *Direct Phase-Domain Calculation of Transmission Line Transients using Two-Sided Recursions*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 10, No. 2, pp. 941-949, April, 1995.
- BRANDÃO FARIA, J. A. *Overhead Three-Phase Transmission Lines - Non-Diagonalizable Situations*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 3, No.4, pp.1348-1354, October, 1988.
- BUDNER, A. *Introduction of Frequency-Dependent Line Parameters into an Electromagnetic Transients Program.*, Trans. IEEE Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, pp. 88-97, January, 1970.
- CARSON, J. R. *Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return*. Bell System Technical Journal, Vol. 5, pp. 539-554, 1926.
- CASTELLANOS, F., MARTI, J. R. *Phase-Domain Multiphase Transmission Line Models*. IPST'95 - International Conference on Power Systems Transients, pp. 17-22, Lisbon, September 1995.
- CASTELLANOS, F., MARTI, J. R. *Full Frequency-Dependent Phase-Domain Transmission Line Parameters*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol.12, No.3, pp.1331-1339, August,1997.

- CIGRÉ WORKING GROUP 33.02. *Guidelines for Representation of Network Elements when Calculating Transients*. Technical Brochure CE/SC GT/WG 02, 1990.
- COSTA JR., P., *A Transformada Z Aplicada ao Cálculo de Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Transmissão de Energia Elétrica e de Telecomunicações*. Tese de Doutorado, UNICAMP, 1995.
- DERI, A., TEVAN, G., SEMLYEN, A., CASTANHEIRA, A. *The Complex Ground Return Plane, a Simplified Model for Homogeneous and Multi-Layer Earth Return*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, n°8, pp. 3686-3693, August, 1981.
- DOMMEL, H. W., *Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks*, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, n°4, pp. 388-399, April, 1969.
- DOMMEL, H. W., *EMTP Theory Book*. Microtran Power System Analysis Corporation, Vancouver, 1996.
- FERNANDES, A. B. *Linhas de Transmissão: Modelo Otimizado para Estudos de Transitórios Eletromagnéticos*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 1996.
- FERNANDES, A. B., NEVES, W. L., *Linhas de Transmissão: Modelo Otimizado para Estudos de Transitórios Eletromagnéticos*, Proceedings of the International Conference on Power Systems Transients, University of Washington, Seattle, Washington, June 22-26, 1997.
- GALLOWAY, R. H., SHORROCKS, W. B. WEDEPOHL, L. M. *Calculation of Electrical Parameters for Short and Long Polyphase Transmission Lines*. Proc. IEE, Vol. III, n°12, pp. 2051-2059, December 1964.

- GRAINGER, J. J., STEVENSON, W. D. *Análisis de Sistemas de Potencia*, McGraw-Hill International, Madrid 1994.
- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A., *Combined Phase and Modal Domain Calculation of Transmission Line Transients Based on Vector Fitting*, paper PE-346-PWRD-0-01-1997, presented at the IEEE/PES Winter Meeting, New York, 1997.
- HEDMAN, D. E. *Propagation on Overhead Transmission Lines. I - Theory of Modal Analysis. II - Earth-Conduction Effects and Practical Results*. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-84, pp.205-211, May, 1965.
- HUMPAGE, W. D. *Z-Transform Eletromagnetic Transient Analysis in High-Voltage Networks*. London: Peter Peregrinus Ltd., 1982.
- HUMPAGE, W. D., WONG, K. P., NGUYEN, T. T. *Z-Transform Eletromagnetic Transient Analysis in Power Systems*, IEE Proc., Vol. 127, Pt. C, No.6, pp. 370-378, 1980.
- MARCANO, F. J. *Modelling of Transmission Lines Using Idempotent Decomposition*, MSc Thesis, Department of Electrical Engineering, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, August 1996.
- MARCANO, F. J., MARTI, J. R., *Idempotent Line Model: Case*, Proceedings of the International Conference on Power Systems Transients, University of Washington, Seattle, Washington, June 22-26, 1997.
- MARTI, J. R. *Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transients Simulations*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No.1, pp. 147-157, January, 1982.
- MARTI, J. R., GARRETT, B. W., DOMMEL H. W., WEDEPOHL, L. M. *Transients Simulation in Power Systems: Frequency Domain and Time Domain Analysis*.

