

Francisco de Assis Ferreira Tejo

## Análise de Campos Eletromagnéticos em Regiões Limitadas pelo Método dos Elementos Finitos

Tese submetida à Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Paraíba - Campus II, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências, no domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação

Creso Santos da Rocha  
Orientador

Atílio José Giarola  
Orientador

Abimael Fernando Dourado Loula  
Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Francisco de Assis Ferreira Tejo, 1996



T266a Tejo, Francisco de Assis Ferreira  
Análise de campos eletromagnéticos em regiões limitadas  
pelo método dos elementos finitos / Francisco de Assis  
Ferreira Tejo. - Campina Grande, 1996.  
141 f. : il.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade  
Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia.

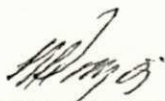
1. Processamento de Sinais - 2. Elementos Finitos 3.  
Tese I. Rocha, Creso Santos da, Dr. II. Giarola, Attilio  
Jose, Dr. III. Loula, Abimael Fernando Dourado, Dr. IV.  
Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB) V.  
Título

CDU 621.391(043)

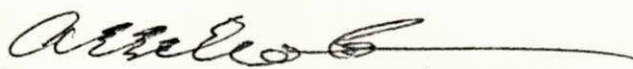
**ANÁLISE DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS**

**FRANCISCO DE ASSIS FERREIRA TEJO**

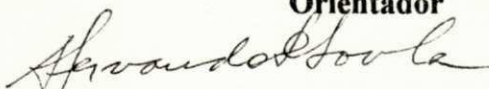
Tese Aprovada em 26.04.1996



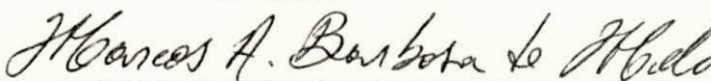
**CRESO SANTOS DA ROCHA, Ph.D., UFPB**  
Orientador



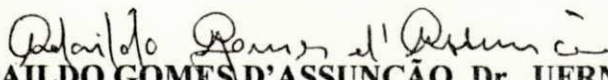
**ATTÍLIO JOSÉ GIAROLA, Ph.D., UNICAMP**  
Orientador



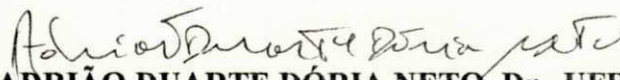
**ABIMAEEL FERNANDO DOURADO LOULA, D.Sc., LNCC/CNPQ**  
Orientador



**MARCOS ANTONIO BARBOSA DE MELO, Dr., UFPB**  
Componente da Banca



**ADAILDO GOMES D'ASSUNÇÃO, Dr., UFRN**  
Componente da Banca



**ADRIÃO DUARTE DÓRIA NETO, Dr., UFRN**  
Componente da Banca



**AARÃO DE ANDRADE LIMA, Ph.D., UFPB**  
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB

Abril - 1996

À memória do meu pai, que sempre me inspirou pela perseverança, honestidade, humildade e paciência.



Dedico este trabalho:

À minha esposa Áurea, com amor, pela compreensão, amor, e estímulo demonstrados em todas as fases desta jornada.

Aos meus filhos:

Stefano, Frederico, Francesca e Romina, com carinho.

À minha mãe, com respeito.

## Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros votos de gratidão:

À minha esposa e companheira Áurea e aos meus filhos Stefano, Frederico, Francesca e Romina, pelo apoio.

Ao professor e orientador Atílio José Giarola, pela orientação e valiosas sugestões.

Ao professor Abimael Fernando Dourado Loula, pelas palavras de estímulo, pela orientação desprendida, pelas valorosas sugestões e pela amizade que terminamos por cultivar ao longo deste trabalho.

Ao professor Creso Santos da Rocha, colega e amigo, que muito contribuiu para que este trabalho chegasse a bom termo, com o seu abnegado desprendimento e o seu espírito crítico-construtivo.

Ao professor Aarão de Andrade Lima, colega e amigo, pela sua inestimável colaboração ao longo desta jornada.

Ao professor Marcondes Clark, pela orientação na formalização matemática desta tese.

À professora Maria de Fátima Q. Vieira Turnell, colega e eminente coordenadora, a quem nunca faltaram palavras de estímulo para que este empreendimento fosse bem sucedido.

Ao professor Deep, pelas palavras de estímulo.

Ao colega Antonio Marcus N. Lima que nunca se negou a colaborar nos momentos difíceis.

Aos meus colegas de trabalho Rômulo, Marinho e Marcos, os quais assumiram meus encargos didáticos e, desta forma, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado.

Aos colegas do LEMA, Joabson e Ronaldo, pelo incentivo demonstrado em diversas ocasiões.

Aos colegas do LAPS, pelo apoio emprestado à realização deste trabalho.

Aos colegas e amigos Edgard e Leimar, que sempre apostaram que eu daria conta da tarefa.

A Lucimar, Ângela e Pedro pela atenção com que sempre me distinguiram.

Ao LNCC, que me proporcionou o suporte suplementar necessário ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas da UFRN, professores Adaildo e Adrião, pelo estímulo.

Aos meus amigos do LNCC, especialmente Karam, Miriam, Hélio, João, Sandra e Galeão, pelo constante incentivo e pelas valiosas sugestões.

A todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para a realização deste trabalho.

Finalmente, à Universidade Federal da Paraíba - Campus II, pela oportunidade oferecida.

## Resumo

Esta tese apresenta três formulações variacionais de elementos finitos, para a análise de campos eletromagnéticos em regiões limitadas, envolvendo meios não-dissipativos e lineares mas, em geral, não-homogêneos e anisotrópicos. O tratamento é geral e se aplica tanto a campos estáticos, quanto a campos em regime harmônico estacionário, em linhas de transmissão ou guias de onda longitudinalmente homogêneos e infinitos.

Nas aplicações do método dos elementos finitos (MEF) a guias de onda limitados, transversalmente não-homogêneos e/ou anisotrópicos, a formulação mais adequada se expressa em termos das três componentes do vetor campo magnético  $H$ , devido à natureza híbrida dos modos em tais guias.

Para eliminar os modos espúrios, inerentes às formulações vetoriais, são propostos e implementados o método da penalização transversal com integração reduzida seletiva e elementos lagrangeanos (STRIP) e o método misto regularizado (RMM). Alguns problemas típicos são resolvidos, sendo os resultados numéricos comparados aos obtidos com o método de penalidade com integração reduzida (RIP) e com o método dos elementos de aresta.

A qualidade das aproximações e o desempenho computacional, comprovam os resultados estimados, a priori, das taxas de convergência e erros esperados, preconizados pela análise numérica conduzida em torno de cada formulação.

O método misto proporciona uma estabilidade numérica idêntica à do método RIP, quando são usadas malhas com elementos moderadamente distorcidos.

O método STRIP apresenta autovalores mais precisos, quando comparados aos calculados através de elementos de aresta, o mesmo não ocorrendo com os autovetores correspondentes, devido ao desacoplamento entre as componentes transversais e a longitudinal do campo magnético  $H$ . Embora matematicamente inconsistente, o método STRIP se constitui em uma crítica ao método dos elementos finitos de aresta, cujos adeptos apregoam poder usá-los para resolver qualquer tipo de problema eletromagnético de valor de contorno.

## Abstract

This thesis presents three variational finite element formulations for analysis of bounded, loss-free and linear electromagnetic field problems, enclosing otherwise general non-homogeneous and/or anisotropic media. The treatment is general and can be applied to both static and time-harmonic fields in longitudinally homogeneous and infinite transmission lines or waveguides.

In applying the method of finite elements (FEM) to bounded waveguides, transversely non-homogeneous and/or anisotropic, the most suitable formulation is expressed in terms of three components of the magnetic field  $H$ , due to the hybrid nature of the modes in such waveguides.

In order to eliminate the spurious solutions, inherent to vector variational formulations, one introduces the transverse penalty method with selective reduced integration on lagrangian elements (STRIP), as well as the regularized mixed method (RMM). Some typical problems are solved and the results are compared with the ones obtained by the selective reduced integration penalty (RIP) and edge finite element methods.

The quality of the approximations and the computational performance, confirm the theoretical estimates of errors and convergence rates, obtained through numerical analysis on each one of the formulations presented.

The mixed method presents a numerical stability identical to that of the RIP method, when one uses moderately distorted elements.

One has observed that the STRIP finite element method provides more accurate eigenvalues than the ones calculated with the edge finite element method. Unfortunately, the same does not happen to the eigenvectors, due to the decoupling between the transverse and longitudinal components of the magnetic field  $H$ . Although mathematically inconsistent, the STRIP finite element method plays a rather critical role with respect to the edge elements finite element methods, whose adepts claim that could solve any kind of electromagnetic boundary value problem.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Generalidades . . . . .	1
1.2	Métodos numéricos versus métodos analíticos . . . . .	2
1.3	Breve história do eletromagnetismo computacional . . . . .	4
1.4	Relevância do método . . . . .	6
1.5	Objeto de estudo . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Análise Numérica de Campos Eletromagnéticos Estacionários</b>	<b>13</b>
2.1	Generalidades . . . . .	13
2.2	Formulação Clássica Abstrata . . . . .	14
2.3	Formulação Variacional ou Fraca . . . . .	15
2.3.1	Existência e Unicidade para o Problema W . . . . .	16
2.4	Aproximando o Problema Variacional . . . . .	17
2.4.1	Interpolação . . . . .	18
2.4.2	Aproximação . . . . .	21
2.4.3	Convergência . . . . .	21
2.5	O Método de Galerkin . . . . .	22
2.5.1	Propriedades da Aproximação de Galerkin . . . . .	24



2.6	Aplicação: Potencial Escalar . . . . .	28
2.6.1	O Problema de Neumann . . . . .	28
2.6.2	Problema de Teste Escalar . . . . .	37
2.7	Aplicação: Potencial Vetorial . . . . .	38
2.7.1	Formulação Clássica . . . . .	39
2.7.2	Formulações Fracas . . . . .	41
2.7.3	Aproximação do Problema . . . . .	50
2.7.4	Problema de Teste Vetorial . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Análise do Problema de Autovalor</b>	<b>61</b>
3.1	Generalidades . . . . .	61
3.2	O Problema de Autovalores - PAV . . . . .	62
3.3	Formulação Variacional Equivalente . . . . .	66
3.4	Discretização por Elementos Finitos . . . . .	68
3.5	PAV para Ondas Guiadas . . . . .	69
3.6	PAV para Regiões Tridimensionais Limitadas . . . . .	71
3.7	Modos Espúrios: como Eliminá-los . . . . .	73
3.7.1	Métodos de Penalidade . . . . .	78
3.8	Formulação Mista . . . . .	90
3.8.1	Aproximação por Elementos Finitos . . . . .	94
3.8.2	Forma matricial . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>100</b>
4.1	Generalidades . . . . .	100
4.2	Problemas de Ondas Guiadas . . . . .	102

<b>5</b>	<b>Conclusões e Sugestões</b>	<b>128</b>
5.1	Sumário . . . . .	128
5.2	Recomendações para Futuras Investigações . . . . .	130

# Lista de Figuras

2.1	Domínio poligonal com $N_e$ elementos. . . . .	19
2.2	Taxas de convergência obtidas numericamente para o problema de Neumann. . . . .	38
2.3	Elementos retangulares de 9 nós e integração completa: convergência ótima. . . . .	52
2.4	Elementos de 9 nós com penalidade (9 pontos de integração): convergência não ótima. . . . .	53
2.5	Elementos de 9 nós com penalidade (4 pontos de integração): convergência ótima. . . . .	54
2.6	Elementos de 4 nós com penalidade (4 pontos de integração): aproximação instável ( <i>trancamento</i> ). . . . .	55
2.7	Elemento de 4 nós com penalidade (1 ponto de integração): aproximação convergente. . . . .	56
2.8	Componente $A_x$ do potencial vetorial, obtida pelo MEF. . . . .	57
2.9	Componente $A_x$ do potencial vetorial, obtida analiticamente. . . . .	58
2.10	Componente $A_y$ do potencial vetorial, obtida pelo MEF. . . . .	59
2.11	Componente $A_y$ do potencial vetorial, obtida analiticamente. . . . .	60
3.1	Domínio de solução para problemas eletromagnéticos: (a) em duas dimensões; (b) em três dimensões. . . . .	62

<b>3.2</b>	Espaços $Q^h$ de aproximações descontínuas de $\nabla \cdot \mathbf{H}$ , correspondentes a várias escolhas de elementos e a diferentes regras de quadratura. . . . .	86
<b>3.3</b>	Convergência dos quatro primeiros autovalores para um guia retangular vazio, com $a = 1.0$ cm, $b = 0.5$ cm e $\beta = 0,01$ rad/cm. . . . .	91
<b>3.4</b>	Componente $H_x$ para o modo $TE_{10}$ num guia retangular vazio, para $a = 1.0$ cm, $b = 0.5$ cm e $\beta = 0,01$ rad/cm. . . . .	92
<b>3.5</b>	Componente $H_y$ para o modo $TE_{10}$ num guia retangular vazio, para $a = 1.0$ cm, $b = 0.5$ cm e $\beta = 0,01$ rad/cm. . . . .	93
<b>3.6</b>	Componente $H_z$ para o modo $TE_{10}$ num guia retangular vazio, para $a = 1.0$ cm, $b = 0.5$ cm e $\beta = 0,01$ rad/cm. . . . .	94
<b>3.7</b>	Componente $H_x$ para o modo $TE_{01}$ num guia retangular vazio, para $a = 1.0$ cm, $b = 0.5$ cm e $\beta = 0,01$ rad/cm. . . . .	95
<b>3.8</b>	Componente $H_y$ para o modo $TE_{01}$ num guia retangular vazio, para $a = 1.0$ cm, $b = 0.5$ cm e $\beta = 0,01$ rad/cm. . . . .	96
<b>3.9</b>	Componente $H_z$ para o modo $TE_{01}$ num guia retangular vazio, para $a = 1.0$ cm, $b = 0.5$ cm e $\beta = 0,01$ rad/cm. . . . .	97
<b>4.1</b>	Guia retangular vazio, com $a = 2b = 2$ cm: (a) domínio de solução; (b) malha utilizada (200 elementos de segunda ordem). . . . .	103
<b>4.2</b>	Modo $TE_{10}$ para um guia retangular vazio, com $a = 2b = 2$ cm; $\beta = 0,01$ rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM. . . . .	105
<b>4.3</b>	Modo $TE_{01}$ para um guia retangular vazio, com $a = 2b = 2$ cm; $\beta = 0,01$ rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM. . . . .	106
<b>4.4</b>	Modo $TE_{20}$ para um guia retangular vazio, com $a = 2b = 2$ cm; $\beta = 0,01$ rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM. . . . .	107
<b>4.5</b>	Guia retangular não-homogêneo, com $a = 2b = 2$ cm: (a) domínio de solução; (b) malha utilizada (196 elementos de segunda ordem). . . . .	109

4.6	Modo 1 para um guia de ondas retangular não-homogêneo, com $a = 2b = 2$ cm; $\beta = 0,01$ rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM. . . . .	110
4.7	Modo 2 para um guia de ondas retangular não-homogêneo, com $a = 2b = 2$ cm; $\beta = 0,01$ rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM. . . . .	111
4.8	Modo 3 para um guia de ondas retangular não-homogêneo, com $a = 2b = 2$ cm; $\beta = 0,01$ rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM. . . . .	112
4.9	Gráfico de setas do campo magnético transversal dos 3 primeiros modos de um guia retangular não-homogêneo, com $a = 2b = 2$ cm; $\beta = 0,01$ rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM. . . . .	113
4.10	Guia retangular vazio a dupla reentrância simétrica, com $a - 2b = 2$ cm, $s = a/3$ , $h = b/3$ e $\beta = 0,01$ rad/cm: (a) domínio de solução; (b) malha utilizada (126 elemetos de segunda ordem). . . . .	114
4.11	Gráfico de setas do campo magnético transversal dos 4 primeiros modos de um guia retangular vazio a dupla reentrância, com $a = 2b = 2$ cm, $s = a/3$ , $h = b/3$ e $\beta = 0,01$ rad/cm. . . . .	115
4.12	Malha de elementos finitos distorcidos, para uma guia retangular vazio, com $a = 2b = 2$ cm (72 elementos de segunda ordem). . . . .	116
4.13	Guia dielétrico retangular isotrópico blindado: $a = 10t$ , $b = 5t$ , $w = 2t$ , $s = 4t$ , $h = 2t$ ; $\epsilon_{r1} = 1,1025$ e $\epsilon_{r2} = 1,0$ . . . . .	117
4.14	Modos $E_{11}^x$ e $E_{21}^x$ de um guia dielétrico retangular isotrópico, com $a = 10t$ , $b = 5t$ , $s = 4t$ , $w = 2t$ , $h = 2t$ ; $\epsilon_{r1} = 1,1025$ ; $\epsilon_{r2} = 1,0$ : métodos RIP e RMM. . . . .	118
4.15	Modos $E_{11}^x$ e $E_{21}^x$ de um guia dielétrico retangular isotrópico, com $a = 10t$ , $b = 5t$ , $s = 4t$ , $w = 2t$ , $h = 2t$ ; $\epsilon_{r1} = 1,1025$ ; $\epsilon_{r2} = 1,0$ e $\beta = 0,01$ rad/cm: métodos RIP e RMM. . . . .	119

4.16	Diagramas de dispersão de um guia metálico quadrado, com revestimento dielétrico isotrópico, com $t/a = 0,25$ ; $\epsilon_d = 2,45$ . . . . .	120
4.17	Componentes $H_x$ , $H_y$ e $H_z$ do modo dominante, em corte ( $\beta = 0,01$ rad/cm), do guia quadrado com revestimento dielétrico isotrópico. . . .	121
4.18	Diagramas de dispersão de um guia metálico quadrado com anel dielétrico quadrado coaxial e isotrópico, com $t/a = 0,25$ ; $d/a = 0,5$ ; $\epsilon_d = 2,45$ . . .	122
4.19	Campos $H_x$ , $H_y$ e $H_z$ do modo dominante de um guia metálico quadrado com anel dielétrico coaxial e isotrópico, com $t/a = 0,25$ ; $d/a = 0,50$ ; $\epsilon_d = 2,45$ e $\beta = 0,01$ rad/cm. . . . .	123
4.20	Diagramas de dispersão para o modo $E_{11}^y$ de um guia canal, com $a = 10t$ , $b = 5t$ , $w = 4t$ , $s = 3t$ , $d = 2,5t$ ; $\epsilon_{r1} = 2,25$ ; $\epsilon_{r2} = 2,1025$ e $\epsilon_{r3} = 1,0$ . . .	124
4.21	Componentes $H_x$ , $H_y$ e $H_z$ para o modo $E_{11}^y$ , em corte ( $\beta = 0,01$ rad/cm), do guia canal. . . . .	125
4.22	Diagramas de dispersão para o modo $E_{11}^y$ de um guia costela, com $a = 10t$ , $b = 5t$ , $w = 4t$ , $s = 3t$ , $d = 2,5t$ ; $\epsilon_{r1} = 2,25$ ; $\epsilon_{r2} = 2,1025$ e $\epsilon_{r3} = 1,0$ .	126
4.23	Componentes $H_x$ , $H_y$ e $H_z$ para o modo $E_{11}^y$ , em corte ( $\beta = 0,01$ rad/cm), do guia costela. . . . .	127



## Lista de Tabelas

- 4.1 Autovalores de um guia retangular vazio, com  $a = 2b = 2$  cm. . . . . 104
- 4.2 Autovalores de um guia retangular não-homogêneo, com  $a = 2b = 2$  cm. 104
- 4.3 Autovalores de um guia retangular vazio a dupla reentrância, com  $a = 2b = 2$  cm,  $s = a/3$  e  $h = b/3$ . . . . . 108
- 4.4 Autovalores de um guia retangular vazio, com  $a = 2b = 2$  cm e malha distorcida. . . . . 108
- 4.5 Condições sobre os planos de simetria de um guia dielétrico retangular 114

## Lista de Símbolos

**FDM** finite difference method

**MDF** método das diferenças finitas

**FEM** finite element method

**MEF** método dos elementos finitos

$\nabla \cdot$  operador divergente

$\nabla \times$  operador rotacional

$\epsilon_0$  constante dielétrica do espaço livre ( $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$  F/m)

$\mu_0$  permeabilidade magnética do espaço livre ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m)

$c$  velocidade da luz no espaço livre ( $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \simeq 3 \times 10^8$  m/seg)

$q$  carga elétrica (C)

$\rho$  densidade volumétrica de cargas elétricas livres (C/m<sup>3</sup>)

$i$  corrente elétrica (A)

$\tilde{\sigma}$  tensor condutividade elétrica (Siemens)

$\tilde{\epsilon}$  tensor permissividade elétrica (F/m)

$\tilde{\epsilon}_r$  tensor constante dielétrica relativa ( $\tilde{\epsilon}_r = \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0}$ )

$\tilde{\epsilon}_r^{-1}$  tensor constante dielétrica relativa inversa

$\tilde{\mu}$  tensor permeabilidade magnética (H/m)

$\tilde{\mu}_r$  tensor permeabilidade magnética relativa ( $\tilde{\mu}_r = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0}$ )

$\tilde{\nu}_r$  tensor relutividade magnética relativa ( $\tilde{\nu}_r = \tilde{\mu}_r^{-1}$ )

**E** vetor intensidade de campo elétrico (V/m)

**D** vetor densidade de fluxo elétrico ( $\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$  C/m<sup>2</sup>)

**H** vetor intensidade de campo magnético (A/m)

**B** vetor densidade de fluxo magnético ( $\mathbf{B} = \tilde{\mu} \cdot \mathbf{H}$  Wb/m<sup>2</sup>)

**J** densidade vetorial de corrente elétrica ( $\mathbf{J} = \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{E}$  A/m<sup>2</sup>)

$\Phi$  potencial escalar elétrico (V)

**A** potencial vetorial magnético (Wb/m)

**n** vetor normal unitária

$\Omega$  domínio ou região

$\bar{\Omega}$  uma região fechada

$\partial\Omega$  fronteira de uma região

$\omega$  frequência angular de oscilação do campo eletromagnético (rad/seg)

$k_0$  número de onda no espaço livre ( $k_0 = \frac{\omega}{c}$  rad/m)

$E_z$  componente  $z$  do vetor campo elétrico

$H_z$  componente  $z$  do vetor campo magnético

**TE** classificação modal: transverso-elétrico (isto é,  $E_z = 0$ )

**TM** classificação modal: transverso-magnético (isto é,  $H_z = 0$ )

**RIP** reduced integration penalty: método de penalidade com integração reduzida

**STRIP** selective transverse reduced integration penalty: método de penalidade com integração reduzida seletiva

**RMM** regularized mixed method: método misto regularizado

$f, g$  funções definidas em uma região

**R** conjunto de todos os números reais

$\mathbf{R}^N$  espaço produto ( $\mathbf{R}^N = R \times R \times \dots \times R$ )

$U, V$  espaços vetoriais

$u, v$  elementos dos espaços  $U$  e  $V$

$\Omega^e$  um elemento finito genérico

$\overline{\Omega}^e$  fecho do conjunto  $\Omega^e$

$N_e$  número de elementos de uma malha de elementos finitos

$h_e$  diâmetro (máxima dimensão) de um elemento  $\Omega^e$

$h$  parâmetro de malha ( $h = \max_{e=1, \dots, N_e} \{h_e\}$ )

$\Omega_h$  uma discretização de um domínio  $\Omega$  por uma malha de elementos finitos de parâmetro  $h$

$u_h, v_h$  aproximações das funções  $u$  e  $v$  por elementos finitos

$S_h^k(\Omega)$  espaço de elementos finitos de grau  $k$

$U_h, V_h$  aproximações dos espaços  $U$  e  $V$

$\varphi_i^e(\mathbf{x})$  polinômio de Lagrange de grau  $k$ , associado ao nó  $i$  do elemento  $e$

$\varphi_i(\mathbf{x})$  função de interpolação global associada ao nó global  $i$

$E$  número de nós do elemento  $\Omega^e$

$G$  número global de graus de liberdade de uma discretização de elementos finitos

$\mathcal{B}_h$  base de um subespaço  $U_h$  ( $\mathcal{B}_h = \{\varphi_i\}_{i=1}^G$ )

$[A], [S], [T]$  . matrizes globais de coeficientes

$\{X\}$  vetor coluna de incógnitas nodais

$A_{ij}^e$  elemento genérico da matriz elementar de rigidez ( $A_{ij}^e = a(\varphi_i^e, \varphi_j^e); i, j = 1, 2, \dots, G$ )

$F_j$  componente  $j$  do vetor excitação elementar ( $F_j^e = L(\varphi_j^e)$ )

$A_{ij}$  elemento  $i, j$  da matriz global de rigidez

$F_j$  componente  $j$  do vetor excitação global

$U_h \subset U$  inclusão de  $U_h$  em  $U$  (ou uma aproximação consistente)

$A$  um operador diferencial definido em uma região

$B$  um operador diferencial definido sobre a fronteira de uma região

$H$  um espaço de Hilbert

$H_0^1(\Omega)$  espaço de Hilbert de primeira ordem, cujas funções satisfazem condições de contorno homogêneas sobre  $\partial\Omega$

$H^1(\Omega)$  espaço de Hilbert de primeira ordem

$L^2(\Omega)$  espaço das funções de quadrado integrável ( $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ )

$W^{k+1,2}(\Omega)$  espaço de Sobolev

$H^{k+1}(\Omega)$  espaço de Hilbert de ordem  $k + 1$  ( $H^{k+1} \equiv W^{k+1,2}$ )



$[A], [S], [T]$  . matrizes globais de coeficientes

$\{X\}$  vetor coluna de incógnitas nodais

$A_{ij}^e$  elemento genérico da matriz elementar de rigidez ( $A_{ij}^e = a(\varphi_i^e, \varphi_j^e); i, j = 1, 2, \dots, G$ )

$F_j^e$  componente  $j$  do vetor excitação elementar ( $F_j^e = L(\varphi_j^e)$ )

$A_{ij}$  elemento  $i, j$  da matriz global de rigidez

$F_j$  componente  $j$  do vetor excitação global

$U_h \subset U$  inclusão de  $U_h$  em  $U$  (ou uma aproximação consistente)

$A$  um operador diferencial definido em uma região

$B$  um operador diferencial definido sobre a fronteira de uma região

$H$  um espaço de Hilbert

$H_0^1(\Omega)$  espaço de Hilbert de primeira ordem, cujas funções satisfazem condições de contorno homogêneas sobre  $\partial\Omega$

$H^1(\Omega)$  espaço de Hilbert de primeira ordem

$L^2(\Omega)$  espaço das funções de quadrado integrável ( $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ )

$W^{k+1,2}(\Omega)$  espaço de Sobolev

$H^{k+1}(\Omega)$  espaço de Hilbert de ordem  $k + 1$  ( $H^{k+1} \equiv W^{k+1,2}$ )

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Generalidades

Desde os primórdios do desenvolvimento da eletricidade e do magnetismo, um dos grandes objetivos da engenharia elétrica tem sido a solução precisa de problemas de valor inicial e/ou de contorno, envolvendo campos eletromagnéticos. O comportamento de dispositivos eletromagnéticos tais como transistores, máquinas elétricas, guias de onda e antenas é governado pelas equações de Maxwell. Antes do advento dos computadores, devia-se recorrer a métodos matemáticos elaborados para resolvê-las, através de métodos tais como separação de variáveis, expansão em séries de potências, funções de Bessel, polinômios e funções de Legendre, transformações conformes e de Schwarz-Christoffel, transformadas de Laplace, transformadas de Fourier e muitos outros. Através destes métodos, a solução do campo eletromagnético no interior de um dispositivo complexo costuma envolver um longo processo de análise e, em geral, a obtenção de uma solução fechada só é possível através de suposições simplificadoras, muitas vezes drásticas, na geometria do dispositivo ou nas distribuições de cargas ou correntes. Em consequência destas suposições, a solução resultante não é completamente confiável, frustrando o propósito inicial da análise, que é projetar com precisão. Além disto, o erro humano é uma outra fonte de imprecisão quando estes métodos são usados, principalmente nas fases iniciais de um longo processo de desenvolvimento

algébrico.

Felizmente, com o advento dos computadores digitais e com os avanços subseqüentes na potência computacional e na capacidade de armazenamento (disponíveis a custos sempre decrescentes), é hoje possível usar esquemas simples de aproximação numérica para resolver problemas de grande porte (tanto em termos de complexidade das equações, quanto no tamanho do dispositivo), em questão de minutos. Com o desenvolvimento da análise numérica, assumem importância as técnicas numéricas de solução, tais como os métodos das diferenças finitas, dos momentos, dos elementos finitos e das equações integrais. Isto se verifica, principalmente, desde meados da década de setenta até os dias atuais.

Pode-se afirmar que o eletromagnetismo computacional atingiu sua maioridade, dispondo-se hoje de pacotes sofisticados de *software* para a análise de campos eletromagnéticos em problemas de grande porte. Em geral, esses pacotes produzem resultados em tempos menores do que os envolvidos quando se usam métodos clássicos. Como consequência, a análise computacional de dispositivos eletromagnéticos deixa de ser um assunto exclusivo das grandes corporações, sendo hoje relativamente acessível à comunidade acadêmica, desde que se disponha de recursos computacionais minimamente adequados.

## 1.2 Métodos numéricos versus métodos analíticos

Muitos fenômenos físicos da natureza podem ser descritos por meio de equações diferenciais. Quando a equação e o domínio são simples, a solução pode ser obtida em forma fechada, em geral na forma de uma série infinita. As tentativas de se desenvolver novos métodos de solução exata para equações diferenciais gerais, são quase sempre frustradas pela existência de domínios irregulares e geometricamente complicados, ou por não-linearidades da maioria dos problemas práticos. Em consequência, diversos métodos de solução aproximada vêm sendo constantemente desenvolvidos desde o século passado. Dentre estes, o das diferenças finitas e os variacionais têm dominado as aplicações a problemas da engenharia.

O método das diferenças finitas (MDF) é dotado de simplicidade de princípio (isto é, as derivadas de uma função são representadas por séries de Taylor finitas) e facilidade de formulação e implementação em um computador digital. Entre as desvantagens do método, entretanto, destacam-se a dificuldade de implementar condições de contorno em fronteiras irregulares e de representar domínios complicados, com precisão.

Os métodos variacionais clássicos, isto é, os de Ritz, Galerkin e Kantorovich [1] são baseados na minimização de um funcional quadrático associado ao problema em questão, ou na minimização, em um certo sentido, do erro ou resíduo da aproximação. Apesar da simplicidade e precisão, os métodos variacionais clássicos não foram considerados competitivos com os métodos das diferenças finitas, principalmente devido à dificuldade de se construir funções de aproximação, definidas sobre todo o domínio, quando este é irregular.

O método dos elementos finitos (MEF) supera estas dificuldades, procurando a solução aproximada sobre uma coleção de *subdomínios* simples (chamados elementos), sobre os quais funções de aproximação simples podem ser geradas de maneira sistemática. A coleção de elementos, ou *malha* de elementos finitos, substitui o domínio original com a precisão desejada.

Antes de mais nada, cabem alguns esclarecimentos para situar as principais diferenças entre o MEF e outros métodos numéricos. Em primeiro lugar, o termo *elementos finitos* se refere, nem tanto ao tamanho geométrico finito do problema, mas à finitude de grandezas eletromagnéticas fundamentais, tais como energia ou potência, reação, Lagrangeanos ou Hamiltonianos do campo. Em segundo, o método não especifica como o problema original deve ser formulado matematicamente: se como uma equação integral, como um problema de contorno de equações diferenciais, ou ainda como um sistema de equações íntegro-diferenciais. Pode-se aplicar o MEF a qualquer uma dessas formulações. Finalmente, não existe necessidade de que a aproximação deva ser localmente polinomial ou que deva ser interpolativa; embora a maioria dos métodos dos elementos finitos incorpore estas propriedades, algumas outras não as incorporam. O que é considerado essencial, é a existência de uma aproximação *univocamente* definida no espaço de solução. Aí reside a principal diferença entre o método dos elementos

finitos e os métodos de diferenças finitas e de colocação (entre os quais o método dos momentos). Como se sabe, estes últimos produzem soluções aproximadas em um conjunto finito de pontos, contudo não traduzem o comportamento da solução em outros pontos do domínio.

O MEF, assim como os métodos variacionais, é baseado em formulações integrais, obtidas multiplicando-se a equação diferencial original por uma função-peso e integrando-se o resultado em todo o domínio. Portanto, eles não são particularmente adequados a problemas com gradientes ou descontinuidades agudos, porque as integrações tendem a suavizá-los. Isto pode não ser apropriado, caso se esteja interessado, justamente, na previsão da intensidade de tais gradientes. Em tais casos, entretanto, pode-se contornar esta dificuldade, usando-se elementos especiais [2] ou geradores de malhas auto-adaptativos [3].

Nas últimas décadas, o método dos elementos finitos, um ramo dos métodos variacionais clássicos, vem ganhando popularidade considerável, não só entre engenheiros projetistas, mas também entre aqueles que fazem matemática aplicada.

### 1.3 Breve história do eletromagnetismo computacional

Apesar da teoria das aproximações ser muito bem conhecida dos matemáticos, há bastante tempo, grande parte dos métodos numéricos em eletromagnetismo envolvia, inicialmente, a mera computação de expressões provenientes de uma análise clássica, para um conjunto de valores de parâmetros específicos relativos a um dado dispositivo [4]. As transformações conformes e as transformações de Schwarz-Christoffel foram, outrora, ferramentas muito usadas na solução de problemas eletromagnéticos [5], muito embora estes métodos só se aplicassem a situações relativamente simples.

Durante as décadas de 20 e 30 houve alguns avanços nos métodos gráficos (mapeamento e relaxação manual) para a solução de problemas de campos, sendo o trabalho de Bewley a contribuição mais importante [6].

Da década de 40 até a de 60 houve um desenvolvimento muito intenso dos modelos de circuitos a parâmetros concentrados para dispositivos eletromagnéticos, em contraposição aos modelos a parâmetros distribuídos. Estes modelos eram baseados em suposições simplificadoras drásticas e foram desenvolvidos para a análise de máquinas elétricas.

Os métodos experimentais, baseados em medições efetuadas sobre sistemas análogos, foram de grande popularidade antes do advento dos computadores digitais [7]. Entre os simuladores analógicos, os análogos eletrocondutivos foram os mais amplamente usados, dada a flexibilidade com que as grandezas elétricas podem ser medidas e controladas. As desvantagens destes métodos são, além dos inerentes erros de medição, perda de generalidade, custo elevado e grande tempo envolvido na realização dos experimentos.

O desenvolvimento da análise numérica e da análise funcional levou, ao final da década de 60, à primeira aplicação do método dos elementos finitos à solução de problemas eletromagnéticos [8]. Desde então, o MEF vem se firmando como uma das mais importantes ferramentas de análise na comunidade eletromagnética [9].

O eletromagnetismo computacional pode ser dirigido a campos de baixas e altas frequências. Esta é uma dicotomia natural, em razão da natureza das equações correspondentes e das especificidades de cada faixa de frequências. Pode-se dizer, em geral, que os engenheiros eletricitas presentemente envolvidos com análise de campos, são aqueles que lidam com máquinas elétricas, alta tensão, descargas atmosféricas, aterramento, compatibilidade eletromagnética, ensaios não destrutivos, gravação magnética, dispositivos eletrônicos, linhas de transmissão, guias de onda, antenas, cavidades ressonantes, fibras e guias ópticos e dispositivos optoeletrônicos. Com algumas exceções, estes grupos de engenheiros raramente interagem, apesar de terem tanto em comum. Aqueles que cruzam estas fronteiras são, via de regra, ligados ao desenvolvimento de métodos numéricos e correspondente *software*.

Os dispositivos de baixa frequência típicos são as máquinas elétricas, os dispositivos eletrônicos, as cabeças de gravação e as linhas de transmissão de potência, enquanto que aqueles que caracterizam os dispositivos de altas frequências são os guias de onda, as cavidades ressonantes, as antenas e, mais recentemente, as fibras e guias ópticos e



os dispositivos optoeletrônicos.

