

Alternativas de Redução de Ruído e Exploração de Algoritmos de Filtragem Adaptativa em Receptores para Canais Seletivos em Frequência

Juraci Ferreira Galdino

Tese submetida à Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor no domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação

Marcelo Sampaio de Alencar, PhD

Ernesto Leite Pinto, Dr

Orientadores

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Juraci Ferreira Galdino, Dezembro de 2002



G149a
2002

Galdino, Juraci Ferreira

Alternativas de redução de ruído e exploração de algoritmos de filtragem adaptativa em receptores para canais seletivos em frequência/ Juraci Ferreira Galdino. - Campina Grande: UFCG, 2002. 238 p.: il.

Tese (doutorado) - UFCG/CCT/DEE
Inclui bibliografia

1. Filtragem Adaptativa 2. Equalização 3. Canais de Comunicação Móvel 4. Transformada Wavelet 5. De-Noiseing I.Título

CDU: 621.372.55

**ALTERNATIVAS DE REDUÇÃO DE RUÍDO E EXPLORAÇÃO DE ALGORITMOS
DE FILTRAGEM ADAPTATIVA EM RECEPTORES PARA CANAIS SELETIVOS
EM FREQUÊNCIA**

JURACI FERREIRA GALDINO

Tese Aprovada em 16.12.2002



PROF. MARCELO SAMPAIO DE ALENCAR, Ph.D., UFCG
Orientador

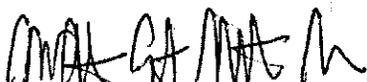


PROF. ERNESTO LEITE PINTO, Dr., IME
Orientador

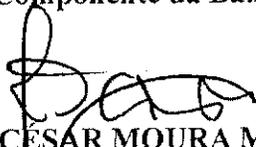


PROF. ELVINO SILVEIRA SOUSA, Ph.D., Univ. de Toronto – Canadá
Componente da Banca

PROF. JOÃO MARCOS TRAVASSOS ROMANO, Ph.D., UNICAMP
Componente da Banca



PROF. MARCO ANTONIO GRIVET MATTOSO MAIA, Ph.D., CETUC-PUC-RIO
Componente da Banca



PROF. JOÃO CÉSAR MOURA MOTA, Dr., UFC
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE – PB
Dezembro - 2002

Agradecimentos

Gostaria de consignar o meu mais sincero agradecimento e registrar meu reconhecimento às pessoas e instituições, adiante citadas, que contribuíram para a realização desta tese.

Agradeço ao Exército Brasileiro, instituição que tenho a honra e o privilégio de integrar. Em especial agradeço aos companheiros do Departamento de Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia (IME) e do 31^o Batalhão de Infantaria Motorizado.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro prestado a este trabalho.

Tenho imensa dívida de gratidão com os professores Ernesto Leite Pinto e Marcelo Sampaio de Alencar pela segura orientação prestada a esta tese. O companheirismo e otimismo desses professores foram, sem dúvida, de extrema importância para o sucesso deste trabalho e de outros, anteriores a este, com os quais eu tive o privilégio de compartilhar. Agradeço especialmente a postura amigável e conduta exemplar desses professores.

Agradeço aos membros da banca examinadora, os professores Elvino Silveira Souza, João César Moura Mota, João Marcos Travassos Romano e Marco Antônio Grivet Mattoso Maia, que prontamente e gentilmente aceitaram o convite. A estes pesquisadores de escol meus agradecimentos pela leitura minuciosa que fizeram da tese, as sugestões e as palavras elogiosas e de incentivo.

Agradeço o apoio dos professores de pós-graduação do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Sou particularmente grato aos professores Antônio Marcus Nogueira Lima e Francisco Marcos de Assis, com os quais tive o privilégio de interagir mais intensamente.

Este trabalho só foi possível graças aos pesquisadores que, antes de mim, atuaram nas áreas de filtragem adaptativa, *wavelets*, comunicação móvel e processamento digital de sinais. As referências incluídas no final da tese apresentam uma lista dos trabalhos que me influenciaram profundamente.

São dignos de reconhecimento os funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica: Aleixo, Ângela, Eleonôra, Luiz Carlos, Marcos, Pedro, Rinaldo, Ronaldo e Wallyson, os quais considero como amigos.

Gostaria de consignar o meu mais sincero agradecimento aos companheiros de pós-graduação: Fabrício, Felipe, George, Joseana, Madeiro, Wamberto e especialmente a

Bruno, Edmar e Waslon com os quais tive o privilégio de desfrutar de momentos de descontração e de amizade incondicional. Só grato também a Felipe, George e Waslon pelos trabalhos que desempenhamos conjuntamente.

Na etapa final das correções da tese, agradeço ao inestimável apóio e a revisão indispensável de Edmar, Ernesto, Marcelo e Waslon. Esses amigos contribuíram para que a redação melhorasse consideravelmente, tanto na sua forma, quanto em sua clareza. A assistência realmente foi generosa e imensa, mas sou o responsável por quaisquer erros gramaticais e imperfeições deste trabalho.

Acima de tudo, desejo agradecer aos meus pais José Galdino e Aurení, a minha querida e amada esposa, Etelvana, pela tolerância, paciência, companheirismo e amor sem fim, certamente correspondido. Por fim, agradeço às minhas filhas, razão da minha vida, Priscila e Patrícia, que sempre compreenderam, com surpreendente discernimento, a importância desse trabalho para nossas vidas, e sempre souberam esperar com paciência a hora de retirar-me do computador para me acolherem de braços abertos e com sorrisos fartos.

Resumo

Este trabalho contempla o desenvolvimento de procedimentos para combate ao ruído aditivo e à *interferência entre símbolos* (IES) em receptores para canais seletivos em frequência, considerando técnicas aplicáveis à recepção cega ou com treinamento e ainda procedimentos que podem ser usados em ambos os tipos de receptores.

Em relação à recepção cega ou autodidata, a tese aborda receptores com critério de máxima verossimilhança aplicado a seqüências de símbolos e *processamento por percurso sobrevivente* (MLSE-PSP), em canais de comunicação móvel caracterizados pelo efeito de *desvanecimento variante no tempo e seletivo em frequência* (DVSF). Especial atenção é dedicada à escolha do algoritmo de filtragem adaptativa adotado neste tipo de receptor. A avaliação de desempenho realizada mostra que esses receptores são severamente afetados pela presença de surtos de erros no processo de detecção.

Para resolver este problema propõe-se um procedimento para detectar a ocorrência de erros em receptores digitais. Esse procedimento, que se baseia no conceito, aqui concebido, de *diversidade em filtragem*, é computacionalmente simples, opera em canais variantes no tempo, possui boas características de desempenho e pode ser adotado em qualquer esquema de recepção.

Outro tema importante contemplado nesta tese é a avaliação analítica do algoritmo de filtragem adaptativa LMS, sob a condição de regime permanente, na identificação de canais modelados pelo efeito de DVSF. São obtidas expressões para o *erro quadrático médio* (EQM) e para o passo ótimo do LMS, adotando um conjunto de hipóteses relativas a área de comunicações móveis. Essas expressões são corroboradas por simulação.

No tocante ao processamento para combate ao ruído aditivo, propõe-se o emprego de técnicas de supressão de ruído (*denoising*) como alternativa às convencionais, que usam filtros lineares e insensíveis ao deslocamento. As técnicas de *denoising* são implementadas no domínio da transformada *wavelet* e se beneficiam da propriedade de representação com parcimônia desta transformada.

O desempenho do processamento de entrada proposto é avaliado sob dois enfoques: analítico, para canais AWGN, e por simulação, para canais seletivos em frequência. No primeiro caso são obtidas aproximações para a probabilidade de erro do receptor em função de importantes parâmetros da transformada *wavelet* e da técnica de *denoising*. No caso dos canais seletivos em frequência, são investigadas diversas configurações de receptores com equalizadores do tipo DFE (do termo em inglês *decision-feedback equalizer*), e se verifica que o desempenho do esquema proposto supera o dos esquemas convencionais, especialmente quando a resposta em frequência do canal apresenta depressões na faixa do sinal transmitido.

Abstract

This work deals with the design of techniques to combat the effects of additive noise and intersymbol interference (ISI) on receivers, for frequency-selective fading channels. Those techniques are suitable for blind reception and training sequence aided reception.

Concerning the blind reception, this thesis focuses on receivers that use the maximum likelihood criterion to detect symbol sequences employing per-survivor processing (MLSE-PSP), for mobile communications channels subjected to time-variant frequency selective fading (TVFSF). Special attention is given to the choice of the adaptive filtering algorithm used by the receivers. The analysis of the performance of those receivers shows that they are severely affected by burst errors in the detection processing.

In order to overcome this problem, a procedure is implemented to detect the occurrence of errors in digital receivers. This procedure is based on a new concept introduced in this thesis: *filtering diversity*. This procedure is computationally simple, works in time-variant channels, presents good performance and can be used for any reception scheme.

Other important theme treated in this thesis is the analytical evaluation of the steady-state behavior of the adaptive filtering algorithm LMS (*Least Mean Square*) on the identification of channels subjected to the effect of TVFSF. Closed-form expressions are obtained for the mean squared error (MSE) and for the optimum step of the LMS.

Relating to the processing to combat the effect of the additive noise, the use of denoising techniques is proposed as an alternative method to the conventional schemes, which use linear time-invariant filters. The denoising techniques are implemented in the Wavelet transform domain and they take advantage of the parsimonious property of this transform.

The performance of the proposed front-end scheme is analyzed considering two aspects: the analytical one, for AWGN channels, and the use of simulation, for frequency-selective channels. In the first case, approximations are obtained for the system bit error probability in terms of the parameters of the Wavelet transform and the denoising technique. For frequency-selective channels, many configurations of decision-feedback equalizers are analyzed. It is observed that the proposed scheme outperforms the conventional ones, mainly for the case when the channel frequency response presents notches in the frequency band of the transmitted signal.

Lista de Símbolos e Abreviaturas

A notação adotada neste trabalho procura seguir uma representação universal. Letras minúsculas em negrito representam vetores, os quais são dispostos em coluna, e as maiúsculas em negrito denotam matrizes. O símbolo $(\cdot)^*$ representa a operação Hermitiana sobre a matriz ou vetor. Cabe notar que quando esse operador é aplicado a escalares a operação representa o complexo conjugado e para matrizes a sua aplicação resulta na matriz conjugada complexa, a distinção entre letras minúscula e maiúscula especifica a particular operação. O símbolo $(\cdot)'$ representa a operação transposto do contido entre parênteses. $\text{Tr}(\cdot)$ é usado para simbolizar o traço de (\cdot) e, por fim, $E[\cdot]$ representa o operador média probabilística. A seguir são listados os símbolos e abreviaturas utilizados na tese.

Abreviaturas

AR(M)	Modelo autoregressivo de ordem M
AV	Algoritmo de Viterbi
AWGN	Ruído aditivo gaussiano branco
BMLSE-PSP	MLSE cego empregando <i>per survivor processing</i>
BPSP-LMS	MLSE cego empregando <i>per survivor processing</i> e filtros <i>least mean square</i>
BPSP-KF1	MLSE cego empregando <i>per survivor processing</i> e filtros de Kalman com variáveis de estado modeladas por processos AR1
BPSP-KF2	MLSE cego empregando <i>per survivor processing</i> e filtros de Kalman com variáveis de estado modeladas por processos AR2
DEP	Densidade espectral de potência
DD	Decisão direcionada pela decisão
DFE	Equalização com realimentação de decisão

DRSF	Desvanecimento rápido e seletivo em frequência
DVSF	Desvanecimento variante no tempo e seletivo em frequência
DWT	Transformada <i>wavelet</i> discreta
EQM	Erro quadrático médio
fdp	Função densidade de probabilidade
FDP	Função distribuição de probabilidade
IDWT	Transformada <i>wavelet</i> discreta inversa
IES	Interferência entre símbolos
IID	Independente e identicamente distribuídos
KF	Filtro de Kalman
KF1	Filtro de Kalman com variáveis de estado modeladas por processos AR(1)
KF2	Filtro de Kalman com variáveis de estado modeladas por processos AR(2)
LMS	<i>Least mean square</i>
MAP	Máxima probabilidade <i>a posteriori</i>
ME	Maximização da entropia
MF	Filtro casado
ML	Máxima verossimilhança
MLSE	Estimação de seqüência com o critério ML
MLSE-PSP	MLSE usando PSP
PEI	Probabilidade de erro irreduzível
PSP	Processamento por percurso sobrevivente
PSP-LMS	MLSE usando PSP com filtros LMS
PSP-KF1	MLSE empregando PSP e filtros KF com variáveis de estado modeladas por processos AR(1)
PSP-KF2	MLSE empregando PSP e filtros KF com variáveis de estado modeladas por processos AR(2)
RQG	Regra da quadratura de Gauss
RI	Resposta ao impulso
RSR	Relação sinal-ruído
SE	Série de Edgeworth
SER	Taxa de erro de símbolo
SGC	Série de Gram-Charlier

VA	Variável aleatória
WSS-US	Processos descorrelacionados e estacionários em sentido amplo

Símbolos

a_j	Parâmetro de um processo AR
$C_x(\cdot)$	Função característica da VA X
C_X^i	Matriz de covariância da estimativa de X condicionada a seqüência s^i
$C_{h_n^i}$	Matriz de covariância do erro de estimação de h_n condicionado a s^i
D	Conjunto de símbolos da modulação
$D(\cdot)$	Curva de aprendizagem do LMS
$E[\cdot]$	Valor esperado
$f(\cdot)$	Função densidade de probabilidade
$f(\cdot X)$	Função densidade de probabilidade condicionada à X
f_D	Desvio Doppler máximo
$f_G(\cdot)$	fdp de uma VA gaussiana padrão
$F_G(\cdot)$	FDP de uma VA gaussiana padrão
$G(\cdot)$	Densidade espectral de potência
h_n	Resposta ao impulso do canal no n -ésimo intervalo de símbolo
\hat{h}_n	Estimativa da resposta ao impulso do canal no n -ésimo intervalo de símbolo condicionada à s^i
$h_1(n)$	Estimativa da RI do canal no n -ésimo intervalo de símbolo obtida pelo LMS usado no procedimento de detecção de erro de equalização
$h_2(n)$	Estimativa da RI do canal no n -ésimo intervalo de símbolo obtida pelo KF empregando o modelo AR2 para aproximar o canal e usado no procedimento de detecção de erro de equalização
h_e	Filtro de esolamento
h_w	Filtro das <i>wavelets</i>
h_{Db1}	Filtro das <i>wavelets</i> das funções de base de Db1
h_{Db2}	Filtro das <i>wavelets</i> das funções de base de DB2
h_H	Filtro das <i>wavelets</i> das funções de base de Haar

\mathbf{H}_i^e	Matrizes circulares obtidas usando \mathbf{h}_e
\mathbf{H}_i^w	Matrizes circulares obtidas usando \mathbf{h}_w
$h_T(\cdot)$	Filtro de transmissão
$H_e(\cdot)$	Transformada de Fourier da função de escalonamento
$H_w(\cdot)$	Transformada de Fourier da função <i>wavelet</i>
\mathbf{I}	Matriz identidade
$J_0(\cdot)$	Função de Bessel de primeira espécie de ordem zero
L	Número de coeficientes do canal de comunicação
l_H	Filtro de escalonamento das funções de base de Haar
l_{Db1}	Filtro de escalonamento das funções de base de Db1
l_{Db2}	Filtro de escalonamento das funções de base de DB2
l_H	Filtro de escalonamento das funções de base de Haar
L_{DS}	Limiar para detecção de erros de equalização
\mathbf{M}	Matrizes de momentos modificados
$\mathcal{N}(a, b)$	VA gaussiana com média a e variância b
P	Fator de superamostragem adotado no receptor
P_e	Probabilidade de erro
\hat{P}_e	Uma estimativa da probabilidade de erro
P_{FP}	Probabilidade de falso alarme
P_{FP}^{max}	Probabilidade máxima de falso alarme
P_{FP}^{min}	Probabilidade mínima de falso alarme
$p_n(\cdot)$	Polinômios ortogonais
$P_k(\cdot)$	Polinômio de Chebycheff de ordem k
$P_k^H(\cdot)$	Polinômio de Hermite de ordem k
\mathbf{q}_i	Autovetores
Q	Quantidade de seqüências transmitidas
$R_N(\cdot)$	Erro de aproximação na RQG
$R(\cdot)$	função de autocorrelação
\mathbf{R}	matriz de autocorrelação
\mathbf{r}	Vetor de observações
S	Quantidade de seqüências sobreviventes
s^i	Uma possível seqüência transmitida
\hat{s}	Uma estimativa de s
T	Intervalo de símbolo

T_A	Mapeamento abrupto
T_S	Mapeamento suave
$T_{DS}(\cdot)$	Variável de teste para detecção de erros de equalização
$u(\cdot)$	Degrau unitário
U_i, V_i, X_i, X, Y	Variáveis aleatorias
U, V	Vetores aleatórios
$x(t)$	Sinal na saída do canal
\hat{x}	Uma estimativa de x
$y(t)$	Sinal contínuo na entrada do receptor
α	Transformada <i>wavelet</i> da observação
λ	Limiar de <i>denoising</i>
λ_u	Limiar universal
\hat{x}_n^i	Variável de estado do modelo de espaço em estado usado no KF
$\sigma_{c_i}^2$	potência canalizada pelo canal de comunicação no i -ésimo coeficiente
$\tilde{\eta}(\cdot)$	Realização do ruído aditivo
Φ	Matriz de transição do modelo de espaço em estado usado no KF
φ	Vetor de regressão
ν	Processo gaussiano complexo descorrelacionado usado no modelo de geração das variáveis de estado
θ	Transformada <i>wavelet</i> do sinal na saída do canal
$\hat{\theta}_i$	Coefficientes na saída do processo de <i>denoising</i>
γ_i	Cumulantes
\tilde{h}_i	Coefficientes da DWT de $h_T(\cdot)$
$\delta(\cdot)$	Impulso unitário
$\mu_X(m)$	m -ésimo momento da VA X
Λ_1	Matriz de covariância do erro de estimação da RI do canal obtida pelo LMS e empregado no esquema de detecção de erros de equalização
Λ_2	Matriz de covariância do erro de estimação da RI do canal obtida pelo KF e empregado no esquema de detecção de erros de equalização

Λ_2	Matriz de covariância do erro de estimação do LMS no esquema de detecção de erros de equalização
$w(\cdot)$	Função de ponderação
λ_p	Comprimento de onda da portadora
ρ_i, τ_i	Pesos e abscissas da RQG
$\hat{\mu}_m$	Momentos aproximados usados na técnica de ME
$\Omega(\cdot)$	Logaritmo natural de uma função característica
$\phi_{j,k}$	Funções de base de escalonamento
$\psi_{j,k}$	Funções de base <i>wavelets</i>
$\psi(w)$	Função <i>wavelet</i>
Ψ	Transforma de Fourier de ψ
\mathcal{V}_j	Espaços funcionais
\emptyset	Conjunto vazio
σ_{EP}^2	Variância do erro de predição

Lista de Figuras

1.1	Diagrama de blocos de um esquema de equalização adaptativa usando DD.	3
1.2	Diagrama de blocos do esquema de recepção BMLSE-PSP.	6
1.3	Diagrama de blocos simplificado de um sistema de comunicações que emprega o esquema proposto para detectar ocorrência de erros de equalização.	9
2.1	Diagrama de blocos simplificado do sistema em tempo discreto empregado para identificar os coeficientes da RI do canal.	17
2.2	Curvas de EQM em função do passo do LMS para $f_D T = 0,005$ e diferentes quantidades de termos no cálculo do EQM em regime permanente.	27
2.3	Curvas de EQM em regime permanente em função do valor do passo do algoritmo LMS para o processo AR(1), obtidas por simulação e análise, para RSR de 10, 20 e 30 dB.	28
2.4	Curvas de EQM em regime permanente em função do valor do passo do algoritmo LMS para o processo AR(2), obtidos por simulação e análise, para RSR de 10, 20 e 30 dB.	29
2.5	Curvas de EQM em regime permanente em função do valor do passo do algoritmo LMS para o processo de Jakes com $f_D T = 0,001$, obtidas por simulação e análise, para RSR de 10, 20 e 30 dB.	30
2.6	Curvas de EQM em regime permanente em função do valor do passo do algoritmo LMS para o processo de Jakes com $f_D T = 0,005$, obtidas por simulação e análise, para RSR de 10, 20 e 30 dB.	31
2.7	Curvas de EQM em regime permanente obtidas analiticamente para o processo AR(2). Em destaque os valores de EQM para o passo ótimo.	32

2.8	Curvas de EQM em regime permanente obtidas analiticamente para o modelo de Jakes com $f_D T = 0,001$. Em destaque os valores de EQM para os passos produzidos pelo procedimento de aproximação proposto.	33
2.9	Curvas de EQM em regime permanente obtidas analiticamente para o modelo de Jakes com $f_D T = 0,01$. Em destaque os valores de EQM para os passos produzidos pelo procedimento de aproximação proposto.	34
2.10	Diagrama de blocos simplificado de um esquema de recepção PSP-LMS que emprega AV para obter as seqüências sobreviventes.	35
2.11	Curvas de EQM em função da RSR, para $f_D T \in [0,002 \text{ } 0,007]$, obtidas com o procedimento proposto, com valor de passo constante e com o uso da aproximação do modelo do canal por processo de Markov de primeira ordem.	36
2.12	Curvas de aprendizagem para o esquema de recepção PSP-LMS, com passo constante e ajustado de acordo com o procedimento proposto, para $f_D T \in [0,002 \text{ } 0,005]$	37
2.13	Curvas de aprendizagem para o esquema de recepção PSP-LMS, com passo constante e ajustado de acordo com o procedimento proposto, para $f_D T \in [0,002 \text{ } 0,007]$	38
2.14	Taxa de erro de bit em função da RSR para o esquema de recepção PSP-LMS, considerando $f_D T \in [0,002 \text{ } 0,005]$	39
2.15	Taxa de erro de bit em função da RSR para o esquema de recepção PSP-LMS, considerando $f_D T \in [0,002 \text{ } 0,007]$	40
3.1	Uma possível classificação de esquemas de recepção cega.	43
3.2	Diagrama de blocos simplificado de um esquema de recepção BMLSE-PSP.	49
3.3	Diagrama de blocos do esquema de recepção cego para canais GWSS-US.	56
3.4	Taxa de erro de símbolo em função de E_b/N_0 para o receptor BPSP-LMS, com diferentes valores de $f_D T$	58
3.5	Taxa de erro de símbolo em função de E_b/N_0 para o receptor BPSP-KF1, com diferentes valores de $f_D T$	59
3.6	Taxa de erro de símbolo em função de E_b/N_0 para o receptor BPSP-KF2, com diferentes valores de $f_D T$	60
3.7	Comparação de desempenho dos esquemas de recepção BPSP-LMS, BPSP-KF1 e BPSP-KF2 para $f_D T$ igual a 0,005.	61

3.8	Quantidade de erros por bloco para os receptores BPSP-LMS ((a) e (b)) e BPSP-KF2 ((c) e (d)).	62
3.9	Curvas de aprendizagem referente ao receptor BPSP-KF2, para $f_D T = 0,005$ e RSR=30 dB.	65
3.10	Curvas de aprendizagem referente ao receptor BPSP-KF2, para $f_D T = 0,005$ e RSR=50 dB.	66
4.1	Diagrama de blocos simplificado de um sistema de comunicações que emprega o esquema proposto para detectar erros de equalização.	73
4.2	Diagrama em treliça no qual o AV realiza a busca das seqüências sobreviventes. Em destaque o ponto em que ocorre fusão dessas seqüências.	83
4.3	Esquema de recepção BPSP-KF2 proposto.	84
4.4	Efeito da técnica de detecção de erros de equalização no desempenho do esquema de recepção BPSP-KF2.	85
4.5	Efeito da técnica de detecção de erros de equalização na curva de aprendizagem do esquema de recepção BPSP-KF2 para RSR=40 dB.	86
5.1	Diagrama de bloco do procedimento de <i>denoising</i>	94
5.2	Mapeamento com limiar λ usando procedimento abrupto (linha tracejada) e suave (linha cheia).	96
5.3	Diagrama de blocos de um sistema de comunicação que emprega o processamento de entrada proposto.	100
5.4	BER \times limiar de <i>denoising</i> para as funções de base Db1, Db2 e Db3 considerando $J = 2$, $P = 32$ e RSR = 4 dB.	113
5.5	BER \times limiar de <i>denoising</i> para RSR de 2, 4 e 8 dB considerando Db1, $J = 2$ e $P = 16$	114
5.6	BER \times limiar de <i>denoising</i> para $J = 2, 3$ e 5 considerando Db1, $P = 32$ e RSR=4 dB.	115
6.1	Diagrama de blocos do sistema simulado.	121
6.2	Diagrama de blocos do processamento de entrada convencional e proposto.	123
6.3	Resposta em amplitude dos canais simulados.	125
6.4	Desempenho em função da largura de banda do filtro de recepção (m/T Hz) para $E_b/N_0 = 14$ e 18 dB.	126
6.5	Desempenho do esquema proposto para algumas funções de base.	127

6.6	Desempenho do esquema proposto para alguns valores de J_s	128
6.7	Desempenho dos esquemas convencional e proposto para os canais Ch1, Ch2 e Ch3. Inclui-se também a curva de probabilidade de erro de bit para o canal AWGN.	130
6.8	Resposta em amplitude para os canais Ch4 e Ch5.	131
6.9	Desempenho em função de E_b/N_0 para o canal Ch4.	133
6.10	Desempenho em função de E_b/N_0 para o canal Ch5.	134
B.1	Geometria pertinente ao modelo de espalhamento.	150
B.2	Espectro de Jakes para $f_D = 30$ Hz.	151
B.3	Logaritmo da potência de uma função amostra do canal simulado pela técnica de Monte Carlo com $f_D = 150$ Hz e $f_S = 24k$ símbolos por segundo.	153
C.1	Algoritmo da RQG proposto em [1].	158
D.1	Dois estágios do algoritmo piramidal no modo de análise (DWT).	185
D.2	Dois estágios do algoritmo piramidal no modo de síntese (IDWT).	186
F.1	Diagrama de blocos simplificado do esquema de comunicação estudado neste apêndice.	206
F.2	Diagrama de blocos do esquema de recepção proposto.	207
F.3	Gráfico que ilustra um possível vetor de observação \mathbf{y} e as quatro possíveis seqüências transmitidas.	216
F.4	BER $\times E_b/N_0$ para o esquema Proposto I (análise e simulação) e os esquemas convencionais (simulação).	222
F.5	Vazão $\times E_b/N_0$ para o esquema Proposto I (análise e simulação) e os esquemas convencionais (simulação).	223
F.6	BER $\times E_b/N_0$ para os esquemas propostos e convencionais (simulação).	224
F.7	Vazão $\times E_b/N_0$ para os esquemas propostos e convencionais (simulação).	225