- Power Systems Planning & Operation Section, Canadian Electrical Association, Montreal, March 1985.
- MARTI, L. *Low-Order Approximation of Transmission Line Parameters for Frequency-Dependent Models*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No.11, pp. 3582-3589, November, 1983.
- MEYER, W. S., DOMMEL, H. W. *Numerical Modelling of Frequency-Dependent Transmission-Line Parameters in an Electromagnetic Transients Program*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol PAS-93, pp. 1401-1409, September/October, 1974.
- MICROTRAN POWER SYSTEM ANALYSIS CORPORATION, *Transients Analysis Program Reference Manual*, Vancouver, 1992.
- MORCHED, A., GUSTAVSEN, B., TARTIBI, M. *A Universal Model For Accurate Calculation of Electromagnetic Transients on Overhead Lines and Underground Cables*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol 14, pp. 1032-1038, July, 1999.
- NAKANISHI, H., AMETANI, A. *Transient calculation of a transmission line using superposition law*, IEEE Proc., Vol. 133, Pt. C, No. 5, pp.263-269, 1986.
- NAREDO, J. L., SILVA, J. L., ROMERO, R., MORENO, P. *Application of Approximated Modal Analysis Methods for PLC System Design*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. PWRD-2, No.1, pp.57-63, January, 1987.
- NGUYEN, H. V., DOMMEL H. W., MARTI, J. R., *Direct Phase-Domain Modelling of Frequency-Dependent Overhead Transmission Lines*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 12, No.3, pp. 1335-1340, July 1997.

- NODA, T., NAGAOKA, N., AMETANI, A., *Phase Domain Modelling of Frequency-dependent Transmission Lines by Means of an ARMA Model*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 11, No.1, January 1996.
- NODA, T., NAGAOKA, N., AMETANI, A., *Further Improvements to a Phase-Domain ARMA Line Model in Terms of Convolution, Steady-state Initialization and Stability*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 12, No.3, July 1997.
- OPPENHEIM, A. V., WILLSKY, A. S., NAWAB, S. H., *Signals and Systems*, Second Edition, Prentice Hall Signal Processing Series, USA, 1997.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in Fortran - The Art of Scientific Computing*. Second Edition. New York: Cambridge University Press, 1992.
- SEMLYEN, A., *Contributions to The Theory of Calculation of Electromagnetic Transients an Transmission Lines with Frequency Dependent Parameters*. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No.2, pp.848-856, February, 1981.
- SEMLYEN, A., DABULEANU, A. *Fast and Accurate Switching Transient Calculations on Transmission Lines with Ground Return Using Recurive Convolutions*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-94, pp. 561-571, March/Apri, 1975.
- SEMLYEN, A., ROTH, R. A. *Calculation of Exponential Step Responses - Accurately for Three Base Frequencies*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-96, pp. 667-672, March/April, 1977.

- SNELSON, J. K. *Propagation of Travelling Waves on Transmission Lines - Frequency Dependent Parameters*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, pp. 85-91, January/February, 1972.
- SOUSA, J., CORREIA DE BARROS, M.T., HUET, O., *Frequency-Dependent Transmission Line Modelling for a Real-Time Digital Simulator*, Proceedings from the 1997 International Conference on Power Systems Transients, pp. 460-465, Seattle, USA, June 22-26, 1997.
- TAVARES, M. C., PISSOLATO, J., PORTELA, C. M., *Quasi-Modes Multiphase Transmission Line Model*, Proceedings of the International Conference on Power Systems Transients, University of Washington, Seattle, Washington, June 22-26, 1997.
- WEDEPOHL, L. M. *Application of Matrix Methods to the Solution of Travelling-Wave Phenomena in Polyphase Systems*. Proc. IEE, Vol. 110, n°12, pp. 2200-2212, December, 1963.

Apêndice A

Convolução Recursiva

Considere a integral de convolução abaixo

$$s(t) = \int_T^{\infty} f(t-u) \cdot e^{-p(u-T)} du \quad (\text{A.1})$$

a ser calculada no tempo t a partir de $s(t - \Delta t)$ conhecido do passo anterior.

Este valor conhecido é dado por

$$s(t - \Delta t) = e^{p\Delta t} \cdot \int_{T+\Delta t}^{\infty} f(t-u) \cdot e^{-p(u-T)} du \quad (\text{A.2})$$

obtido ao fazermos a substituição de u por $u + \Delta t$ em (A.1).