## 1.4 Relevância do método

No estudo de dispositivos eletromagnéticos em geral, nos regimes estático, quase-estático ou dinâmico de regime permanente, o MEF tem aparecido com muita ênfase, principalmente a partir da década de 80 e, desde então, tem se firmado como uma alternativa de análise extremamente atraente, principalmente para problemas de grande complexidade, para os quais não é possível obter soluções analíticas.

Os recentes avanços verificados no campo da óptica de ondas guiadas, tais como fibras ópticas e óptica integrada, têm incluído o estudo de guias de onda de formas arbitrárias que, em muitos casos são também arbitrariamente não-homogêneos, anisotrópicos, dissipativos e/ou não-lineares. Na maior parte dos casos não é possível obter soluções analíticas. Desta forma, é necessário lançar mão de técnicas computacionais de modelização e simulação, as quais são essenciais para o projeto, otimização e desenvolvimento bem sucedidos destes dispositivos. Para este propósito, diversas técnicas numéricas foram desenvolvidas. Em particular, o MEF é uma ferramenta poderosa e eficiente para os problemas mais gerais. Seu uso em pesquisas e na indústria é extenso, podendo-se mesmo afirmar que muitos problemas de análise de guias de onda ópticos não teriam sido resolvidos sem a sua utilização.

O MEF possibilita resolver problemas de campos eletromagnéticos complexos e de grande porte, postos através de estruturas de dados simples e gerais. O método, em consequência, é altamente propício à automação e, a despeito de sua generalidade, os conceitos que o suportam são simples e matematicamente elegantes.

A primeira aplicação do MEF à engenharia elétrica foi feita por Winslow[8], numa época em que a maioria dos cientistas usava o método das diferenças finitas. Ao projetar lentes magnéticas, Winslow usou uma decomposição do domínio de solução em subregiões triangulares e empregou todos os conceitos que estão hoje associados com a técnica dos elementos finitos [10], [11], [12]. Assim como Zienkiewicz [13] popularizou o MEF na engenharia civil, foi Silvester [14] que, juntamente com seus colegas,

desenvolveu o método na engenharia elétrica, alçando-o a um ponto de destaque junto à comunidade eletromagnética. Silvester e seus colaboradores fizeram vastas aplicações do método ao estudo de guias de ondas [15], [16]; máquinas elétricas [2]; modelagem magnetotelúrica [17]; antenas [18] e problemas axissimétricos [19], [20]. Ele introduziu, ainda, os elementos triangulares de ordem superior e o conceito de matrizes universais [2] e, graças ao seu empenho, na metade da década de 70 o MEF era reconhecido como um dos melhores métodos de solução de problemas de campos eletromagnéticos de grande porte. Curiosamente, o desenvolvimento na área de dispositivos eletrônicos não acompanhou o que se dava no magnetismo [21], [22]. Algumas outras áreas de aplicação do MEF incluem problemas de *eletrotermia* [23] e *hipertermia* [24], entre outros.

## 1.5 Objeto de estudo

No elenco dos métodos numéricos voltados para a simulação de dispositivos eletromagnéticos em geral, o MEF oferece a vantagem de poder tratar, com relativa facilidade, de problemas com geometria arbitrária e materiais não-homogêneos e/ou anisotrópicos, sendo possível aumentar sistematicamente a precisão da solução, quando necessário. Além disto, o método pode ser desenvolvido, não apenas através do cálculo variacional (extremização de um funcional), como pelo método de Galerkin (resíduos ponderados). Esta última vertente possibilita aplicá-lo a problemas onde um princípio variacional não existe ou não pode ser identificado. Estas características nortearam a adoção do método dos elementos finitos, neste trabalho, para analisar campos eletromagnéticos estáticos, quase-estáticos ou em regime harmônico estacionário, categorias estas em que se enquadra a maior parte dos problemas da Engenharia Elétrica.

Assim, o Capítulo 2 discorre sobre a análise numérica de *problemas de resposta elípticos* do Eletromagnetismo, envolvendo aspectos importantes, tais como a *formulação variacional* e as correspondentes condições de *existência e unicidade* de solução, além de *estimativas de erro* e *taxas de convergência a priori*, decorrentes de aproximações daqueles problemas pelo MEF. Esta análise é, então, aplicada a dois problemas

acadêmicos simples (sendo um escalar e outro vetorial) com soluções analíticas conhecidas, os quais ressaltam as características de estabilidade numérica para formulações de elementos finitos, de campos estáticos ou quase-estáticos. Além disto, ela encerra conceitos e elementos que podem ser facilmente transpostos para operadores elípticos mais elaborados, tais como os encontrados na equação vetorial de onda, assunto do Capítulo 3.

Para o problema de resposta vetorial, dado pelas equações  $\nabla \times \tilde{\nu}_r \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , em  $\Omega$ , com condições de contorno  $\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$ , sobre  $\partial\Omega$ , são apresentadas algumas formulações usuais de elementos finitos *mistos*, envolvendo aproximações de dois campos: o das variáveis primitivas e o dos multiplicadores de Lagrange. Como alternativa, apresenta-se uma formulação variacional clássica de Galerkin, em um único campo, para o mesmo problema de resposta. É feita uma análise numérica desta formulação variacional, demonstrando-se a existência e unicidade da solução aproximada e fazendo-se uma estimativa *a priori* do erro e da taxa de convergência da aproximação. Destaca-se, nesta análise, uma discussão sobre a estabilidade numérica do MEF, a qual garante taxas de convergência ótimas previsíveis para problemas com domínios regulares, tanto maiores quanto mais refinadas forem as malhas de elementos finitos, ou quanto maior for o grau dos polinômios de interpolação. Os resultados teóricos são confirmados por um experimento numérico conduzido para um problema cuja solução analítica é conhecida. Mais do que isto, ao contrário de alguns trabalhos recentes [25], [26], demonstra-se não ser necessária uma formulação mista para este tipo de problema, já que o multiplicador de Lagrange é, no caso, identicamente nulo. Estes resultados constituem uma importante contribuição e servirão de subsídio para o desenvolvimento de uma **formulação mista**, objeto do capítulo seguinte, para combater modos espúrios em problemas de autovalor, principalmente quando se usam elementos muito distorcidos.

No Capítulo 3, apresenta-se uma análise numérica correspondente a formulações variacionais, a um único campo e mista, do problema vetorial de autovalor, dado pela equação  $\nabla \times \hat{\epsilon}_r^{-1} \nabla \times \mathbf{H} = k_0^2 \mathbf{H}$ , para meios dielétricos não-homogêneos e/ou anisotrópicos e condições de contorno essenciais dos tipos  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  e/ou  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ ,

sobre  $\partial\Omega$ .

Na análise de guias de onda axialmente uniformes e transversalmente homogêneos e isotrópicos, onde os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  podem ser descritos em termos dos modos TE e TM, a formulação variacional, que serve de base para se aplicar o MEF, é *escalar*. Ela é, geralmente, expressa em termos das componentes longitudinais  $H_z$  ou  $E_z$ , respectivamente, associadas com aqueles modos. Entretanto, quando o guia apresenta anisotropia e/ou não-homogeneidade transversal, só é possível representar os campos eletromagnéticos da estrutura, através de uma combinação linear de modos TE e TM, também conhecida como *modos híbridos* [27]. Neste caso, há que se usar uma *formulação variacional vetorial*, associada ao MEF. Em contrapartida, porém, surge uma das grandes dificuldades, quando as formulações variacionais escalares são meramente estendidas às formulações vetoriais: o aparecimento de soluções não-físicas, ou *modos espúrios*, cuja evidência é relatada desde as primeiras soluções de modelos vetoriais [28].

Nas aplicações do MEF a guias de onda limitados, metálicos ou dielétricos, transversalmente não-homogêneos e/ou anisotrópicos, a formulação variacional vetorial mais adequada é expressa em termos das três componentes do vetor campo magnético  $\mathbf{H}$ . Os modos espúrios constituem, então, um subconjunto das soluções do problema discretizado que violam a restrição de divergência nula do campo magnético. Tal restrição, obviamente, só se aplica aos materiais dielétricos não-magnéticos. O espaço de aproximações gerado pela forma variacional discretizada, não corresponde ao espaço das soluções da equação de onda original, resultando, daí, pares de autovalores/autovetores não físicos.

Ao longo de mais de duas décadas, diversos autores têm procurado explicar as causas deste fenômeno, tentando encontrar formas eficazes e eficientes de eliminar os modos indesejáveis. A abordagem inicial nesta direção consistia na identificação *a posteriori* das soluções espúrias, seguida de sua remoção do espectro. O procedimento numérico, para tanto, consiste em calcular-se uma integral do divergente da solução (pós-processamento) sobre a seção reta do guia, cujo valor, para qualquer modo espúrio, é sempre muito superior ao valor (nulo, para uma solução exata) correspondente a

um modo físico. Alternativamente, uma observação das configurações de campo sobre a seção reta do guia (novamente, um pós-processamento), identificaria os modos espúrios como aqueles autovetores que apresentassem fluxo líquido através das paredes (condutores elétricos ou magnéticos perfeitos) do guia. Entretanto, as dificuldades de automatização e os custos computacionais destes procedimentos logo levaram à investigação de métodos capazes de identificar e eliminar, *a priori*, os autopares espúrios. Os diversos procedimentos neste sentido, podem ser classificados em quatro categorias distintas, a saber:

- **Modificação do funcional:** consiste em adicionar-se à forma variacional básica, cuja equação de Euler-Lagrange [1], [29] corresponde à equação vetorial de onda, um termo que incorpora a condição de divergência nula de  $\mathbf{H}$ ;
- **Uso de outras formulações variacionais:** compreende o emprego de formas variacionais que incorporam diretamente a condição de divergência nula;
- **Uso de elementos não-lagrangeanos:** consiste em manter a formulação variacional básica e modificar a natureza das funções de base, a fim de garantir que as soluções geradas tenham divergência nula;
- **Método da penalidade com integração reduzida seletiva (RIP):** utilizado pela primeira vez em problemas eletromagnéticos [30], [31], [32], este método permite prefixar-se um valor arbitrariamente elevado para o fator de penalidade, garantindo a eliminação dos modos espúrios do intervalo espectral de interesse e, ao mesmo tempo, preservando a esparsidade das matrizes e a precisão dos modos físicos;
- **Método da penalidade com integração reduzida seletiva transversal (STRIP):** visando estendê-lo a situações geométricas mais gerais, foi introduzida uma modificação no método RIP, que consiste em usar integração reduzida apenas nas componentes transversais do campo magnético, conservando, entretanto, os elementos lagrangeanos clássicos. Desta forma, o método STRIP possibilita eliminar os modos espúrios, mantendo a precisão dos modos físicos. Entretanto,

a precisão dos autovetores fica comprometida, devido ao *desacoplamento* entre as componentes transversais e longitudinal do campo magnético, proveniente do processo de integração reduzida seletiva transversal. O método STRIP foi aplicado ao caso do guia com dupla reentrância (double ridge waveguide), tendo-se obtido resultados mais precisos do que os divulgados por Bermúdez e Pedreira [33], que usaram elementos mistos, isto é, elementos de aresta para as componentes transversais e lagrangeanos para a componente longitudinal. O método STRIP se constitui, assim, em uma crítica ao método dos elementos finitos mistos adotado por Bermúdez e Pedreira e muitos outros autores: é possível obter-se autovalores mais precisos, muito embora usando-se uma formulação variacional matematicamente inconsistente. É necessário, portanto, conduzir uma análise numérica deste problema e avaliar suas implicações, o que será objeto de futuras investigações, em continuação a esta tese.

- **Formulação mista:** consiste em procurar aproximações para dois campos independentes: o das variáveis primárias e o dos multiplicadores de Lagrange [1]. Há dois tipos principais de métodos mistos: o baseado na formulação clássica de Galerkin e o método misto de Petrov-Galerkin, introduzido em [34], que possibilita recuperar a estabilidade e a convergência de diversas combinações de interpolação das variáveis primárias e dos multiplicadores de Lagrange, originalmente instáveis com a formulação clássica de Galerkin. Esta última abordagem é adotada na formulação do problema vetorial de autovalor e constitui, por assim dizer, a contribuição central da tese. Uma análise comparativa entre este método e o método RIP descrito acima, constata um comportamento absolutamente idêntico para malhas retangulares estruturadas, isto é, elementos retangulares ou triângulos retângulos. O método misto apresenta uma estabilidade numérica idêntica à do método RIP, quando são usadas malhas com elementos moderadamente distorcidos, produzidas pelo programa gerador de malhas disponível.

Para demonstrar a versatilidade dos métodos de elementos finitos desenvolvidos nesta tese, o Capítulo 4 apresenta resultados numéricos de algumas simulações de problemas típicos de autovalor, em duas dimensões, tais como o guia retangular vazio

retangular blindado, o guia canal e o guia costela. Em particular, a simulação de um guia retangular vazio pelos métodos RIP e RMM, demonstrou uma boa estabilidade numérica, quando o domínio de solução foi discretizado por elementos quadrilaterais distorcidos. Para malhas estruturadas, os resultados obtidos pelos dois métodos foram absolutamente idênticos, o mesmo se verificando para malhas com distorção moderada.

Os resultados obtidos confirmam as estimativas de erro e taxas de convergência previstas *a priori*, como também a ausência de modos espúrios no espectro de interesse. Observa-se uma boa concordância com resultados divulgados na literatura, à exceção dos guias dielétricos dos tipos canal e costela, cuja simulação requer cuidados especiais para separar os efeitos dos modos do guia dielétrico (estrutura aberta) e os da fronteira virtual, utilizada para simular a condição de radiação [35], [9].

Finalmente, o Capítulo 5 apresenta conclusões acerca dos resultados desta tese e sugere tópicos para futuras investigações.

## Capítulo 2

# Análise Numérica de Campos Eletromagnéticos Estacionários

### 2.1 Generalidades

Muitos problemas físicos podem ser matematicamente formulados em termos de equações diferenciais, equações integrais ou equações variacionais [36]. Antes do advento dos computadores, a formulação variacional não oferecia muita praticidade, porque sua aplicação poderia envolver, eventualmente, a solução da equação diferencial associada, propriamente dita. Porém, em anos recentes, ela tem recebido muita atenção na matemática, física e ciências aplicadas, devido a três razões principais. Em primeiro lugar, dispõe-se, agora, de plataformas capazes de resolver sistemas de grande porte resultantes da aplicação de métodos diretos, tais como o de Ritz e o dos elementos finitos [36],[37]. Em segundo, a formulação variacional propriamente dita, encerra sempre uma interpretação física, normalmente relacionada com a energia do sistema. Por último, ela pode ser usada, não apenas para calcular o campo, mas também para estabelecer uma fórmula estacionária de uma grandeza tal como capacitância, impedância ou um autovalor do sistema eletromagnético em estudo.

Na física, tanto a formulação diferencial ( leis de Newton ) quanto a variacional ( princípio da mínima ação ) têm sido usadas extensivamente no estudo de sistemas



mecânicos. Porém, somente a partir do final da década de 50 é que pesquisadores da área de eletromagnetismo têm-se voltado para formulações variacionais, tendo-as aplicado intensivamente a problemas de resposta e/ou de autovalores [38], [39], [9].

As técnicas variacionais podem ser aplicadas a problemas de computação de campos elétricos ou magnéticos, estáticos ou quase-estáticos; de campos eletrodinâmicos em problemas de propagação, espalhamento e radiação, bem como para a determinação do espectro modal em problemas de guias de onda, cavidades ressonantes e fibras e guias ópticos[9].

O objetivo principal deste capítulo é estender o uso de técnicas numéricas variacionais, já consagradas na solução de problemas de outros ramos da física e da engenharia, à solução de problemas de campos estáticos ou quase-estáticos.

## 2.2 Formulação Clássica Abstrata

O objetivo desta Seção é apresentar um modelo abstrato de um problema de contorno elíptico estacionário, sobre o qual será definida uma **forma variacional abstrata**. Nas Seções 2.6 e 2.7 serão aplicados os conceitos e resultados aqui obtidos a dois problemas de resposta típicos do eletromagnetismo, envolvendo, respectivamente, um **potencial escalar** e um **potencial vetorial**.

O modelo a seguir representa a solução clássica ou forte de um problema genérico, sendo posto pelo seguinte:

**Problema S:**

*Dada  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ , encontrar  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ , tal que*

$$Au = f \text{ em } \Omega \subset \mathbf{R}^N, \quad (2.1)$$

*sujeita às condições de contorno*

$$Bu = g \text{ sobre } \partial\Omega, \quad (2.2)$$

onde  $A$  é um operador diferencial linear, positivo-definido e auto-adjunto, que mapeia um domínio  $\Omega$ , denso em um espaço de Hilbert  $H$ , em  $H$ , e  $f \in L^2(\Omega)$ . O operador  $B$  é um operador diferencial, de ordem menor que a de  $A$ , definido sobre a fronteira  $\partial\Omega$ .

**Observação 1** Se o problema em questão for vetorial, devem-se introduzir as necessárias adaptações no enunciado acima, tanto no que se refere à dimensionalidade dos espaços, quanto à natureza dos operadores.

O objetivo, neste ponto, é desenvolver formulações alternativas para obter soluções aproximadas do **Problema S**, as quais serão aplicáveis a situações muito mais complexas, onde não é possível obter soluções exatas.

Alguns métodos alternativos de aproximação são elaborados diretamente sobre a formulação forte (**S**) do problema, o exemplo mais notável sendo o método das diferenças finitas [40]. Entretanto, como optou-se por utilizar o método dos elementos finitos, adotou-se uma formulação especial, isto é, uma **formulação variacional**, que será objeto da Seção seguinte.

## 2.3 Formulação Variacional ou Fraca

A formulação variacional equivalente ao problema **S** (2.1)-(2.2) é dada pelo:

**Problema W:**

Achar  $u \in U$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in U, \quad (2.3)$$

onde

$$a(u, v) = (Au, v)_U \quad (2.4)$$

e

$$L(v) = (f, v)_U, \quad (2.5)$$

sendo  $(\cdot, \cdot)_U$  um produto interno (P.I.) definido sobre um espaço de Hilbert  $U(\Omega)$ .

### 2.3.1 Existência e Unicidade para o Problema W

Nesta Seção, será abordada a existência e unicidade das soluções fracas de problemas do *continuum*, descritos pelas equações (2.3)-(2.5). Será enunciado o conhecido Teorema de Lax-Milgram, que fornece as condições suficientes para existência e unicidade de soluções de problemas com formas bilineares reais, simétricas e positivo-definidas. O mesmo teorema pode também ser usado para problemas definidos sobre espaços de dimensão finita, sendo, portanto, útil na teoria das aproximações.

Se o problema **W** satisfizer às seguintes condições:

- $U$  é um espaço de Hilbert com P.I.  $(\cdot, \cdot)$  e **norma induzida**  $\|\cdot\|_U = [(\cdot, \cdot)]^{\frac{1}{2}}$ ;
- $a(u, v) : U \times U \rightarrow \mathbf{R}$  é **contínua**, isto é,  $\exists M > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_U \|v\|_U, \quad \forall u, v \in U;$$

- $a(u, v)$  é  **$U$ -elíptica** ou **coerciva**, isto é,  $\exists \alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in U;$$

- $L : U \rightarrow \mathbf{R}$  é um funcional contínuo em  $U$ ,

então, o seguinte teorema (central nas formulações fracas) se aplica:

#### **Teorema 1 Teorema de Lax-Milgram**

Sob as hipóteses acima, a respeito de  $U$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  e  $L(\cdot)$ , o problema  $W$  tem uma única solução.

Para uma demonstração em termos abstratos, vide [41].

**Observação 2** Se  $a(u, v) = a(v, u)$ , isto é, se  $a(\cdot, \cdot)$  for **simétrica**, então tem-se o seguinte **problema de minimização**, equivalente ao problema  $W$ :

**Problema II:** (Princípio variacional)

Achar  $u \in U$  tal que

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in U, \quad (2.6)$$

onde

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - L(v) \quad (2.7)$$

Isto posto, apresentar-se-á uma breve introdução ao método dos elementos finitos aplicado a problemas elípticos lineares de segunda ordem, em regime estático.

Serão discutidos os aspectos relativos à construção de aproximações conformes (ou internas), baseadas na formulação clássica de Galerkin, ou na formulação variacional de Ritz (quando a forma bilinear for simétrica). Chamar-se-á atenção para as características de estabilidade, convergência, melhor aproximação e estimativas *a priori* do erro e taxas de convergência.

## 2.4 Aproximando o Problema Variacional

A idéia básica dos métodos variacionais consiste em resolver o problema, aproximadamente, em um espaço de dimensão finita  $U_h$ , onde  $h$  é um parâmetro característico de uma família  $\{U_h\}$  de subespaços aproximados (na prática, os  $U_h$  têm dimensão finita  $N_h$  e  $h$  varia ao longo de uma seqüência de aproximações sucessivas, a qual define um

processo de **refinamento**; isto é,  $h \rightarrow 0$  quando  $N_h \rightarrow \infty$ ). Em outras palavras, o **Problema W** é aproximado pelo:

**Problema  $W_h$ :**

*Encontrar  $u_h \in U_h$  tal que*

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in U_h \subset H_0^1(\Omega) \quad (2.8)$$

*que corresponde ao conhecido método de Galerkin [41].*

Para diferentes escolhas do subespaço aproximado  $U_h$ , tem-se diferentes métodos [1]. No método dos elementos finitos (MEF),  $U_h$  é construído de uma maneira especial, envolvendo uma discretização do domínio  $\Omega$  em subdomínios  $\Omega^e$ , conhecidos como **elementos finitos**, sendo as funções  $v_h \in U_h$  geradas a partir de **interpolantes** locais, em geral polinômios, definidos no interior de cada elemento. Diz-se que a aproximação de elementos finitos  $u_h$  é conforme se  $U_h \subset U$  (isto é, se  $v_h \in U_h$ , então  $v_h \in U$ ), sendo este o tipo de método de elementos finitos que será usado, doravante, neste trabalho.

Do ponto de vista matemático, duas questões fundamentais se colocam, quais sejam:

1. Sob que circunstâncias a solução aproximada  $u_h \in U_h$  do **Problema  $W_h$**  converge para a solução exata  $u \in U$  do **Problema W** ?
2. Como estimar o erro  $u - u_h$ , *a priori* ?

A resposta à primeira pergunta é muito simples: depende da escolha do espaço  $U_h$  que deve, no limite, quando  $h \rightarrow 0$ , tender para o espaço  $U$ . Quanto à segunda pergunta, estimar o erro  $u - u_h$  na norma  $\|\cdot\|_U$ , ou nas normas dos espaços de Sobolev [41],[42], é uma questão mais complexa que, em geral, envolve considerações sobre **interpolação, aproximação e convergência**, que serão discutidas a seguir.

### 2.4.1 Interpolação

Será considerado o caso dos espaços de elementos finitos contidos em  $H^1(\Omega)$  e, sem perda de generalidade, restringir-se-á ao caso bidimensional, admitindo-se que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

é um domínio poligonal, discretizado em  $N_e$  elementos, como mostrado na Fig. 2.1, de modo que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}^e, \text{ com } \Omega^e \cap \Omega^f = \emptyset, \forall e \neq f, \quad (2.9)$$

onde  $\Omega^e$  denota o interior de um elemento genérico e  $\bar{\Omega}^e$  o seu **fecho** [42].

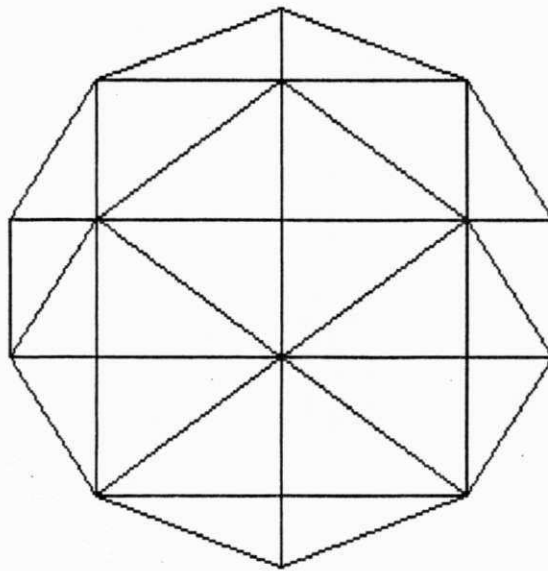


Figura 2.1: Domínio poligonal com  $N_e$  elementos.

Define-se um **parâmetro de malha**, dado por  $h = \max(h_e)$ ,  $e = 1, 2, \dots, N_e$ , onde  $h_e$  é o **diâmetro** (maior dimensão) do elemento  $\Omega^e$ .

Seja  $(S_h^k(\Omega) \cap C^0(\Omega)) \subset H^1(\Omega)$  um espaço de elementos finitos de grau  $k$  em cada variável espacial, para elementos quadriláteros, e em ambas as variáveis, para elementos triangulares, ou seja:

$$S_h^k(\Omega) = \{v_h \in H^1(\Omega) \mid v_h^e \in P_{k,l}(\Omega^e)\} \quad (2.10)$$

para elementos quadrilaterais, onde  $v_h^e$  representa a restrição de  $v_h$  ao elemento  $\Omega^e$  e  $P_{k,l}(\Omega^e)$  representa o conjunto dos polinômios definidos em  $\Omega^e$ , com graus menores ou iguais a  $k$  e  $l$ , respectivamente, nas variáveis  $x_1$  e  $x_2$ ; por outro lado, define-se

$$S_h^k(\Omega) = \{v_h \in H^1(\Omega) \mid v_h^e \in P_k(\Omega^e)\} \quad (2.11)$$

para elementos triangulares, onde, agora,  $P_k(\Omega^e)$  é o conjunto dos polinômios definidos em  $\Omega^e$ , com graus menores ou iguais a  $k$  no produto  $x_1x_2$ .

A maneira natural de se construir os espaços  $S_h^k(\Omega)$  é utilizando os **polinômios de Lagrange** [43]. Desta forma,  $v_h \in S_h^k(\Omega)$  é interpolado no interior de um elemento genérico  $\Omega^e$ , através de uma combinação linear do tipo

$$v_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^E v_i^e \varphi_i^e(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

onde  $E$  é o número de graus de liberdade do elemento  $\Omega^e$ , igual ao produto do número de nós pelo número de graus de liberdade por nó do elemento;  $\varphi_i^e(\mathbf{x})$  é o polinômio de Lagrange, de grau  $k$ , associado ao nó  $i$  do elemento  $\Omega^e$ , tal que se verifica a seguinte propriedade

$$\varphi_i^e(x_j) = \delta_{ij} \quad (2.13)$$

O número de nós do elemento  $\Omega^e$  é determinado, univocamente, pelo grau do polinômio empregado na interpolação (2.12). No nível global,  $v_h$  é interpolado por

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^G v_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (2.14)$$

onde  $G$  representa o número total de graus de liberdade adotado na discretização de elementos finitos, sendo  $\varphi_i(\mathbf{x})$  a função de interpolação global associada ao nó  $i$ , construída a partir das interpolantes locais  $\varphi_i^e(\mathbf{x})$  que incidem naquele nó.

Para os espaços  $S_h^k(\Omega)$ , é válida a seguinte propriedade de interpolação, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Ciarlet [42].

**Teorema 2** Para toda função  $v \in W^{k+1,2}(\Omega) \equiv H^{k+1}(\Omega)$ , existe uma constante  $C$ , independente de  $h$ , e uma projeção  $\tilde{v}_h \in S_h^k$ , tais que

$$\|v - \tilde{v}_h\|_{r,2,\Omega} + h \|\nabla v - \nabla \tilde{v}_h\|_{r,2,\Omega} \leq Ch^{k+1-r} |v|_{k+1,2,\Omega} \text{ para } 0 \leq r \leq k+1, \quad (2.15)$$

onde  $|\cdot|_{m,2,\Omega}$  representa uma seminorma [42].

Sobre a construção de elementos finitos mais gerais, em domínios multidimensionais quaisquer, vejam-se as referências [42],[13] e [44].

### 2.4.2 Aproximação

A qualidade da solução de elementos finitos depende, ainda, do método de aproximação utilizado em conjunto com o método dos elementos finitos, bem como das constantes de continuidade ( $M$ ) e de elipticidade ( $\alpha$ ) da forma bilinear correspondente ao problema que está sendo analisado. Em geral, para problemas elípticos, pode-se estabelecer o seguinte tipo de estimativa [42] para a solução aproximada  $u_h$ :

$$\|u - u_h\|_U \leq C(M, \alpha) \|u - v_h\|_U, \forall v_h \in U_h \quad (2.16)$$

onde  $C(M, \alpha)$  é independente da solução  $u$  e do parâmetro de malha  $h$ .

### 2.4.3 Convergência

Observa-se de (2.16), que estimar o erro  $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$  se reduz a avaliar o ínfimo de  $\|u - v_h\|_{1,\Omega}$ , para todo  $v_h \in U_h$ . Pelo Teorema 2, esta estimativa depende da regularidade  $r$  da solução exata  $u$  do **Problema W**, bem como do grau  $k$  do polinômio adotado na construção do espaço de elementos finitos  $S_h^k$ . Se  $u \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , pode-se obter taxas ótimas de convergência, fazendo-se  $v_h$  igual à projeção  $\tilde{u}_h$  de  $u$  sobre  $U_h$  na equação (2.16), o que leva à conclusão de que [42]



$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}. \quad (2.17)$$

Através de um argumento de dualidade, conhecido como "Nitsche trick", demonstra-se a seguinte estimativa [42]

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}. \quad (2.18)$$

Por exemplo, para o problema (2.3), se  $f \in L^2(\Omega)$ , então  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , o que possibilita obter-se taxas de convergência **ótimas** para elementos **lineares** ( $k = 1$ ), ou seja,

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 |u|_{2,\Omega}; \quad (2.19)$$

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch |u|_{2,\Omega}. \quad (2.20)$$

Tem-se, portanto, convergência de segunda ordem para  $u_h$ , se se estimar o erro na norma de  $L^2(\Omega)$  e apenas de primeira ordem, se na norma de  $H^1(\Omega)$ .

Da mesma maneira, ter-se-ia para elementos **quadráticos** ( $k = 2$ ):

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^3 |u|_{3,\Omega}; \quad (2.21)$$

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^2 |u|_{3,\Omega}, \quad (2.22)$$

desde que a solução exata  $u$  tenha **regularidade** suficiente. O mínimo de regularidade que deve ser exigido para preservar as taxas ótimas de convergência, seria requerer que  $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , o que, de fato, se verifica quando  $f \in H^1(\Omega)$ .

## 2.5 O Método de Galerkin

Seja  $U_h \subset U$  um espaço de dimensão finita, com

$$\dim U_h = N_h. \quad (2.23)$$

Suponha-se que

$$B_h = \{\varphi_i\}_{i=1}^G, \quad (2.24)$$

é uma base para o subespaço  $U_h$ , onde  $G = N_h$  representa o número global de graus de liberdade da discretização. Então, um elemento genérico  $v_h \in U_h$  pode ser representado pela seguinte combinação linear,

$$v_h = \sum_{j=1}^G v_j \varphi_j, \quad (2.25)$$

onde os  $v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, G$ , são os **parâmetros nodais** ou **coordenadas generalizadas** do vetor  $v_h$ . Com relação a  $u_h$ , pode-se escrever igualmente que

$$u_h = \sum_{i=1}^G u_i \varphi_i. \quad (2.26)$$

Substituindo (2.25) e (2.26) em (2.8), obtém-se

$$\sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^G a(u_i \varphi_i, v_j \varphi_j) = \sum_{j=1}^G L(v_j \varphi_j), \forall v_j \in \mathbf{R}, \quad (2.27)$$

que equivale ao seguinte problema matricial:

**Problema  $W_m$ :**

*Encontrar o vetor  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^G$  que satisfaz o sistema de equações algébricas*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F}, \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{X} = \{u_j\}$  é o vetor de incógnitas nodais e

$$\mathbf{A}_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, G \quad (2.29)$$

e

$$\mathbf{F}_j = L(\varphi_j), j = 1, 2, \dots, G. \quad (2.30)$$

No método dos elementos finitos, a matriz  $\mathbf{A}$  e o vetor  $\mathbf{F}$  são calculados acumulando-se, adequadamente, as contribuições das matrizes elementares  $\mathbf{A}^e$  e  $\mathbf{F}^e$ , dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{A}_{ij}^e = a(\varphi_i^e, \varphi_j^e), i, j = 1, 2, \dots, E \quad (2.31)$$

e

$$\mathbf{F}_j^e = L(\varphi_j^e), j = 1, 2, \dots, E. \quad (2.32)$$

Introduzindo as definições de produto interno, pertinentes ao espaço de trabalho  $U$ , nas formas  $a(\cdot, \cdot)$  e  $L(\cdot)$  acima, serão obtidas integrais que são, em geral, computadas numericamente, usualmente através de quadraturas de Gauss-Legendre [37]. A montagem das matrizes e vetores locais nas correspondentes matrizes e vetores globais e a concomitante eliminação ou modificação dos graus de liberdade globais correspondentes a condições de contorno essenciais, são realizadas através de procedimentos padronizados, constituindo um problema bem resolvido em termos de programação [43],[13],[44].

### 2.5.1 Propriedades da Aproximação de Galerkin

#### Existência e Unicidade de Solução

É importante salientar que, devido ao fato de haver-se adotado aproximações de elementos finitos conformes, isto é,  $U_h \subset U$ , o problema discreto termina por herdar muitas das propriedades do problema do *continuum* correspondente. Portanto, se a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  do **Problema W** é **positivo-definida**, assim também será a matriz  $\mathbf{A}$  do problema discreto (2.28). Isto, evidentemente, assegura a existência e unicidade da solução, pela imediata aplicação do Teorema de Lax-Milgram ao **Problema W<sub>h</sub>**. Se, além de tudo, a forma bilinear  $a(u, v)$  for simétrica (ou hermiteana), a matriz  $\mathbf{A}$  também o será.

### Consistência

Como  $U_h \subset U$ , segue-se que a solução exata  $u$  do **Problema W** também satisfaz o **Problema  $W_h$**  e, por conseguinte, pode-se escrever que

$$a(u, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in U_h, \quad (2.33)$$

o que expressa a **consistência variacional** do método de Galerkin.

### Ortogonalidade do Erro

Subtraindo (2.8) de (2.33) obtém-se

$$a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in U_h,$$

ou, usando a bilinearidade de  $a(\cdot, \cdot)$ ,

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in U_h, \quad (2.34)$$

o que assegura que o vetor **erro**  $u - u_h$  é **ortogonal** ao subespaço de aproximação  $U_h$ , com respeito ao produto interno dado por  $a(\cdot, \cdot)$ . Isto, por sua vez, significa que a aproximação é, em um certo sentido, a **melhor possível** para um dado subespaço  $U_h$ . O teorema seguinte oferece condições suficientes para convergência e, como um primeiro resultado nesta direção, uma estimativa abstrata de erro básica [42]

**Teorema 3** *Existe uma constante  $C$ , independente do subespaço  $U_h$ , tal que*

$$\|u - u_h\| \leq C \|u - v_h\|, \forall v_h \in U_h. \quad (2.35)$$

**Prova 1** *Usando as mesmas constantes de continuidade e elipticidade  $M$  e  $\alpha$ , respectivamente, da seção 2.3.1, tem-se, para qualquer  $v_h \in U_h$ , que*

$$\alpha \|u - u_h\|_U^2 \leq a(u - u_h, u - u_h);$$

somando e subtraindo  $v_h$  ao segundo termo do segundo membro da desigualdade acima, obtém-se

$$\alpha \|u - u_h\|_U^2 \leq a(u - u_h, (u - v_h) + (v_h - u_h)),$$

que, devido à bilinearidade de  $a(\cdot, \cdot)$ , implica em

$$\alpha \|u - u_h\|_U^2 \leq a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h);$$

porém,  $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$ , devido à propriedade de ortogonalidade do erro (2.34) e, assim, resulta

$$0 < \alpha \|u - u_h\|_U^2 \leq a(u - u_h, u - v_h).$$

Usando, agora, a propriedade de continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$ , isto é,

$$|a(u - u_h, u - v_h)| \leq M \|u - u_h\|_U \|u - v_h\|_U,$$

pode-se escrever que

$$\alpha \|u - u_h\|_U^2 \leq M \|u - u_h\|_U \|u - v_h\|_U,$$

ou seja,

$$\|u - u_h\|_U \leq C \|u - v_h\|_U, \quad (2.36)$$

o que prova o teorema, com  $C = M/\alpha$ .