Lista de Tabelas

3.1	Variância do erro de predição para alguns valores de $f_D T$ e da ordem do processo AR.	55
3.2	Porcentagem de blocos com mais de 10% de erros para o esquema BPSP-KF2 com diferentes valores de RSR e S	60
3.3	SER para RSR=30 dB, desconsiderando blocos com percentual de erros maior do que 1%.	63
3.4	SER para RSR=50 dB, desconsiderando blocos com percentual de erros maior do que 1%.	63
3.5	Quantidade de blocos com percentual de erro superior a 1% para RSR=50 dB.	63
4.1	Taxa de detecção de erros de equalização considerando seqüência de treinamento, bloco de tamanho 10, $f_D T = 0,001$ e alguns valores de RSR, de P_{FA}^{max} e da quantidade de erros por bloco.	79
4.2	Taxa de detecção de erros de equalização considerando seqüência de treinamento, blocos de tamanho 10, $f_D T = 0,01$ e alguns valores de RSR, de P_{FA}^{max} e da quantidade de erros por bloco.	80
4.3	Taxa de detecção de erros de equalização para diferentes valores de RSR, P_{FA}^{max} e quantidade de erros por bloco de 32 símbolos. Os resultados foram obtidos sem treinamento, para $f_D T = 0,001$	81
4.4	Taxa de detecção de erros de equalização para diferentes valores de RSR, P_{FA}^{max} e quantidade de erros por bloco de 32 símbolos. Os resultados foram obtidos sem treinamento, para $f_D T = 0,01$	82
4.5	Vazão da informação do esquema BPSP-KF2 para diversos valores de RSR.	87
F.1	Transformada de Haar das seqüências na saída do modulador BPSK.	204

F.2 Componentes nulas dos elementos do conjunto S_K no domínio da transformada de Haar. 218

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Análise do Algoritmo LMS em Regime Permanente na Identificação de Canais Variantes no Tempo	4
1.2	Receptor BMLSE-PSP	5
1.3	Detecção de Erros de Equalização	8
1.4	Propostas Para o Processamento de Entrada	10
1.5	Organização da Tese	11
2	Desempenho do Algoritmo LMS na Identificação de Canais Variantes no Tempo e seu Emprego em Receptores MLSE-PSP	14
2.1	Modelo do Sistema	16
2.2	Desempenho do LMS Para Processos Estacionários em Sentido Amplo .	18
2.3	Dois Casos Particulares	21
2.3.1	Determinação do Passo Ótimo	22
2.3.2	Resultados Numéricos	25
2.4	Considerações Finais	38
3	Receptores MLSE-PSP Cegos para Canais Variantes no Tempo	42
3.1	Técnicas de Recepção Cega	42
3.2	Recepção Cega usando o critério ML	44
3.3	Esquema de Recepção BMLSE-PSP	49
3.4	Resultados Numéricos	54
3.5	Considerações Finais	65
4	Detecção de Erros de Equalização para Canais Variantes no Tempo	68
4.1	Concepção Básica	69

4.2	O Teste Estatístico	73
4.3	Resultados Numéricos	76
4.3.1	Resultados Obtidos Gerando os Erros na Saída do Receptor . . .	77
4.3.2	Desempenho de um Receptor BPSP-KF2 com Detecção de Ocorrência de Erros	81
4.4	Considerações Finais	87
5	Redução de ruído no Processamento de Entrada de Receptores Di- gitais: Proposição e Análise de Desempenho em Canais AWGN com Modulação BPSK	88
5.1	Considerações preliminares	89
5.2	Técnicas de <i>denoising</i>	92
5.2.1	Princípios básicos	93
5.3	<i>Denoising</i> em Sistemas de Comunicações	97
5.3.1	Aproximação Analítica de fdp Usando Técnicas dos Momentos .	105
5.4	Cálculo da Probabilidade de Erro	109
5.5	Resultados Numéricos	111
5.6	Considerações Finais	116
6	Desempenho do Processamento de Entrada Proposto Para Canais Seletivos em Frequência	118
6.1	Considerações Preliminares	119
6.2	O Sistema Simulado	121
6.3	Resultados Numéricos	123
6.3.1	Desempenho Variando Alguns Parâmetros do Procedimento de Entrada Proposto	124
6.3.2	Comparação de Desempenho Entre os Esquemas Proposto e Con- vencionais	129
6.4	Considerações Finais	133
7	Considerações Finais	136
7.1	Contribuições da Tese	137
7.2	Sumário das Principais Contribuições da Tese	140
7.3	Propostas Para Continuação do Trabalho	140

A	Erro Quadrático Médio do Algoritmo de Filtragem Adaptativa LMS	142
B	Modelo do Canal de Comunicação	146
	B.1 Considerações Físicas	146
	B.2 O Modelo WSS-US	148
	B.3 Técnica de Simulação do Canal de Comunicação Móvel	152
C	Técnicas dos Momentos na Aproximação das Funções Densidade e Distribuição de Probabilidade	154
	C.1 Regra da Quadratura de Gauss	154
	C.2 Maximização da Entropia	159
	C.3 Série de Gram-Charlier	163
	C.4 Serie de Edgeworth	167
	C.5 Série de Beaulieu	171
D	Breve Introdução à Transformada <i>Wavelet</i>	175
	D.1 Expansão <i>Wavelet</i>	176
	D.2 Análise de Multiresolução	177
	D.3 Transformada <i>Wavelet</i> Discreta	183
E	Análise Probabilística dos Coeficientes <i>Wavelets</i> Estimados pelo Procedimento de <i>Denoising</i>	189
	E.1 Saída do Procedimento de <i>Denoising</i>	189
	E.2 Função Densidade de Probabilidade dos Coeficientes <i>Waveletes</i> na Saída do Procedimento de <i>Denoising</i>	192
	E.3 Prova de Independência dos Coeficientes <i>Wavelets</i> na Saída do Procedimento de <i>Denoising</i>	195
	E.4 Determinação dos Momentos dos Coeficientes <i>Wavelets</i> na Saída do Procedimento de <i>Denoising</i>	196
	E.5 Determinação dos Momentos Estatísticos do Sinal na Entrada do Decisor	199
F	Uma Nova Estratégia de Combate ao Ruído Baseada no Uso de Códigos de Paridade e Transformada de Haar	202
	F.1 O Esquema Proposto	203
	F.1.1 Procedimento para Detectar a Classe da Seqüência Transmitida: Regiões e Limiares de Decisão	207

F.1.2	Desempenho do Esquema Proposto	209
F.2	Detecção Parcial e Remoção de Ruído: Modificações nos Limiares e nas Regiões de Decisão	214
F.3	Resultados Numéricos	220
F.4	Conclusão	225
G	Publicações no Período	227
	Bibliografia	229

Capítulo 1

Introdução

A crescente demanda por sistemas de comunicações digitais eficientes e o surgimento de novas aplicações e serviços têm determinado um progressivo aumento na eficiência de ocupação do espectro. Para isso tem sido requerida a utilização de esquemas de modulação em amplitude e fase, os quais, de maneira geral, se caracterizam por apresentar eficiência espectral elevada e desempenho sensível ao efeito da *interferência entre símbolos* (IES) [2-4]. Estas características se acentuam com o aumento do tamanho do alfabeto de símbolos da modulação (D).

Em algumas aplicações importantes na área de comunicação digital, além da limitação de faixa resultante da ação dos filtros de transmissão e de recepção, os canais são aleatórios e dispersivos no domínio do tempo e da frequência.

O desempenho dos sistemas que operam em canais que conjugam tais distúrbios é severamente degradado pelo efeito da IES. Na realidade, nesses casos a IES representa o obstáculo principal para obter transmissão de dados em taxas elevadas. É, portanto, justificável e indispensável incluir no receptor esquemas elaborados de equalização¹

Diversas técnicas de equalização têm sido propostas e utilizadas, as quais apresentam variados graus de sofisticação, desempenho e complexidade computacional. Essas técnicas utilizam parâmetros associados à *resposta ao impulso* (RI) do canal, os quais são usualmente estimados com o auxílio de *seqüências de treinamento*.

¹ Alguns autores usam o termo equalização para designar apenas os procedimentos que se baseiam no projeto de filtro inverso. Outros, no entanto, lhe dão uma conotação mais abrangente e empregam-no para descrever qualquer processamento de sinal realizado sobre as amostras na saída do processamento de entrada, tendo por objetivo reduzir a probabilidade de erro do receptor. Este último enfoque é o que será aqui adotado.

Para certas aplicações em canais invariantes no tempo, a seqüência de treinamento é geralmente utilizada apenas uma única vez. Por outro lado, para canais variantes no tempo, ela deve ser transmitida diversas vezes durante uma conexão, com periodicidade que depende, dentre outros fatores, da taxa de evolução temporal do canal em relação à taxa de símbolos e dos requisitos de desempenho. Nesses casos, a informação digital a ser transmitida é dividida em blocos, dentro dos quais, geralmente em seu início, é inserida a seqüência de treinamento.

Todavia, independentemente do modelo que caracteriza o comportamento do canal com o tempo, durante o período de treinamento o receptor deve utilizar algum algoritmo de filtragem adaptativa para estimar os parâmetros do equalizador [3-5]. Concluída a *fase de treinamento*, é iniciada a recuperação da informação, usualmente denominada de *fase de detecção*. Dependendo da dinâmica do canal em relação à taxa de símbolos, pode ser necessário atualizar nesta fase as estimativas dos parâmetros relacionados à RI do canal, pois do contrário os erros de detecção podem aumentar ao longo do bloco, degradando sobremodo o desempenho do receptor. Equalizadores que ajustam seus parâmetros durante a fase de detecção são denominados de *equalizadores adaptativos*.

Os equalizadores adaptativos tradicionais utilizam símbolos previamente detectados como referência, nos algoritmos de estimação de seus parâmetros. Este tipo de adaptação, ilustrado na Figura 1.1, é aqui denominado *adaptação direcionada pela decisão* (DD, do termo em inglês *Decision-Directed*).

A DD é um procedimento bastante simples, porém o desempenho dos receptores que a utilizam tende a se deteriorar seriamente diante da ocorrência de erros nas detecções dos símbolos. Esses erros comprometem as atualizações dos parâmetros do equalizador, o que, por conseguinte, prejudica as detecções futuras. Este comportamento pode ser mais danoso nos esquemas de recepção com memória, que se caracterizam pela ocorrência de eventos erro.

A ocorrência de erros em equalizadores com adaptação DD pode determinar a perda de acompanhamento de seus parâmetros, particularmente para aplicações em que a RI do canal muda rapidamente com o tempo. Nesses casos, apesar da boa estimativa da RI de canal obtida no início dos blocos e da habilidade de aprendizagem dos equalizadores adaptativos, a taxa de envio da seqüência de treinamento deve ser grande para evitar instabilidades no receptor. Isto reduz bastante a vazão de informação do sistema, comprometendo sua eficiência.

Em certas aplicações, como por exemplo em alguns *modems* utilizados para trans-

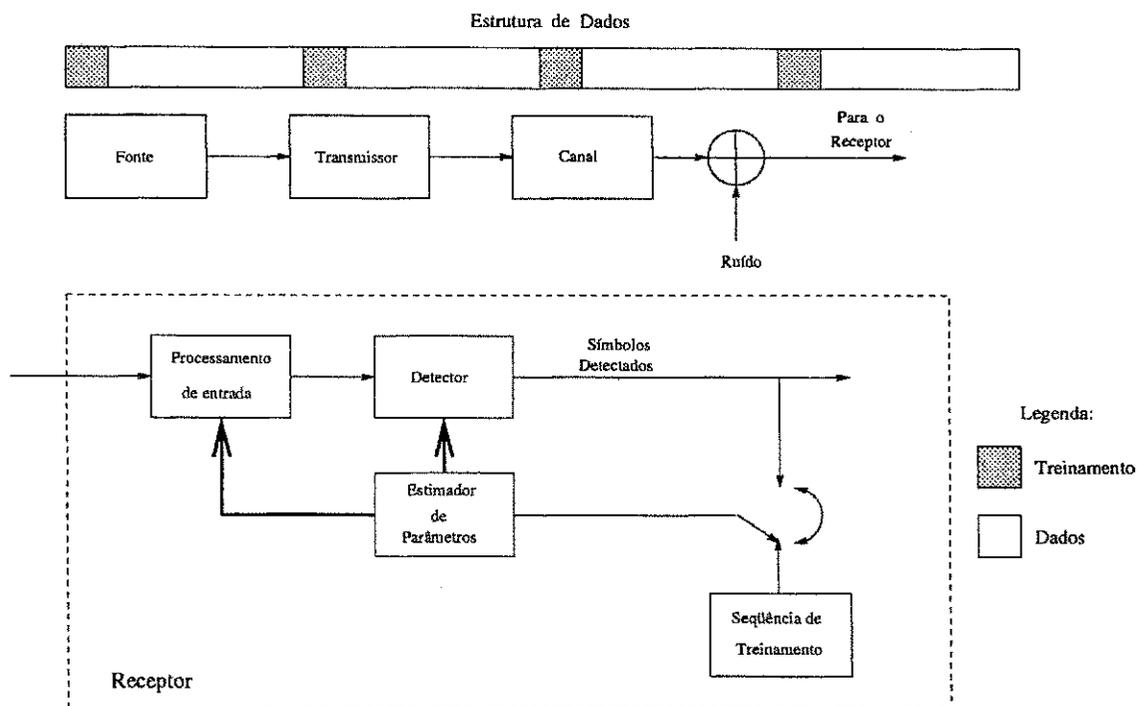


Figura 1.1: Diagrama de blocos de um esquema de equalização adaptativa usando DD.

missão em HF a vazão do sistema é de apenas 50% [6]. Em outras aplicações, como em telefonia celular os números são melhores, mas ainda é comprometida cerca de 25% da capacidade do canal.

Existem ainda situações em que a taxa de variação do canal em relação às taxas de transmissão praticadas justificam o modelo de canais invariantes dentro de milhares de intervalos de símbolos e, mesmo assim, há a necessidade do envio periódico de seqüências de treinamento. Isso ocorre, por exemplo, em redes sem fio para comunicação entre computadores [7]. Neste caso o treinamento periódico é necessário para habilitar os usuários, que entram e saem aleatoriamente do sistema, a utilizarem o serviço. No entanto, esse procedimento pode sobrecarregar o processador central e reduzir severamente a vazão da rede.

Esses aspectos têm motivado o desenvolvimento de receptores *cegos* ou *autodidatas*, que realizam a detecção da informação digital sem o auxílio de seqüências de treinamento.

O tema de recepção cega é bastante atual e vem despertando o interesse de pesquisadores renomados. Dentre as diversas maneiras de abordar o referido tema, este

trabalho é voltado para aquelas que se baseiam no critério de *máxima verossimilhança* (ML, da expressão em inglês *Maximum Likelihood*) e que empregam o *processamento por percurso sobrevivente* (PSP, do termo em inglês *Per Survivor Processing*), procedimentos que serão doravante denominados por BMLSE-PSP (da expressão em inglês *Blind Maximum Likelihood Sequence Estimation using Per Survivor Processing*).

Além da discussão em torno do tema de recepção ou equalização cega, esta tese aborda outros importantes aspectos concernentes à área da equalização adaptativa, com destaque para a proposição de um procedimento para detectar a ocorrência de erros de equalização e a análise do algoritmo de filtragem adaptativa LMS (da expressão em inglês *Least Mean Square*) na identificação de canais variantes no tempo.

Também é apresentada uma nova proposta para o processamento de entrada de receptores para canais seletivos em frequência, visando minimizar os efeitos do ruído aditivo. O real impacto do ruído no desempenho desses sistemas certamente depende do tipo de receptor utilizado. No entanto, os efeitos danosos por ele provocados no decisor e no estimador de canal interagem no sentido de dificultar a recuperação da informação. A ação do ruído é especialmente comprometedora quando os canais são rapidamente variantes no tempo, devido à maior dificuldade em se estimar e acompanhar seus parâmetros, bem como em equalização e identificação cega do canal. Ao longo deste texto mostra-se que o processamento de entrada proposto pode se constituir numa alternativa vantajosa, em especial quando a RI do canal apresenta nulos espectrais dentro da faixa do sinal transmitido.

A seguir são apresentadas de forma sucinta as propostas desta tese.

1.1 Análise do Algoritmo LMS em Regime Permanentemente na Identificação de Canais Variantes no Tempo

O algoritmo LMS vem sendo freqüentemente empregado para ajustar os parâmetros de equalizadores adaptativos que operam em ambientes não estacionários. Assim sendo, o entendimento do seu funcionamento nessas condições é de extrema valia para explorar plenamente suas potencialidades e otimizar o projeto de equalizadores que nele se baseiam.

Infelizmente, malgrado a simplicidade computacional desse algoritmo, algumas ques-

tões importantes acerca do seu funcionamento em ambientes não-estacionários estão ainda em aberto. Até onde vai o conhecimento do autor, os resultados analíticos de avaliação do desempenho deste algoritmo em ambientes não-estacionários têm sido obtidos sob condições que são geralmente infringidas em aplicações que envolvem canais de comunicação móvel [5,8-11]. No caso destas aplicações, é comum se avaliar o desempenho do algoritmo LMS e escolher o valor de seu passo via simulação computacional.

É importante mencionar que o passo controla as propriedades de convergência, a estabilidade e o nível de EQM em regime permanente do algoritmo LMS. Portanto, a escolha de um valor adequado para este parâmetro é de importância vital para o bom funcionamento do referido algoritmo.

Três questões importantes, referentes ao uso do LMS em ambiente de comunicações móveis, são abordadas nesta tese. Em primeiro lugar, avalia-se o EQM em regime permanente quando este algoritmo é empregado para identificar canais variantes no tempo. A avaliação é realizada de forma analítica, admitindo hipóteses usualmente adotadas em aplicações na área de comunicações móveis, como por exemplo a de considerar a transmissão de símbolos PSK estatisticamente independentes. São obtidas expressões para o EQM em regime permanente em termos da função de autocorrelação dos coeficientes da RI do canal e de outros parâmetros típicos do sistema, tais como, a variância do ruído, bem como do passo do LMS. Essas expressões são particularizadas para alguns modelos usuais de espalhamento Doppler.

Em segundo lugar, discute-se a obtenção do passo ótimo no sentido de minimizar os valores de EQM em regime permanente. Para alguns casos aqui tratados, o passo ótimo é obtido com exatidão e em outros casos são fornecidas aproximações analíticas para o seu valor. Por fim, avalia-se o desempenho do esquema de recepção PSP-LMS com passo do algoritmo LMS otimizado de acordo com os resultados analíticos obtidos neste trabalho.

1.2 Receptor BMLSE-PSP

A seqüência estimada pelo critério ML diante de ruído aditivo gaussiano branco é aquela que, convolvida com a RI do canal, gera amostras com menor distância euclidiana das observações. Para o caso de canais com RI conhecidas ela pode ser obtida de forma eficiente e recursiva pelo *algoritmo de Viterbi* (AV). Por outro lado, para canais desconhecidos, o critério ML leva a um procedimento de estimação conjunta de

seqüência de símbolos e RI do canal de comunicação, aqui denominado *ML conjunto*, cuja complexidade computacional e requisitos de memória crescem exponencialmente com o comprimento da seqüência a ser estimada, inviabilizando a sua aplicação na maioria dos casos de interesse.

Neste contexto, diversos algoritmos vêm sendo propostos para aproximar a solução ML, que envolvem desde o uso de seqüência de treinamento e redução do espaço de busca, até estratégias de recepção cegas. Uma idéia que vem recebendo grande atenção nos últimos anos é o emprego do princípio do processamento por percurso sobrevivente (PSP) [12–16].

Como se mostra na Figura 1.2, um receptor BMLSE-PSP² é composto basicamente de um algoritmo de busca e de um conjunto de filtros adaptativos. O estágio de processamento de entrada é semelhante ao de outros esquemas de recepção, sendo geralmente composto de filtro e amostrador.

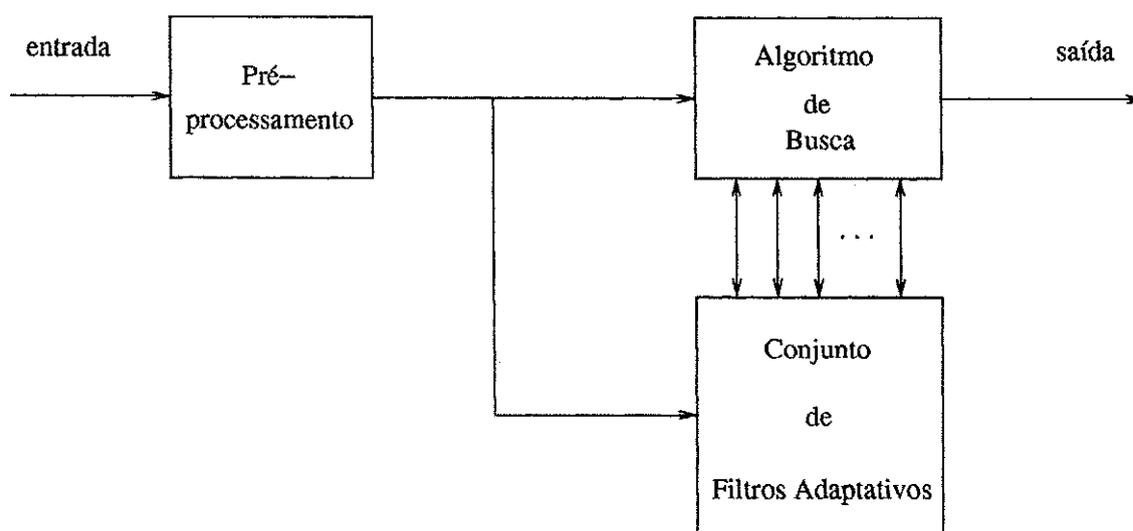


Figura 1.2: Diagrama de blocos do esquema de recepção BMLSE-PSP.

O algoritmo de busca seleciona recursivamente as seqüências que se mantêm no processo de estimação (*seqüências sobreviventes*). Cada uma dessas seqüências é fornecida a um filtro adaptativo para gerar estimativas condicionais da RI do canal, as quais, por seu turno, são usadas pelo algoritmo de busca no cálculo das métricas de extensão das

²Nesta seção o esquema de recepção BMLSE-PSP será apresentado de forma bastante sumária e informal, apenas para estabelecer as linhas de pesquisa que serão abordadas no trabalho. No Capítulo 3 ele será detalhado.

seqüências sobreviventes para o próximo intervalo de símbolo, as quais serão utilizadas pelo algoritmo de busca para atualizar o conjunto de seqüências sobreviventes, e assim por diante.

O potencial das técnicas do tipo MLSE-PSP (cegas ou com treinamento) provém do fato de se empregar um estimador de canal para cada uma das seqüências sobreviventes. Ao contrário das abordagens convencionais [3,17], nesse caso, as estimativas da RI do canal são obtidas sem retardo, o que é especialmente importante em sistemas de comunicação para canais variantes no tempo. Além disso, pode ser adotado um retardo adequado para a liberação de símbolos decididos, de acordo com a memória induzida pelo canal e por eventuais esquemas de codificação empregados no sistema de comunicação.

Em suma, a abordagem MLSE-PSP permite coadunar dois aspectos que são incompatíveis nas abordagens convencionais [3,17]: a obtenção de estimativa da RI do canal sem retardo e a escolha de um retardo de decisão adequado.

Sob esta abordagem pode ser enquadrada uma classe abrangente de receptores, com graus variados de complexidade e desempenho, resultantes de associações entre algoritmos de busca e de filtragem adaptativa. Apesar disso, a maioria dos trabalhos nessa área usa o AV para obter as seqüências sobreviventes e, para obter as estimativas condicionais da RI do canal, são geralmente empregados o algoritmo LMS ou *filtragem de Kalman* (KF, da expressão em inglês *Kalman filtering*) com processos *autoregressivo* (AR) de primeira ordem, AR(1), para modelar a evolução temporal do canal de comunicação.

Em [18], considerando canais com *desvanecimento variante no tempo e seletivo em frequência* (DVSF) e o uso de seqüências de treinamento, mostrou-se, via simulação computacional, que é possível, a despeito dos erros contidos nas seqüências sobreviventes, manter o acompanhamento da RI do canal, desde que sejam empregados esquemas de filtragem robustos, com modelos estatísticos bem ajustados ao do canal de comunicação. Uma combinação particularmente interessante foi obtida pelo uso do KF com o modelo AR de segunda ordem, AR(2), para descrever estatisticamente a evolução temporal do canal de comunicação. Dentro da faixa de intensidade de efeito Doppler contemplada no trabalho supracitado, este esquema de filtragem permitiu evitar o efeito de *probabilidade de erro irreduzível* (PEI), o qual foi observado com o uso do algoritmo LMS e KF com modelo AR(1). Vale mencionar que o efeito de PEI tem sido verificado em diversos trabalhos que contemplam canais variantes no tempo.

Em [18] foi verificado também que, para uma dada quantidade de seqüências sobreviventes, o algoritmo M possibilita melhor desempenho do que algoritmos do tipo Viterbi Generalizado [19] e, em particular, do que o AV [20, 21].

É importante enfatizar que os erros de acompanhamento da RI do canal tornam imprecisas as métricas utilizadas pelo algoritmo de busca. Nesses casos é razoável esperar que um algoritmo com estratégia de escolha das seqüências sobreviventes mais flexível e igualitário, como o algoritmo M, proporcione melhor desempenho do que aqueles com critérios mais rígidos como, por exemplo, o AV, o qual pode eliminar seqüências de custos menores, em detrimento de outras com custos maiores, simplesmente por um questão de distribuição das seqüências nos estados da treliça.

Este trabalho investiga o uso do algoritmo M e dos esquemas de filtragem adaptativa LMS e KF com modelos AR(1) e AR(2), no contexto dos esquemas de recepção BMLSE-PSP em canais com DVSF. Estes receptores serão doravante denominados BPSP-LMS, BPSP-KF1 e BPSP-KF2, respectivamente.

1.3 Detecção de Erros de Equalização

É usual ocorrer *surtos* de erros [22] no processo de detecção realizado por receptores digitais adaptativos.

Alguns dos fatores que podem contribuir para causar surtos são a perda de acompanhamento da RI do canal, o nível de ruído elevado, a propagação de erros nos equalizadores que utilizam estruturas com realimentação de decisão, a obtenção de soluções sub-ótimas em esquemas que adotam funções custo multimodais e a restrição do espaço de busca. Esses fatores podem surgir isolada ou conjuntamente, no contexto dos sistemas de comunicações que empregam seqüências de treinamento ou daqueles que adotam a abordagem cega. Porém, para o último caso, detectar a ocorrência de erros de equalização é uma tarefa ao mesmo tempo importante e complexa, pois os surtos ocorrem com maior freqüência e é complicado inferir sobre a qualidade dos símbolos que estão sendo detectados.

O desenvolvimento de algoritmos de teste acerca da ocorrência de erros de equalização foi abordado em [23, 24] considerando canais invariantes no tempo durante o período de realização do teste. As técnicas propostas naqueles artigos exploram a relação existente entre a presença de erros de equalização e as variações temporais de um sistema linear subjacente, definido como tendo entrada e saída dadas pela seqüência

de símbolos detectada e pelas observações na entrada do receptor, respectivamente.