A integral (A.1) pode ser expressa como a soma de duas outras integrais

$$s(t) = \int_T^{T-\Delta t} f(t-u) \cdot e^{-p(u-T)} du + \int_{T+\Delta t}^{\infty} f(t-u) \cdot e^{-p(u-T)} du \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.2) em (A.3) obtemos

$$s(t) = \int_T^{T+\Delta t} f(t-u) \cdot e^{-p(u-T)} du + e^{-p\Delta t} \cdot s(t - \Delta t) \quad (\text{A.4})$$

De (A.4) concluímos que $s(t)$ é calculado recursivamente a partir de $s(t - \Delta t)$.

Considerando que f varia linearmente entre $t - T - \Delta t$ e $t - T$,

[DOMMEL, 1996; MARTI, 1982]

$$s(t) = c_1 \cdot s(t - \Delta t) + c_2 \cdot f(t - T) + c_3 \cdot f(t - T - \Delta t) \quad (\text{A.5})$$

com

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-p\Delta t} \\ c_2 &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 \Delta t} (1 - e^{-p\Delta t}) \\ c_3 &= -\frac{1}{p} e^{-p\Delta t} + \frac{1}{p^2 \Delta t} (1 - e^{-p\Delta t}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B

Método dos Mínimos Quadrados Generalizado [Press et al, 1992]

Deseja-se ajustar um conjunto de N dados (x_i, y_i) ao modelo

$$y(x) = \sum_{k=1}^M a_k X_k(x) \quad (\text{B.1})$$

que representa a combinação linear de M funções arbitrárias de x , $X_1, \dots, X_M(x)$, denominadas funções-base do modelo.

A linearidade do modelo diz respeito apenas a sua dependência com relação aos parâmetros a_k . Portanto, $X_1, \dots, X_M(x)$ podem assumir a forma de funções altamente não-lineares.

Os parâmetros a_1, a_2, \dots, a_M que melhor ajustam os dados (x_i, y_i) ao modelo são obtidos minimizando-se uma *função de mérito* ou *chi-quadrado* definida como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i; a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (\text{B.2})$$

em que σ_i é o desvio padrão associado ao i -ésimo ponto do conjunto de dados.

A função erro assim definida mede a concordância entre uma solução aproximada, obtida com um conjunto particular de parâmetros calculados, e a solução real.

No mínimo, as derivadas parciais de χ^2 , com relação a todos os M parâmetros são nulas. Logo, teremos M equações da forma

$$0 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{j=1}^M a_j X_j(x_i) \right] X_k(x_i) \quad k = 1, \dots, M \quad (\text{B.3})$$

Este mínimo pode ser obtido através do uso de equações normais ou através da decomposição em valores singulares (SVD).

B.1. Resolução por Equações Normais

Seja A , a matriz do problema de ajuste, de dimensões $N \times M$ e que tem os elementos dados por

$$A_{i,j} = \frac{X_j(x_i)}{\sigma_i} \quad (\text{B.4})$$

A Figura B.1 mostra o desenho esquemático da matriz A .

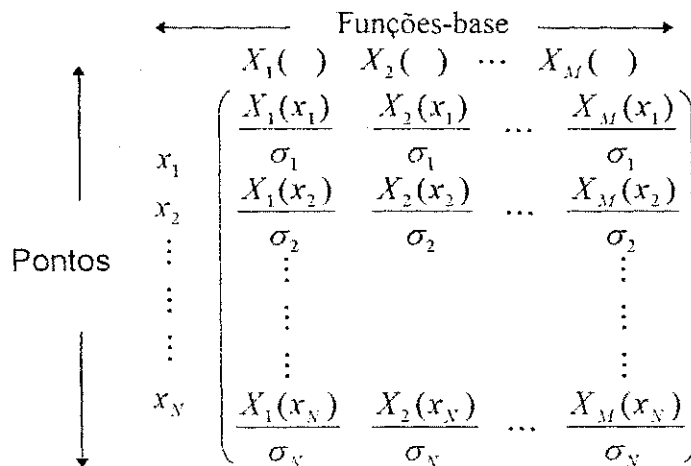


Figura B.1 - Desenho esquemático da matriz do problema de ajuste A .

Seja b o vetor de tamanho N definido por

$$b_i = \frac{y_i}{\sigma_i} \quad (\text{B.5})$$

e a o vetor M de parâmetros ajustáveis.

Em forma matricial, a equação (B.3) pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^M \alpha_{kj} a_j = \beta_k \quad (\text{B.6})$$

em que

$$\alpha_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{X_j(x_i) X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \quad (\text{B.7})$$

ou ainda,

$$[\alpha] = A^T \cdot A \quad (\text{B.8})$$

e

$$\beta_k = \sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \quad (\text{B.9})$$

ou

$$[\beta] = A^T \cdot b \quad (\text{B.10})$$

$[\alpha]$ é uma matriz quadrada de ordem M e $[\beta]$ é um vetor de comprimento

M .