### Melhor Aproximação

**Proposição 4** Quando a forma bilinear é simétrica, então a aproximação de Galerkin  $u_h$  é a projeção da solução exata  $u$  no subespaço aproximado  $U_h$ , com respeito ao produto interno  $a(\cdot, \cdot)$ . Em outras palavras,  $u_h$  é a melhor aproximação possível para  $u$  em  $U_h$ , na norma da energia, isto é,

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - v_h\|_E, \forall v_h \in U_h. \quad (2.37)$$

**Prova 2** Para demonstrar (2.37), considere-se a identidade

$$a(u - v_h, u - v_h) = a(u - u_h + u_h - v_h, u - u_h + u_h - v_h),$$

que, devido à simetria de  $a(\cdot, \cdot)$ , é equivalente a

$$\begin{aligned} a(u - v_h, u - v_h) &= a(u - u_h, u - u_h) + 2a(u - u_h, u_h - v_h) \\ &\quad + a(u_h - v_h, u_h - v_h) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Considerando a ortogonalidade do erro (2.34), tem-se que

$$a(u - u_h, u_h - v_h) = 0. \quad (2.39)$$

Por outro lado, a  $U$ -elipticidade de  $a(\cdot, \cdot)$  permite escrever que

$$\alpha \|u_h - v_h\|_U^2 \leq a(u_h - v_h, u_h - v_h). \quad (2.40)$$

Substituindo (2.39) e (2.40) em (2.38), resulta em

$$a(u - v_h, u - v_h) \geq a(u - u_h, u - u_h) + \alpha \|u_h - v_h\|_U^2. \quad (2.41)$$

Desprezando-se, agora, a quantidade positiva  $\alpha \|u_h - v_h\|_U^2$ , no segundo membro de (2.41), obtém-se

$$a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - v_h, u - v_h), \quad (2.42)$$

o que demonstra (2.37), já que, por definição,  $\|v\|_E = [a(v, v)]^{1/2}$ . Usando, finalmente, a  $U$ -elipticidade e a continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$ , respectivamente, no primeiro e no segundo membros de (2.42) e extraíndo a raiz quadrada de ambos os membros, chega-se a

$$\|u - u_h\|_U \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - v_h\|_U \quad (2.43)$$

Por conseguinte, quando a forma bilinear é simétrica, pode-se obter uma melhor constante ( $\sqrt{M/\alpha}$ ) na estimativa do erro  $\|u - u_h\|_U$ , do que a obtida no caso geral ( $M/\alpha$ ), uma vez que  $M$  é sempre maior do que  $\alpha$ .

## 2.6 Aplicação: Potencial Escalar

A fim de ilustrar os conceitos teóricos discutidos nas seções anteriores, será examinada, nesta seção, a formulação variacional de problemas envolvendo operadores diferenciais parciais elípticos, lineares e de segunda ordem. Serão considerados, apenas, operadores escalares, isto é, a variável dependente será considerada uma grandeza escalar.

Não será demais reafirmar a importância de tais problemas em vários ramos da Física e da Engenharia, particularmente na solução de problemas eletromagnéticos estáticos ou quase-estáticos [45], [46].

### 2.6.1 O Problema de Neumann

Será examinada, agora, a formulação e a solução, via métodos variacionais, do **Problema de Neumann** para operadores elípticos lineares de segunda ordem. A aproximação de elementos finitos será discutida posteriormente, quando serão apresentados alguns resultados numéricos.

#### Formulação Clássica

Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbf{R}^N$  e seja  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^N$  um ponto genérico de  $\mathbf{R}^N$ . Denotando-se por  $\partial\Omega$  a fronteira de  $\Omega$ , suponha-se que  $\partial\Omega$  é suficientemente regular. O primeiro exemplo corresponde ao problema de Neumann:

**Problema N:**

Encontrar  $u$  tal que

$$-\nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) + a_0 u = \rho \text{ em } \Omega, \quad (2.44)$$

$$(\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n} = g_n \text{ sobre } \partial\Omega_n, \quad (2.45)$$

onde  $a_0$  e  $\rho$  são funções dadas, definidas em  $\Omega$  e  $g_n$  é definida sobre  $\partial\Omega_n$ , sendo  $\mathbf{n}$  a normal exterior unitária a  $\partial\Omega_n$ ; o produto escalar usual de  $\mathbf{R}^N$  é definido por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^N a_i b_i, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^N; \mathbf{a} = \{a_i\}_{i=1}^N, \mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^N \quad (2.46)$$

**Observação 3** Se  $\tilde{\epsilon} = \epsilon \mathbf{I}$ , isto é, se  $\tilde{\epsilon}_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$ , onde  $\epsilon$  é um escalar constante, então o Problema N se reduz ao Problema de Neumann clássico

$$-\nabla^2 u + \tilde{a}_0 u = \rho/\epsilon \text{ em } \Omega, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_n \text{ sobre } \partial\Omega_n, \quad (2.48)$$

onde  $\nabla^2$  é o conhecido operador Laplaciano,  $\tilde{a}_0 = a_0/\epsilon$  e  $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$  é a derivada normal de  $u$  sobre  $\Omega_n$ .

### Formulação Variacional

Seja  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ; multiplicando (2.44) por  $v$  e integrando em  $\Omega$ , obtém-se

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho v d\mathbf{x}. \quad (2.49)$$

Agora, considere-se uma função vetorial  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{x})$ , definida sobre  $\bar{\Omega}$  e tomando valores em  $\mathbf{R}^N$ , bem como a seguinte identidade vetorial

$$\nabla \cdot (v\mathbf{V}) = v\nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla v.$$



Integrando em  $\Omega$  e aplicando o Teorema da Divergência ao primeiro membro, obtém-se a Fórmula de Green

$$\int_{\partial\Omega_n} v \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v \nabla \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x}, \quad (2.50)$$

onde  $d\Gamma$  denota a medida superficial ao longo de  $\partial\Omega_n$ . Tomando  $\mathbf{V} = \tilde{\epsilon} \cdot \nabla u$  em (2.50), obtém-se

$$\int_{\partial\Omega_n} v (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v \nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) d\mathbf{x},$$

que, combinada com (2.49) e com (2.45), implica em

$$\int_{\Omega} (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_n} g_n v d\mathbf{x}; \quad (2.51)$$

a função  $v$  em (2.49) e (2.51) é usualmente chamada uma **função-teste**. Observe-se que (2.51) envolve apenas derivadas de primeira ordem da função incógnita  $u$ , o que não acontece com (2.44).

Reciprocamente, pode-se mostrar [42] que se (2.51) se verifica,  $\forall v \in V$ , onde

$$V = \{v \mid v \in C^1(\overline{\Omega}); v \text{ tem um suporte compacto em } \overline{\Omega}\}, \quad (2.52)$$

então  $u$  é, em algum sentido, a solução do **Problema N**.

Neste ponto, é necessário introduzir-se o espaço de Sobolev  $H^1(\Omega)$ , definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \mid v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}; \quad (2.53)$$

as derivadas em (2.53) são tomadas no sentido das **distribuições**, isto é,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mathbf{x}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (2.54)$$

onde

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in C^\infty(\Omega), \varphi \text{ tem suporte compacto em } \Omega\}. \quad (2.55)$$

Para maiores detalhes e propriedades adicionais dos espaços de Sobolev, veja-se, por exemplo, [47],[48].

Equipado com o produto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) \, d\mathbf{x} \quad (2.56)$$

e com a norma induzida pelo produto interno acima,

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = (v, v)_{H^1(\Omega)}^{1/2} = \left[ \int_{\Omega} (|v|^2 + |\nabla v|^2) \, d\mathbf{x} \right]^{1/2}, \quad (2.57)$$

o espaço  $H^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert [48].

Apresentam-se, a seguir, alguns resultados [47] que serão úteis em desenvolvimentos posteriores:

**Proposição 5** Suponha-se que  $\partial\Omega_n$  é suficientemente regular, com  $\Omega$  situado localmente de um mesmo lado de  $\partial\Omega_n$ . Tem-se, então, que

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H^1(\Omega),$$

onde

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{v \mid v \in C^\infty(\Omega), \text{vtem um suporte compacto em } \Omega\}.$$

Seja, então,  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ; introduz-se o **operador traço**  $\gamma_0$ , como o mapeamento linear definido por  $\gamma_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega_n)$ , ou seja, tal que

$$\gamma_0 v = v|_{\partial\Omega_n}; \quad (2.58)$$

então, a seguinte proposição pode ser provada[47]:

**Proposição 6** Existe uma constante  $C(\Omega)$  tal que

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \|\gamma_0 v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.59)$$

A proposição (2.59) significa que  $\gamma_0$  é contínua em  $H^1(\Omega)$ , isto é, dada uma seqüência  $(v_k)$  convergente para uma certa função  $v_0$  em  $H^1(\Omega)$ , então  $(\gamma_0 v_k)$  converge para  $\gamma_0 v_0$  em  $L^2(\Omega)$ .

**Corolário 7** Existe um operador linear contínuo  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega_n)$ , o operador traço, cuja restrição a  $\mathcal{D}(\Omega)$  coincide com  $\gamma_0$ ; usando ainda a notação  $\gamma_0$  para o operador traço, tem-se que

$$\|\gamma_0 v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.60)$$

isto é,  $\gamma_0$  é um operador linear contínuo em  $H_0^1(\Omega)$  ou em  $H^1(\Omega)$ , já que as normas destes espaços são equivalentes [1].

Retornando ao **Problema N** e a (2.51), suponha-se que as seguintes hipóteses se verificam a respeito de  $\tilde{\epsilon}$ ,  $a_0$ ,  $\rho$  e  $g_n$ :

$$\rho \in L^2(\Omega), g_n \in L^2(\partial\Omega_n), \quad (2.61)$$

$$a_0 \in L^\infty(\Omega), a_0(\mathbf{x}) \geq \alpha_0 > 0 \text{ q.s. em } \Omega, \quad (2.62)$$

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \forall 1 \leq i, j \leq N; \quad (2.63)$$

existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{x}) \cdot \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2, \text{ q.s. em } \Omega, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^N \in \mathbf{R}^N, \quad (2.64)$$

onde  $|\xi| = \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^2\right)^{1/2}$  é a norma (módulo) de  $\xi$  em  $\mathbf{R}^N$ .

Defina-se, agora,  $a(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$  e  $L(\cdot) : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ , respectivamente, por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v d\mathbf{x}, \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad (2.65)$$

e

$$L(v) = \int_{\Omega} \rho v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_n} g_n \gamma_0 v d\Gamma, \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.66)$$

Pode-se mostrar, sem dificuldade, que  $a(\cdot, \cdot)$  e  $L(\cdot)$  são, respectivamente, bilinear e linear em  $\Omega$ .

Com efeito, de (2.66), tem-se que

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \left| \int_{\Omega} \rho v d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\partial\Omega_n} g_n \gamma_0 v d\Gamma \right| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\rho|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} + \left( \int_{\partial\Omega_n} |g_n|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \left( \int_{\partial\Omega_n} |\gamma_0 v|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \end{aligned}$$

onde usou-se a desigualdade de Cauchy-Schwartz para integrais [1]. Como  $\rho$  e  $g_n$  são funções fixadas, respectivamente, em  $\Omega$  e sobre  $\partial\Omega_n$  e levando em conta a desigualdade (2.59) e o fato de que  $\|v\|_{H^1(\Omega)} \geq \|v\|_{L^2(\Omega)}$ , obtém-se

$$|L(v)| \leq \left( \|\rho\|_{L^2(\Omega)} + C(\Omega) \|g_n\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}, \forall v \in H^1(\Omega), \quad (2.67)$$

o que mostra que  $L(v)$  é contínua em  $H^1(\Omega)$ .

Defina-se, agora,

$$|\tilde{\epsilon}(\mathbf{x})|_{\mathbf{R}^N} = \sup_{\xi \in \mathbf{R}^N - \{0\}} \frac{|\tilde{\epsilon}(\mathbf{x}) \cdot \xi|}{|\xi|},$$

da relação (2.64), observa-se que a função  $\mathbf{x} \rightarrow |\tilde{\epsilon}(\mathbf{x})|$  é limitada, isto é, pertence a  $L^\infty(\Omega)$ . Denotando-se por  $\|\tilde{\epsilon}\|_{L^\infty(\Omega)}$  a norma- $L^\infty$  da função acima, tem-se, então, de (2.65) e da desigualdade de Cauchy-Schwartz, que

$$|a(u, v)| \leq \|\tilde{\epsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
& + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
& = \|\tilde{\epsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq M \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

onde  $M = \max(\|\tilde{\epsilon}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)})$ ; porém, como

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\left(\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\right)^2} \geq \|w\|_{L^2(\Omega)} \text{ ou } \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)},$$

segue-se que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (2.68)$$

A relação (2.68) implica na **continuidade** de  $a(\cdot, \cdot)$ .

Fazendo-se  $u = v$  em (2.65), obtém-se

$$a(v, v) = \int_{\Omega} (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla v) \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0 v^2 dx;$$

levando-se em consideração as relações (2.62) e (2.64), tem-se que

$$\begin{aligned}
a(v, v) & \geq \int_{\Omega} \alpha |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \alpha_0 v^2 dx \\
& \geq \min(\alpha, \alpha_0) \left( \|\nabla v\|^2 + \|v\|^2 \right) \\
& = \min(\alpha, \alpha_0) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \forall v \in H^1(\Omega),
\end{aligned} \quad (2.69)$$

o que implica que  $a(\cdot, \cdot)$  é  $H^1$ -elíptica ou  $H^1$ -coerciva.

Das propriedades acima verificadas com relação a  $H^1(\Omega)$ ,  $L(\cdot)$  e  $a(\cdot, \cdot)$ , pode-se aplicar o Teorema de Lax-Milgram da seção 2.3.1 e, assim, provar que:

**Problema NW:** O problema variacional linear:

Encontrar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in H^1(\Omega), \quad (2.70)$$

tem uma única solução.

**Observação 4** Suponha-se que  $\tilde{\epsilon}$  é simétrico (isto é,  $\tilde{\epsilon}_{ji}(\mathbf{x}) = \overline{\tilde{\epsilon}_{ij}(\mathbf{x})}$ ,  $\epsilon_{ii} \in \mathbf{R}$ , q.s. em  $\Omega$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq N$ ). Isto implica na simetria da forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ . Da observação 2 da Seção 2.3.1, segue-se que existe equivalência entre (2.51) e o seguinte problema de minimização:

**Problema III:** Encontrar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in H^1(\Omega), \quad (2.71)$$

onde

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla v) \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_0 v^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho v d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_n} g_n v d\Gamma. \quad (2.72)$$

O problema (2.71), (2.72) é um problema típico do cálculo variacional clássico.

Neste ponto, surge uma pergunta natural: a solução do **Problema NW** é também uma solução do **Problema N**?

Para discutir esta questão, considere-se primeiramente uma função-teste  $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ ; então, tem-se que

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou seja, tendo em conta que  $\gamma_0 v = 0$ ,  $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho v d\mathbf{x}, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (2.73)$$

isto é, no sentido das distribuições [1], tem-se a identidade

$$\langle \tilde{\epsilon} \cdot \nabla u, \nabla v \rangle + \langle a_0 u, v \rangle = \langle \rho, v \rangle, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (2.74)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota a **dualidade** [1] entre  $\mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Das propriedades da diferenciação distribucional em  $\mathcal{D}'(\Omega)$  [1], resulta a relação

$$\langle \tilde{\epsilon} \cdot \nabla u, \nabla v \rangle = - \langle \nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u), v \rangle, \quad (2.75)$$

que, substituída no primeiro termo do primeiro membro de (2.74), leva a

$$\langle -\nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) + a_0 u, v \rangle = \langle \rho, v \rangle, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

isto é, no sentido das distribuições, obtém-se

$$-\nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) + a_0 u = \rho, \quad (2.76)$$

que é a equação definida no **Problema N**. Uma prova rigorosa de que a solução  $u$  de (2.70) satisfaz a condição de contorno (2.45), está além do escopo deste trabalho [47]; por conseguinte, apresentar-se-á apenas uma **demonstração formal** deste fato. Substituindo (2.65) e (2.66) em (2.70), tem-se que

$$\int_{\Omega} (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_n} g_n v \, d\Gamma, \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}); \quad (2.77)$$

da fórmula de Green, segue-se que

$$\int_{\Omega} (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_n} (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) v \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma,$$

que substituída em (2.77), resulta em

$$\int_{\Omega} [-\nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) - \rho] v \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_n} [(\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n} - g_n] v \, d\Gamma = 0, \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega});$$

tendo em conta (2.76) e que  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  é uma função-teste arbitrária, segue-se que

$$(\tilde{\epsilon} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n} = g_n,$$

que é, precisamente, a condição de contorno em (2.45). Desta forma, a solução  $u$  do **Problema NW** é também uma solução do **Problema N**. De fato, tem-se mais do que isto, uma vez que pode ser provado que:

**Proposição 8** *Supondo que  $\rho$ ,  $g_n$ ,  $\tilde{\epsilon}$  e  $a_0$  satisfazem (2.61)-(2.64), então o **Problema N** tem uma solução única em  $H^1(\Omega)$ , a qual é também a única solução do **Problema NW**.*

*A proposição acima é muito importante, porque sugere o uso de (2.70) para resolver o **Problema N**, principalmente na obtenção de uma solução numérica.*

### 2.6.2 Problema de Teste Escalar

*Objetivando comprovar os resultados teóricos sobre convergência do MEF para problemas de potencial escalar, discutidos tomando-se como referência o Problema de Neumann, foi estudado um problema de contorno com solução analítica conhecida, descrito pelas seguintes equações:*

$$-\nabla^2 \varphi = \rho / \epsilon_0 \text{ em } \Omega = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$\varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

*onde a densidade de cargas é dada por  $\rho(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$ . A solução exata deste problema é dada pela função*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0} \sin \pi x \sin \pi y,$$

*como pode ser facilmente verificado.*

*O domínio de solução foi discretizado por uma malha de elementos finitos com elementos quadrilaterais bilineares (4 nós), isto é,  $k = 1$ . Como se pode observar da Fig. 2.2, a taxa de convergência da solução em função do número de elementos, é de aproximadamente 2 : 1, se o erro for estimado na norma- $L^2$  e de apenas 1 : 1, se o for na norma- $H^1$ , confirmando, desta forma, os resultados teóricos das estimativas de erro previstas, respectivamente, pelas relações (2.19) e (2.20).*



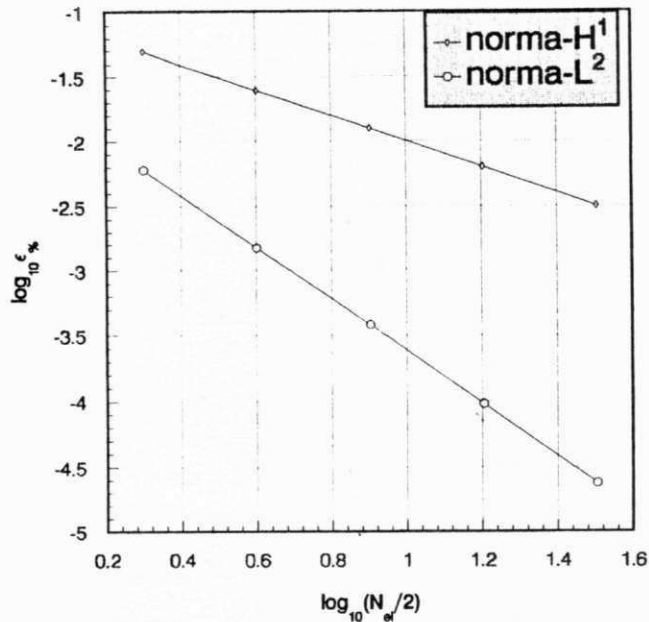


Figura 2.2: Taxas de convergência obtidas numericamente para o problema de Neumann.

## 2.7 Aplicação: Potencial Vetorial

À luz dos conceitos teóricos aqui discutidos, será examinada a formulação variacional, para posterior solução por elementos finitos, de um problema de resposta cuja equação operacional é do tipo elíptico, linear, vetorial e de segunda ordem.

O modelo se aplica à solução de problemas de contorno encontrados, por exemplo, na magnetostática, os quais são formulados em termos de uma função potencial vetorial  $\mathbf{A}$ , conhecida como **potencial vetorial magnético**. Este tipo de problema é de fundamental importância no projeto de dispositivos eletromagnéticos e eletromecânicos em geral, tais como máquinas elétricas, transformadores de potência, freios, mancais e embreagens magnéticos, contactores, atuadores e muitos outros. Além disto, é possível estender sua aplicação a outras formulações envolvendo outros tipos de potencial vetorial [35], tais como os potenciais de Hertz. A aproximação de elementos finitos

ao modelo será discutida posteriormente, quando serão apresentados alguns resultados numéricos.

### 2.7.1 Formulação Clássica

Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbf{R}^N$ , com fronteira suficientemente regular  $\partial\Omega$ . Denote-se por  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^N$  um ponto genérico de  $\mathbf{R}^N$  e por  $\mathbf{n}$  a normal unitária exterior a  $\partial\Omega$ . Seja ainda  $\tilde{\mu}(\mathbf{x})$  um operador linear de  $\mathbf{R}^N$  em  $\mathbf{R}^N$ , dependendo de  $\mathbf{x}$  em  $\Omega$ , representando o *tensor permeabilidade magnética* do meio que ocupa o domínio  $\Omega$ . Suponha-se, finalmente, que é dada uma *densidade vetorial de corrente elétrica de condução*  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \in [L^2(\Omega)]^N$ . Nestes termos, então, o problema clássico da magnetostática consiste em encontrar o campo magnético estático  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  em  $\Omega$ , satisfazendo as equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \text{ em } \Omega, \quad (2.78)$$

$$\nabla \cdot (\tilde{\mu} \cdot \mathbf{H}) = 0, \text{ em } \Omega, \quad (2.79)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\tilde{\mu} \cdot \mathbf{H}) = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_e, \quad (2.80)$$

e

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \text{ sobre } \Omega_m. \quad (2.81)$$

Existem diversos métodos de resolver o sistema de equações acima, dentre os quais o do potencial vetorial magnético  $\mathbf{A}$ , que será aqui examinado. Assim, em virtude da equação (2.79) e da natureza de  $\Omega$ , existe uma função potencial vetorial  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , tal que

$$\tilde{\mu} \cdot \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \text{ em } \Omega. \quad (2.82)$$

Substituindo (2.82) em (2.78), obtém-se uma equação diferencial parcial vetorial de segunda ordem, dada por

$$\nabla \times (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}, \text{ em } \Omega, \quad (2.83)$$

sujeita às condições de contorno

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \text{ sobre } \partial\Omega_e, \quad (2.84)$$

$$\mathbf{n} \times (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{0}, \text{ sobre } \partial\Omega_m; \quad (2.85)$$

e de interface

$$\mathbf{n}_{ij} \times [\tilde{\nu}_{ri} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_i) - \tilde{\nu}_{rj} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_j)] = \mathbf{0}, \text{ sobre } S_{ij}, \quad (2.86)$$

e

$$\mathbf{n}_{ij} \cdot [\tilde{\nu}_{ri} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_i) - \tilde{\nu}_{rj} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_j)] = 0, \text{ sobre } S_{ij}, \quad (2.87)$$

onde  $\partial\Omega = \partial\Omega_e \cup \partial\Omega_m$ , com  $\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_m = \emptyset$ , e  $S_{ij}$  representa a interface entre dois materiais com relutividades magnéticas relativas  $\tilde{\nu}_{ri}$  e  $\tilde{\nu}_{rj}$  ( $\tilde{\nu}_r = \tilde{\mu}_r^{-1}$ ). A normal unitária à interface é representada por  $\mathbf{n}_{ij}$ , sendo, por convenção, orientada do material  $i$  para o material  $j$ . Para garantir a unicidade do potencial vetorial  $\mathbf{A}$ , solução do sistema (2.83)-(2.87), é necessário impor o **calibre de Coulomb**  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  em todos os pontos de  $\Omega$  [35].

Objetivando simplificar a análise que se segue, supor-se-á, sem perda de generalidade, que  $\partial\Omega_m = \emptyset$ . Desta forma, o problema que se passa a analisar é dado pelo:

**Problema D:** Encontrar  $\mathbf{A} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

$$\nabla \times (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}, \text{ em } \Omega, \quad (2.88)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \text{ em } \Omega \quad (2.89)$$

$e$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \text{ sobre } \partial\Omega_e. \quad (2.90)$$

### 2.7.2 Formulações Fracas

O problema variacional discutido em relação ao problema de Neumann era do tipo não-constrangido, isto é, procurava-se o mínimo de um funcional  $J$  em todo um espaço  $H$  de funções admissíveis, sem quaisquer restrições impostas às funções-teste  $v$ . Uma classe mais difícil de problemas de minimização é aquela em que se demanda minimizar  $J$  sobre um subconjunto de  $H$ , cujas funções satisfazem **restrições**, tais como

$$Bu = g, \quad (2.91)$$

onde  $B$  é um operador linear de  $H$  em outro espaço de Hilbert  $Q$  e  $g$  representa dados especificados em  $Q$ . Por exemplo,

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad g = 1$$

é um exemplo de uma restrição que poderia ser imposta a funções-teste minimizadoras de funcionais definidos sobre espaços tais como  $H^1(\Omega)$ , onde  $B : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ .

O subconjunto  $K \subset H$ , consistindo de todos os elementos que satisfazem (2.91), é conhecido como o conjunto das restrições ou das funções admissíveis:

$$K = \{v \in H \mid Bv = g\} \quad (2.92)$$

O problema de encontrar um mínimo de  $J$  em um conjunto de restrições  $K$  é consideravelmente mais difícil do que o problema sem restrição acima aludido. De particular

importância é o fato de que os elementos de  $K$  são difíceis ou mesmo impossíveis de se aproximar.

O método dos multiplicadores de Lagrange [37] fornece uma alternativa poderosa, que possibilita procurar um minimizador em todo o espaço  $H$  e não apenas no conjunto de restrições  $K$  [49]. Os métodos de elementos finitos baseados em formulações a multiplicadores de Lagrange, de problemas mecânicos com restrições, são conhecidos como métodos **mistos** de elementos finitos. A peculiaridade destes métodos é que **duas** variáveis dependentes devem ser aproximadas em cada elemento: a solução  $\mathbf{u}$  (vetor deslocamento) e o multiplicador de Lagrange  $p$  (a pressão), representando uma restrição.

Assim, dada a semelhança do **Problema D** com os problemas mistos da Mecânica, é usual formulá-lo, em termos variacionais, através de uma análise de elementos finitos mistos, envolvendo aproximações de dois campos independentes: o das variáveis primitivas ( $\mathbf{A}$ ) e o dos multiplicadores de Lagrange ( $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ) [26]. Entretanto, mostrar-se-á que não há necessidade de adotar-se uma formulação mista para aquele problema, uma vez que o multiplicador de Lagrange é identicamente nulo.

A seguir, serão apresentadas algumas formulações fracas (ou variacionais) correspondentes ao **Problema D**, a começar pelas formulações mistas, culminando-se com uma formulação alternativa, a um único campo, proposta nesta tese.

### Formulações a dois Campos

Uma solução aproximada do problema de resposta reduzido é dada pela seguinte formulação variacional:

**Problema W:** Achar  $u \in K(\Omega)$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in K(\Omega), \quad (2.93)$$

onde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v})_{L^2} \quad (2.94)$$

e

$$L(\mathbf{v}) = (\mu_0 \mathbf{J}, \mathbf{v})_{L^2}; \quad (2.95)$$

com

$$K(\Omega) = \{\mathbf{v} \in U(\text{rot}; \Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\} \quad (2.96)$$

e

$$U(\text{rot}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^N \mid \nabla \times \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^N \right. \\ \left. (\nabla \times \mathbf{v}, \varphi) = (\mathbf{v}, \nabla \times \varphi), \forall \varphi \in [H^1(\Omega)]^N \right\}. \quad (2.97)$$

Esta formulação implica na construção de espaços de elementos finitos  $K_h \subset K$ , sendo difícil ou mesmo impossível aproximar os seus elementos, devido à restrição  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  incluída na definição de  $K$ . Um método típico de relaxar esta restrição, é a seguinte formulação mista, baseada no multiplicador de Lagrange [37], [49], [41], [1]:

**Problema M:** Encontrar o par  $\{u, \lambda\} \in U(\text{rot}; \Omega) \times L^2(\Omega)$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\lambda, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in U(\text{rot}; \Omega) \quad (2.98)$$

e

$$b(\mu, \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mu \in L^2(\Omega), \quad (2.99)$$

onde

$$b(\lambda, \mathbf{v}) = (\lambda, \nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \lambda \in L^2(\Omega), \quad \forall \mathbf{v} \in U(\text{rot}; \Omega), \quad (2.100)$$

sendo  $\lambda$  o multiplicador de Lagrange, associado à restrição  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  em  $\Omega$ .

Uma outra possibilidade de tratar a restrição  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , é através da formulação mista regularizada, a seguir:

**Problema  $M_\epsilon$ :** Achar o par  $\{\mathbf{u}, \lambda\} \in U(\text{rot}; \Omega) \times V$  tal que

$$a(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) + b(\lambda_\epsilon, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in U(\text{rot}; \Omega) \quad (2.101)$$

e

$$-\epsilon(\lambda_\epsilon, \mu) + b(\mu, \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mu \in V, \quad \forall \mathbf{u} \in U(\text{rot}; \Omega), \quad (2.102)$$

onde  $V \subset L^2(\Omega)$ .

Explicitando  $\lambda_\epsilon$  na equação (2.102), tem-se que

$$(\mu, -\epsilon\lambda) + b(\mu, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{u}; \quad (2.103)$$

substituindo (2.103) em (2.101), resulta na seguinte formulação, penalizada em todo o espaço  $U(\Omega)$ :

**Problema  $P_\epsilon$ :** Achar  $\mathbf{u}_\epsilon \in U(\text{rot}; \Omega)$  tal que

$$a(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) + \frac{1}{\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}_\epsilon, \nabla \cdot \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in U(\Omega), \quad (2.104)$$

onde

$$U(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^N \mid \nabla \times \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^N, \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (2.105)$$

### Formulação Fraca a um Único Campo

Como alternativa às formulações mistas usuais mencionadas na Seção anterior, apresenta-se a, seguir, uma formulação variacional clássica de Galerkin, **em um único campo**, para o **Problema D**.

Seja  $\mathbf{V} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N$  uma função-teste vetorial suave, definida sobre  $\Omega$ . Multiplicando (2.88) escalarmente por  $\mathbf{V}$  e integrando em  $\Omega$ , obtém-se

$$\int_{\Omega} [\nabla \times (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A})] \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x} = \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x}. \quad (2.106)$$

Suponham-se duas funções vetoriais  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  em  $[\mathcal{D}(\Omega)]^N$  e considere-se a seguinte identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{P} - (\nabla \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q}. \quad (2.107)$$

Integrando-se (2.107) e aplicando-se o Teorema da Divergência, resulta em

$$\oint_{\partial\Omega_e} (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{P} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{Q} \cdot (\nabla \times \mathbf{P}) d\mathbf{x}, \quad (2.108)$$

onde  $d\Gamma$  representa a medida ao longo da fronteira  $\partial\Omega_e$ . Fazendo-se, em (2.108), as escolhas  $\mathbf{P} = \mathbf{V}$  e  $\mathbf{Q} = \tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega_e} [\mathbf{V} \times (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A})] \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= \int_{\Omega} [\nabla \times (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A})] \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

de onde se pode escrever que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\nabla \times (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A})] \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x} &= \oint_{\partial\Omega_e} [\mathbf{V} \times (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A})] \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Substituindo-se (2.109) em (2.106), resulta em

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\nu}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) d\mathbf{x} &= \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x} \\ &\quad - \oint_{\partial\Omega_e} (\mathbf{n} \times \mathbf{V}) \cdot (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A}) d\Gamma \\ &= \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.110)$$



onde foi usada a identidade vetorial

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \{ \mathbf{V} \times [\tilde{\nu}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] \} &= \mathbf{V} \cdot \{ [\tilde{\nu}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] \times \mathbf{n} \} \\ &= (\mathbf{n} \times \mathbf{V}) \cdot [\tilde{\nu}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{A})], \end{aligned} \quad (2.111)$$

no integrando da integral sobre a fronteira e levou-se em conta que  $(\mathbf{n} \times \mathbf{V})|_{\partial\Omega_e} = \mathbf{0}$ .

Para que se possa aprofundar a análise, é necessário, neste ponto, introduzir um subespaço  $U(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , definido como

$$U(\Omega) = \left\{ \mathbf{V} \mid \mathbf{V} \in [L^2(\Omega)]^N, \nabla \times \mathbf{V} \in [L^2(\Omega)]^N, \nabla \cdot \mathbf{V} \in [L^2(\Omega)]; \right. \\ \left. \gamma_0(\mathbf{n} \times \mathbf{V})|_{\partial\Omega_e} = \mathbf{0} \right\}. \quad (2.112)$$

Equipado com o produto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{U(\Omega)} = \int_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})] dx \quad (2.113)$$

e com a correspondente norma [42]

$$|\mathbf{v}|_{U(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} (|\nabla \times \mathbf{v}|^2 + |\nabla \cdot \mathbf{v}|^2) dx \right]^{1/2}, \quad (2.114)$$

é óbvio que  $U(\Omega)$ , definido acima, é um espaço de Hilbert.

Retornando ao problema, dado pelas equações (2.88)-(2.90) ou, na forma variacional (2.106), serão supostas válidas as seguintes hipóteses:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \in [L^2(\Omega)]^N; \quad (2.115)$$

$\tilde{\nu}_{rij}(x) \in L^\infty(\Omega), \forall 1 \leq i, j \leq N$ ; existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\tilde{\nu}_r(\mathbf{x}) \cdot \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2 \text{ q.s. em } \Omega, \quad (2.116)$$

$$\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^N \in \mathbf{R}^N; \text{ com } |\xi| = \left( \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \right)^{1/2}. \quad (2.117)$$

Definem-se, então, uma forma bilinear e uma forma linear dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{U(\Omega)} &= \int_{\Omega} \tilde{\nu}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} &\in U(\Omega) \end{aligned} \quad (2.118)$$

e

$$L(\mathbf{v}) = \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \forall \mathbf{v} \in U(\Omega). \quad (2.119)$$

De (2.119), tem-se que

$$\begin{aligned} |L(\mathbf{v})| &= \mu_0 \left| \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right| \leq \mu_0 \int_{\Omega} |\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}| \, d\mathbf{x} \\ &= \mu_0 \|\mathbf{J}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Como  $\mathbf{J}$  é fixada e  $U(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , segue-se que

$$|L(\mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{v}\|_{U(\Omega)}, \forall \mathbf{v} \in U(\Omega), \quad (2.121)$$

onde  $C = \mu_0 \|\mathbf{J}\|_{L^2(\Omega)}$  é uma constante positiva. Desta forma, mostra-se que  $L(\cdot)$  é contínua em  $U(\Omega)$ .