Essas técnicas, conforme resultados numéricos apresentados nas referências supracitadas, possuem capacidade de detecção elevada, induzem retardo de poucos símbolos e podem ser utilizadas em qualquer esquema de equalização. No entanto, elas apresentam alguns inconvenientes, sendo os principais a complexidade computacional elevada e o uso explícito da suposição de canal invariante, o que restringe o seu escopo de aplicação.

No presente trabalho é proposto um novo procedimento para detecção de erros de equalização, adaptativo e de complexidade computacional baixa. Além disso, como as técnicas apresentadas em [23, 24], este procedimento pode em princípio ser associado a qualquer esquema de equalização. Ele foi concebido para operar diretamente sobre a seqüência detectada pelo receptor (seqüência de referência) e se baseia no uso do novo conceito de *diversidade em filtragem* ou *diversidade de estimadores*. A idéia de diversidade em filtragem consiste no uso em paralelo de dois estimadores despolarizados da RI do canal, com características distintas de robustez a erros no sinal de referência. O diagrama de blocos simplificado de um receptor que emprega o procedimento proposto para detectar os erros de equalização é apresentado Figura 1.3.

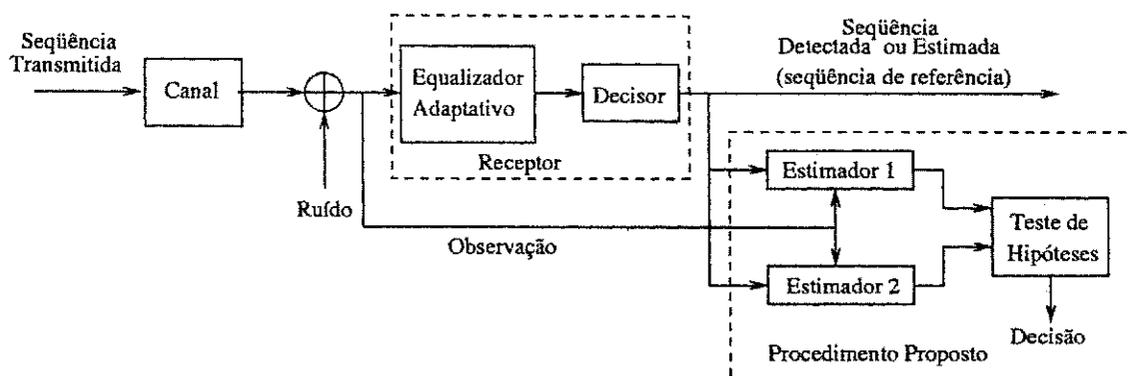


Figura 1.3: Diagrama de blocos simplificado de um sistema de comunicações que emprega o esquema proposto para detectar ocorrência de erros de equalização.

A tese contempla uma discussão referente aos estimadores que devem ser adotados pelo procedimento proposto para detecção da ocorrência de erros, bem como a definição de um teste de hipóteses que opera nas saídas desses estimadores, tendo sido obtida a *função densidade de probabilidade* (fdp) de sua variável de teste. A partir dessa fdp, foi avaliada a probabilidade de *falso alarme* (P_{FA}), com base na qual se estabeleceu anali-

ticamente os limiares de decisão adequados para que o esquema de recepção apresente um padrão desejado de desempenho.

Também se verifica, mediante simulação computacional, o bom desempenho do procedimento proposto quando o canal é caracterizado pelo efeito de DVSF. As simulações contemplam duas situações. Na primeira, o procedimento é testado sem entrar em detalhes acerca do esquema de equalização adotado. Na segunda, o procedimento proposto é avaliado em conjunto com o esquema de recepção BPSP-KF2. Em ambos os casos os resultados obtidos são bastante animadores.

1.4 Propostas Para o Processamento de Entrada

A estrutura de processamento de entrada dos receptores digitais geralmente é projetada para maximizar a RSR nos instantes de amostragem. Essa abordagem conduz à especificação de um filtro casado (MF, da expressão em inglês *matched filter*), cuja RI é definida pelo pulso básico na entrada do receptor [3, 25].

No entanto, para implementar esta abordagem é preciso conhecer *a priori* a RI do canal, o que é geralmente impossível. Em aplicações que usam seqüências de treinamento e os canais são invariantes com o tempo, uma solução aproximada que pode ser adotada é obter a estimativa do canal durante o treinamento e utilizá-la para ajustar os parâmetros do filtro (casado) a ser usado na fase de recepção. No entanto, em aplicações que contemplam canais variantes no tempo, este filtro deveria ser adaptativo, o que poderia contribuir para a instabilidade do esquema de recepção, além de aumentar a sua complexidade computacional.

Nos esquemas de recepção cega, nas quais a estrutura de filtro casado não pode ser utilizada, ou em outras aplicações, como a mencionada acima, nas quais o seu uso é inconveniente ou ineficiente, uma estratégia bastante simples, e que vem sendo usualmente empregada na prática, é utilizar filtros de transmissão e recepção casados, cuja RI conjunta atenda ao primeiro critério de Nyquist [3]. Apesar dessa solução não maximizar a RSR nos instantes de amostragem, os filtros não provocam o efeito de IES, o qual poderá surgir apenas em decorrência da ação dispersiva do canal.

É proposto neste trabalho um novo processamento de entrada para receptores digitais, cuja capacidade de remoção do ruído se baseia no uso de técnicas de *denoising* [26], em contraposição às técnicas convencionais que se baseiam no uso de filtros lineares e invariantes ao deslocamento.

As técnicas de *denoising* mais conhecidas são procedimentos de estimação não-lineares e não-paramétricos, realizados no domínio da transformada *wavelet*. Elas atuam diretamente sobre os coeficientes *wavelets* da observação ruidosa e se beneficiam da propriedade de concentração da energia dessa transformada. Esta propriedade permite representar com boa fidelidade as funções do espaço de sinais utilizando apenas uma pequena parcela dos coeficientes da expansão, o que não se verifica para o ruído, principalmente se ele for caracterizado como um processo com DEP plana.

Um procedimento de *denoising* típico toma os coeficientes da expansão *wavelet* e exclui do processo de síntese (aplicação da transformada inversa) aqueles que estão abaixo de um determinado limiar. O objetivo deste procedimento é eliminar os coeficientes que decorrem unicamente da decomposição do ruído ou de componentes formadas pela conjunção de ruído e de porções de sinal com pouca energia.

Considerando canais AWGN e modulação BPSK, o desempenho de um detector que emprega o procedimento de entrada proposto é avaliado analiticamente, sendo os resultados analíticos corroborados por simulação computacional. Como fruto da análise matemática, é obtida uma expressão fechada para a probabilidade de erro de bit em função de parâmetros do procedimento de *denoising*. Este procedimento de entrada também é avaliado por simulação em cenários de comunicação mais complexos, com modulação QPSK e canais seletivos em frequência. Os resultados apresentados indicam claramente que o procedimento proposto permite a obtenção de melhores características de desempenho do que os esquemas de processamento de entrada convencionais, especialmente em canais que se caracterizam por apresentar nulos espectrais dentro da faixa de frequência de interesse.

1.5 Organização da Tese

Além deste capítulo introdutório, a tese compreende ainda seis capítulos e sete apêndices que são descritos de forma bastante sumária a seguir.

No Capítulo 2 é avaliado o desempenho do algoritmo LMS na identificação de canais variantes no tempo. Obtém-se expressões gerais para o EQM na condição de regime permanente, as quais são particularizadas assumindo alguns modelos típicos de espalhamento Doppler em sistemas de comunicação móvel. Obtém-se o passo ótimo do algoritmo LMS para alguns dos casos estudados. Além disso, o desempenho do esquema de recepção PSP-LMS com passo otimizado é obtido via simulação computa-

cional. Os resultados analíticos apresentados neste capítulo são validados por simulação computacional.

O Capítulo 3 trata do problema de recepção cega para sistemas de comunicações que operam em canais caracterizados pelo efeito de DVSF. São apresentados resultados de simulação computacional referentes a um estudo comparativo de desempenho dos receptores BPSP-LMS, BPSP-KF1 e BPSP-KF2, que empregam o algoritmo M para escolher as seqüências sobreviventes e se diferenciam pelo algoritmo de filtragem adaptativa adotado.

No Capítulo 4 é apresentada a idéia de diversidade em filtragem/estimação e o seu emprego no desenvolvimento de um procedimento para detectar a presença de erros de equalização. Para um cenário típico de comunicação móvel, são apresentados resultados analíticos e de simulação computacional que validam o procedimento proposto.

O Capítulo 5 contém uma proposta para reduzir o nível de ruído na entrada de receptores digitais com um processamento de entrada utilizando técnicas de *denoising*. Apresenta-se uma discussão sumária dessas técnicas e de seu emprego em sistemas de comunicações. Conclui-se o capítulo com a obtenção, de forma analítica, da probabilidade de erro de bit para um sistema de comunicação que adota o processamento de entrada proposto e se caracteriza pelo uso de modulação BPSK em canal AWGN. Esses resultados também foram corroborados por simulação computacional.

No Capítulo 6 são apresentados e discutidos resultados de simulação computacional referentes ao emprego do processamento de entrada proposto para receptores digitais que operam em canais seletivos em freqüência. As simulações contemplam um estudo comparativo de desempenho em que se considera o esquema proposto operando em conjunto com várias estruturas de equalização, bem como outras associações de equalizadores com técnicas convencionais de processamento de entrada.

O Capítulo 7 contém as considerações finais do trabalho, enfatizando suas principais contribuições e as possibilidades de trabalhos futuros.

No Apêndice A são obtidas expressões gerais do EQM em regime permanente para o algoritmo LMS, as quais são utilizadas no Capítulo 2 como ponto de partida para gerar os principais resultados nele contidos.

O Apêndice B apresenta considerações a respeito do canal de comunicação móvel. São abordadas questões de ordem física, o modelo estatístico do canal e a técnica de simulação empregada para gerar suas funções amostras.

No Apêndice C são apresentadas, de forma bastante sumária, algumas técnicas

que visam aproximar a fdp ou a *função distribuição de probabilidade* (FDP) de uma *variável aleatória* (VA), a partir de seus momentos. O conteúdo deste apêndice é empregado no Capítulo 5 para gerar uma aproximação analítica da fdp da VA gerada pelo processamento de entrada proposto no referido capítulo.

No Apêndice D são apresentados resultados concernentes à teoria das *wavelets*. O Apêndice é dividido em três seções. Na primeira delas define-se a expansão em *wavelets*. Na segunda, apresenta-se a análise de multiresolução, conceito fundamental para análise, síntese e projeto de *wavelets*. Na terceira seção, apresenta-se a *transformada wavelet discreta* (DWT, da expressão em inglês *Discrete Wavelet Transform*) sob dois enfoques: a partir do algoritmo piramidal e da multiplicação matricial.

O Apêndice E apresenta algumas deduções importantes para a obtenção dos resultados analíticos contidos no Capítulo 5.

No Apêndice F propõe-se um novo esquema para transmissão que combina o uso de código de paridade no transmissor com o uso da transformada de Haar no receptor, visando combater o efeito do ruído aditivo gaussiano branco (AWGN). O que se busca com a conjunção dessas técnicas é, ao mesmo tempo, proteger a informação, devido à adição de redundância, e remover ruído no receptor, devido à propriedade de representação com parcimônia da transformada de Haar [27,28], e assim melhorar o desempenho do sistema. Como ponto de partida para apresentação e avaliação analítica da técnica proposta, foi considerado um sistema de comunicação simples, com modulação BPSK e canal AWGN. São apresentados resultados de simulação computacional que corroboram as deduções e comparam o desempenho do esquema proposto com o propiciado por esquemas convencionais de codificação de canal.

É importante ressaltar que a técnica proposta no Apêndice F encontra-se em fase de desenvolvimento e muitas questões de ordens teórica e prática ainda estão em aberto. Apesar disso, o autor achou conveniente incluí-la na tese, ainda que na forma de apêndice, para motivar uma discussão acerca do referido tema, o que pode implicar em valiosos desdobramentos para o seu aprofundamento.

Por fim, no Apêndice G são listadas as publicações realizadas durante o período de elaboração da tese e os trabalhos que estão atualmente sendo elaborados.

Capítulo 2

Desempenho do Algoritmo LMS na Identificação de Canais Variantes no Tempo e seu Emprego em Receptores MLSE-PSP

O algoritmo de filtragem adaptativa LMS foi proposto há quase meio século e ainda é largamente utilizado em diversas aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento humano. Isso se deve, principalmente, à sua baixa complexidade computacional em relação a outros algoritmos, característica de suma importância para certas aplicações, como, por exemplo, sistemas de comunicações móveis. Desde a sua proposição inicial, várias contribuições valiosas ao entendimento desse algoritmo vêm sendo apresentadas em livros, periódicos e congressos. Apesar disso, algumas questões referentes ao seu funcionamento, especialmente as relacionadas com seu emprego em ambientes não-estacionários¹ estão ainda em aberto.

Até onde vai o conhecimento do autor, os resultados analíticos para o algoritmo LMS em ambientes não-estacionários são obtidos impondo condições que são geralmente infringidas em aplicações que envolvem canais de comunicação móvel, particularmente quando eles são caracterizados pelo efeito de DVSF. Nas aplicações que se enquadram neste caso é comum realizar a avaliação de desempenho do algoritmo LMS e a escolha

¹Ambientes não-estacionários são caracterizados por determinarem a existência de um ponto de solução ótima global na superfície de busca que é variante no tempo. Isso pode ocorrer em aplicações cujos coeficientes a serem estimados são individualmente modelados por processos estacionários.

de seu passo via simulação computacional.

É bem conhecido que o passo do algoritmo LMS controla as propriedades de convergência, a estabilidade e o nível de *erro quadrático médio* (EQM) em regime permanente do referido algoritmo. Portanto, é de vital importância escolher um valor apropriado para este parâmetro.

Diversos artigos recentes exploram de forma analítica a obtenção do EQM em regime permanente do algoritmo LMS [5, 8–11]. Porém, esses trabalhos modelam a variação temporal dos coeficientes a serem estimados por processos do tipo passeio aleatório ou por processos de Markov de primeira ordem, os quais se distanciam significativamente da modelagem física de canais de comunicações móveis [29].

Neste capítulo três importantes questões são abordadas. Em primeiro lugar, avalia-se o EQM do algoritmo LMS na condição de regime permanente, quando empregado para identificar canais variantes no tempo. Esta avaliação é realizada de forma analítica, admitindo, ao contrário de outras abordagens, hipóteses usualmente adotadas em aplicações na área de comunicações móveis. Em segundo lugar, discute-se a obtenção do passo ótimo no sentido de minimizar os valores de EQM em regime permanente. Para alguns casos aqui tratados, esse parâmetro é obtido analiticamente sem impor aproximações e em outros casos são fornecidas aproximações analíticas para o seu valor. Por fim, avalia-se o desempenho do esquema de recepção PSP-LMS², considerando três procedimentos para estabelecer o valor do passo do algoritmo LMS. No primeiro deles, o passo assume um valor constante em um cenário de comunicações móvel no qual a intensidade de efeito Doppler e a RSR variam em faixas de valores pré-estabelecidas. Nos outros dois procedimentos, o valor desse parâmetro varia de acordo com a intensidade do efeito Doppler e da RSR, segundo duas estratégias. Na primeira delas, essa adaptação resulta do uso do modelo de Markov de primeira ordem para aproximar a evolução temporal da RI do canal de comunicação, e na outra, ela decorre da aproximação do modelo estatístico do canal por um processo AR, de acordo com o procedimento proposto neste trabalho.

Expressões para o EQM em regime permanente são escritas em termos da função de autocorrelação dos coeficientes da RI do canal e de outros parâmetros típicos do sistema, tais como a variância do ruído e o passo do algoritmo LMS. Essas expressões foram particularizadas para alguns modelos de espalhamento Doppler frequentemente

²É importante lembrar que este esquema de recepção é similar ao esquema de recepção BPSP-LMS, exceto pelo fato de se empregar seqüências de treinamento.

adotados na área de comunicações móveis: o espectro de Jakes [30] e a classe de processos autoregressivos de ordem M , (AR(M)) [5].

O restante deste capítulo é organizado da seguinte maneira. Na Seção 2.1 o modelo adotado para a identificação do canal é descrito. Na Seção 2.2 as condições impostas para a análise do algoritmo LMS em regime permanente são apresentadas e discutidas. Ainda nessa seção, algumas expressões gerais para o EQM em regime permanente são deduzidas. Na Seção 2.3, essas expressões são particularizadas para dois casos de grande interesse na área das comunicações móveis. Essa seção contém ainda uma discussão referente à otimização do valor do passo do algoritmo LMS, tendo como critério a minimização do EQM na condição de regime permanente. Na Seção 2.3.2 são apresentados alguns resultados numéricos e as conclusões aparecem na Seção 2.4.

2.1 Modelo do Sistema

O modelo simplificado do sistema em tempo discreto empregado para identificar os coeficientes da RI do canal é ilustrado na Figura 2.1. A observação ruidosa no tempo n é³

$$d_n = \mathbf{h}_n^* \mathbf{s}_n + v_n, \quad (2.1)$$

em que v_n representa o ruído de observação, com variância σ_v^2 e média nula, \mathbf{s}_n é o sinal na entrada do canal, que é dado na representação vetorial por

$$\mathbf{s}_n = (s_n, s_{n-1}, \dots, s_{n-L+1})', \quad (2.2)$$

com s_m representando o símbolo transmitido no m -ésimo intervalo de símbolo, L denotando a quantidade de coeficientes do vetor \mathbf{h}_n , cujos elementos representam os pesos ou coeficientes da RI do canal no instante n . Esses elementos resultam da amostragem da resposta ao impulso conjunta dos filtros de transmissão e recepção e do meio de propagação. Esse vetor é dado por

$$\mathbf{h}_n = (h_{0,n}, h_{1,n}, \dots, h_{L-1,n})'. \quad (2.3)$$

³Comete-se aqui um ligeiro abuso de notação, a bem da simplicidade. Na realidade n é adimensional e expressa um particular intervalo de símbolo. Na verdade, o tempo decorrido do início da transmissão até este intervalo de símbolo é nT segundos.

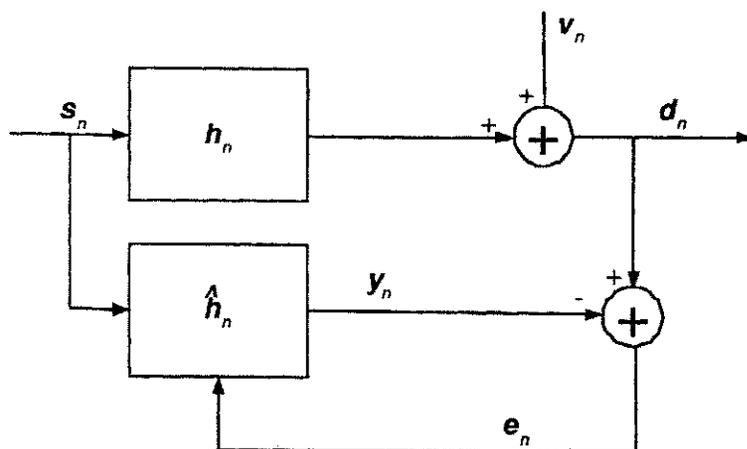


Figura 2.1: Diagrama de blocos simplificado do sistema em tempo discreto empregado para identificar os coeficientes da RI do canal.

Admite-se que os filtros de transmissão e de recepção conjuntamente atendem ao primeiro critério de Nyquist [3] e que a frequência de amostragem no receptor é igual à taxa de símbolos, de modo que os coeficientes da RI do canal em tempo discreto resultam de fato da amostragem dos respectivos coeficientes da resposta ao impulso do meio de propagação.

Nesta tese, a menos que seja explicitamente mencionado o contrário, o cenário de comunicação móvel sob investigação segue o modelo WSS-US (da expressão em inglês *Wide Sense Stationary-Uncorrelated Scattering*), o qual especifica comportamentos estatísticos da RI do canal. De acordo com esse modelo, para um particular valor de retardo o coeficiente da RI do canal é modelado por um processo estocástico estacionário em sentido amplo e os processos que modelam coeficientes distintos são decorrelacionados.

Geralmente o modelo WSS-US é caracterizado por uma função bidimensional conhecida como função espalhamento, que descreve os espalhamentos realizados nos domínios do tempo e frequência, cujas funções “marginais” são denominadas de *perfil de intensidade de atraso* e *perfil de espalhamento Doppler*. Esses perfis permitem classificar o efeito do desvanecimento provocado pelo canal como plano ou seletivo em frequência e lento ou rápido.

Considera-se neste trabalho que os coeficientes da RI do canal são processos gaussianos de média nula (modelo GWSS-US do termo em inglês *Gaussian WSS-US*). O

perfil de espalhamento Doppler, por seu turno, é obtido a partir do modelo clássico de Jakes [29,30]. Assim, a *densidade espectral de potência* (DEP) do processo que modela o i -ésimo coeficiente da RI do canal é dado por⁴

$$G_i(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_{c_i}^2}{\sqrt{1-(f/f_D)^2}}, & \text{se } |f| \leq f_D \\ 0, & \text{se } |f| > f_D \end{cases}, \quad (2.4)$$

em que $\sigma_{c_i}^2$ representa a potência média do processo e f_D é o *desvio Doppler máximo*, aqui também denominado de *deslocamento Doppler máximo* [29]. A função de autocorrelação referente a esse modelo é expressa por

$$R_i(l) = \sigma_{c_i}^2 J_0(2\pi f_D T l), \quad (2.5)$$

na qual $J_0(\cdot)$ é a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero [31].

O perfil de espalhamento Doppler é idêntico a $G_i(f)$, a menos de um fator de normalização. Por outro lado, o perfil de intensidade de atraso do canal é discreto e contém L coeficientes, sendo o espaçamento entre retardos sucessivos igual ao *intervalo de símbolo* (T). Este perfil é dado pelo conjunto $\{\sigma_{c_i}^2, i = 0, \dots, L-1\}$, cujos elementos atendem à condição de canal normalizado, ou seja $\sum_{i=0}^{L-1} \sigma_{c_i}^2 = 1$.

Maiores detalhes sobre o modelo WSS-US e as técnicas de simulação computacional adotadas neste trabalho para reproduzir os seus efeitos são encontrados no Apêndice B e nas referências lá apresentadas.

Nas simulações realizadas nesta tese admite-se um perfeito sincronismo de relógio entre transmissor e receptor, conhecimento da ordem do canal L e de outros parâmetros do sistema de comunicação, como por exemplo a RSR e o produto $f_D T$.

2.2 Desempenho do LMS Para Processos Estacionários em Sentido Amplo

A estimativa de $\mathbf{h}(\cdot)$, aqui denotada por $\hat{\mathbf{h}}(\cdot)$, obtida pelo algoritmo LMS no $(n+1)$ -ésimo intervalo de símbolo é expressa por

$$\hat{\mathbf{h}}_{n+1} = \hat{\mathbf{h}}_n + \mu \mathbf{s}_n e_n^*, \quad (2.6)$$

⁴Neste capítulo, em particular, o perfil de espalhamento Doppler é também obtido a partir de processos autoregressivos de primeira e segunda ordem. Esses processos serão discutidos adiante.

com μ representando o passo do LMS e e_n o erro de estimação do sinal recebido, expresso por

$$e_n = d_n - y_n, \quad (2.7)$$

sendo

$$y_n = \hat{\mathbf{h}}_n^* \mathbf{s}_n. \quad (2.8)$$

Duas figuras de mérito freqüentemente utilizadas para avaliar o desempenho dos algoritmos de filtragem adaptativa são a matriz de covariância \mathbf{K}_n do vetor erro e o EQM, aqui denotado por $D(n)$ [5,8]. Essas figuras de mérito são definidas por:

$$\mathbf{K}_n = E[\boldsymbol{\epsilon}_n \boldsymbol{\epsilon}_n^*] \quad \text{e} \quad D(n) = \text{Tr}[\mathbf{K}_n], \quad (2.9)$$

respectivamente, sendo que

$$\boldsymbol{\epsilon}_n = \mathbf{h}_n - \hat{\mathbf{h}}_n. \quad (2.10)$$

Os elementos do vetor acima, doravante denominado vetor erro, representam os erros produzidos pelo algoritmo LMS na estimação dos coeficientes do canal.

A análise realizada neste capítulo admite que as funções de autocorrelação dos coeficientes da RI do canal são conhecidas. Além dessa suposição, são feitas as seguintes:

- S1 - O ruído em tempo discreto $\{v(\cdot)\}$ resulta da amostragem de um processo estacionário em sentido amplo que possui média nula e densidade espectral de potência constante dentro da faixa espectral de interesse. Além disso, admite-se que este ruído é estatisticamente independente de $\{s(\cdot)\}$ e de $\{\mathbf{h}(\cdot)\}$;
- S2 - Os símbolos $\{s(\cdot)\}$ são equiprováveis e independentes, possuem variância σ_s^2 e pertencem a uma constelação MPSK simétrica. Desta forma, $E[s_n^k s_n^{*l}] = 0$ para quaisquer inteiros k e l com $k + l$ ímpar;
- S3 - Em regime permanente $\{\hat{\mathbf{h}}(\cdot)\}$ é um processo estocástico estatisticamente independente de $\{s(\cdot)\}$.⁵

Após substituição das Equações 2.7, 2.1, 2.8 e 2.10 na Equação 2.6, obtém-se

$$\hat{\mathbf{h}}_{n+1} = \hat{\mathbf{h}}_n + \mu \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^* \boldsymbol{\epsilon}_n + \mu \mathbf{s}_n v_n^*. \quad (2.11)$$

⁵Esta suposição parece razoável diante da suposição S2, a qual garante que os sinais transmitidos por meio do canal a ser estimado são persistentemente excitantes [32, pp. 412-414].