Substituindo (B.8) e (B.10) em (B.6) obtemos

$$[\alpha] \cdot a = [\beta] \quad (\text{B.11})$$

ou ainda

$$(A^T \cdot A) \cdot a = A^T \cdot b \quad (\text{B.12})$$

As equações (B.11) ou (B.12) são denominadas equações normais do modelo. O vetor solução de (B.11) é o vetor de parâmetros ajustáveis a .

Além de parâmetros, o método de ajuste deve ainda fornecer os erros considerados na estimação destes.

Resolvendo (B.6) para a_j , temos

$$a_j = \sum_{k=1}^M [\alpha]_{jk}^{-1} \beta_k \quad (\text{B.13})$$

Fazendo $C_{jk} = [\alpha]_{jk}^{-1}$ em (B.13)

$$a_j = \sum_{k=1}^M C_{jk} \left[\sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \right] \quad (\text{B.14})$$

A variância associada a cada valor estimado a_j é dada por

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left(\frac{\partial a_j}{\partial y_i} \right)^2 \quad (\text{B.15})$$

Sabendo que a derivada de a_j com relação a y_i é

$$\frac{\partial a_j}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^M \frac{C_{jk} X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \quad (\text{B.16})$$

obtemos

$$\sigma_i^2(a_j) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M C_{jk} C_{jl} \left[\sum_{i=1}^N \frac{X_k(x_i) X_l(x_i)}{\sigma_i^2} \right] \quad (\text{B.17})$$

O termo entre colchetes é a matriz $[\alpha]$. Como $[C] = [\alpha]^{-1}$, a equação (B.17) se torna

$$\sigma^2(a_j) = C_{jj} \quad (\text{B.18})$$

Como podemos verificar, as variâncias associadas aos parâmetros a_1, a_2, \dots, a_M correspondem aos elementos da diagonal principal de $[C]$.

B.2. Resolução por decomposição em valores singulares (svd)

A resolução por decomposição do valor singular (svd) utiliza o seguinte teorema de álgebra linear:

“Uma matriz $[A]$ qualquer de ordem $M \times N$ pode ser escrita como o produto de uma matriz ortogonal $[U]$, de dimensão $M \times M$, uma matriz diagonal $[W]$ de ordem $N \times N$ e a transposta de uma matriz ortogonal $[V]$ de dimensão $N \times N$.”

Logo, teremos:

$$[A] = [U] \cdot [W] \cdot [V]^T \quad (\text{B.19})$$

e

$$[U]^T \cdot [U] = [V]^T \cdot [V] = [1] \quad (\text{B.20})$$

em que $[1]$ é matriz identidade de dimensão $N \times N$.

A matriz diagonal $[W]$ contém os valores singulares ω_j .

O vetor solução do sistema

$$[A] \cdot [X] = [B] \quad (\text{B.21})$$

pode ser obtido de

$$[X] = [V] \cdot \left[\text{diag} \left(\frac{1}{\omega_j} \right) \right] \cdot ([U]^T \cdot [B]) \quad (\text{B.22})$$

Dentro do contexto dos mínimos quadrados, desejamos encontrar o vetor de parâmetros \mathbf{a} , que minimiza a função erro

$$\chi^2 = |A \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \quad (\text{B.23})$$

A matriz A e o vetor \mathbf{b} , têm os seus elementos dados por (B.4) e (B.5), respectivamente.

Logo a solução do problema de mínimos quadrados (B.23) é obtida de

$$a = \sum_{i=1}^M \left(\frac{U_{(i)} \cdot b}{\omega_i} \right) V_{(i)} \quad (\text{B.24})$$

em que

$U_{(i)}, i = 1, \dots, M$ representa as colunas de U ;

$V_{(i)}, i = 1, \dots, M$ representa as colunas de V ;

ω_i são os valores singulares.

A variância na estimativa de um parâmetro a_j é dada por

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\omega_i^2} |V_{(i)}|_j^2 = \sum_{i=1}^M \left(\frac{V_{ji}}{\omega_i} \right)^2. \quad (\text{B.25})$$

As covariâncias são dadas

$$\text{Cov}(a_j, a_k) = \sum_{i=1}^M \left(\frac{V_{ji} V_{ki}}{\omega_i^2} \right). \quad (\text{B.26})$$

Apêndice C

A Transformação de Householder e o Método de Golub

Uma matriz de transformação refletida é uma matriz da forma

$$[R] = \left([I] - \frac{2 \cdot [V] \cdot [V]^T}{[V]^T \cdot [V]} \right) \quad (C.1)$$

onde $[V]$ é um vetor arbitrário e $[I]$ é a matriz identidade de mesma dimensão que $[R]$.