Agora, define-se

$$|\tilde{\nu}_r(\mathbf{x})|_{\mathbf{R}^N} = \sup_{\xi \in \mathbf{R}^N - \{0\}} \frac{|\tilde{\nu}_r(\mathbf{x}) \cdot \xi|}{|\xi|}, \quad (2.122)$$

das relações (2.116) e (2.117), observa-se que a função  $\mathbf{x} \rightarrow |\tilde{\nu}_r(\mathbf{x})|$  é limitada, isto é, pertence a  $L^\infty(\Omega)$ . Denotando por  $\|\tilde{\nu}_r(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)}$  a norma- $L^\infty$  da função acima, depreende-se de (2.118) que

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\tilde{\nu}_r(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v})| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})| d\mathbf{x}. \quad (2.123)$$

Usando-se a desigualdade de Cauchy-Schwartz em cada uma das integrais acima, obtém-se

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\tilde{\nu}_r(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.124)$$

Tomando-se o máximo entre os coeficientes de cada termo do segundo membro da relação acima, isto é, definindo-se

$$M = \max(\|\tilde{\nu}_r(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)}, 1) > 0, \quad (2.125)$$

pode-se escrever que

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M \left\{ \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \right\};$$

somando-se ao segundo membro da relação acima, a quantidade positiva

$$M \left\{ \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \right\},$$

será reforçada a desigualdade. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq M \left\{ \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + M \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &= M \left\{ \left( \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M \|\mathbf{u}\|_{U(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{U(\Omega)}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U(\Omega), \quad (2.126)$$

o que demonstrá que  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua em  $U(\Omega)$ .

Fazendo-se, agora,  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  na equação (2.118), resulta

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \tilde{\nu}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}$$

Porém, de (2.116) e (2.117), para  $\xi = \nabla \times \mathbf{v} \in \mathbf{R}^N$ , tem-se que

$$\tilde{\nu}_r(x) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \geq \alpha |\nabla \times \mathbf{v}|^2, \text{ q.s. em } \Omega$$

de onde se obtém

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\nabla \cdot \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\geq m \left( \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\nabla \cdot \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} \right) \\ &= m \|\mathbf{v}\|_{U(\Omega)}^2, \forall \mathbf{v} \in U(\Omega), \end{aligned} \quad (2.127)$$

onde  $m = \min(\alpha, 1) > 0$ . Desta maneira, mostra-se que  $a(\cdot, \cdot)$  é  $U$ -elíptica.

Das propriedades acima verificadas com relação a  $U(\Omega)$ ,  $L(\cdot)$  e  $a(\cdot, \cdot)$ , pode-se aplicar o Teorema de Lax-Milgram, da Seção 2.3.1, concluindo-se que:

**Problema W:** O problema variacional linear:

Encontrar  $\mathbf{u} \in U(\Omega)$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in U(\Omega) \quad (2.128)$$

tem uma solução única.

**Observação 5** Suponha-se que  $\tilde{\nu}_r$  é simétrico (isto é,  $\tilde{\nu}_{rij}(x) = \overline{\tilde{\nu}_{rji}(x)}$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq N$ , q.s. em  $\Omega$ ); isto implica na simetria da forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ . Da Observação 2, da Seção 2.3.1, segue-se que existe equivalência entre (2.128) e o seguinte problema de minimização:

**Problema DII:** Encontrar  $\mathbf{u} \in U(\Omega)$ , tal que

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{J}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in U(\Omega), \quad (2.129)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{v}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{v}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ & - \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.130)$$

### 2.7.3 Aproximação do Problema

Como visto nas Seções 2.4 e 2.5, a idéia básica dos métodos variacionais consiste em aproximar-se o problema em um espaço de dimensão finita  $U_h$ , onde  $h$  é um parâmetro característico de uma família de subespaços aproximados  $\{U_h\}$  de  $U(\Omega)$ , que tende a zero quando a dimensão  $N_h$  de  $U_h$  tende a infinito. Em outras palavras, o **Problema W** é aproximado pelo:

**Problema  $W_h$ :** Encontrar  $\mathbf{u}_h \in U_h$  tal que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in U_h \subset U, \quad (2.131)$$

onde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = & \int_{\Omega_h} (\tilde{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{u}_h) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_h} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \\ \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in & U_h \end{aligned} \quad (2.132)$$

e

$$L(\mathbf{v}_h) = \mu_0 \int_{\Omega_h} \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \forall \mathbf{v}_h \in U_h, \quad (2.133)$$

onde  $U_h \subset U$  é dado por  $U_h = S_h^k \times S_h^k$ , para  $N = 2$ , ou por  $U_h = S_h^k \times S_h^k \times U_h^k$ , para  $N = 3$ .

A qualidade da solução depende, ainda, do método de aproximação empregado conjuntamente com o método dos elementos finitos, bem como das constantes de continuidade ( $M$ ) e de elipticidade ( $m$ ) da forma bilinear do problema em tela. Para o método que se está analisando, é possível estabelecer-se a seguinte estimativa, a priori, para a solução aproximada  $\mathbf{u}_h$ :

$$\|u - u_h\|_U \leq C \|u - v_h\|_U, \forall v_h \in U_h \quad (2.134)$$

#### 2.7.4 Problema de Teste Vetorial

Com o intuito de comprovar os resultados teóricos sobre convergência do MEF para problemas de potencial vetorial, foi estudado um problema de contorno com solução analítica conhecida, descrito pelas seguintes equações:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} \text{ em } \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad (2.135)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega, \quad (2.136)$$

onde a densidade de corrente elétrica é dada por

$$\mathbf{J}(x, y) = (-\sin \pi x \cos \pi y, \cos \pi x \sin \pi y) \quad (2.137)$$

A fim de facilitar a análise, foi suposto, sem perda de generalidade, que  $\mu_0 = 1$ .

A solução exata deste problema é dada pela função vetorial

$$\mathbf{A}(x, y) = \left( -\frac{1}{2\pi^2} \sin \pi x \cos \pi y, \frac{1}{2\pi^2} \cos \pi x \sin \pi y \right), \quad (2.138)$$

como pode ser facilmente verificado.

O domínio de solução foi discretizado por malhas de elementos finitos com elementos quadriláteros de 4 nós ( $k = 1$ ) ou 9 nós ( $k = 2$ ), com a finalidade de verificar as diferentes taxas de convergência obtidas em função do grau do polinômio de interpolação.

Na Fig. 2.3, correspondente a elementos de 9 nós e integração completa, observa-se uma **convergência ótima**, tendo-se obtido taxas próximas das estimadas pelas relações (2.20) e (2.21).

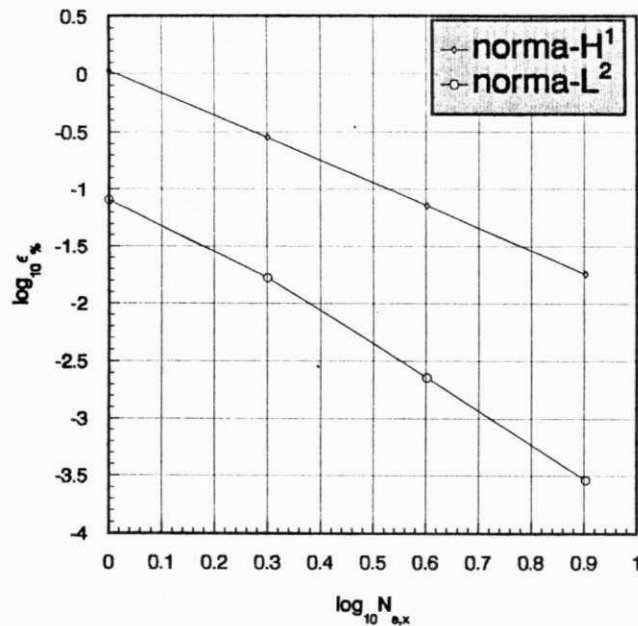


Figura 2.3: Elementos retangulares de 9 nós e integração completa: convergência ótima.

Na Fig. 2.4, correspondente a elementos de 9 nós e termo de penalidade com integração completa (9 pontos de integração), verifica-se que a solução aproximada converge, porém de maneira **não-ótima**, isto é, com taxas bastante diferentes daquelas correspondentes às interpolantes.

Usando-se elementos de 9 nós e termo de penalidade com integração reduzida (4

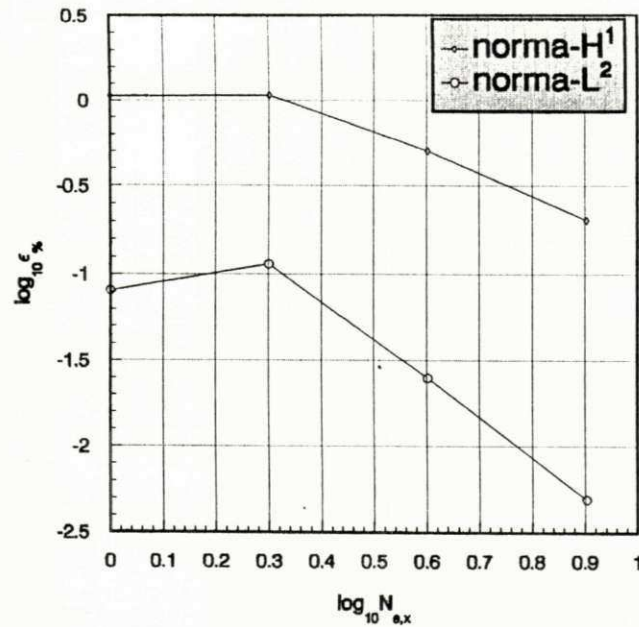


Figura 2.4: Elementos de 9 nós com penalidade (9 pontos de integração): convergência não ótima.

pontos de integração), é possível obter-se **convergência ótima**, como pode ser observado da Fig. 2.5.

A Fig. 2.6, correspondente a elementos de 4 nós e termo de penalidade (4 pontos de integração), ilustra uma **aproximação instável** para a solução. Este fenômeno, também conhecido como *locking*, constitui um transtorno do ponto de vista numérico, podendo ser evitado através de uma escolha criteriosa dos tipos de elementos e respectivas regras de quadratura [37],[49],[1].

Na Fig. 2.7, referente a elementos de 4 nós e termo de penalidade com integração reduzida (1 ponto de integração), observa-se uma **aproximação convergente**.

Finalmente, nas Figs. 2.8 e 2.9 apresentam-se as distribuições de potencial vetorial (componente  $A_x$ ) obtidas, respectivamente, pelo MEF e analiticamente. Nas Figs. 2.10 e 2.11 são apresentadas as distribuições da componente  $A_y$  calculadas, respectivamente, pelo MEF e analiticamente. Observa-se uma excelente concordância entre os resultados



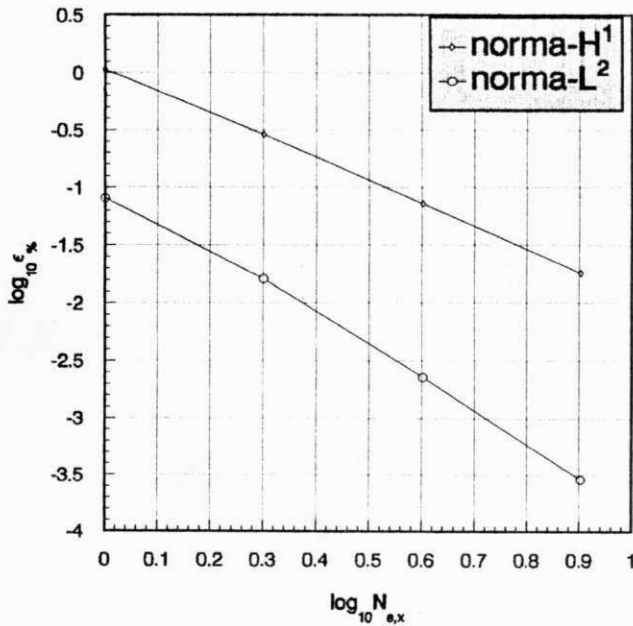


Figura 2.5: Elementos de 9 nós com penalidade (4 pontos de integração): convergência ótima.

teóricos e os obtidos pelo método dos elementos finitos.

Os resultados numéricos aqui apresentados, confirmam as previsões teóricas sobre estabilidade numérica e taxas de convergência a priori. Mais do que isto, contrariamente ao que se apresenta em alguns trabalhos recentes [25], [26], os experimentos numéricos demonstraram não haver necessidade de uma formulação mista para este tipo de problema, já que o multiplicador de Lagrange é, neste caso, identicamente nulo.

Estes resultados constituem uma importante contribuição para a análise de campos magnéticos estáticos ou quase-estáticos. Vale lembrar, por outro lado, que esta análise pode ser facilmente estendida a outros problemas eletromagnéticos de resposta, envolvendo o potencial vetorial magnético  $\mathbf{A}$ , seu dual  $\mathbf{F}$  [27], ou qualquer outro tipo de potencial vetorial. A este respeito, pode-se citar, por exemplo, os problemas de projeto de alimentadores de antenas, transições guias de onda/circuitos planos, descontinuidades em guias de onda e aplicadores de hipertermia, entre outros. Todos estes

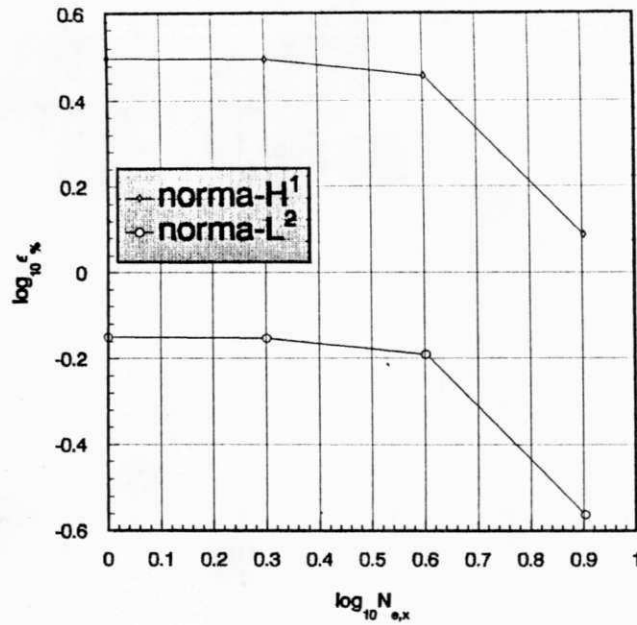


Figura 2.6: Elementos de 4 nós com penalidade (4 pontos de integração): aproximação instável (trancamento).

problemas podem ser formulados vetorialmente e, por conseguinte, podem ser tratados pelas técnicas aqui discutidas.

Embora não necessárias para o problema de resposta envolvendo o potencial vetorial magnético, as formulações a dois campos, aqui discutidas, subsidiarão o desenvolvimento de uma formulação mista, objeto do capítulo seguinte, para o combate de soluções espúrias em problemas de autovalor.

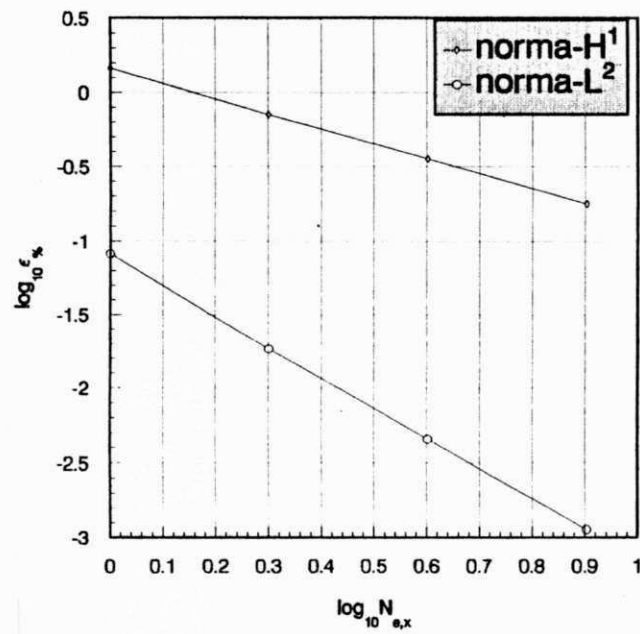


Figura 2.7: Elemento de 4 nós com penalidade (1 ponto de integração): aproximação convergente.

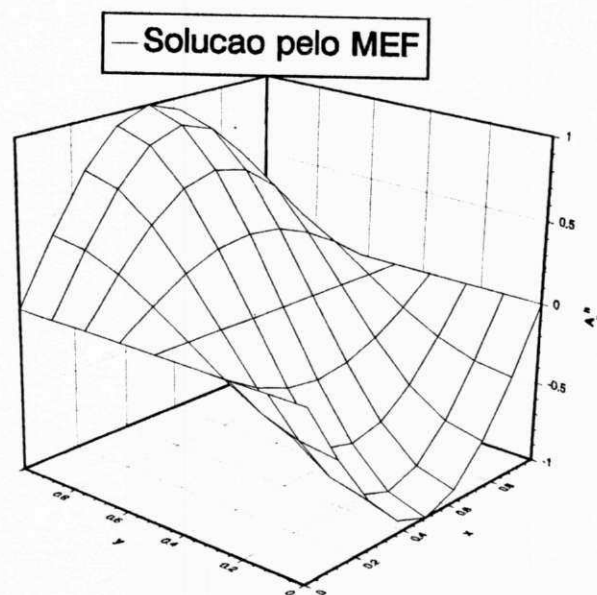


Figura 2.8: Componente  $A_x$  do potencial vetorial, obtida pelo MEF.

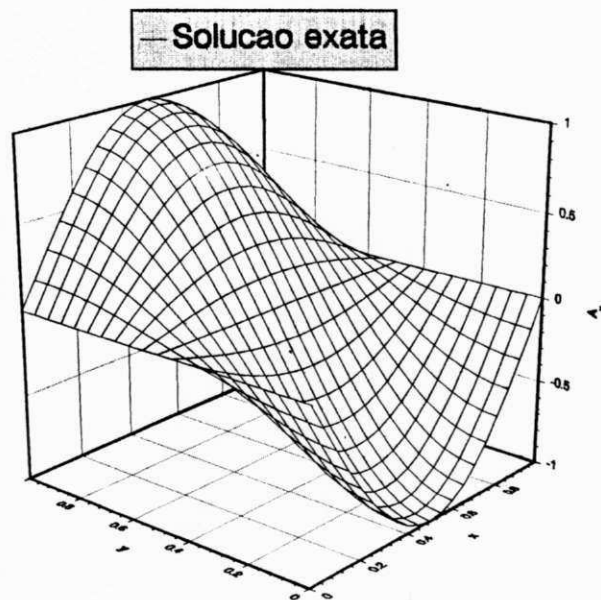


Figura 2.9: Componente  $A_x$  do potencial vetorial, obtida analiticamente.

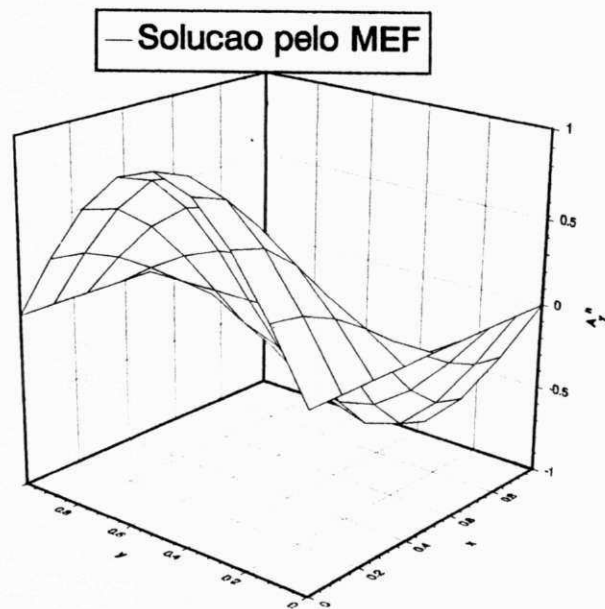


Figura 2.10: Componente  $A_y$  do potencial vetorial, obtida pelo MEF.

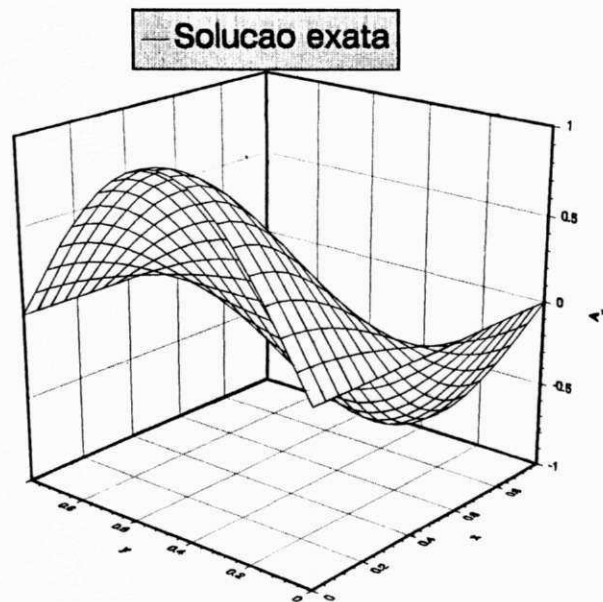


Figura 2.11: Componente  $A_y$  do potencial vetorial, obtida analiticamente.

## Capítulo 3

# Análise do Problema de Autovalor

### 3.1 Generalidades

*Devido à grande variedade de aplicações práticas de guias de onda, ressoadores, guias e fibras ópticos e outros dispositivos eletromagnéticos de altas frequências, o desenvolvimento de métodos numéricos eficientes para resolver os problemas de contorno associados experimentou um impulso muito grande nas duas últimas décadas. Tais problemas de contorno são, em geral, resolvidos por métodos de integração local (método dos elementos finitos, método das diferenças finitas no domínio do tempo ou método das integrações finitas) ou globais (método dos elementos de fronteira ou método das equações integrais) e, à exceção dos guias homogêneos e isotrópicos, requerem uma formulação a três componentes de campo, em termos de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  ou de potenciais auxiliares.*

*Este capítulo contém formulações variacionais vetoriais a três componentes do campo magnético  $\mathbf{H}$ , para problemas de guias de onda ou ressoadores eletromagnéticos, envolvendo meios não-homogêneos e/ou anisotrópicos, embora considerados lineares, sem perdas, não-dispersivos, não-magnéticos ( $\mu = \mu_0$ ) e sem fontes. Esta última característica requer que o problema seja formulado como um problema de autovalor/autovetor.*



### 3.2 O Problema de Autovalores - PAV

Considere-se um campo eletromagnético, com as premissas acima estabelecidas, ocupando uma região limitada do espaço, designada por  $\Omega$ , como mostra a Fig. 3.1. Esta região, doravante denominada domínio de solução, será bi-dimensional ou tri-dimensional, respectivamente, para ondas guiadas ou para campos em ressoadores eletromagnéticos.

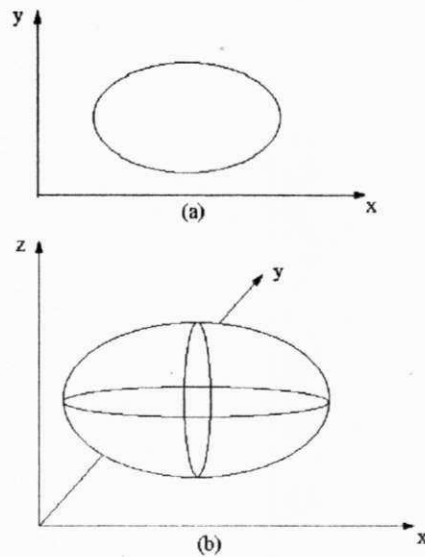


Figura 3.1: Domínio de solução para problemas eletromagnéticos: (a) em duas dimensões; (b) em três dimensões.

Um campo eletromagnético em regime temporal harmônico, nestas condições, é regido pelas equações fasoriais de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\tilde{\epsilon}_r \cdot \mathbf{E}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\tilde{\mu}_r \cdot \mathbf{H}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \tilde{\mu}_r \cdot \mathbf{H}) = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (3.4)$$

onde  $\tilde{\epsilon}_r$  e  $\tilde{\mu}_r$  são, respectivamente, os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética relativas do meio e  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são as correspondentes grandezas do vácuo. Suponha-se, ainda, que os campos variam com o tempo, segundo o fator  $e^{j\omega t}$ , onde  $\omega$  é a frequência angular de oscilação. O sistema é suposto limitado por uma fronteira  $\partial\Omega$  que consiste, no caso mais geral, de um condutor elétrico perfeito ( $\partial\Omega_E$ ) e de um condutor magnético perfeito ( $\partial\Omega_M$ ), não sobrepostos. Este último, em geral, representa planos de simetria da estrutura sob consideração. Há situações em que só um tipo de fronteira deve ser usado [50].

Dado o grande interesse em aplicações a guias ou ressoadores gerais com carregamento dielétrico, a equação de onda será desenvolvida em termos de um único campo vetorial, qual seja, o campo magnético  $\mathbf{H}$ . Esta escolha se justifica, pelo fato de haver-se admitido que o meio é caracterizado por um dielétrico perfeito não-magnético ( $\tilde{\mu}_r = \hat{I}$ ), de tensor permissividade elétrica relativa  $\tilde{\epsilon}_r(x, y)$ , o que caracteriza um material transversalmente não-homogêneo e anisotrópico. Se, por outro lado, o meio for caracterizado por materiais ferrimagnéticos [29], [51], então o problema poderá ser formulado para o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$ , ao invés de  $\mathbf{H}$ , bastando para tanto que se invoque o princípio da **dualidade** [27]. Desta forma, as equações e programas desenvolvidos para a formulação usando o campo magnético, podem ser convenientemente utilizadas para o campo elétrico.

Pré-multiplicando-se (3.1) por  $\tilde{\epsilon}_r^{-1}$  e usando-se (3.2), obtém-se a equação vetorial de onda para o campo magnético  $\mathbf{H}$

$$\nabla \times [\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})] - k_0^2 \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

onde  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \omega/c$  é o número de onda do espaço livre, sendo  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cong 3 \times 10^8$  m/seg a velocidade da luz no vácuo. As condições de contorno são dadas por

[28]

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_M \quad (3.6)$$

e

$$\mathbf{n} \times [\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})] = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_E, \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{n}$  representa a normal unitária exterior a  $\partial\Omega$ . Na interface entre dois materiais distintos, o campo magnético satisfaz às seguintes condições de continuidade:

$$\mathbf{n}_{ij} \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_j) = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

e

$$\mathbf{n}_{ij} \times [\tilde{\epsilon}_{ri}^{-1} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_i) - \tilde{\epsilon}_{rj}^{-1} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_j)] = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

onde os dois meios são identificados pelos índices  $i$  e  $j$  e  $\mathbf{n}_{ij}$  denota, neste caso, a normal unitária à interface, dirigida, por exemplo, do meio  $i$  para o  $j$ .

A condição de divergência nula do campo magnético, dada por (3.3), está implícita em (3.5), quando  $k_0^2 \neq 0$ , como se pode observar tomando o divergente desta última equação. Em outras palavras, as soluções da equação (3.5), com  $k_0^2 \neq 0$ , também satisfazem (3.3), se  $\tilde{\mu}_r = \hat{I}$ .

A equação de onda (3.5) tem soluções não-triviais, apenas para um conjunto enumerável de autovalores  $\{\lambda_j = k_{0j}^2\}_{j=1}^{\infty}$ . Além disto, a coleção correspondente das autofunções vetoriais normalizadas  $\{\mathbf{v}_j = \mathbf{H}_j\}_{j=1}^{\infty}$ , forma um **conjunto ortonormal completo** em  $\{L_2(\Omega)\}^3$ , onde  $L_2(\Omega)$  é o espaço de Hilbert de funções de quadrado integrável, definidas em  $\Omega$ . Assim, a determinação dos **autopares**  $(\lambda_j, \mathbf{v}_j)$  constitui o problema de autovalor (PAV) associado a (3.5)-(3.7), definido de forma compacta como

$$\begin{array}{l}
 \text{(PAV) Achar } \{\lambda, \mathbf{v}\} \text{ tal que } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega, \\
 \mathcal{L}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \text{ em } \Omega, \\
 \mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_M \text{ e} \\
 \mathbf{n} \times (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_E;
 \end{array} \tag{3.10}$$

onde  $\lambda = k_0^2$  e  $\mathcal{L}\mathbf{v} = \nabla \times [\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}]$ . A função  $\mathbf{v}$  corresponde, neste caso, ao campo magnético  $\mathbf{H}$ , devendo pertencer ao espaço das funções admissíveis  $S(\text{rot}, \Omega)$ , as quais satisfazem as condições de contorno homogêneas. Além disto, elas devem ser suficientemente regulares, de tal sorte que as derivadas em (3.10) possam ser calculadas, isto é,

$$\begin{aligned}
 S(\text{rot}, \Omega) = \{ & \mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^3 \mid \mathcal{L}\mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^3; \mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_M \\
 & \text{e } \mathbf{n} \times (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_E \}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Em alguns casos muito especiais, seria possível obter soluções analíticas diretamente do PAV, por exemplo, por separação de variáveis ou por transformações conformes. Em outras situações, poder-se-ia obter soluções aproximadas, também diretamente do PAV, pelo Método das Diferenças Finitas (MDF). Entretanto, a abordagem que será adotada nesta tese será a do Método dos Elementos Finitos (MEF), por oferecer maior versatilidade do que outros métodos numéricos no tratamento de problemas de grande complexidade material e/ou geométrica. O método se baseia numa formulação variacional (ou fraca) do PAV, descrita a seguir, segundo a qual o princípio da estacionariedade é aplicado ao **funcional** associado ao PAV, através de técnicas do **cálculo das variações**. Isto é possível, em razão de que o meio dielétrico é suposto passivo e sem perdas, podendo ser representado por um tensor hermiteano e, em conseqüência, levando a um princípio variacional. Em situações mais gerais (por exemplo, para materiais ativos ou dissipativos), quando não se dispõe de um princípio variacional, aplica-se o **método de Galerkin à formulação fraca** do PAV [52].

### 3.3 Formulação Variacional Equivalente

Seja  $\mathbf{v}$  uma **solução forte** (ou clássica) do PAV representado pelas equações (3.5)-(3.9). Então, a formulação fraca equivalente é dada por

$$(\mathcal{L}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in S(\text{rot}, \Omega), \quad (3.12)$$

onde  $(\cdot, \cdot)$  denota o **produto interno** em  $[L_2(\Omega)]^N$  e  $\mathbf{w}$  representa as funções-teste admissíveis que satisfazem a **forma homogênea** das mesmas condições de contorno da solução, uma vez que  $\mathbf{w} \in S(\text{rot}, \Omega)$ . Nas aplicações do MEF a problemas eletromagnéticos, o PAV em questão é, inicialmente, substituído por uma formulação fraca (ou variacional) equivalente, para a qual se busca, então, uma solução aproximada.

No caso do PAV formulado na seção anterior, a escolha apropriada para o produto interno é [49], [37], [1], [51]

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^* d\Omega. \quad (3.13)$$

Usando-se a definição acima e o operador definido no PAV em (3.10), a formulação variacional em (3.12) resulta no funcional

$$J(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \{ [\nabla \times (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v})] \cdot \mathbf{w} - k_0^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \} d\Omega. \quad (3.14)$$

Considerando as identidades vetoriais

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \{ \mathbf{w}^* \times (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \} dS &= \int_{\Omega} \{ (\nabla \times \mathbf{w})^* \cdot (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) \} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \cdot [\nabla \times (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v})] d\Omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

e

$$\mathbf{w}^* \times (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}^* \cdot (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{n} \quad (3.16)$$

em (3.10), obtém-se

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \{(\nabla \times \mathbf{w})^* \cdot (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) - k_0^2 \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{v}\} d\Omega \\
 &- \int_{\partial\Omega} \{\mathbf{w}^* \cdot (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n}\} dS.
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

A fronteira  $\partial\Omega$  pode ser do tipo parede elétrica ( $\partial\Omega_E$ ), ou parede magnética ( $\partial\Omega_M$ ), ou mesmo uma partição disjunta desses dois tipos de fronteiras. Em cada caso, tem-se uma combinação distinta de condições de contorno **naturais**, isto é, que não precisam ser impostas: são naturalmente implícitas na formulação variacional. Por outro lado, as condições de contorno ditas **essenciais** ou forçadas, devem ser explicitamente impostas às funções admissíveis, isto é, devem fazer parte da definição do espaço de funções [49]. Apresenta-se, a seguir, o elenco de condições naturais e essenciais referentes à equação (3.15):

- **Condições de contorno naturais:**

$$\mathbf{n} \times (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_E,
 \tag{3.18}$$

$$\mathbf{n} \cdot (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_M
 \tag{3.19}$$

- **Condições de contorno essenciais:**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_E,
 \tag{3.20}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_M.
 \tag{3.21}$$

Isto posto, o PAV em (3.10) pode ser substituído pela formulação fraca

$  \begin{aligned}  (F1) \quad &\text{Achar } \{k_0^2, \mathbf{v}\} \in \mathbb{R} \times V(\text{rot}, \Omega) \text{ tal que } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \text{ e} \\  &(\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w}) = k_0^2(\mathbf{v}, \mathbf{w}); \forall \mathbf{w} \in V(\text{rot}, \Omega),  \end{aligned}  $	$  \tag{3.22}  $
--	------------------

onde

$$V(\text{rot}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^3 \mid \nabla \times \mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^3; \right. \\ \left. \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_E; \mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_M \right\} \quad (3.23)$$

A formulação fraca facilita a obtenção de soluções aproximadas, por conter, na maioria dos casos, derivadas de ordens menos elevadas do que no PAV original. O procedimento geral consiste em escolher um subespaço de dimensão finita,  $V_h \subset V$ , e buscar as soluções aproximadas do problema (3.22) em  $V_h$ .

A forma fraca (F1) discretizada, tal como está, pelo MEF, tem a desvantagem de incluir **modos espúrios**, isto é, soluções que, não atendendo à restrição de divergência nula, não têm significado físico. Isto, por sua vez, acarreta a necessidade de empregar métodos específicos para tratar desse problema [39].

### 3.4 Discretização por Elementos Finitos

A formulação fraca (F1) em (3.22) pode ser usada para obter soluções aproximadas do PAV em (3.10), desde que seja escolhido um conjunto de funções-teste conveniente.

Seguindo o método de Ritz [13], [43], [53], [51], [50], escolhe-se um número finito de funções-teste  $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ , e, dentre todas as suas possíveis combinações lineares, identifica-se aquela que torna **estacionário** o funcional associado ao PAV em questão. Desta condição de estacionariedade surge um sistema algébrico, cujas incógnitas são os coeficientes da combinação linear, em geral iguais aos valores nodais do campo e/ou de suas derivadas.

Uma outra aproximação, a de Galerkin, a mais usada dentre as técnicas de discretização, se caracteriza pela escolha de um **mesmo espaço** de dimensão finita  $V_h$ , para aproximar tanto as soluções, quanto as funções-teste. O MEF fornece uma técnica conveniente para geração sistemática das funções  $\alpha_k$ , as quais constituem uma **base** do espaço de aproximação. O método de Galerkin leva, assim, à formulação (F1) discretizada por elementos finitos,

$$\boxed{\begin{aligned} (F1h) \quad & \text{Achar } \{(k_0^2), \mathbf{v}_h\} \in \mathbb{R} \times V_h \text{ tal que } \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0} \text{ e} \\ & (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{w}_h) = (k_0^2)_h (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h), \forall \mathbf{w}_h \in V_h. \end{aligned}} \quad (3.24)$$

### 3.5 PAV para Ondas Guiadas

Se o problema em foco for o de uma onda eletromagnética, linearmente polarizada, se propagando na direção  $z$ , o campo magnético,  $\mathbf{v} = \mathbf{H}$ , é posto na forma usual

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{h}(x, y) e^{-j\beta z} \quad (3.25)$$

e a solução  $\mathbf{v} = \mathbf{H} \in V(\text{rot}, \Omega)$  do PAV em (3.10), coincide com o ponto estacionário do funcional

$$J_z(\mathbf{H}) = \frac{2\pi}{\beta} \int_{\Omega} \{(\nabla \times \mathbf{H})^* \cdot (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}\} d\Omega, \quad (3.26)$$

associado a (F1), com  $\mathbf{w} = \mathbf{H} \in V(\text{rot}, \Omega)$ . A constante  $2\pi/\beta$  surge da integração, em  $z$ , entre os limites  $0$  e  $2\pi/\beta$ , isto é, ao longo de um período espacial (um comprimento de onda) na direção de propagação.