Usando o fato que

$$\epsilon_{n+1} = \mathbf{h}_{n+1} - \hat{\mathbf{h}}_{n+1}, \quad (2.12)$$

e a Equação 2.11, obtém-se

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n^p - \mu \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^* \epsilon_n - \mu \mathbf{s}_n v_n^* \quad (2.13)$$

em que ϵ_n^p é aqui denominado de vetor erro *a priori*, definição por

$$\epsilon_n^p = \mathbf{h}_{n+1} - \hat{\mathbf{h}}_n. \quad (2.14)$$

Considerando as suposições e definições apresentadas acima, mostra-se no Apêndice A que o EQM no tempo $n + 1$ é dado por

$$D(n+1) = (1 - 2\mu\sigma_s^2 + \mu^2 L\sigma_s^4)D(n) + \mu^2 \sigma_v^2 \sigma_s^2 L + 2\mu\sigma_s^2 \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu\sigma_s^2)^l \text{Tr}[\mathbf{R}_h(l) - \mathbf{R}_h(l+1)], \quad (2.15)$$

sendo

$$\mathbf{R}_h(l) = \text{E}[\mathbf{h}_n \mathbf{h}_{n+l}^*]. \quad (2.16)$$

Em regime permanente⁶, tem-se:

$$D(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(n, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(n+1, \mu). \quad (2.17)$$

Usando esta identidade na Equação 2.15, obtém-se

$$D(\mu) = \frac{1}{(2 - \mu L\sigma_s^2)} \left\{ \mu\sigma_v^2 L + 2 \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu\sigma_s^2)^l \text{Tr}[\mathbf{R}_h(l) - \mathbf{R}_h(l+1)] \right\}. \quad (2.18)$$

É razoável admitir que os coeficientes da RI do canal possuem a mesma função de autocorrelação $R(\tau)$, a menos de constantes multiplicativas⁷. Feita esta suposição, tem-se

$$\text{Tr}[\mathbf{R}_h(\tau)] = \sigma_h^2 R(\tau), \quad (2.19)$$

sendo σ_h^2 o ganho de potência do canal (supondo $R(0)=1$, a condição de canal normalizado conduz a $\sigma_h^2 = 1$). Daí, o EQM em regime permanente pode ser escrito como

$$D(\mu) = \frac{1}{(2 - \mu L\sigma_s^2)} \left\{ \mu\sigma_v^2 L + 2\sigma_h^2 \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu\sigma_s^2)^l [R(l) - R(l+1)] \right\}. \quad (2.20)$$

⁶Até este ponto a dependência do EQM com relação a μ foi omitida para simplificar a notação.

⁷Em um cenário de comunicação móvel, esta suposição parece ser razoável uma vez que os mecanismos físicos de geração desses coeficientes são idênticos.

É importante observar que os resultados obtidos acima são genéricos, no que diz respeito à função de autocorrelação dos coeficientes do canal. A seguir, o EQM em regime permanente será particularizado para dois casos de grande interesse na área de comunicações móveis.

2.3 Dois Casos Particulares

Esta seção discute dois modelos de espalhamento Doppler que são freqüentemente adotados no âmbito das comunicações móveis. Nominalmente, são investigados o modelo de Jakes [29] e a classe de processos autoregressivos (AR) [5].

Conforme discutido na Seção 2.1, a função de autocorrelação referente ao modelo de Jakes é expressa por

$$R(l) = J_0(2\pi f_D T l). \quad (2.21)$$

Considerando um equipamento de recepção se deslocando a uma velocidade v e que o comprimento de onda da freqüência portadora é λ , então $f_D = v/\lambda$ [29]. É importante mencionar que o ambiente em torno do equipamento de recepção também pode contribuir para o efeito de espalhamento Doppler, no entanto, em geral, este efeito é desprezível com relação àquele provocado pela velocidade do próprio receptor. Uma figura que ilustra isso com propriedade é apresentada em [30].

Usando a Equação 2.21 na Equação 2.20, $D(\mu)$ fica dada por

$$D(\mu) = \frac{1}{(2 - \mu L \sigma_s^2)} \left\{ \mu \sigma_v^2 L + 2\sigma_h^2 \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu \sigma_s^2)^l [J_0(2\pi f_D T l) - J_0(2\pi f_D T (l+1))] \right\}. \quad (2.22)$$

Para um processo AR de ordem M , aqui denotado por AR(M), após o transitório, tem-se

$$\sum_{k=0}^M a_k^* R(l-k) = 0 \quad l > 0 \quad (2.23)$$

e

$$R(m) = \sum_{k=1}^M c_k p_k^m, \quad (2.24)$$

em que os $\{a_k\}$ são conhecidos como parâmetros do processo AR, os $\{c_k\}$ são constantes

e os $\{p_k\}$ são raízes da equação [5]⁸

$$1 + a_1^* z^{-1} + \dots + a_1^* z^{-M} = 0. \quad (2.25)$$

Substituindo a Equação 2.24 na Equação 2.20 e admitindo que

$$|(1 - \mu\sigma_s^2)p_k| < 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, M, \quad (2.26)$$

então

$$D(\mu) = \frac{1}{(2 - \mu L \sigma_s^2)} \left\{ \mu \sigma_v^2 L + 2 \sigma_h^2 \sum_{k=1}^M \frac{c_k}{1 + d_k \mu \sigma_s^2} \right\}, \quad (2.27)$$

na qual

$$d_k = \frac{p_k}{1 - p_k}. \quad (2.28)$$

É importante considerar que um processo AR é assintoticamente estacionário se $|p_k| < 1$ para todo k [5, pp. 97]. Além disso, em aplicações de comunicações móveis o passo do LMS geralmente assume valores pequenos. Considerando esses dois pontos, a suposição expressa na Inequação 2.26 é razoável, sendo geralmente atendida na prática.

2.3.1 Determinação do Passo Ótimo

A obtenção do passo ótimo do algoritmo LMS é o objeto de estudo desta seção. A análise contempla os dois casos particulares tratados na seção precedente e assume a minimização do EQM em regime permanente como critério de otimização.

No tocante à classe de processos AR, obtém-se explicitamente o passo ótimo para o processo AR(1)⁹ e se discute a sua obtenção para processos AR de ordem par, sendo que ênfase especial é dada ao modelo AR(2)¹⁰. Com relação ao processo de Jakes, obtém-se uma aproximação analítica do passo ótimo a partir dos resultados obtidos para o processo AR(2).

⁸Um processo AR(M) pode ser gerado aplicando ruído branco na entrada de um filtro digital cuja função de transferência possui apenas pólos dados pelos $\{p_k\}$. Por essa razão, doravante essas raízes serão denominadas de pólos.

⁹Em outros trabalhos, nos quais se discute a obtenção do passo ótimo para ambientes não-estacionários, admite-se geralmente o modelo AR(1) e o passo ótimo é obtido de forma aproximada.

¹⁰Em receptores adaptativos para canais de comunicações móveis, os modelos AR mais empregados são os de primeira e segunda ordem [33–36], daí ter sido dado um tratamento especial para esses processos.

Otimização do Passo Para o Processo AR(1)

De acordo com a Equação 2.27 o EQM em regime permanente produzido pelo algoritmo LMS na identificação de processos AR(1) é dado por

$$D(\mu) = \frac{1}{(2 - \mu L \sigma_s^2)} \left\{ \mu \sigma_v^2 L + \frac{2\sigma_h^2}{1 + d_1 \mu \sigma_s^2} \right\}. \quad (2.29)$$

Calculando a derivada parcial da Equação 2.29 com relação a μ e igualando o resultado a zero, o passo ótimo pode ser obtido fazendo

$$\mu_* = \min(D(\mu_1), D(\mu_2)), \quad (2.30)$$

em que μ_1 e μ_2 são raízes do polinômio

$$A\mu^2 + B\mu + C = 0, \quad (2.31)$$

sendo:

$$\begin{aligned} A &= \sigma_v^2 \sigma_s^4 p_1 L; \\ B &= 2p_1 L \sigma_s^2 \sigma_h^2 (1 + \sigma_s^2) \quad \text{e} \\ C &= \sigma_v^2 L + \sigma_s^2 \sigma_h^2 (L - 2p_1). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Otimização do Passo Para o Processo AR(2)

Considerando processos AR(2) com pólos complexos conjugados, a Equação 2.27 pode ser reescrita como segue

$$D(\mu) = \frac{1}{(2 - \mu L \sigma_s^2)} \left\{ \mu \sigma_v^2 L + 2\sigma_h^2 \frac{1 + \alpha_1 \mu}{1 + \alpha_2 + \alpha_3 \mu^2} \right\}, \quad (2.33)$$

em que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (c_1 d_1^* + d_1 c_1^*) \sigma_s^2; \\ \alpha_2 &= (d_1 + d_1^*) \sigma_s^2 \quad \text{e} \\ \alpha_3 &= |d_1|^2 \sigma_s^4. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nesse caso, o passo ótimo pode ser obtido de

$$\mu_* = \min(D(\mu_1), D(\mu_2), D(\mu_3), D(\mu_4)). \quad (2.35)$$

sendo os $\{\mu_i\}$ raízes do seguinte polinômio

$$A_1\mu^4 + A_2\mu^3 + A_3\mu^2 + A_4\mu + A_5 = 0, \quad (2.36)$$

cujos coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \sigma_v^2 L \alpha_3^2; \\ A_2 &= 2\sigma_v^2 L \alpha_2 \alpha_3 - 4\alpha_1 \alpha_3 L \sigma_s^2 \sigma_h^2; \\ A_3 &= \sigma_v^2 L (\alpha_2^2 + 2\alpha_3) + 3\sigma_h^2 (2\alpha_1 \alpha_3 - L \sigma_s^2 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3)); \\ A_4 &= 2\sigma_v^2 L \alpha_2 + 2\sigma_h^2 (2\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 L \sigma_s^2 - 2\alpha_3 + L \sigma_s^2 \alpha_2); \\ A_5 &= \sigma_v^2 L + \sigma_h^2 (2\alpha_1 - 2\alpha_2 + L \sigma_s^2). \end{aligned}$$

Este procedimento pode ser estendido para outros processos AR de ordem par ($2l$ para l inteiro positivo). Nesse caso, o passo ótimo pode ser obtido a partir dos zeros de um polinômio de grau igual a $4l$.

É importante mencionar que a expressão de EQM em regime permanente possui apenas um ponto de mínimo, dentro da faixa de valores que garante a convergência do algoritmo [5, 8]. Em decorrência disso, as minimizações indicadas nas Equações 2.30 e 2.35 não precisam, de fato, ser realizadas, elas foram utilizadas apenas simbolicamente. Dentre as raízes encontradas apenas o passo ótimo possui valor real e positivo.

Aproximação Analítica do Passo Ótimo Para o Modelo de Jakes

É muito difícil obter analiticamente o passo ótimo para o modelo de Jakes a partir da Equação 2.22. No entanto, o modelo de Jakes pode ser aproximado por um processo AR e o procedimento discutido acima pode ser empregado para obter o passo ótimo do modelo aproximado. Admitindo que existe um bom ajuste entre os modelos aproximado e verdadeiro, pelo menos na faixa de valores próximos da posição do passo ótimo, esse procedimento pode representar uma abordagem interessante para obter uma boa aproximação analítica para o passo ótimo do modelo de Jakes.

Resultados apresentados no Capítulo 3 mostram que para fins de uso em receptores adaptativos uma boa aproximação analítica, no sentido de minimizar a variância do erro de predição do modelo de Jakes pode ser obtida com o processo AR(2). Isto motivou o emprego deste modelo para determinar a aproximação analítica acima delineada.

Usando a minimização da variância do erro de predição para estabelecer o ajuste entre os modelos envolvidos, o vetor de parâmetros autoregressivos \mathbf{a} do modelo

aproximado pode ser obtido a partir da equação de Yule-Walker da seguinte maneira [5, Capítulo 6]

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{r}_J(1), \quad (2.37)$$

em que \mathbf{R}_J e $\mathbf{r}_J(m)$ são especificados pela função de autocorrelação do processo estocástico a ser aproximado. No caso do modelo de Jakes

$$\mathbf{R}_J = \begin{pmatrix} 1 & J_0(\tau) & \cdots & J_0(\tau(M-1)) \\ J_0(\tau) & 1 & \cdots & J_0(\tau(M-2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_0(\tau(M-1)) & \cdots & J_0(\tau) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

e

$$\mathbf{r}_J(m) = (J_0(\tau m) \cdots J_0(\tau(m+M)))' \quad (2.39)$$

com $\tau = 2\pi f_D T$.

Os pólos $\{p_k\}$ podem ser obtidos a partir dos parâmetros autoregressivos, dados pela Equação 2.37, resolvendo a Equação 2.25 e as constantes da Equação 2.24, que por conveniência aqui foram agrupadas no vetor $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_M)'$, podem ser determinadas fazendo

$$\mathbf{c} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{r}_J(0), \quad (2.40)$$

na qual

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1^{M-1} & p_2^{M-1} & \cdots & p_M^{M-1} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Com os pólos e as constantes obtidas acima, os coeficientes do polinômio da Equação 2.36 ficam completamente especificados e o passo ótimo referente ao modelo aproximado pode ser determinado.

2.3.2 Resultados Numéricos

Nesta seção três conjuntos de resultados são apresentados e discutidos. Os dois primeiros procuram validar, via simulação computacional, os resultados analíticos apresentados na seção anterior, enquanto que o terceiro contempla a avaliação do efeito da

otimização do passo no desempenho do esquema de recepção PSP-LMS. Neste último caso três mecanismos de atribuição do passo são investigados: passo constante, passo otimizado, de acordo com o procedimento proposto na seção anterior, e passo obtido a partir da aproximação do modelo estatístico do canal pelo processo de Markov de primeira ordem. No caso do passo constante, o seu valor é determinado *a priori* no sentido de garantir um compromisso de bom desempenho, considerando uma faixa de valores da RSR especificada adiante, e diferentes valores do deslocamento Doppler máximo.

Todos os resultados que se seguem foram produzidos considerando modulação QPSK, $L = 3$ e os dois modelos de espalhamento Doppler discutidos na seção anterior.

Foram também realizadas simulações de canais que possuíam RI com outras quantidades de raios, cujos resultados não são apresentados aqui por limitação de espaço. Na essência, esses resultados estão em conformidade com os apresentados a seguir, principalmente no que se refere ao ajuste entre resultados analíticos e de simulação computacional.

Curvas de EQM em Regime Permanente

Na Figura 2.2 são mostradas curvas de EQM em regime permanente obtidas analiticamente considerando $f_D T = 0,005$ e RSR=20 dB, e que se diferenciam pela quantidade de termos que são utilizados no cálculo do somatório presente no lado direito da Equação 2.22. Como pode ser verificado, para pequenos valores de passo a quantidade de termos considerada no cálculo do EQM afeta sensivelmente a precisão dos resultados. Para a intensidade de efeito Doppler em questão ($f_D T = 0,005$), resultados confiáveis são obtidos com pelo menos cinqüenta termos. Outros resultados, não incluídos na tese, indicam que a quantidade desses termos deve aumentar para garantir boa precisão à medida que a intensidade do efeito Doppler é reduzida. Diante disso, os resultados analíticos para o processo de Jakes doravante apresentados foram obtidos considerando 300 termos, valor que, conforme será mostrado, confere boa precisão aos resultados analíticos mesmo considerando desvanecimento lento.

Nas Figuras 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 são apresentadas curvas de EQM em regime permanente em função do passo do LMS, obtidas analiticamente, e também alguns valores de EQM (indicados por círculos), que foram obtidos por meio de simulação computacional. Os resultados apresentados em cada uma dessas figuras foram obtidos com valores de RSR iguais a 10, 20 e 30 dB. Em particular, os resultados de simulação foram obtidos considerando 500 realizações estatisticamente independentes.

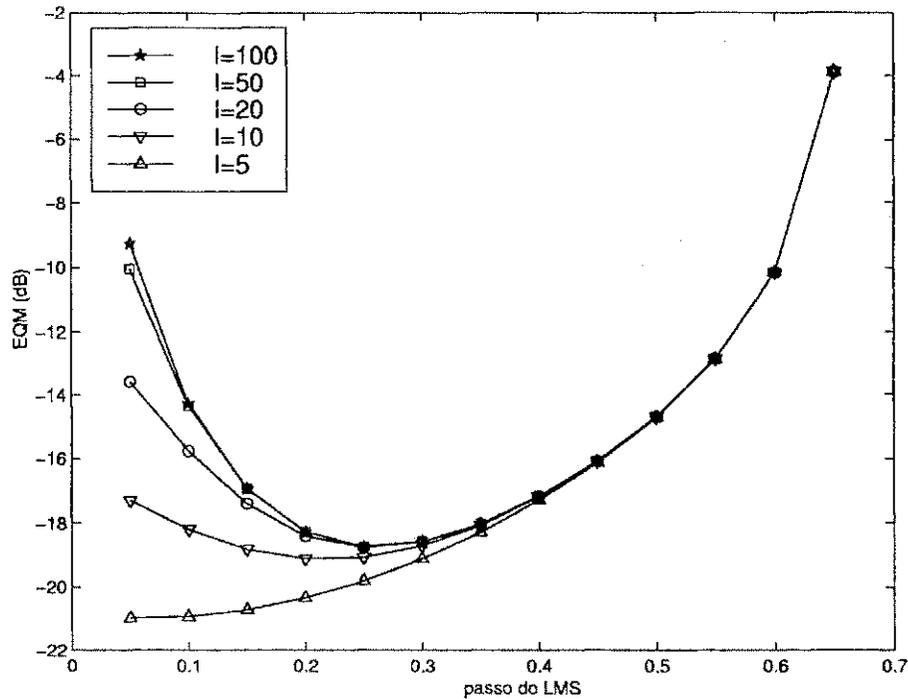


Figura 2.2: Curvas de EQM em função do passo do LMS para $f_D T = 0,005$ e diferentes quantidades de termos no cálculo do EQM em regime permanente.

As Figuras 2.3 e 2.4 se referem aos processos AR(1) e AR(2), respectivamente. O parâmetro de regressão do processo AR(1) avaliado é $a_1 = -0,99$ e para o processo AR(2) os parâmetros são $a_1 = -1,9999$ e $a_2 = 0,99999$.¹¹ As Figuras 2.5 e 2.6 apresentam curvas de EQM para o processo de Jakes com $f_D T = 0,001$ e $f_D T = 0,005$, respectivamente.

Pode-se observar nessas quatro figuras um bom ajuste entre os resultados analíticos e os obtidos por simulação computacional, indicando a validade das análises desenvolvidas e a pertinência das suposições adotadas.

Otimização do Passo do Algoritmo LMS

Nesta sub-seção são apresentados resultados numéricos relacionados com a questão do passo ótimo do algoritmo LMS, no sentido de minimizar o EQM em regime permanente. Os resultados da Figura 2.7 foram obtidos considerando o processo AR(2) e os das Figuras 2.8 e 2.9 foram gerados para o processo de Jakes com $f_D T$ igual a 0,001 e 0,01,

¹¹Pode-se verificar que para esses parâmetros o processo AR(2) possui pólos complexos conjugados.

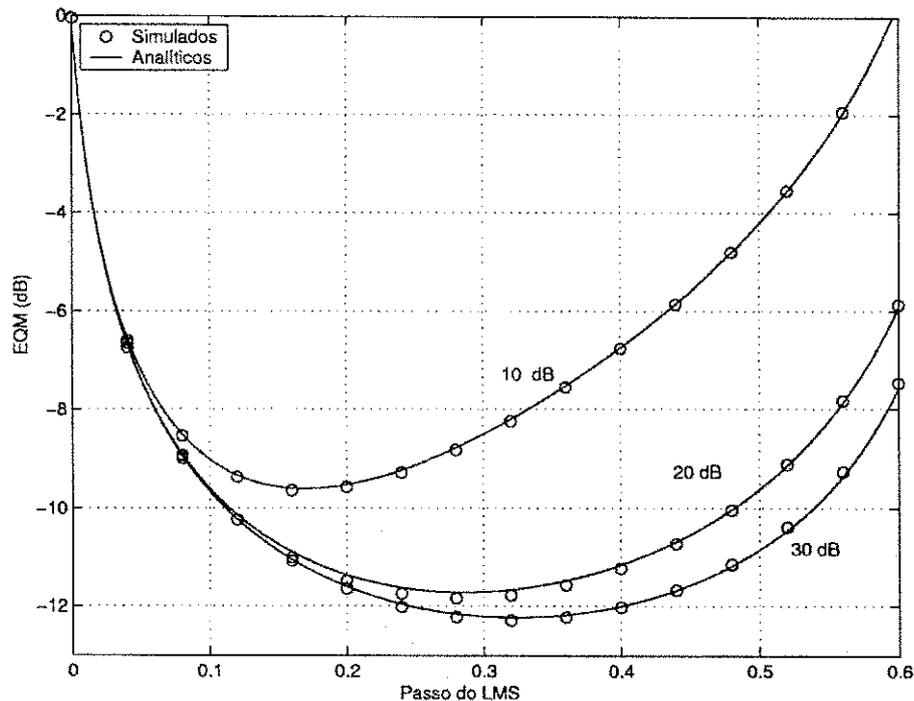


Figura 2.3: Curvas de EQM em regime permanente em função do valor do passo do algoritmo LMS para o processo AR(1), obtidas por simulação e análise, para RSR de 10, 20 e 30 dB.

respectivamente.

É importante lembrar que o processo AR(2) investigado possui pólos complexos conjugados, portanto os valores destacados nas curvas da Figura 2.7 representam valores mínimos de erro quadrático médio na condição de regime estacionário, obtidos resolvendo a Equação 2.36.

Por outro lado, no caso do modelo de Jakes, os valores de EQM destacados nas Figuras 2.8 e 2.9 foram obtidos de acordo com o procedimento de aproximação analítica proposto neste capítulo. Ou seja, o modelo de Jakes foi ajustado por um processo AR(2) com pólos complexos conjugados, minimizando a variância do erro de predição, e em seguida o passo ótimo para o modelo aproximado foi determinado. Os resultados numéricos apresentados nas Figuras 2.8 e 2.9 indicam que este procedimento fornece uma aproximação muito boa para os valores de passo ótimo.

Vale lembrar que o valor do passo exerce forte influência no desempenho do algoritmo LMS. Para se ter uma medida desta influência em termos do EQM em regime

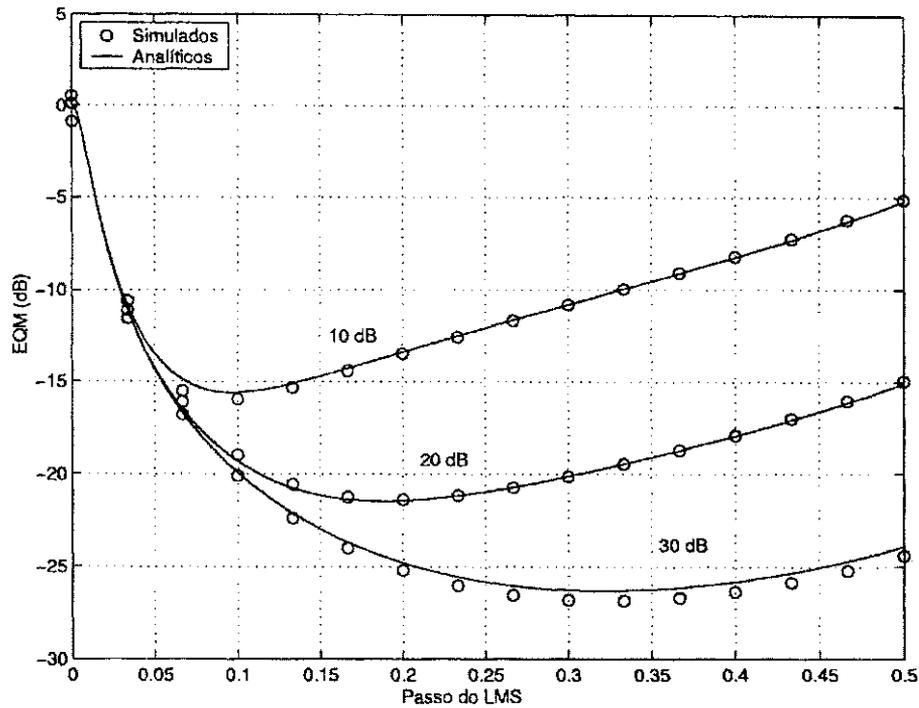


Figura 2.4: Curvas de EQM em regime permanente em função do valor do passo do algoritmo LMS para o processo AR(2), obtidos por simulação e análise, para RSR de 10, 20 e 30 dB.

permanente, considere-se o caso em que $f_D T = 0,001$ e $RSR=20$ dB, no qual o valor do passo ótimo é 0,125 (Figura 2.8). Se este valor de passo for utilizado em um cenário de comunicação móvel com $f_D T = 0,01$, ocorrerá uma degradação no EQM de aproximadamente 6 dB, em relação ao nível que seria atingido caso fosse adotado o valor ótimo do passo (Figura 2.9). Comportamentos similares podem ser verificados para outras situações.

É importante notar que uma estimativa de f_D pode ser obtida a partir da uma estimativa da velocidade do equipamento de recepção, na situação usual em que o transmissor está fixo. Admitindo-se que o efeito Doppler do canal é bem aproximado pelo espectro de Jakes, e que também se dispõe de uma estimativa da variância do ruído, o procedimento proposto pode ser usado para estimar e acompanhar o valor do passo ótimo em tempo real. Neste contexto é importante ainda considerar que os receptores de diversas aplicações atuais e futuras na área de comunicações móveis dispõem, ou prevêem a disponibilização, de medidas de velocidade em tempo real, de

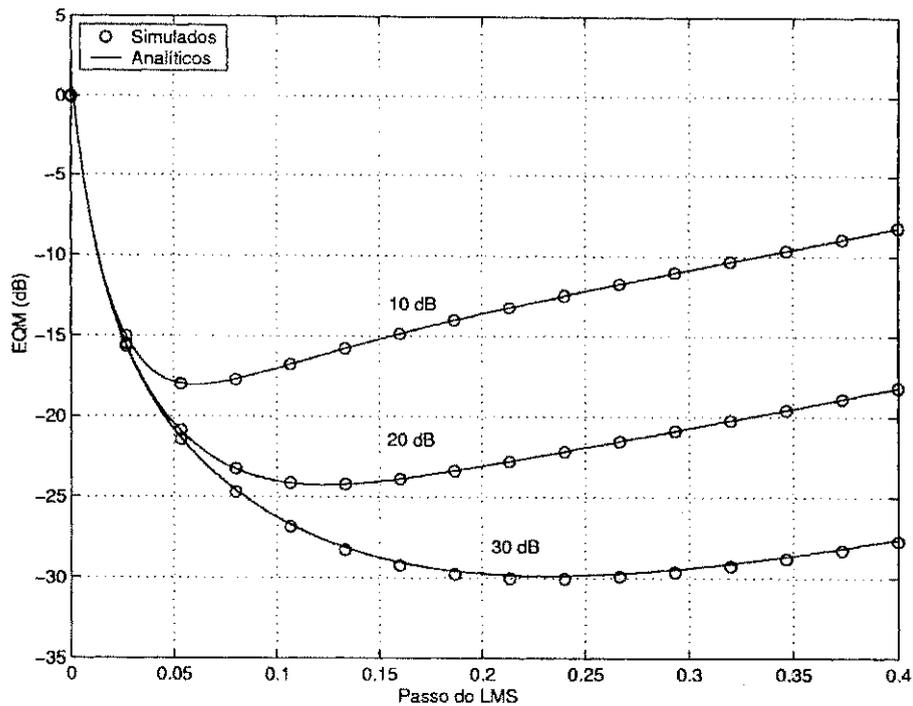


Figura 2.5: Curvas de EQM em regime permanente em função do valor do passo do algoritmo LMS para o processo de Jakes com $f_D T = 0,001$, obtidas por simulação e análise, para RSR de 10, 20 e 30 dB.

modo que não haveria necessidade de processamento adicional para obtê-las.

