

Codificação de Canal Usando Wavelets em
Sistemas de Comunicação com Diversidade
Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh

Gustavo Maciel Ferreira

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Paraíba - Campus II como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre no domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação -
Comunicações

Francisco Marcos de Assis
Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil
©Gustavo Maciel Ferreira, Agosto de 2000



F383c Ferreira, Gustavo Maciel
Codificacao de canal usando wavelets em sistemas de comunicacao com diversidade sujeitos ao desvanecimento rayleigh / Gustavo Maciel Ferreira. - Campina Grande, 2000. 97 f. : il.

Dissertacao (Mestrado em Engenharia Eletrica) - Universidade Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e Tecnologia.

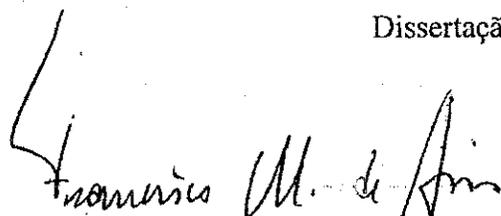
1. Teoria da Comunicacao 2. Teoria Wavelet 3. Codificacao de Canal 4. Canal com Desvanecimento 5. Dissertacao I. Assis, Francisco Marcos de, Dr. II. Universidade Federal da Paraiba - Campina Grande (PB) III. Título

CDU 621.391(043)

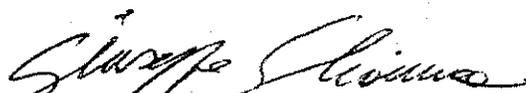
CODIFICAÇÃO DE CANAL USANDO WAVELETS EM SISTEMAS DE
COMUNICAÇÃO EM DIVERSIDADE SUJEITOS AO
DESVANECIMENTO RAYLEIGH

GUSTAVO MACIEL FERREIRA

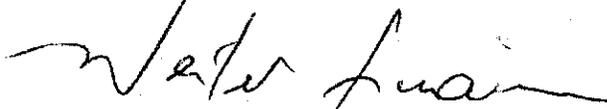
Dissertação Aprovada em 25.08.2000



PROF. FRANCISCO MARCOS DE ASSIS, Dr., UFPB
Orientador



PROF. GIUSEPPE GLIONNA, M.Sc., TIM – Tele Nordeste Celular-PE
Componente da Banca



PROF. WEILER ALVES FINAMORE, Ph.D., CETUC-PUC-Rio
Componente da Banca



PROF. JOÃO MARQUES DE CARVALHO, Ph.D., UFPB
Componente da Banca



JOSÉ EWERTON POMBO DE FARIAS, Dr., UFPB
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB
Agosto - 2000

Dedicatória

Esta dissertação é dedicada a meus pais, Paulo e Cezarina.

Agradecimentos

- A Deus, por tudo;
- Aos meus pais, Paulo e Cezarina, pelo infinito amor, amizade, apoio, incentivo e compreensão em todos os momentos;
- A minha irmã, Érika, pelo incentivo e carinho;
- A Roberta, pelo carinho, companheirismo e principalmente, pela compreensão;
- Ao Prof. Francisco Marcos de Assis, pelos ensinamentos, orientação, incentivo e amizade;
- Aos Professores Marcelo Sampaio e João Marques, pelos ensinamentos e amizade, e ao Prof. Bruno Albert, pela amizade e incentivos;
- Aos demais professores do DEE-UFPB;
- Aos colegas da pós-graduação Lidiano, Mohit, Madeiro, Suzete, Isabel, Wamberto e Alexandre, pela amizade e companheirismo e em especial, a Núbia, Edmar e Juraci, pelas sugestões para a correção deste texto e Waslon, pelas sugestões e ajuda na preparação de algumas figuras;
- Aos funcionários do DEE, em especial ao amigo, Ronaldo;
- A tio Reginaldo e família pelo apoio nos últimos meses deste trabalho;
- A Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Eng. Elétrica da UFPB;
- A TIM - Tele Nordeste Celular, pelo apoio a conclusão deste trabalho;
- Ao CNPq, órgão financiador do trabalho.

Resumo

A teoria wavelet tem sido estudada para muitas aplicações em processamento e codificação de sinais transmitidos através de canais móveis. A codificação de canal bit-a-bit usando matrizes de coeficientes wavelet é uma técnica baseada nas propriedades de ortogonalidade entre as linhas de tais matrizes. Seus principais benefícios são a simplicidade do processo de codificação e decodificação e o bom desempenho em canais sujeitos ao desvanecimento. Em canais de comunicação sem fio, a propagação do sinal por múltiplos percursos degrada fortemente a qualidade do sinal. Esquemas de codificação combinados com diversidade são usados para tornar mais robustos os sinais sob efeito do desvanecimento. Neste trabalho é apresentada uma técnica que integra a potencialidade da codificação de canal bit-a-bit usando matrizes de coeficientes wavelet com esquemas de diversidade espacial, através do uso de múltiplas antenas transmissoras. O desempenho da técnica é avaliado através de simulações e comparações com outros esquemas de transmissão.

Abstract

The wavelet theory has been studied for many processing and coding applications of signals transmitted through mobile channels. Bit-by-bit channel coding using wavelet coefficients matrices is a technique based on the orthogonality properties between the lines of such matrices. The principal benefits of this technique are the simplicity of the coding and decoding process and the good performance in fading channels. In wireless communication, multipath signal propagation strongly degrades the quality of transmitted signals. Coding schemes combined with diversity are used to minimize fading effects. In this work it is presented a technique that integrates the potentiality of the bit-by-bit coding channel using wavelet coefficients matrices with space diversity schemes, through the use of multiple transmitting antennas. The performance of the technique is evaluated through simulations and comparisons with other transmission schemes.

Lista de Símbolos e Abreviaturas

STFT - Short Time Fourier Transform

$L_2(\mathbb{R})$ - Espaço vetorial de Hilbert

s - Fator de escala das funções wavelet

τ - Fator de deslocamento das funções wavelet

$\psi_{s,\tau}(t)$ - Família de funções wavelet

$\phi_{s,\tau}(t)$ - Família de funções escalonamento

W_j - Sub-espaço das funções wavelet

V_j - Sub-espaço das funções escalonamento

a_k - Coeficientes do filtro passa-baixas associado a uma função wavelet

b_k - Coeficientes do filtro passa-altas associado a uma função escalonamento

FIR - Finite Impulse Response

IIR - Infinite Impulse Response

PR-QMF - Perfect Reconstruction Mirror Filters

CGF - Conjugated Quadrature Filters

m - Ordem de uma matriz de coeficientes wavelet

g - Gênero de uma matriz de coeficientes wavelet

CCW - Codificação de canal usando wavelets (*WCC - Wavelet Channel Coding*)

MCW - Matriz de coeficientes wavelet (*WCM - Wavelet Coefficients Matrix*)

T_s - Intervalo de sinalização de um símbolo

R_s - Taxa de codificação

R_b - Taxa de sinalização de um bit

PCS - Personal Communication Services

CDMA - Code Division Multiple Access

TDMA - Time Division Multiple Access

GSM - Global System Mobile for communications

PSK - Phase Shift Keying

AWGN - Additive White Gaussian Noise

E_s - Energia do sinal

E_b - Energia de bit

N_0 - Densidade espectral de potência do ruído gaussiano

E_b/N_0 - Razão sinal ruído

BPSK - Binary Phase Shift Keying

P_{erro} - Probabilidade de erro de bit

$Q(\cdot)$ - Função erro

PAM - Pulse Amplitude Modulation

CSI - Chanel State Information

Lista de Figuras

2.1	Funções wavelet Daubechies 2, 3, 4 e 5.	10
2.2	Funções wavelet Coiflet 1, 2, 3 e 4.	10
2.3	Funções wavelet Chapéu Mexicano, Morlet, Meyer e Symlet 7.	11
2.4	Escalonamento e translação da função wavelet Daubechies 2.	12
2.5	Agrupamento de espaços vetoriais gerados pelas funções escalona- mento.	18
2.6	Agrupamento de sub-espaços wavelet e escalonamento.	20
2.7	Representação em diagrama de blocos da operação de decimação.	26
2.8	Banco de análise com duas bandas.	27
2.9	Representação da estrutura de análise de um banco de filtros com duas bandas e três estágios.	28
2.10	Gráfico de resolução tempo-freqüência da transformada STFT	29
2.11	Gráfico de resolução tempo-freqüência da transformada wavelet.	29
2.12	Banco de síntese de duas bandas.	30
2.13	Representação da estrutura de síntese de um banco de filtros com duas bandas e dois estágios.	31
2.14	Funções wavelet e escalonamento Daubechies 10, coeficientes dos filtros associados a cada função e função de transferência de cada filtro.	32
4.1	Modelo do sistema com multiplexação em freqüência e diversidade espacial.	53
5.1	Constelação M-PSK: $M = 2$, $M = 4$, $M = 8$	62
5.2	Probabilidade de erro de bit do esquema BPSK considerando a transmissão afetada pelo ruído gaussiano aditivo.	65

5.3	Probabilidade de erro de bit do esquema BPSK considerando o canal sujeito ao desvanecimento Rayleigh com perfeita informação sobre o estado do canal.	66
5.4	Probabilidade de erro de bit do esquema QPSK considerando o canal sujeito ao desvanecimento Rayleigh com perfeita informação sobre o estado do canal.	66
5.5	Comparação entre o desempenho do sistema codificado com MCW 2×8 e do sistema BPSK sem codificação.	70
5.6	Comparação entre o desempenho do sistema codificado com MCW 2×32 e do sistema BPSK sem codificação.	71
5.7	Exemplo de uma constelação PSK multi-nível com 8 símbolos e dois níveis.	71
5.8	Constelação PSK multi-nível usada no sistema codificado com MCW 2×8	73
5.9	Diagrama de blocos do transmissor do sistema codificado sem diversidade de antenas transmissoras.	74
5.10	Diagrama de blocos do receptor do sistema codificado sem diversidade de antenas transmissoras.	74
6.1	Modelo do sistema com codificação wavelet sem diversidade espacial.	79
6.2	Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 2×8 , 2×32 e 2×128 , sem diversidade espacial.	81
6.3	Probabilidade de erro de bit para o esquema com MCW 4×16 , sem diversidade espacial.	81
6.4	Modelo do sistema com codificação wavelet e diversidade espacial.	83
6.5	Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 2×8 com $L = 1$ e $L = 2$	84
6.6	Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 2×32 com $L = 1$ e $L = 2$	85
6.7	Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 2×128 com $L = 1$ e $L = 2$	85
6.8	Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 4×16 com $L = 1$ e $L = 4$ e para esquema com MCW 4×64 e $L = 4$	86

Lista de Tabelas

4.1 Exemplo de codificação de canal usando uma MCW de ordem 2 e gênero g	51
--	----

Índice

1	Introdução	1
2	Wavelets	4
2.1	Introdução	4
2.2	Breve Histórico	5
2.3	Funções Wavelet	8
2.4	Transformada Wavelet Contínua	12
2.5	Transformada Wavelet Discreta	15
2.6	Análise Multi-resolucional	16
2.6.1	Sub-espço das Funções Escalonamento	17
2.6.2	Sub-espço das Funções Wavelet	19
2.6.3	Funções Escalonamento e Wavelet Básicas	21
2.6.4	Expansão de uma Função em V_j	22
2.6.5	Equação de Dilatação e Equação Wavelet	23
2.7	Bancos de Filtros e Análise Multi-resolucional	24
2.7.1	Relação entre Escalas de Resolução	24
2.7.2	Sub-amostragem e Filtragem	26
2.7.3	Super-amostragem e Filtragem	29
2.8	Conclusão	31
3	Matrizes Wavelet	33
3.1	Introdução	33
3.2	As Matrizes Wavelet	34
3.2.1	Matrizes Wavelet Planas	38
3.3	Classificação das Matrizes Wavelet	39

3.4	Matrizes Wavelet de Haar	40
3.4.1	A Matriz de Haar Canônica	40
3.4.2	Matriz de Haar Característica de uma Matriz Wavelet	42
3.4.3	Produto de Tensores entre Matrizes de Haar	43
3.4.4	O Operador Extensão	44
3.5	Matrizes Wavelet Usadas em Codificação	45
3.6	Conclusão	46
4	Codificação de Canal Usando Wavelets	47
4.1	Introdução	47
4.2	Diversidade	48
4.3	O Algoritmo de Codificação de Canal Usando Wavelets	50
4.3.1	Algoritmo Original	50
4.3.2	Codificação Wavelet e Diversidade Espacial	52
4.4	Distribuição dos Símbolos CCW	54
4.5	Taxa do Código e Taxa de Sinalização	55
4.5.1	Codificação sem Diversidade	55
4.5.2	Codificação com Diversidade	55
4.6	Decodificação de Canal	57
4.7	Conclusão	58
5	Modelos dos Sistemas de Comunicação	60
5.1	Introdução	60
5.2	Sistema PSK Não Codificado	60
5.3	Desempenho da Codificação de Canal Wavelet em Canais AWGN	67
5.4	Sistemas de Comunicação com Codificação Wavelet em Canais com Desvanecimento	70
5.4.1	Sistema Sem Diversidade	70
5.4.2	Sistema com Diversidade	75
5.5	Conclusões	76
6	Resultados	78
6.1	Introdução	78
6.2	Codificação Wavelet sem Diversidade	78

6.3	Codificação Wavelet com Diversidade	82
6.4	Conclusões	86
7	Considerações Finais e Perspectivas	88
A	Espaço de Hilbert	90
	Bibliografia	93

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos vêm-se observando uma grande demanda por serviços de comunicação sem fio. A possibilidade da troca de informação, seja dados ou voz, entre usuários, distantes geograficamente, que não estão conectados fisicamente, têm levado ao surgimento de vários serviços e aplicações para a comunicação sem fio, como a telefonia móvel celular, sistemas de *paging* e interligação de redes locais sem fio. Padrões já estabelecidos para alguns destes serviços incluem transmissão de dados a taxas de 9,6 kbit/s e recentemente, estão sendo considerados sistemas de transmissão de dados e voz de alta qualidade a taxas de 64 – 128 kbit/s através do espectro dos sistemas móveis celulares (850 MHz) e dos sistemas PCS (Serviço de Comunicações Pessoais - *Personal Communication Services*) (1,8 ou 1,9 GHz). E mais, o desenvolvimento da computação móvel estimula o uso de altas taxas de transmissão, tipicamente, na faixa de 144 kbit/s para aplicações com alta mobilidade e acima de 2 Mbit/s para aplicações em ambientes fechados (*indoor*) [1].

A convergência entre a computação e sistemas de comunicação sem fio requer um aumento na capacidade e melhoria no desempenho dos sistemas de transmissão. Para tanto, é necessário o desenvolvimento e aprimoramento de técnicas eficientes de codificação, modulação e de processamento de sinais que melhorem a qualidade dos sistemas de comunicação sem fio e possibilitem o compartilhamento do espectro por um número maior de usuários, sem que haja perda de eficiência espectral [2]. Algumas dessas técnicas utilizam a teoria das funções

wavelet, cujas propriedades de ortogonalidade e a relação com o processamento de sinais em sub-bandas de frequência estão sendo usadas em várias aplicações em comunicações [3-7].

Entretanto, os canais de comunicação móvel apresentam o efeito destrutivo dos múltiplos percursos na propagação do sinal. Tal efeito pode alterar de maneira significativa a amplitude do sinal, mesmo para uma pequena variação na distância ou orientação entre o transmissor e o receptor. Geralmente, em sistemas de comunicação móveis, são usadas técnicas de codificação de canal e/ou de diversidade para tentar minimizar os efeitos do desvanecimento. A diversidade baseia-se no fato de que os instantes de desvanecimento em canais independentes constituem eventos independentes. Assim, se a informação redundante é fornecida ao receptor através de dois ou mais canais independentes, a probabilidade de que todos sejam afetados simultaneamente pelo desvanecimento é reduzida [8]. Algumas técnicas, como a codificação espaço-temporal, combinam diversidade e codificação de canal para tornar os sinais transmitidos mais robustos aos efeitos do desvanecimento [9-11].

Em [3], os autores apresentam uma técnica de codificação de canal bit-a-bit cujos principais benefícios são a simplicidade do processo de decodificação e os ganhos, medidos em termos da probabilidade de erro de bit, que podem ser obtidos em canais sujeitos ao desvanecimento. A técnica utiliza as linhas de uma matriz de coeficientes wavelet (MCW) para codificar bits de informação. A codificação é baseada nas propriedades de ortogonalidade entre as linhas das MCW, denominadas de palavras-código, que mantêm-se ortogonais quando deslocadas e adicionadas [2].

Neste trabalho, é apresentada uma técnica que integra as potencialidades da diversidade espacial e da codificação de canal usando matrizes de coeficientes wavelet, sem que seja introduzida complexidade no processo de codificação e decodificação e sem haver perda de eficiência espectral [12]. O desempenho da técnica proposta será avaliado sob o ponto de vista da transmissão através de canais sujeitos ao desvanecimento.

O texto deste trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2

é apresentada uma revisão da teoria wavelet. Inicialmente, é feito um breve histórico sobre o desenvolvimento da teoria do ponto de vista apenas informativo. O texto segue com a apresentação das funções wavelet e das transformadas wavelet contínua e discreta. A teoria wavelet também é discutida a partir da análise multi-resolucional, sendo feita a ligação entre a análise multi-resolucional e a filtragem de sinais por bancos de filtros com multi-taxas.

No Capítulo 3 encontra-se uma discussão introdutória sobre as matrizes de coeficientes wavelet. Tais matrizes são a base do processo de codificação de canal bit-a-bit. Portanto, além da definição das matrizes de coeficientes wavelet, incluem-se nesta discussão as propriedades relevantes e exemplos de matrizes utilizadas para esta aplicação.

O Capítulo 4 discute a codificação com matrizes wavelets que apresenta bom desempenho na transmissão em canais sujeitos ao desvanecimento plano e não-seletivo em frequência. Também é apresentada a técnica de baixa complexidade de implementação que integra a codificação com a diversidade espacial sem haver perda de eficiência espectral.

Os modelos dos sistemas de comunicação com codificação wavelet são descritos no Capítulo 5. São também apresentados sistemas de referência não codificados utilizados para a avaliação quantitativa dos ganhos que são obtidos com a codificação.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados das simulações das transmissões codificadas através de canais com desvanecimento, utilizando a técnica original e a técnica de codificação com diversidade espacial. Finalmente, as conclusões e sugestões para novos trabalhos são descritas no Capítulo 7.

Capítulo 2

Wavelets

2.1 Introdução

A representação de sinais através da decomposição em funções foi proposta no início do século 19, quando Joseph Fourier mostrou que é possível decompor funções em termos de exponenciais complexas de várias frequências. Seguindo este conceito, em 1909, Alfred Haar criou a primeira wavelet (nesta época ainda não existia o termo wavelet) [13-15]. A teoria wavelet vem sendo desenvolvida com a contribuição de várias áreas de pesquisa e no início da década de 80, foram desenvolvidas bases wavelets mais gerais para funções com energia finita e também algoritmos eficientes para calcular a decomposição de funções [16].

A análise de Fourier é muito útil na representação de uma grande classe de sinais, mas não permite uma perfeita representação dos não-estacionários [14, 15]. Por outro lado, a decomposição de sinais em bases wavelets consegue representar fielmente estes sinais. Isso porque ao contrário das senóides que são funções locais apenas no domínio da frequência, as wavelets são locais no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Uma comparação muito interessante em relação à boa resolução das wavelets nos domínios do tempo e da frequência é sua característica de permitir a visualização da “floresta” e das “árvores”, através de algoritmos que utilizam janelas para processar os sinais em diferentes escalas e resoluções. Ou seja, através da análise wavelet pode-se obter as características gerais do sinal ou características

de baixa frequência (a “floresta”) através de janelas grandes, e as características detalhadas ou características de alta frequência (as “árvores”) através de janelas pequenas. Esta característica é importante para a análise de sinais não-estacionários [15].

Neste capítulo é feita uma revisão sucinta sobre a teoria wavelet. Inicialmente, na Seção 2.2, é feito um breve histórico sobre o desenvolvimento da teoria wavelet (do ponto de vista apenas informativo), sendo destacados alguns fatos importantes e nomes de pesquisadores que contribuíram e continuam contribuindo efetivamente para o seu desenvolvimento. Na Seção 2.3, são apresentadas as funções wavelet e algumas de suas características mais gerais. As transformadas wavelets contínua e discreta são discutidas nas Seções 2.4 e 2.5, respectivamente. Na Seção 2.6, a teoria wavelet é apresentada sob o ponto de vista da análise multi-resolucional, que possibilita a construção de famílias wavelets discretas e o desenvolvimento de algoritmos rápidos para o cálculo da transformada wavelet. A Seção 2.7 discute a ligação entre a análise multi-resolucional e a filtragem por bancos de filtros. Finalmente, na Seção 2.8, o capítulo é concluído com algumas considerações.

2.2 Breve Histórico

A teoria wavelet, desenvolvida principalmente a partir da década de 1980, tem suas origens nos trabalhos desenvolvidos independentemente nos mais diversos campos de pesquisa, incluindo matemática pura e aplicada, física, ciência da computação, engenharia, entre outros [14].

Em 1909, a partir da teoria de Fourier, Alfred Haar criou a primeira base wavelet ortonormal [17]. A wavelet de Haar é a base ortonormal mais simples de toda a teoria wavelet. Em 1930, ao estudar sinais aleatórios resultantes do movimento Browniano, o físico Paul Levy mostrou que pequenos detalhes de tais sinais eram melhor representados usando-se as funções base de Haar, em relação às funções base de Fourier [13].

No início da década de 1970, o engenheiro geofísico J. Morlet estudou uma alternativa para a STFT (*Short Time Fourier Transform*), que calcula a transformada de Fourier de um sinal através de uma função janela, para analisar sinais sísmicos. A STFT não era adequada, pois as janelas usadas em tal transformada têm duração fixa. Usando-se janelas de curta duração perdia-se resolução nas componentes de baixa frequência. Ao passo que com janelas de longa duração, perdia-se as características em alta frequência dos sinais. Dessa forma, Morlet usou funções janela cujas larguras (durações) eram dilatadas ou comprimidas à medida em que se queria analisar as componentes de baixa ou de alta frequência do sinal, respectivamente [13]. De modo a investigar o comportamento em instantes de tempo diferentes, estas funções eram deslocadas no tempo e eram calculados os produtos internos entre as mesmas e o sinal a ser analisado – surgiram as wavelets.

Apesar do conceito já apresentado, era preciso um maior formalismo matemático para a transformada wavelet. Morlet, então, apresentou seu trabalho a A. Grossmann, físico teórico, que tinha problemas similares em seus trabalhos de mecânica quântica, quando precisava representar características locais de uma função. Grossmann construiu uma fórmula exata de inversão para a transformada de Morlet. A partir daí, Morlet e Grossmann fizeram alguns trabalhos e desenvolveram algumas aplicações em conjunto [18].

Em meados de 1980, o matemático Y. Meyer leu os trabalhos de Morlet e Grossmann e percebeu que as fórmulas de análise e síntese, por eles apresentadas, eram a redescoberta das fórmulas que A. Calderón havia introduzido em análise harmônica na década de 1960. Ainda em meados de 1980, um grupo de pesquisadores franceses liderados por Morlet, Grossmann e Meyer fizeram o refinamento matemático da teoria até então desenvolvida e denominaram o trabalho de *Ondelettes*, que popularizou-se em inglês como *Wavelets* [14, 15].

Stephane Mallat, um especialista em visão computacional e processamento de imagens, fez em 1986 a ligação entre os algoritmos piramidais e a estrutura para a decomposição de funções em bases wavelets. Meyer e Mallat elaboraram a base matemática da análise multi-resolucional, que leva a um algoritmo recursivo

de filtragem de fácil implementação para o cálculo da decomposição de um sinal em funções base wavelets [17]. Os filtros que correspondiam às bases de Meyer eram infinitos e tinham de ser truncados para tornar possível a implementação direta. Em 1987 foram construídas as primeiras bases wavelets ortonormais com suporte compacto, ou seja, limitadas no tempo. Neste caso, ao invés dos filtros serem obtidos a partir das wavelets, constróem-se filtros com resposta ao impulso finita (FIR - *Finite Impulse Response*) apropriados e que correspondam a uma determinada base wavelet ortonormal. A utilização de filtros na análise com wavelets relacionou-as com a filtragem em sub-bandas da teoria de processamento de sinais [13].