Discretizando a seção transversal  $\Omega$  do guia em elementos com  $n$  nós, pode-se descrever o campo magnético em cada elemento, em termos de seus valores nodais, isto é,

$$\{H\}_e = [\mathcal{N}]_e^T \{\hat{h}\}_e e^{-j\beta z}, \quad (3.27)$$

onde

$$[\mathcal{N}]_e = \begin{bmatrix} [N]_1 & [N]_2 & \cdots & [N]_n \end{bmatrix}_e, \quad (3.28)$$

com



$$[N]_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & jN_i \end{bmatrix}_e, i = 1, 2, \dots, n$$

e

$$\{\hat{h}\}_e = \begin{Bmatrix} \{\hat{h}\}_1 \\ \{\hat{h}\}_2 \\ \vdots \\ \{\hat{h}\}_n \end{Bmatrix}_e \quad (3.29)$$

Aqui,  $N_i = N_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , representam as **funções de base nodais** do elemento  $e$ ;  $\{\hat{h}\}_{ie} = [\hat{h}_{xi} \ \hat{h}_{yi} \ \hat{h}_{zi}]_e^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são os vetores contendo os valores nodais das três componentes do campo  $\mathbf{h}(x, y)$  em cada elemento e  $T$  denota transposição matricial.

Usando a aproximação para  $\mathbf{H}$ , dada em (3.27), no funcional (3.26) e empregando as técnicas peculiares do MEF [37], obtém-se o problema matricial global de autovalor/autovetor

$$[S] \{\hat{h}\} = k_0^2 [T] \{\hat{h}\}, \quad (3.30)$$

sendo

$$[S] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} [B]_e^* [\epsilon_r]^{-1} [B]_e^T dx dy, \quad (3.31)$$

$$[T] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} [N]_e^* [N]_e^T dx dy \quad (3.32)$$

e

$$[B]_e = [ [B]_1 \ [B]_2 \ \dots \ [B]_n ]_e, \quad (3.33)$$

com

$$[B]_i = \begin{bmatrix} 0 & -j\beta N_i & -\partial N_i/\partial y \\ j\beta N_i & 0 & \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y & -\partial N_i/\partial x & 0 \end{bmatrix}_e, i = 1, 2, \dots, n,$$

onde  $\{\hat{h}\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{\hat{h}\}_e$  é o vetor global formado pelos subvetores nodais das componentes do campo magnético  $\mathbf{h}$  em  $\Omega_h$ . O símbolo  $\sum_{e=1}^{n_e}$  representa o processo de soma das contribuições de cada elemento, acumuladas nas respectivas matrizes globais  $[S]$  e  $[T]$ . Ressalte-se que um desenvolvimento inteiramente análogo levaria a equações semelhantes, envolvendo o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$ , bastando, para tanto, invocar o princípio da dualidade [27].

### 3.6 PAV para Regiões Tridimensionais Limitadas

Se o problema em foco for o de um campo eletromagnético em uma região limitada do espaço tridimensional (um ressoador, por exemplo), a solução  $\mathbf{v} = \mathbf{H} \in V(\text{rot}, \Omega)$  do PAV em (3.10), coincide com o ponto estacionário do funcional

$$J(\mathbf{H}) = \int_{\Omega} \{(\nabla \times \mathbf{H})^* \cdot (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}\} d\Omega, \quad (3.34)$$

associado a (F1), com  $\mathbf{w} = \mathbf{H} \in V(\text{rot}, \Omega)$ .

Discretizando a região  $\Omega$  em elementos tridimensionais com  $n$  nós, pode-se descrever o campo magnético em cada elemento em termos de seus valores nodais, isto é,

$$\{H\}_e = [\mathcal{N}]_e^T \{\hat{h}\}_e, \quad (3.35)$$

onde

$$[\mathcal{N}]_e = \begin{bmatrix} [N]_1 & [N]_2 & \dots & [N]_n \end{bmatrix}_e, \quad (3.36)$$

com

$$[N]_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}_e$$

e

$$\{\hat{h}\}_e = \begin{bmatrix} \{\hat{h}\}_1 \\ \{\hat{h}\}_2 \\ \vdots \\ \{\hat{h}\}_n \end{bmatrix}_e \quad (3.37)$$

Aqui, como antes,  $N_i = N_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , representam as funções de base nodais do elemento  $e$ ;  $\{\hat{h}\}_{ie} = [\hat{h}_{xi} \ \hat{h}_{yi} \ \hat{h}_{zi}]_e^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são os vetores contendo os valores nodais das três componentes do campo  $\mathbf{H}$  em cada elemento e  $T$  denota transposição matricial.

Usando a aproximação para  $\mathbf{H}$  em (3.35) no funcional (3.34) e empregando as técnicas peculiares do MEF [37], obtém-se o problema matricial global de autovalor/autovetor

$$[S] \{\hat{h}\} = k_0^2 [T] \{\hat{h}\}, \quad (3.38)$$

sendo

$$[S] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_e [\epsilon_r]^{-1} [\mathbf{B}]_e^T dx dy dz, \quad (3.39)$$

$$[T] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} [\mathcal{N}]_e [\mathcal{N}]_e^T dx dy dz \quad (3.40)$$

e

$$[\mathbf{B}]_e = [ [B]_1 \ [B]_1 \ \dots \ [B]_n ]_e, \quad (3.41)$$

com

$$[B]_i = \begin{bmatrix} 0 & \partial N_i / \partial z & -\partial N_i / \partial y \\ -\partial N_i / \partial z & 0 & \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y & -\partial N_i / \partial x & 0 \end{bmatrix}_e, i = 1, 2, \dots, n,$$

onde  $\{\hat{h}\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{\hat{h}\}_e$  é o vetor global formado pelos subvetores nodais das componentes do campo magnético  $\mathbf{H}$  em  $\Omega_h$ . O símbolo  $\sum_{e=1}^{n_e}$  representa, tal como antes, o processo de soma das contribuições de cada elemento, acumuladas nas respectivas matrizes globais  $[S]$  e  $[T]$ . Ressalte-se que um desenvolvimento inteiramente análogo levaria a equações semelhantes, envolvendo o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$ , bastando, para tanto, invocar o princípio da dualidade [27].

### 3.7 Modos Espúrios: como Eliminá-los

O estudo rigoroso das características de propagação de guias de onda com seção transversal e material arbitrários, requer uma análise vetorial da onda guiada e, em consequência, diferentes tipos de métodos de elementos finitos vetoriais. Assim, em conformidade com as componentes usadas do campo eletromagnético, pode-se ter as seguintes formulações de elementos finitos:

1. MEF em termos de  $E_z$  e  $H_z$  [54], [55], [56], [57], [58], [59];
2. MEF em termos das três componentes de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$  [60], [61], [62], [59], [63], [64], [65];
3. MEF usando ambos os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  [66], [67], [68];
4. MEF usando  $\mathbf{E}_t$  ou  $\mathbf{H}_t$  [69], [70], [71];
5. MEF usando  $\mathbf{E}_t$  e  $\mathbf{H}_t$  [72], [73];
6. MEF usando potenciais escalar e vetorial [74], [75].

As formulações vetoriais mais utilizadas em problemas de ondas eletromagnéticas, têm consistido em resolver, simultaneamente, duas equações de onda escalares para as componentes longitudinais  $E_z$  e  $H_z$ , (método 1) ou uma equação vetorial de onda para as três componentes de  $\mathbf{H}$  ou  $\mathbf{E}$  (método 2).

A fim de facilitar o entendimento da questão, será feito um comentário a respeito da evolução histórica das pesquisas em torno de cada uma das formulações propostas acima.

Em 1970, Cendes e Silvester [16] relatam o surgimento de modos não-físicos, na determinação dos modos híbridos em guias com carregamento dielétrico parcial, usando uma formulação  $E_z$ - $H_z$ . Eles propõem a observação das configurações das componentes  $E_z$  e  $H_z$ , como forma de distinguir entre modos físicos e espúrios. Usando elementos isoparamétricos na análise de guias dielétricos com fronteiras curvilíneas, Welt e Webb [76] retomam, em 1985, a mesma metodologia de Cendes e Silvester, para separar os modos físicos dos espúrios. Na mesma linha de ataque, Daly [77] constata a existência de um modo de onda de superfície, associado à frequência zero. Usando o Método das Diferenças Finitas (MDF), Coor e Davies [78] contestam as conclusões de Daly, quando comprovam a existência de modos espúrios em todo o espectro de frequências. Coor e Davies alegam, então, que a causa para esse fenômeno é a não-positividade das matrizes resultantes da formulação variacional, como já apontara Harrington [79] em sua análise pelo Método dos Momentos.

Em 1981, Mabaya e Lagasse [57] também atribuem o aparecimento de modos espúrios à não-positividade das matrizes produzidas pelo MEF. Através de exemplos de guias ópticos anisotrópicos, eles mostram ser possível limitar a ocorrência desses modos, pela imposição de condições de contorno naturais (continuidade das componentes tangenciais dos campos nas interfaces dielétricas), explicitamente, por meio de multiplicadores de Lagrange [1]. Além de carecer de qualquer comprovação matemática, esse artifício tem a desvantagem de aumentar a complexidade da implementação computacional e o número de operações necessárias para montagem das matrizes globais.

No que concerne à utilização da equação vetorial de onda a três componentes de campo, os modos espúrios começaram a ser investigados a partir da segunda metade

da década de 70. Assim, em 1976, Konrad [51] apresenta os primeiros resultados deste tipo de formulação, em que aparecem modos espúrios, reconhecendo-os como aqueles modos que violavam a condição de divergência nula e que não satisfaziam as condições de contorno. Para eliminá-los, Konrad sugeria que se impusessem, além das condições de contorno naturais (implicitamente satisfeitas durante a extremização do funcional) dadas em (3.18), (3.19), também as condições de contorno essenciais, dadas em (3.20) e (3.21). Segundo êle, este expediente garantiria que  $\mathbf{E}$  (proporcional a  $\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$ ) e  $\mathbf{H}$  fossem normais, respectivamente, às fronteiras  $\partial\Omega_E$  e  $\partial\Omega_M$ . Davies et alli [80], testando esse procedimento, concluíram que a imposição de tais condições de contorno diminui, de fato, o número de soluções espúrias; contudo não garante a sua eliminação por completo. O próprio Konrad [81] confirma aquela limitação, usando modelos de apenas um elemento de ordem elevada e admite que o número de modos espúrios diminui, simplesmente porque a ordem das matrizes é menor.

A identificação a posteriori das soluções espúrias, consiste em utilizar o funcional (3.26) sem nenhuma alteração e, a partir dos resultados obtidos, selecionar os autopares corretos através dos seguintes procedimentos:

- Pós-processamento de autovetores: consiste em calcular  $\int_{\Omega} |\text{div } \mathbf{H}|^2 d\Omega$ , respectivamente, sobre a seção transversal do guia ou sobre o volume do ressoador [61], [80] e selecionar os autopares corretos como aqueles para os quais aquela integral tem o valor menor possível. Verifica-se, na prática, que os valores numéricos dessas integrais, correspondentes a modos espúrios, são sempre muito mais elevados.
- Inspeção: consiste em observar a distribuição de campos na seção transversal do guia, ou em planos especificados do ressoador, e identificar os modos espúrios como aqueles que venham a apresentar fluxo líquido através das fronteiras perfeitamente condutoras  $\partial\Omega_E$  e/ou  $\partial\Omega_M$ .

O custo computacional elevado e a dificuldade de automatização desses procedimentos, justificam a necessidade de se investigar métodos que possam garantir, a priori, a

eliminação dos modos espúrios, particularmente para problemas tridimensionais. Tais procedimentos podem ser agrupados em três categorias distintas:

1. *Modificação do funcional:* este procedimento consiste em adicionar à forma variacional (ou ao funcional) correspondente ao PAV em questão, um termo que, de alguma forma, incorpore a restrição de divergência nula. Neste grupo estão incluídas as técnicas que, por exemplo, impõem aquela restrição, aproximadamente, através de multiplicadores de Lagrange [82] ou no sentido dos mínimos quadrados. Este último procedimento configura o método da penalidade [61],[59], que será analisado com mais detalhes, adiante;
2. *Formulações variacionais alternativas:* a necessidade de garantir um espectro sem modos espúrios, estimulou vários pesquisadores a investigar outras formulações variacionais. Hayata, Koshiha et alli [83], analisando problemas de ondas guiadas, expressaram a componente longitudinal  $H_z$  (ou  $E_z$ ), em termos das componentes transversais  $\mathbf{H}_t$  (ou  $\mathbf{E}_t$ ), fazendo uso da própria condição de divergência nula, discretizada. Com este expediente, a componente longitudinal de campo, agora expressa como função das respectivas componentes transversais, é eliminada, resultando em uma redução de um terço da dimensão das matrizes globais e na total eliminação de qualquer modo espúrio ao longo de todo o espectro de interesse. Este método, entretanto, apresenta o grande inconveniente de destruir a esparsidade original das matrizes  $[\mathbf{S}]$  e  $[\mathbf{T}]$ , além da complexidade de implementação e do conseqüente custo computacional elevado. Recentemente, Fernandez e Lu [84], [85] propuseram uma formulação baseada em expressões gerais, envolvendo apenas as componentes transversais do campo, capaz de eliminar os modos espúrios. Angkaew et alli [72] utilizam uma expressão, em termos de  $\mathbf{E}_t$  e  $\mathbf{H}_t$ , que só produz modos espúrios com autovalores complexos, sendo, então, fácil discriminá-los, pelo menos em problemas envolvendo meios sem perdas. Chew e Nassir [70] apresentam uma formulação semelhante, também em termos de  $\mathbf{E}_t$  e  $\mathbf{H}_t$ , porém permitindo eliminar um dos pares de componentes, desde que sejam escolhidas funções de base idênticas para os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ .



O maior inconveniente dessas abordagens, parece ser o uso compulsório de aritmética complexa, mesmo em casos que admitem um tratamento mais simples. Svedin [66] faz uso de uma formulação mista que inclui as componentes transversais e longitudinais de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . Naturalmente, o número de graus de liberdade por nó, se eleva de 2 ou 4 para 6, ganhando-se, porém, em generalidade: é possível resolver problemas tridimensionais, incluindo o caso de meios dissipativos. Nesta formulação, Svedin faz uma discretização individual das equações de Maxwell, sendo a condição de divergência nula implicitamente satisfeita e a de continuidade explicitamente forçada, o que garante o não aparecimento de soluções estranhas. Bardi e Biro [75] usam uma forma variacional alternativa, em termos de três componentes de um potencial vetorial ( $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{F}$ ) e um potencial escalar, obtendo condições que asseguram a restrição de divergência nula, matrizes esparsas e validade do método para meios dissipativos e/ou anisotrópicos. Estes dois últimos procedimentos, entretanto, apresentam como desvantagem um acréscimo considerável na complexidade computacional, bem como no número de graus de liberdade necessários para resolver um dado problema;

3. *Elementos alternativos:* nesta categoria, se enquadram os métodos que, mantendo a formulação variacional básica, modificam a natureza das funções de base, criando novos tipos de elementos, capazes de gerar um espaço de soluções com divergência nula. Kobelansky e Webb [86] usaram funções de base com divergência nula, porém o processo requer muita computação extra, por exigir a solução de um problema adicional de autovalor. Hano [62], [87], analisando problemas de ondas guiadas, utiliza elementos retangulares e triangulares e constrói funções de base especiais, com diferentes ordens de interpolação, para as componentes tangenciais e transversais dos campos, que eliminam os modos espúrios. Este procedimento, entretanto, gera tantos autovalores nulos quantos forem os graus de liberdade nodais associados à componente longitudinal. Seguindo a mesma relação anterior entre as ordens de interpolação das funções de base, surgem os chamados elementos covariantes [88], [89], [90], que são elementos curvilíneos isoparamétricos, capazes de resolver problemas de ondas guiadas, de geometria



complexa. Kikuchi [91] utiliza os elementos de baixa ordem propostos por Nedelec [92], para assegurar que todas as soluções obtidas correspondem a aproximações de modos físicos. Bossavit e Mayergoyz [93] discutem as vantagens de usar os chamados elementos de aresta, em problemas de espalhamento. Aubourg e Guillon [94] empregam elementos mistos em problemas de microfitas com perdas. Bermúdez e Pedreira [33] também usam estes elementos mistos em problemas de guias retangulares lisos e com duplo espigão (*double ridge waveguides*).

### 3.7.1 Métodos de Penalidade

Dentre os diversos procedimentos até aqui mencionados, será usado o método da penalidade com integração reduzida seletiva (RIP) [39] e introduzido o método da penalidade com integração reduzida seletiva transversal (STRIP), uma variante do método RIP, que possibilita estender sua aplicação a situações geométricas especiais, envolvendo domínios não convexos. Antes porém, será iniciada uma discussão analisando as principais características do método da penalidade clássico, no que se refere ao processo de eliminação das soluções espúrias.

#### Método da Penalidade Clássico

O método da penalidade clássico possui uma formulação matemática abrangente e sua aplicação em diversas outras áreas da Engenharia produziu contribuições promissoras, que ainda não haviam sido exploradas em problemas de Eletromagnetismo.

Adotado inicialmente em aplicações do MEF a problemas da Mecânica dos Fluidos e da Análise Estrutural, o método da penalidade consiste, em linhas gerais, em acrescentar à formulação variacional básica do problema, um termo que impõe a restrição de divergência nula, no sentido dos mínimos quadrados. Sua aplicação a problemas de ondas eletromagnéticas surge, pela primeira vez na literatura, em 1968 [95], logo seguindo-se o trabalho de Silvester [14]. Somente na década de 80 é que a idéia se difunde na comunidade eletromagnética [96], [61], [59].

A formulação fraca correspondente ao método da penalidade, se escreve como:

<p>(F3) Dado um <math>s &gt; 0</math>, achar <math>\{k_0^2, \mathbf{v}\} \in \mathbb{R} \times U(\text{rot}, \Omega)</math>, tal que <math>\mathbf{v} \neq \mathbf{0}</math> e</p> $(\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w}) + s(\nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{w}) = k_0^2(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$ <p><math>\forall \mathbf{w} \in U(\text{rot}, \Omega)</math>,</p> <p>onde</p> $U(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in V(\text{rot}, \Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} \in L_2(\Omega)\}.$	(3.42)
---	--------

Discretizada por elementos finitos, a formulação acima passa a ser:

<p>(F3h) Dado um <math>s &gt; 0</math>, achar <math>\{(k_0^2)_h^s, \mathbf{v}_h^s\} \in \mathbb{R} \times U_h</math>, tal que <math>\mathbf{v}_h^s \neq \mathbf{0}</math> e</p> $(\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{v}_h^s, \nabla \times \mathbf{w}_h) + s(\nabla \cdot \mathbf{v}_h^s, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) = k_0^2(\mathbf{v}_h^s, \mathbf{w}_h),$ <p><math>\forall \mathbf{w}_h \in U_h</math>,</p>	(3.43)
---	--------

onde  $U_h$  é o subespaço de dimensão finita de  $U(\text{rot}, \Omega)$  em (3.34), correspondente à discretização por elementos finitos discutida anteriormente.

Com  $\mathbf{v}_h^s = \mathbf{H}$  e identificando-se o funcional de penalidade em (F3h) acima, obtém-se

$$J_p(\mathbf{H}) = J(\mathbf{H}) + sP(\mathbf{H}), \quad (3.44)$$

onde  $J(\mathbf{H})$  é a forma variacional em (3.26),

$$P(\mathbf{H}) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{H})^* (\nabla \cdot \mathbf{H}) dx dy, \quad (3.45)$$

para o caso de ondas guiadas, ou em (3.34),

$$P(\mathbf{H}) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{H})^* (\nabla \cdot \mathbf{H}) dx dy dz, \quad (3.46)$$

para o caso tridimensional e  $s$  é um número real positivo, conhecido como **fator de penalidade**. À medida que  $s$  aumenta, cresce a restrição imposta aos modos espúrios [49],[1].

Para verificar porque os espúrios são eliminados quando se usa (3.44-3.46), far-se-á uma caracterização e uma análise desses modos, classificados em duas categorias [59]. A primeira, se caracteriza pelo conjunto dado por

$$S_1 = \{ \mathbf{H} \mid \nabla \times \mathbf{H} = 0, \nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0 \text{ e } k_0^2 = 0 \}. \quad (3.47)$$

Quando  $k_0^2 = 0$ , a equação diferencial parcial (3.5) tem um número infinito de soluções estáticas ou irrotacionais. O cálculo aproximado usando (3.26), produz algumas dessas soluções estáticas esperadas, além de outras que não satisfazem à condição de divergência nula. Estas soluções espúrias, correspondentes ao autovalor infinitamente degenerado  $k_0^2 = 0$ , apresentam o inconveniente de se mesclarem às soluções físicas  $k_0^2 \neq 0$ , uma vez que seus valores numéricos se afastam da origem do espectro.

Na formulação com penalidade em (3.44), como  $\tilde{\epsilon}_r^{-1}$  é um tensor Hermiteano e positivo-definido, observa-se que  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  implica em  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ , quando  $k_0^2 = 0$  e, assim, são eliminados os modos espúrios pertencentes à classe  $S_1$ .

Outra classe de modos espúrios gerados por (3.26) ou (3.34) é caracterizada por

$$S_2 = \{ \mathbf{H} \mid \nabla \times \mathbf{H} \neq \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0 \text{ e } k_0^2 > 0 \}. \quad (3.48)$$

Tomando-se o divergente da equação (3.5), resulta em  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  quando  $k_0^2 = 0$ , uma vez que

$$\nabla \cdot [\nabla \times (\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{H})] \equiv 0. \quad (3.49)$$

As formas variacionais (3.26) ou (3.34), por outro lado, garantem a continuidade tangencial do campo elétrico na interface entre elementos, de acordo com (3.9), mas não asseguram a identidade (3.49). Isto significa que a restrição de divergência nula não está garantida, acarretando uma poluição de modos da classe  $S_2$ , por todo o espectro.

Estes modos são também eliminados pelo método da penalidade, como se pode depreender de uma análise da equação de Euler-Lagrange associada ao funcional (3.44), dada por [89],[59], [47]

$$\nabla \times [\tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{H}] - s \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{H} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega. \quad (3.50)$$

Assim, tomando-se o divergente de (3.50) e usando-se a identidade (3.49), obtém-se

$$(s \nabla^2 + k_0^2) (\nabla \cdot \mathbf{H}) = 0. \quad (3.51)$$

Obviamente, quando  $\nabla \times \mathbf{H} \neq \mathbf{0}$  para  $k_0^2 > 0$ , os autovalores de (3.50) não podem satisfazer a equação (3.51). Conseqüentemente, os autovetores de (3.50) devem satisfazer a  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  e, desta forma, o par  $\{k_0^2, \mathbf{H}\}$ , com  $\nabla \times \mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0$  e  $k_0^2 > 0$ , não é admissível. Isto significa que os modos espúrios da classe  $S_2$  são também eliminados.

Quando  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  para  $k_0^2 > 0$ , a equação (3.50) se reduz a

$$s \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) + k_0^2 \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

O par  $\{k_0^2, \mathbf{H}\}$ , solução de (3.52), é também um ponto estacionário de (3.44) e pode ser tal que  $\nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0$ , configurando um novo conjunto de modos espúrios que não apareciam em (3.44), classificado como

$$S_3 = \{\mathbf{H} \mid \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0 \text{ e } k_0^2 > 0\}. \quad (3.53)$$

A condição de irrotacionalidade permite expressar  $\mathbf{H} = \nabla \varphi$ , onde  $\varphi$  é uma função escalar arbitrária. Substituindo  $\mathbf{H} = \nabla \varphi$  em (3.52), resulta em

$$\nabla (s \nabla^2 \varphi + k_0^2 \varphi) = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$(s \nabla^2 + k_0^2) \varphi = 0 \text{ em } \Omega, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \partial \Omega_E, \quad (3.55)$$

$$\varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_M. \quad (3.56)$$

Observa-se que as soluções do problema de contorno em (3.54)-(3.56) correspondem aos modos TE do guia vazio (bastando que se faça  $\varphi = H_z$ ) e representam modos espúrios da classe  $S_3$  que, entretanto, estão restritos à região  $k_0^2/s\beta^2 \geq 1$  (região de ondas rápidas), para o caso de ondas guiadas.

A equação matricial global, obtida após a discretização de (3.44) pelo MEF, resulta na forma

$$([S] + s[U]) \{\hat{h}\} - k_0^2 [T] \{\hat{h}\} = \{0\}, \quad (3.57)$$

onde

$$[U] = \mathbf{A} \int_{\Omega_e}^{n_e} [C]_e [C]_e^T dx dy \quad (3.58)$$

é a matriz global correspondente ao termo de penalidade e

$$[C]_e = \begin{Bmatrix} \{C\}_1 \\ \{C\}_2 \\ \vdots \\ \{C\}_n \end{Bmatrix}_e, \quad (3.59)$$

sendo

$$[C]_i = \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \beta N_i \end{Bmatrix}_e, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

para o caso de ondas guiadas. Para o caso de ressoadores eletromagnéticos, ter-se-á, analogamente,

$$[U] = \mathbf{A} \int_{\Omega_e}^{N_e} [C]_e [C]_e^T dx dy dz, \quad (3.60)$$

onde, agora,

$$[C]_i = \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{Bmatrix}_e, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.61)$$

Nas equações acima,  $N_i, i = 1, 2, \dots, n$  representam as funções de interpolação do elemento  $\Omega_e$ .

Os resultados publicados até o momento, usando o método da penalidade clássico [61],[59],[80],[96], apresentam como principal limitação a incapacidade de eliminar os modos espúrios de uma região arbitrária do espectro. Se o valor de  $s$  for muito pequeno, aparecerão espúrios na região de interesse e se for muito grande, os autovalores físicos ficarão imprecisos. Na verdade, para cada modo, tem-se um valor ótimo de  $s$ , sendo, portanto, impossível determinar este valor a priori para um dado intervalo de frequências, o que termina por comprometer o desempenho global do método. Webb [89] propõe um método alternativo, que procura ajustar o valor de  $s$ , automaticamente, para cada modo. Além do custo computacional elevado, essa abordagem introduz um novo parâmetro, que também exige atenção especial. Na Seção seguinte se discute uma variante deste método, que possibilita superar esta limitação.

### Penalidade com Integração Reduzida Seletiva (RIP)

Idealmente, a constante de penalidade  $s$  deveria poder crescer livremente, de modo a banir os modos espúrios da região de interesse do espectro. Na prática, entretanto, isto não é possível e a discretização por elementos finitos de (3.44) não funciona a contento. Ocorre que o funcional  $P(\mathbf{H})$  em (3.44) é um termo de penalidade apropriado, apenas para o problema variacional contínuo, associado à determinação daquelas funções que tornam estacionário o funcional  $J(\mathbf{H})$  em (3.26) ou (3.34), sujeito à restrição de divergência nula. Entretanto, isto não garante que a aproximação por elementos finitos do termo  $P(\mathbf{H})$ , para um nível arbitrário de refinamento de malha, seja também um termo de penalidade apropriado para  $J_p(\mathbf{H})$ . Para se habilitar a ser um funcional de



penalidade,  $P(\mathbf{H})$  deveria ser **semi positivo-definido**, quando, em geral, este aparece como positivo-definido. Nesta última instância o problema é dito trancado [49],[1],[37].

As integrais que ocorrem na aproximação por elementos finitos, são calculadas por alguma regra de quadratura conveniente e, quando os integrandos são polinômios, existem fórmulas que fornecem valores exatos para essas integrais. Constatou-se, no contexto da Análise Estrutural, que se a regra de quadratura utilizada para o termo de penalidade for de ordem inferior à necessária para a sua integração exata, o funcional  $J_p(\mathbf{H})$ , quando discretizado, passa a ser semi positivo-definido, preenchendo, portanto, os requisitos necessários para evitar o trancamento da solução [49],[1],[37]. O conceito de **integração reduzida seletiva** (onde um dado termo é integrado com ordem menor do que a que fornece resultados exatos), aplicado ao método de penalidade, conhecido como RIP (**R**educed **I**ntegration **P**enalty), foi inicialmente empregado por Doherty et alli [97] em problemas da Engenharia Civil. Em 1979, Malkus e Hughes [32] estabeleceram a **equivalência** entre vários elementos mistos e elementos com integração reduzida seletiva, conferindo, desta forma, uma base de análise numérica ao método de penalidade com integração reduzida seletiva.

A fim de ilustrar o procedimento do método RIP, denote-se por  $I_e(f)$  a regra de quadratura usada para aproximar a integral da função  $f$ , em cada um dos  $N_e$  elementos finitos que constituem a malha  $\Omega_h$ , ou seja

$$I(f) = \sum_{e=1}^{N_e} I_e(f), \quad (3.62)$$

onde

$$I_e(f) = \sum_{l=1}^L p_l f(\xi_l), \quad 1 \leq e \leq N_e \quad (3.63)$$

e, por conseguinte,

$$I_e(f) \simeq \int_{\Omega_e} f d\Omega_e, \quad (3.64)$$

onde  $p_l$  são os **pesos** da integração e  $\xi_l$  são as **coordenadas naturais** dos pontos da quadratura de Gauss, utilizada dentro do elemento [37]. Se  $f$  for polinomial, então

é possível escolher uma ordem  $L$  para a regra  $I_e$ , tal que a igualdade se verifique em (3.64), isto é, tal que a integração seja exata.

A aproximação do funcional (3.28) pelo método RIP, consiste em achar os autopares  $\{(k_0^2)_h^s, \mathbf{v}_h^s\} \in \mathbb{R} \times V_h$ , que tornam estacionário o funcional

$$J_z(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega_h} \left[ (\nabla \times \mathbf{v}_h^s \cdot \tilde{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{w}_h) - (k_0^2)_h^s (\mathbf{v}_h^s \cdot \mathbf{w}_h) \right] d\Omega + s (\nabla \cdot \mathbf{v}_h^s, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_h, \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h, \quad (3.65)$$

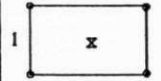
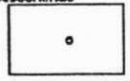
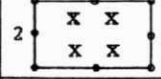
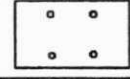
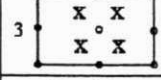
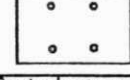
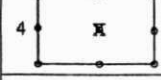
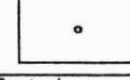
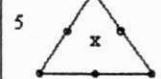
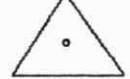
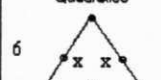

onde  $(\nabla \cdot \mathbf{v}_h^s, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_h$  representa uma regra de quadratura cuja ordem é uma unidade abaixo da usada para calcular numericamente as demais integrais em (3.41). Desta forma, a aproximação discreta da restrição  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ , expressa pela matriz de penalidade  $[\mathbf{U}]$ , passa a ser semi positivo-definida, evitando, por conseguinte, o trancamento da solução [49].

A Fig. 3.2 mostra alguns exemplos de espaços  $Q^h$  de aproximações descontínuas de  $\nabla \cdot \mathbf{H}$ , por elementos finitos, correspondentes a várias escolhas de elementos para aproximações contínuas das componentes de  $\mathbf{H}$  e a diferentes regras de quadratura  $I_e(\cdot)$  [49].

A vantagem de se usar o método RIP em problemas eletromagnéticos de autovalor, é que pode-se prefixar um valor arbitrariamente elevado para o fator de penalidade  $s$ , de modo a banir os modos espúrios do intervalo espectral de interesse sem, contudo, comprometer substancialmente a qualidade da aproximação dos modos físicos. Um outro aspecto a salientar é que o método RIP assegura um desempenho equivalente ao dos elementos mistos, sem necessidade de complicar a implementação, nem aumentar a demanda de recursos computacionais.

Como alternativa à formulação RIP, será introduzida uma **formulação mista**, cujos detalhes serão apresentados numa seção posterior e para a qual serão apresentados resultados numéricos no Capítulo 4. A referida formulação mista constitui, por assim dizer, uma das contribuições centrais da tese e oferece uma excelente estabilidade numérica, mesmo em presença de elementos retilíneos distorcidos ou de elementos curvilíneos.



$H^h$	$I$	$Q^h$
Bilinear 	1 x 1 (Gauss) Convergência ótima	Seccionalmente const. Descontínuo 
Serendipity 8 nós 	2 x 2 (Gauss) Convergência ótima	Seccionalmente Bilinear Descontínuo 
Biquadrático 	2 x 2 (Gauss) Convergência ótima	Seccionalmente Bilinear Descontínuo 
Biquadrático 	1 x 1 (Gauss) Convergência sub-ótima (Estável)	Seccionalmente const. Descontínuo 
Quadrático 	Regra de 1 ponto Convergência sub-ótima (Estável)	Seccionalmente const. Descontínuo 
Quadrático 	Regra de 3 pontos Convergência ótima	Seccionalmente linear Descontínuo 

o integração plena  
 X integração reduzida

Figura 3.2: Espaços  $Q^h$  de aproximações descontínuas de  $\nabla \cdot \mathbf{H}$ , correspondentes a várias escolhas de elementos e a diferentes regras de quadratura.

### Penalidade com Integração Reduzida Seletiva Transversal (STRIP)

Visando estendê-lo a situações especiais, tais como singularidades geométricas, efetuou-se uma modificação no método RIP, a qual consiste em usar integração reduzida seletiva apenas nas componentes transversais do campo magnético, advindo daí a sigla STRIP (*Selective Transverse Reduced Integration Penalty*) para o método alternativo. Este método tem as virtudes de conservar os elementos lagrangeanos clássicos na sua formulação, reter a esparsidade das matrizes e eliminar os modos espúrios sem prejudicar a precisão dos autovalores. Entretanto, a precisão dos autovetores é afetada, devido ao desacoplamento entre as componentes transversais e longitudinal do campo magnético, imposto pelo processo de integração reduzida seletiva transversal. Por esta razão, é necessário conduzir uma análise numérica deste procedimento e avaliar suas implicações, o que será objeto de futuras investigações, em continuação a esta tese.

O método STRIP foi aplicado a três problemas típicos: o guia retangular vazio, o

guia retangular com carregamento dielétrico no plano  $\mathbf{H}$  e o guia retangular vazio com duplo espigão (*double ridge waveguide*), tendo-se obtido resultados mais precisos do que os divulgados, para os mesmos problemas, por Bermúdez e Pedreira [33], usando elementos de aresta para as componentes transversais e lagrangeanos clássicos para a componente longitudinal do campo magnético. O método por eles proposto também carece de aprofundamento, uma vez que a restrição de divergente nulo só é imposta às componentes transversais do campo magnético.

Os resultados numéricos comparativos entre os dois métodos são apresentados no Capítulo 4.

### Problema de Teste: Ondas Guiadas

Nesta seção, serão apresentados alguns resultados numéricos que comprovam a validade da formulação RIP discutida na seção anterior, juntamente com a correspondente implementação computacional. O problema selecionado é o de um guia retangular vazio, de dimensões  $a = 1$  cm e  $b = 0.5$  cm, cuja solução analítica é conhecida e consiste dos modos TE e TM, em relação ao eixo dos  $z$  [29],[27]. Os autovalores associados são dados por

$$(k_0^2)_{mn} = \beta^2 + \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad (3.66)$$

onde  $a$  e  $b$  são as dimensões do guia, respectivamente, nas direções  $x$  e  $y$ ;  $m$  e  $n$  são inteiros,  $\beta$  é a constante de fase em rad/m e  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ , em rad/m, é o número de onda do espaço livre.

Para valores fixados de  $\beta$ ,  $m$  e  $n$ , será verificado como se comporta o erro relativo no cálculo de um determinado autovalor, em função do grau de refinamento da malha, mantendo constantes o grau do polinômio de interpolação e a regra de quadratura.

A taxa de convergência dos resultados é um critério fundamental na avaliação de desempenho de um dado método numérico.