Explicitando a Equação 2.38 para uma matriz de autocorrelação de tamanho dois, pode-se verificar que os parâmetros regressivos podem ser determinados com apenas três somas e quatro multiplicações reais. Os coeficientes da Equação 2.40 podem ser determinados com complexidade similar. Diante disso, vê-se que a complexidade computacional do procedimento proposto é dominada pelas complexidades de determinação dos zeros dos polinômios de segundo e quarto graus que são apresentados nas Equações 2.25 e 2.36. Vários algoritmos eficientes para obter as raízes de um polinômio são descritos na literatura técnica [37].

O procedimento proposto para determinação do passo não é recursivo. No entanto, como nas aplicações usuais o parâmetro f_D permanece praticamente constante no intervalo de tempo referente ao recebimento de um bloco de símbolos, a determinação do passo só seria necessária no início de cada bloco.

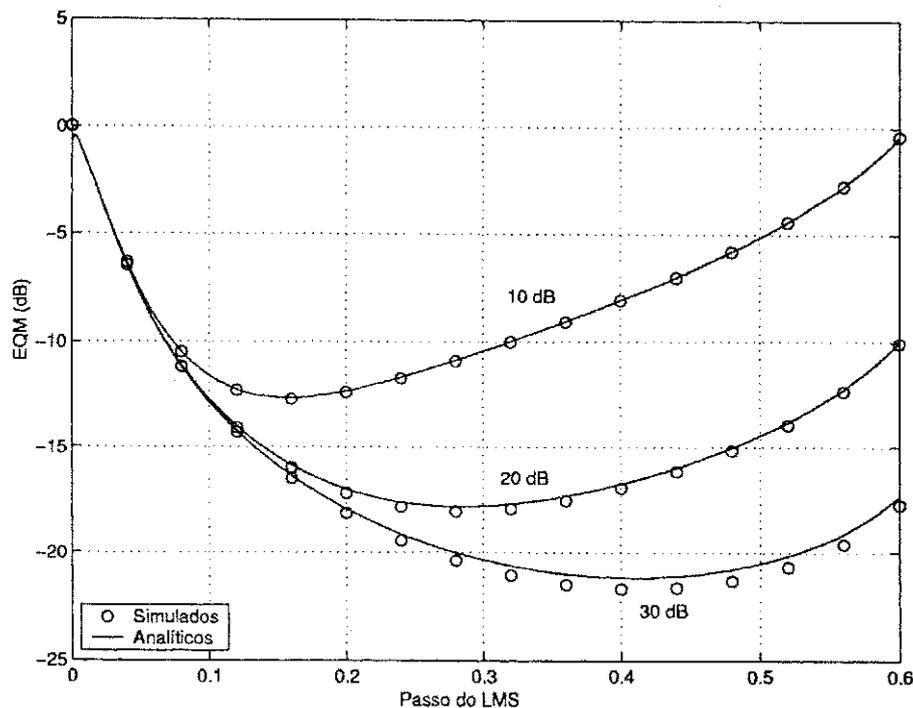


Figura 2.6: Curvas de EQM em regime permanente em função do valor do passo do algoritmo LMS para o processo de Jakes com $f_D T = 0,005$, obtidas por simulação e análise, para RSR de 10, 20 e 30 dB.

Taxa de Erro de Bit Para o Esquema de Recepção PSP-LMS

Nesta seção avalia-se o efeito do ajuste do passo sobre o desempenho do esquema de recepção PSP-LMS cujo diagrama de blocos é mostrado na Figura 2.10. Como pode ser observado neste diagrama, as seqüências sobreviventes são escolhidas pelo algoritmo de Viterbi.

As simulações foram realizadas considerando espectro Doppler dado pelo modelo de Jakes, com $f_D T$ assumindo valores nas faixas $[0,002 \ 0,005]$ e $[0,002 \ 0,007]$, conforme será discutido posteriormente. Além disso, considerou-se a transmissão de blocos de 88 símbolos QPSK, sendo que os primeiros 24 são utilizados para treinamento. Sendo assim, o sistema proposto opera com uma vazão de aproximadamente 72,3%. O uso deste baixo valor de vazão se justifica em razão dos elevados valores de efeito Doppler que são considerados nas simulações.

Nas simulações realizadas, f_D é modelado por uma variável aleatória uniforme que

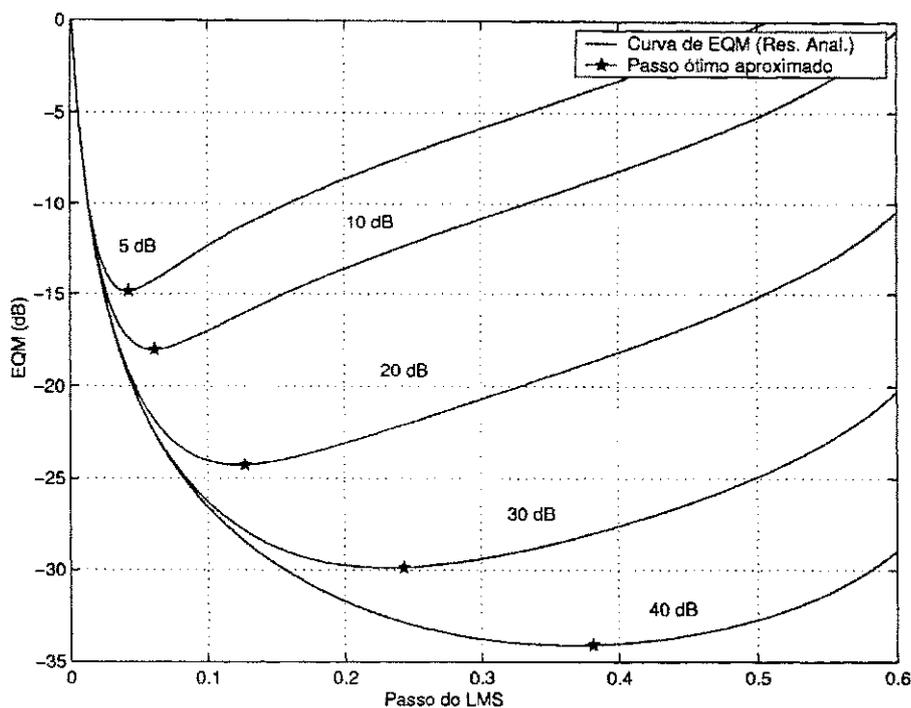


Figura 2.8: Curvas de EQM em regime permanente obtidas analiticamente para o modelo de Jakes com $f_D T = 0,001$. Em destaque os valores de EQM para os passos produzidos pelo procedimento de aproximação proposto.

partir do levantamento prévio de curvas de EQM em regime permanente para toda a faixa de valores de RSR considerada e para os valores assumidos pelo parâmetro $f_D T$. Nestas condições, o valor 0,2 foi obtido como melhor solução de compromisso. Por fim, obteve-se o valor do passo aproximando o modelo do canal de comunicação por processos de Markov de primeira ordem. Este procedimento é detalhado a seguir.

Admitindo que a evolução temporal do canal de comunicação é estatisticamente descrita por um processo de Markov de primeira ordem¹², tem-se que

$$\mathbf{h}(k) = \lambda_h \mathbf{h}(k-1) + \mathbf{n}_h(k), \quad (2.42)$$

sendo que $\{\mathbf{n}_h(\cdot)\}$ é um processo gaussiano branco de média nula e variância σ_h^2 . Além disso, $\lambda_h < 1$.

¹²Cabe notar que equação que descreve a geração desse processo se assemelha a de um processo AR(1). As duas denominações são pertinentes e poderia ter sido adotada apenas uma. No entanto, para destacar bem os resultados aqui obtidos para o processo AR(1) com aqueles encontrados facilmente na literatura para este processo, optou-se por usar as duas notações.

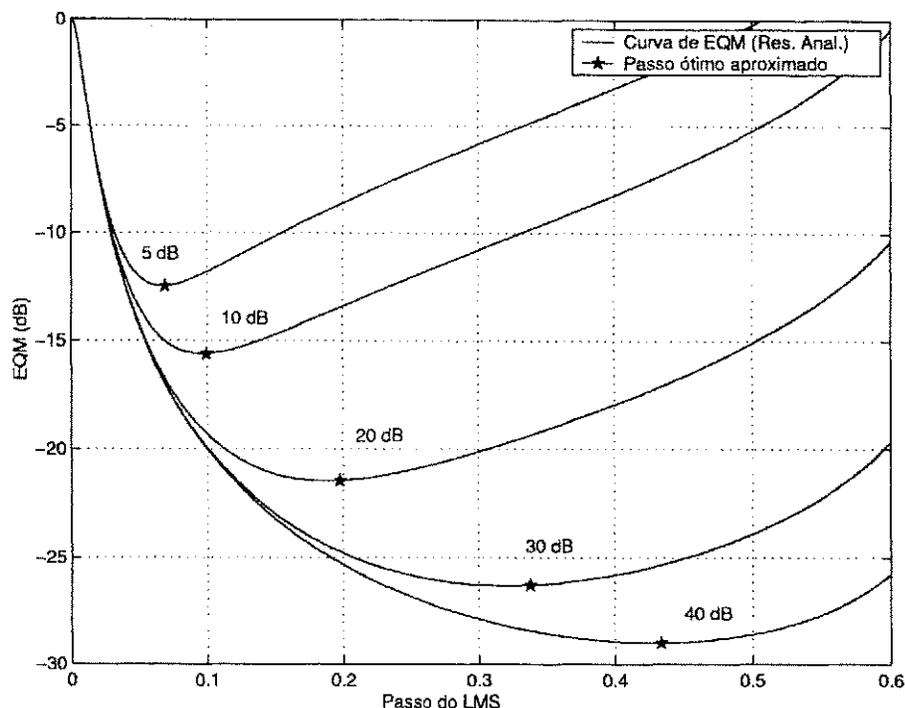


Figura 2.7: Curvas de EQM em regime permanente obtidas analiticamente para o processo AR(2). Em destaque os valores de EQM para o passo ótimo.

assume valores dentro dos intervalos previamente especificados. No início de cada bloco, o valor de f_D é sorteado e mantido constante durante a transmissão de todo o bloco. Este modelo é bastante razoável, pois o deslocamento Doppler máximo fica determinado pela velocidade do receptor, que é aleatória e permanece praticamente inalterada no intervalo de tempo correspondente à transmissão de um bloco de símbolos.

Os resultados de simulação computacional apresentados nesta sub-seção foram obtidos considerando a transmissão de 10.000 blocos e uma RSR na faixa de 10 até 40 dB com incrementos de 2 dB.

Na implementação do algoritmo LMS três formas de atribuição do passo foram testadas. Em primeiro lugar, considerando que a velocidade do equipamento de recepção e a variância do ruído de observação são conhecidas, obteve-se uma aproximação analítica do passo ótimo para cada bloco de informação, usando o procedimento descrito na seção anterior. Em segundo lugar, usou-se o procedimento convencional de fixar o referido parâmetro *a priori* com base numa solução de compromisso sobre os cenários de transmissão em que será empregado. Este valor de passo foi determinado por simulação, a

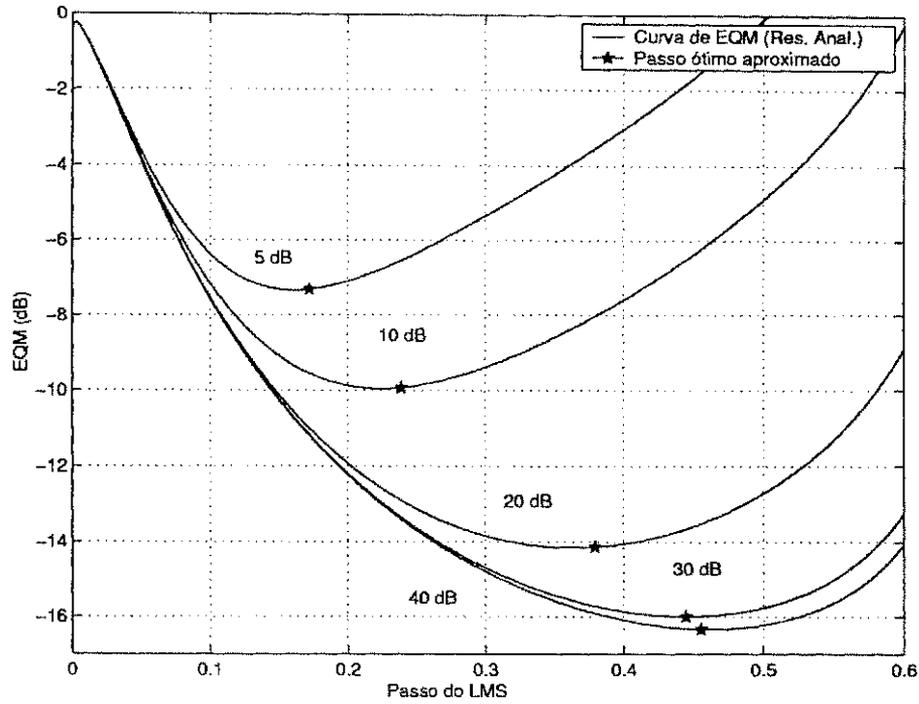


Figura 2.9: Curvas de EQM em regime permanente obtidas analiticamente para o modelo de Jakes com $f_D T = 0,01$. Em destaque os valores de EQM para os passos produzidos pelo procedimento de aproximação proposto.

Usando este modelo e considerando a transmissão de símbolos equiprováveis e independentes, com média nula e variância σ_s^2 , o EQM em regime estacionário do algoritmo LMS é [5, 9–11]

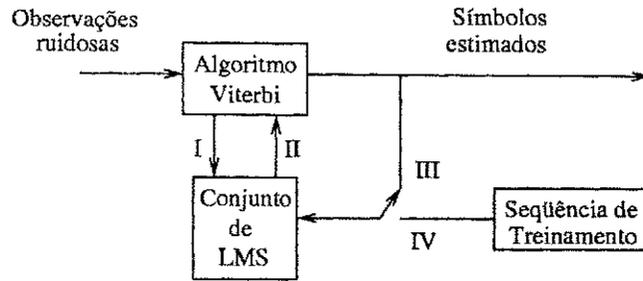
$$D(\mu) \approx \frac{L\mu\sigma_v^2\sigma_s^2}{1 - L\mu\sigma_s^2} + \frac{L\sigma_h^2}{4\mu(1 - \mu\sigma_s^2)}. \quad (2.43)$$

Para μ assumindo valores pequenos, a equação acima pode ser aproximada como segue

$$D(\mu) \approx \mu\sigma_v^2\sigma_s^2L + \frac{\sigma_h^2L}{4\mu}. \quad (2.44)$$

Calculando a derivada parcial com respeito à μ e igualando o resultado a zero, o valor ótimo de μ , aqui denotado por μ_* , fica dado por

$$\mu_* \approx \sqrt{\frac{\sigma_h^2}{4\sigma_v^2\sigma_s^2}}. \quad (2.45)$$



Legenda: I – Seqüências sobreviventes
 II – RI estimada
 III – Modo de operação
 IV – Modo de treinamento

Figura 2.10: Diagrama de blocos simplificado de um esquema de recepção PSP-LMS que emprega AV para obter as seqüências sobreviventes.

Os valores de σ_h^2 e de λ_h usados nas simulações foram obtidos aproximando o modelo de Jakes pelo processo de Markov de primeira ordem no sentido de minimizar a variância do erro de predição.

Na Figura 2.11 são mostradas curvas de EQM em regime permanente em função da RSR, variando-a de 10 à 40 dB, com incrementos de 2 dB. Para todos os valores de RSR considerados, obteve-se melhores resultados com a técnica de atribuição do passo proposta neste trabalho. Por outro lado, o esquema que adota o valor de passo estabelecido a partir do modelo de Markov de primeira ordem foi o que apresentou os piores resultados, revelando inclusive problemas de convergência para RSR maior que vinte e seis decibéis. Nessa faixa de valores, foi observado que os valores do passo eram muito elevados, o que invalida a aproximação realizada (Equação 2.44) para obter o valor ótimo do passo. De qualquer forma, os resultados mostrados na Figura 2.11 indicam que o modelo de Markov de primeira ordem é inadequado para descrever a evolução temporal do canal com espectro de Jakes. Por esta razão, os resultados que se seguem foram obtidos considerando apenas os outros dois esquemas de ajuste do passo aqui discutidos (proposto e convencional).

Nas Figuras 2.12 e 2.13 são mostradas as curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os esquemas proposto e convencional, considerando valores de RSR iguais a 20 e 30 dB. Na Figura 2.12 os resultados foram obtidos com $f_D T \in [0,002 \ 0,005]$, ao passo que na Figura 2.13 os resultados foram obtidos para $f_D T \in [0,002 \ 0,007]$.

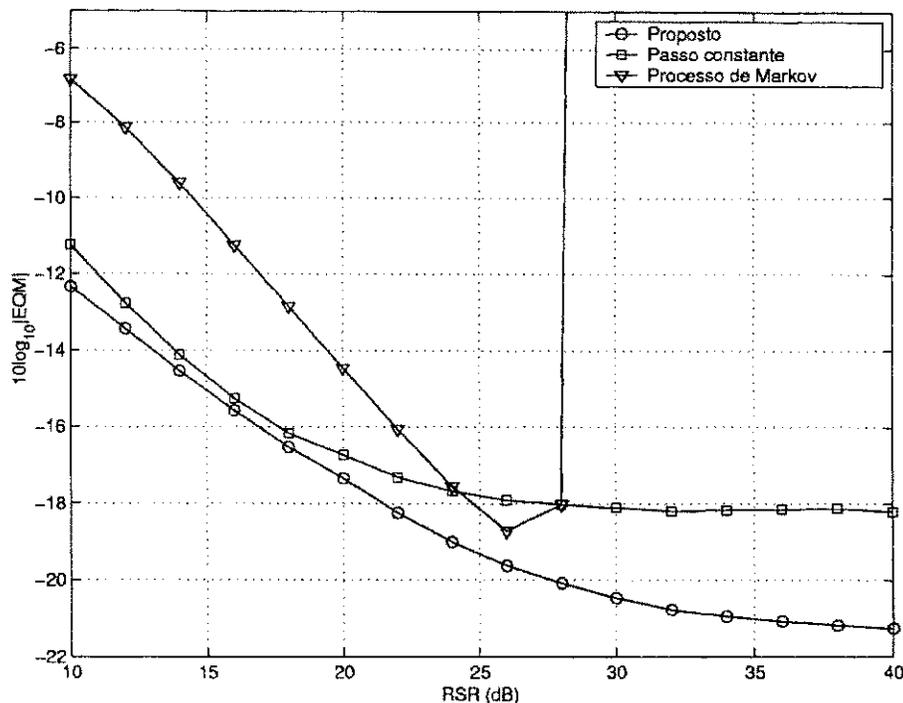


Figura 2.11: Curvas de EQM em função da RSR, para $f_D T \in [0,002 \ 0,007]$, obtidas com o procedimento proposto, com valor de passo constante e com o uso da aproximação do modelo do canal por processo de Markov de primeira ordem.

Em todos os casos, verifica-se uma rápida convergência do algoritmo, sendo atingido o valor mínimo de EQM ainda dentro do período de treinamento (24 símbolos). Durante a fase de estimação dos símbolos transmitidos há uma tendência de perda de acompanhamento, face a rápida evolução temporal do canal e os eventuais erros de detecção que prejudicam a atualização da estimativa da RI do canal.

Apesar da tendência de perda de acompanhamento, as curvas de aprendizagem obtidas utilizando o procedimento proposto na Seção 2.3 para a otimização do passo são bem melhores do que as obtidas com a forma convencional de atribuição do valor desse parâmetro. Esse melhor comportamento nas curvas de aprendizagem produziu, como pode ser observado nas Figuras 2.14 e 2.15, reduções significativas na taxa de erro de bit do receptor.

Com relação às Figuras 2.12, 2.13, 2.14 e 2.15, cabe notar que, de maneira geral, o desempenho de esquemas de recepção adaptativos que operam em canais com memória são severamente degradados em baixa RSR. Isso se deve principalmente ao efeito provo-

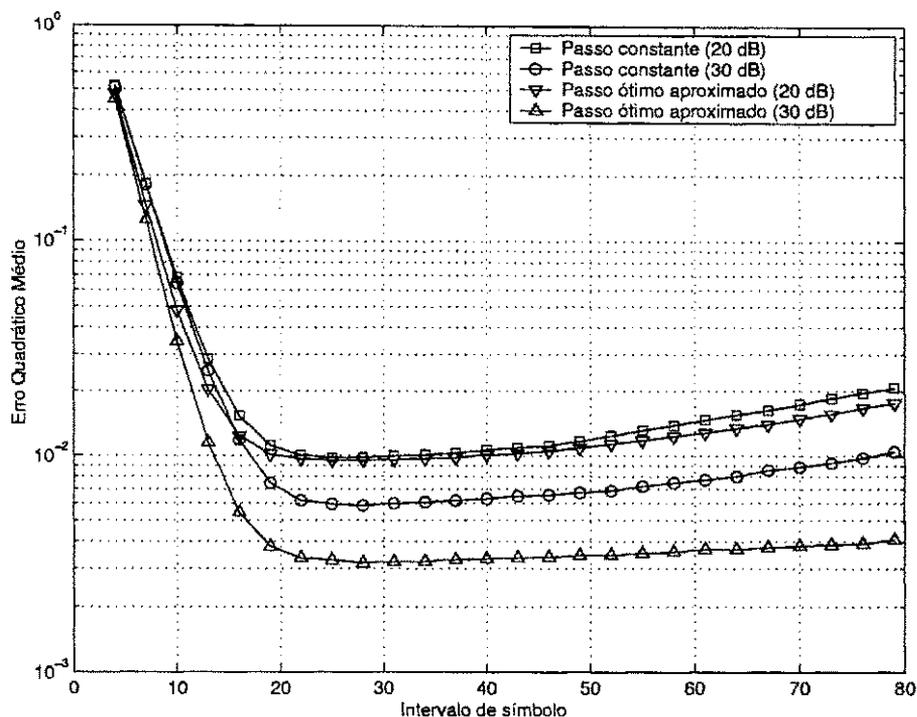


Figura 2.12: Curvas de aprendizagem para o esquema de recepção PSP-LMS, com passo constante e ajustado de acordo com o procedimento proposto, para $f_D T \in [0,002 \ 0,005]$.

cado pelas detecções erradas que prejudicam a atualização da(s) estimativa(s) da RI do canal ou de parâmetros a ela associados, o que, por seu turno, compromete as detecções subsequentes. Esse círculo vicioso pode levar à perda definitiva do acompanhamento do canal. Para valores elevados da RSR, por outro lado, os erros ocorrem em menor quantidade e o algoritmo adaptativo, no caso em questão o LMS, pode tolerá-los sem desencadear a perda de acompanhamento do canal.

Além disso, é válido ainda observar que a otimização do passo foi realizada considerando a transmissão de símbolos conhecidos, condição que se dá de fato apenas no período de treinamento e pode até ser bem aproximada quando o receptor opera com RSR elevada, mas certamente não se verifica caso a RSR assumira valores baixos.

Esses dois aspectos podem justificar a obtenção de características de desempenho similares nas baixas RSR para as duas estratégias de escolha do passo do LMS (veja Figuras 2.12, 2.13, 2.14 e 2.15), bem como a boa vantagem de desempenho obtida com o procedimento de otimização do passo proposto, para valores de RSR acima de 16 dB.

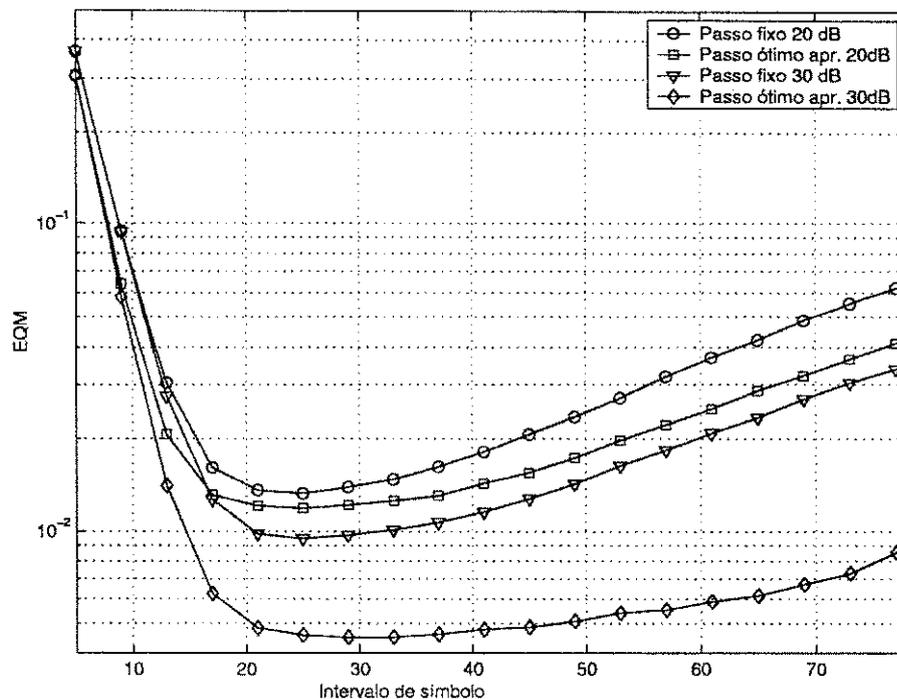


Figura 2.13: Curvas de aprendizagem para o esquema de recepção PSP-LMS, com passo constante e ajustado de acordo com o procedimento proposto, para $f_D T \in [0,002 \ 0,007]$.

É importante ainda mencionar que os atuais sistemas de comunicação móveis são em geral projetados para operar em níveis elevados de RSR, situação na qual o procedimento aqui proposto permite melhorar significativamente o desempenho do algoritmo LMS e, por conseguinte, o do esquema de recepção.

2.4 Considerações Finais

O desempenho do algoritmo de filtragem adaptativa LMS foi avaliado no contexto da identificação de canais variantes no tempo. Ao contrário de outras abordagens analíticas enfocando esse assunto [5, 8–11], que geralmente lidam com processos do tipo passeio aleatório ou de Markov de primeira ordem para caracterizar a dinâmica de evolução temporal dos coeficientes a serem estimados, a formulação aqui adotada assume que tais coeficientes são modelados por processos estacionários em sentido amplo com função de autocorrelação conhecida.