Os bancos de filtros de sub-banda FIR são usados para dividir toda a banda de frequência de um sinal em sub-bandas. Na filtragem em sub-bandas são usados filtros que garantem a perfeita reconstrução do sinal, denominados de filtros espelhados em quadratura com reconstrução perfeita (PR-QMF, *Perfect Reconstruction Quadrature Mirror Filters*) ou filtros em quadratura conjugados (CQF - *Conjugated Quadrature Filters*) [5, 19, 20]. Os PR-QMF são exatamente os filtros FIR usados na construção de bases wavelets ortonormais com suporte compacto.

A partir dos trabalhos de Mallat, Meyer construiu as primeiras wavelets não triviais diferenciáveis continuamente, porém, sem suporte compacto. Em seguida, Ingrid Daubechies basendo-se também nos trabalhos de Mallat, construiu um conjunto de funções base wavelets ortonormais com suporte compacto. Atualmente, as wavelets de Daubechies são bastante usadas em várias aplicações e são consideradas as mais elegantes da teoria wavelet [5].

No final da década de 1980, foi construída a base matemática para a Transformada Wavelet Discreta e atualmente, a teoria wavelet encontra-se em fase de refinamento matemático. A troca de informações entre as mais diversas áreas de pesquisa durante as últimas duas décadas possibilitou o surgimento de muitas aplicações para a teoria wavelet. Pesquisas estão sendo desenvolvidas nos campos de sensoriamento remoto, processamento de sinais biomédicos, processamento de imagens, astronomia, análises numéricas e comunicações digitais, entre outros [2-7].

A seguir são discutidas as características gerais das funções wavelet e suas propriedades, como também, são apresentadas as transformadas wavelets contínua e discreta.

2.3 Funções Wavelet

As wavelets são funções com energia finita definidas no espaço vetorial $L_2(\mathbb{R})$, em que \mathbb{R} é o conjunto dos números reais. Uma função $g(t)$ definida em \mathbb{R} pertence ao espaço $L_2(\mathbb{R})$ (ver Apêndice A) se $|g(t)|^2$ for integrável, ou seja,

$$\int_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.1)$$

Considere um sinal ou função $f(t)$, em que t é uma variável contínua. De uma forma geral, pode-se definir a decomposição da função $f(t)$ em uma série ortonormal como a combinação linear de funções de uma determinada base, ponderadas pela projeções de $f(t)$ sobre cada uma delas, ou seja,

$$f(t) = \sum_l a_l \psi_l(t), \quad (2.2)$$

em que l é um índice inteiro, $\psi_l(t)$ é o conjunto de funções base e a_l são as projeções de $f(t)$ sobre $\psi_l(t)$. O conjunto de coeficientes a_l é a transformada da função $f(t)$ [19].

Se a base usada na decomposição de $f(t)$ for ortogonal, ou seja,

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \int \psi_k(t) \psi_l(t) dt = 0 \quad k \neq l, \quad (2.3)$$

então, os coeficientes a_l podem ser calculados pelo produto interno

$$a_l = \langle f(t), \psi_l(t) \rangle = \int f(t) \psi_l(t) dt. \quad (2.4)$$

Na decomposição de Fourier, as funções base (senos e cossenos) têm suporte igual a toda a extensão do eixo real, ou seja, cada função base $\psi_l(t)$ decai a zero somente nos limites $\pm\infty$. No entanto, as funções base com suporte compacto ou

limitado decaem a zero rapidamente, sendo preciso que tais funções sejam escalonadas (dilatadas) e transladadas para que possam representar funções definidas em todo o eixo dos reais.

As wavelets são funções com suporte compacto. Portanto, na decomposição em funções wavelet é construído um sistema com dois parâmetros que definem operações de escalonamento e translação das funções wavelet base. Diferentemente da análise de Fourier, em que as funções base são as exponenciais complexas dilatadas na frequência, na análise wavelet as funções base não são únicas. Para que uma função seja considerada uma wavelet é preciso que atenda às propriedades gerais da base, como por exemplo, a condição de admissibilidade e a regularidade. Há várias funções wavelet diferentes que podem ser usadas eficientemente na representação de sinais, mas todas têm características gerais comuns [5, 15].

Como será visto mais adiante, de acordo com a condição de admissibilidade, o valor médio de uma wavelet é igual a zero. Isso assegura a reconstrução do sinal a partir da transformada wavelet inversa. A condição de regularidade estabelece que as wavelets têm decaimento exponencial de forma que os momentos de primeira ordem são iguais a zero. Para que uma função seja considerada uma wavelet, necessariamente, ela deve satisfazer a estas duas propriedades. Assim, uma wavelet adequada pode ser escolhida ou até mesmo construída para uma aplicação específica, havendo, portanto, diferentes tipos de famílias wavelets com características diferentes de simetria, localização em tempo-frequência e ortogonalidade. As Figuras 2.1-2.3 apresentam algumas funções pertencentes às famílias de wavelets Daubechies, Coiflet, Chapéu Mexicano, Morlet, Meyer e Symlet.

Para proceder a análise com wavelets é preciso escolher uma função wavelet modelo $\psi(t)$, denominada de wavelet básica ou wavelet mãe [5, 15]. Através de escalonamentos e deslocamentos da wavelet mãe são geradas as wavelets filhas. Portanto, uma família de wavelets $\{\psi_{s,\tau}(t)\}$ é representada por

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right), \quad (2.5)$$

em que o parâmetro s é o fator de escala e o parâmetro τ é o fator de deslocamento. O fator de escala é usualmente positivo. As wavelets são dilatadas para escala

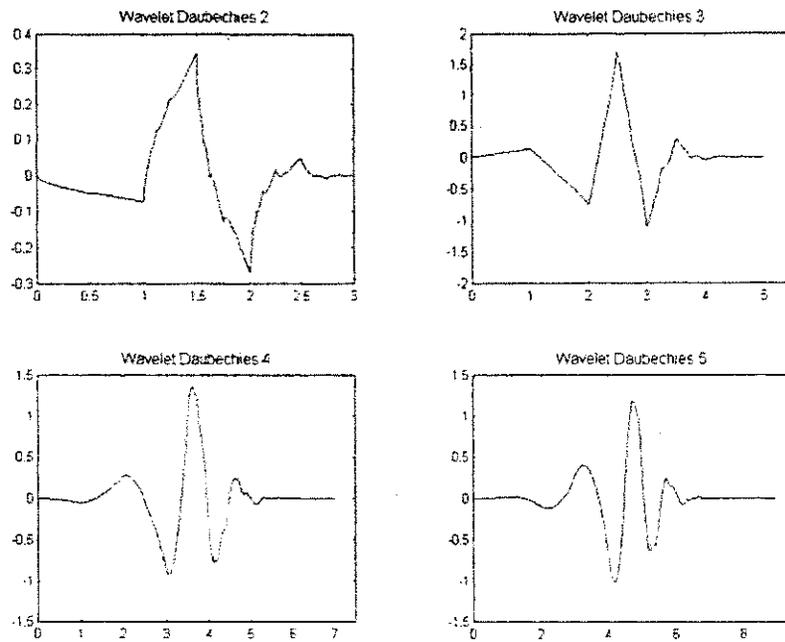


Figura 2.1: Funções wavelet Daubechies 2, 3, 4 e 5.

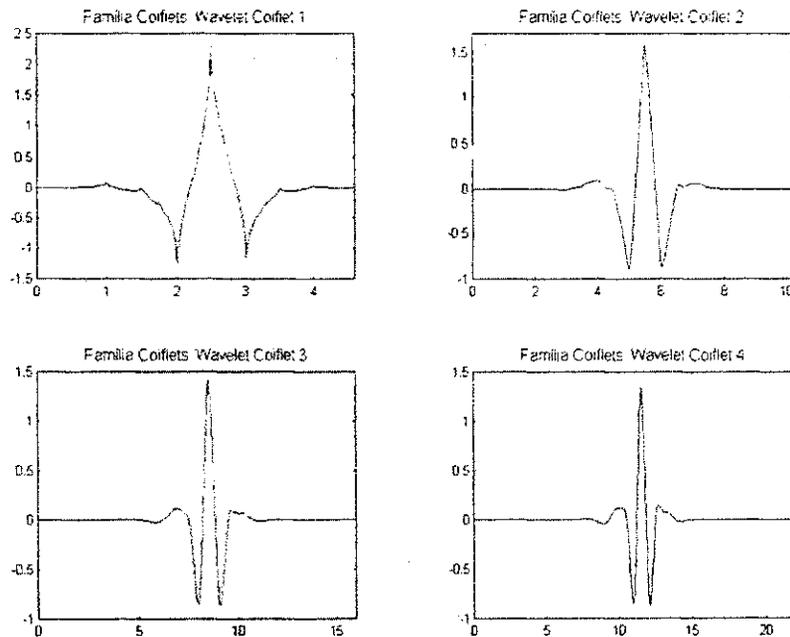


Figura 2.2: Funções wavelet Coiflet 1, 2, 3 e 4.

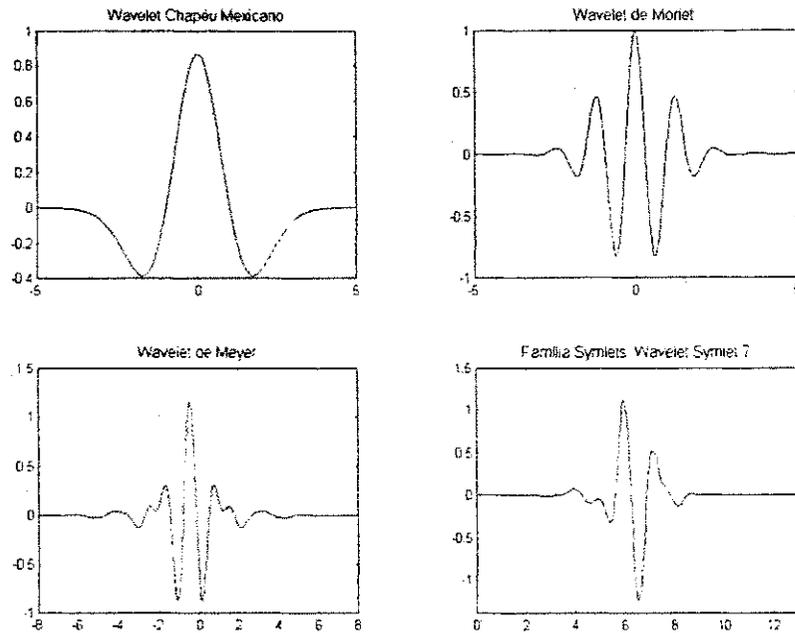


Figura 2.3: Funções wavelet Chapéu Mexicano, Morlet, Meyer e Symlet 7.

$s > 1$ e contraídas para $s < 1$. A Figura 2.4 ilustra o processo de escalonamento e translação da função wavelet Daubechies 2 (Figura 2.1), para $\tau = 0$ e $s = 0,5$, $\tau = 4$ e $s = 1$, $\tau = 8$ e $s = 2$.

A constante $1/\sqrt{s}$ na Eq. 2.5 efetua a normalização da energia das wavelets

$$\int |\psi_{s,\tau}(t)|^2 dt = \int |\psi(t)|^2 dt = 1, \quad (2.6)$$

ou seja, todas as wavelets da família $\{\psi_{s,\tau}(t)\}$ têm energia unitária. As wavelets também podem ser normalizadas em termos de amplitude

$$\int |\psi_{s,\tau}(t)| dt = 1. \quad (2.7)$$

Neste caso, a constante de normalização é $1/s$ ao invés de $1/\sqrt{s}$ e uma família de wavelets é gerada por

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right). \quad (2.8)$$

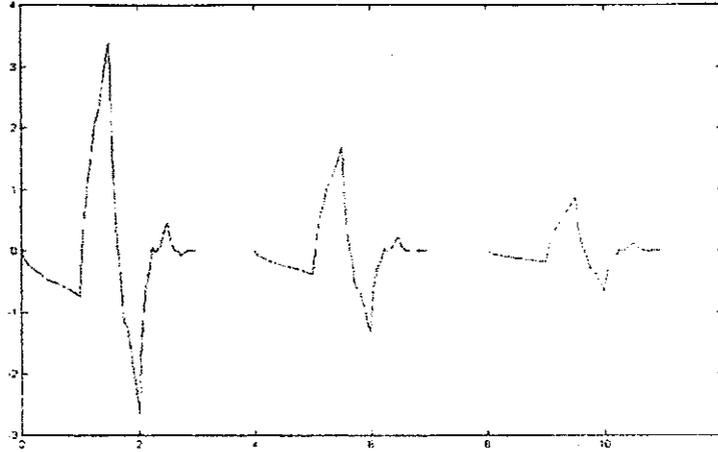


Figura 2.4: Escalonamento e translação da função wavelet Daubechies 2. para $\tau = 0$ e $s = 0,5$, $\tau = 4$ e $s = 1$, $\tau = 8$ e $s = 2$.

2.4 Transformada Wavelet Contínua

Seja uma função $f(t)$. A transformada wavelet contínua $w(s, \tau)$ da função $f(t)$ é a decomposição de $f(t)$ em um conjunto de funções wavelet $\psi_{s,\tau}$, dada por

$$w(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s,\tau}^*(t) dt, \quad (2.9)$$

em que a função $\psi_{s,\tau}^*(t)$ é o conjugado complexo de $\psi_{s,\tau}(t)$.

Portanto, a transformada wavelet de um sinal unidimensional é uma função bidimensional da escala s e do tempo τ . Substituindo-se a Eq. 2.5 na equação da transformada wavelet contínua (Eq. 2.9), pode-se escrever

$$w(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt. \quad (2.10)$$

A transformada de Fourier de um conjunto de funções wavelet é

$$\begin{aligned} \Psi_{s,\tau}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right) \exp(-j\omega t) dt, \\ &= \sqrt{|s|} \Psi(s\omega) \exp(-j\omega\tau), \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que $\Psi(\omega)$ é a transformada de Fourier da wavelet mãe. No domínio da frequência, as wavelets são escalonadas pelo fator de escala $1/s$ e multiplicadas pelo fator $\exp(-j\omega\tau)$ e pelo fator de normalização $s^{1/2}$. Quando as wavelets são normalizadas em termos da amplitude, suas respectivas transformadas de Fourier têm a mesma amplitude.

A Eq. 2.11 mostra claramente o conceito já estabelecido de que a dilatação t/s ($s > 1$) de uma função no domínio do tempo resulta em uma contração $s\omega$ no domínio da frequência. O termo $1/s$ é proporcional a frequência ω . No entanto, para a transformada wavelet, o termo escala é mais usado, enquanto que o termo frequência fica reservado para a transformada de Fourier [15].

Como visto anteriormente (Eq. 2.10), a transformada wavelet é a correlação entre uma função $f(t)$ e uma família de wavelets $\psi(t)$. Assim, tal transformada pode ser escrita como a transformada inversa de Fourier do produto entre o conjugado da transformada de Fourier $\Psi(\omega)$ e a transformada de Fourier $F(\omega)$ da função $f(t)$

$$w(s, \tau) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \Psi^*(s\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (2.12)$$

As transformadas de Fourier das wavelets são denominadas de filtros da transformada wavelet, pois dada uma função $f(t)$, sua decomposição em bases wavelets resulta da convolução da mesma com um banco de filtros com diferentes escalas (frequência) [15, 19, 20].

Diferentemente da transformada de Fourier, a transformada wavelet tem suas funções base localizadas no tempo geradas por uma função wavelet mãe, através da variação dos parâmetros de deslocamento e escalonamento. Como já foi comentado, outra diferença entre as duas transformadas é que a função base para a transformada de Fourier tem a forma particular $\exp(-j\omega\tau)$, enquanto há várias funções (que atendem a certas propriedades) que servem como base para a transformada wavelet [15, 19].

Da mesma forma que um sinal é mapeado a partir do domínio do tempo no domínio wavelet, deve-se ser capaz de voltar para o primeiro domínio sem que

ocorram distorções no sinal devido a transformação. Dessa forma, a transformada wavelet inversa é definida como

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_{s,\tau}(t)w(s,\tau)}{s^2} dsd\tau. \quad (2.13)$$

O termo C_ψ é uma constante definida como condição de admissibilidade que assegura a perfeita reconstrução do sinal original [5]. Quando a transformada wavelet inversa é calculada, um número infinito de wavelets filhas deve ser somado para reconstruir o sinal original. Por isto, as wavelets não podem ter nível DC. A condição de admissibilidade é dada por

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (2.14)$$

em que $\Psi(\omega)$ é a transformada de Fourier de $\psi(t)$.

Além da condição de admissibilidade, uma wavelet deve satisfazer à condição de regularidade, que estabelece que os coeficientes da transformada wavelet decrescem rapidamente com o decréscimo da escala [5]. Uma wavelet e sua transformada de Fourier são concentradas tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Assim, a transformada wavelet é um operador local em ambos os domínios – tempo e frequência [19].

Por definição, a transformada wavelet é um operador linear. Dada uma função $f(t)$, a transformada wavelet de $f(t)$ satisfaz às seguintes relações:

1. superposição linear sem termos cruzados:

$$w_{f_1+f_2}(s, \tau) = w_{f_1}(s, \tau) + w_{f_2}(s, \tau); \quad (2.15)$$

2. translação:

$$w_{f(t-\tau_0)}(s, \tau) = w_f(s, \tau - \tau_0); \quad (2.16)$$

3. escalonamento:

$$w_{\alpha^{1/2}f(\alpha t)}(s, \tau) = w_f(s, \alpha\tau); \quad (2.17)$$

2.5 Transformada Wavelet Discreta

Considere uma família wavelet $\{\psi_{s,\tau}(t)\}$. Desde que os parâmetros de escala s e de deslocamento τ da Eq. 2.5 sejam contínuos, a transformada é denominada de transformada wavelet contínua. O termo wavelet discreta se refere às wavelets contínuas com parâmetros de escala e de deslocamento discretos [5, 15], que podem ser expressos, respectivamente, por

$$s = s_0^{-j}, \quad (2.18)$$

$$\tau = ks_0^{-j}, \quad (2.19)$$

em que j e k são números inteiros e $s_0 > 1$ é um fator de escala fixo (geralmente, têm-se $s_0 = 2$).

Substituindo os fatores de escala e deslocamento discretos na Eq. 2.5, obtêm-se

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{j/2} \psi(s_0^j t - k\tau_0). \quad (2.20)$$

O conjunto $\psi_{j,k}(t)$ é a base da transformada wavelet discreta. Mesmo sendo uma transformada discreta, a variável tempo da transformada ainda é contínua. Assim, a transformada wavelet discreta é definida por

$$d_{j,k} = w(s, \tau) = \frac{1}{s_0^{-j/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(s_0^j t - k) dt. \quad (2.21)$$

A inversa da transformada wavelet discreta da função $f(t)$ é dada por

$$f(t) = \sum_j \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (2.22)$$

A transformada wavelet discreta é uma decomposição em série que mapeia uma função de uma variável contínua em uma seqüência de coeficientes de forma semelhante à decomposição em série de Fourier. A transformada wavelet é função de dois índices, o fator de translação j e o fator de escala k . Por sua vez, a

transformada de Fourier é função apenas da frequência, ou seja, do fator de escala j , já que o fator de translação k pode assumir apenas dois valores possíveis, zero e $\pi/2$, devido aos termos em cosseno e seno, respectivamente.

O objetivo da decomposição de uma função ou sinal em uma determinada base é a obtenção de informação que possa ser mais facilmente processada que aquela obtida diretamente do mesmo. Outra razão para se fazer a decomposição de um sinal é que com determinadas transformadas são obtidos coeficientes iguais a zero ou com valores muito pequenos. Esta característica, denominada de representação esparsa, é importante em aplicações de estimação estatística, detecção, compressão de dados e supressão de ruído [19].

2.6 Análise Multi-resolucional

Como visto na Seção 2.2, em meados da década de 1980, Mallat e Meyer estabeleceram que a decomposição e reconstrução de wavelets ortonormais poderiam ser implementadas através da análise multi-resolucional de sinais [2, 15]. A partir daí, tal procedimento analítico tornou-se padrão na construção de bases wavelets ortonormais e na implementação da transformada wavelet ortonormal. Na análise multi-resolucional, um sinal é decomposto em múltiplas bandas de frequência. O princípio da análise multi-resolucional é simples: a informação a ser analisada é separada em duas partes: a principal e a residual. Em aplicações de processamento de sinais, a parte principal é a informação passa-baixa e a parte residual é a informação passa-alta do sinal. O processo de decomposição pode ser repetidamente aplicado a parte passa-baixa do sinal resultando no procedimento introduzido por Mallat [16] para o cálculo da decomposição wavelet de um dado sinal discreto no tempo.

Em geral, de forma a obter-se uma completa representação de uma função $f(t)$ é necessária uma família de funções wavelet discretas $\{\psi_{j,k}(t); j, k \in \mathbb{Z}\}$ composta por um número infinito de funções. Para a decomposição de um sinal através da análise multi-resolucional, além da função wavelet mãe, é definida uma função complementar de natureza passa-baixa $\phi(t)$, denominada de função

escalonamento. Assim, uma função pode ser representada eficientemente usando um número infinito de resoluções das funções wavelet e escalonamento.

2.6.1 Sub-espço das Funções Escalonamento

O objetivo da análise multi-resolucional é representar uma função qualquer $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ em vários níveis ou resoluções de detalhes. Cada nível de resolução define um sub-espço de funções de $L_2(\mathbb{R})$. Em outras palavras, a análise multi-resolucional consiste na projeção de $f(t)$ em uma família de sub-espços $\{V_i, i \in \mathbb{Z}\}$ de $L_2(\mathbb{R})$. Algumas propriedades importantes da análise multi-resolucional são apresentadas a seguir:

- Toda a informação usada no cálculo da aproximação de uma função qualquer $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ em um nível de resolução grosseiro j está contido no cálculo da aproximação em um nível de resolução mais refinado ($j + 1$). Portanto, V_j é um sub-espço de V_{j+1} . Essa propriedade, denominada de causalidade, pode ser representada pela equação seguinte e visualizada na Figura 2.5

$$\{0\} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}), \quad (2.23)$$

ou, resumidamente,

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (2.24)$$

Quando a resolução aumenta com j tendendo a ∞ , a função aproximada deve convergir para a função original.

- Qualquer função em $L^2(\mathbb{R})$ pode ser tão aproximada quanto se deseja por sua projeção em V_j , à medida que j cresce, ou seja,

$$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}). \quad (2.25)$$

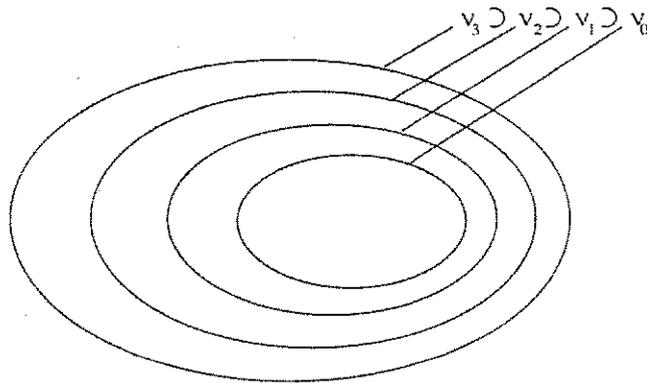


Figura 2.5: Agrupamento de espaços vetoriais gerados pelas funções escalonamento.

- Quando a resolução decresce, com j tendendo para $-\infty$, as aproximações contém menos informação e convergem para zero

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}. \quad (2.26)$$

- De acordo com a definição de um sub-espaço V_j , os sub-espaços devem satisfazer à condição de escalonamento

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}. \quad (2.27)$$

- Existe um conjunto de funções

$$\{\phi(t - k); k \in \mathbb{Z}\}, \quad (2.28)$$

que constitui uma base ortonormal para V_0 .