Os principais resultados sobre estimativas de erro e taxas de convergência para problemas elípticos de autovalor, são oferecidas por Strang e Fix [44] e são dadas por:

$$\lambda_l \leq \lambda_l^h \leq \lambda_l + Ch^{2(k+1-m)} \lambda_l^{(k+1)/(2m)} \quad (3.67)$$

e

$$\left\| \mathbf{u}_{(l)}^h - \mathbf{u}_{(l)} \right\|_{m,\Omega} \leq Ch^{(k+1-m)} \lambda_l^{(k+1)/(2m)}, \quad (3.68)$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $h$  e  $\lambda_l$  (solução exata);  $h$  é o diâmetro do maior elemento da malha,  $k$  é a ordem da maior derivada incluída no espaço de aproximação (grau dos polinômios de base) e  $m$  é a ordem da maior derivada na formulação variacional (regularidade da solução). A taxa de convergência é definida como o expoente de  $h$ , ou seja,  $2(k+1-m)$ .

Cumpra fazer as seguintes observações a respeito destas estimativas [37]:

- O  $l$ -ésimo autovalor aproximado ( $\lambda_l^h$ ) é limitado inferiormente pelo  $l$ -ésimo autovalor exato ( $\lambda_l$ );
- A taxa de convergência dos autovalores é o dobro da dos autovetores, na norma- $H^m$ ;
- A presença de potências do autovalor exato nos segundos membros de (3.67) e (3.68) indica uma degradação na qualidade da aproximação para autopares de ordem superior (lembre-se que  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ , para operadores auto-adjuntos);
- O erro no cálculo do número de onda no espaço livre ( $k_0$ ) é o mesmo que o do autovalor. Com efeito, seja

$$\epsilon_\lambda = \frac{\lambda_l^h}{\lambda_l} - 1 \quad (3.69)$$

o erro no autovalor. Como o número de onda é igual à raiz quadrada do autovalor, segue-se que

$$\frac{(k_0)_l^h}{(k_0)_l} = \left( \frac{\lambda_l^h}{\lambda_l} \right)^{1/2} = (1 + \epsilon_\lambda)^{1/2} = 1 + \frac{\epsilon_\lambda}{2} + O(\epsilon_\lambda^2),$$

ou seja,

$$\epsilon_{k_0} = \frac{(k_0)_l^h}{(k_0)_l} - 1 = O(\epsilon_\lambda) = O(h^{2(k+1-m)}) \quad (3.70)$$

e, assim, deve-se esperar as mesmas taxas de convergência para números de onda, frequências ou comprimentos de onda;

- Tem-se também uma estimativa na norma- $L^2$ , para os autovetores [44]:

$$\|\mathbf{u}_{(l)}^h - \mathbf{u}_{(l)}\|_{0,\Omega} \leq Ch^\sigma \lambda_l^{2(k+1)/(2m)}, \quad (3.71)$$

onde  $\sigma = \min[k+1, 2(k+1-m)]$ .

Para elementos Lagrangeanos lineares ( $k=1$ ) e regularidade em  $H^1$ , obtêm-se taxas de convergência dadas por

$$\epsilon_{k_0} = O(h^2) \quad (3.72)$$

e

$$\|\mathbf{u}_{(l)}^h - \mathbf{u}_{(l)}\|_{1,\Omega} = O(h). \quad (3.73)$$

Para elementos quadráticos ( $k=2$ ) e mesma regularidade da solução, obtêm-se, analogamente, taxas dadas por

$$\epsilon_{k_0} = O(h^4) \quad (3.74)$$

e

$$\|\mathbf{u}_{(l)}^h - \mathbf{u}_{(l)}\|_{1,\Omega} = O(h^2). \quad (3.75)$$

É conveniente obter as taxas de convergência em termos do número de elementos da malha,  $n_e$ . No caso de malhas uniformes, aqui usadas, tem-se que  $h \propto n_e^{-1}$ . Substituindo na relação (3.70) e tomando o logaritmo decimal, obtêm-se as estimativas

$$\log \epsilon_{k_0} \leq \log C + (-1) \log n_e, \quad (3.76)$$

para  $k = 1$  e

$$\log \epsilon_{k_0} \leq \log C + (-2) \log n_e, \quad (3.77)$$

para  $k = 2$ .

A Fig. 3.3 ilustra a convergência do método RIP para os modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{01}$ ,  $TE_{11}$  e  $TM_{11}$  para o guia acima citado, com  $\beta = 0.01$  rad/m, em função do número de elementos da malha. Observa-se uma inclinação próxima de  $-2$ , o que confirma a taxa de convergência estimada para o caso de interpolação quadrática, de acordo com a equação (3.77) acima.

Nas Figs. 3.4, 3.5 e 3.6 apresentam-se as distribuições de campo magnético  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$ , respectivamente, para o modo  $TE_{10}$  do guia retangular em tela.

Nas Figs. 3.7, 3.8 e 3.9 apresentam-se as distribuições de campo magnético  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$ , respectivamente, para o modo  $TE_{01}$  do guia retangular definido acima

### 3.8 Formulação Mista

A solução aproximada do problema de autovalor em sua forma reduzida, pode ser formulada pelo seguinte problema variacional:

**Problema P:** Achar o par  $\{k_0^2, \mathbf{u}\} \in \mathbf{R}^+ \times K$ ,  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k_0^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in K, \quad (3.78)$$

onde

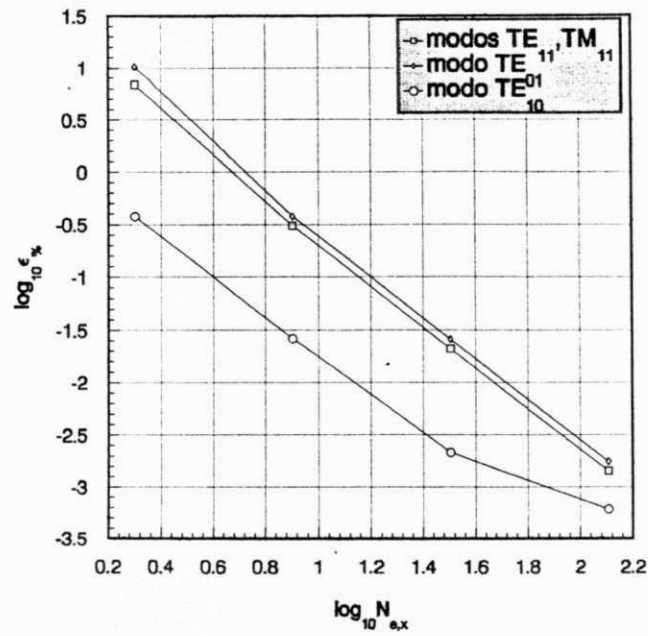


Figura 3.3: Convergência dos quatro primeiros autovalores para um guia retangular vazio, com  $a = 1.0$  cm,  $b = 0.5$  cm e  $\beta = 0.01$  rad/cm.

$$a(u, v) = (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in K \quad (3.79)$$

e

$$K = \{\mathbf{u} \in U \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \forall \mathbf{v} \in V\}, \quad (3.80)$$

implicaria na construção de espaços de elementos finitos  $K_h \subset K$ , o que seria inviável, dada a restrição  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  incluída na definição de  $K$ .

Como uma alternativa, tem-se a **formulação mista**, dada pelo seguinte problema:

**Problema M:** Achar o par  $\{\mathbf{u}, \lambda\} \in U \times V$  e os autovalores  $k_0^2 \in \mathbf{R}^+$ , tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\lambda, \mathbf{v}) = k_0^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in U \quad (3.81)$$

e

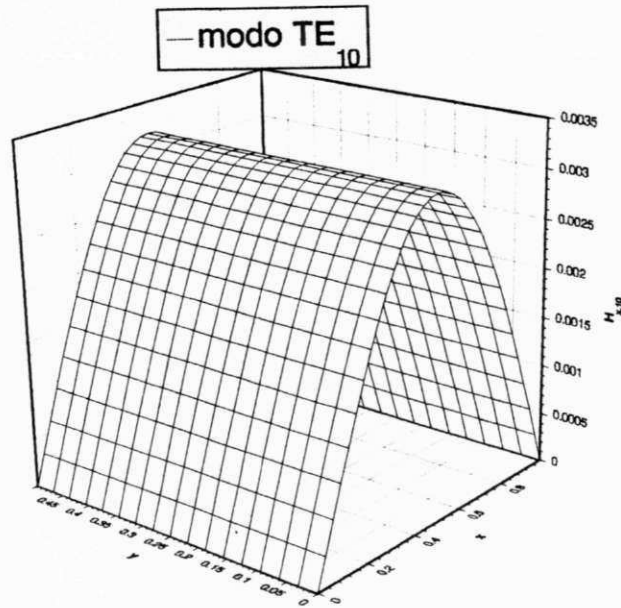


Figura 3.4: Componente  $H_x$  para o modo  $TE_{10}$  num guia retangular vazio, para  $a = 1.0$  cm,  $b = 0.5$  cm e  $\beta = 0.01$  rad/cm.

$$b(\mu, \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mu \in V, \quad (3.82)$$

onde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \quad (3.83)$$

e

$$b(\lambda, \mathbf{v}) = (\lambda, \nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \lambda \in V, \quad \forall \mathbf{v} \in U, \quad (3.84)$$

sendo  $\lambda$  o **multiplicador de Lagrange** [1] associado à restrição  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Visando a construção de um problema reduzido **penalizado**, porém definido em todo o espaço  $U$ , introduz-se a **forma regularizada**:

**Problema  $M_\epsilon$ :** Achar o par  $\{u, \lambda\} \in U \times V$  e os autovalores  $k_0^2 \in \mathbf{R}^+$ , tal que

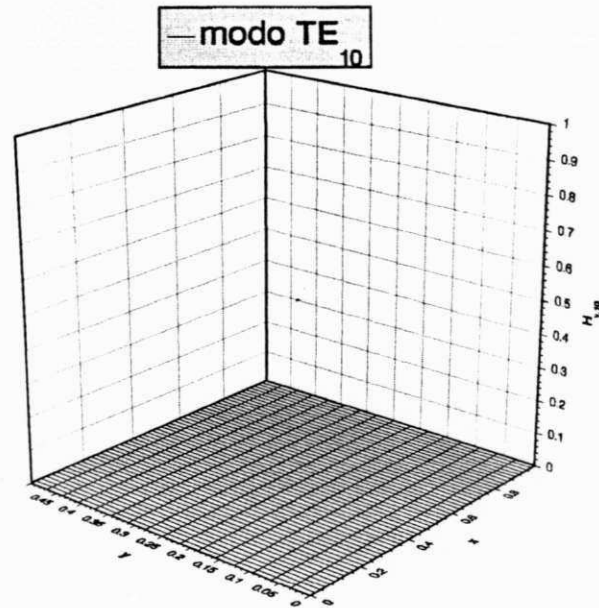


Figura 3.5: Componente  $H_y$  para o modo  $TE_{10}$  num guia retangular vazio, para  $a = 1.0$  cm,  $b = 0.5$  cm e  $\beta = 0.01$  rad/cm.

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\lambda, \mathbf{v}) = k_0^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in U \quad (3.85)$$

e

$$-\epsilon(\lambda, \mu) + b(\mu, \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mu \in V. \quad (3.86)$$

Explicitando o valor de  $\lambda$  em (3.86) e substituindo-o em (3.85), resulta o seguinte problema de autovalor penalizado:

**Problema  $P_\epsilon$ :** Achar  $u \in K$  e os autovalores  $k_0^2 \in \mathbf{R}^+$ , tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\epsilon}(\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v}) = k_0^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (3.87)$$



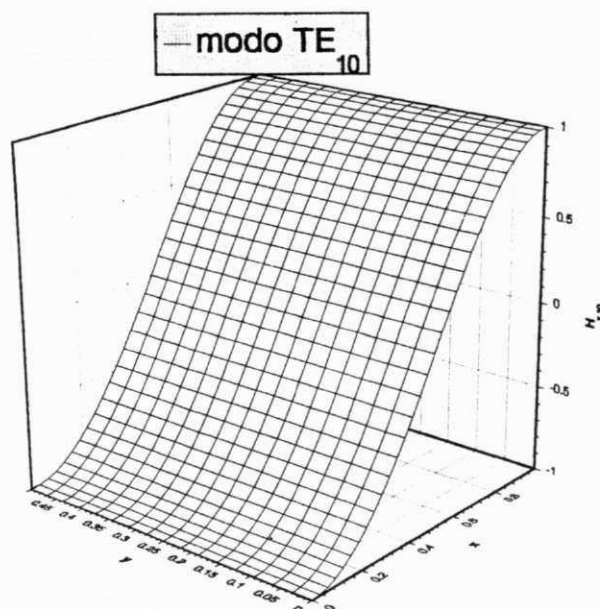


Figura 3.6: Componente  $H_z$  para o modo  $TE_{10}$  num guia retangular vazio, para  $a = 1.0$  cm,  $b = 0.5$  cm e  $\beta = 0.01$  rad/cm.

### 3.8.1 Aproximação por Elementos Finitos

Sejam  $U_h \subset U$  e  $V_h \subset V$  dois subespaços conformes de elementos finitos. Nestes subespaços, a aproximação de Galerkin para o **Problema P** é dada por:

**Problema  $P_h$** : Achar  $\mathbf{u}_h \in K_h$  e os autovalores  $k_0^2 \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = k_0^2 (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in K_h, \quad (3.88)$$

onde

$$K_h = \{\mathbf{v}_h \in U_h \mid b(\mu_h, \mathbf{v}_h) = 0, \forall \mu_h \in V_h\}. \quad (3.89)$$

Da mesma forma, a aproximação de Galerkin para o **Problema M** é:

**Problema  $M_h$** : Achar o par  $\{\mathbf{u}_h, \lambda_h\} \in U_h \times V_h$  tal que

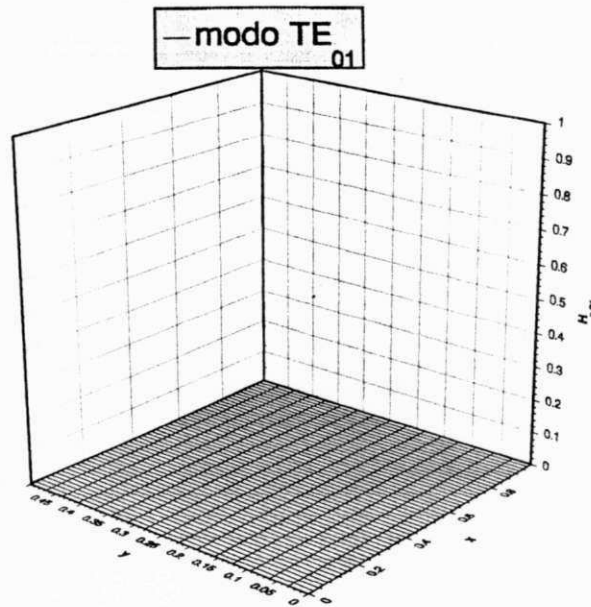


Figura 3.7: Componente  $H_x$  para o modo  $TE_{01}$  num guia retangular vazio, para  $a = 1.0$  cm,  $b = 0.5$  cm e  $\beta = 0.01$  rad/cm.

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\lambda_h, \mathbf{v}_h) = k_0^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in U_h \quad (3.90)$$

e

$$b(\mu_h, \mathbf{u}_h) = 0, \forall \mu_h \in V_h. \quad (3.91)$$

Vale salientar que as inclusões  $U_h \subset U$  e  $V_h \subset V$  não garantem que  $K_h \subset K$  e, portanto, o **Problema  $P_h$**  é, em geral, uma aproximação não-conforme para o **Problema  $P$** , resultando daí uma análise numérica não padronizada dos métodos de elementos finitos mistos.

A forma regularizada do problema misto consiste no problema:

**Problema  $M_{eh}$** : Achar o par  $\{\mathbf{u}_h, \lambda_h\} \in U_h \times V_h$  tal que

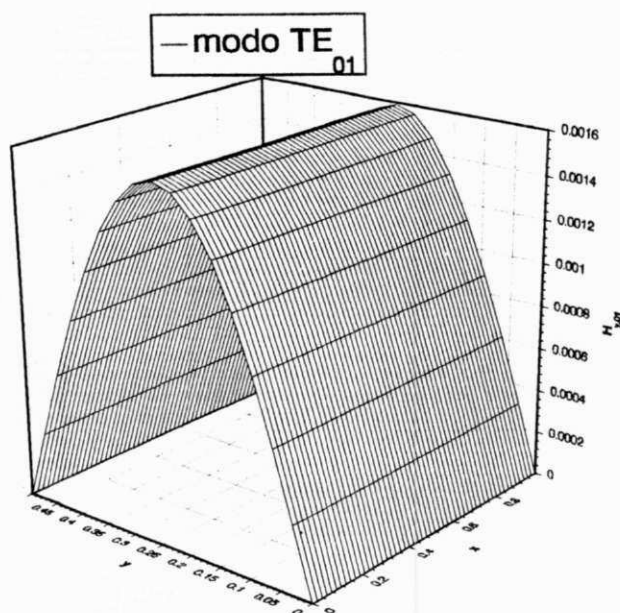


Figura 3.8: Componente  $H_y$  para o modo  $TE_{01}$  num guia retangular vazio, para  $a = 1.0$  cm,  $b = 0.5$  cm e  $\beta = 0.01$  rad/cm.

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\lambda, \mathbf{v}_h) = k_0^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h \quad (3.92)$$

e

$$-\epsilon(\lambda_h, \mu_h) + b(\mu_h, \mathbf{u}_h) = 0, \quad \forall \mu_h \in V_h. \quad (3.93)$$

Resolvendo a equação (3.93) em  $\lambda_h$ , obtém-se

$$\lambda_h = \frac{1}{\epsilon} \nabla_h \cdot \mathbf{u}_h, \quad (3.94)$$

onde  $\nabla_h$  denota o **divergente discreto** de  $\mathbf{u}_h$ , dado por

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{u}_h, \mu_h) = (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \mu_h), \quad \forall \mu_h \in V_h. \quad (3.95)$$

Substituindo (3.94) em (3.92), resulta no problema regularizado aproximado:

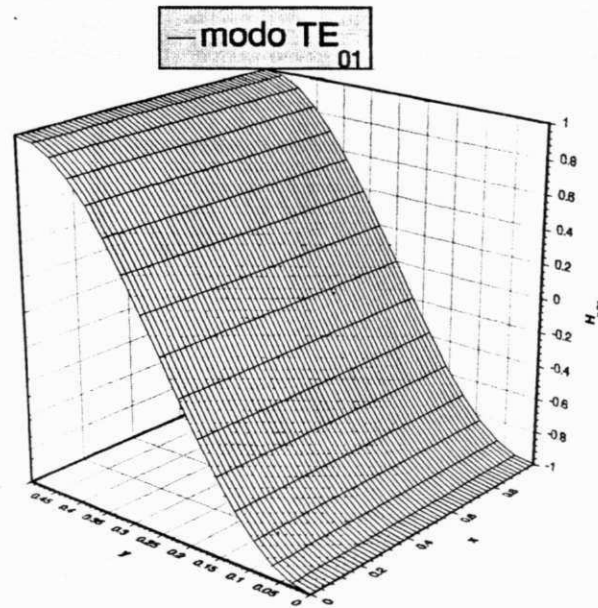


Figura 3.9: Componente  $H_z$  para o modo  $TE_{01}$  num guia retangular vazio, para  $a = 1.0$  cm,  $b = 0.5$  cm e  $\beta = 0.01$  rad/cm.

**Problema  $P_{eh}$ :** Achar  $\mathbf{u}_h \in U_h$  tal que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{\epsilon} (\nabla_h \cdot \mathbf{u}_h, \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h) = k_0^2 (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h. \quad (3.96)$$

O Problema  $P_{eh}$  é, em tudo, semelhante ao problema de autovalor penalizado com integração reduzida (RIP), abordado na Seção 3.7.1, cuja forma variacional consiste no:

**Problema  $P_{rh}$ :** Achar  $u_h \in U_h$  tal que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_h = k_0^2 (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h, \quad (3.97)$$

em que  $(\cdot, \cdot)_h$  denota que este termo é avaliado usando-se integração reduzida. Em muitas situações, esses métodos são equivalentes [92]. Contudo, tem-se observado que a formulação mista, que dá origem ao Problema  $P_{eh}$ , é, em muitos casos, mais consistente

e conduz a resultados mais estáveis. Alguns experimentos numéricos, realizados nesta tese, com elementos retilíneos distorcidos (isto é, não-estruturados), mostraram que os resultados obtidos com as formulações RIP e RMM são absolutamente idênticos.

### 3.8.2 Forma matricial

Em sua forma matricial, o **Problema**  $M_{ch}$  pode ser apresentado como

$$[S] \{U\} + [P]^T [\Lambda] = k_0^2 [T] \{U\} \quad (3.98)$$

e

$$-\epsilon [D] [\Lambda] + [P] \{U\} = \{0\}, \quad (3.99)$$

onde  $\{U\}$  e  $[\Lambda]$  representam os parâmetros nodais associados às interpolações de  $\mathbf{u}_h$  e  $\lambda_h$ , respectivamente. As matrizes  $[S]$ ,  $[P]$ ,  $[T]$  e  $[D]$  resultam da discretização das formas bilineares a elas associadas.

Explicitando  $[\Lambda]$  na equação (3.98), obtém-se

$$[\Lambda] = \frac{1}{\epsilon} [D]^{-1} [P] \{U\}. \quad (3.100)$$

Substituindo (3.100) em (3.98), resulta em

$$[S] \{U\} + \frac{1}{\epsilon} ([P]^T [D]^{-1} [P]) \{U\} = k_0^2 [T] \{U\}, \quad (3.101)$$

que representa a forma matricial do problema de autovalor penalizado. Se  $\lambda_h$  é interpolado descontinuamente, a matriz  $[D]$  será **bloco-diagonal**. Isto implica que a sua inversa é obtida no nível dos elementos, isto é

$$[D]^{-1} = \sum_{e=1}^{n_e} [D]_e^{-1}, \quad (3.102)$$

onde  $[D]_e$  representa a matriz associada à forma bilinear  $(\cdot, \cdot)$ , restringida ao elemento genérico  $e$ .

*Resultados numéricos comparativos serão apresentados no Capítulo 4, entre o método misto aqui desenvolvido e o método RIP.*

# Capítulo 4

## Aplicações

### 4.1 Generalidades

*Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver rotinas computacionais básicas de elementos finitos lagrangeanos para a simulação de campos eletromagnéticos, estáticos ou dinâmicos, em duas e três dimensões, que sirvam de ponto de partida para o desenvolvimento de pacotes computacionais com características específicas. Uma maior ênfase será dada às aplicações em altas frequências. Assim, os problemas que se deseja resolver para aplicações a dispositivos de microondas, de ondas milimétricas e ópticos, se enquadram em duas categorias:*

- **Problemas de resposta escalares em duas dimensões:** campos elétricos formulados através de um potencial elétrico escalar  $\varphi$ , objetivando uma análise quase-estática de linhas de transmissão de microondas, a múltiplos condutores e dielétricos, incluindo o efeito da anisotropia. Alguns problemas desta categoria já foram apresentados em [98].
- **Problemas de ondas guiadas:** análise de onda completa da propagação de campos eletromagnéticos em guias de onda cilíndricos gerais, axialmente uniformes, encerrando materiais lineares, passivos, não-dispersivos e não-dissipativos,

porém podendo ser **não-homogêneos** e **anisotrópicos**. A análise será formulada em termos das três componentes do campo magnético **H**.

Para cada formulação aqui implementada foi desenvolvido um programa computacional, com estrutura modular, seguindo a mesma metodologia do pacote DLEARN [37]. Obviamente, o pacote teve que sofrer algumas modificações, visando adaptá-lo à classe e às especificidades de cada problema.

Os dados de entrada tais como coordenadas nodais, conectividade dos elementos e códigos de atividade nodal (condições de contorno), para cada uma das formulações implementadas, foram produzidos por um programa gerador de malhas bidimensionais, denominado GEM2D [99]. Este programa possibilita gerar malhas bidimensionais de elementos finitos, semi-automaticamente, a partir de superblocos especificados pelo usuário, contendo informações iniciais sobre coordenadas, conectividade, códigos de condição de contorno, tipo de elementos da malha refinada (elementos triangulares ou quadriláteros, de primeira, segunda ou terceira ordem), ou ainda uma seleção entre malhas uniformes ou com gradação quadrática, nas direções coordenadas. Outras modificações importantes foram introduzidas neste programa, tais como a geração de códigos nodais de condição de contorno e dos cossenos diretores das normais nodais.

As rotinas que foram mantidas, praticamente sem alterações, correspondem às seguintes etapas do MEF:

- Abertura e gerenciamento de áreas em memória rápida, usando as técnicas de armazenamento compacto e dimensionamento dinâmico.
- Aplicação explícita das condições de contorno essenciais.
- Construção das funções de base para elementos isoparamétricos, retangulares e triangulares.
- Integração numérica para obtenção das matrizes elementares.
- Montagem das matrizes globais.



No caso específico dos problemas de resposta, o sistema algébrico resultante é resolvido pelo método de eliminação de Crout, seguido das operações de redução progressiva, escalonamento diagonal e retro-substituição. Este mesmo algoritmo é usado na fase de condensação estática [37] do método misto, para problemas de autovalor.

Por outro lado, nos problemas de ondas guiadas, o problema algébrico generalizado de autovalor/autovetor resultante é resolvido através de rotinas específicas que compõem o pacote SSPACE [100]. Essas rotinas, baseadas no método de iteração em subespaços [100], são bastante eficientes e foram desenhadas para matrizes reais, simétricas, esparsas, de banda e de grande porte, características estas encontradas, via de regra, em matrizes geradas pelo MEF.

Visando estender a análise de elementos finitos a problemas de guias de onda contendo materiais isotrópicos ou anisotrópicos com perfil continuamente variável, foi introduzido um módulo de cálculo que possibilita especificar um perfil escalonado, linear, parabólico, exponencial ou gaussiano, para cada elemento do tensor permissividade dielétrica relativa.

O pós-processamento dos resultados, tais como gráficos  $x - y$ , curvas de nível ou superfícies, é realizado através do pacote gráfico GRAFTOOL [101].

Isto posto, passa-se a discutir os resultados obtidos com uma análise de onda completa, pelo método dos elementos finitos, na solução de alguns problemas típicos de campos eletromagnéticos guiados, envolvendo geometrias e materiais mais complexos.

## 4.2 Problemas de Ondas Guiadas

Após a análise de convergência apresentada no capítulo anterior, cuja finalidade foi validar a implementação computacional, foram abordados alguns problemas de interesse prático, envolvendo um maior grau de complexidade.

Como um primeiro exemplo, considerou-se um guia retangular vazio, como ilustrado na Fig. 4.1.

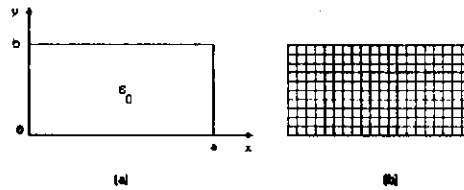


Figura 4.1: Guia retangular vazio, com  $a = 2b = 2$  cm: (a) domínio de solução; (b) malha utilizada (200 elementos de segunda ordem).

A Tabela 4.1 apresenta uma análise comparativa dos 9 primeiros autovalores ( $k_0^2$ ) obtidos, respectivamente, pelos métodos RIP e RMM, com elementos lagrangeanos, e pelo método dos elementos de aresta [33]. Observa-se uma maior precisão dos resultados obtidos pelos métodos desenvolvidos nesta tese (RIP e RMM).

Nas Figs. 4.2, 4.3 e 4.4, observam-se as configurações espaciais das três componentes de campo magnético, correspondentes, respectivamente, aos modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{01}$  e  $TE_{20}$ , em corte ( $\beta = 0,01$  rad/cm).

Como um segundo exemplo, foi analisado o problema de um guia retangular com dielétrico não-homogêneo, como ilustrado na Fig. 4.5.

A Tabela 4.2 apresenta uma comparação dos 6 primeiros autovalores ( $k_0^2$ ) obtidos, respectivamente, pelos métodos RIP e RMM com elementos lagrangeanos e pelo método dos elementos de aresta [33]. Uma vez mais, os resultados obtidos pelos métodos desta tese (RIP e RMM) são mais precisos.

Eratos			Computados					
			Esta tese			[33]		
$n$	Modo	$\beta = 0$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
1	$TE_{10}$	2,4674	2,4675	3,4674	6,4674	2,4709	3,4674	6,4709
2	$TE_{01}$	9,8697	9,8699	10,870	13,870	-	-	-
3	$TE_{20}$	9,8697	9,8699	10,870	13,870	9,9251	10,925	13,925
4	$TE_{11}$	12,337	12,337	13,337	16,337	12,345	13,345	16,345
5	$TM_{11}$	12,337	12,337	13,337	16,337	12,424	13,424	16,424
6	$TE_{21}$	19,739	19,740	20,740	23,740	19,777	20,777	23,777
7	$TM_{21}$	19,739	19,740	20,740	23,740	20,075	21,075	24,075
8	$TE_{30}$	22,207	22,209	23,209	26,209	22,489	23,489	26,489
9	$TE_{31}$	32,076	32,079	33,079	36,079	32,156	33,156	36,156

Tabela 4.1: Autovalores de um guia retangular vazio, com  $a = 2b = 2$  cm.

Computados					
$n$	Esta tese			[33]	
	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
1	2,0478	2,8728	5,3306	2,8766	5,3361
2	6,0825	6,6932	8,5196	6,7152	8,5385
3	7,5877	8,1960	10,015	8,1964	10,0268
4	8,0863	8,8894	11,281	8,9437	11,340
5	8,4360	9,3891	12,246	9,4208	12,2581
6	12,069	12,671	14,470	12,674	14,488

Tabela 4.2: Autovalores de um guia retangular não-homogêneo, com  $a = 2b = 2$  cm.

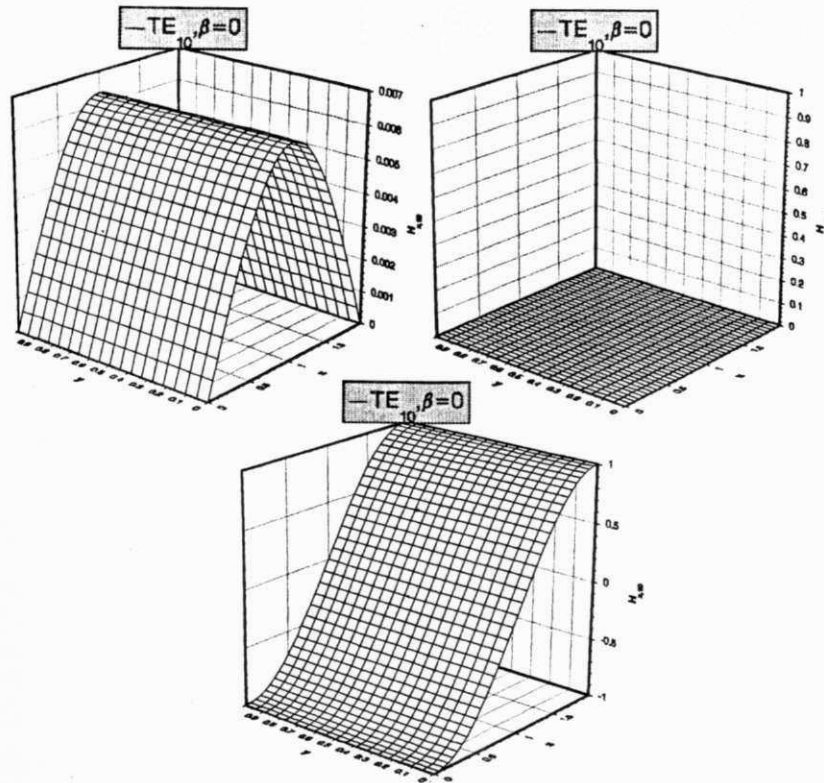


Figura 4.2: Modo  $TE_{10}$  para um guia retangular vazio, com  $a = 2b = 2\text{cm}$ ;  $\beta = 0,01\text{rad/cm}$ : resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM.

Nas Figs. 4.6, 4.7 e 4.8, observam-se as configurações espaciais das três componentes de campo magnético, correspondentes, respectivamente, aos três primeiros modos híbridos, em corte ( $\beta = 0,01\text{ rad/cm}$ ), da estrutura.

A Fig. 4.9 apresenta um gráfico de setas do campo magnético transversal, dos três primeiros modos do guia não-homogêneo em questão.

Como terceiro exemplo, considerou-se o problema de um guia retangular vazio com dupla reentrância simétrica, como ilustra a Fig. 4.10, a seguir

Na Tabela 4.3, apresentam-se resultados comparativos dos 7 primeiros autovalores ( $k_0^2$ ) obtidos, respectivamente, pelo método dos elementos finitos com integração reduzida transversal (STRIP) e pelo método dos elementos finitos de aresta [33]. Os resultados obtidos com o método STRIP são mais precisos do que os divulgados por Bermúdez e Pedreira [33].

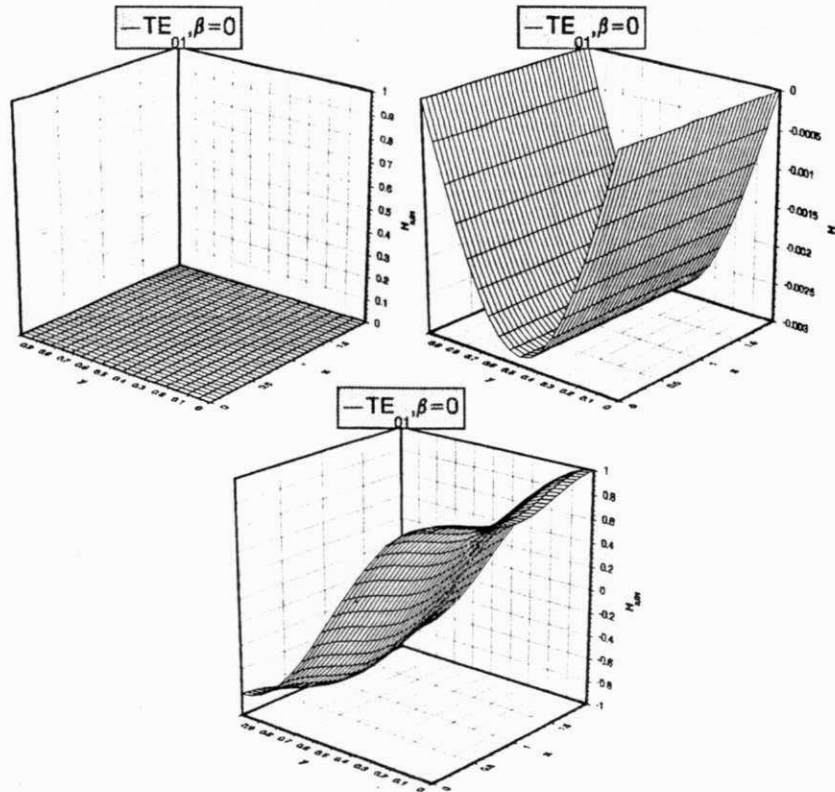


Figura 4.3: Modo  $TE_{01}$  para um guia retangular vazio, com  $a = 2b = 2\text{cm}$ ;  $\beta = 0,01\text{rad/cm}$ : resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM.

O método STRIP se constitui, por assim dizer, em uma crítica ao método dos elementos finitos mistos adotados por aqueles e por diversos outros autores: é possível obter-se autovalores mais precisos, muito embora usando-se uma formulação variacional matematicamente inconsistente. É necessário desenvolver uma análise numérica do método STRIP e avaliar as suas implicações, o que será objeto de investigações em continuação a esta tese.

Na Fig. 4.11, observam-se os gráficos de setas dos campos magnéticos transversais, dos 4 primeiros modos do guia retangular vazio a dupla reentrância, em questão.

O exemplo a seguir corresponde à análise do guia retangular vazio abordado no primeiro exemplo, usando-se os métodos RIP e o método misto (RMM), considerando-se uma malha distorcida, como ilustra a Fig. 4.12 a seguir.