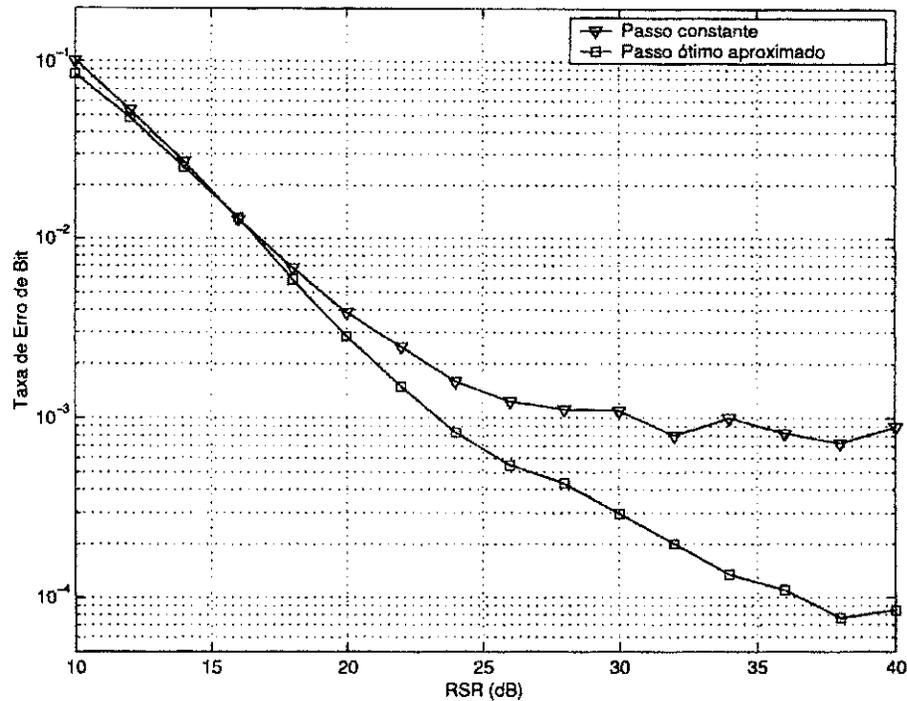


Figura 2.14: Taxa de erro de bit em função da RSR para o esquema de recepção PSP-LMS, considerando $f_D T \in [0,002 \ 0,005]$.

Expressões para o EQM em regime permanente foram obtidas em termos da função de autocorrelação dos coeficientes da resposta ao impulso do canal de comunicação, as quais foram particularizadas para duas formas de função de autocorrelação de grande interesse em sistemas de comunicação: o modelo de Jakes e processos AR. Uma comparação entre resultados analíticos e simulados computacionalmente foi realizada, verificando-se um bom ajuste entre os mesmos, o que indica a validade das deduções desenvolvidas e, principalmente, das suposições efetuadas.

A otimização do passo ótimo no sentido de minimizar o EQM em regime permanente também foi abordada neste trabalho. O cálculo exato para o passo foi obtido para os processos AR(1) e AR(2) com pólos complexos conjugados. Além disso, foi proposto um procedimento para obter os passos ótimos para processos AR de ordens maiores, atendidas algumas restrições. Desenvolveu-se ainda um procedimento de aproximação para obter o passo ótimo com modelos de Jakes. Resultados numéricos incluídos no trabalho mostram a validade da aproximação proposta.

Por fim, foi avaliado o desempenho do esquema de recepção MLSE-PSP que empre-

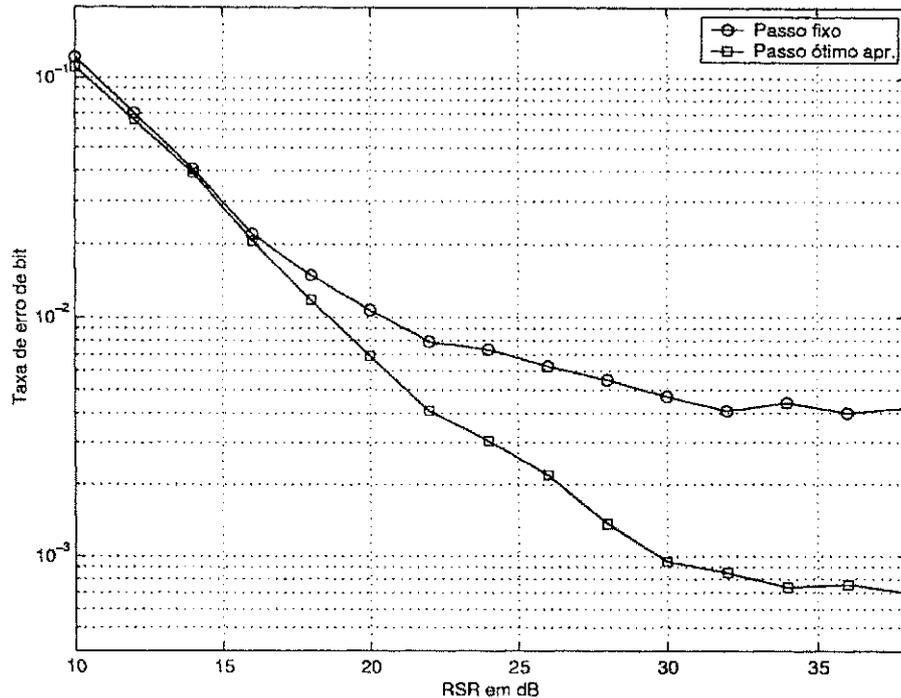


Figura 2.15: Taxa de erro de bit em função da RSR para o esquema de recepção PSP-LMS, considerando $f_D T \in [0,002 \ 0,007]$.

ga o algoritmo de Viterbi para selecionar as seqüências sobreviventes e o algoritmo de filtragem adaptativa LMS para obter as estimativas condicionais da RI do canal. Ao contrário de outros trabalhos nessa linha de pesquisa, aqui modelou-se o desvio Doppler máximo como uma variável aleatória uniforme e o desempenho do esquema em questão foi avaliado considerando três esquemas para a atribuição do valor do passo do algoritmo LMS. O procedimento convencional estabelece o valor do passo do algoritmo LMS *a priori*, considerando a faixa de valores permitida para a RSR e a intensidade de efeito Doppler. Neste caso, foram analisadas curvas de EQM em regime permanente e o passo foi estabelecido no sentido de conferir boas características de desempenho ao algoritmo. Os outros dois procedimentos obtêm o passo mediante aproximação analítica. No primeiro deles, o valor do passo foi estabelecido como um resultado da aproximação do modelo estatístico da RI do canal de comunicação por processos de Markov de primeira ordem. No outro, o modelo da RI do canal foi aproximado por um processo AR de segunda ordem. Vale lembrar, que a última abordagem foi proposta no corrente trabalho, em contraposição às outras duas que foram previamente difundidas

na literatura técnica.

O desempenho do esquema de recepção PSP-LMS adotando passo de acordo com o procedimento proposto foi comparado com o obtido adotando as outras duas formas de escolha desse parâmetro. Observou-se uma nítida vantagem de desempenho do procedimento proposto em relação ao esquema convencional, enquanto o ajuste do passo obtido com base no modelo de Markov de primeira ordem apresentou péssimas características de desempenho, o que se deve, provavelmente, face à pobre aproximação do modelo de Jakes.

Os resultados de simulação obtidos com o uso do passo otimizado pelo procedimento proposto são valiosos e interessantes, especialmente considerando o espectro de Jakes, que é amplamente empregado para modelar o efeito Doppler de canais de comunicação móvel, pois, neste caso, o passo ótimo fica implicitamente parametrizado pela velocidade do equipamento de recepção, cujo valor pode ser de fácil obtenção, particularmente nos futuros sistemas de comunicações móveis que prevêm o uso de sistemas de posicionamento global.

Por fim, vale mencionar também que as deduções aqui apresentadas, particularmente as de EQM em regime permanente, podem ter outros desdobramentos e aplicações. Um exemplo disso é o trabalho apresentado no Capítulo 4, que discute um procedimento para detecção de erros de equalização e explora o EQM produzido pelo algoritmo LMS em sua métrica de decisão.

Capítulo 3

Receptores MLSE-PSP Cegos para Canais Variantes no Tempo

Neste capítulo é discutido o problema de recepção cega para sistemas de comunicações cujos canais são caracterizados pelo efeito de desvanecimento variante no tempo e seletivo na frequência (DVSF), com ênfase nas técnicas que se baseiam no critério ML e que empregam o PSP.

O capítulo é organizado da seguinte maneira. Inicialmente, na Seção 3.1, é apresentada uma breve introdução das técnicas que vêm sendo empregada na área de recepção cega. Na Seção 3.2 discute-se o emprego do critério ML no contexto da recepção cega de seqüência de símbolos. Na Seção 3.3 discute-se a implementação do referido critério com o PSP para canais caracterizados pelo efeito de DVSF. Na Seção 3.4 são apresentados resultados numéricos referente a uma avaliação de desempenho dos esquemas de recepção apresentados na Seção 3.3 e, por fim, na Seção 3.5 são apresentadas as conclusões deste capítulo.

3.1 Técnicas de Recepção Cega

O primeiro trabalho abordando o tema de recepção cega surgiu em 1975 [38]. Nesse trabalho, Yoichi Sato propôs uma técnica de equalização muito incipiente, aplicada apenas para os esquemas de modulação PAM multinível. A partir de então diversas técnicas com variado grau de complexidade e de desempenho vêm sendo propostas [12, 17, 39–45].

Muitos trabalhos vêm sendo publicados nessa área nos últimos anos, de tal sorte

que é praticamente impossível abordá-los em um documento conciso como este. Na realidade este não é objetivo do trabalho mas, a fim de situar a abordagem que será aqui discutida, realiza-se um esforço no sentido de classificar algumas das principais pesquisas nessa área nas três categorias mostradas na Figura 3.1.

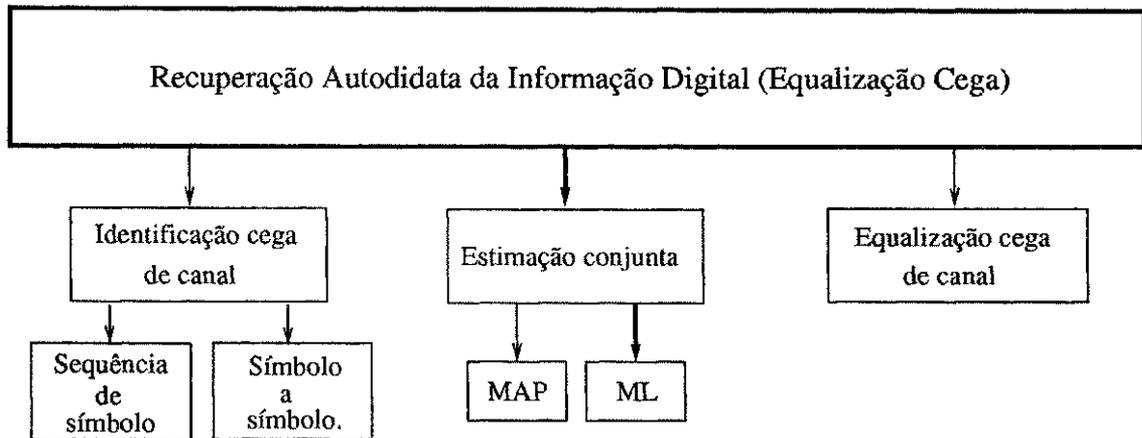


Figura 3.1: Uma possível classificação de esquemas de recepção cega.

Na primeira categoria se enquadram os esquemas de recepção que realizam a identificação cega da RI do canal e, a partir da estimativa obtida, empregam um procedimento adicional para recuperar a informação transmitida. Na segunda categoria são enquadradas as técnicas que estimam conjuntamente o canal e os símbolos transmitidos. Por fim, na última categoria estão os equalizadores cegos de canal, os quais estimam os símbolos diretamente a partir do sinal na saída do canal.

A terceira abordagem geralmente apresenta complexidade computacional menor e características piores de desempenho, especialmente para canais com nulos espectrais na faixa de interesse, devido aos efeitos bem conhecidos de fortalecimento do ruído, que ocorrem tanto em esquemas cegos quanto naqueles que empregam seqüências de treinamento. Com relação às outras duas abordagens, não existe *a priori* uma clara expectativa de desempenho. Ou seja, existem procedimentos que se enquadram na primeira categoria e possuem desempenho melhor do que alguns baseados na segunda, e vice-versa.

As técnicas pertencentes às duas primeiras categorias não possuem o problema do fortalecimento do ruído e permitem usar procedimentos que realizam tanto detecção de símbolos isolados quanto de seqüência de símbolos. No entanto, pelo fato de necessitarem da estimativa de parâmetros secundários além da informação transmitida, elas

tendem a ser mais complexas do que as que se enquadram na terceira categoria.

Apesar das diferenças basilares entre as três abordagens, geralmente os procedimentos desenvolvidos ou propostos se apóiam em ferramentas matemáticas comuns, tais como: técnicas preditivas, estimação *bayesiana*, características de momentos de ordem superior e as propriedades de processos ciclo-estacionários que, em particular, vêm recebendo destaque especial nos últimos anos.

Os principais desafios na área de recepção cega são o desenvolvimento de técnicas que apresentem velocidade de convergência boa, sensibilidade baixa ao nível de ruído, complexidade computacional baixa, capacidade de rastreamento para viabilizar o seu emprego que canais variantes no tempo e robustez quanto ao comportamento do canal, o que não ocorre, por exemplo, com as atuais técnicas baseadas em propriedades de processos ciclo-estacionários, cujo desempenho é bastante sensível à distribuição de zeros da RI do canal.

Este trabalho contempla um esquema de recepção que pertence à segunda categoria e que se baseia no critério ML. O referido esquema será discutido na próxima seção.

3.2 Recepção Cega usando o critério ML

Esta seção se inicia com uma breve revisão da aplicação do critério de *máxima probabilidade a posteriori* (MAP, do termo em inglês *maximum a posteriori probability*) ao problema de estimação de seqüências de símbolos. Em seguida, o referido problema é abordado sob o enfoque do critério ML. Embora o capítulo esteja voltado para recepção cega, inicialmente se considera canais com RI conhecida e, posteriormente, é realizada a extrapolação para o caso de interesse. Essa forma de exposição permite ressaltar importantes questões teóricas relacionadas com os esquemas de recepção que empregam o critério ML.

Denota-se por $f(\mathbf{s}^i|\mathbf{r})$ a probabilidade condicional do vetor de símbolos

$$\mathbf{s}^i = (s_0^i, s_1^i, \dots, s_{N-1}^i)'$$

dado o vetor de observação $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1})'$. A seqüência de símbolos ótima, estabelecida de acordo com o critério MAP, aqui denotada por $\hat{\mathbf{s}}$, é aquela que maximiza $f(\mathbf{s}^i|\mathbf{r})$, ou seja

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^i \text{ se } f(\mathbf{s}^i|\mathbf{r}) > f(\mathbf{s}^j|\mathbf{r}), \text{ para } j \in [1, 2, \dots, Q] \text{ sendo } j \neq i. \quad (3.1)$$

Na expressão acima Q é a quantidade de possíveis seqüências transmitidas, que é dada por D^N , sendo D o tamanho do alfabeto de símbolos. Este critério minimiza a probabilidade de erro [46].

Utilizando a regra de Bayes [47], tem-se

$$f(\mathbf{s}^i|\mathbf{r}) = \frac{f(\mathbf{r}|\mathbf{s}^i)f(\mathbf{s}^i)}{f(\mathbf{r})}. \quad (3.2)$$

Considerando a transmissão de seqüências equiprováveis, a equação acima pode ser reescrita como

$$f(\mathbf{s}^i|\mathbf{r}) = C f(\mathbf{r}|\mathbf{s}^i), \quad (3.3)$$

sendo C um termo que independe do índice i . Diante da Equação 3.3, pode-se verificar que a seqüência que maximiza $f(\mathbf{s}^i|\mathbf{r})$ é a mesma que maximiza $f(\mathbf{r}|\mathbf{s}^i)$. O critério de seleção de seqüências baseado na maximização de $f(\mathbf{r}|\mathbf{s}^i)$ é conhecido como ML e receptores que o adotam são denominados de MLSE. Vale mencionar que a definição do critério ML é geral e independe do modelo estatístico assumido pela fonte, porém, quando esta gera seqüências equiprováveis o critério ML é equivalente ao MAP.

Admitindo que o vetor de coeficientes da RI do canal é dado por

$$\mathbf{h}_n = (h_{n,0}, h_{n,1}, \dots, h_{n,L-1})', \quad (3.4)$$

na qual o primeiro índice dos elementos de \mathbf{h}_n denota tempo e o segundo denota o retardo¹, a n -ésima amostra de observação é dada por

$$r_n = \boldsymbol{\varphi}_n^* \mathbf{h}_n + \eta_n, \quad (3.5)$$

em que $\boldsymbol{\varphi}_n$ representa o vetor de regressão no n -ésimo intervalo de símbolos

$$\boldsymbol{\varphi}_n = (s_n, s_{n-1}, \dots, s_{n-L+1})', \quad (3.6)$$

em que s_n representa o símbolo transmitido no n -ésimo intervalo de símbolo e η_n representa o ruído, que assume valores complexos e é modelado por um processo estocástico gaussiano branco e estacionário circularmente simétrico, com variância σ_η^2 .

Utilizando a regra da cadeia [47], a probabilidade de receber $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{N-1})'$ condicionada à transmissão da seqüência \mathbf{s}^i e à RI do canal \mathbf{h} é dada por

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{s}^i, \mathbf{h}) = f(r_0|\mathbf{s}^i, \mathbf{h}) \cdot f(r_1|r_0, \mathbf{s}^i, \mathbf{h}) \cdots f(r_{N-1}|r_0, r_1, \dots, r_{N-2}, \mathbf{s}^i, \mathbf{h}). \quad (3.7)$$

¹No caso de canais invariantes $\mathbf{h}_n = \mathbf{h}$, para todo n e os elementos possuem apenas um índice que representa o retardo.

A partir da Equação 3.5 e do modelo estatístico adotado para o ruído é possível verificar que a fdp de r_n condicionada ao conhecimento da seqüência de símbolos e da RI do canal é gaussiana, com média $\varphi_n^* h_n$ e variância σ_η^2 , $\mathcal{N}(\varphi_n^* h_n, \sigma_\eta^2)$. Assim sendo, a Equação 3.7 pode ser expressa da seguinte maneira

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{s}^i, \mathbf{h}) = \prod_{n=0}^{N-1} f(r_n|\mathbf{s}^i, \mathbf{h}) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta}} \exp\left(-\frac{\|r_n - (\varphi_n^i)^* \mathbf{h}\|^2}{2\sigma_\eta^2}\right), \quad (3.8)$$

na qual $\varphi_n^i = (s_n^i, s_{n-1}^i, \dots, s_{n-L+1}^i)'$.

Como mencionado anteriormente, a seqüência escolhida de acordo com o critério ML, aqui denotada de seqüência ML, é aquela que maximiza a Equação 3.8. A solução deste problema de otimização pode ser obtida da seguinte maneira

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}^i} \sum_{n=0}^{N-1} \|r_n - (\varphi_n^i)^* \mathbf{h}\|^2 = \arg \min_{\mathbf{s}^i} \sum_{n=0}^{N-1} \left\| r_n - \sum_{j=0}^{L-1} (s_{n-j}^i)^* h_j \right\|^2. \quad (3.9)$$

Na Equação 3.9 $\arg \min_a(f(\cdot))$ é o argumento que minimiza a função custo $f(\cdot)$ e a é um elemento qualquer do espaço de busca. Nesta equação foram suprimidos os termos que não afetam a escolha da seqüência ótima.

De acordo com o estabelecido na Equação 3.9, o custo de uma determinada seqüência de símbolos é dado pela distância euclidiana entre o vetor de observações e um outro obtida envolvendo a referida seqüência com a RI do canal.

O procedimento para determinar a seqüência ML a partir da Equação 3.9 (busca exaustiva) é matematicamente simples. No entanto, ele é complexo do ponto de vista computacional, tendo em vista que os requisitos de memória e a quantidade de cálculos e comparações exigidas crescem exponencialmente com o comprimento da seqüência transmitida.

Todavia, para o caso em questão, em que o canal é perfeitamente conhecido e o ruído aditivo é gaussiano branco, a busca exaustiva pode ser substituída, sem perda de desempenho, por um procedimento recursivo que apresenta complexidade computacional muito menor. Trata-se do célebre algoritmo de Viterbi (AV) [20, 48], que realiza busca de mínimo percurso em uma estrutura de treliça adotando um procedimento que possui complexidade computacional da ordem de ND^{L-1} para detectar uma seqüência de comprimento N [20]. Portanto, a complexidade desse algoritmo cresce exponencialmente com a memória do canal e não com o comprimento da seqüência como estabelecido pela busca exaustiva. É importante mencionar que na prática $N \gg L$.

Em suma, considerando a transmissão de seqüências igualmente prováveis, ruído aditivo gaussiano branco e canais conhecidos, os receptores MLSE conseguem obter a probabilidade de erro mínima e podem ser implementados pelo algoritmo de Viterbi. Porém, apesar da simplificação proporcionada pelo uso desse algoritmo, a complexidade computacional desses esquemas de recepção ainda representa um sério empecilho à sua implementação em tempo real, especialmente quando o sistema de comunicação adota um esquema de modulação com eficiência espectral elevada e canais com extensa memória.

As dificuldades para implementar o esquema de recepção MLSE crescem ainda mais quando o canal de comunicação é desconhecido. Nesse contexto, quatro níveis de dificuldades podem ser estabelecidos de acordo com o modelo adotado para o canal (invariante ou variante no tempo) e conforme a abordagem empregada pelo esquema de recepção (receptores cegos ou receptores que usam seqüência de treinamento). Desses, sem sombra de dúvida, o caso mais simples é o que emprega canal invariante no tempo e seqüência de treinamento e o mais complexo é aquele que conjuga canal variante no tempo e receptores cegos.

Para o caso mais simples dentre os discutidos acima, uma abordagem pragmática é empregar o canal estimado durante a fase de treinamento na estrutura discutida previamente². Para os demais casos, a rigor, a seqüência ML só pode ser obtida pela busca exaustiva, como se discute a seguir.

Considerando os modelos aqui assumidos para o vetor de observação e ruído, a fdp de \mathbf{r} condicionada a uma seqüência transmitida \mathbf{s}^i e a uma estimativa de canal $\hat{\mathbf{h}}$ é dada por

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{s}^i, \hat{\mathbf{h}}) = \prod_{n=0}^{N-1} \mathcal{N} \left(r_n - \sum_{j=0}^{L-1} s_{n-j}^i \hat{h}_j, \sigma_\eta^2 \right). \quad (3.10)$$

Admitindo que \mathbf{h} é um vetor determinístico desconhecido, a sua estimativa ML considerando a seqüência \mathbf{s}^i pode ser determinada por

$$\hat{\mathbf{h}}^i = \arg \max_{\mathbf{h}} f(\mathbf{r}|\mathbf{s}^i, \mathbf{h}). \quad (3.11)$$

²O canal de comunicação deveria ser estimado considerando toda a massa de dados e não apenas aquela referente ao período de treinamento. Se for possível obter uma boa estimativa de canal durante esse período, a aproximação pode implicar em conseqüências mínimas, sendo razoável considerar, neste caso, que essa abordagem aproxima bem o procedimento ML ótimo.

A estimativa ML conjunta da seqüência de símbolos e da RI do canal é então dada por

$$(\hat{s}, \hat{h}) = \arg \max_{s^i, h} f(r|s^i, h), \quad (3.12)$$

na qual a otimização é realizada considerando todas as possíveis seqüências transmitidas. Usando as hipóteses referentes ao ruído aditivo, a equação acima se reduz a

$$(\hat{s}, \hat{h}) = \arg \min_{s^i, h} \sum_{n=0}^{N-1} \left| r_n - \sum_{j=0}^{L-1} s_{n-j}^i h_j \right|^2. \quad (3.13)$$

O processo de otimização definido na Equação 3.13 pode ser realizado em dois passos. No primeiro, obtém-se estimativa de canal para cada uma das possíveis seqüências transmitidas (Equação 3.11). No segundo, empregando as estimativas de canal obtidas no passo anterior, escolhe-se a seqüência que minimiza a equação a seguir

$$\hat{s} = \arg \min_{s^i} \sum_{n=0}^{N-1} \left| r_n - \sum_{j=0}^{L-1} s_{n-j}^i h_j \right|^2. \quad (3.14)$$

Como se vê, o procedimento de busca estabelecido para canais desconhecidos (Equações 3.11 e 3.14) é bem mais complexo do que o obtido para canais conhecidos (Equação 3.9), pois requer uma busca exaustiva no conjunto de todas as possíveis seqüências transmitidas.

Propor estruturas sub-ótimas com complexidade reduzida que aproximem o desempenho do esquema de recepção MLSE para canais desconhecidos tem sido o objetivo de trabalhos de vários pesquisadores. Entre esses, alguns propõem estruturas híbridas, que combinam técnicas de equalização linear ou DFE com MLSE [49, 50] e outros investigam a diminuição da quantidade de estados na treliça [5, 19, 51, 52], o que pode ser obtido desconsiderando alguns coeficientes da RI do canal ou reduzindo os níveis de sinalização, de acordo com o princípio de particionamento de conjunto [53].

Publicações recentes [12-16] propõem utilizar o PSP em conjunto com o AV para realizar implementação sub-ótima do critério ML ou do critério ML conjunto em presença de incertezas no cálculo das métricas das seqüências sobreviventes. Essas incertezas podem advir da redução da quantidade de estados da treliça, do erro de acompanhamento em aplicações que envolvem canais variantes no tempo, ou até mesmo da combinação desses efeitos, como ocorre no cenário aqui investigado.

3.3 Esquema de Recepção BMLSE-PSP

O diagrama de blocos do esquema de recepção BMLSE-PSP é apresentado na Figura 3.2. Ele é composto basicamente de dois blocos: um referente ao algoritmo de busca e outro contendo um conjunto de filtros adaptativos. Além deles, o esquema de recepção contém o processamento de entrada, cuja finalidade é reduzir o nível de ruído subjacente.

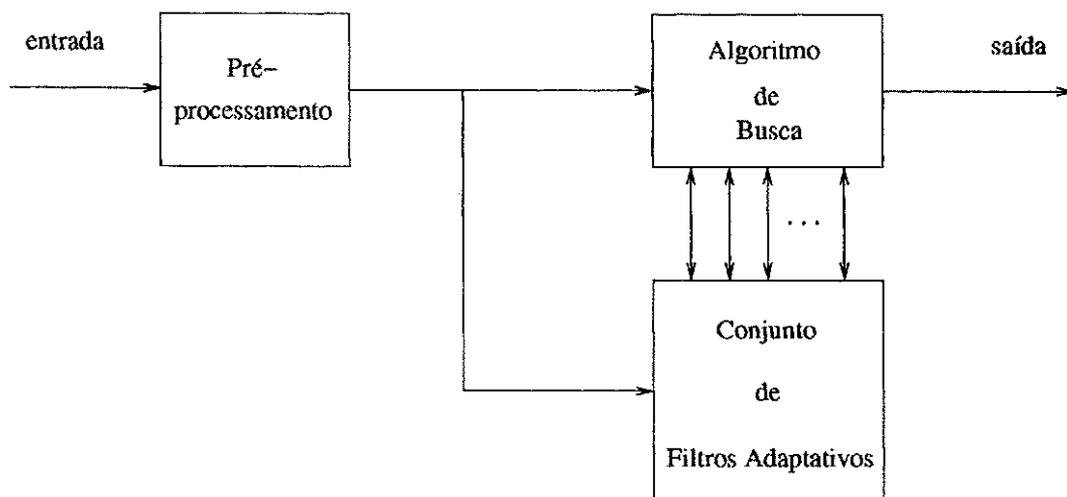


Figura 3.2: Diagrama de blocos simplificado de um esquema de recepção BMLSE-PSP.