As propriedades acima apresentadas definem uma seqüência de sub-espaços agrupados de forma que o fechamento de sua união é igual a $L_2(\mathbb{R})$. As projeções de uma função $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ em V_j são aproximações de $f(t)$ que convergem para para a função quando $j \rightarrow \infty$. E mais, o sub-espaço V_0 tem bases ortonormais formadas por translações de determinada função $\phi(t)$, que no contexto da teoria wavelet, é denominada de função de escalonamento. Da Eq. 2.28, $\phi(t)$ é uma função unitária

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1, \quad (2.29)$$

e normalizada, pois

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt \right)^{1/2} = 1. \quad (2.30)$$

2.6.2 Sub-espço das Funções Wavelet

A representação de uma função através de funções escalonamento ortogonais e portanto, dos sub-espços V_j , resulta em uma aproximação “grosseira” da função em uma determinada resolução. Parte da informação sobre a função é perdida nesta representação. Sendo assim, para obter detalhes do comportamento (informação) da função, é necessário projetá-la também em bases wavelets.

Dados os sub-espços agrupados de acordo com as Eq. 2.23 e 2.24, define-se o sub-espço wavelet W_j como sendo o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , ou seja,

$$V_j \perp W_j, \quad (2.31)$$

e

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (2.32)$$

em que \oplus representa a soma entre um espaço vetorial e seu complemento. A Figura 2.6 mostra a relação entre os sub-espços wavelet e os sub-espços das funções escalonamento.

Considere agora dois espços V_{j_0} e V_j , em que $j > j_0$. Aplicando a Eq. 2.32 recursivamente, obtêm-se

$$V_j = V_{j_0} \oplus \left(\bigoplus_{j=j_0}^{j-1} W_j \right). \quad (2.33)$$

Dessa forma, qualquer função em V_j pode ser expressa como uma combinação linear de funções em V_{j_0} e W_j , $j = j_0, j_0+1, \dots, j-1$; podendo portanto, ser analisada separadamente em diferentes escalas. A análise multi-resolucional recebeu tal nome exatamente por esta separação de escalas.

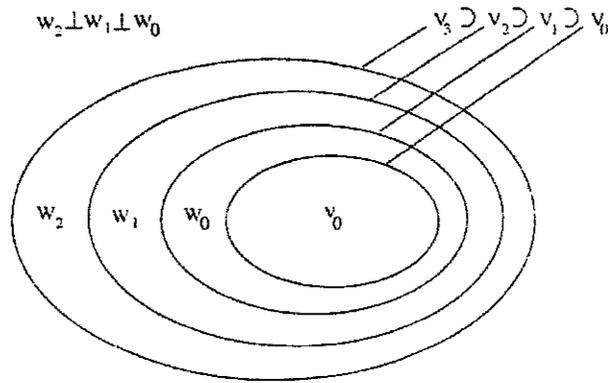


Figura 2.6: Agrupamento de sub-espacos wavelet e escalonamento.

Considerando a Eq. 2.33, para $j_0 \rightarrow -\infty$ e $j \rightarrow \infty$, obtêm-se

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = L^2(\mathbb{R}). \quad (2.34)$$

Nota 1 Os sub-espacos W_j e V_j não são necessariamente ortogonais. Neste caso, a análise multi-resolucional leva à construção de wavelets denominadas *biortogonais*.

Além disso, assume-se que

$$W_j \perp W_{j'}, \text{ se } j \neq j', \quad (2.35)$$

ou seja, todos os sub-espacos W_j são mutuamente ortogonais.

Da definição dos sub-espacos W_j e das propriedades da análise multi-resolucional, seguem-se algumas propriedades complementares àquelas já citadas:

- Os sub-espacos W_j também têm a propriedade de escalonamento

$$f(t) \in W_j \Leftrightarrow f(2t) \in W_{j+1}. \quad (2.36)$$

- Existe uma função $\psi(t) \in W_0$, tal que:

$$\psi_{0,k}(t) = \psi(t - k), \quad (2.37)$$

forma uma base ortonormal para W_0 , em que

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \quad (2.38)$$

Como consequência desta última propriedade, têm-se que o conjunto $\{\psi_{j,k}(t); k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para W_j e de acordo com a Eq. 2.34, o conjunto $\{\psi_{j,k}(t); j, k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$.

2.6.3 Funções Escalonamento e Wavelet Básicas

De acordo com a Eq. 2.28 o conjunto $\{\phi(t - k); k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para V_0 . Assim, aplicando a Eq. 2.27 repetidamente, obtêm-se que o conjunto

$$\{\phi(2^j t - k); k \in \mathbb{Z}\}, \quad (2.39)$$

é uma base ortogonal para V_j . Multiplicando a Eq. 2.39 pelo fator de normalização $2^{j/2}$, segue-se que uma família completa de funções escalonamento é gerada através de deslocamentos e translações da função escalonamento básica $\phi(t)$

$$\{2^{j/2}\phi(2^j t - k); k \in \mathbb{Z}\} \text{ é uma base ortonormal para } V_j. \quad (2.40)$$

A partir de deslocamentos da função escalonamento básica $\phi(t)$ é gerada a base ortonormal $\{\phi(t - k); k \in \mathbb{Z}\}$ para V_0 . Da mesma forma, a função escalonamento dilatada $\phi(t/2)$ irá gerar a base ortonormal $\{2^{1/2}\phi(2^{-1}t - k); k \in \mathbb{Z}\}$ para V_1 com passo de deslocamento 2; $\phi(t/4)$ irá gerar a base ortonormal $\{2^{2/2}\phi(2^{-2}t - k); k \in \mathbb{Z}\}$ para V_2 com passo de deslocamento 4 e assim por diante. Logo, o conjunto representado pela Eq. 2.40 forma uma base ortonormal de funções de escalonamento.

Similarmente, em [21] é mostrado que existe uma função $\psi(t)$, de forma que

$$\{2^{j/2}\psi(2^j t - k); k \in \mathbb{Z}\} \text{ é uma base ortonormal para } W_j. \quad (2.41)$$

Algumas relações de ortogonalidade são definidas entre as funções $\phi_{j,k}(t)$ e $\psi_{j,k}(t)$, as quais decorrem das relações entre os sub-espços V_j e W_j . Como $\psi_{j,k}(t) \in W_j$, $\phi_{j,k}(t) \in V_j$ e $V_j \perp W_j$, $\psi_{j,k}(t)$ é ortogonal a $\phi_{j,k}(t)$. Adicionalmente, como os sub-espços W_j são mutuamente ortonormais, há ortogonalidade

entre escalas. Dessa forma, as relações de ortogonalidade entre os sub-espços wavelet e escalonamento podem ser definidas por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(t)\phi_{j,l}(t)dt = \delta_{k,l}, \quad (2.42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{i,k}(t)\psi_{j,l}(t)dt = \delta_{i,j}\delta_{k,l}, \quad (2.43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{i,k}(t)\phi_{j,l}(t)dt = 0, \quad j \geq i, \quad (2.44)$$

em que $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$ e $\delta_{k,l}$ é delta de Kronecker definido como

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq l \\ 1, & \text{para } k = l. \end{cases}$$

2.6.4 Expansão de uma Função em V_j

De acordo com as Eq. 2.33 e 2.34 pode-se escrever

$$L^2(\mathbb{R}) = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \dots \quad (2.45)$$

Portanto, uma função $f(t) \in V_J$, para qualquer $J_0 \leq J$, pode ser decomposta em uma série de termos das função escalonamento e wavelets por

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{J_0,k} \phi_{J_0,k}(t) + \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.46)$$

em que

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_{j,k}(t)dt, \quad (2.47)$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{j,k}(t)dt, \quad (2.48)$$

são os coeficientes da decomposição.

A partir das relações de ortonormalidade entre as funções escalonamento e wavelets em [19] é definido o teorema de Parseval para wavelets como

$$\int |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{J,k}|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{J_0,k}|^2 + \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_{j,k}|^2. \quad (2.49)$$

2.6.5 Equação de Dilatação e Equação Wavelet

Como $V_0 \subset V_1$, uma função em V_0 pode ser representada em termos de funções base de $V_i, i \geq 0$. Assim, a função escalonamento básica $\phi(t) = \phi_{0,0}(t) \in V_0$ pode ser representada por

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_{1,k}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi(2t - k), \quad (2.50)$$

em que

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi_{1,k}(t) dt. \quad (2.51)$$

Para funções escalonamento com suporte compacto, o número de coeficientes a_k é finito

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2g-1} a_k \phi(2t - k). \quad (2.52)$$

A Eq. 2.52, denominada de equação de dilatação, é fundamental na teoria wavelet. O fator g é um inteiro positivo denominado de gênero da wavelet e os termos a_k são denominados de coeficientes de filtros passa-baixas associados à função $\phi(t)$. A função escalonamento é unicamente caracterizada (a menos de uma constante) pelos coeficientes a_k .

Analogamente, como $\psi(t) \in W_0$ e $W_0 \subset W_1$, têm-se que a função $\psi(t)$ com suporte compacto pode ser representada por

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2g-1} b_k \psi(2t - k), \quad (2.53)$$

Os termos b_k são coeficientes de filtros passa-altas, dados por

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi_{1,k}(t) dt. \quad (2.54)$$

A Eq. 2.53 é denominada de equação wavelet.

2.7 Bancos de Filtros e Análise Multi-resolucional

Nesta seção, a partir das propriedades das funções wavelet e escalonamento são derivadas algumas propriedades satisfeitas pelos coeficientes dos filtros associados a tais funções.

2.7.1 Relação entre Escalas de Resolução

A partir das equações da análise multi-resolucional, pode-se derivar as relações de recursividade entre os coeficientes wavelet em uma escala de resolução maior e os coeficientes em uma escala de resolução com menos detalhes. Da Eq. 2.50

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(2t - n), \quad (2.55)$$

o escalonamento por um fator 2^{-j} e deslocamento pelo fator k resulta em

$$\begin{aligned} \phi(2^j t - k) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(2(2^j t - k) - n), \\ &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(2^{j+1} t - 2k - n). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Fazendo $m = 2k + n$, obtêm-se

$$\phi(2^j t - k) = \sqrt{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m-2k} \phi(2^{j+1} t - m). \quad (2.57)$$

Os coeficientes de escalonamento em uma escala de resolução j são obtidos pela Eq. 2.47

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{j/2} \phi(2^j t - k) dt. \quad (2.58)$$

Substituindo a Eq. 2.57 na Eq. 2.58 pode-se escrever

$$c_{j,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m-2k} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1} t - m) dt. \quad (2.59)$$

No entanto, a integral é igual ao coeficiente da decomposição da função $f(t)$ na escala $j + 1$, resultando em

$$c_{j,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m-2k} c_{j+1,m}. \quad (2.60)$$

A relação correspondente para os coeficientes wavelet é dada por

$$d_{j,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{m-2k} c_{j+1,m}. \quad (2.61)$$

De maneira análoga ao desenvolvimento anterior, pode-se obter os coeficientes em uma escala maior a partir dos coeficientes de uma escala inferior. Considere um sinal $f(t) \in V_{j+1}$ que pode ser representado em termos da função escalonamento por

$$f(t) = \sum_k c_{j+1,k} 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{(j+1)}t - k), \quad (2.62)$$

ou em termos da escala seguinte por

$$f(t) = \sum_k c_{j,k} 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) + \sum_k d_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \quad (2.63)$$

Fazendo a substituição das Eq. 2.53 e 2.55 na Eq. 2.63, é obtido

$$\begin{aligned} f(t) = & \sum_k c_{j,k} \sum_n a_n 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}t - k - n) + \\ & + \sum_k d_{j,k} \sum_n b_n 2^{(j+1)/2} \psi(2^{j+1}t - k - n). \end{aligned} \quad (2.64)$$

A partir das relações de ortogonalidade (Eq. 2.42, 2.43 e 2.44), multiplicando as Eq. 2.63 e 2.64 pela função $\varphi(2^{j+1}t - k')$ e em seguida integrando-as, resulta em

$$c_{j+1,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m-2k} c_{j,m} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{m-2k} d_{j,m}, \quad (2.65)$$

que estabelece a relação entre os coeficientes da decomposição em uma função escalonamento de escala maior e os coeficientes wavelet e escalonamento em uma escala inferior.

2.7.2 Sub-amostragem e Filtragem

No processamento digital de sinais, o processo de filtragem de um sinal é realizado através da convolução da seqüência de amostras discretizadas do sinal com os coeficientes do filtro que está sendo utilizado [19]. Seja $x(n)$ a seqüência de entrada e $h(n)$ os coeficientes do filtro considerado com N elementos. A seqüência de saída $y(n)$ é dada por

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k). \quad (2.66)$$

De um modo geral, os filtros digitais [20] se dividem em duas categorias de acordo com o número de coeficientes que os representam. Quando o número de coeficientes N do filtro é finito, o filtro é denominado de filtro com resposta ao impulso finita (FIR - *Finite Impulse Response*). Quando N é infinito, o filtro é denominado de filtro com resposta ao impulso infinita (IIR - *Infinite Impulse Response*). Há várias técnicas para se realizar o projeto de filtros e obter o efeito que se deseja, remoção de ruído ou separação de sinais.

Para os filtros digitais multi-taxa, há uma relação entre o índice inteiro n do sinal $x(n)$ e o tempo. Frequentemente, o sinal discreto a ser processado é formado por uma seqüência de amostras uniformemente espaçadas de uma função do tempo. As duas operações básicas dos filtros multi-taxa são a sub-amostragem e a super-amostragem. A sub-amostragem, também chamada de decimação, toma o sinal $x(n)$ como entrada e produz a saída $y(n) = x(kn)$, $k \geq 1$. Esta operação é representada na Figura 2.7, considerando $k = 2$.

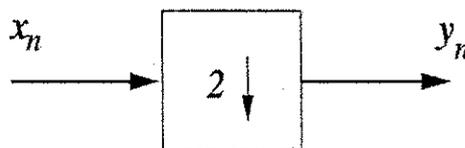


Figura 2.7: Representação em diagrama de blocos da operação de decimação.

Na sub-amostragem, caso específico $k = 2$, metade dos dados do sinal de entrada são descartados, portanto há a possibilidade de perda de informação.

No domínio da frequência, o processo de decimação causa um efeito denominado *aliasing* que se caracteriza por uma sobreposição de componentes de frequência do sinal. No entanto, se o sinal original é limitado em banda, não há perda de informação devido a sub-amostragem.

As Eq. 2.60 e 2.61 realizam exatamente o processo de filtragem digital e sub-amostragem. Estas equações mostram que os coeficientes escalonamento e wavelet em diferentes níveis de escala podem ser obtidos pela convolução dos coeficientes da decomposição na escala j com os coeficientes recursivos a_{-n} e b_{-n} e por uma sub-amostragem, resultando nos coeficientes de decomposição na escala seguinte $j - 1$. Ou seja, os coeficientes na escala j são “filtrados” por dois filtros digitais FIR com coeficientes a_{-n} e b_{-n} e após o processo de sub-amostragem, são obtidos os coeficientes escalonamento e wavelets em um nível de resolução menor. O algoritmo de Mallat utiliza esta estrutura de processamento que foi desenvolvida na teoria de bancos de filtros, filtros espelhados em quadratura, filtros conjugados e bancos de filtros com reconstrução perfeita [19]. A implementação das Eq. 2.60 e 2.61 é ilustrada na Figura 2.8, em que o resultado da convolução entre o termo c_{j+1} e a_{-n} e b_{-n} é subamostrado por um fator igual a 2.

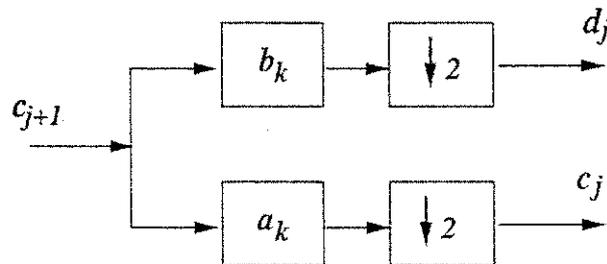


Figura 2.8: Banco de análise com duas bandas.

Ainda considerando a Figura 2.8, observa-se que o número de amostras do sinal de saída do sistema é igual ao número de amostras do sinal de entrada. A passagem do sinal de entrada pelos dois filtros dobra o número de amostras do sinal resultante. Com o processo de decimação, o número de amostras é reduzido ao valor original. Portanto, é possível não perder nenhuma informação e recuperar completamente o sinal original. O processo de *aliasing* ocorrido com

a passagem do sinal pelo filtro superior é cancelada usando-se o sinal do filtro inferior. Este é o princípio utilizado pelos filtros com reconstrução perfeita.

O processo de divisão, filtragem e decimação pode ser repetido nos coeficientes escalonamento gerando a estrutura em árvore da Figura 2.9, denominada de banco de filtros iterativos. Em geral, uma estrutura em árvore é gerada no processo recursivo de obtenção dos coeficientes na escala $k - n$ a partir dos coeficientes da escala k . A estrutura da Figura 2.9 é a representação do processo recursivo de análise em que a projeção de um sinal $f(t)$ sobre o sub-espaço V_m é decomposto em V_{m-1} e W_{m-1} , a projeção em V_{m-1} é decomposta em V_{m-2} e W_{m-2} e assim por diante. Cada projeção equivale a uma versão menos refinada da projeção anterior.

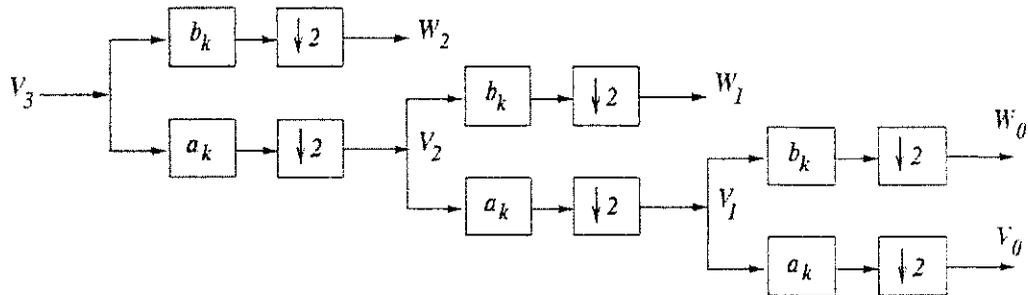


Figura 2.9: Representação da estrutura de análise de um banco de filtros com duas bandas e três estágios.

O primeiro estágio da estrutura divide o espectro de $c_{j+1,k}$ em duas bandas, uma de baixas frequências e outra de altas frequências, resultando nos coeficientes escalonamento e wavelets em uma escala menor $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$. O segundo estágio divide a banda de baixas frequências resultante do primeiro estágio em duas bandas de baixa e alta frequências menores. No primeiro estágio, o espectro é dividido em duas partes iguais. No segundo estágio divide a banda passa-baixa na quarta parte do espectro e assim, sucessivamente. Este processo de divisão resulta em um conjunto logarítmico de larguras de banda. Logo, os filtros do banco de filtros da Figura 2.9 apresentam uma relação entre largura de banda e frequência central da banda constante e são denominados de filtros com fator

de qualidade Q constante. Nas Figuras 2.10 e 2.11 é mostrada uma comparação entre as transformadas STFT e wavelet no gráfico de resolução tempo-frequência.

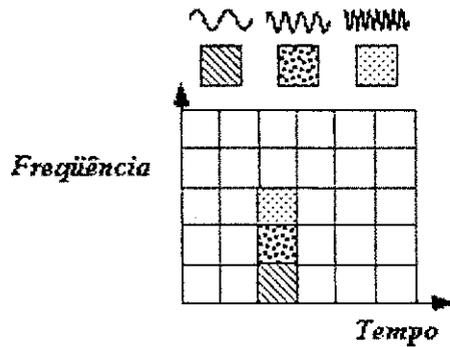


Figura 2.10: Gráfico de resolução tempo-frequência da transformada STFT

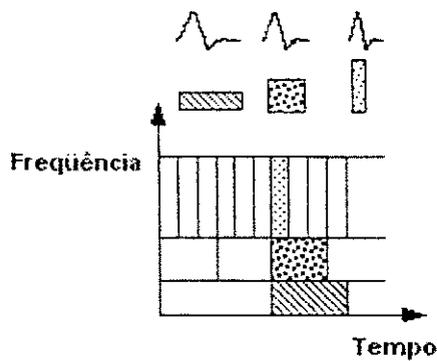


Figura 2.11: Gráfico de resolução tempo-frequência da transformada wavelet.

2.7.3 Super-amostragem e Filtragem

O processo de síntese de um sinal a partir de um banco de filtros é realizado fazendo-se, inicialmente, o processo de super-amostragem seguido da filtragem do sinal. Ou seja, zeros são inseridos entre as amostras do sinal $x(n)$, de modo que saída é

$$y(2n) = x(n) \text{ e } y(2n + 1) = 0. \quad (2.67)$$

Assim, o sinal original é dilatado resultando em um sinal com duas vezes o comprimento inicial.

O processo de filtragem e super-amostragem é exatamente o que faz a operação de síntese descrita pela Eq. 2.65

$$c_{j+1,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m-2k}c_{j,m} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{m-2k}d_{j,m}. \quad (2.68)$$

Inicialmente, a seqüência de coeficientes $c_{j,k}$ na escala j são superamostrados inserindo zeros entre cada termo e em seguida, é feita a convolução da seqüência com os coeficientes escalonamento a_k . O mesmo processo é realizado com os coeficientes wavelet $d_{j,k}$ na escala j . A Figura 2.12 mostra a estrutura representada pela Eq. 2.68, em que $g_k = a_k$ e $h_k = b_k$. Da mesma forma que a Seção 2.7.2, pode-se continuar o processo de síntese até a escala desejada, usando-se os coeficientes wavelet nas escala apropriadas [19]. A Figura 2.13 é uma representação em árvore do processo.

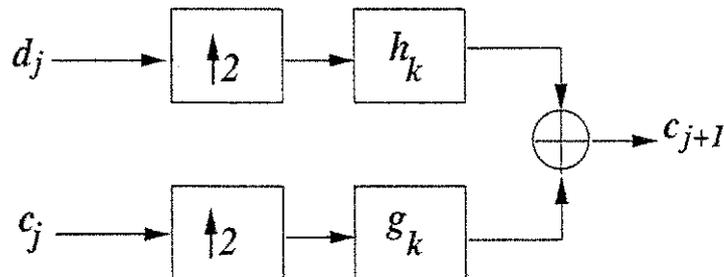


Figura 2.12: Banco de síntese de duas bandas.

Na teoria wavelet, os processos de síntese e análise (composição e decomposição, respectivamente) podem ser vistos como processos de filtragem em sub-bandas passa-baixas e passa-altas seguidos de uma sub-amostragem, na análise, ou de uma super-amostragem, na síntese. Procedimento semelhante é usado na codificação em sub-bandas, em que os coeficientes dos bancos de filtros de análise e síntese $\{a_k, b_k\}$ e $\{g_k, h_k\}$ formam os bancos de filtros utilizados por

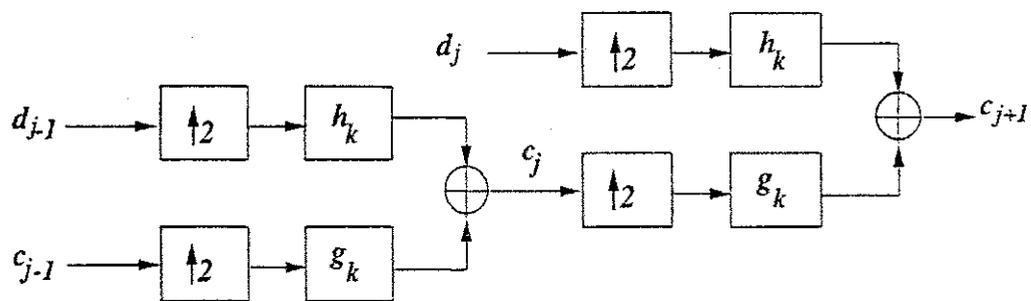


Figura 2.13: Representação da estrutura de síntese de um banco de filtros com duas bandas e dois estágios.

estes métodos. A Figura 2.14 apresenta as funções wavelet e escalonamento Daubechies 10, os coeficientes dos filtros passa-altas e passa-baixas associados a cada função e a função de transferência de cada filtro.