Na Tabela 4.4 são apresentados os 6 primeiros autovalores calculados, respectivamente, pelo método misto (RMM) e pelo método RIP. Observa-se que os resultados são

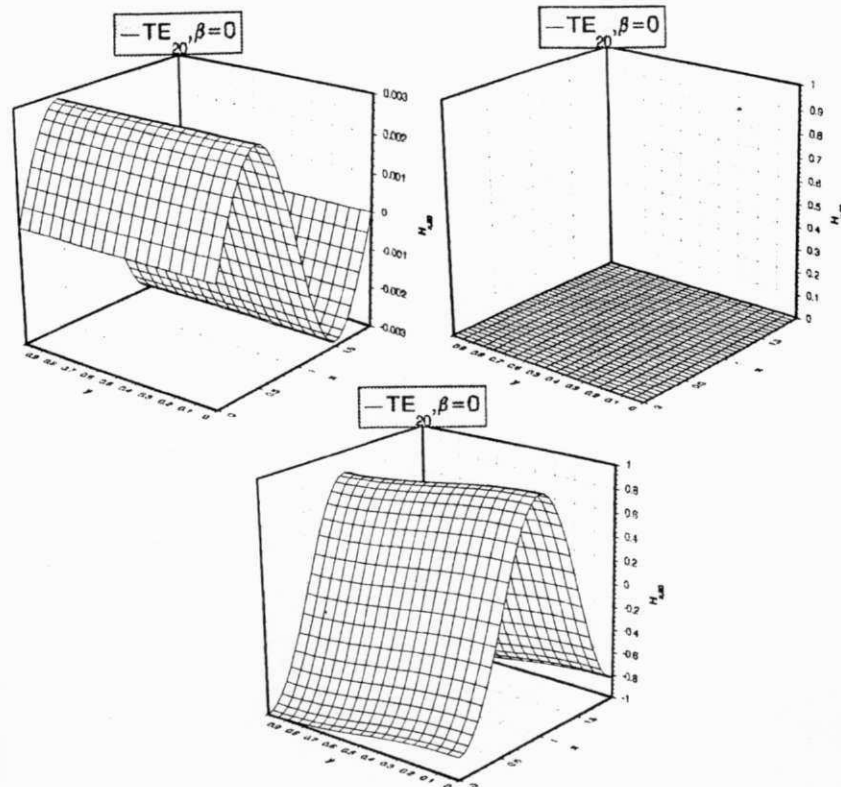


Figura 4.4: Modo  $TE_{20}$  para um guia retangular vazio, com  $a = 2b = 2$  cm;  $\beta = 0,01$  rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM.

absolutamente idênticos, uma indicação de que os dois métodos são bastante robustos, pelo menos para uma distorção moderada, como é o presente caso. Devido a limitações do gerador de malhas utilizado, não foi possível avaliar o desempenho dos dois métodos para malhas com distorções mais acentuadas, como, por exemplo, as que são obtidas com geradores adaptativos. É necessário efetuar este tipo de teste, o que será objeto de investigações em continuação à esta tese.

Como quinto exemplo, foi analisado um guia dielétrico retangular isotrópico, como ilustra a Fig. 4.13 a seguir.

Devido à simetria da estrutura, é suficiente analisar apenas um quarto dela. Supondo paredes elétricas artificiais sobre os planos  $x = 0, a$  e  $y = 0, b$ , bastante afastadas do núcleo dielétrico, a estrutura ilimitada original pode ser substituída por uma estrutura limitada correspondente. Os planos de simetria em  $x = a/2$  e  $y = b/2$  podem ser paredes elétricas (PE) ou magnéticas (PM), em conformidade com as características

Computados					
	Esta tese			[33]	
$n$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
1	0,0001	1,0000	4,0000	2,0191	5,0191
2	0,9976	1,9971	4,9958	11,5281	14,4281
3	10,362	11,361	14,361	11,533	14,533
4	10,365	11,364	14,364	12,037	15,037
5	10,670	11,670	14,670	23,487	26,487
6	22,209	23,207	26,203	29,528	32,528
7	27,600	28,600	31,600	29,892	32,892

Tabela 4.3: Autovalores de um guia retangular vazio a dupla reentrância, com  $a = 2b = 2$  cm,  $s = a/3$  e  $h = b/3$ .

Computados		
	RMM	RIP
$n$	$\beta = 0$	$\beta = 0$
1	2,4678	2,4678
2	9,8707	9,8707
3	9,8837	9,8837
4	10,000	10,000
5	12,343	12,343
6	12,345	12,345

Tabela 4.4: Autovalores de um guia retangular vazio, com  $a = 2b = 2$  cm e malha distorcida.

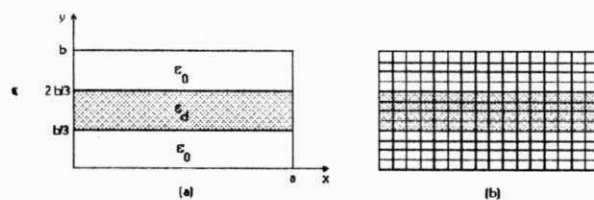


Figura 4.5: Guia retangular não-homogêneo, com  $a = 2b = 2$  cm: (a) domínio de solução; (b) malha utilizada (196 elementos de segunda ordem).

dos modos desejados. As condições de contorno sobre os planos de simetria estão sumarizadas na Tabela 4.5 a seguir.

As Figs. 4.14 e 4.15 mostram os diagramas de dispersão deste guia, onde a frequência normalizada  $V$  e a constante de fase normalizada  $B$  são definidas, respectivamente, pelas expressões

$$V = \frac{k_0 t \sqrt{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}}{\pi} \quad (4.1)$$

e

$$B = \frac{(\beta/k_0)^2 - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}. \quad (4.2)$$

Observa-se uma boa concordância com os resultados obtidos através de elementos de aresta [50]. Os pequenos desvios podem ser corrigidos através de uma escolha criteriosa das dimensões da blindagem artificial e de um maior grau de refinamento da malha na



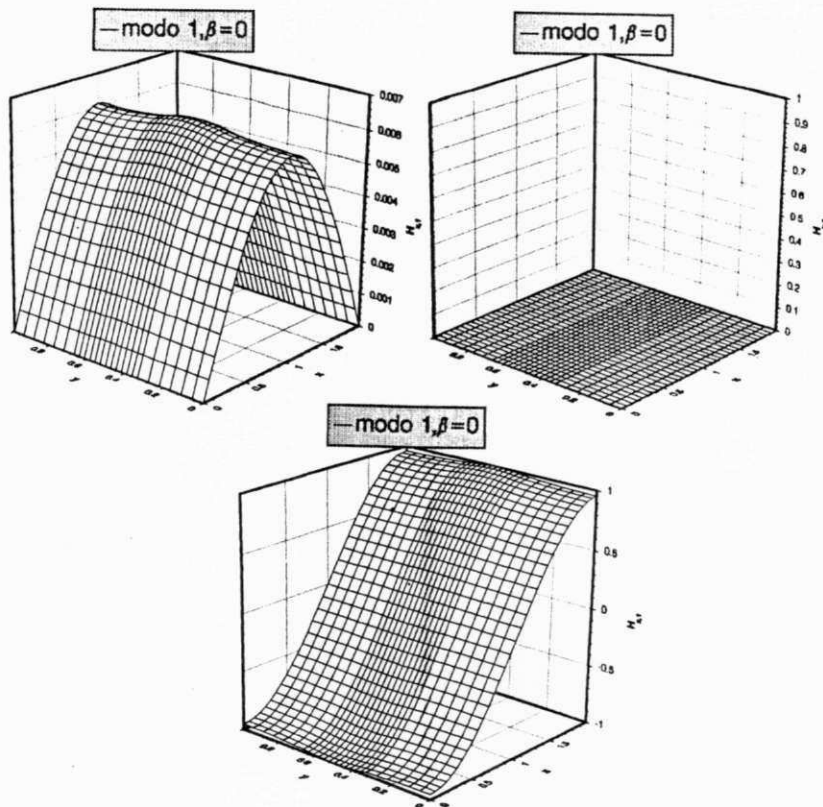


Figura 4.6: Modo 1 para um guia de ondas retangular não-homogêneo, com  $a = 2b = 2$  cm;  $\beta = 0,01$  rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM.

vizinhança das bordas do núcleo dielétrico, de molde a minimizar os efeitos dos modos de volume (isto é, da blindagem), sobre os do guia dielétrico propriamente dito [102].

No sexto exemplo, analisou-se um guia metálico quadrado com revestimento dielétrico isotrópico, como mostra o detalhe da Fig. 4.16, onde se observam os diagramas de dispersão para os 5 primeiros modos da estrutura.

A Fig. 4.17 mostra a distribuição espacial das componentes  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$ , para o modo dominante ( $E_{11}^y$ ) da estrutura, podendo-se observar, claramente, o efeito do revestimento dielétrico, como uma pequena perturbação sobre a distribuição de campo correspondente para o guia vazio. Observa-se, também, a complementaridade entre este guia e o guia vazio correspondente.

Como uma variante do exemplo anterior, o próximo se refere a um guia metálico quadrado com um anel dielétrico quadrado e isotrópico, situado coaxialmente em seu interior, como ilustrado no detalhe da Fig. 4.18. Nesta figura, observam-se os diagramas

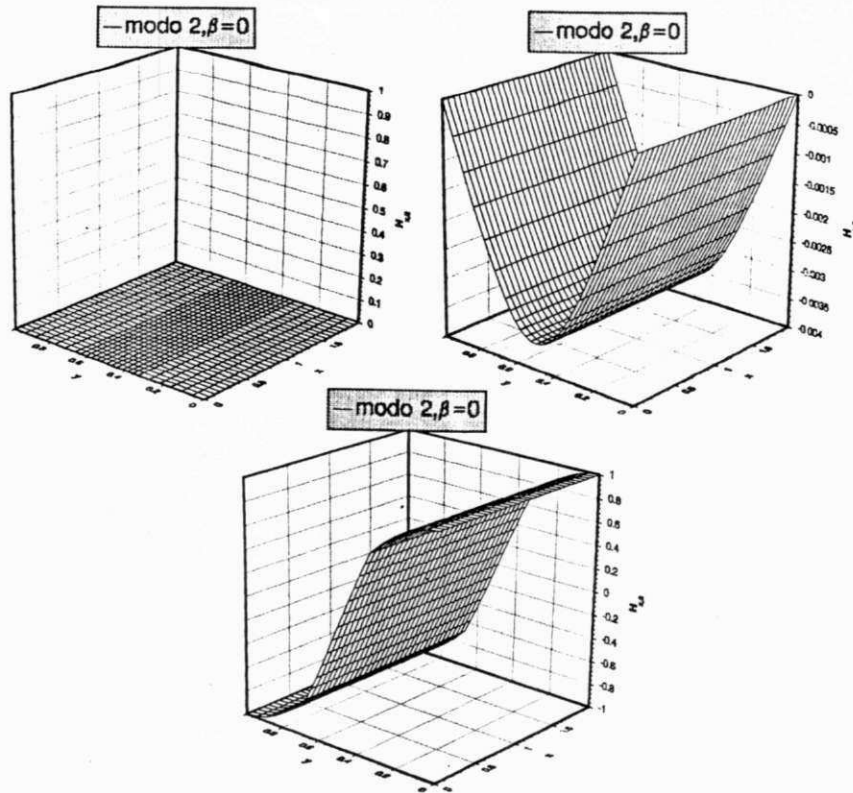


Figura 4.7: Modo 2 para um guia de ondas retangular não-homogêneo, com  $a = 2b = 2$  cm;  $\beta = 0,01$  rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM.

de dispersão dos 5 primeiros modos da estrutura.

Na Fig. 4.19, nota-se claramente o efeito do anel dielétrico sobre as componentes  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  da estrutura.

Nos exemplos a seguir, analisam-se os problemas de um guia canal e um guia costela, ambos isotrópicos, situados no interior de um guia retangular, como ilustram os detalhes das Figs. 4.20 e 4.22, respectivamente. Nestas mesmas figuras, observam-se os diagramas de dispersão para o modo dominante ( $E_{11}^y$ ) das duas estruturas, constatando-se haver uma boa concordância com os resultados de Koshiba et alli [59]. As pequenas diferenças podem ser minimizadas através de uma escolha criteriosa das dimensões da blindagem artificial e do grau de refinamento da malha de elementos finitos. Como se sabe, essas dimensões podem levar a uma conversão de modos híbridos, tais como ondas complexas, em frequências nas quais os modos não se acham ainda completamente confinados ao núcleo de maior constante dielétrica [102].

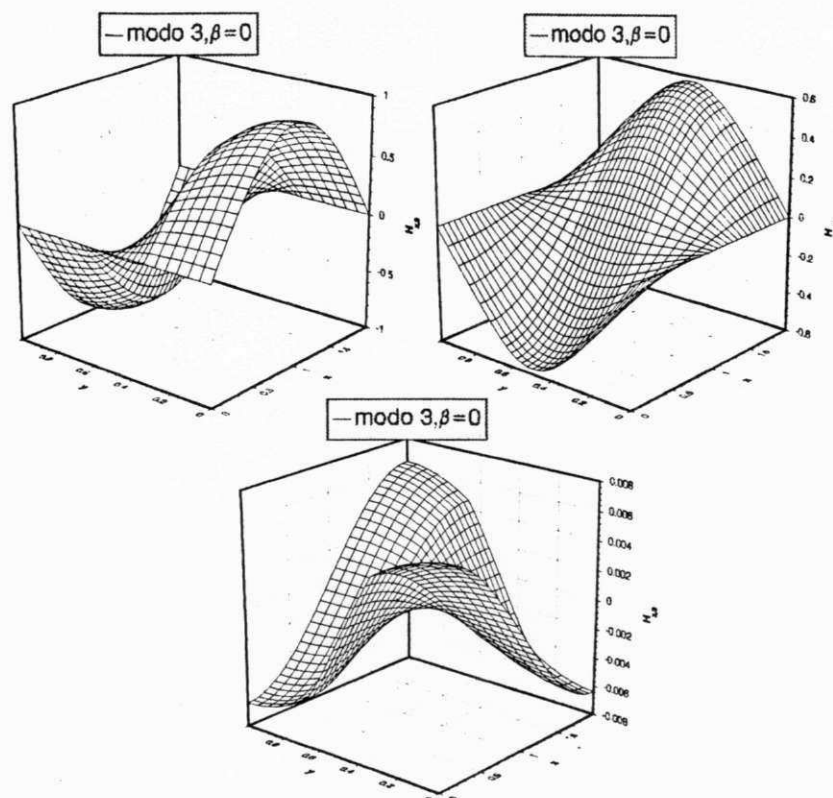


Figura 4.8: Modo 3 para um guia de ondas retangular não-homogêneo, com  $a = 2b = 2$  cm;  $\beta = 0,01$  rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM.

Na Fig. 4.21, observam-se as distribuições espaciais das componentes de campo magnético  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$ , respectivamente, para o modo  $E_y^{11}$  (em corte) do guia canal, podendo-se observar o efeito dos diferentes dielétricos sobre a distribuição de campo magnético na estrutura.

Na Fig. 4.22, observam-se os diagramas de dispersão para o modo dominante ( $E_{11}^y$ ) de um guia costela.

A Fig. 4.23, por sua vez, apresenta as distribuições das componentes  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$ , respectivamente, para o modo  $E_{11}^y$  (em corte) do guia costela. Observam-se, igualmente, o efeito dos diferentes dielétricos sobre as distribuições de campo na estrutura.

Os problemas aqui discutidos foram resolvidos através do pacote computacional AUTO2D<sup>1</sup> (programas RIP2D, STRIP2D e AUTMIX2D) desenvolvido a partir do programa básico DLEARN [37], devidamente modificado de modo a possibilitar a solução

<sup>1</sup>Desenvolvido durante a elaboração desta tese.

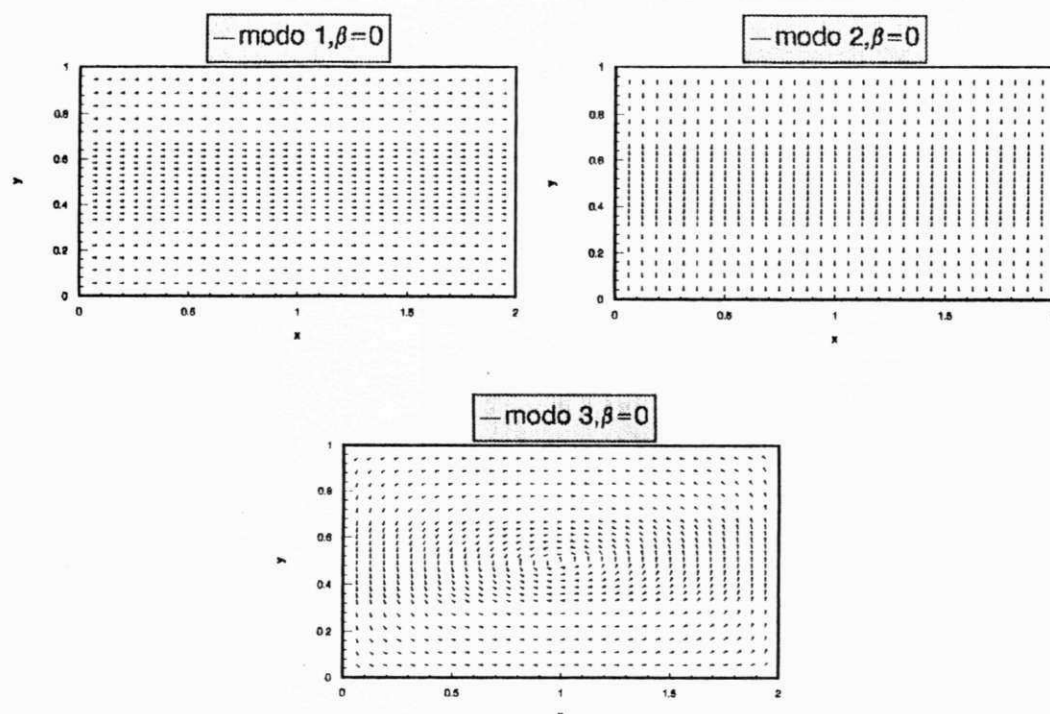


Figura 4.9: Gráfico de setas do campo magnético transversal dos 3 primeiros modos de um guia retangular não-homogêneo, com  $a = 2b = 2$  cm;  $\beta = 0,01$  rad/cm: resultados obtidos pelos métodos RIP e RMM.

de problemas matriciais de autovalor/autovetor generalizados, pelo método da iteração em subespaços [100].

As diversas malhas usadas na solução dos problemas, foram construídas com auxílio do gerador semi-automático GEM2D referido acima, através de dados de entrada tais como coordenadas nodais, códigos nodais de condição de contorno e conectividade. Estes dados são especificados sobre uma malha simples inicial, sendo posteriormente refinados, segundo uma estratégia que depende das particularidades e da complexidade de cada problema.

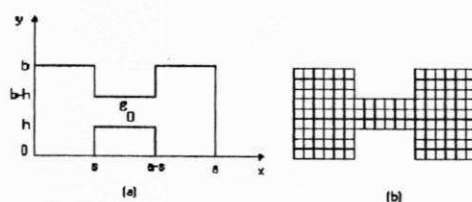


Figura 4.10: Guia retangular vazia a dupla reentrância simétrica, com  $a = 2b = 2$  cm,  $s = a/3$ ,  $h = b/3$  e  $\beta = 0,01$  rad/cm: (a) domínio de solução; (b) malha utilizada (126 elementos de segunda ordem).

Condições sobre os planos de simetria				$E^x$		$E^y$	
$x = a/2$		$y = b/2$		$m$	$n$	$m$	$n$
$E_y = E_z = H_x = 0$	(PE)	$E_y = H_x = H_z = 0$	(PM)	ímpar	ímpar	par	par
$E_x = H_y = H_z = 0$	(PM)	$E_y = H_x = H_z = 0$	(PM)	par	ímpar	ímpar	par
$E_y = E_z = H_x = 0$	(PE)	$E_x = E_z = H_y = 0$	(PE)	ímpar	par	par	ímpar
$E_x = H_y = H_z = 0$	(PM)	$E_x = E_z = H_y = 0$	(PE)	par	par	ímpar	ímpar

Tabela 4.5: Condições sobre os planos de simetria de um guia dielétrico retangular.

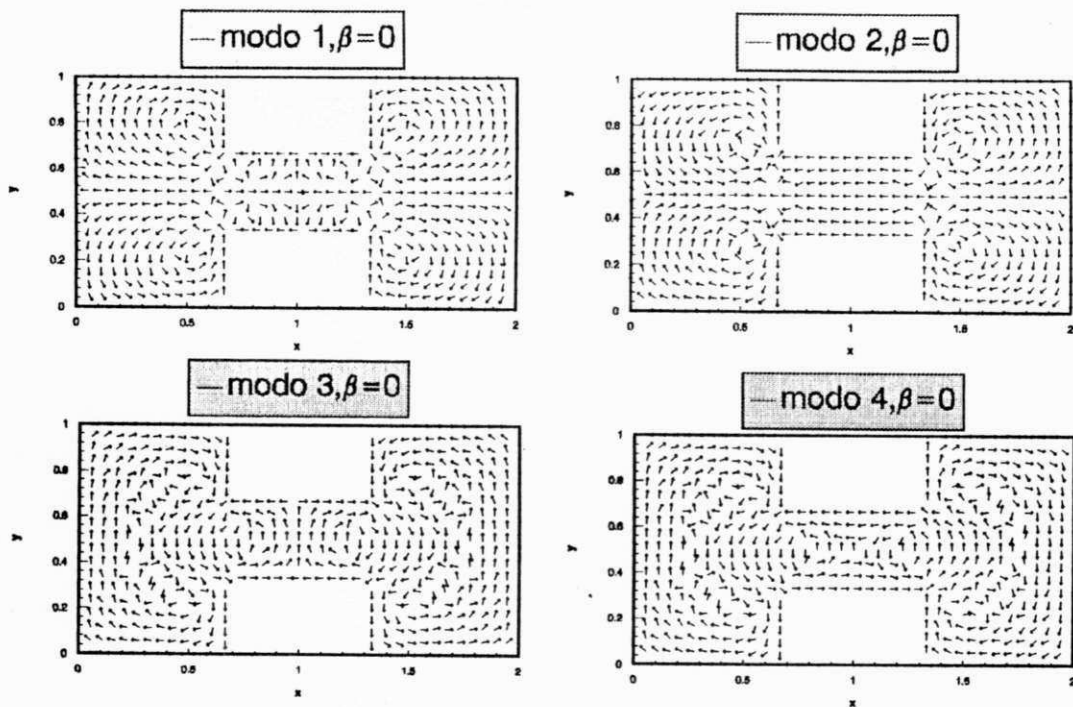
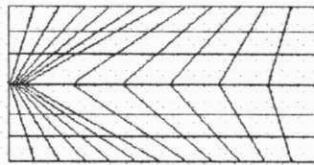


Figura 4.11: Gráfico de setas do campo magnético transversal dos 4 primeiros modos de um guia retangular vazio a dupla reentrância, com  $a = 2b = 2$  cm,  $s = a/3$ ,  $h = b/3$  e  $\beta = 0,01$  rad/cm.



*Figura 4.12: Malha de elementos finitos distorcidos, para uma guia retangular vazia, com  $a = 2b = 2$  cm (72 elementos de segunda ordem).*

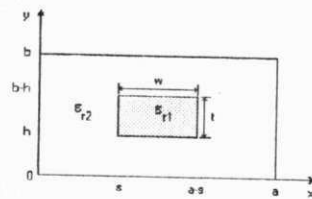


Figura 4.13: Guia dieléctrico rectangular isotrópico blindado:  $a = 10t$ ,  $b = 5t$ ,  $w = 2t$ ,  $s = 4t$ ,  $h = 2t$ ;  $\epsilon_{r1} = 1,1025$  e  $\epsilon_{r2} = 1,0$ .



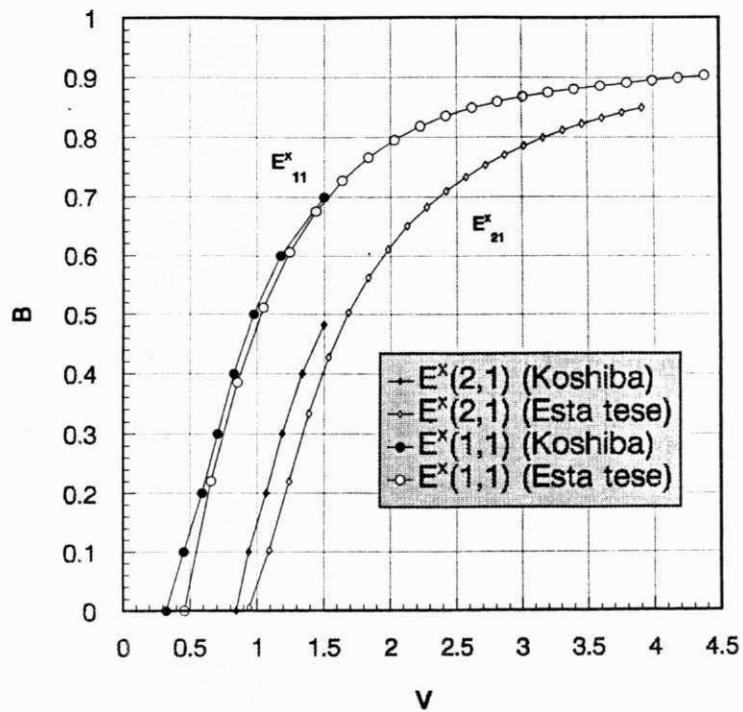


Figura 4.14: Modos  $E_{11}^x$  e  $E_{21}^x$  de um guia dielétrico retangular isotrópico, com  $a = 10t$ ,  $b = 5t$ ,  $s = 4t$ ,  $w = 2t$ ,  $h = 2t$ ;  $\epsilon_{r1} = 1, 1025$ ;  $\epsilon_{r2} = 1, 0$ : métodos RIP e RMM.

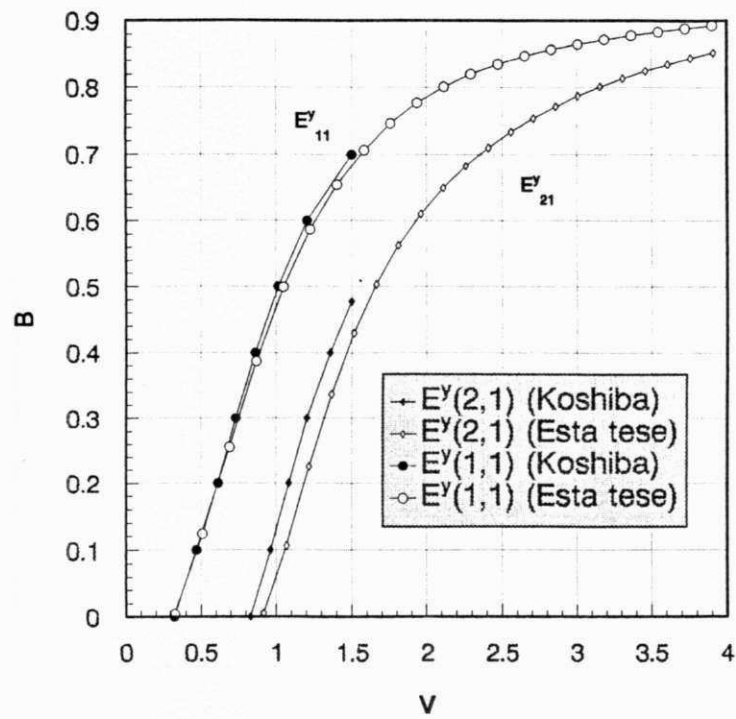


Figura 4.15: Modos  $E_{11}^y$  e  $E_{21}^y$  de um guia dielétrico retangular isotrópico, com  $a = 10t$ ,  $b = 5t$ ,  $s = 4t$ ,  $w = 2t$ ,  $h = 2t$ ;  $\epsilon_{r1} = 1, 1025$  e  $\epsilon_{r2} = 1, 0$ : métodos RIP e RMM.

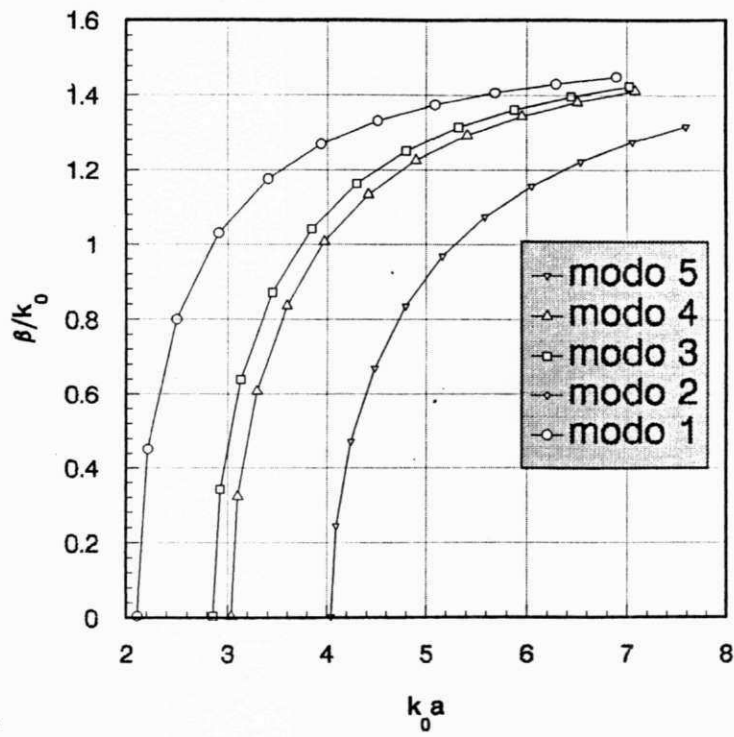


Figura 4.16: Diagramas de dispersão de um guia metálico quadrado, com revestimento dielétrico isotrópico, com  $t/a = 0,25$ ;  $\epsilon_d = 2,45$ .

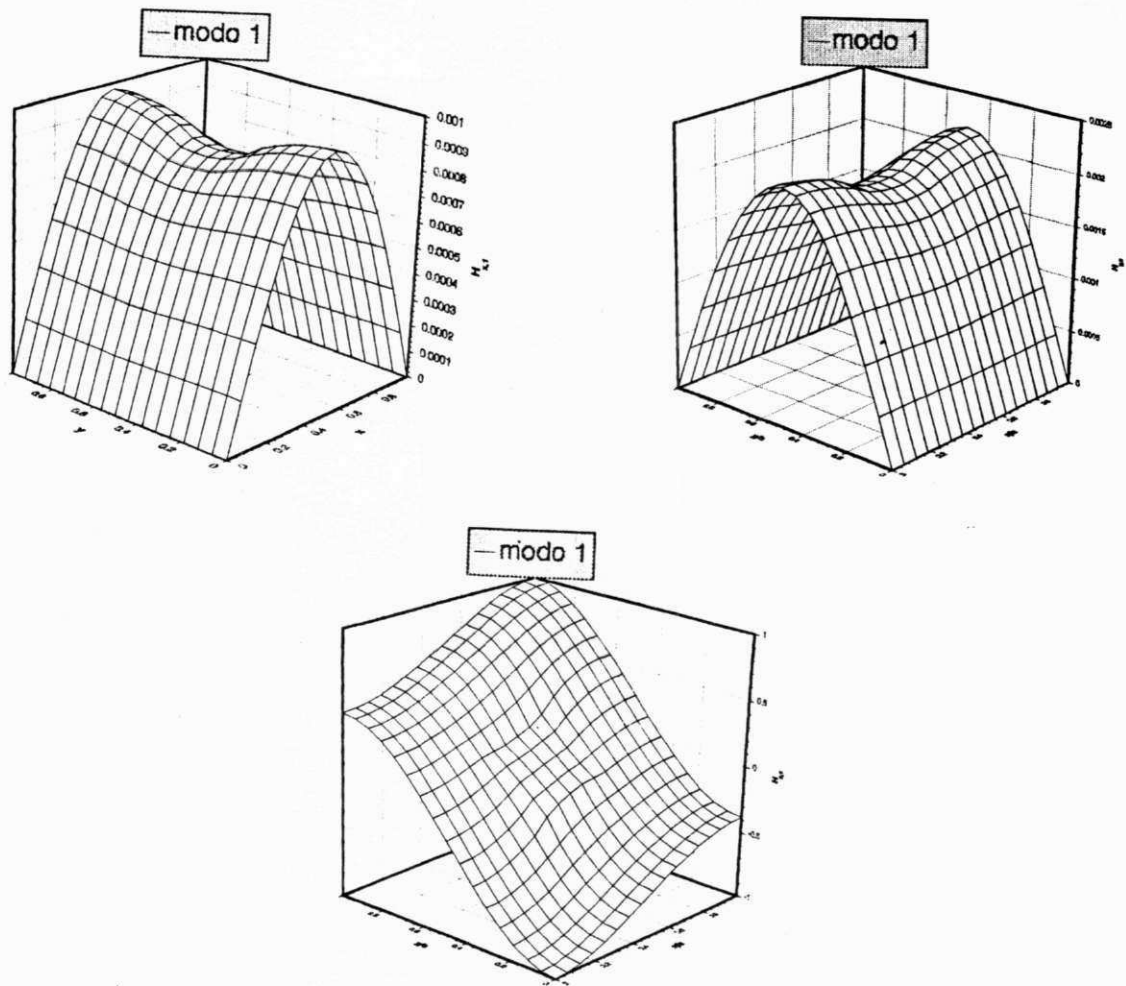


Figura 4.17: Componentes  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  do modo dominante, em corte ( $\beta = 0,01$  rad/cm), do guia quadrado com revestimento dielétrico isotrópico.

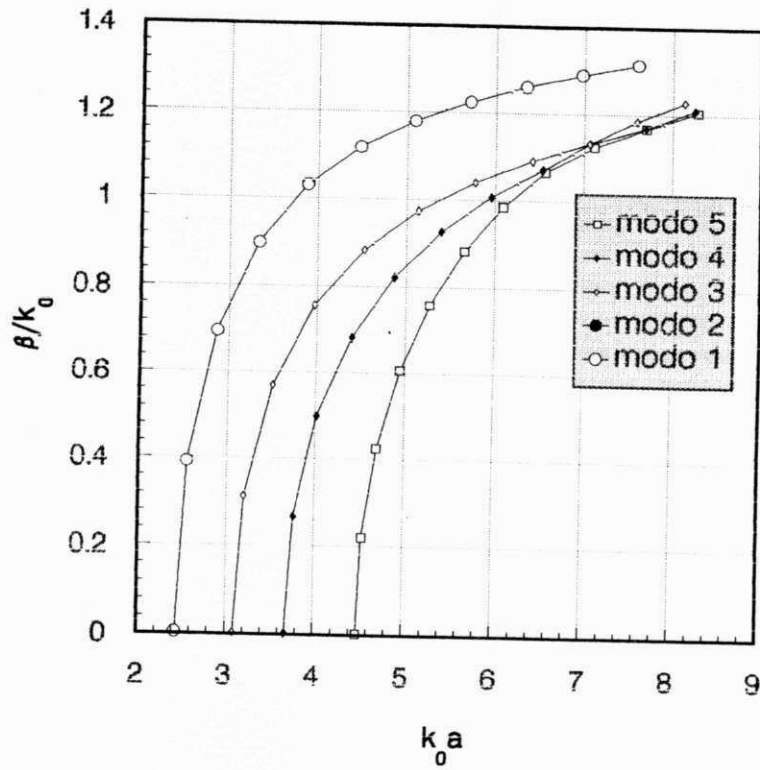


Figura 4.18: Diagramas de dispersão de um guia metálico quadrado com anel dielétrico quadrado coaxial e isotrópico, com  $t/a = 0,25$ ;  $d/a = 0,5$ ;  $\epsilon_d = 2,45$ .