A matriz de transformação refletida obtida segundo (C.1) obedece às seguintes propriedades:

- a) $[R] = [R]^T$, logo é uma matriz simétrica;
- b) $[R] = [R]^{-1}$, logo é igual a sua inversa;
- c) $[R]^{-1} = [R]^T$, logo é ortogonal.

A transformação de Householder é uma matriz de transformação refletida que converte a matriz da esquerda na matriz na direita (C.2), onde a é um elemento qualquer.

$$[H] \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

Aplicando sucessivamente a matriz de transformação de Householder $[H]$ podemos transformar uma matriz qualquer em uma matriz triangular superior (C.3).

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Seja $[x] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ o vetor composto pela primeira coluna de uma matriz

simétrica $[A]$. Fazendo

$$[v] = [x] \pm |x| \cdot [e_1] \quad (\text{C.4})$$

onde $[e_1]$ é o vetor unitário $[1, 0, \dots, 0]^T$ e substituindo (C.4) em (C.1) obtemos

$$[H] = [R] = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot |x| \cdot (|x| - a_{11})}} [x] \pm |x| \cdot [e_1] \quad (\text{C.5})$$

Aplicando a matriz de transformação acima a $[x]$ chegamos a

$$[H] \cdot [x] = \pm |x| \cdot [e_1] \quad (\text{C.6})$$

Da equação (C.6) podemos concluir que a matriz de transformação de Householder $[H]$ quando aplicada ao vetor $[x]$, anula todos os seus componentes com exceção do primeiro elemento.

Para reduzir uma matriz simétrica $[A]$ a uma matriz triangular superior, inicialmente, escolhemos o vetor $[x]$ para que a primeira matriz de transformação seja

os elementos $n-1$ da primeira coluna. Desta forma os elementos $n-2$ abaixo serão zerados.

$$\begin{aligned}
 H_1 \cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & (n-1)H_1 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

A transformação ortogonal completa é agora

$$[A]^T = [H] \cdot [A] \cdot [H] = \begin{bmatrix} a_{11} & k & 0 & \dots & 0 \\ k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{C.8}$$

Devemos agora escolher os elementos $n-2$ da segunda coluna como o novo vetor $[x]$ para a segunda matriz de transformação de Householder. Logo teremos

$$[H_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & (n-2)H_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

Após $n-2$ aplicações das matrizes de transformação de Householder teremos $[A]$ triangular superior.

Golub aplicou esta técnica à resolução de sistemas de equações sobredeterminados.

Apêndice D

Método de Ajuste Não-linear

Desejamos ajustar um conjunto de N pontos (x_i, y_i) ao modelo

$$y = y(x; a) \quad (D.1)$$

que depende não-linearmente dos parâmetros a_1, a_2, \dots, a_M .

Devemos inicialmente determinar uma função erro que irá medir a concordância entre uma solução aproximada, obtida com um conjunto hipotético de parâmetros calculados, e a solução real. O conjunto de parâmetros que melhor se ajusta ao modelo considerado é obtido minimizando-se a função chi-quadrado

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i; a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (D.2)$$

em que σ_i é o desvio padrão associado ao i -ésimo ponto do conjunto de dados.

Ao contrário da técnica apresentada no Apêndice B, o processo de otimização ocorre iterativamente. Partindo de uma primeira aproximação para os parâmetros a_k , estes valores são refinados até que χ^2 atinja um mínimo.

Expandindo (D.2) em uma série de Taylor obtemos

$$\chi^2(a) = \gamma + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \chi^2}{\partial a_k} \cdot a + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_l} \cdot a_k a_l + \dots \quad (D.3)$$

Próximo ao mínimo χ^2 pode ser aproximada pela forma quadrática

$$\chi^2(a) \approx \gamma - d \cdot a + \frac{1}{2} a \cdot D \cdot a \quad (D.4)$$

em que

d é um vetor de comprimento M , representando o gradiente de χ^2 com relação aos parâmetros a_k ;

D é uma matriz quadrada de ordem M cujas componentes são as segundas derivadas parciais de χ^2 com relação aos parâmetros a_k e que é comumente conhecida como matriz Hessiana.