2.8 Conclusão

Neste capítulo foi feito um resumo da teoria wavelet. Foram apresentadas as características e propriedades gerais das funções wavelet, as transformadas wavelets contínua e discreta e a teoria wavelet foi discutida do ponto de vista da análise multi-resolucional.

A análise multi-resolucional é usada com padrão para a construção de bases wavelets ortonormais e para o cálculo das transformadas wavelets ortonormais. A decomposição em multi-resoluções permite a análise e o processamento de sinais em múltiplas bandas de frequências, estando intimamente relacionada com a teoria de codificação em sub-bandas e filtragem por bancos de filtros com multi-taxas.

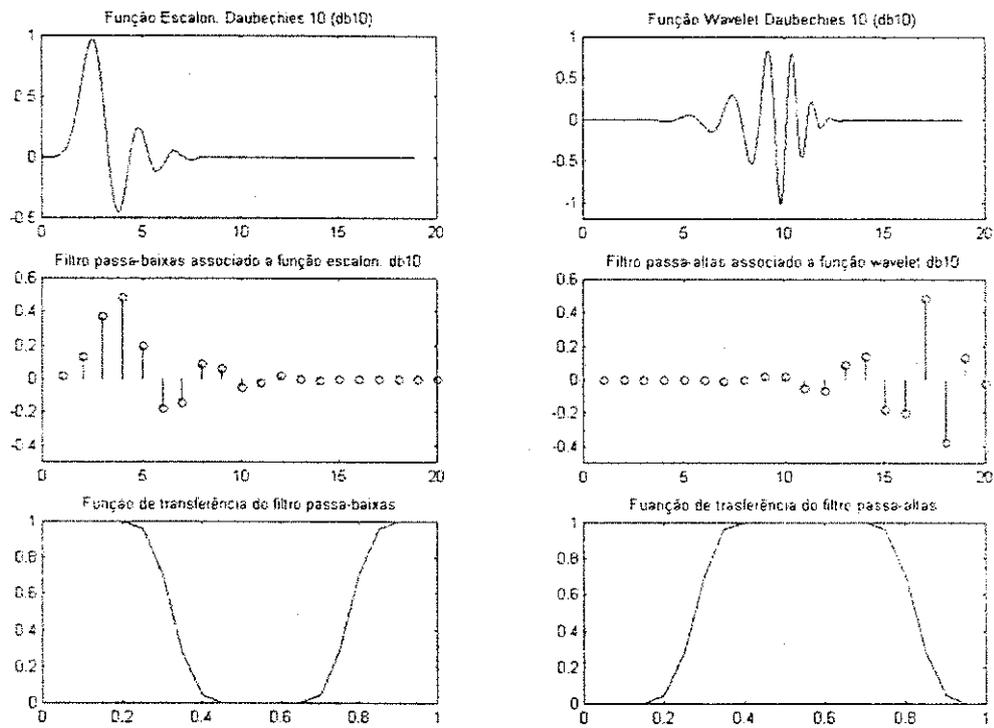


Figura 2.14: Funções wavelet e escalonamento Daubechies 10, coeficientes dos filtros associados a cada função e função de transferência de cada filtro.

Capítulo 3

Matrizes Wavelet

3.1 Introdução

Uma matriz wavelet é uma generalização das matrizes ortogonais quadradas ou matrizes unitárias para uma grande classe de matrizes retangulares. As matrizes wavelets correspondem a bancos de filtros com multi-taxas, em que cada linha da matriz corresponde aos coeficientes escalonamento e wavelets de um banco de filtros [2, 22]. Ou seja, uma matriz wavelet é a representação matricial dos coeficientes de filtros associados às funções escalonamento e wavelet de um dado sistema wavelet. Portanto, cada matriz wavelet contém a informação necessária para definir um sistema wavelet associado. Várias propriedades analíticas dos sistemas wavelet dependem das propriedades algébricas das matrizes wavelet.

Os primeiros sistemas wavelet foram introduzidos por Alfred Haar, em 1910. Os sistemas wavelet de Haar foram generalizados para dimensões e ordens maiores e tal generalização, leva naturalmente à noção de matrizes wavelet de Haar e sua classificação. Há um mapeamento característico das matrizes wavelet nas matrizes de Haar de mesma ordem e assim, a classificação das matrizes wavelet pode ser reduzida a classificação de sua matriz de Haar característica. Várias matrizes usadas em matemática e processamento são matrizes de Haar de tipos específicos. Como exemplo, pode-se citar: as matrizes de transformada de Fourier discreta, as matrizes de transformada do cosseno discreta, as matrizes de Walsh e Hadamard, matrizes de Rademacher, e matrizes de Chebyshev [2]. Todas estas

matrizes são unitárias (ortogonais caso sejam reais). A noção das matrizes de Haar oferece um ponto de vista unificado das diversas aplicações das matrizes citadas.

Nas seções seguintes deste capítulo será apresentada a definição de matrizes wavelet, seus fundamentos, propriedades elementares e alguns exemplos. O enfoque maior será dado às matrizes wavelet compactas, ou seja, matrizes de dimensão $m \times mg$, em que m é a ordem e g é o gênero da matriz, e $m, g < \infty$. A ordem de uma matriz é também denominada de *multiplicador* ou fator de escala da matriz. Em especial, na codificação wavelet discutida neste trabalho, são usadas matrizes wavelet reais planas construídas a partir da wavelet de Haar.

3.2 As Matrizes Wavelet

Seja \mathbb{F} um subconjunto do conjunto \mathbb{C} dos números complexos. O subconjunto \mathbb{F} pode ser o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais, \mathbb{R} dos números reais, o próprio conjunto dos números complexos ou algum conjunto algébrico. Considere uma matriz $A = (a_k^s)$, com $m \geq 2$ linhas de vetores de comprimento s possivelmente infinito, dada por

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & a_{-1}^0 & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\ \cdots & a_{-1}^1 & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{-1}^{m-1} & a_0^{m-1} & a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

em que cada elemento $a_k^s \in \mathbb{F}$ e $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$. São definidas sub-matrizes A_l de A de dimensão $m \times m$, da forma

$$A_l = (a_{lm+r}^s), \quad r = 0, \dots, m-1, \quad s = 0, \dots, m-1, \quad (3.2)$$

para $l \in \mathbb{Z}$. Assim, a matriz A pode ser expressa em termos de blocos de matrizes

$$A = (\dots, A_{-1}, A_0, A_1, A_2 \dots), \quad (3.3)$$

em que

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_{m-1}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{m-1} & \cdots & a_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Da teoria de variáveis complexas, a partir da matriz A , pode ser construída uma série de potências

$$A(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l z^l, \quad (3.5)$$

denominada de série de Laurent da matriz. $A(z)$ também pode ser escrita como uma matriz $m \times m$, tendo como elementos os coeficientes da série de Laurent

$$A(z) = \begin{pmatrix} \sum_k a_{mk}^0 z^k & \cdots & \sum_{-k} a_{mk+m-1}^0 z^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k a_{mk}^{m-1} z^k & \cdots & \sum_k a_{mk+m-1}^{m-1} z^k \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

sendo também denotada de matriz de Laurent de A . Ambas as representações 3.5 e 3.6 serão denominadas de representação de Laurent da matriz A .

Supondo que há um número finito de matrizes não-nulas na representação de $A(z)$ da Eq. 3.6, então

$$A(z) = \sum_{N_1}^{N_2} A_l z^l, \quad (3.7)$$

considerando que A_{N_1} e A_{N_2} são matrizes não-nulas. O gênero da matriz A , dado por $g = N_2 - N_1 + 1$, é o número de termos não nulos da série representada pela Eq. 3.7.

Finalmente, é definida a adjunta $\tilde{A}(z)$ da matriz de Laurent $A(z)$ por

$$\tilde{A}(z) = A^*(z^{-l}) = \sum_l A_l^* z^l, \quad (3.8)$$

em que $A_l^* = \overline{A}^t$ é a transposta conjugada da matriz A_l .

Assumindo que A tem m linhas e possivelmente, um número infinito de colunas, a matriz A é denominada de matriz wavelet de ordem m se forem satisfeitas às seguintes condições

$$A(z) \cdot \tilde{A}(z) = mI, \quad (3.9)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^s = m\delta_{s,0}. \quad (3.10)$$

em que $\delta_{s,0}$ é o delta de Kronecker.

Por outro lado, caso a matriz A tenha um número finito de colunas, então A é uma matriz de dimensão $m \times mg$, em que g , como já mencionado, é o gênero da matriz A . O gênero é o número de blocos de matrizes $m \times m$ que formam a matriz A . O conjunto de todas as matrizes wavelet de ordem m e gênero g será representada por $WM(m, g; \mathbb{F})$. Geralmente \mathbb{F} é o conjunto dos números reais ou dos complexos.

A comparação entre os coeficientes com potências de z correspondentes estabelece relações de ortogonalidade entre as linhas da matriz A

$$\sum_k a_{k+ml}^{s'} \bar{a}_{k+ml}^s = m\delta_{s',s}\delta_{l,l}. \quad (3.11)$$

As relações 3.9 e 3.10 ou equivalentemente 3.11 e 3.10 são denominadas, respectivamente, de condição quadrática e linear (condição de escalonamento) na definição de uma matriz wavelet. A condição quadrática assegura que as linhas de matriz wavelet $A = (a_k^s) = (a_0^s, \dots, a_{mg-1}^s)$ têm comprimento igual a \sqrt{m} e que são ortogonais mesmo quando deslocadas por um múltiplo arbitrário de m . O vetor a^0 é denominado de vetor escalonamento e cada um dos vetores a^s , $1 < s < m$, é denominado de vetor wavelet. A condição de linearidade ou de escalonamento (3.10) estabelece que a soma dos elementos do vetor escalonamento é igual a ordem m da matriz wavelet, enquanto que, a soma dos elementos

de cada vetor wavelet é igual a zero. As matrizes wavelet de ordem m podem ser vistas como um banco de filtros digitais com m -bandas, em que a primeira linha equivale a um filtro passa-baixas e as linhas $m - 1$ linhas equivalem a filtros passa-altas. Dessa forma, para uma dada matriz wavelet, os elementos do vetor escalonamento e dos vetores wavelet são também chamados de coeficientes de filtro passa-baixas e coeficientes de filtros passa-altas, respectivamente.

Dada uma matriz wavelet com suporte compacto, $a_k^s \neq 0$, para $0 \leq k < mg$, suas linhas serão representadas por

$$a_k := a_k^0 \quad b_k^s := a_k^s, \quad (3.12)$$

em que $0 < s < m$ e $0 \leq k < mg$. Assim, os vetores escalonamento e wavelet serão denotados, respectivamente por

$$a = (a_0, \dots, a_{m-1}), \quad (3.13)$$

$$b^s = (b_0^s, \dots, b_{m-1}^s). \quad (3.14)$$

A seguir serão apresentados alguns exemplos simples de matrizes wavelet [2, 22].

Exemplo 2 (Matrizes de Haar de ordem 2) *As matrizes abaixo, denominadas de matrizes de Haar, são as únicas matrizes wavelet quadradas de ordem 2 com coeficientes reais*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

De forma geral, uma matriz de Haar com elementos complexos é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Exemplo 3 (Matriz Wavelet de Daubechies de ordem 2 e gênero 2) A matriz D_2

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} & -3 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

é uma das matrizes de ordem 2 descobertas por Daubechies [2].

Exemplo 4 (Matriz Wavelet de ordem 2 e gênero 2) Defina a família de vetores escalonamento com parâmetro periódico por

$$a_0(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta - \sin \theta), \quad (3.18)$$

$$a_1(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta + \sin \theta), \quad (3.19)$$

$$a_2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta + \sin \theta), \quad (3.20)$$

$$a_3(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta - \sin \theta), \quad (3.21)$$

e o correspondente vetor wavelet associado $b_k(\theta) = (-1)^{k+1}a_{3-k}(\theta)$. A matriz

$$\begin{pmatrix} a_0(\theta) & a_1(\theta) & a_2(\theta) & a_3(\theta) \\ b_0(\theta) & b_1(\theta) & b_2(\theta) & b_3(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

é uma família de matrizes wavelet de ordem 2 e gênero 2 definida por um único parâmetro θ , segundo as relações a_k e b_k . A matriz D_2 é um caso especial deste exemplo para $\theta = \pi/6$.

3.2.1 Matrizes Wavelet Planas

Uma matriz wavelet plana tem a propriedade de que todos os elementos da matriz tem o mesmo valor absoluto. Quando os elementos de uma matriz wavelet plana são reais, ela é dita matriz wavelet plana real [2, 3]. Similarmente, quando os

elementos de uma matriz wavelet são normalizados em números complexos com mesmo módulo, a matriz é denominada de matriz wavelet plana complexa. As matrizes wavelet planas reais com elementos normalizados em ± 1 satisfazem às condições de escalonamento modificadas

$$\sum_k a_k^j = m\sqrt{g}\delta_{0,j}, \quad (3.23)$$

$$\sum_k a_{k+ml}^j a_{k+ml'}^{j'} = mg\delta_{j,j'}\delta_{l,l'}. \quad (3.24)$$

A matriz wavelet plana real normalizada de ordem $m = 2$ e gênero $g = 2$ é uma matriz de Haar dada pela Eq. 3.15. Matrizes wavelet planas reais de ordens maiores e gênero 1 são também conhecidas como matrizes de Hadamard ou matrizes de Walsh e são utilizadas na codificação de canal. A seguir são apresentados exemplos de matrizes wavelet planas reais.

Exemplo 5 (Matriz wavelet plana real de ordem 2 e gênero 4)

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Exemplo 6 (Matriz wavelet plana real de ordem 4 e gênero 4)

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

3.3 Classificação das Matrizes Wavelet

As matrizes wavelet são classificadas a partir de parâmetros matemáticos que correspondem a propriedades apropriadas para aplicações específicas como filtragem de sinais, representação esparsa e codificação. De uma forma geral, a classificação depende de três parâmetros principais [2]:

- a ordem m da matriz corresponde a taxa de amostragem e ao número de bandas em um banco de filtros wavelet. Um filtro com ordem $m < \infty$ amostra o sinal m vezes por unidade de tempo. Se $m = \infty$, o filtro é analógico e amostra continuamente o sinal;
- o gênero g representa o número de intervalos de sinalização (símbolos) sobre os quais o filtro opera. O produto mg é igual ao número de coeficientes de cada sub-banda do banco de filtros wavelet.
- a matriz de Haar característica, que será definida na seção seguinte.

3.4 Matrizes Wavelet de Haar

O conjunto das matrizes wavelet com gênero igual a 1 é de especial importância na teoria wavelet. Seja

$$H(m; \mathbb{F}) = MW(m, g; \mathbb{F}), \quad (3.27)$$

o elementos das matrizes de Haar de ordem m . As matrizes de Haar estão relacionadas com as demais matrizes wavelet, pois estas últimas podem ser mapeadas em matrizes de Haar de mesma ordem. Nas sub-seções seguintes são discutidas algumas propriedades das matrizes de Haar e algumas operações que possibilitam a construção de matrizes de maior gênero a partir de matrizes de menor gênero. Existem outros operadores algébricos [2, 22], não tão elementares como os aqui apresentados, que possibilitam a construção de matrizes wavelet de maior gênero a partir dos elementos de matrizes de menor gênero.

3.4.1 A Matriz de Haar Canônica

Seja $\mathbf{U}(m)$ o conjunto unitário de ordem m , formado por todas as matrizes complexas U de dimensão $m \times m$, em que, $U^*U = I$ [2, 22].

Teorema 1 *Uma matriz complexa H de dimensão $m \times m$ é uma matriz de Haar se, e somente se,*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \mathbf{H}, \quad (3.28)$$

em que $U \in \mathbf{H}(m-1)$ é uma matriz unitária e \mathbf{H} é a matriz de Haar canônica de ordem m , definida por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -(m-1)\sqrt{\frac{1}{m-1}} & \sqrt{\frac{1}{m-1}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \sqrt{\frac{1}{m-1}} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -s\sqrt{\frac{m}{s^2+s}} & \sqrt{\frac{m}{s^2+s}} & \dots & \sqrt{\frac{m}{s^2+s}} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\sqrt{\frac{m}{2}} & \sqrt{\frac{m}{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

em que $s = (m-k)$ e $k = 0, 1, \dots, m-1$ são os números das linhas da matriz.

Lema 7 *Seja $H = (h_r^s)$ uma matriz de Haar. Então, $h_r^s = h_r^0 = 1$ para $0 \leq r \leq m$.*

Corolário 8 *Sejam $H', H'' \in H(m; \mathbb{C})$ duas matrizes de Haar. Então, existe uma matriz unitária $U \in \mathbf{U}(m-1)$ de modo que*

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} H'' \quad (3.30)$$

Corolário 9 *Seja A uma matriz wavelet real, ou seja, $a_k^s \in \mathbb{R}$, então A é uma matriz de Haar se, e somente se,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} \mathbf{H}, \quad (3.31)$$

em que $O \in O(m-1)$ é uma matriz ortogonal e \mathbf{H} é uma matriz de Haar canônica de ordem m .

3.4.2 Matriz de Haar Característica de uma Matriz Wavelet

Considere A uma matriz wavelet e seja $A(z)$ sua matriz de Laurent. Defina a matriz de Haar característica $\chi(A)$ da matriz wavelet A por

$$\chi(A) := A(1). \quad (3.32)$$

O teorema seguinte estabelece uma relação entre as matrizes wavelet e as matrizes de Haar.

Teorema 2 *Se $A \in MW(m, g; \mathbb{F})$, então $\chi(A) \in H(m; \mathbb{F})$, ou seja, χ é um mapeamento bem definido de matrizes wavelet de ordem m em matrizes de Haar de mesma ordem*

$$MW(m, g; \mathbb{F}) \xrightarrow{\chi} H(m; \mathbb{F}). \quad (3.33)$$

Prova. Os elementos da matriz $H = \chi(A)$ são da forma

$$h_s^r = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{ml+s}^r. \quad (3.34)$$

A matriz H deve satisfazer às condições 3.9 e 3.10 que definem uma matriz wavelet. Pela condição de linearidade e usando 3.34, é obtido

$$\sum_{s=0}^{m-1} h_s^r = \sum_{s=0}^{m-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{ml+s}^r \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^r = m\delta_{r,0}. \quad (3.35)$$

A condição quadrática para $H = \chi(A)$ segue da condição quadrática geral, dada pela Eq. 3.9, para $z = 1$. ■

Corolário 10 *Seja A uma matriz wavelet de ordem m e seja $\chi(A)$ a matriz de Haar característica da matriz A . Então, existe uma matriz unitária $U \in U(m-1)$ de modo que*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} A, \quad (3.36)$$

é uma matriz wavelet cuja matriz de Haar característica $\chi(B)$ é a matriz de Haar canônica, e

$$\chi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \cdot \chi(A). \quad (3.37)$$

3.4.3 Produto de Tensores entre Matrizes de Haar

O produto de tensores entre duas matrizes de Haar resulta em outra matriz de Haar.

Teorema 3 Se $A \in H(m'; \mathbb{F})$ e $B \in H(m''; \mathbb{F})$, então

$$A \otimes B \in H(m'm''; \mathbb{F}). \quad (3.38)$$

O teorema acima será ilustrado com um exemplo. Seja $m' = m'' = 2$ e

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 \\ a_1^0 & a_1^1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_0^0 & b_1^0 \\ b_1^0 & b_1^1 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_0^0 b_0^0 & a_0^0 b_1^0 & a_1^0 b_0^0 & a_1^0 b_1^0 \\ a_0^0 b_1^0 & a_0^0 b_1^1 & a_1^0 b_1^0 & a_1^0 b_1^1 \\ a_1^0 b_0^0 & a_1^0 b_1^0 & a_1^1 b_0^0 & a_1^1 b_1^0 \\ a_1^0 b_1^0 & a_1^0 b_1^1 & a_1^1 b_1^0 & a_1^1 b_1^1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Aplicando o produto de tensores na matriz de Haar

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

e definindo

$$H^{\otimes n} := \underbrace{H \otimes \dots \otimes H}_{n \text{ fatores}}, \quad (3.42)$$

então, $H^{\otimes n}$ é uma matriz de Haar de ordem 2^n e também, é um exemplo de uma classe especial de matrizes de Hadamard.

Para $n = 2$ é obtido

$$H^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ 1 \times (-1) & 1 \times 1 & 1 \times (-1) & 1 \times 1 \\ -1 \times 1 & -1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ -1 \times (-1) & -1 \times 1 & 1 \times (-1) & 1 \times 1 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

$$H^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

$$H^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} H & H \\ -H & H \end{pmatrix}.$$

Corolário 11 *O produto de tensores de duas matrizes de Haar planas é uma matriz de Haar plana.*

3.4.4 O Operador Extensão

Através do operador extensão uma matriz wavelet de maior gênero é construída a partir de uma matriz wavelet de menor gênero, ou seja, é feito um mapeamento de uma matriz de menor gênero em uma matriz de maior gênero. De forma a simplificar a apresentação da operação de extensão, serão consideradas apenas matrizes wavelet de ordem par. Assim, defina o operador extensão para a matriz $A \in MW(m, g; \mathbb{F})$, como

$$E : MW(m, g; \mathbb{F}) \rightarrow MW(m, 4g; \mathbb{F}). \quad (3.45)$$

Sejam a as da linhas matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ \vdots \\ a^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Defina a extensão $m \times 4m$ da matriz A por

$$E(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^0 & -a^1 \\ a^0 & a^1 & -a^0 & a^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{m-2} & a^{m-1} & a^{m-2} & -a^{m-1} \\ a^{m-2} & a^{m-1} & -a^{m-2} & a^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Teorema 4 *Se $A \in MW(m, g; \mathbb{F})$, então $E(A) \in MW(m, 4g; \mathbb{F})$.*

3.5 Matrizes Wavelet Usadas em Codificação

Algumas técnicas de codificação e em especial a codificação wavelet considerada neste trabalho, utilizam matrizes wavelet reais planas construídas através das operações de extensão e/ou do produto de tensores entre matrizes, tendo como base a matriz wavelet de Haar de dimensão 2×2 ($m = 2, g = 1$) dada por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

A seguir são apresentadas as matrizes wavelet reais planas utilizadas nos sistemas analisados neste trabalho.

1. *Matrizes wavelet Reais Planas 2×8 , 2×32 e 2×128 .*

A Eq. 3.25 apresenta uma matriz wavelet plana de ordem $m = 2$ e gênero $g = 4$ construída através da aplicação do operação de extensão na matriz H (Eq. 3.48)

$$MW_{2 \times 8} = ext(H) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

A partir da matriz $MW_{2 \times 8}$, pode-se aplicar o operador extensão para obter-se a matriz de dimensão 2×32

$$MW_{2 \times 32} = ext(MW_{2 \times 8}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^0 & -a^1 \\ a^0 & a^1 & -a^0 & a^1 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

em que a^0 e a^1 são, respectivamente, a primeira e a segunda linha da matriz da Eq. 3.49. Da mesma forma, a matriz de dimensão 2×128 pode ser obtida pela extensão da matriz $MW_{2 \times 32}$.

2. Matriz Wavelet Real Plana 4×16 e 4×64 .

A matriz wavelet real plana de ordem $m = 4$ e gênero $g = 4$, dada pela Eq. 3.26, pode ser calculada através do produto de tensores entre duas matrizes de Haar

$$H^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

e em seguida, aplicando a extensão no resultado do produto de tensores

$$\text{ext}(H^{\otimes 2}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

A matriz wavelet 4×64 pode ser obtida através da extensão da matriz 4×16 .