Para cada seqüência sobrevivente obtida pelo algoritmo de busca é associado um filtro adaptativo, cuja finalidade é estimar a RI do canal condicionada a referida seqüência. Essas estimativas, por seu turno, são utilizadas pelo algoritmo de busca para calcular as métricas de extensão das seqüências sobreviventes.

À medida que se aumenta a quantidade de seqüências sobreviventes, a solução do esquema de recepção MLSE-PSP converge para a solução ML conjunta³. De fato, se o algoritmo de busca conseguisse reter todas as possíveis seqüências transmitidas, o esquema acima realizaria a busca exaustiva.

Contudo, mais importante do que assegurar a convergência do algoritmo para a solução ML conjunta com o aumento da quantidade de seqüências sobreviventes, é conseguir um bom desempenho com poucas seqüências sobreviventes. Um caminho para se tentar obter isso é a escolha criteriosa dos filtros adaptativos e do algoritmo de busca.

³Vale mencionar que o esquema de recepção MLSE-PSP é similar ao esquema BMLSE-PSP, exceto pelo fato do primeiro usar seqüências de treinamento.

Em [18] foram elucidadas algumas questões importantes relacionadas com o esquema de filtragem, com o algoritmo de busca e com o modelo estatístico do canal de comunicação móvel no contexto dos receptores MLSE-PSP. As conclusões lá obtidas decorrem da análise de resultados de simulação computacional referentes a um cenário típico de comunicação móvel que empregava seqüências de treinamento. Dentre as contribuições apontadas algumas são apresentadas a seguir.

A despeito dos erros contidos nas seqüências sobreviventes, mostrou-se que é possível manter o acompanhamento da RI do canal, desde que sejam empregados esquemas de filtragem robustos, com modelos estatísticos bem ajustados ao do canal de comunicação. Uma combinação interessante foi obtida pelo uso do KF com modelo AR de segunda ordem, AR(2), para descrever estatisticamente a evolução temporal do canal de comunicação. Dentro da faixa de intensidade de efeito Doppler contemplada no trabalho supracitado, este esquema de filtragem permitiu evitar o efeito de *probabilidade de erro irreduzível* (PEI), o qual foi observado com o uso do algoritmo LMS e KF com modelo AR(1). Vale mencionar que o efeito de PEI tem sido verificado em diversos trabalhos que contemplam canais variantes no tempo.

Em [18] foi verificado também que, para uma dada quantidade de seqüências sobreviventes, o algoritmo M possibilita melhor desempenho do que o algoritmo de Viterbi Generalizado [19] e, em particular, do que o AV [20, 21].

É importante enfatizar que os erros de acompanhamento da RI do canal tornam imprecisas as métricas utilizadas pelo algoritmo de busca. Nesses casos, nenhum algoritmo de busca com complexidade reduzida é capaz de implementar o procedimento ML, sendo razoável esperar que um algoritmo com critério de seleção das seqüências sobreviventes mais flexível e igualitário, como o algoritmo M, proporcione melhor desempenho do que algoritmos com critérios mais rígidos como, por exemplo, o AV, o qual pode eliminar seqüências de custos menores, em detrimento de outras com custos maiores, simplesmente por uma questão de distribuição dessas seqüências nos estados da treliça.

Este trabalho estende a investigação realizada em [18] para contemplar esquemas de recepção cega que envolvem canais caracterizados pelos efeitos de DVSF. Nesta investigação, adota-se o algoritmo M para realizar a escolha das seqüências sobreviventes e os algoritmos de filtragem LMS e KF com modelos AR(1) e AR(2) para aproximar o modelo estatístico de evolução temporal da RI do canal. Doravante, esses esquemas de recepção serão denominados de BPSP-LMS, BPSP-KF1 e BPSP-KF2, respectivamente.

te. A seguir os esquemas de recepção supracitados são discutidos em maior detalhes, com ênfase especial dada aos algoritmos de filtragem adaptativa.

Admitindo que φ_n^i é obtido da i -ésima seqüência sobrevivente, a estimativa de canal a ela associada \hat{h}_n^i é dada por,

$$\hat{h}_n^i = \mathcal{G} \left(r_n, \varphi_n^i, \{\hat{h}_{n-l}^i\} \right), \quad (3.15)$$

sendo $r_n = (r_n, r_{n-1}, \dots, r_{n-L+1})'$, $\{\hat{h}_{n-l}^i\}$ um conjunto de estimativas passadas da RI do canal e $\mathcal{G}(\cdot)$ um operador cuja forma depende do tipo de algoritmo adaptativo empregado.

Para o caso do algoritmo LMS com passo μ , a Equação 3.15 fica dada por⁴

$$\hat{h}_{n+1}^i = \hat{h}_n^i + \mu e_n^i \varphi_n^i, \quad (3.16)$$

com

$$e_n^i = r_n - (\varphi_n^i)^* \hat{h}_n^i. \quad (3.17)$$

Para empregar o KF no esquema de recepção BMLSE-PSP é preciso adotar um modelo estatístico racional para descrever a evolução temporal do canal de comunicação. Modelos AR de ordem M [5], aqui denotados por AR(M), são alternativas interessantes, especialmente os de ordens pequenas, uma vez que a complexidade computacional do algoritmo de filtragem, e por conseguinte do esquema de recepção, cresce sensivelmente com este parâmetro.

Considerando que o canal de comunicação é modelado por um processo AR(M) a entrada do detector pode ser descrita pelo modelo de espaço em estado mostrado a seguir:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \Phi \mathbf{x}_n + \Theta \nu_n; \quad (3.18)$$

$$r_n = (\varphi_n^i)^* \mathbf{x}_n + \eta_n, \quad (3.19)$$

sendo \mathbf{x}_n o vetor de estados, cujos elementos, como mostrado adiante, são obtidos a partir dos atrasos da RI do canal, Φ é a matriz de transição de estado e Θ é uma matriz diagonal que controla a potência do ruído de geração do vetor de estados. Nas equações apresentadas acima é admitido que ν_n é extraído de um processo estocástico vetorial

⁴Questões importantes relacionadas com o desempenho do algoritmo LMS são abordadas no Capítulo 2.

gaussiano com espectro de potência plano, vetor média nulo e matriz de covariância igual a uma matriz identidade de dimensões apropriadas. É admitido também que η_n é extraído de um processo gaussiano branco de média nula e variância σ_η^2 , e que os processos $\{\nu_n\}$ e $\{\eta_n\}$ são estatisticamente independentes.

As matrizes que especificam o modelo em espaço de estados apresentado nas Equações 3.18 e 3.19 podem ser dadas por:

$$\Phi = \begin{pmatrix} -a_1 & \cdots & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & \cdots & -a_M & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_1 & 0 & \cdots & -a_2 & \cdots & 0 & \cdots & -a_M \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.20)$$

$$\Theta = \text{diag} \left(\sigma_{c_0}^2, \sigma_{c_1}^2, \cdots, \sigma_{c_{L-1}}^2, \sigma_{c_0}^2, \cdots, \sigma_{c_{L-1}}^2, \cdots, \sigma_{c_0}^2, \cdots, \sigma_{c_{L-1}}^2 \right) \text{ e} \quad (3.21)$$

$$\varphi_n^i = (s_n^i, \cdots, s_{n-L-1}^i, 0, \cdots, 0)' \quad (3.22)$$

Por outro lado, o vetor de estado está relacionado com os coeficientes da RI do canal de comunicação da seguinte maneira

$$\mathbf{x}_n = (h_{n,0}, \cdots, h_{n,L-1}, h_{n-1,0}, \cdots, h_{n-1,L-1}, \cdots, h_{n-M+2,0}, \cdots, h_{n-M+2,L-1})'. \quad (3.23)$$

Na Equação 3.20 as constantes $\{a_k\}$ representam os parâmetros do modelo AR(M) e os elementos da diagonal principal da matriz Θ são extraídos do perfil de intensidade de atraso do canal (Apêndice B).

A estimativa do vetor de estados \mathbf{x}_n e a matriz de covariância do erro de estimação \mathbf{C}_x^i condicionados ao conhecimento da seqüência de símbolos \mathbf{s}^i são computadas recursivamente pelo KF da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^i &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_n^i + \Phi \mathbf{K}_n^i (r_n - \varphi_n^i \hat{\mathbf{x}}_n^i); \\ \mathbf{K}_n^i &= \mathbf{C}_{x_n}^i \varphi_n^i ((\varphi_n^i)^* \mathbf{C}_{x_n}^i \varphi_n^i + \sigma^2)^{-1}; \\ \mathbf{C}_{x_{n+1}}^i &= \Phi (\mathbf{C}_{x_n}^i - \mathbf{K}_n^i (\varphi_n^i)^* \mathbf{C}_{x_n}^i) \Phi^* + \Theta \Theta^* \end{aligned} \quad (3.24)$$

As condições iniciais para realizar estimação ML, independentemente do esquema de filtragem empregado, são dadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^i = E[\mathbf{x}_0] = \mathbf{0} \text{ e} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{C}_{x_0}^i = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^*] = \mathbf{\Theta}. \quad (3.26)$$

É importante salientar que uma estimação ML conjunta sub-ótima pode ser obtida usando uma estimativa inicial de canal obtida por uma técnica auxiliar de identificação cega. Nesse caso, o esquema de recepção se enquadra na primeira abordagem apresentada na Figura 3.1 e as condições iniciais devem ser dadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^i = \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{C}_{x_0}^i = \mathbf{C}_x, \quad (3.28)$$

sendo que os elementos de $\hat{\mathbf{x}}$ e \mathbf{C}_x são dados respectivamente pelas estimativas da RI do canal e da matriz covariância do erro de estimação produzidas pela técnica auxiliar de identificação cega de canal. Vale ressaltar que em ambos os casos (Equações 3.25, 3.26 ou Equações 3.27 e 3.28), as mesmas condições iniciais devem ser estabelecidas para todos os filtros adaptativos usados pelo receptor BMLSE-PSP.

Os modelos estatísticos geralmente empregados para descrever a evolução temporal dos coeficientes da RI do canal de comunicação móvel são não-rationais [29]. Neste caso, a rigor, o uso de processos AR induz a um erro de modelagem na Equação 3.18 e, por conseguinte, no esquema de estimação recursiva realizado pelo filtro de Kalman. Para tentar minimizar esse problema, os parâmetros $\{a_k\}$ devem ser escolhidos no sentido de obter um bom ajuste estatístico entre os processos alvo e o modelo AR(M). Usando o critério de minimização da variância do erro de predição para realizar esse ajuste, o vetor de parâmetros autoregressivos, \mathbf{a} , é obtido por [5, Capítulo 6]

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}, \quad (3.29)$$

em que \mathbf{R} é uma matriz $M \times M$ e \mathbf{r} um vetor de M elementos, ambos especificados pela função de autocorrelação do processo estocástico a ser aproximado, $R(\cdot)$. Admitindo que esta função assume valores reais, os referidos parâmetros são dados por:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(M-1) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R(M-1) & \cdots & R(1) & R(0) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{r} = (R(1) \cdots R(M+1))'.$$

Além disso, a variância do erro de predição, σ_{EP}^2 , fica dada por [5, Capítulo 6]

$$\sigma_{EP}^2 = R(0) + \mathbf{r}'\mathbf{a}. \quad (3.30)$$

Considerando que os processos estocásticos que modelam as variações dos coeficientes da RI do canal físico têm espectros de potência dados pelo modelo de Jakes, a Tabela 3.1 apresenta os valores das variâncias dos erros de predição para algumas valores da ordem do processo AR e do produto $f_D T$.

Os resultados apresentados na Tabela 3.1 mostram que para o processo AR(1) a variância do erro de predição aumenta vertiginosamente com a intensidade do efeito Doppler. Isto também se verifica para o processo AR(2), porém neste caso as variâncias dos erros de predição são bem menores, caracterizando um ajuste melhor ao modelo de Jakes. Verifica-se também que o modelo AR(3) provê um melhor ajuste que o modelo AR(2), principalmente para valores elevados de $f_D T$. No entanto, considerando valores pequenos de $f_D T$, este modelo gerou instabilidades numérica na avaliação da variância do erro de predição. Para processos AR de ordens maiores, foi observado que o problema da instabilidade numérica se tornou mais severo⁵. Dentre os valores de $f_D T$ considerados, só são observados desempenhos melhores do que o propiciado pelo AR(3) para $f_D T = 0,05$.

Os resultados apresentados na Tabela 3.1 indicam que a ordem do processo AR que melhor aproxima o espectro de Jakes aumenta com o valor de $f_D T$. No entanto, levando em conta a complexidade computacional associada ao uso desses modelos em receptores BMLSE-PSP, é razoável admitir que o modelo AR(2) representa uma boa solução de compromisso para $f_D T < 0,01$.

3.4 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados resultados numéricos referentes a avaliação de desempenho dos esquemas de recepção discutidos na seção precedente, obtidos por meio de

⁵A instabilidade numérica observada decorre do mal-condicionamento da matriz de autocorrelação contida no lado direito da Equação 3.29 para baixos valores de $f_D T$.

Tabela 3.1: Variância do erro de predição para alguns valores de $f_D T$ e da ordem do processo AR.

M	Variância do erro de predição	$f_D T$
1	$1,973906268892822 \times 10^{-5}$	0,001
1	$4,933889073764908 \times 10^{-4}$	0,005
1	0,00197246027784	0,01
1	0,04844311228520	0,05
2	$1,961811824102711 \times 10^{-10}$	0,001
2	$1,217337773917748 \times 10^{-7}$	0,005
2	$1,946419919018894 \times 10^{-6}$	0,01
2	0,00119032997645	0,05
3	$2,308698871633652 \times 10^{-6} (*)$	0,001
3	$1,559105511361736 \times 10^{-9}$	0,005
3	$1,970244967175461 \times 10^{-9}$	0,01
3	$2,913003727533781 \times 10^{-5}$	0,05
4	0,16194850979357(*)	0,001
4	$1,773160386053796 \times 10^{-5} (*)$	0,005
4	$1,344016475668397 \times 10^{-6} (*)$	0,01
4	$7,128012449175714 \times 10^{-7}$	0,05
5	1,78885547819607(*)	0,001
5	0,07860756688419(*)	0,005
5	$5,986524267937998 \times 10^{-4} (*)$	0,01
5	$2,143334865145619 \times 10^{-8}$	0,05

(*)Nesses casos as variâncias assumem valores negativos devido à presença de pólos fora do círculo unitário. Os valores indicados foram obtidos refletindo-se estes pólos para dentro do círculo unitário.

simulação de Monte Carlo. A seguir o sistema simulado será detalhado e, na seqüência, os resultados serão apresentados.

O diagrama de blocos do modelo equivalente em banda básica do sistema de comunicação simulado é apresentado na Figura 3.3, na qual $\{s_k\}$ representa a seqüência de símbolos transmitida, $r(t)$ é o sinal recebido na entrada do receptor e $\{r_k\}$ é a seqüência na saída do processamento de entrada, cujas amostras são tomadas a cada intervalo de símbolo. A seqüência $\{\hat{s}_k\}$ denota a estimativa de $\{s_k\}$.

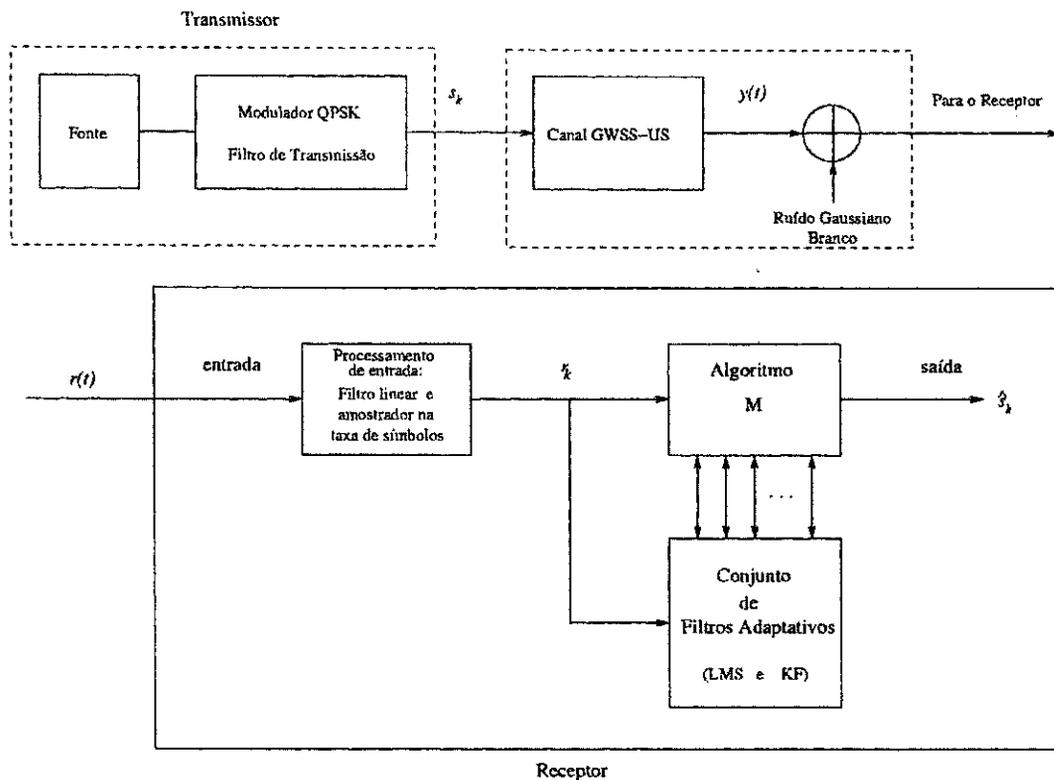


Figura 3.3: Diagrama de blocos do esquema de recepção cego para canais GWSS-US.

Na Figura 3.3 são representados também o ruído e o modelo do canal físico de comunicação. O primeiro é modelado por um processo gaussiano complexo branco e estacionário com média nula e variância ajustada de acordo com a RSR na entrada do receptor, que é expressa pela razão entre a energia por bit, E_b , e a densidade espectral de potência do ruído, N_0 . O modelo de canal, por seu turno, foi apresentado na Seção 2.1 e foi simulado usando a técnica de Monte Carlo com os parâmetros $L = 3$, $f_D T$ igual a 0,001, 0,003 e 0,005 e perfil de retardo com as variâncias 0,5, 0,3 e 0,2.

Para o KF, conforme discutido anteriormente, a evolução temporal dos coeficientes

da RI do canal foi representada por modelos AR(1) e AR(2), ajustados no sentido de minimizar a variância do erro de predição. Os valores de variâncias dos erros de predição para $f_D T$ igual a 0,001 e 0,005 foram mostrados na Tabela 3.1. No caso do algoritmo LMS, o passo foi otimizado analiticamente, no sentido de minimizar o EQM em regime permanente, conforme procedimento apresentado no Capítulo 2. Dessa forma, pode-se dizer que os parâmetros dos algoritmos de filtragem adaptativa empregados pelos esquemas de recepção aqui investigados estão bem ajustados, possibilitando uma comparação de desempenho justa.

Usa-se a modulação QPSK diferencial e filtros de transmissão e recepção casados, gerando conjuntamente uma RI do tipo cosseno levantado. Como mencionado no capítulo anterior, foi admitido um perfeito sincronismo de relógio entre transmissor e receptor, de modo que a RI conjunta desses filtros não provoca IES nos instantes de amostragem. Além disso, vale mencionar que a modulação diferencial possui um papel importante nos receptores cegos, solucionando o problema de ambigüidade em fase a eles inerente.

Os desempenhos dos receptores são avaliados e comparados usando dois indicadores: a taxa de erro de símbolo (SER, do termo em inglês *Symbol Error Rate*) e o erro quadrático médio (EQM) de estimação da RI do canal, referente a seqüência ML estimada. Esses indicadores foram obtidos usando $6,25 \times 10^6$ símbolos QPSK divididos em blocos de 2500 símbolos.

Nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 são ilustradas curvas de SER em função da razão sinal ruído (E_b/N_0) na entrada do receptor, para os esquemas de recepção BPSP-LMS, BPSP-KF1 e BPSP-KF2, respectivamente. As curvas foram obtidas para $f_D T$ de 0,001, 0,003 e 0,005, usando o algoritmo M com dezesseis seqüências sobreviventes (a quantidade de seqüências sobreviventes é aqui denotada por S). Uma comparação de desempenho dos esquemas de recepção para $f_D T = 0,005$ é realizada na Figura 3.7.

Os resultados apresentados nas figuras supracitadas compartilham algumas características. Em primeiro lugar, todas as curvas apresentam valores de PEI bastante elevados. Em segundo lugar, o desempenho de cada um dos esquemas de recepção avaliados melhora com o aumento de $f_D T$ (este comportamento foi observado em outro esquema de recepção cego [54]). Por fim, como mostrado na Figura 3.7, esses esquemas de recepção possuem desempenhos parecidos.

A ocorrência de PEI é compreensível face as dificuldades impostas pelo cenário de comunicação sob investigação. Por outro lado, os dois últimos comportamentos

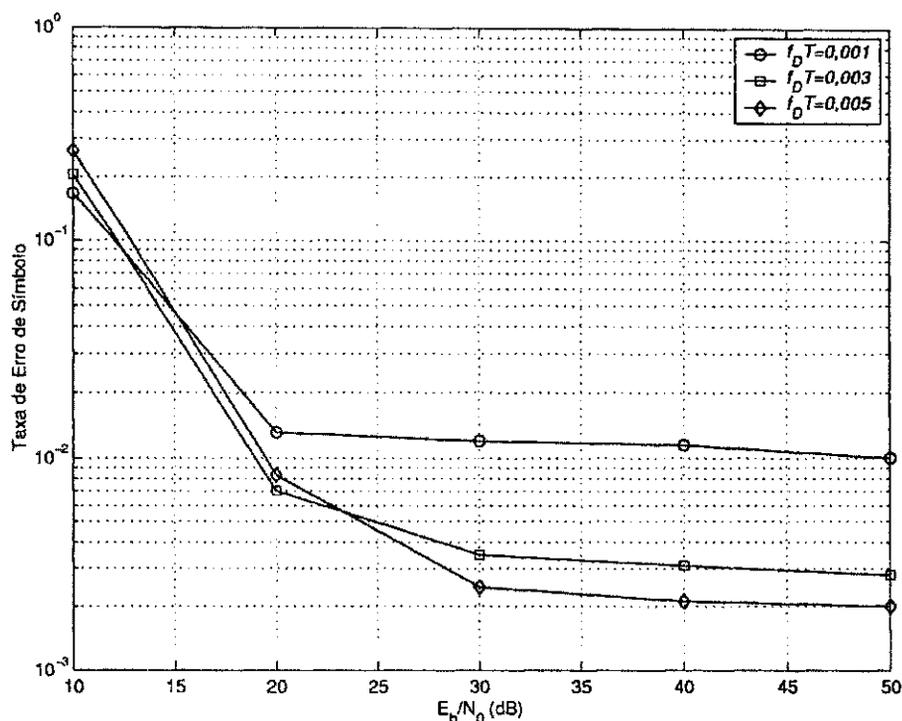


Figura 3.4: Taxa de erro de símbolo em função de E_b/N_0 para o receptor BPSP-LMS, com diferentes valores de $f_D T$.

contrastam com o que se observa quando se usa seqüências de treinamento. Neste caso, o aumento de $f_D T$ implica em maiores dificuldades de acompanhamento das RI do canal e causa degradação de desempenho. Além disso, neste caso, o uso de esquemas de filtragem mais elaborados permite obter sensível melhoria de desempenho [18]. A seguir são apresentados resultados de simulação que buscam explicar esses contrastes.

A Figura 3.8 contém gráficos que indicam a quantidade de erros observada por bloco, para os primeiros 500 blocos de símbolos simulados. Na leitura desses gráficos é importante observar a diferença nas escalas dos eixos verticais e lembrar que cada bloco contém 2.500 símbolos. Os resultados ali apresentados foram obtidos com receptores BPSP-LMS e BPSP-KF2, considerando RSR de 30 dB e $f_D T$ igual a 0,001 e 0,005.

Cabe notar nesta figura a presença de alguns blocos com uma quantidade de erros muito elevada (surto de erros), principalmente para a $f_D T = 0,001$.

Alguns trabalhos assinalam que em recepção cega é comum obter blocos de informação com muitos erros. No entanto, a origem dos erros, que às vezes não é justificada ou considerada com a devida importância, depende dos esquemas de recepção utilizados. Em alguns casos, o procedimento de recuperação cega se apóia na otimização de

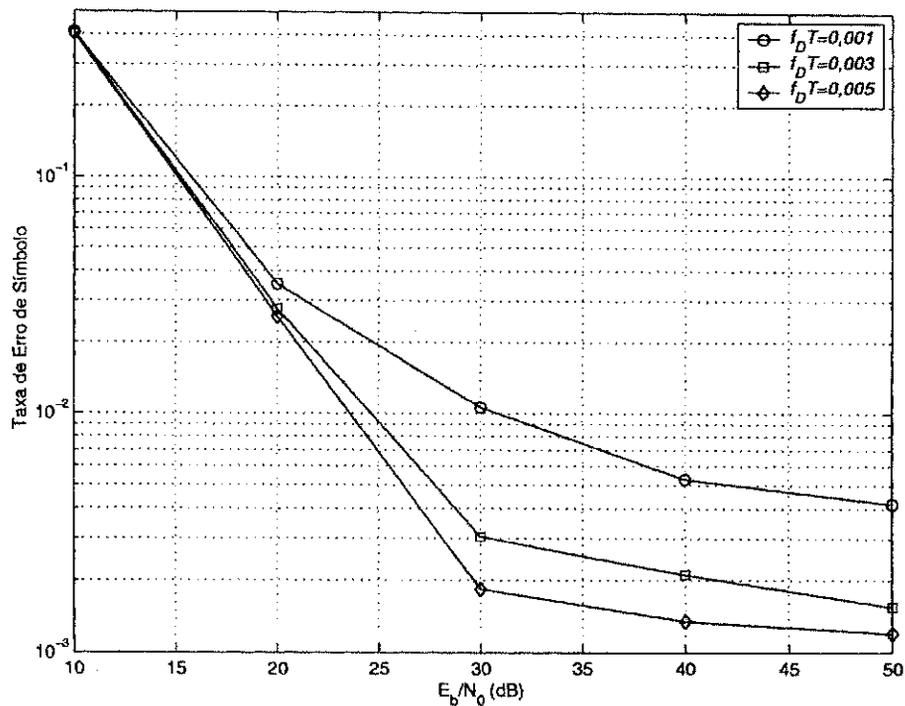


Figura 3.5: Taxa de erro de símbolo em função de E_b/N_0 para o receptor BPSP-KF1, com diferentes valores de $f_D T$.

funções custo multimodais, existindo a possibilidade de convergência para pontos de mínimos locais. Em outros casos, o critério de detecção pode ser insensível a alguns tipos de erros. Por exemplo, é possível que uma seqüência com grande quantidade de símbolos errados associados a estimativas de RI do canal com erro elevado forneça um custo menor do que uma solução que apresente poucos símbolos errados em conjunto com a estimativa de canal correspondente.