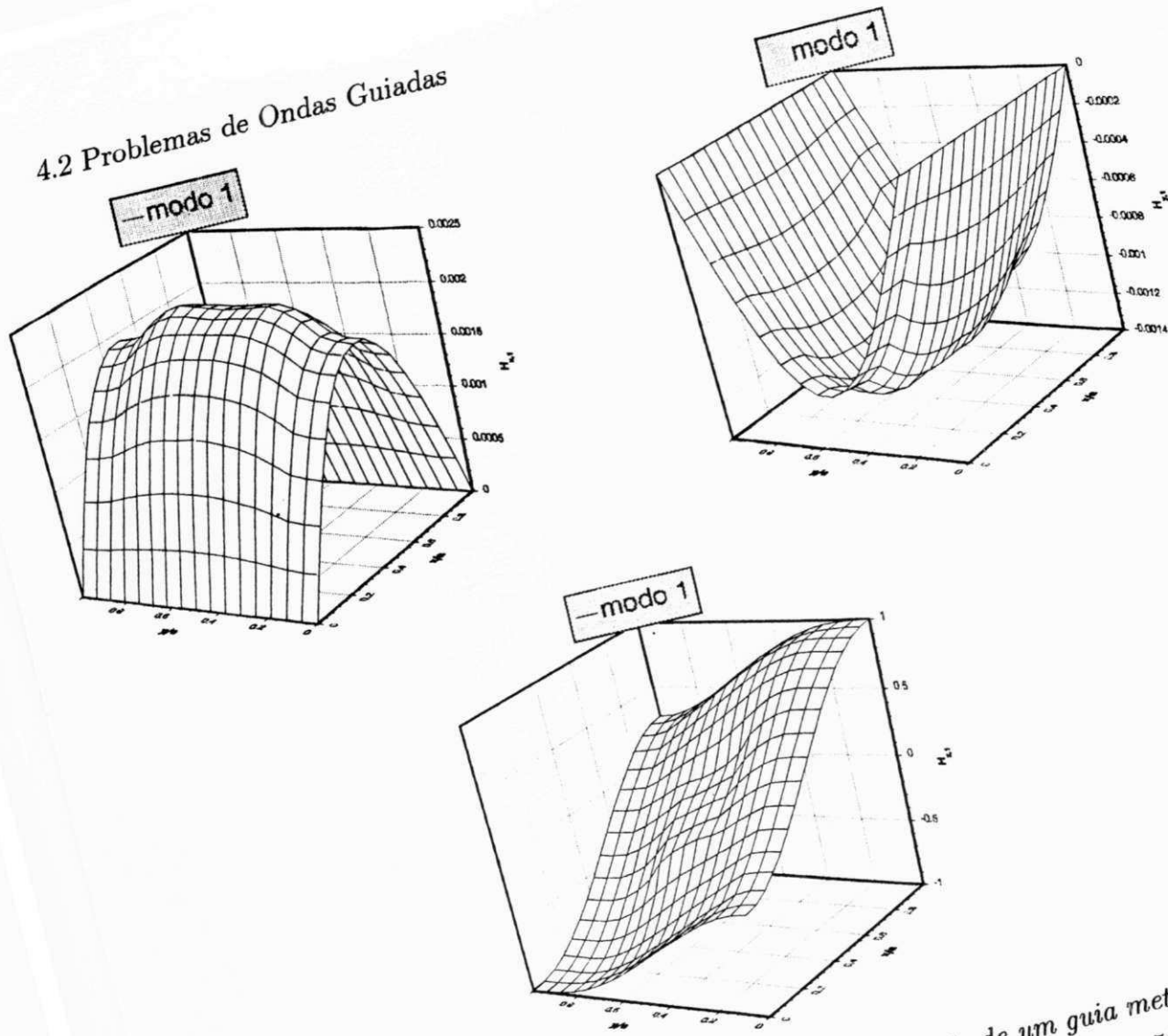


Figura 4.19: Campos  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  do modo dominante de um guia metálico quadrado com anel dielétrico coaxial e isotrópico, com  $t/a = 0,25$ ;  $d/a = 0,50$ ;  $\epsilon_d = 2,45$  e  $\beta = 0,01$  rad/cm.

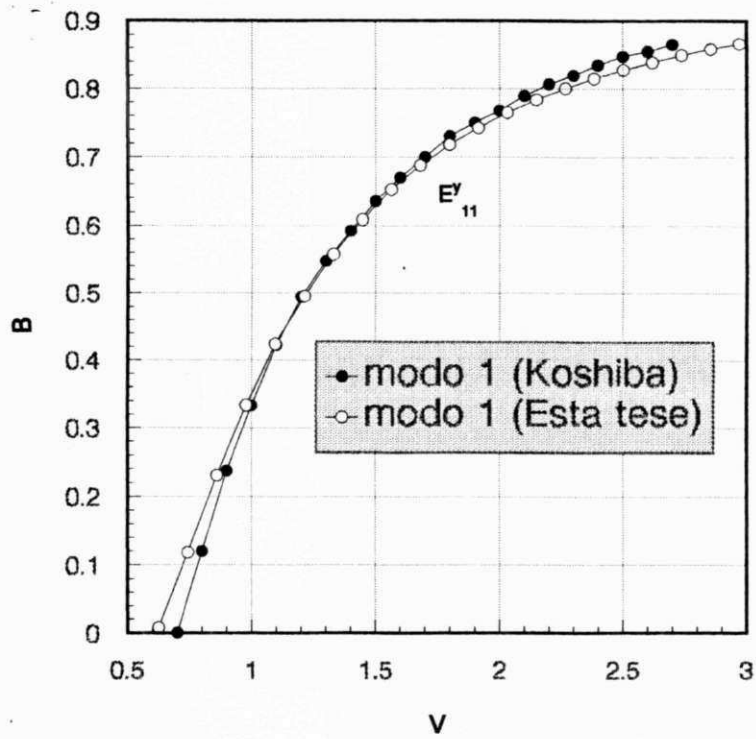


Figura 4.20: Diagramas de dispersão para o modo  $E'_{11}$  de um guia canal, com  $a = 10t$ ,  $b = 5t$ ,  $w = 4t$ ,  $s = 3t$ ,  $d = 2,5t$ ;  $\epsilon_{r1} = 2,25$ ;  $\epsilon_{r2} = 2,1025$  e  $\epsilon_{r3} = 1,0$ .

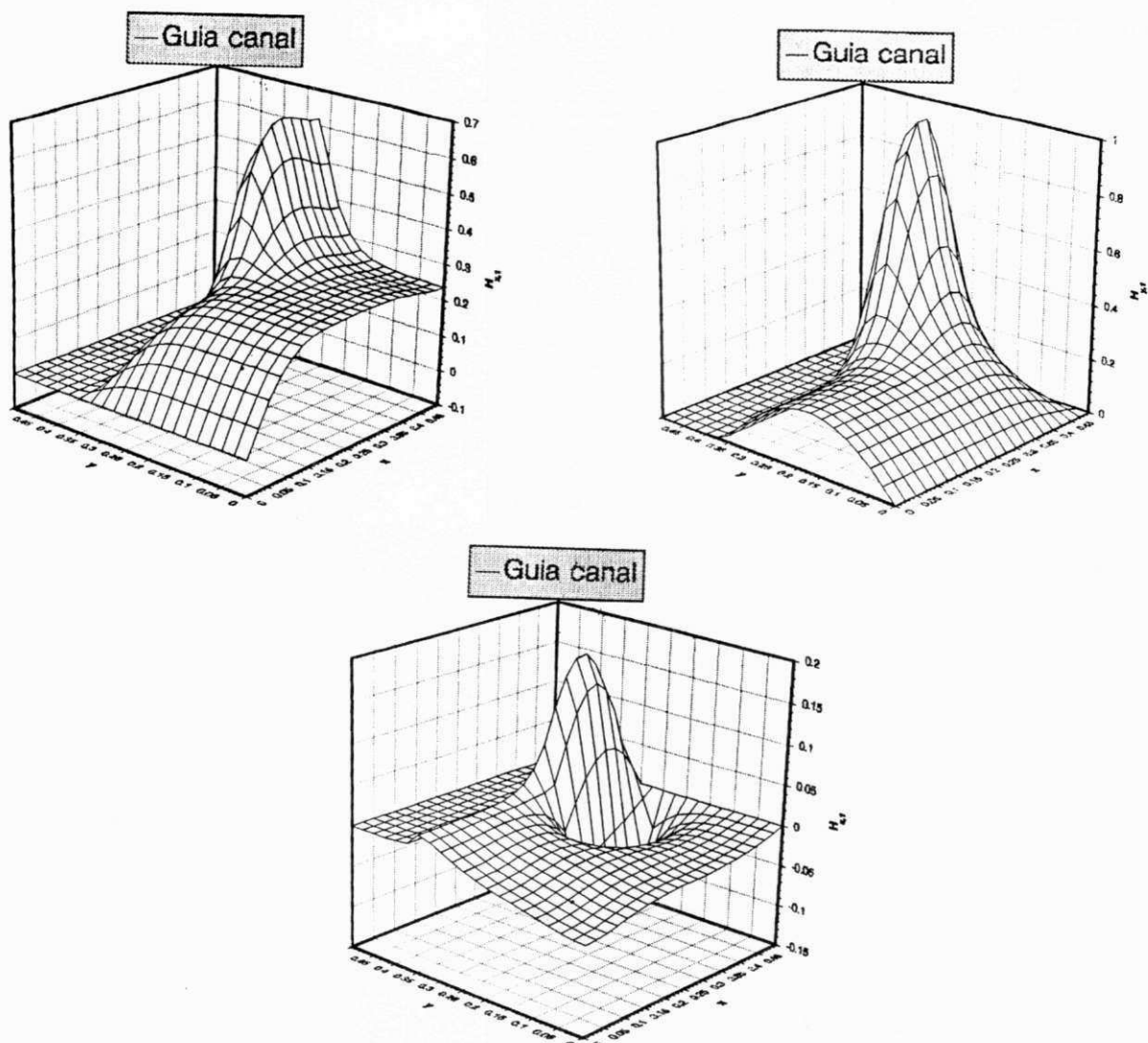


Figura 4.21: Componentes  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  para o modo  $E_{11}^y$ , em corte ( $\beta = 0,01 \text{ rad/cm}$ ), do guia canal.



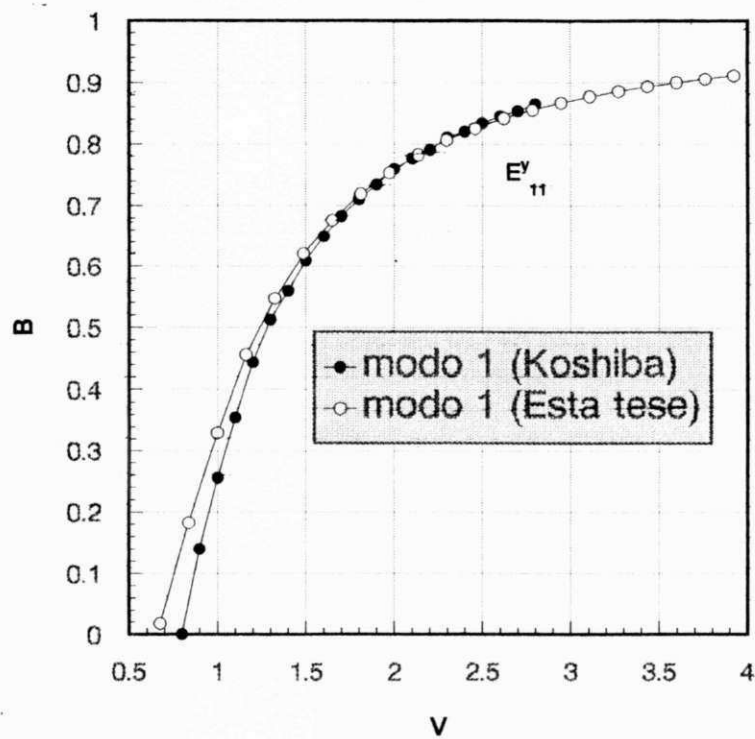


Figura 4.22: Diagramas de dispersão para o modo  $E_{11}^y$  de um guia costela, com  $a = 10t$ ,  $b = 5t$ ,  $w = 4t$ ,  $s = 3t$ ,  $d = 2,5t$ ;  $\epsilon_{r1} = 2,25$ ;  $\epsilon_{r2} = 2,1025$  e  $\epsilon_{r3} = 1,0$ .

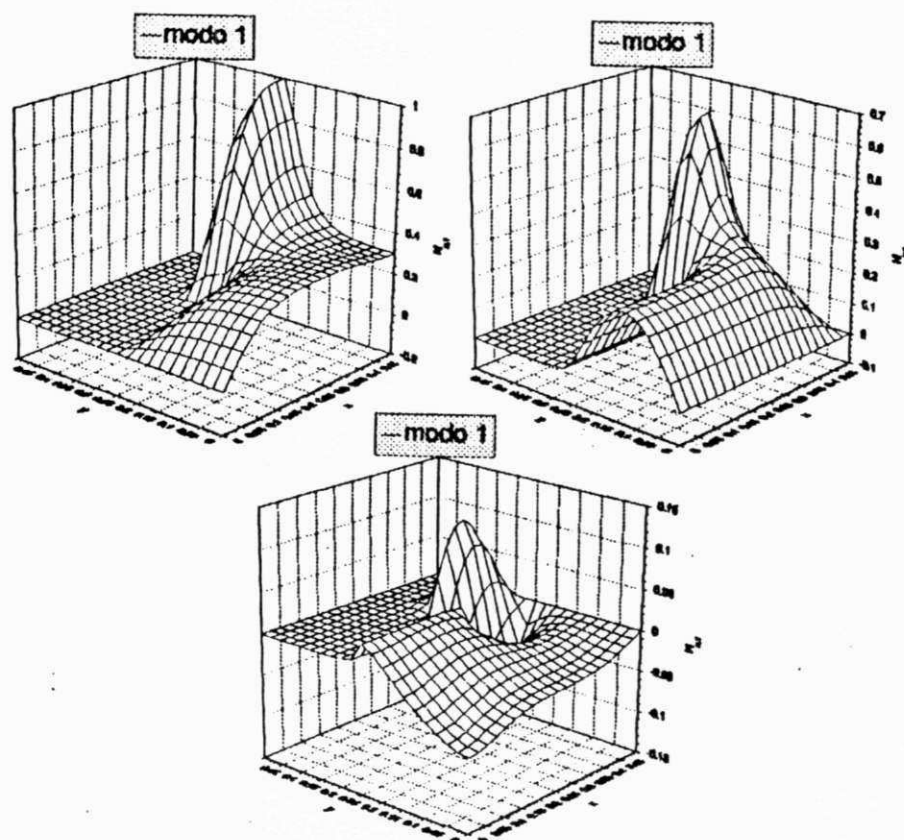


Figura 4.23: Componentes  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  para o modo  $E_{11}^y$ , em corte ( $\beta = 0,01 \text{ rad/cm}$ ), do guia costela.

## Capítulo 5

# Conclusões e Sugestões

### 5.1 Sumário

*Nesta tese, foram discutidas formulações de elementos finitos para problemas de campos eletromagnéticos em regiões limitadas do espaço, contendo meios não-homogêneos e/ou anisotrópicos, mas lineares, não-dispersivos e sem perdas.*

*Em linhas gerais, foram abordados dois tipos de problemas: os de resposta, que resultam em sistemas algébricos da forma  $[A] \{X\} = \{F\}$  e os de autovalor, que implicam na solução de problemas algébricos de autovalor generalizados, da forma  $[A] \{X\} = \lambda [B] \{X\}$ .*

*No Capítulo 2, discorreu-se sobre a análise numérica de problemas de resposta elípticos, envolvendo aspectos importantes, tais como as formulações variacionais e as correspondentes condições de existência e unicidade de solução, além de estimativas de erro e taxas de convergência a priori, decorrentes de aproximações daqueles problemas pelo método dos elementos finitos. Essa análise foi, então, seguida de aplicações a problemas de resposta clássicos, escalares (em termos de um potencial escalar  $\varphi$ ) e vetoriais (em termos de um potencial vetorial  $\mathbf{A}$ ). Com relação a este último tipo de problema, em particular, apresentou-se a formulação clássica em termos do potencial magnético vetorial, para o problema de contorno definido pelas equações*

$\nabla \times \hat{\nu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , em  $\Omega$ , com condições de contorno homogêneas de Dirichlet dos tipos  $\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$ , sobre a fronteira da região. Neste caso, desenvolveu-se uma discussão sobre a estabilidade numérica do método dos elementos finitos, com experimentos numéricos que confirmaram as previsões teóricas. Mais do que isto, ao contrário do que apontam algumas publicações recentes [25],[26], demonstrou-se não haver necessidade de uma formulação mista, porquanto o multiplicador de Lagrange é, neste caso, identicamente nulo. Este resultado é muito importante e abre novas perspectivas de análise para problemas de campos magnéticos estáticos ou quase estáticos, nas áreas de dispositivos eletromecânicos em geral, ou mesmo em problemas de campos eletromagnéticos de altas frequências, quando formulados em termos de algum tipo de potencial vetorial, tal como os potenciais de Hertz.

No Capítulo 3, apresentou-se a análise numérica correspondente à formulação variacional do problema de autovalor a três componentes de campo magnético, dado pela equação vetorial de onda  $\nabla \times \hat{\epsilon}_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = k_0^2 \mathbf{H}$ , para regiões limitadas do espaço, em duas e três dimensões, com meios não-homogêneos e/ou anisotrópicos. Desenvolveu-se, então, a forma variacional clássica de Galerkin, para condições de contorno essenciais dos tipos  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  e/ou  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$  sobre a fronteira  $\partial\Omega$  da região. Foram discutidos, também, alguns métodos de eliminação de modos espúrios, tendo-se implementado o método de penalidade com integração reduzida (RIP), recentemente publicado na literatura [30],[31],[32]. Visando ampliar o leque de possibilidades de análise, foi proposta uma formulação mista para os problemas de autovalor em questão, a qual é, em muitas situações, equivalente ao método RIP [32]. Os resultados apresentados pelos dois métodos confirmam a não ocorrência de soluções espúrias no espectro de interesse, bem como as estimativas de erro e taxas de convergência previstas a priori. Quando foram utilizados elementos distorcidos, a formulação mista apresentou um desempenho equivalente ao da formulação RIP, mostrando-se um método bastante robusto em termos de estabilidade numérica.

No Capítulo 4, os três métodos aqui discutidos (RIP, STRIP e RMM) foram empregados na solução de alguns problemas típicos de autovalor/autovetor em duas dimensões, tendo-se verificado uma boa concordância entre as simulações e outros resultados teóricos ou numéricos.

## 5.2 Recomendações para Futuras Investigações

Algumas recomendações para futuros trabalhos estão implícitas nas discussões do Capítulo 4 e da Seção anterior. São recomendações que podem ser implementadas sem grandes dificuldades, visando aperfeiçoar os programas aqui utilizados e ampliar a sua faixa de aplicações. Neste grupo de recomendações, podem-se destacar as seguintes:

- Extensão do pacote AUTO2D à análise de guias de onda com meios ferrimagnéticos.
- Extensão do pacote AUTO2D à análise de campos eletromagnéticos em meios dissipativos, em duas ou três dimensões.
- Análise numérica aprofundada do método STRIP2D, visando estabelecer suas características de estabilidade. Análise comparativa com o método dos elementos de aresta, seguida de experimentos numéricos realizados com estruturas contendo singularidades geométricas. Uma possível aplicação seria a caracterização de onda completa de linhas de microfita, linhas de lâmina e muitas outras estruturas a múltiplas metalizações e múltiplos dielétricos.
- Aplicação do método misto à caracterização da linha de microplaca, isolada e acoplada e a outras estruturas dela derivadas.
- Extensão dos programas aqui desenvolvidos a ondas circulantes (coordenadas cilíndricas), com aplicação à caracterização de guias cilíndricos circulares, fibras ópticas e cavidades arissimétricas.

- *Análise de fibras ópticas com túneis laterais (side-tunnel polarization-maintaining fibers), visando minimizar as perturbações do estado de polarização (SOP) da luz transmitida pela fibra [50].*
- *Introdução de condições de contorno de paredes absorventes (absorbing boundary conditions), a fim de minimizar os erros provenientes de reflexões espúrias em problemas abertos. Uma possível aplicação seria, por exemplo, na caracterização de guias ópticos, de antenas e em problemas de espalhamento.*
- *Extensão dos métodos de elementos finitos aqui implementados, à caracterização de guias de ondas ópticos não lineares [50].*
- *Desenvolvimento de um método de elementos finitos para caracterização de campos eletromagnéticos em meios bianisotrópicos e chirais.*
- *Extensão dos métodos de elementos finitos à solução de problemas de interação de campos eletromagnéticos e sistemas biológicos e sua aplicação a problemas de compatibilidade e interferência eletromagnética, bem como ao projeto de sistemas de hipertermia.*

# Bibliografia

- [1] *J. N. Reddy. Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering. McGraw-Hill, 1987.*
- [2] *M. V. K. Chari and P. P. Silvester. Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems. John Wiley & Sons, 1st edition, 1980.*
- [3] *S. R. Hoole. Computer-Aided Analysis and Design of Electromagnetic Devices. Elsevier, 1989.*
- [4] *K. J. Binns and P. J. Lawrenson. Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems. Pergamon Press, 1963.*
- [5] *W. J. Gibbs. Conformal Transformations in Electrical Engineering. Chapman and Hall, London, 1958.*
- [6] *L. V. Bewley. Two-Dimensional Fields in Electrical Engineering. Dover, N. Y., 1963.*
- [7] *P. Moon and D. E. Spencer. Field Theory for Engineers. D. Van Nostrand Co., Inc., 1961.*
- [8] *A. M. Winslow. Numerical solution of the quasilinear poisson equation in a nonuniform triangle mesh. J. Comp. Phys., 2:149-172, 1967.*
- [9] *P. Silvester. Finite elements in electrical engineering: the first 50 years. In Proc. Giornate Di Studio Su Il Metodo Degli Elementi Finiti Nell'Applicazione Dell'Elletromagnetismo, Pisa, Italy, May 1992.*

- [10] *S. G. Mikhlin and K. L. Smolitsky. Approximate Methods for the Solution of Differential Equations. Elsevier, 1967.*
- [11] *O. C. Zienkiewicz. The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, 2nd edition, 1977.*
- [12] *K. H. Huebner and E. A. Thornton. The Finite Element Method for Engineers. John Wiley, 2nd edition, 1982.*
- [13] *O. C. Zienkiewicz. The Finite Element Method - Fundamentals and Applications. Academic Press, New York, 1973.*
- [14] *P. P. Silvester. Finite-element solution of homogeneous waveguide problems. Alta Frequenza, 38:313-317, 1969.*
- [15] *P. Silvester. Finite element solution of homogeneous waveguide problems. Alta Frequenza, 38:684-690, 1969.*
- [16] *Z. J. Cendes and P. Silvester. Numerical solution of dielectric loaded waveguide: I - finite-element analysis. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., MTT-18:1124-1131, 1970.*
- [17] *P. Silvester and C. R. S. Haslam. Magnetotelluric modelling by the finite element method. Geophysical Prospecting, 20:872-891, 1972.*
- [18] *P. Silvester and K. K. Chan. Bubnov-galerkin solutions to wire antenna problems. Proc. IEE, 119:1095-1099, 1972.*
- [19] *P. Silvester and A. Konrad. Axisymmetric triangular finite elements for the scalar helmholtz equation. Int. J. Num. Meth. in Eng., 5:481-497, 1973.*
- [20] *J. Weiss, A. Konrad, and P. Silvester. Scalar finite element solution of magnetic fields in axisymmetric boundaries. IEEE Trans. Magn., MAG-18:270-274, 1982.*
- [21] *T. Adachi, A. Yoshii, and T. Sudo. Two-dimensional semiconductor analysis using finite element method. IEEE Trans. Electron Devices, ED-26:1026-1031, Jul. 1979.*



- [22] I. D. Mayergoyz. *Solution of the nonlinear poisson equation of semiconductor device theory*. J. Appl. Phys., 59(1):195–199, 1986.
- [23] H. V. Namjoshi and P. P. Biringer. *Influence of the leakage field in crossfield heating systems*. IEEE Trans. Magn., MAG-21(5):1844–1846, 1985.
- [24] V. Sathiaselan, M. F. Iskander, and G. C. W. Howard. *Theoretical analysis and clinical demonstration of the effect of power pattern control using the annular phased array hyperthermia system*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., MTT-34:514–519, 1986.
- [25] E. J. Silva and R. C. Mesquita. *Magnetostática tridimensional utilizando o potencial vetor com variáveis nodais ou de arestas*. In CBmag'95-Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo 95, Florianopolis, SC, May 1995.
- [26] F. Kikuchi. *Mixed formulations for finite element analysis of magnetostatic and electrostatic problems*. Japan J. Appl. Math., 6:209–221, 1989.
- [27] R. F. Harrington. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill, 1961.
- [28] A. Konrad. *Triangular Finite Elements for Vector Fields in Electromagnetics*. PhD thesis, University of McGill, Montreal, Canada, 1974.
- [29] R. E. Collin. *Field Theory of Guided Waves*. McGraw-Hill, 1960.
- [30] M. B. F. Chaves, C. G. Migliora, and H. J. C. Barbosa. *Elimination of spurious fe solutions of dielectric waveguides*. COMPEL: The Int. J. Comp. Math. in Electrical and Electronic Eng., 13, suppl. A:323–328, 1994.
- [31] M. B. F. Chaves, C. G. Migliora, and H. J. C. Barbosa. *A comparison of computational performances of three methods for the elimination of spurious fem solutions of dielectric waveguides*. In Proc. Int. Telecommunication Symposium ITS-94, volume ITS-94, pages 310–314, Rio de Janeiro, Brasil, 1994.
- [32] D. S. Malkus and T. R. J. Hughes. *Mixed finite element methods-reduced and selective integration techniques: a unification of concepts*. Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 15:63–81, 1978.

- [33] A. Bermúdez and D. G. Pedreira. *Mathematical analysis of a finite element method without spurious solutions for computation of dielectric waveguides*. *Numerische Mathematik*, 61:39–57, 1992.
- [34] A. F. D. Loula, T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and I. Miranda. *Mixed petrov-galerkin method for the timoshenko beam*. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 63:133–154, 1987.
- [35] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, N. Y., 1941.
- [36] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953.
- [37] Thomas J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear, Static, and Dynamic Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1987.
- [38] J. A. Kong, editor. *Research Topics in Electromagnetic Wave Theory*. John Wiley, 1981.
- [39] M. B. F. Chaves. *Eliminação de Modos Espúrios nas Soluções de Guias Dielétricos pelo Método dos Elementos Finitos*. *PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, Set. 1994*.
- [40] L. Lapidus and G. F. Pinder. *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. John Wiley & Sons, 1982.
- [41] R. Glowinski, J. L. Lions, and R. Tremolieres. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North Holland, Amsterdam, 1981.
- [42] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland, Amsterdam, 1978.
- [43] J. N. Reddy. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1993.
- [44] G. Strang and G. J. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1973.

- [45] R. Mittra and T. Itoh. *Charge and potential distributions in shielded striplines*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-18:149-156*, Mar. 1970.
- [46] K. C. Gupta, R. Garg, and I. J. Bahl. *Microstrip Lines and Slotlines*. Artech House, 1979.
- [47] J. T. Oden. *Applied Functional Analysis*. Prentice-Hall, N. J., 1979.
- [48] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, N. Y., 1975.
- [49] G. F. Carey and J. T. Oden. *Finite Elements: a Second Course, volume II*. Prentice-Hall, 1983.
- [50] M. Koshiha. *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1992.
- [51] A. Konrad. *Vector variational formulation of electromagnetic fields in anisotropic media*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-24:553-559*, Sep. 1976.
- [52] E. B. Becker, G. F. Carey, and J. T. Oden. *Finite Elements - An Introduction, volume I*. Prentice-Hall, 1981.
- [53] A. D. Berk. *Variational principles for electromagnetic resonators and waveguides*. IRE Trans. Antennas Propagat., *AP-4:104-111*, Apr. 1956.
- [54] S. Ahmed and P. Daly. *Finite-element method for inhomogeneous waveguides*. IEE Proc., *116(10):1661-1664*, Oct. 1969.
- [55] Z. J. Csendes and P. Silvester. *Numerical solution of dielectric loaded waveguides: I-finite element analysis*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., *MTT-18(12):1124-1131*, Dec. 1970.
- [56] A. D. McAulay. *Variational finite-element solution for dissipative waveguides and transportation application*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-25:382-392*, May 1977.

- [57] M. Mabaya, P. E. Lagasse, and P. Vandembulcke. *Finite element analysis of optical waveguides*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-29*:600-605, Jun. 1981.
- [58] Eswarappa, G. I. Costache, and W. J. R. Hofer. *Finlines in rectangular and circular waveguide housings including substrate mounting and bending effects - finite element analysis*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., *37*(2):299-306, Feb. 1989.
- [59] M. Koshiya, K. Hayata, and M. Suzuki. *Improved finite-element formulation in terms of the magnetic field vector for dielectric waveguides*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-33*:227-233, Mar. 1985.
- [60] A. Konrad. *High-order triangular finite elements for electromagnetic waves in anisotropic media*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., *MTT-25*(5):353-360, May 1977.
- [61] B. M. A. Rahman and J. B. Davies. *Finite-element analysis of optical and microwave waveguide problems*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-32*:20-28, Jan. 1984.
- [62] M. Hano. *Finite-element analysis of dielectric-loaded waveguides*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-32*(10):1275-1279, Oct. 1984.
- [63] K. Hayata, K. Miura, and M. Koshiya. *Full vectorial finite element formulation for lossy anisotropic waveguides*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., *MTT-37*(5):875-883, May 1989.
- [64] M. Matsuhara, H. Yunoki, and A. Maruta. *Analysis of open-type waveguides by the vector finite-element method*. IEEE Microwave Guided Wave Lett., *1*(12):376-378, Dec. 1991.
- [65] M. Koshiya and K. Inoue. *Simple and efficient finite-element analysis of microwave and optical waveguides*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., *MTT-40*(2):371-377, Feb. 1992.

- [66] J. A. M. Svedin. *A numerically efficient finite element formulation for the general waveguide problem without spurious modes*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., MTT-37:1708-1715, 1989.
- [67] J. A. M. Svedin. *Propagation analysis of chirowaveguides using finite-element method*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-38(10):1488-1496, Oct. 1990.
- [68] J. A. M. Svedin. *A modified finite-element method for dielectric waveguides using an asymptotically correct approximation on infinite elements*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-39(2):258-266, Feb. 1991.
- [69] C. C. Su. *A combined method for dielectric waveguides using the finite-element technique and the surface integration equations method*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-34(11):1140-1146, Nov. 1986.
- [70] W. C. Chew and M. A. Nassir. *A variational analysis of anisotropic, inhomogeneous dielectric waveguides*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., MTT-37:661-668, 1989.
- [71] F. A. Fernandez and Y. Lu. *A variational finite element formulation for dielectric waveguides in terms of transverse magnetic fields*. IEEE Trans. Magnet., 27(5):3864-3867, Sept. 1991.
- [72] T. Angkaew, M. Matsuhara, and N. Kumagai. *Finite-element analysis of waveguide modes: A novel approach that eliminates spurious modes*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., MTT-35(2):117-123, Feb. 1987.
- [73] C. Forterre, P. H. Giesbers, and E. Laroche. *Finite element analysis of ferrite loaded transmission lines*. IEEE Trans. Magnet., MAG-23(5):2666-2667, Sep. 1987.
- [74] I. Bardi and O. Biró. *Improved finite element formulation for dielectric loaded waveguides*. IEEE Trans. Magnet., 26(2):450-453, Mar. 1990.

- [75] I. Bardi and O. Biro. *An efficient finite-element formulation without spurious modes for anisotropic waveguides*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-39(7):1133-1139*, 1991.
- [76] D. Welt and J. Webb. *Finite-element analysis of dielectric waveguides with curved boundaries*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-33:576-585*, Jul. 1985.
- [77] P. Daly. *Hybrid-mode analysis of microstrip by finite-element method*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-19:19-25*, Jan. 1971.
- [78] D. G. Coor and J. B. Davies. *Computer analysis of the fundamental and higher order modes in single and coupled microstrip*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-20:669-678*, 1972.
- [79] R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. Mac Millan, 1968.
- [80] J. B. Davies, F. A. Fernandez, and G. Y. Philippou. *Finite element analysis of all modes in cavities with circular symmetry*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-30:1975-1980*, Nov. 1982.
- [81] A. Konrad. *On the reduction of the number of spurious modes in the vectorial finite-element solution of three-dimensional cavities and waveguides*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-34(2):224-227*, Feb. 1986.
- [82] F. Kikuchi, M. Haru, and T. Wada. *A finite element method for 3-d analysis of cavity resonators*. Proc. IMACS, pages 259-264, 1989.
- [83] K. Hayata, M. Koshiha, M. Eguchi, and M. Suzuki. *Vectorial finite-element method without any spurious solutions for dielectric waveguiding problems using transverse magnetic-field component*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., *MTT-34:1120-1124*, Nov. 1986.
- [84] F. A. Fernandez and Y. Lu. *Variational finite element analysis of dielectric waveguides with no spurious solutions*. Electron. Letters, *26(25):2125-2126*, 1990.

- [85] F. A. Fernandez and Y. Lu. *A variational finite element formulation for dielectric waveguides in terms of transverse magnetic fields.* IEEE Trans. Magn., 27:3864–3867, 1991.
- [86] A. J. Kobelansky and J. P. Webb. *Eliminating spurious modes in finite-element waveguide problems by using divergence-free fields.* IEEE Trans. Microwave Theory Techn., MTT-22(11):569–570, 1986.
- [87] M. Hano. *Vector finite-element analysis of anisotropic waveguides using novel triangular elements.* Elect. and Communications in Japan, Part II, 71(8):71–80, 1988.
- [88] C. W. Crowley, P. P. Silvester, and H. Hurwitz. *Covariant projection elements for 3d vector field problems.* IEEE Trans. Magn., 24:397–400, 1988.
- [89] J. P. Webb and R. Miniowitz. *Analysis of 3-d microwave resonators using covariant-projection elements.* IEEE Trans. Microwave Theory Techn., MTT-39(11):1895–1899, 1991.
- [90] A. R. Pinchuk et Alli. *Spectrally correct finite element operators for electromagnetic vector fields.* J. Appl. Physics, 36(8):3025–3027, 1988.
- [91] F. Kikuchi. *Mixed and penalty formulations for finite element analysis of eigenvalue problem in electromagnetism.* Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng., 64:509–521, 1987.
- [92] J. C. Nedelec. *Mixed finite elements in  $r$  3.* Numer. Math., 35:315–341, 1980.
- [93] A. Bossavit and I. Mayergoyz. *Edge element for scattering problems.* IEEE Trans. Magn., 25:2816–2821, 1989.
- [94] M. Aubourg and P. Guillon. *A mixed finite element formulation for microwave devices problems: application to mis structure.* Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 5(4):371–386, 1991.

- [95] R. Leis. *Zur theorie elektromagnetischer schwingungen in anisotropen inhomogenen medien*. Math. Z., 106:213-224, 1968.
- [96] M. Hara et alli. *A three dimensional analysis of rf electromagnetic fields by the finite element method*. IEEE Trans. Magn., 19:2417-2420, 1983.
- [97] W. P. Doherty, E. L. Wilson, and R. L. Taylor. *Stress analysis of axisymmetric solids utilizing higher order quadrilateral finite elements*. SESM Report 69-3, Dept. of Civil Engineering, Univ. of California, Berkeley, 1969.
- [98] F. A. F. Tejo. *Análise quase-estática de linhas de transmissão de microondas pelo método dos elementos finitos*. Technical report, Universidade Federal da Paraíba, 1995.
- [99] A. A. Lima. *Gerador de malhas de elementos finitos em duas dimensões*. Technical report, UFPB, 1995.
- [100] K. J. Bathe and E. L. Wilson. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1976.
- [101] 3-D Visions Corporation. *GRAFTOOL User's Guide*, 1990.
- [102] N. Schulz, K. Bierwirth, F. Arndt, and U. Koster. *Finite-difference method without spurious solutions for the hybrid-mode analysis of diffused channel waveguides*. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., 38(6):722-729, Jun. 1990.