3.6 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada a representação matricial para os coeficientes wavelet associados a funções wavelet e escalonamento correspondentes. Foram também discutidas algumas propriedades importantes, operações algébricas e apresentadas as matrizes de coeficientes reais planas utilizadas no processo de codificação com wavelets. As matrizes de coeficientes wavelet são a base da codificação wavelet bit-a-bit considerada neste trabalho e apresentada no Capítulo 4.

Capítulo 4

Codificação de Canal Usando Wavelets

4.1 Introdução

A codificação de canal bit-a-bit usando wavelets (CCW ou WCC - *Wavelet Channel Coding*) é uma técnica desenvolvida a partir das propriedades de ortogonalidade observadas nas matrizes de coeficientes wavelet (MCW ou WCM - *Wavelet Coefficients Matrix*) [2, 3, 22]. As vantagens desta técnica de codificação de canal são resultado da união das propriedades de ortogonalidade das palavras-código CCW, do espalhamento do símbolo de informação ao longo dos símbolos codificados e do uso de técnicas de decisão suave na decodificação dos símbolos codificados.

Algumas características da codificação usando wavelets podem ser citadas. São elas:

1. a CCW pode ser aplicada em codificação de blocos ou de treliça;
2. as palavras-código wavelet são estritamente ortogonais;
3. a correlação entre as palavras-código CCW e as palavras que não pertencem ao código é reduzida;
4. a CCW permite a decodificação robusta por decisão suave;

5. as palavras-código CCW podem ser arbitrariamente longas;
6. a simplicidade do processo de decodificação;
7. a codificação e decodificação com CCW pode ser implementada de forma eficiente através de circuitos VLSI simples;
8. o ganho que pode ser obtido em canais de comunicações móveis, sujeitos ao desvanecimento.

Em canais de comunicações móveis, a qualidade do sinal transmitido é fortemente degradada pela propagação por múltiplos percursos. Assim, esquemas de codificação combinados com diversidade espacial podem ser usados para combater de forma mais eficiente os efeitos destrutivos do desvanecimento. Este capítulo apresenta a codificação de canal bit-a-bit com matrizes de coeficientes wavelet e propõe uma técnica que integra a potencialidade de tal codificação com técnicas de diversidade espacial, com introdução de pequena complexidade no processo de codificação e decodificação.

4.2 Diversidade

Na comunicação sem fio é observado o efeito destrutivo dos múltiplos percursos na propagação do sinal, como também, o efeito das interferências entre os sinais dos vários usuários do sistema. Para combater tais efeitos, técnicas de diversidade possibilitam que o receptor recupere a informação presente no sinal transmitido, quando o canal introduz uma grande atenuação. O objetivo das técnicas de diversidade é fornecer ao receptor réplicas do sinal transmitidas por canais estatisticamente independentes, de modo que a probabilidade de que todas as componentes do sinal sejam afetadas simultaneamente pela interferência seja reduzida [8, 23].

Um método de diversidade muito utilizado é a diversidade em frequência, em que os sinais são transmitidos em diferentes frequências, sendo afetados de maneiras distintas pelo desvanecimento. Ou seja, na diversidade em frequência

réplicas do sinal são transmitidas por portadoras diferentes com uma separação entre portadoras sucessivas maior ou igual a banda de coerência do canal¹. O espalhamento espectral é uma forma de diversidade em frequência em que o sinal é transmitido utilizando-se uma banda passante muito maior que a necessária.

Uma segunda técnica é a diversidade temporal. Neste método o sinal é transmitido em intervalos de tempo diferentes, de forma que a influência do desvanecimento em determinado intervalo de tempo é independente (descorrelacionada) da influência em intervalos anteriores e posteriores.

Na diversidade de antenas ou diversidade espacial, canais de transmissão independentes são criados entre transmissor e receptor através do uso de múltiplas antenas. Através da história da comunicação sem fio, a diversidade espacial tem sido muito usada na melhoria da qualidade da transmissão [26]. Nos principais padrões de sistemas celulares digitais que se encontram em operação atualmente, os sistemas de segunda geração, que incluem o padrão IS-95, com a tecnologia de múltiplo acesso por divisão em código (CDMA - *Code Division Multiple Access*), e os padrões IS-136 e GSM (*Global System for Mobile communications*), com a tecnologia de múltiplo acesso por divisão no tempo (TDMA - *Time Division Multiple Access*), a diversidade espacial garante ganhos substanciais no desempenho dos sistemas. Recentemente, os conceitos de diversidade espacial estão sendo aplicados no desenvolvimento de sistemas de localização e posicionamento, em novas tecnologias como as antenas adaptativas [27] e nos sistemas celulares de terceira geração [28].

Múltiplas antenas podem ser empregadas tanto no transmissor quanto no receptor. No entanto, as antenas devem estar espacialmente separadas entre si de alguns comprimentos de onda para tornar o desvanecimento de cada sinal decorrelacionado.

¹Banda de coerência do canal [24] - separação máxima entre componentes de um sinal que são afetadas, em amplitude e fase, de forma idêntica pelo canal. Se a banda passante for menor que a banda de coerência do canal, o desvanecimento é do tipo plano, caso contrário, é do tipo lento.

4.3 O Algoritmo de Codificação de Canal Usando Wavelets

A Eq. 3.11 é a propriedade fundamental das MCW que possibilita a codificação de canal usando wavelets. Tal propriedade assegura que as linhas de uma matriz MCW de ordem m são mutuamente ortogonais quando deslocadas de km , sendo k inteiro. Também estabelece que cada linha é ortogonal a si mesma, deslocada de km , k inteiro e $k \neq 0$. Portanto, como as linhas de uma MCW são ortogonais, mesmo quando deslocadas, elas podem ser adicionadas e sobrepostas. Nesta seção são apresentados o algoritmo de codificação com wavelets original, proposto por Tzannes em [3] e o algoritmo que integra a codificação com diversidade espacial.

4.3.1 Algoritmo Original

Considere x_n um vetor com n bits de informação, em que cada x_i é um bit que pertence ao conjunto $\{-1, +1\}$. Seja A uma matriz de coeficientes wavelet de ordem m e gênero g , com m linhas e mg colunas, dada pela Eq. 3.1. Nas Eq. 3.13 e 3.14, a e b^s são, respectivamente, o vetor escalonamento e os vetores wavelet, ou em outras palavras, os coeficientes do filtro passa-baixas e dos filtros passa-altas do banco de filtros com m bandas.

Para exemplificar o processo de codificação, considere A como sendo uma MCW de ordem $m = 2$ e gênero g . Como as linhas de A são mutuamente ortogonais quando deslocadas de duas ($m = 2$) posições, a propriedade da ortogonalidade entre os vetores a e b é usada para codificar bits a uma taxa de 2 bits de mensagem por $2k$ pulsos de relógio, em que $1 \leq k \leq \log_2 2g$. Os bits de mensagem com número de seqüência ímpar são mapeados no vetor a , e os bits de mensagem com número de seqüência par são mapeados no vetor b .

Na Tabela 4.1 é ilustrado o procedimento de codificação para um sistema com seqüências wavelet com máxima sobreposição, que corresponde ao caso em que a taxa do código é de um bit de informação por símbolo CCW.

1	2	3	4	...	$2g$	$2g + 1$	$2g + 2$...
$x_1 a_0$	$x_1 a_1$	$x_1 a_2$	$x_1 a_3$...	$x_1 a_{2g-1}$
$x_2 b_0$	$x_2 b_1$	$x_2 b_2$	$x_2 b_3$...	$x_2 b_{2g-1}$
		$x_3 a_0$	$x_3 a_1$...	$x_3 a_{2g-3}$	$x_3 a_{2g-2}$	$x_3 a_{2g-1}$...
		$x_4 b_0$	$x_4 b_1$...	$x_4 b_{2g-3}$	$x_4 b_{2g-2}$	$x_4 b_{2g-1}$...
				...	\vdots	\vdots	\vdots	
y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_{2g}	y_{2g+1}	y_{2g+2}	...

Tabela 4.1: Exemplo de codificação de canal usando uma MCW de ordem 2 e gênero g

A seqüência de pulsos de relógio e os símbolos codificados y_i são apresentados, respectivamente, na linha superior e inferior da Tabela 4.1. A codificação de cada bit de informação x_i é apresentada na i -ésima linha abaixo da linha superior da Tabela 4.1. Para n ímpar, a codificação é iniciada no i -ésimo pulso de relógio e para n par, inicia-se no $(i - 1)$ -ésimo pulso do relógio. Finalmente, o símbolo codificado y_i é resultado do somatório da i -ésima coluna dos bits de mensagem codificada e portanto, não restrito aos valores ± 1 . O símbolo a ser transmitido no i -ésimo pulso de relógio é dado por

$$y_i = \sum_k \{x_{2k+1} a_{i-2k-1} + x_{2k+2} b_{i-2k-1}\}. \quad (4.1)$$

O vetor de símbolos codificados \mathbf{y}_n também pode ser representado por

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n C_{MCW}, \quad (4.2)$$

em que C_{MCW} é a matriz de codificação, cujas linhas são construídas deslocando-se a MCW de km , k inteiro. A equação seguinte é um exemplo de uma C_{MCW} construída a partir de uma MCW de ordem $m = 2$ e gênero $g = 4$. Nota-se, portanto, que C_{MCW} é uma matriz de codificação quadrada de dimensão $n \times n$, em que n é a dimensão do vetor de bits de informação.

$$C_{MCW} = \begin{pmatrix} (a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7) \\ (b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7) \\ & & (a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7) \\ & & (b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7) \\ & & & & (a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7) & \cdots \\ & & & & (b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7) & \cdots \\ & & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

4.3.2 Codificação Wavelet e Diversidade Espacial

Em [29] são apresentadas algumas técnicas para otimização da transmissão codificada através do uso de múltiplas antenas. O uso de codificação combinada com diversidade espacial pode melhorar o desempenho de sistemas de comunicação sem fio afetados pelo desvanecimento. Em geral, nos sistemas de comunicação móvel é mais prático o uso de múltiplas antenas nas estações base do que nas unidades móveis [29]. Assim, quando o móvel transmite para a estação base há uma diversidade de antenas de recepção, enquanto que na transmissão da estação base para o móvel há uma diversidade de antenas de transmissão.

Considere o sistema apresentado na Figura 4.1. Em cada intervalo de sinalização T_s , o sinal a ser transmitido é multiplexado em frequência através da passagem por um banco com M filtros passa-faixas com bandas disjuntas. Tal sistema pode ser implementado naturalmente através da codificação com MCW de dimensão $m \times mg$, pois cada linha da matriz é formada por coeficientes de um banco de filtros com m bandas. Em outras palavras, o vetor linha a , formado pelos coeficientes da função escalonamento, se comporta como um filtro passa-baixas e os vetores b^s , $s > 0$, formados pelos coeficientes das funções wavelet, se comportam como filtros passa-altas.

Para ilustrar a técnica que integra a codificação wavelet com diversidade espacial, por simplicidade, considere o processo de codificação descrito na Sub-seção

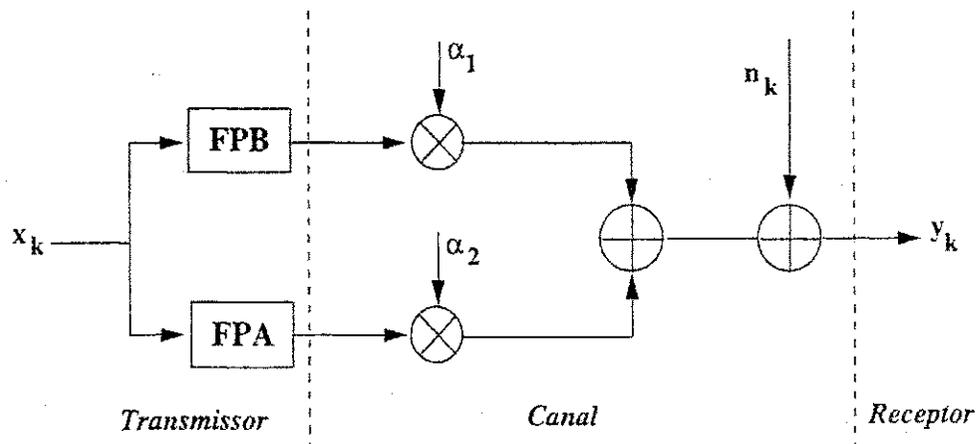


Figura 4.1: Modelo do sistema com multiplexação em frequência e diversidade espacial.

4.3.1 para uma matriz de ordem $m = 2$ e gênero g . Separando a Eq. 4.1 em dois somatórios

$$y_n^1 = \sum_k x_{2k+1} a_{n-2k-1}, \quad (4.4a)$$

$$y_n^2 = \sum_k x_{2k+2} b_{n-2k-1}, \quad (4.4b)$$

os bits de informação gerados nos intervalos ímpares são codificados através da multiplicação pelos coeficientes do filtro passa-baixas e aqueles gerados nos intervalos pares são codificados através da multiplicação pelos coeficientes do filtro passa-altas.

Generalizando, dada uma MCW real plana $m \times mg$, um símbolo codificado é gerado a partir do somatório de m parcelas. Por exemplo, as Eq. 4.4a e 4.4b, para $m = 2$. Cada uma das m parcelas é resultado da multiplicação pelos coeficientes do banco de filtros com m bandas disjuntas, que são ortogonais entre si. Portanto, cada uma das m bandas pode ser modulada e transmitida por uma antena diferente, sem haver sobreposição. A técnica de codificação com matrizes de coeficientes wavelet integrada com diversidade espacial não introduz complexidade no processo de codificação.

4.4 Distribuição dos Símbolos CCW

Considere que os elementos da matriz de coeficientes wavelet sejam reais, tenham mesmo valor absoluto e estejam normalizados em ± 1 , ou seja, a MCW é uma matriz de coeficientes wavelet real plana [3]. Quando uma MCW real de ordem m e gênero g é usada na codificação com o algoritmo original, os $mg + 1$ símbolos possíveis são

$$y_n \in \{-mg, \dots, -2k, \dots, 0, \dots, 2k, \dots, mg\}. \quad (4.5)$$

Considerando os bits de informação equiprováveis, os símbolos codificados são binomialmente distribuídos de acordo com a função densidade de probabilidade

$$\Pr(y_n = 2k - mg) = \binom{mg}{k} (0,5)^{mg} \quad 0 \leq 2k \leq mg. \quad (4.6)$$

Portanto, a variância de um símbolo codificado é

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{k=0}^{mg} (2k - mg)^2 \binom{mg}{k} (0,5)^{mg} = mg. \quad (4.7)$$

Para uma mesma MCW de ordem m e gênero g , o processo de codificação wavelet com diversidade espacial resulta na geração de $g + 1$ valores possíveis de símbolos codificados y_n^j , em cada uma das m sub-bandas

$$y_n^j \in \{-g, \dots, -2k, \dots, 0, \dots, 2k, \dots, g\}. \quad (4.8)$$

Considerando ainda os bits de informação equiprováveis, os símbolos codificados y_n^j resultantes de cada sub-banda, terão a seguinte distribuição de probabilidade binomial

$$\Pr(y_n^j = 2k - g) = \binom{g}{k} (0,5)^g, \quad 0 \leq 2k \leq g, \quad (4.9)$$

e valor médio igual a

$$\sum_{k=0}^g (2k - g)^2 \binom{g}{k} (0,5)^g = g. \quad (4.10)$$

4.5 Taxa do Código e Taxa de Sinalização

4.5.1 Codificação sem Diversidade

A taxa de codificação, tanto para o sistema sem diversidade quanto para o sistema com diversidade, varia em função da sobreposição dos símbolos na matriz wavelet de codificação. A máxima sobreposição entre linhas ocorre quando uma linha está deslocada de m posições em relação à outra. Dessa forma, considerando-se a máxima sobreposição, a taxa de codificação é igual a 1, ou seja, um bit de informação por símbolo codificado. Quando a sobreposição não é máxima, a taxa de codificação é menor que 1.

Para a codificação sem diversidade, admitindo-se que os bits de informação são gerados a uma taxa de R_b bit/s, os símbolos após serem codificados apresentam uma taxa de $R_s = R_b$ bit/s. Se o intervalo de sinalização de um símbolo codificado for igual ao intervalo de sinalização de um bit, a codificação com palavras-código longas não provoca uma diminuição no valor da taxa de transmissão. O uso de palavras-código longas resulta no aumento do valor da variância e no número dos possíveis valores dos símbolos codificados.

A taxa de sinalização pode ser definida como o número de bits transmitidos pelo canal por pulso de relógio. A codificação a partir de uma matriz de codificação construída com máxima sobreposição das seqüências wavelet resulta em uma taxa de sinalização de canal dada por

$$R = \frac{1}{\log_2(mg + 1)}. \quad (4.11)$$

A variação da sobreposição das seqüências wavelet da matriz de codificação resulta na variação da taxa de sinalização. Isso ocorre porque o número de valores na distribuição dos símbolos codificados diminui a medida que diminui a sobreposição entre as linhas da matriz de codificação wavelet.

4.5.2 Codificação com Diversidade

Para a codificação wavelet com diversidade, dado que um sinal digital tem uma taxa de sinalização de R_b bit/s, então cada uma das m saídas dos filtros wavelet

associados tem uma taxa de sinalização de R_b/m bit/s. Assim, um banco de filtros wavelet divide o sinal de entrada em m sub-bandas ortogonais a partir das quais o sinal de entrada pode ser reconstruído perfeitamente. Cada uma das m saídas do banco de filtros wavelet de m bandas pode ser tratada como uma entrada independente para outro filtro wavelet. E mais, cada uma de suas saídas é ortogonal a todas as outras saídas dos filtros secundários.

Em um sistema de codificação com diversidade, considerando a transmissão por cada uma das m antenas como um canal independente e uma matriz de codificação construída com máxima sobreposição das seqüências wavelet, a taxa de sinalização de cada canal é dada por

$$R = \frac{1}{\log_2(g + 1)}. \quad (4.12)$$

Por meio da variação da sobreposição das seqüências wavelet na matriz de codificação é possível variar a taxa de sinalização. No entanto, a taxa de sinalização também pode ser alterada de outra maneira. Supondo que a matriz de codificação seja montada com sobreposição máxima das seqüências wavelet, após a codificação, sem diversidade, serão obtidos $mg + 1$ símbolos possíveis, de acordo com a Seção 4.4. Limitando o esquema de modulação a um número de níveis menor que $mg + 1$, a taxa de sinalização é diminuída. Isso equivale a truncar os símbolos possíveis com menor probabilidade de ocorrência, de acordo com a função densidade de probabilidade apresentada na Eq. 4.6. Por exemplo, um processo de codificação com MCW 2×8 , considerando uma matriz construída com máxima sobreposição das seqüências wavelet, a partir de uma matriz wavelet real plana, irá resultar em símbolos codificados com valores

$$-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8. \quad (4.13)$$

Para este exemplo, a taxa de sinalização é igual a $1/\log_2 9$. Para a transmissão dos nove símbolos possíveis é necessário um esquema de modulação 9-ário. Por outro lado, se os símbolos ± 8 , com probabilidade de ocorrência da ordem de 10^{-3} , forem truncados, um esquema de modulação 7-ário pode ser usado, reduzindo a

taxa de sinalização para $1/\log_2 7$. Dessa forma, a taxa de sinalização aproxima-se de 1 a medida que o número de símbolos codificados é reduzido a 2.

O mesmo procedimento de truncamento dos símbolos codificados com pequena probabilidade de ocorrência, de acordo com a Eq. 4.9, pode ser realizado no processo de codificação integrada com diversidade espacial. De uma forma geral, a redundância presente em cada símbolo após a codificação de canal usando wavelets, assegura que mesmo com a alteração da taxa de sinalização através do truncamento de símbolos podem ser obtidos bons resultados, como pode ser visto nos resultados das simulações apresentados no Capítulo 6.

4.6 Decodificação de Canal

O processo de decodificação e recuperação dos bits da mensagem transmitida é igual tanto para a codificação com diversidade quanto para a codificação sem diversidade. No sistema com diversidade, os símbolos enviados por cada uma das antenas transmissoras são captados pela antena receptora, processados e em cada intervalo de sinalização, as estimativas dos símbolos transmitidos são somadas e decodificadas de acordo com o procedimento descrito a seguir.

Os bits da seqüência que contém a mensagem são recuperados da seqüência de símbolos transmitidos por um correlator casado através da ortogonalidade entre os vetores linha da matriz wavelet. Um bit de informação x_i é identificado pelo sinal do resultado da correlação entre as palavras-código wavelet e a seqüência símbolo recebida. De acordo com o exemplo de geração do símbolos codificados apresentada na seção anterior, a saída do correlator casado com a palavra-código wavelet a_n no instante de tempo i pode ser expressa por

$$z_i = \sum_{k=0}^{mg-1} y_{i-k} a_{(mg-1)-k}. \quad (4.14)$$

De acordo com a Tabela 4.1 é obtido

$$z_i = \sum_k \{ (x_{i-(mg-1)} a_k) a_k + (x_{i-(mg-2)} b_k) a_k + \\ + (x_{i-(mg-3)} a_{k+2}) a_k + \dots + (x_i b_{k+(mg-3)}) a_k \}. \quad (4.15)$$

Como a Eq. 3.24 garante que as palavras-código wavelet, mesmo deslocadas de m , são ortogonais, todos os termos da Eq. 4.15 se cancelam, exceto o primeiro. Assim, é obtido

$$z_i = \sum_{k=0}^{mg-1} x_{i-k} a_k a_k = mg x_{i-(mg-1)}, \quad (4.16)$$

e o símbolo decodificado será -1 se $z_i = -mg$, ou, $+1$ se $z_i = +mg$.

A correlação do vetor de símbolos codificados \mathbf{y}_n com o vetor escalonamento \mathbf{a} resultará na decodificação dos bits de mensagem com número de seqüência ímpar e a correlação dos símbolos codificados com o vetor wavelet \mathbf{b} resultará na decodificação dos bits de mensagem com número de seqüência par. De maneira simplificada, o processo de decodificação é a multiplicação do vetor de símbolos codificados \mathbf{y}_n pela transposta da matriz de codificação C_{MCW} .

O atraso total do código é $mg - 1$. Assim, o uso de palavras-código longas resulta em um aumento no tempo de atraso. No entanto, o atraso ocorre apenas na decodificação do primeiro bit; em seguida, m símbolos entrando no decodificador produzirão m bits.

No processo de decodificação são necessários mg correlatores. No entanto, a simplicidade da decodificação justifica o uso desse método de codificação, em comparação, por exemplo, com códigos em treliça e códigos convolucionais que requerem esquemas de decodificação mais complexos ou que necessitam de mais memória [9, 10, 33].

4.7 Conclusão

A partir das características da codificação de canal usando wavelets, observa-se que suas vantagens resultam da combinação da ortogonalidade das matrizes de coeficientes wavelet e do espalhamento do símbolo de informação ao longo das palavras-código, resultando em um processo de decodificação simples e em um ganho de desempenho em canais sujeitos ao desvanecimento, como será visto nos resultados apresentados no Capítulo 6.

Neste capítulo foi discutida a técnica de codificação com matrizes de coeficientes wavelet. Também foi proposta uma técnica que integra os benefícios da codificação wavelet com a diversidade espacial. A técnica proposta introduz pequena complexidade no processo de codificação e decodificação. A diversidade espacial é obtida através do uso de m antenas transmissoras, em que m é a ordem da matriz de coeficientes wavelet utilizada no processo de codificação.

Capítulo 5

Modelos dos Sistemas de Comunicação

5.1 Introdução

Neste Capítulo serão apresentados alguns sistemas de comunicação que utilizam as técnicas de codificação wavelet abordadas anteriormente. No entanto, para que se possa mensurar os ganhos da codificação, inicialmente, na Seção 5.2, é feita a análise de um sistema sem codificação usado como sistema de referência. Na Seção 5.3, o desempenho da codificação de canal usando wavelets em canais com ruído branco gaussiano aditivo é discutido sob o ponto de vista analítico e os resultados obtidos através de simulação são apresentados. A Seção 5.4, apresenta os modelos dos sistemas de comunicação com codificação wavelet em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh com e sem diversidade de antenas transmissoras. O desempenho destes sistemas será avaliado no Capítulo 6. Na Seção 5.5 são feitas algumas considerações finais.