Uma vez que a aproximação obtida com os valores iniciais dos parâmetros a_k tenha sido satisfatória, os valores de a_k que minimizam χ^2 são calculados em um único passo de [PRESS et al, 1992],

$$a_{min} = a_{atual} + D^{-1} \cdot [-\nabla\chi^2(a_{atual})] \quad (D.5)$$

Caso a primeira aproximação não produza resultados precisos, a próxima iteração será realizada com [PRESS et al, 1992],

$$a_{prox} = a_{atual} - constante \cdot \nabla\chi^2(a_{atual}) \quad (D.6)$$

O vetor d em (D.4) tem componentes

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i; a)]}{\sigma_i^2} \frac{\partial y(x_i; a)}{\partial a_k} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (D.7)$$

que serão nulas no mínimo de χ^2 .

Tomando a segunda derivada parcial chegamos a

$$\frac{\partial^2\chi^2}{\partial a_k \partial a_l} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[\frac{\partial y(x_i; a)}{\partial a_k} \frac{\partial y(x_i; a)}{\partial a_l} - [y_i - y(x_i; a)] \frac{\partial^2 y(x_i; a)}{\partial a_k \partial a_l} \right] \quad (D.8)$$

De (D.8) percebemos que os elementos da matriz Hessiana D dependem tanto da primeira derivada como da segunda derivada parcial com relação aos parâmetros a_k . Para o procedimento de ajuste o termo que depende da segunda derivada parcial pode ser ignorado visto que para um ajuste preciso $[y_i - y(x_i; a)]$ assume valores desprezíveis.

Logo, (D.8) se torna

$$\frac{\partial^2\chi^2}{\partial a_k \partial a_l} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[\frac{\partial y(x_i; a)}{\partial a_k} \frac{\partial y(x_i; a)}{\partial a_l} \right] \quad (D.9)$$

Definindo

$$\beta_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi^2}{\partial a_k} \quad (\text{D.10})$$

e

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_l}, \quad (\text{D.11})$$

as equações (D.5) e (D.6) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\sum_{l=1}^M \alpha_{kl} \delta a_l = \beta_k \quad \text{e} \quad (\text{D.12})$$

$$\delta a_l = \text{constante} \cdot \beta_l. \quad (\text{D.13})$$

D.1. O Método de Levenberg-Marquardt

Devido ao seu bom desempenho, o método de Levenberg-Marquardt é atualmente considerado o método padrão em rotinas de mínimos quadrados para a determinação de modelos não-lineares [PRESS et al, 1992].

Na implementação do método (D.13) assume a forma

$$\delta a_l = \frac{1}{\lambda \alpha_{ll}} \beta_l \quad \text{ou} \quad \lambda \alpha_{ll} \delta a_l = \beta_l \quad (\text{D.14})$$

com $\lambda \gg 1$.

Definindo uma nova matriz $[\alpha']$, dada por

$$\begin{aligned} \alpha'_{jj} &= \alpha_{jj} (1 + \lambda) \\ \alpha'_{jk} &= \alpha_{jk} \quad (j \neq k) \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

As equações (D.14) e (D.12) podem ser substituídas por

$$\sum_{l=1}^M \alpha'_{kl} \delta a_l = \beta_k \quad (\text{D.16})$$

Quando fazemos $\lambda \gg 1$ em (D.16) obtemos (D.14) e ao tomarmos λ próximo de zero, (D.16) se torna aproximadamente igual a (D.12).

Dado um conjunto inicial de parâmetros ajustáveis a_k , a rotina que realiza o método de ajuste não-linear deve seguir as seguintes etapas [PRESS et al, 1992]:

1. Calculamos $\chi^2(a)$;
2. Fazemos $\lambda = 0.001$;
3. Solucionamos as equações lineares (D.16) para δa , e calculamos $\chi^2(a + \delta a)$;
4. Se $\chi^2(a + \delta a) \geq \chi^2(a)$, fazemos $\lambda = 10 \cdot 0.001$ e retornamos a (3).
5. Se $\chi^2(a + \delta a) < \chi^2(a)$, fazemos $\lambda = 0.1 \cdot 0.001$ e $a_{prox} = a + \delta a$ e retornamos a (3).

A sequência de operações acima é repetida até que variações em $\chi^2(a)$ sejam desprezíveis.

De posse do conjunto de parâmetros a_1, a_2, \dots, a_M que minimizam $\chi^2(a)$, obtemos os erros considerados na estimação destes fazendo $\lambda = 0$ e calculando

$$[C] = [\alpha]^{-1} \quad (D.17)$$