5.2 Sistema PSK Não Codificado

Na transmissão da informação digital por um canal de comunicação, o modulador é o equipamento de interface que mapeia a informação digital em formas de onda analógicas adequadas às características do canal [8, 30, 31]. Geralmen-

te, o mapeamento é feito tomando-se blocos de $k = \log_2 M$ dígitos binários da seqüência de informação, em um intervalo de tempo. A partir de cada bloco seleciona-se uma das $M = 2^k$ formas de onda determinísticas de energia finita $\{s_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$ que será transmitida no canal.

Para que seja feita uma análise do desempenho dos sistemas com codificação de canal wavelet bit-a-bit, sistemas com modulação binária em fase (*PSK - Pulse Shift Keying*) serão utilizados como sistemas básicos para referência. O modulador PSK mapeia bits de informação em um conjunto de formas de onda de diferentes fases. Os sinais PSK podem ser representados por

$$s_m(t) = Ap(t) \cos[2\pi f_c t + \theta_m], \quad (5.1)$$

em que

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.2)$$

representa o pulso utilizado, T_s é o intervalo de sinalização de um símbolo, A é a amplitude do pulso, f_c é a freqüência da portadora e $\theta_m = \frac{2\pi}{M}(m - 1)$, $m = 1, 2, \dots, M$ são as possíveis fases da portadora a ser transmitida. As formas de onda podem ser representadas como uma combinação linear de duas senóides ortonormais, ou seja,

$$s_m(t) = As_{m1}p(t) \cos(2\pi f_c t) + As_{m2}p(t) \sin(2\pi f_c t) \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s. \quad (5.3)$$

Assim, os sinais PSK podem ser representados por vetores bidimensionais $[s_{m1}, s_{m2}]$, sendo apresentados em diagramas, como mostra a Figura 5.1, denominados de constelações. Cada bloco de k bits de informação é representado por um ponto na constelação.

O desempenho dos sistemas de comunicação considerados neste trabalho é analisado por meio de simulações. Para tal, é usado o equivalente passa-baixa do

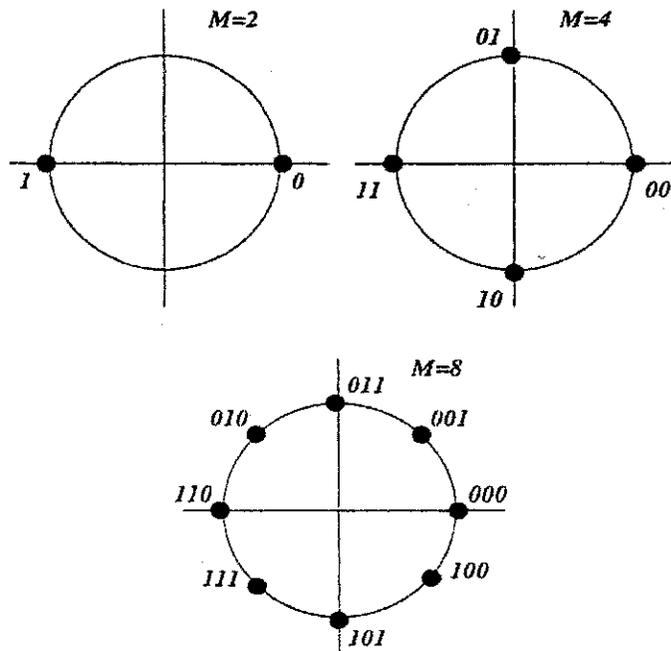


Figura 5.1: Constelação M-PSK: $M = 2$, $M = 4$, $M = 8$.

sinal que possibilita resultados similares àqueles do sinal real, sem que seja necessário usar componentes da portadora do sinal. Nas simulações, a probabilidade de erro de bit é obtida variando-se a razão sinal/ruído do canal.

Para um sinal PSK $s_m(t)$, a relação entre $s_m(t)$ e seu equivalente passa-baixa $\hat{s}_m(t)$ é

$$s_m(t) = \text{Re}[\hat{s}_m(t)e^{j2\pi f_c t}]. \quad (5.4)$$

Dessa forma, a partir das Eq. 5.1 e 5.4, o equivalente passa-baixa de um sinal PSK é

$$\hat{s}_m(t) = Ae^{j\frac{2\pi}{M}(m-1)t}. \quad (5.5)$$

Considerando o canal sujeito apenas ao ruído branco gaussiano aditivo (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*), a energia do sinal recebido $r(t)$ em um período de sinalização T_s é

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} |\hat{s}_m(t)|^2 dt = \frac{A^2 T_s}{2}. \quad (5.6)$$

Como são transmitidos $k = \log_2 M$ bits de informação em cada intervalo de sinalização, a energia média por bit recebido é igual a

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{A^2 T_s}{2 \log_2 M}. \quad (5.7)$$

Seja a banda passante do ruído gaussiano igual a B Hz, sua densidade espectral de potência é

$$S(f) = \frac{N_0}{2} \text{ [W/Hz]}, \text{ para } f < B. \quad (5.8)$$

Considerando que a autocorrelação do ruído é

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df = N_0 B \frac{\text{sen}(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau},$$

e que o ruído é descorrelacionado para $R(\tau) = 0$, ou seja, quando $\tau = 1/2B$, então, a variância do ruído é dada por

$$\sigma^2 = R(0) = N_0 B. \quad (5.9)$$

Nas simulações são utilizadas amostras do sinal e do ruído, pois não é possível utilizar sinais contínuos. O tempo de sinalização é dividido em N_a intervalos de amostragem de duração T_a ($T_s = N_a T_a$). Assim, o ruído deve ser amostrado de forma que as amostras sejam independentes, ou seja, o tempo de amostragem da simulação deve ser igual a $T_a = 1/2B$.

Portanto, a razão sinal/ruído E_b/N_0 obtida através da relação entre a energia de bit (Eq. 5.7) e a densidade espectral do ruído (Eq. 5.9), considerando o tempo de amostragem é

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{A^2 N_a}{4 \log_2 M \sigma^2}. \quad (5.10)$$

Nas simulações realizadas, foram utilizadas 16 amostras por símbolo e a amplitude do pulso foi normalizada em 1. Para uma razão sinal/ruído expressa em

dB, a relação entre nível de ruído do canal e razão sinal/ruído pode ser expressa por

$$\sigma^2 = \frac{4}{10^{E_b/N_0(\text{dB})/10} \log_2 M} \quad (5.11)$$

Para sistemas simples, como o PSK sem codificação, pode-se obter analiticamente a probabilidade de erro de bit. Em [8, 31] são apresentados desenvolvimentos analíticos que podem ser usados na validação das simulações. Por exemplo, a expressão analítica para probabilidade de erro de bit para o sistema PSK binário ou BPSK é

$$P_{\text{erro}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \quad (5.12)$$

em que $Q(x)$ é a função erro dada por

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy. \quad (5.13)$$

A Figura 5.2 apresenta as curvas da probabilidade de erro de bit para o sistema de modulação BPSK, obtidas das expressões analíticas [8] e via simulação. Observa-se que o resultado da simulação coincide com o resultado analítico, validando, assim, o procedimento de simulação utilizado neste trabalho.

Para um canal sujeito ao desvanecimento lento e plano, o sinal recebido é multiplicado por um fator α . O equivalente passa-baixa do sinal recebido é

$$\hat{r}_m(t) = \alpha A e^{j\frac{2\pi}{M}(m-1)t} + \hat{n}(t), \quad (5.14)$$

em que $\hat{n}(t)$ é o equivalente passa-baixa do ruído térmico (AWGN). Assim, no cálculo da energia do sinal recebido aparece um termo $E[\alpha^2]$ que representa a energia do desvanecimento. Portanto, para um canal com desvanecimento, a expressão que relaciona o ruído do canal com a razão sinal/ruído é

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E[\alpha^2] A^2 N_\alpha}{4 \log_2 M \sigma^2}. \quad (5.15)$$

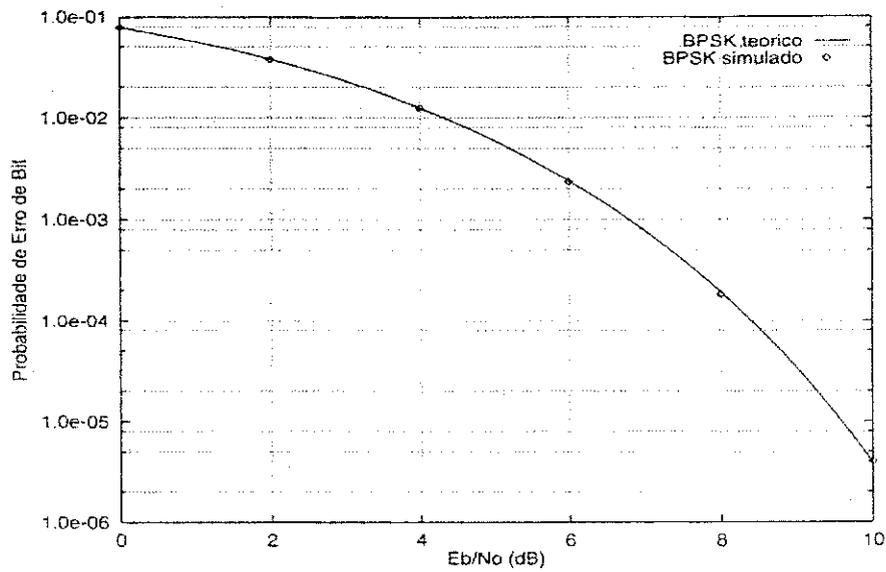


Figura 5.2: Probabilidade de erro de bit do esquema BPSK considerando a transmissão afetada pelo ruído gaussiano aditivo.

Nas simulações, o desvanecimento foi modelado por uma variável aleatória com distribuição de probabilidade Rayleigh

$$f_A(\alpha) = \frac{2\alpha}{\sigma_r^2} e^{-\alpha^2/\sigma_r^2}, \quad \alpha \geq 0, \quad (5.16)$$

com valor médio quadrático igual a 1 ($E[\alpha^2] = \sigma_r^2 = 1$).

Para o sistema BPSK, a expressão analítica da probabilidade de erro de bit considerando-se um canal com desvanecimento Rayleigh e ruído branco aditivo [8, 31] é

$$P_{erro} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{E_b/N_0}{1 + E_b/N_0}} \right). \quad (5.17)$$

As Figuras 5.3 e 5.4 mostram a probabilidade de erro de bit para os sistemas BPSK e 4-PSK, respectivamente. Tanto para o esquema BPSK, quanto para o 4-PSK, as curvas teóricas e simuladas coincidem, o que valida o procedimento de simulação para a transmissão pelo canal com desvanecimento.

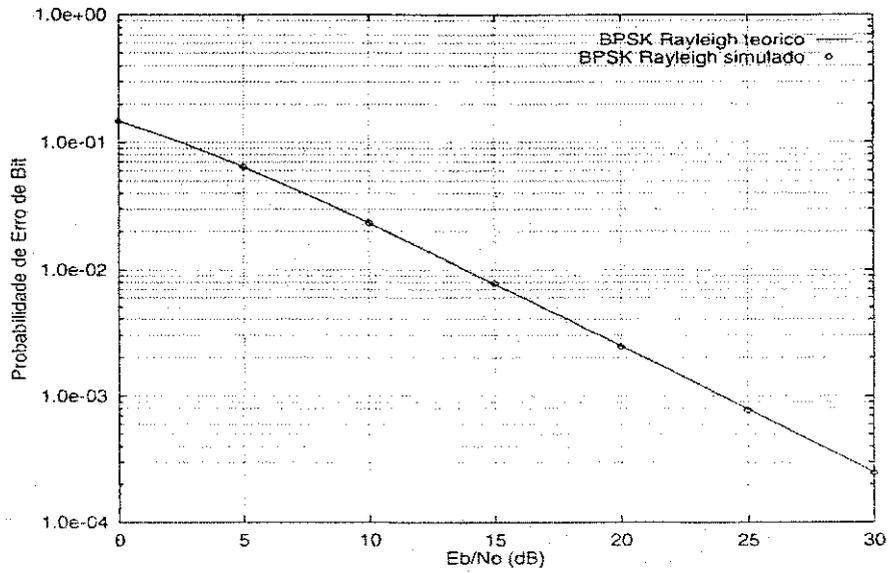


Figura 5.3: Probabilidade de erro de bit do esquema BPSK considerando o canal sujeito ao desvanecimento Rayleigh com perfeita informação sobre o estado do canal.

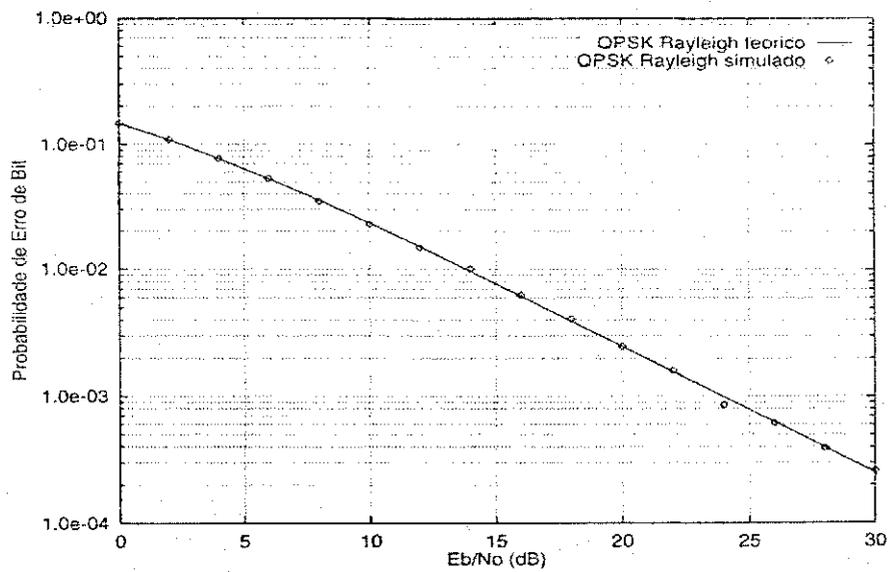


Figura 5.4: Probabilidade de erro de bit do esquema QPSK considerando o canal sujeito ao desvanecimento Rayleigh com perfeita informação sobre o estado do canal.

5.3 Desempenho da Codificação de Canal Wavelet em Canais AWGN

Nesta seção, o desempenho da codificação com wavelets em canais com ruído aditivo gaussiano é apresentado, sob o ponto de vista teórico [2, 3] e através de simulações, realizadas durante o trabalho. Particularmente, foi utilizada a codificação em conjunto com a modulação PAM.

Na modulação por amplitude de pulso PAM (*Pulse Amplitude Modulation*), k bits da seqüência de informação \mathbf{x}_n são mapeados em um conjunto de 2^k formas de onda de diferentes amplitudes que podem ser representadas por

$$s_m(t) = A_m p(t) \cos 2\pi f_c t, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T_s, \quad (5.18)$$

em que $\{A_m, 1 \leq m \leq M\}$ representa o conjunto das M possíveis amplitudes correspondentes aos 2^k possíveis símbolos binários e $p(t)$ é o pulso utilizado.

Os M sinais PAM têm energias

$$\begin{aligned} E_m &= \int_0^{T_s} s_m^2(t) dt, \\ &= \frac{1}{2} A_m^2 \int_0^{T_s} p^2(t) dt, \\ &= \frac{1}{2} A_m^2 E_p, \end{aligned} \quad (5.19)$$

em que E_p representa a energia do pulso $p(t)$.

Os sinais PAM $s_m(t)$ podem ser representados por vetores unidimensionais \hat{s}_m , sendo relacionados por

$$s_m(t) = \hat{s}_m f(t), \quad (5.20)$$

em que $f(t)$ é forma de onda de energia unitária dada por

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{E_p}} p(t) \cos 2\pi f_c t, \quad (5.21)$$

e

$$\hat{s}_m = A_m \sqrt{\frac{1}{2} E_p}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (5.22)$$

é a representação geométrica dos M sinais unidimensionais, que corresponde ao equivalente passa-baixa do sinal $s_m(t)$. As amplitudes A_m dos sinais assumem valores discretos

$$A_m = (2m - 1 - M)d, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (5.23)$$

sendo $d\sqrt{2E_p}$ a distância euclidiana entre dois sinais adjacentes.

A partir da Eq. 5.19 pode-se calcular a energia média da constelação M PAM

$$\begin{aligned} E_{av} &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m, \\ &= \frac{1}{6} (M^2 - 1) d^2 E_p. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Nas simulações, para sistemas com modulação PAM, foi utilizada a energia média por bit igual a 1 no cálculo da relação entre nível de ruído no canal e razão sinal/ruído

$$E_{b\ av} = \frac{E_{av}}{\log_2 M} = 1. \quad (5.25)$$

Na codificação de canal wavelet, para uma MCW de ordem m e gênero g , os bits de informação são mapeados em símbolos codificados $(mg + 1)$ -ários. O valor médio de um símbolo codificado é dado pela Eq. 4.7. Usando a modulação PAM, os símbolos codificados y_i são mapeados nas amplitudes das formas de onda do equivalente passa-baixa \hat{s}_m . A energia destas formas de onda é proporcional a y_i^2 , ou seja, a energia média do sinal é proporcional a mg (Eq. 4.7).

Considere o canal afetado pelo ruído aditivo. A representação passa-baixa do sinal no receptor pode ser escrita como

$$r_i = s_i + n_i, \quad (5.26)$$

em que s_i é a componente do sinal (símbolo WCC) e n_i é o ruído gaussiano branco aditivo de média zero e variância $N_0/2$. Considere também S_i e N_i representando

as componentes do sinal e do ruído, respectivamente, na saída do decodificador wavelet.

De acordo com [2, 3], a componente do ruído em R_i tem média zero e variância

$$E[n_i^2] = mg \frac{N_0}{2}. \quad (5.27)$$

Portanto, a probabilidade de erro de bit é dada por

$$P_{erro} = \{\Pr(N_{2l+1} + S_{2l+1} > 0 \mid x_{2l+1} = -1) + \Pr(N_{2l+1} + S_{2l+1} < 0 \mid x_{2l+1} = -1)\},$$

$$P_{erro} = \{\Pr(N_{2l+1} > mg \mid x_{2l+1} = -1) + \Pr(N_{2l+1} < -mg \mid x_{2l+1} = -1)\}. \quad (5.28)$$

Como a variável N_{2l+1} é independente de x_{2l+1} , a Eq. 5.28 pode ser escrita por

$$\begin{aligned} P_{erro} &= \Pr(N_{2j+1} > mg), \\ &= Q\left(\frac{mg}{\sqrt{mgN_0/2}}\right), \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2mg}{N_0}}\right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Seja E_b a energia média transmitida por bit de informação. Assim, a Eq. 5.29 pode ser escrita como

$$P_{erro} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right). \quad (5.30)$$

Portanto, em canais AWGN, um sistema com modulação PAM e codificação com wavelets atinge o mesmo desempenho, em termos de taxa de erro de bit, que sistemas antipodais (BPSK, 2-PAM) sem codificação para palavras-código wavelet de comprimento arbitrário. As curvas apresentadas nas Figuras 5.5 e 5.6,

considerando a codificação com MCW de dimensão 2×8 e 2×32 , respectivamente, comprovam os resultados das Eq. 5.29 e 5.30. No entanto, como será visto no Capítulo 6, a codificação com matrizes de coeficientes wavelet apresenta bons desempenhos em canais com desvanecimento.

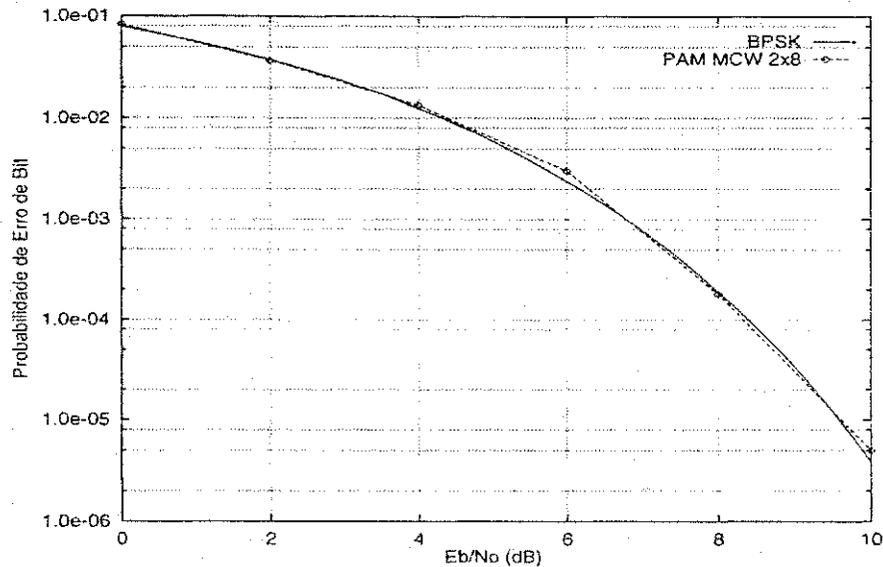


Figura 5.5: Comparação entre o desempenho do sistema codificado com MCW 2×8 e do sistema BPSK sem codificação.

5.4 Sistemas de Comunicação com Codificação Wavelet em Canais com Desvanecimento

5.4.1 Sistema Sem Diversidade

Nos esquemas de transmissão com codificação wavelet, os símbolos codificados são mapeados em constelações construídas usando-se uma combinação de múltiplas amplitudes e fases. Tal esquema é denominado de modulação PAM-PSK combinada ou M-PSK multi-nível [8, 30]. A Figura 5.7 apresenta um exemplo de uma constelação 8-PSK com 2 níveis.

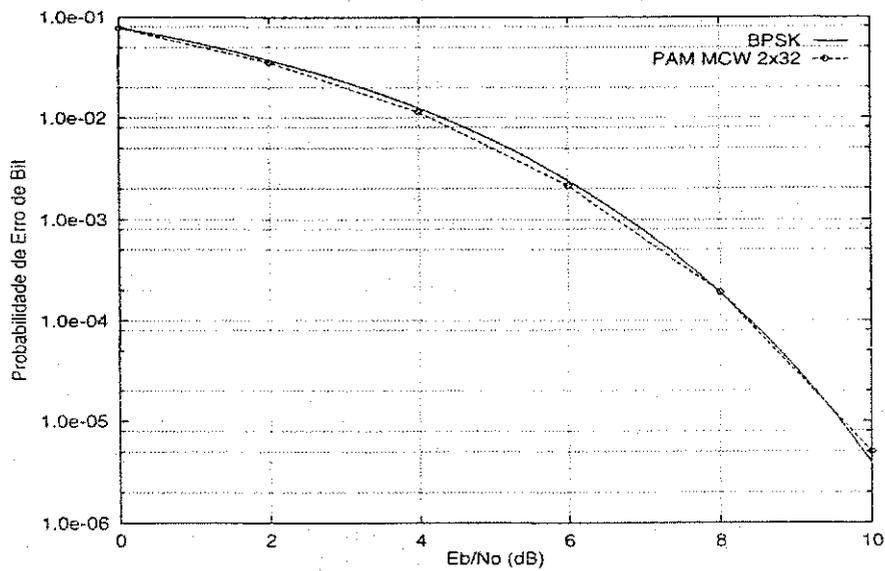


Figura 5.6: Comparação entre o desempenho do sistema codificado com MCW 2×32 e do sistema BPSK sem codificação.

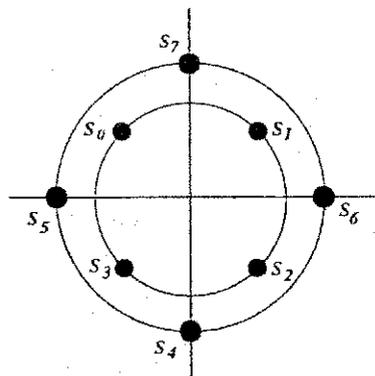


Figura 5.7: Exemplo de uma constelação PSK multi-nível com 8 símbolos e dois níveis.

Na construção das constelações foram consideradas as probabilidades de ocorrência dos símbolos codificados, descritas pela Eq. 4.6 e a maximização da distância Euclidiana entre os pontos das mesmas. A localização dos pontos na constelação é definida de forma que a eficiência do processo de modulação é aumentada sem que haja diminuição na distância mínima entre os mesmos.

No mapeamento dos símbolos codificados em sinais de uma determinada constelação, levou-se em consideração o módulo e sinal de cada símbolo. Além dos critérios já citados, adotou-se também o critério de que símbolos de mesmo sinal estariam mais próximos entre si que aqueles de sinal contrário. E mais, os símbolos de menor módulo, que são os mais prováveis, foram mapeados em sinais de menor energia. Assim, mesmo havendo erro na demodulação do símbolo transmitido, em muitos casos poder-se-ia decodificar o bit corretamente pela redundância inerente ao processo de codificação que realiza o espalhamento da informação no tempo.

Outro critério utilizado na construção das constelações foi o truncamento dos símbolos codificados com menor probabilidade de ocorrência. Em sistemas com modulação PSK, a medida que aumenta a dimensão da MCW usada na codificação, cresce o número de possíveis símbolos codificados resultando em aglomeração dos pontos da constelação. Esta aglomeração resulta em degradação do desempenho. Portanto, de acordo com as Eq. 4.6 e 4.9, os símbolos com pequena probabilidade de ocorrência foram truncados. Considere, por exemplo, a codificação sem diversidade com a MCW 2×8 dada pela Eq. 3.25, os símbolos ± 8 têm probabilidade de ocorrência de $3,9 \times 10^{-3}$, de acordo com a Eq. 4.6. Fazendo o truncamento dos símbolos ± 8 , eles são substituídos pelos símbolos em ± 6 , quando de sua ocorrência. Portanto, com o truncamento, os 9 símbolos possíveis, resultado da codificação com a MCW 2×8 , ficam reduzidos a 7. A Figura 5.8 apresenta uma representação da constelação PSK multi-nível usada na codificação sem diversidade com a MCW 2×8 .

Resumindo, após o processo de codificação, os símbolos são mapeados em pontos de uma constelação que não estão dispostos em um círculo (PSK) ou em uma linha (PAM), mas que têm uma distribuição mais adequada no plano

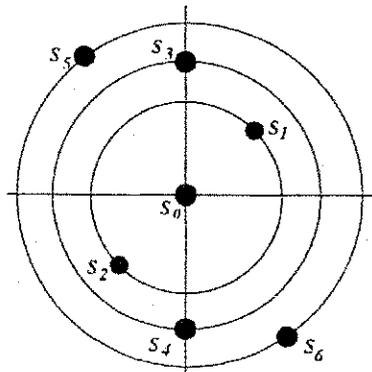


Figura 5.8: Constelação PSK multi-nível usada no sistema codificado com MCW 2×8 .

bidimensional, devido a natureza multi-nível dos símbolos gerados na codificação. As constelações M -PSK multi-nível, em que cada ponto é identificado por uma componente em fase I e outra em quadratura Q , têm energia média total unitária. O sinal transmitido consiste em duas portadoras ortogonais moduladas por um conjunto de amplitudes discretas

$$s_n(t) = A_{mI}p(t) \cos(2\pi f_c t) - A_{mQ}p(t) \sin(2\pi f_c t). \quad (5.31)$$

Como na Seção 5.2, $p(t)$ é o pulso de amplitude unitária e f_c é a frequência da portadora. Os termos A_{mI} e A_{mQ} são as amplitudes em fase e quadratura, respectivamente, da portadora. O diagrama de blocos do transmissor do sistema com codificação e sem diversidade de antenas transmissoras é apresentado na Figura 5.9

No modelo do canal de comunicações digital assume-se que o sinal transmitido é afetado pelo desvanecimento lento e não-seletivo em frequência, representado por um fator multiplicativo $\alpha(t)$, e pelo ruído aditivo que representa o canal AWGN. Portanto, o sinal recebido $r(t)$ pode ser escrito como

$$r(t) = \alpha(t)s(t) + n(t), \quad (5.32)$$

em que $n(t)$ é um processo gaussiano complexo de média zero e variância $N_o/2$. Como na Seção 5.2, o desvanecimento é modelado por uma variável aleatória com distribuição Rayleigh.

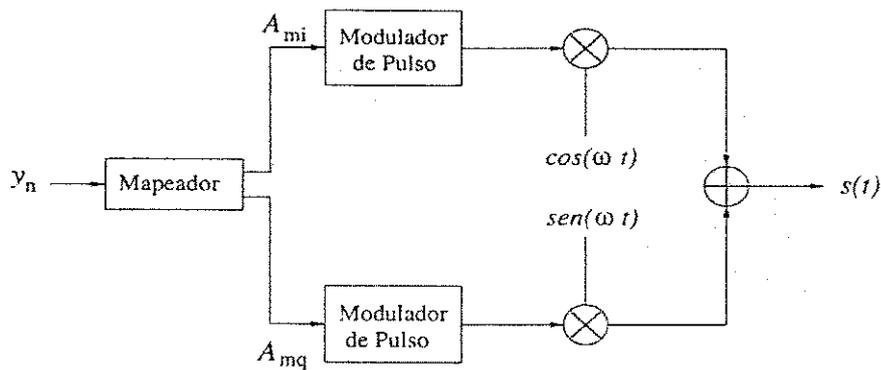


Figura 5.9: Diagrama de blocos do transmissor do sistema codificado sem diversidade de antenas transmissoras.

A Figura 5.10 apresenta o modelo do receptor do sistema. Inicialmente, o sinal recebido $r(t)$ é convertido para banda básica, obtendo-se o equivalente passa-baixa $r_l(t)$. Em um intervalo de sinalização, $r_l(t)$ é dado por

$$r_l(t) = \alpha_i e^{-j\phi_i} s_l(t) + n(t) \quad iT_s \leq t \leq (i+1)T_s.$$

O termo α_i é a amplitude do desvanecimento, considerada constante durante um intervalo de sinalização, ϕ_i é a variação de fase devido ao desvanecimento no canal e $s_l(t)$ é o equivalente passa-baixa do sinal transmitido.

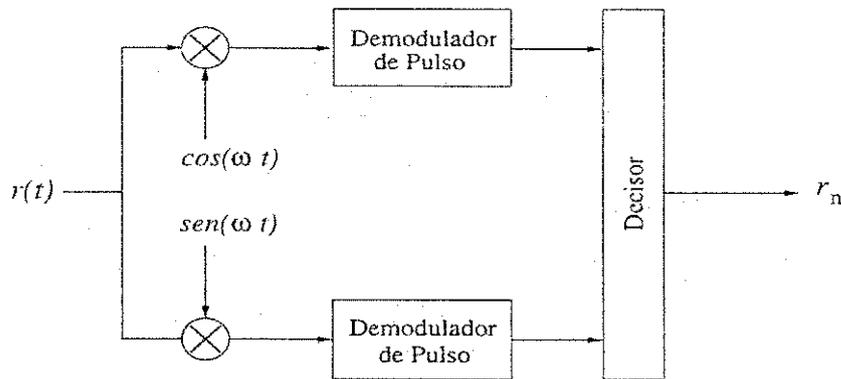


Figura 5.10: Diagrama de blocos do receptor do sistema codificado sem diversidade de antenas transmissoras.

Considerando o desvanecimento do canal suficientemente lento, a partir do sinal recebido, o receptor é capaz de estimar perfeitamente o deslocamento de

fase ϕ_i . Portanto, após passar pelo detetor, o sinal recebido, representado na forma vetorial, é dado por

$$r_i = \alpha_i s_i + z_i, \quad (5.33)$$

sendo $s_i = A_{mI} + jA_{mQ}$ a representação vetorial do sinal transmitido no instante de tempo iT_s , e z_i o vetor complexo cujos elementos são variáveis aleatórias gaussianas independentes e identicamente distribuídas. Reescrevendo a Eq. 5.33 obtêm-se

$$r_i = \alpha_i A_{mI} + \text{Re}\{z_i\} + j[\alpha_i A_{mQ} + \text{Im}\{z_i\}]. \quad (5.34)$$

No demodulador é calculada a distância Euclidiana quadrática entre o sinal recebido e cada um dos pontos (vetores) da constelação utilizada e decide-se em favor do sinal mais próximo a r_i .

O símbolo recebido é uma estimativa do símbolo codificado que foi transmitido. Em seguida, esta estimativa entra no decodificador e a informação recebida é recuperada pelo processo de decodificação descrito na Seção 4.6.

5.4.2 Sistema com Diversidade

No esquema de codificação com diversidade espacial abordado neste trabalho, os símbolos codificados y_n^j são mapeados em constelações M-PSK multi-nível de energia média total unitária, sendo cada um transmitido, simultaneamente por uma das L antenas. As constelações foram construídas levando-se em consideração os mesmos critérios adotados para o sistema codificado sem diversidade: as probabilidades de ocorrência dos símbolos codificados (descritas pela Eq. 4.9), a maximização da distância euclidiana entre os pontos da constelação e o truncamento dos símbolos com pequena probabilidade de ocorrência.

Para o sistema com diversidade foi adotado o modelo do canal de comunicação digital proposto em [32]. Neste modelo considera-se a estação base equipada com L antenas transmissoras, e a estação móvel equipada com uma antena. O sinal recebido em banda básica é dado por

$$r(t) = \sum_{i=1}^L \alpha_i s(t) + n(t). \quad (5.35)$$

será usado como sistema de referência para mensurar os ganhos de que são obtidos com a codificação para canais com desvanecimento. O desenvolvimento analítico e os resultados das simulações comprovaram que não há melhoria de desempenho devido à codificação wavelet, considerando-se a transmissão através de canais com ruído branco gaussiano aditivo.

O desempenho da codificação wavelet com e sem diversidade espacial, para canais com desvanecimento, será apresentado no capítulo seguinte.

Capítulo 6

Resultados

6.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados das simulações dos sistemas de transmissão com codificação wavelet, realizadas considerando canais com desvanecimento Rayleigh. O maior enfoque é dado no sistema proposto que integra a codificação com matrizes wavelet e técnicas de diversidade espacial.

6.2 Codificação Wavelet sem Diversidade

As primeiras simulações foram realizadas com o objetivo de verificar os ganhos obtidos, em termos de probabilidade de erro de bit, devido ao uso da codificação de canal wavelet, em relação ao um sistema de referência não-codificado com modulação BPSK, denominado de sistema de referência 1. Tanto no esquema de referência 1, quanto no esquema com codificação bit-a-bit foi utilizada apenas uma antena de transmissão e outra de recepção, mantendo-se para ambos os sistemas a mesma taxa de transmissão, em bits/seg.

Nos experimentos foram utilizadas matrizes de coeficientes wavelet reais planas definidas na Seção 3.2.1 de ordem $m = 2$ e gênero $g = 4, 16$ e 64 , como também, matrizes de ordem $m = 4$ e gênero $g = 4$ e 16 . Para qualquer que seja a ordem ou o gênero da matriz utilizada não há aumento de complexidade do algoritmo de codificação e decodificação. No entanto, a medida que aumenta a

dimensão da matriz utilizada é necessário que seja dispensado um maior esforço computacional para a realização do processo de codificação e decodificação.

A Figura 6.1 mostra o sistema de transmissão com codificação wavelet proposto em [3]. Neste esquema, a fonte gera n bits de informação x_n que são fornecidos ao codificador. No codificador, utilizando uma matriz wavelet real plana de dimensão $m \times mg$, em cada instante de tempo, um bit de informação x_i é codificado, gerando na saída o símbolo y_i , que passa, então para o modulador. O modulador mapeia o símbolo codificado em um sinal de uma constelação $(mg + 1)$ -PSK multi-nível, resultando em um sinal bidimensional (fase e quadratura). O sinal modulado é enviado para a antena e transmitido. Considera-se o canal de transmissão sujeito ao ruído aditivo gaussiano e ao desvanecimento Rayleigh lento e não-seletivo em frequência.

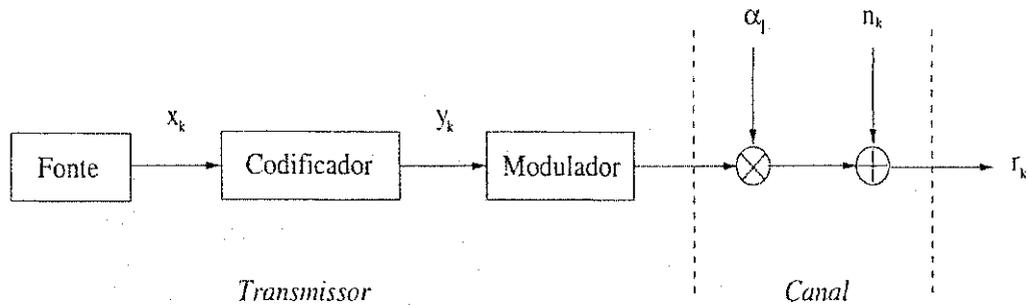


Figura 6.1: Modelo do sistema com codificação wavelet sem diversidade espacial.

Na recepção, o objetivo é recuperar a informação transmitida. Considera-se que o receptor tem informação sobre o estado do canal, conseguindo estimar perfeitamente a amplitude do desvanecimento. O sinal recebido pela antena receptora é demodulado através da correlação com os $(mg + 1)$ sinais da constelação PSK multi-nível, sendo escolhido o sinal da constelação que esteja mais próximo do sinal recebido. A saída do demodulador \hat{r}_k é uma estimativa do sinal transmitido. Finalmente, a informação transmitida é decodificada, gerando o bit recebido \hat{x}_k . Caso $x_k \neq \hat{x}_k$, ocorreu um erro na transmissão.

Os resultados deste primeiro conjunto de experimentos podem ser vistos nas Figuras 6.2 e 6.3. Na Figura 6.2 são apresentadas as curvas da probabilidade de

erro de bit obtidas variando-se a razão sinal-ruído de 0 a 35 dB. No processo de codificação foram usadas as MCW reais planas de dimensão 2×8 e 2×32 , dadas, respectivamente, pelas Eq. 3.49 e 3.50, e a MCW de dimensão 2×128 , obtida pela operação de extensão a partir da matriz 2×32 . Para uma probabilidade de erro de bit de 10^{-4} , os sistemas codificados com as MCW 2×8 , 2×32 e 2×128 apresentaram ganhos, aproximados, de 3,0, 11,5 e 14,0 dB, respectivamente, em relação ao sistema de referência 1.

As curvas da probabilidade de erro de bit para o sistema codificado com a MCW de dimensão 4×16 , dada pela Eq. 3.52, estão apresentadas na Figura 6.3. Neste caso, observa-se um ganho de codificação de 8,4 dB em relação ao sistema de referência 1, para a probabilidade de erro de bit de 10^{-4} .

Portanto, para canais com desvanecimento, o uso da codificação com matrizes de coeficientes wavelet apresenta bom desempenho em termos de melhoria na probabilidade de erro de bit a partir de uma razão sinal-ruído de, aproximadamente, 11,0 dB. Observa-se que há um aumento de ganho à medida que cresce o comprimento da palavra-código wavelet, ou seja, a medida que são usadas MCW de maior dimensão no processo de codificação. Palavras-código de maior comprimento dão maior robustez a transmissão, pois um número maior de símbolos codificados irá transportar informação sobre um mesmo bit.

No entanto, para sistemas com modulação PSK, a utilização de MCW de grande dimensão resulta em aglomeração dos pontos da constelação e consequentemente, em degradação do desempenho. Assim, levando em consideração as Eq. 4.3 e 4.7, os símbolos com pequena probabilidade de ocorrência podem ser truncados. Nas simulações realizadas, quando a ordem da probabilidade de ocorrência do símbolo codificado era inferior a 10^{-4} o símbolo era truncado, resultando em constelações menores e em melhoria de desempenho.

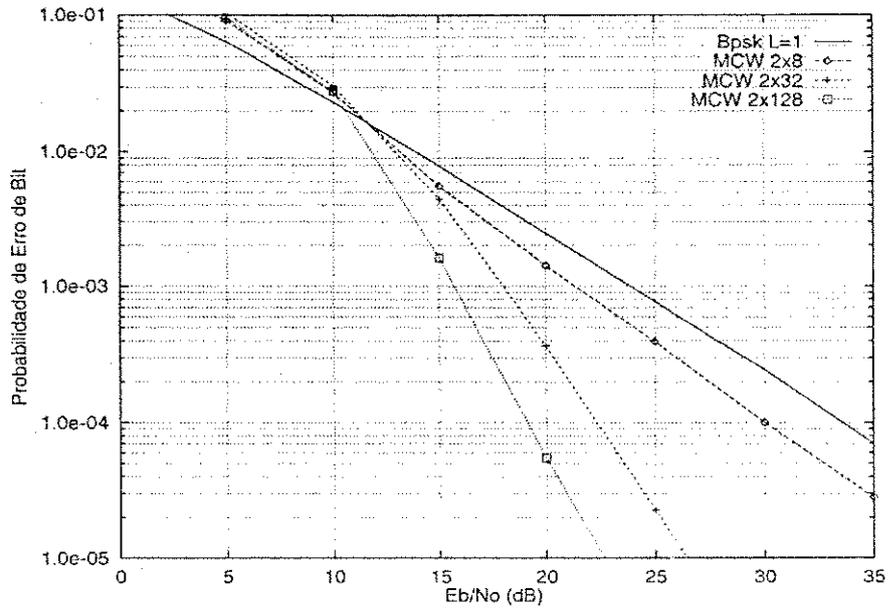


Figura 6.2: Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 2×8 , 2×32 e 2×128 , sem diversidade espacial.

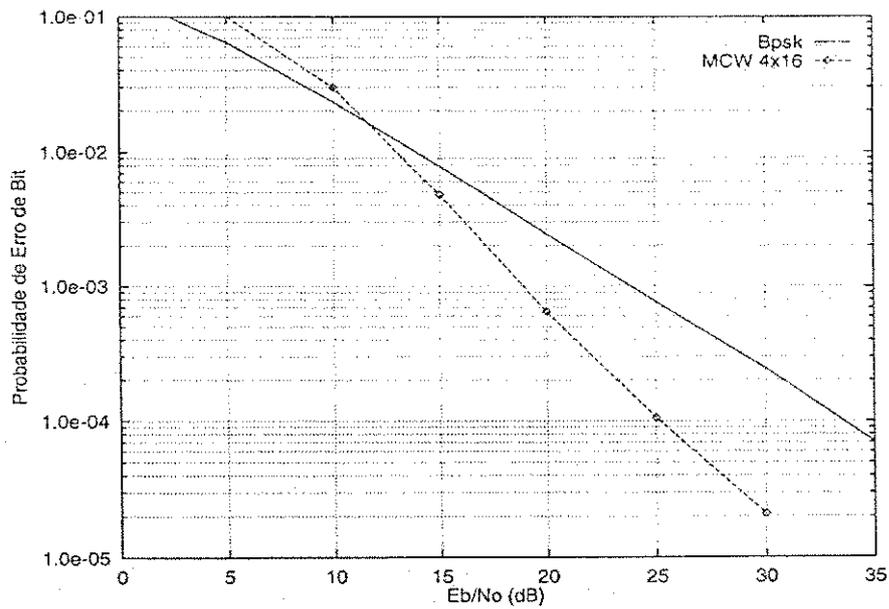


Figura 6.3: Probabilidade de erro de bit para o esquema com MCW 4×16 , sem diversidade espacial.

6.3 Codificação Wavelet com Diversidade

Na Sub-seção 4.3.1 foi apresentada a técnica de codificação com matrizes de coeficientes wavelet proposta por Tzannes e Tzannes [3]. Na Seção 6.2 foram vistos os benefícios deste tipo de codificação para a transmissão digital em canais com desvanecimento. Nesta seção é apresentado o desempenho do esquema proposto (Sub-seção 4.3.2) que integra a codificação com matrizes de coeficientes wavelet e técnicas de diversidade espacial.

A Figura 6.4 apresenta o diagrama esquemático do sistema, considerando a codificação com uma MCW de ordem $m = 2$. A fonte gera n bits de informação x_n . Os bits de informação gerados nos intervalos ímpares x_{2k+1} são codificados através da multiplicação pelos coeficientes do vetor escalonamento e os bits gerados nos intervalos pares x_{2k+2} são codificados através da multiplicação pelos coeficientes do vetor wavelet. Portanto, em um mesmo intervalo de sinalização i são gerados dois símbolos codificados y_i^1 e y_i^2 que são, então, mapeados em constelações M-PSK multi-nível de energia total unitária. A seguir, os sinais modulados são enviados para antenas distintas e transmitidos em frequências ortogonais. Considera-se que as antenas estão suficientemente espaçadas uma da outra para garantir que os sinais transmitidos por cada antena sejam afetados pelo desvanecimento de modo independente. Generalizando, na codificação wavelet integrada com diversidade espacial, em cada instante de tempo são gerados m símbolos codificados que são transmitidos por $L = m$ antenas distintas.

Como já dito, o receptor tem perfeito conhecimento sobre o estado do canal, sendo capaz de estimar a amplitude do desvanecimento de cada percurso. O sinal recebido passa por um banco com L correladores e os sinais transmitidos são estimados a partir da saída dos L correladores. Em seguida, as estimativas dos sinais transmitidos são somadas e a informação é recuperada depois da passagem pelo decodificador.

As Figuras 6.5-6.8 apresentam os resultados das simulações realizadas com o sistema proposto que integra a codificação wavelet e a diversidade espacial. Para fins comparativos, são considerados os sistemas codificados e o sistema de

referência 1, discutidos na Seção 6.2, que utilizam apenas uma antena transmissora e outra receptora, ou seja, $L = 1$. Considera-se também um sistema não-codificado, denominado de sistema de referência 2, em que os bits são modulados (BPSK) e a mesma informação é transmitida por L antenas distintas. Tal sistema é resistente ao desvanecimento, pois a informação só é perdida quando o desvanecimento dos L percursos for muito severo. No entanto, neste sistema há a necessidade do aumento de banda para manter os L sinais ortogonais. Por sua vez, no esquema proposto que integra codificação e diversidade, não há perda de eficiência espectral, já que os bits gerados em intervalos pares e ímpares são codificados por palavras-código ortogonais, gerando símbolos separados em m -bandas.

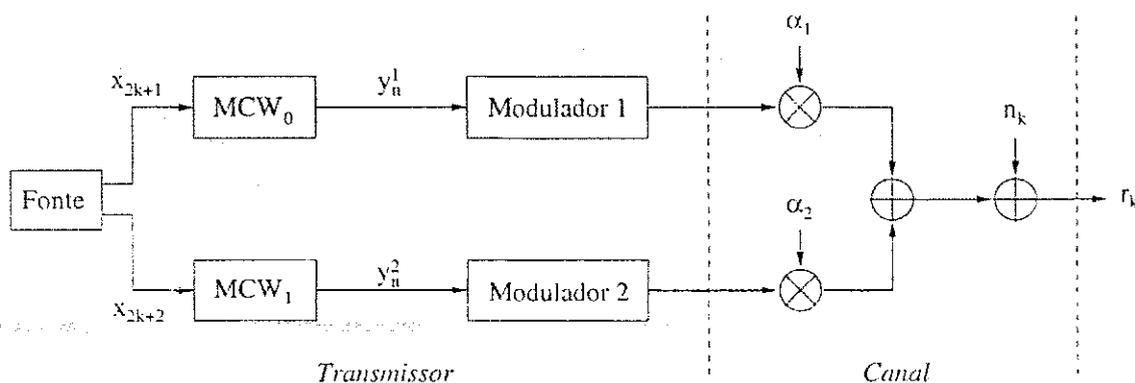


Figura 6.4: Modelo do sistema com codificação wavelet e diversidade espacial.

A Figura 6.5 mostra os resultados das simulações dos sistemas codificados com MCW 2×8 e dos sistemas de referência. Para uma probabilidade de erro de bit de 10^{-4} , observam-se ganhos de codificação de 3 e 8 dB, para os sistemas com e sem diversidade, respectivamente, em relação ao sistema de referência 1. Entretanto o desempenho do sistema com codificação e duas antenas é 5 dB inferior ao sistema de referência 2 para uma taxa de erro de 10^{-4} .

Na Figura 6.6 são apresentados os resultados das simulações dos sistemas codificados usando MCW 2×32 . Os sistemas codificados transmitindo com uma

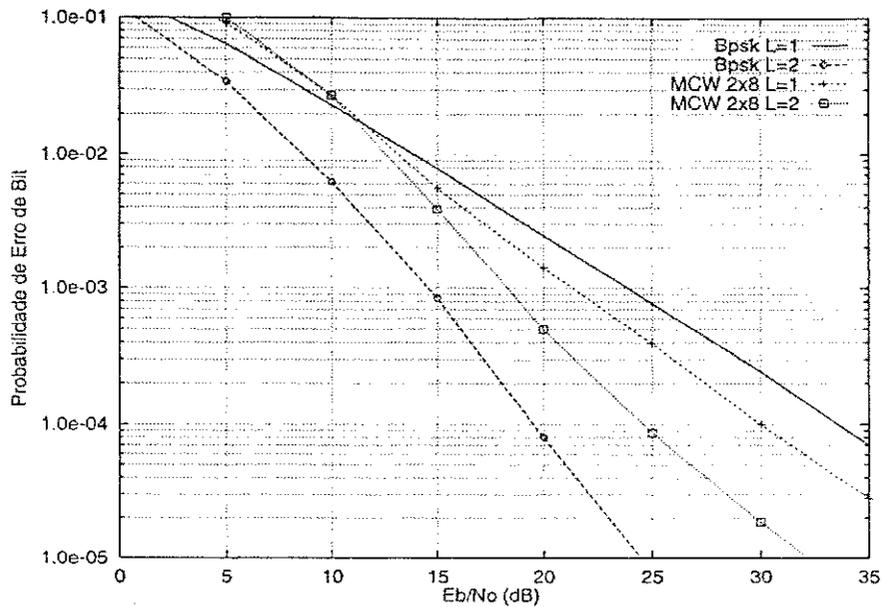


Figura 6.5: Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 2×8 com $L = 1$ e $L = 2$.

e duas antenas atingem ganhos em torno de 11,5 e 14 dB, respectivamente, com taxa de erro de 10^{-4} com relação ao sistema de referência 1. Para uma taxa de erro de bit de 10^{-5} , o desempenho do sistema codificado com duas antenas é 1 dB superior ao sistema de referência 2.

Os resultados de simulação dos sistemas codificados usando MCW 2×128 são mostrados na Figura 6.7. Em relação ao sistema de referência 1, para uma probabilidade de erro de bit de 10^{-4} , os desempenhos dos sistemas com uma e duas antenas são, aproximadamente 14,0 e 16,0 dB superiores, respectivamente. Em relação ao sistema de referência 2, os sistemas sem diversidade e com diversidade espacial apresentam ganhos em torno de 1,5 dB e 5,0 dB, respectivamente, para uma probabilidade de erro de bit de 10^{-5} .

Os experimentos realizados com MCW de ordem $m = 4$ e gênero $g = 16$ e 64 são apresentados na Figura 6.8. Nos sistemas com codificação e diversidade foram utilizadas $L = 4$ antenas na transmissão e uma na recepção. Em relação ao sistema de referência 1, para uma taxa de erro de bit de 10^{-4} , os esquemas com

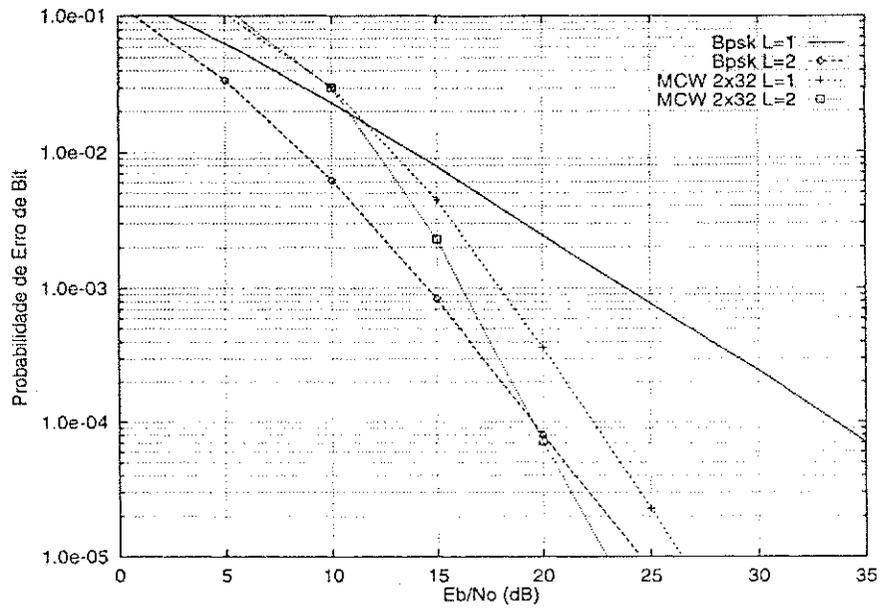


Figura 6.6: Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 2×32 com $L = 1$ e $L = 2$.

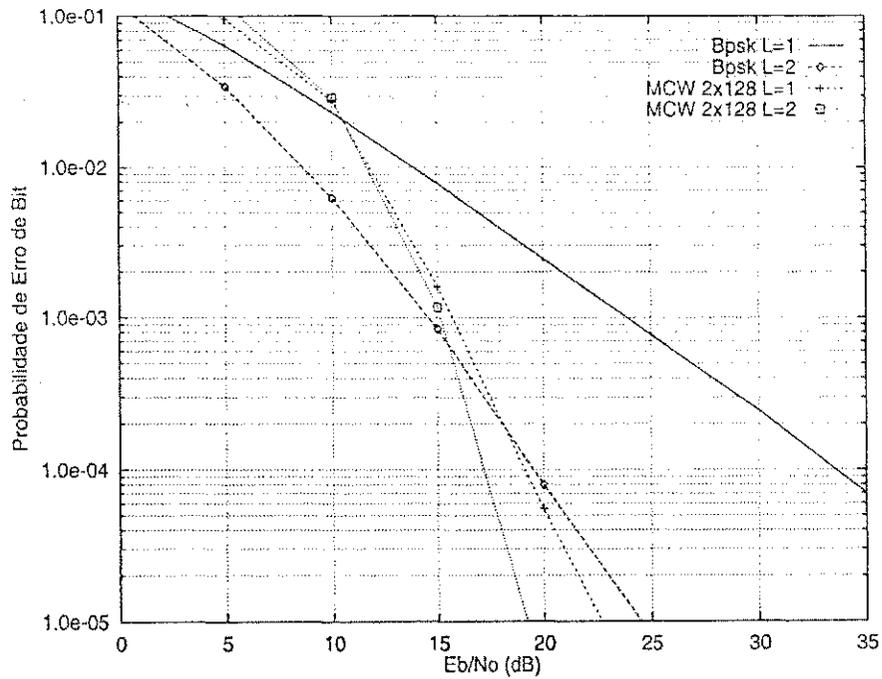


Figura 6.7: Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 2×128 com $L = 1$ e $L = 2$.

MCW 4×16 e $L = 1$, MCW 4×16 e $L = 4$ e MCW 4×64 e $L = 4$ obtiveram ganhos aproximados de 8,4, 16,0 e 17,5 dB, respectivamente. Para a mesma taxa de erro de bit, os esquemas com MCW 4×16 e $L = 4$ e, MCW 4×64 e $L = 4$ apresentaram ganhos de 1,4 e 3,2 dB superiores ao sistema de referência 2. Para uma probabilidade de erro de bit de 10^{-5} , os esquemas com MCW 4×16 e $L = 4$ e MCW 4×64 e $L = 4$ foram 4,0 e 6,4 dB superiores ao sistema de referência 2.

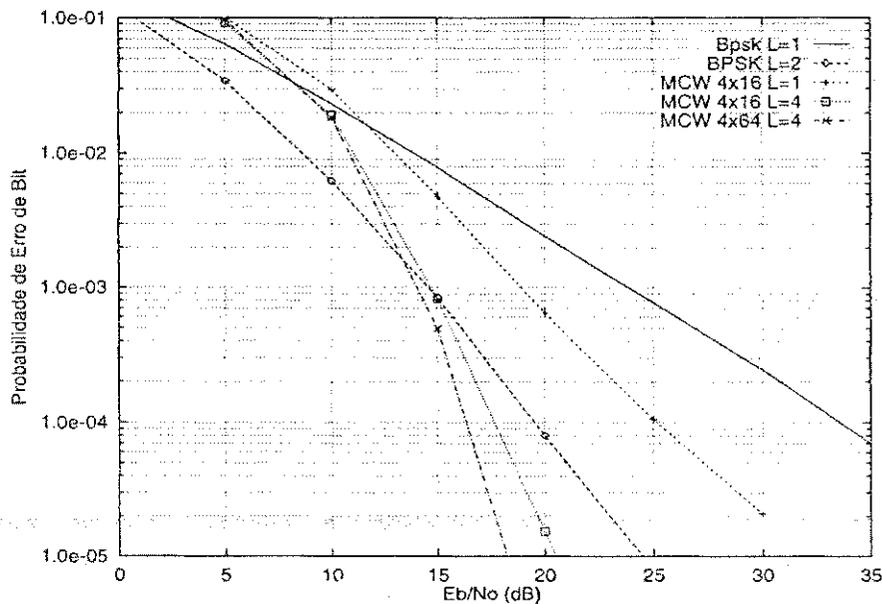


Figura 6.8: Probabilidade de erro de bit para esquemas com MCW 4×16 com $L = 1$ e $L = 4$ e para esquema com MCW 4×64 e $L = 4$.

6.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os resultados das simulações dos sistemas de transmissão com codificação wavelet com e sem diversidade, considerando o canal sujeito ao desvanecimento Rayleigh.

Os resultados de simulação mostram que para a codificação com MCW de mesma dimensão, o sistema integrado com diversidade de antenas transmissoras

apresenta melhor resultado que o sistema sem diversidade. Da mesma forma que nos sistemas sem diversidade espacial, para a técnica de codificação integrada com diversidade espacial, observou-se que os ganhos aumentam a medida que são usadas MCW de maior dimensão.

Capítulo 7

Considerações Finais e Perspectivas

Neste trabalho foi proposta uma integração entre os benefícios da codificação de canal bit-a-bit com matrizes de coeficientes wavelet e técnicas de diversidade espacial através do uso de múltiplas antenas transmissoras.

A técnica de codificação de canal usando wavelets utiliza as propriedades de ortogonalidade das matrizes de coeficientes wavelet. As linhas de uma MCW são formadas por coeficientes de filtros passa-baixas e passa-altas associados a funções escalonamento e wavelet de um dado sistema wavelet. A potencialidade da técnica é resultado da ortogonalidade intrínseca das linhas das MCW, da simplicidade do processo de decodificação quando comparado a esquemas de codificação com códigos de treliça ou códigos convolucionais e do espalhamento no tempo dos símbolos de informação (bits) ao longo dos símbolos codificados.

Nos sistemas apresentados no trabalho observa-se o ganho que pode ser obtido com a codificação em relação a sistemas de transmissão antipodais não codificados. O canal com desvanecimento, considerado neste trabalho tem sido muito utilizado para modelar a propagação do sinal através de múltiplos percursos, fenômeno observado nos canais de comunicação sem fio.

A introdução da diversidade espacial melhora o desempenho total dos sistemas com codificação wavelet sem aumentar a complexidade do processo de codificação.

Também não há perda de eficiência espectral. Os bits gerados pela fonte nos intervalos pares e ímpares são codificados por palavras-código ortogonais, gerando símbolos separados em m -bandas de frequência.

Os benefícios da integração entre a codificação usando wavelets e a diversidade espacial são percebidos a partir dos resultados das simulações. O ganho de codificação aumenta à medida que são usadas palavras-código mais longas. Isso é esperado, pois o aumento no comprimento das palavras-código resulta em uma forma de diversidade temporal que torna o sinal mais robusto aos efeitos do desvanecimento.

A seguir são feitas algumas sugestões e citadas as perspectivas para continuação das atividades de pesquisa:

- Estudo e avaliação da codificação wavelet com diversidade espacial para outros modelos de canais, com ruído em rajada, canais com desvanecimento seletivo em frequência e canais com interferência intersimbólica;
- Utilização de outros tipos de matrizes de coeficientes wavelet diferentes das MCW reais planas consideradas neste trabalho;
- Busca de constelações PSK mais eficientes para combater os efeitos da transmissão em canais com desvanecimento;
- Análise do desempenho da codificação wavelet com diversidade espacial em comparação com outras técnicas de codificação de canal que utilizem a transmissão através de múltiplas antenas, como a codificação espaço-temporal, por exemplo;
- Estudo de técnicas de codificação e modulação conjuntas, com o objetivo de combinar, de forma mais eficiente, o processo de mapeamento dos símbolos codificados em constelações resistentes ao desvanecimento.

Apêndice A

Espaço de Hilbert

Define-se Espaço de Hilbert como um subconjunto \mathbb{H} de um conjunto de vetores complexos, em que as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. As propriedades de soma e multiplicação de vetores de \mathbb{H} por escalares seguem as regras usuais da aritmética de vetores.
2. Dados dois vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} de \mathbb{H} , é definido o produto interno entre eles. O produto interno de um vetor \mathbf{x} qualquer por si mesmo é um escalar positivo, cuja raiz quadrada é igual a norma de \mathbf{x}

$$\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = |\mathbf{x}|. \quad (\text{A.1})$$

3. \mathbb{H} é um espaço mensurável.
4. A distância entre dois vetores $\mathbf{x}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $\mathbf{y}_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, tende a zero, conforme n tende a infinito.

A seguir são apresentados alguns exemplos de espaços de Hilbert.

- Espaço \mathbb{C}^n de Hilbert

Seja \mathbb{C}^n uma n -upla de números complexos. Dados dois vetores $\mathbf{x}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $\mathbf{y}_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $x_n, y_n \in \mathbb{C}^n$, é definido o produto interno entre os mesmos como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle = x_1 y_1^* + x_2 y_2^* + \dots + x_n y_n^*, \quad (\text{A.2})$$

em que y^* é o conjugado complexo de y .

Obs.: O Espaço Euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n é um sub-espaço do espaço \mathbb{C}^n , definido para os vetores com componentes reais.

- Espaço $L_2[a, b]$ de Hilbert

O espaço $L_2[a, b]$ é formado pelo conjunto de funções reais de Lebesgue $\{f(t)\}$, ou seja, funções mensuráveis, contidas em um intervalo fechado $[a, b]$ e que satisfazem à condição

$$\int_a^b f^2(t)dt < \infty. \quad (\text{A.3})$$

O produto interno de duas funções $f(t), g(t) \in L_2[a, b]$, é definido como

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (\text{A.4})$$

O espaço $L_2[0, 2\pi]$ é o espaço das funções que têm representação em série de Fourier. Este espaço é gerado a partir de escalonamentos (dilatações e compressões) da função exponencial complexa e^{jt} .

- Espaço $L_2(\mathbb{R})$ de Hilbert

Define-se o espaço $L_2(\mathbb{R})$ como o conjunto de todas as funções reais mensuráveis (Lebesgue) $\{f(t)\}$, que satisfazem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt < \infty. \quad (\text{A.5})$$

O produto interno de duas funções $f(t), g(t) \in L_2(\mathbb{R})$, é definido como

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt. \quad (\text{A.6})$$

O espaço $L_2(\mathbb{R})$ é o espaço das wavelets; gerado a partir de escalonamentos e translações da wavelet básica ou wavelet mãe.

- Espaço $l_2(\mathbb{R})$

O espaço $l_2(\mathbb{R})$ é formado pelo conjunto de todas as seqüências reais $\{x_n, 1 \leq n \leq \infty\}$ que satisfazem

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty. \quad (\text{A.7})$$

O produto interno entre duas seqüências $x_n, y_n \in (\mathbb{R})$, é definido como

$$\langle x_n, y_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n. \quad (\text{A.8})$$

Bibliografia

- [1] "Special Issue on the European Path Towards UMTS". *IEEE Personal Communications Magazine*, Feb. 1995.
- [2] H. L. Resnikoff and R. O. Wells. *Wavelet Analysis: The Scalable Structure of Information*. Springer-Verlang, 1998. ISBN 0-387-98383-X.
- [3] M. A. Tzannes and M. C. Tzannes. "Bit-by-Bit Channel Coding Using Wavelets". *Proceedings of the IEEE GLOBECOM'92*, pp. 684-688, April 1992.
- [4] J. H. Choi and H. S. Kwak. "Wireless Multi-Carrier CDMA Using Wavelets". *Telecommunications Review Magazine*, vol. 6, no. 5, pp. 577-584, 1996.
- [5] A. Akansu, M. Tazeby, M. J. Medley and P. K. Das. "Wavelets and Sub-band Transforms: Communication Applications". *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, no. 12, pp. 1-20, Dec. 1997.
- [6] G. W. Wornell. "Emerging Applications of Multirate Signal Processing and Wavelets in Digital Communications". *Proceedings of the IEEE*, vol. 84, no. 4, pp. 586-603, April 1996.
- [7] S. D. Sandberg and M. C. Tzannes. "Overlapped Discrete Multitone Modulation for High Speed Cooper Wire Communications". *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 13, no. 9, pp. 1571-1585, April 1995.
- [8] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, third edition, 1995. ISBN 0-07-051726-6.

- [9] A. F. Naguib, V. Tarokh, N. Seshadri and A. R. Calderbank. "A Space-Time Coding Modem for High-Data-Rate Wireless Communications". *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, no. 8, pp. 1459-1478, October. 1998.
- [10] G. A. Silva, F. M. Assis and M. S. Alencar. "Combining Space Diversity, Coded Modulation and Fading-Resistant Constellations". *International Conference on Telecommunications*, pp. 37-40, June 1998. Porto Carras, Greece.
- [11] G. A. Silva and F. M. de Assis. "Using Space-Time TCM with Rotated Constellations for Transmission over Mobile Communications Channels". *Electronic Letters*, vol. 35, no. 6, pp. 454-455, March 1999.
- [12] G. M. Ferreira, W. T. A. Lopes and F. M. Assis. "Codificação Wavelet Aplicada a Sistemas com Diversidade Espacial sobre Canais Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh". *SBrT 2000 - XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Set. 2000. Gramado, RS, Brasil.
- [13] I. Daubechies and J. Kovacevic. "Special Issues on Wavelets". *Proceedings of the IEEE*, vol. 84, no. 4, pp. 507-509, April 1996.
- [14] A. Graps. "An Introduction to Wavelets". *IEEE Computational Sciences and Engineering*, vol. 2, no. 2, pp. 50-61, 1995.
- [15] A. D. Poularikas, editor. *The Transforms and Applications Handbook*. CRC Press, IEEE Press, 1995. ISBN 0-8493-8342-0.
- [16] S. G. Mallat. "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674-693, July 1989.
- [17] N. S. D. Brito. "Teoria Wavelet e sua Aplicação em Sistemas de Energia Elétrica". Dissertação de mestrado, UNICAMP, 1995.
- [18] I. Daubechies. "Where Do Wavelets Come From? - A Personal Point of View". *Proceedings of the IEEE*, vol. 84, no. 4, pp. 510-513, 1996. Invited Paper.

- [19] C. S. Burrus, R. A. Gopinath and H. Guo. *Introduction to Wavelet and Wavelet Transforms*. Prentice-Hall, Inc., 1998.
- [20] G. Strang and T. Nguyen. *Wavelets and Filter Banks*. Wesley-Cambridge Press, 1996. ISBN 0-9614088-7-1.
- [21] I. Daubechies. "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets". *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 41, pp. 906–966, 1988.
- [22] P. Heller, H. L. Resnikoff and J. R. O. Wells. "Wavelet Matrices and the Representation of Discrete Functions". In *Wavelets - A Tutorial in Theory and Applications*, edited by C. K. Chui, pp. 15–50. Academic Press, Cambridge, MA, 1992.
- [23] *Digital Mobile Radio Towards Future Generation Systems*. European Cooperation in the Field of Scientific and Technical Research - COST Action 231, 1999.
- [24] B. Sklar. "Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication Systems - Part I: Characterization". *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, no. 7, pp. 90–100, July 1997.
- [25] B. Sklar. "Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication Systems - Part II: Mitigation". *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, no. 7, pp. 102–109, July 1997.
- [26] R. B. Ertel, P. Cardieri, K. W. Sowerby, T. S. Rappaport and J. H. Reed. "Overview of Spatial Channel Models for Antenna Array Communication Systems". *IEEE Personal Communications*, pp. 10 – 22, February 1998.
- [27] J. H. Winters. "Smart Antennas for Wireless Systems". *IEEE Personal Communications*, pp. 23 – 27, February 1998.
- [28] T. Ojanperä and R. Prasad, editors. *Wideband CDMA for Third Generation Mobile Communications*. Artech House, 1998.
- [29] M. D. Trott, G. W. Wornell and A. Narula. "Performance Limits of Coded Diversity Methods for Transmitter Antenna Arrays". *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 45, no. 7, pp. 2418–2433, November 1999.

- [30] S. Benedetto, E. Biglieri and V. Castellani. *Digital Transmission Theory*. Prentice-Hall, Inc., 1987.
- [31] J. M. Wozencraft and B. Reiffen. *Principles of Communication Engineering*. John Willey and Sons, 1965.
- [32] V. M. Silva and E. S. Sousa. "Fading-Resistant Transmission from Several Antennas". *Proc. of 6th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, pp. 1218–1222, 1995.
- [33] W. T. A. Lopes. "Transmissão de Imagens e Sinais de Voz Quantizados Vetorialmente em Canais com Desvanecimento". Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 1999.
- [34] J. Boutros and E. Viterbo. "Signal Space Diversity: A Power and Bandwidth-Efficient Diversity Technique for Rayleigh Fading Channel". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 4, pp. 1453–1467, July 1998.
- [35] A. Müllen. "Simulation of Fading Channels Using Monte-Carlo Method". *IEEE Conference*, pp. 1536–1540, 1994.
- [36] J. H. Winters, J. Salz and R. D. Gitlin. "The Impact of Antenna Diversity on the Capacity of Wireless Communication Systems". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 1740–1751, feb./mar./april 1994.
- [37] G. Foschini and M. Gans. "On Limits of Wireless Communications in a Fading Environment When Using Multiple Antennas". *Wireless Personal Communications*, vol. 6, no. 3, pp. 311–335, March 1998.
- [38] F. M. de Assis. "Princípios da Teoria da Informação e Codificação". Departamento de Engenharia Elétrica, UFPB, 1997. Apostila, Universidade Federal da Paraíba.
- [39] M. S. de Alencar. "Comunicações Móveis Celulares". Apostila: Departamento de Engenharia Elétrica, UFPB, 1998. Apostila, Univesidade Federal da Paraíba.

- [40] J. F. e R. S. Neto. "Avaliação dos Efeitos de Interferências no Desempenho de Sistemas de Comunicações Digitais". *Revista da Soc. Brasileira de Telecomunicações*, vol. 12, no. 2, pp. 85–95, Dezembro 1997.
- [41] A. Bruce, D. Donoho and H. Gao. "Wavelet Analysis". *IEEE Spectrum*, pp. 45–60, Oct. 1996.
- [42] A. Cohen and J. Kovacevic. "Wavelets: The Mathematical Background". *Proceedings of the IEEE*, vol. 84, no. 4, pp. 507–509, April 1996.
- [43] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim and J. M. Poggi. *Wavelet Toolbox - For Use With Matlab*. The Math Works, Inc, first edition, 1996.
- [44] W. C. Y. Lee. *Mobile Cellular Communications*. McGraw-Hill, Inc, second edition, 1995. ISBN 0-07-038089-9.
- [45] M. D. Yacoub. *Foundations of Mobile Radio Engineering*. CRC Press, Inc., 1993. ISBN 0-8493-8677-2.
- [46] J. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 1984.