Na tentativa de se obter uma explicação cabível para o surgimento de blocos com surtos de erros nos esquemas aqui investigados, avaliou-se a quantidade desses blocos para alguns valores de S e de RSR.⁶ Na Tabela 3.2 é apresentada a percentagem de blocos que possuem menos de 10% de símbolos errados, para o caso em que o receptor BPSP-KF2 opera em um cenário com $f_D T = 0,001$.

⁶Foi admitido que, independentemente da RSR, ocorrem surtos de erros de equalização quando a frequência relativa dos erros dentro do bloco é superior a 10%. Uma avaliação mais precisa da ocorrência desses surtos certamente requer o uso de um limiar de taxa de erro variável com a RSR. A abordagem adotada é mais simples, mas permite analisar o efeito de forma satisfatória para os objetivos desse capítulo.

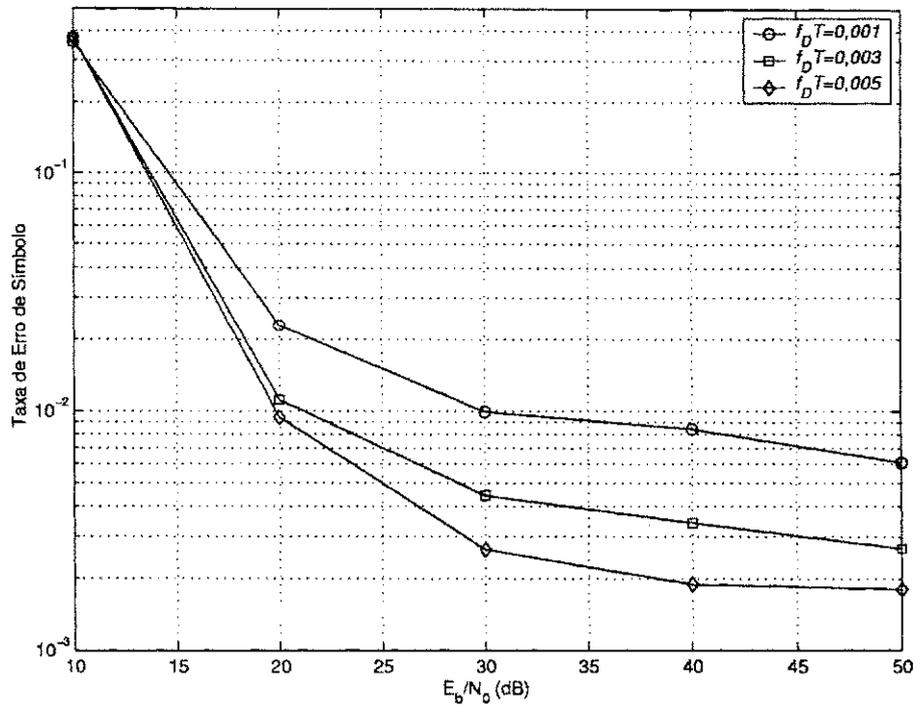


Figura 3.6: Taxa de erro de símbolo em função de E_b/N_0 para o receptor BPSP-KF2, com diferentes valores de $f_D T$.

Tomando por base um mesmo valor de RSR (colunas da Tabela 3.2), os resultados apresentados mostram que a quantidade de blocos com menos de 10% de símbolos errados aumenta com S . Em particular, observa-se que para 20 dB e $S = 4$ a quantidade de blocos com esta característica corresponde a 75,1% do total. A quantidade desses blocos sobe para 92,8% quando $S = 64$.

Portanto, respaldado pelos resultados apresentados na Tabela 3.2, parece razoável admitir que a redução do espaço de busca da seqüência de símbolos contribui para o

Tabela 3.2: Porcentagem de blocos com mais de 10% de erros para o esquema BPSP-KF2 com diferentes valores de RSR e S .

S	10 dB	20 dB	30 dB	40 dB	50 dB
4	51,2	75,1	81,4	87,6	87,9
16	75,9	91,5	93,6	95,5	98,2
64	76,5	92,8	93,7	96,8	98,9

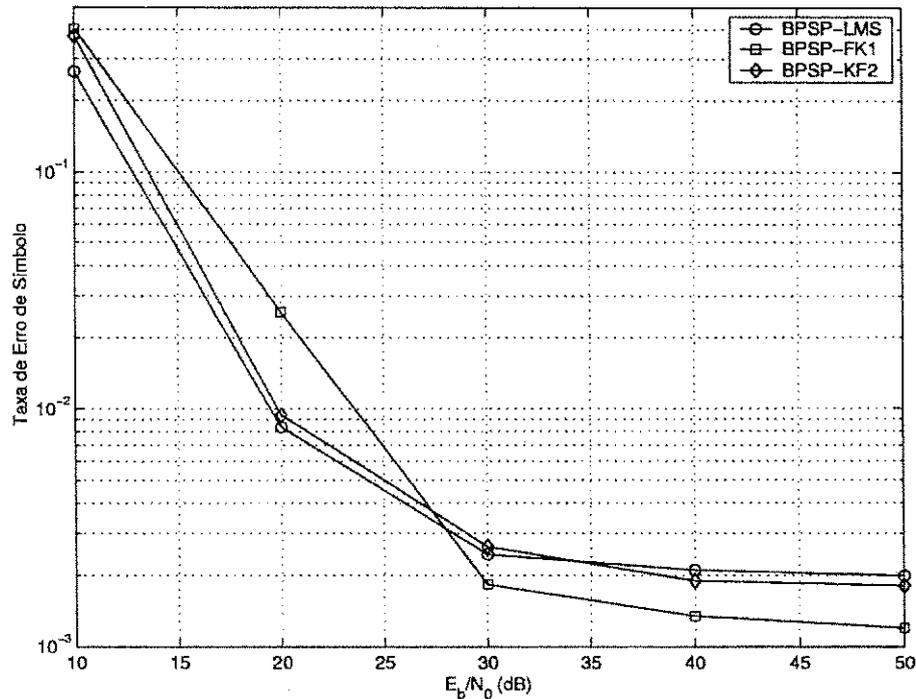


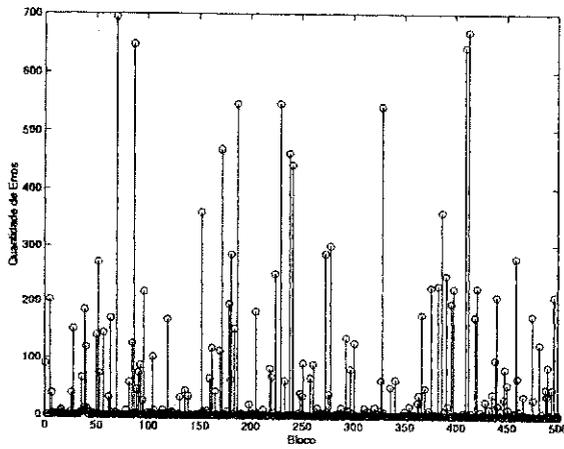
Figura 3.7: Comparação de desempenho dos esquemas de recepção BPSP-LMS, BPSP-KF1 e BPSP-KF2 para $f_D T$ igual a 0,005.

surgimento de blocos com muitos erros.

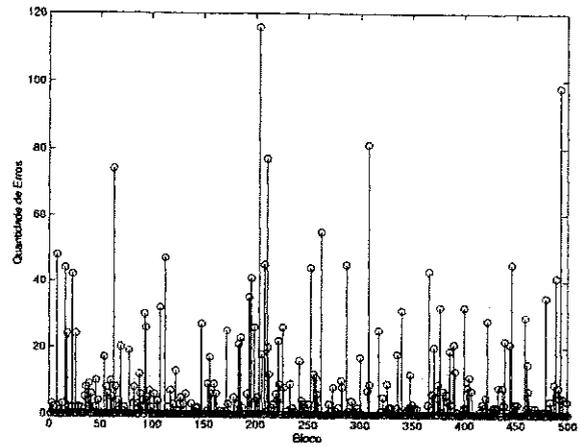
É possível que a presença desses blocos tenha polarizado as estimativas da probabilidade de erro, a ponto de produzir os contrastes assinalados anteriormente, relativos ao efeito do aumento de $f_D T$ no desempenho dos receptores. Para esclarecer esta questão, são apresentados nas Tabelas 3.3 e 3.4 estimativas de SER obtidas desconsiderando blocos com percentual de erro superior a 1%. Esses resultados mostram claramente que os desempenhos pioram com o aumento da $f_D T$. Além disso, apesar dos esquemas avaliados possuírem características de desempenho parecidas, o receptor BPSP-KF2 apresenta os melhores resultados, enquanto que o BPSP-LMS apresenta os piores.

Outro resultado importante é apresentado na Tabela 3.5, que contém a quantidade de blocos com mais de 1% de erros, em um total de 2500 blocos, para uma RSR de 50 dB. Vê-se claramente que, para todos os receptores investigados, a quantidade de blocos com esta característica se reduz sensivelmente com o aumento da $f_D T$.

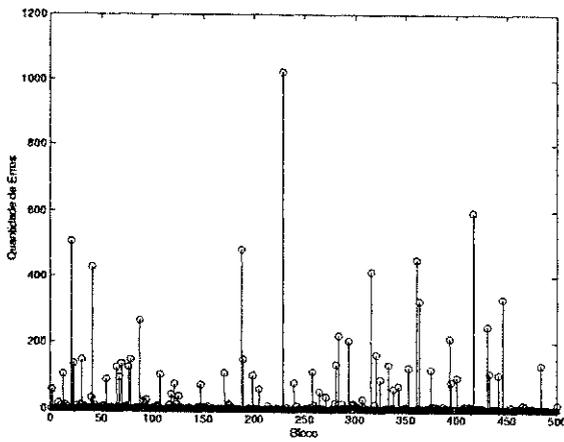
Em suma, pode-se afirmar à luz desses resultados que a redução do espaço de busca provoca a ocorrência de blocos com muitos erros, que pesam significativamente no



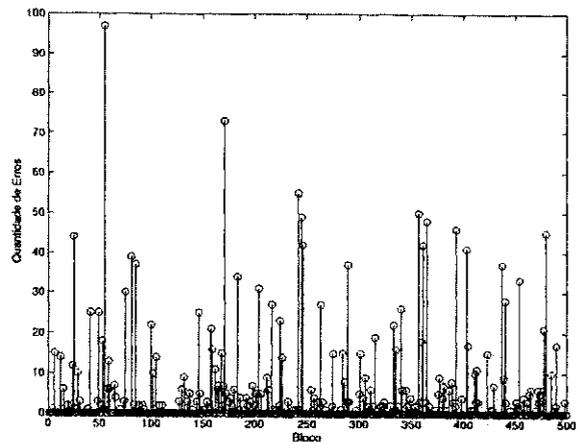
(a) $f_D T = 0,001$.



(b) $f_D T = 0,005$.



(c) $f_D T = 0,001$.



(d) $f_D T = 0,005$.

Figura 3.8: Quantidade de erros por bloco para os receptores BPSP-LMS ((a) e (b)) e BPSP-KF2 ((c) e (d)).

Tabela 3.3: SER para RSR=30 dB, desconsiderando blocos com percentual de erros maior do que 1%.

$f_D T$	BPSP-LMS	BPSP-KF1	BPSP-KF2
0,001	$9,1 \times 10^{-4}$	$7,6 \times 10^{-4}$	$7,15 \times 10^{-4}$
0,003	$1,3 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-3}$
0,005	$2,3 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-3}$

Tabela 3.4: SER para RSR=50 dB, desconsiderando blocos com percentual de erros maior do que 1%.

$f_D T$	BPSP-LMS	BPSP-KF1	BPSP-KF2
0,001	$7,28 \times 10^{-4}$	$5,8 \times 10^{-4}$	$5,4 \times 10^{-4}$
0,003	$7,85 \times 10^{-4}$	$7,2 \times 10^{-4}$	$6,52 \times 10^{-4}$
0,005	$1,2 \times 10^{-3}$	$9,5 \times 10^{-4}$	$9,12 \times 10^{-4}$

cômputo das estimativas de taxa de erro, contribuindo para degradá-los. Este efeito se torna mais sério quando o produto $f_D T$ é reduzido, pois para valores elevados de $f_D T$, as próprias variações da RI do canal contribuem para melhorar a confiabilidade das estimativas.

Cabe notar que apesar da redução do espaço de busca, é possível que o espaço resultante ainda contenha diversos pontos de mínimos locais. Cabe notar também que a variância do erro de acompanhamento aumenta com $f_D T$, assim sendo as chances do receptor sair de um ponto de mínimo local também aumenta. Talvez isto explique os resultados apresentados na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Quantidade de blocos com percentual de erro superior a 1% para RSR=50 dB.

	BPSP-LMS	BPSP-KF1	BPSP-KF2
$f_D T = 0,001$	359	214	243
$f_D T = 0,003$	238	149	209
$f_D T = 0,005$	165	106	149

Nas Figuras 3.9 e 3.10 são apresentadas curvas de EQM para o esquema de recepção BPSP-KF2 com $f_D T = 0,005$, considerando RSR=30 e RSR=50 dB, respectivamente. Nessas figuras são apresentadas quatro curvas de aprendizagem, uma das quais, a que apresenta a pior característica de convergência, foi obtida considerando toda a massa de dados. As demais curvas foram obtidas desconsiderando blocos com fração de erros superior a 0,1%, 1% e 5%.

Todas as curvas apresentadas nas Figuras 3.9 e 3.10 provavelmente convergem, para o ponto de mínimo global, devido ao nível baixo de EQM atingido que é muito próximo da variância do ruído de observação⁷. Também se verifica em todos esses casos que o EQM se mantém neste nível até o final do bloco de informação (2500 símbolos), caracterizando o acompanhamento da RI do canal. É importante notar que as Figuras 3.9 e 3.10 mostram apenas parte inicial das curvas de aprendizagem a fim de ressaltar as diferenças na taxa de convergência.

Nas curvas de aprendizagem referentes à contabilização de toda a massa de dados, vê-se que a convergência se dá de forma mais lenta do que aquelas que foram obtidas com o descarte de blocos com maior concentração de erros. Em particular, para RSR de 30 dB nota-se que o patamar de regime estacionário só é atingido com aproximadamente 430 intervalos de símbolos. Esse mesmo nível é alcançado com 190, 90 e 60 intervalos de símbolos quando são desconsiderados os blocos com percentual de erros superior a 5%, 1% e 0,1%, respectivamente. Um comportamento similar pode ser observado quando a RSR é igual a 50 dB (Figura 3.10). Esse comportamento também se verificou em simulações com outros valores de RSR, cujos resultados não são aqui relatados.

Em suma, os blocos com muito erros parecem não prejudicar as características de regime estacionário do algoritmo adaptativo, mas certamente reduzem sobremodo a velocidade de convergência. Este comportamento também se fez presente nos resultados de simulação do mesmo receptor considerando os outros valores de $f_D T$, assim como para os outros esquemas aqui investigados, exceto que nesses casos as velocidades de convergência foram nitidamente menores.

Embora não sejam aqui mostrados, é importante acrescentar que as curvas de aprendizagem referentes aos outros esquemas de recepção mostraram um comportamento oscilatório para $f_D T = 0,005$, indicando a possibilidade de perda de acompanhamento

⁷É importante lembrar dos erros de aproximação no modelo estatístico do canal e da redução do espaço de busca, que podem ter provocado a pequena diferença observada entre a variância do ruído e o nível de EQM em regime permanente.

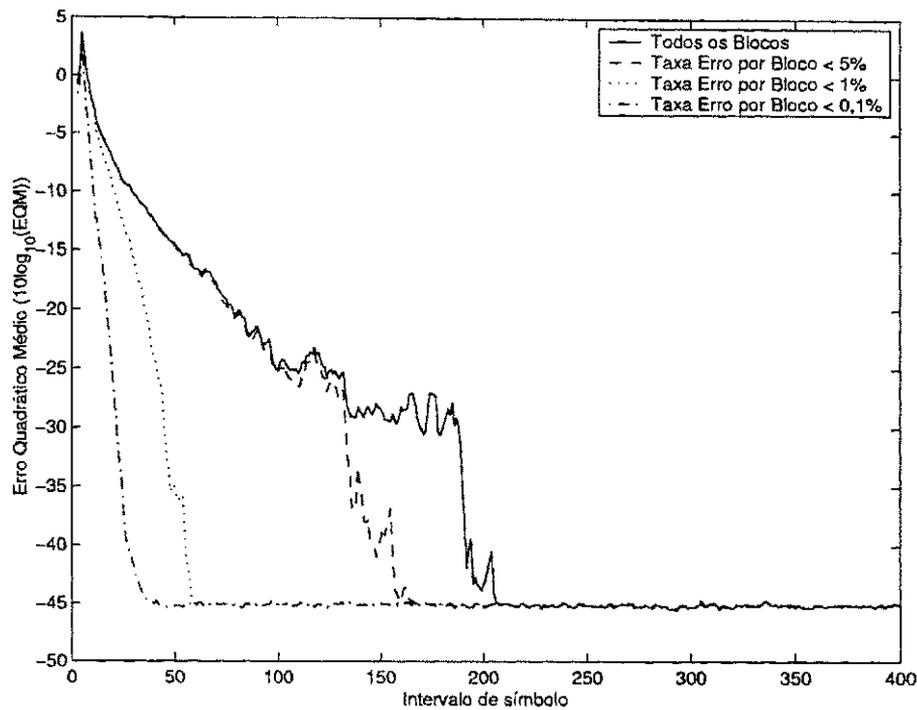


Figura 3.10: Curvas de aprendizagem referente ao receptor BPSP-KF2, para $f_D T = 0,005$ e $RSR=50$ dB.

aqui sugerida para este comportamento se baseia na existência de mínimos locais na função custo e na maior dificuldade de fugir desses pontos com a diminuição do efeito Doppler.

Mostrou-se também que os blocos com muitos erros parecem não afetar o comportamento de regime permanente do estimador de canal, mas são especialmente importantes para caracterizar o comportamento de transitório. Verificou-se que à medida que os blocos com muitos erros eram descartados, as velocidades de convergência dos algoritmos de filtragem adaptativa melhoravam sensivelmente.

A existência de blocos com muitos erros, reduziu o nível médio de desempenho dos esquemas avaliados, de forma que todos apresentaram elevados patamares de taxa de erro irreduzível. No entanto ao se obter esse indicador descartando blocos muito degradados, verificou-se que o esquema de recepção BPSP-KF2 possui características de desempenho melhores do que os outros dois aqui investigados.

No próximo capítulo é proposto um procedimento para detectar a presença de erros de detecção em equalizadores adaptativos, que pode ser adotado tanto em receptores com treinamento quanto nos cegos. Este procedimento será em seguida aplicado ao

esquema de recepção BPSP-KF2.

Capítulo 4

Detecção de Erros de Equalização para Canais Variantes no Tempo

Neste capítulo é proposto um procedimento para detectar a presença de erros de equalização em receptores digitais para aplicações que envolvem canais caracterizados pelo efeito de desvanecimento variante no tempo e seletivo em frequência (DVSF). O procedimento proposto pode ser empregado em conjunto com qualquer esquema de modulação e de equalização adaptativa. Ele opera diretamente sobre a seqüência de símbolos detectada e se baseia no novo conceito de diversidade em filtragem, aqui concebido de maneira heurística.

O restante deste capítulo é organizado da seguinte maneira. Na Seção 4.1, a idéia que deu origem ao procedimento proposto é discutida de forma genérica. No final desta seção, o procedimento é apresentado em termos mais concretos, através da definição de um teste de hipóteses acerca do desempenho do esquema de recepção. Na Seção 4.2, admitindo um conjunto de suposições adequadas, a função densidade de probabilidade da variável de teste é obtida. Na Seção 4.3 são apresentados dois conjuntos de resultados numéricos referentes à técnica proposta: o primeiro deles contém resultados que foram obtidos sem discutir o tipo de equalizador usado, ao passo que o segundo diz respeito à avaliação de desempenho do esquema de recepção BPSP-KF2, que emprega o procedimento aqui proposto. Finalmente, na última seção deste capítulo são incluídas as conclusões dessa investigação.

4.1 Concepção Básica

Nos receptores digitais que operam em canais variantes no tempo é comum ocorrer muitos erros dentro de um curto intervalo de tempo. Nesses casos, dependendo do esquema de recepção envolvido, é preciso lançar mão de uma ajuda externa para que o enlace físico dos sistemas de comunicações opere em níveis aceitáveis. A concentração de erros no processo de detecção é usualmente denominada surto [22].

Alguns dos fatores que podem contribuir para causar o surgimento de surtos são a perda de acompanhamento da RI do canal, o nível elevado de ruído, a propagação de erros nos equalizadores que utilizam estruturas com realimentação de decisão, a obtenção de soluções sub-ótimas em esquemas que adotam funções custo multimodais e a restrição do espaço de busca para determinação dos símbolos transmitidos e/ou de parâmetros do equalizador.

Os fatores supracitados podem surgir isolada ou conjuntamente, quer seja no contexto dos sistemas de comunicações que empregam seqüências de treinamento ou no daqueles que adotam abordagem cega. É evidente que nas aplicações que envolvem o uso de seqüência de treinamento, obtém-se, geralmente, boa estimativa dos parâmetros do receptor antes de se iniciar a fase de detecção da informação transmitida, o que contribui para diminuir a ocorrência de surtos. No entanto, é comum utilizar os símbolos detectados no equalizador, quer seja para realizar acompanhamento de parâmetros variantes no tempo, quer seja para ajudar no combate à IES. Nesses casos, símbolos erroneamente detectados podem vir a comprometer detecções subseqüentes e criar o efeito de surto. Sendo assim, procedimentos que identifiquem a sua ocorrência podem permitir uma melhoria substancial de desempenho.

No que se refere especificamente aos receptores cegos, detectar a ocorrência de erros de equalização é uma tarefa ao mesmo tempo importante e complexa, o que se deve a pelo menos duas razões. Em primeiro lugar, os surtos ocorrem com maior freqüência. Em segundo lugar, como o transmissor não auxilia o receptor, é muito difícil inferir sobre a qualidade dos símbolos que estão sendo detectados. Nesses esquemas de recepção, dentre os fatores capazes de gerar surtos, são especialmente importantes aqueles relacionados com problemas de convergência. Muitos desses esquemas realizam busca de pontos ótimos em superfícies multimodais havendo, portanto, problemas típicos de convergência para pontos de mínimos locais, o que é muitas vezes resultado do fato de não se poder admitir uma boa escolha inicial para os parâmetros do equalizador. Além

disso, no afã de reduzir a complexidade do receptor, às vezes se reduz o espaço de busca dos parâmetros a serem estimados, o que pode também determinar a convergência para pontos de mínimos locais, como ocorre, por exemplo, nos esquemas de recepção BMLSE-PSP discutidos no Capítulo 3.

O tema de detecção de erros de equalização foi abordado em [23, 24] considerando canais invariantes no tempo durante o período de execução do teste. As técnicas propostas naqueles artigos exploram a relação existente entre a presença de erros de equalização e as variações temporais do sistema linear subjacente cujas entrada e saída são dadas respectivamente pela seqüência de símbolos detectada e pelas observações na entrada do receptor.

Essas técnicas, conforme resultados numéricos apresentados nas referências supracitadas, possuem capacidade de detecção elevada, induzem retardo de poucos símbolos e podem ser utilizadas em qualquer esquema de equalização. No entanto, elas apresentam alguns inconvenientes, sendo os principais a complexidade computacional elevada e o uso explícito da suposição de canal invariante, o que restringe o escopo de aplicação dessas técnicas.

Neste capítulo, uma técnica para detecção de erros de equalização em canais variantes no tempo é proposta. A capacidade para operar nesses canais é herdada ou advém do uso de filtros adaptativos. Além disso, a técnica proposta possui complexidade computacional baixa.

O procedimento proposto foi concebido para operar diretamente sobre a seqüência detectada pelo receptor (seqüência de referência) e se baseia no uso do novo conceito de *diversidade em filtragem* ou *diversidade de estimadores*. De acordo com a idéia de diversidade em filtragem, dois estimadores ou algoritmos de filtragem adaptativa despolarizados com características distintas de robustez a erros relativo à seqüência de referência, quando operam em paralelo utilizando uma seqüência de referência que contém erros revelam em suas saídas comportamentos distintos.

Existem diversos algoritmos de filtragem adaptativa, com variados graus de desempenho e complexidade. Velocidade de convergência, capacidade de rastreamento dos parâmetros estimados, complexidade computacional, susceptibilidade a erros nos modelos ou nos sinais de referência e robustez frente ao ruído são alguns dos indicadores importantes para quantificar ou qualificar o funcionamento dos algoritmos de filtragem.

Dois importantes algoritmos de filtragem adaptativa são o LMS e o KF [5, 8], os quais possuem propriedades bem distintas. O último algoritmo possui características

de desempenho excelentes quando são empregados modelos estatísticos bem ajustados aos parâmetros que devem ser estimados. Nesses casos, é comum observar boas velocidade de convergência e capacidade de acompanhamento da evolução temporal dos parâmetros envolvidos. O KF no entanto, em geral possui complexidade computacional elevada e, em alguns casos, apresenta problemas de instabilidade numérica. O algoritmo de filtragem adaptativa LMS, por seu turno, possui complexidade computacional baixa, mas, dentre outros inconvenientes, apresenta problemas de rastreamento quando utilizado para estimar parâmetros que variam rapidamente no tempo.

Admitindo que os símbolos que trafegam na camada física de um sistema de comunicação móvel são independentes e identicamente distribuídos (IID), que a taxa de amostragem do receptor é igual à taxa de símbolos e que são usadas seqüências de treinamento para estimação da RI do canal, é razoável esperar que em regime permanente as estimativas dos parâmetros obtidas pelos algoritmos LMS e KF sejam bem parecidas. Nessas condições, tais algoritmos possuem rápida velocidade de convergência¹ e produzem estimativas despolarizadas. Por outro lado, quando a seqüência de referência utilizada por esses algoritmos para produzir suas estimativas contém erros, os comportamentos observados são bem distintos. Em particular, o LMS é bastante sensível a esses erros, ao contrário do algoritmo KF², principalmente quando é empregado em sua equação de estados um modelo estatístico bem ajustado ao canal de comunicação.

Em suma, quando os algoritmos usam sinais de referências corretos, há uma expectativa de comportamentos similares. Por outro lado, quando a seqüência de referência contém erros há expectativa de comportamentos diferenciados. É esse tipo de comportamento que serve de motivação para denominar o uso de filtros adaptativos em paralelo com tais propriedades de diversidade em filtragem, uma vez que a partir de uma única seqüência de referência são geradas instantaneamente duas observações (estimativas da resposta ao impulso do canal) que conjuntamente contém alguma informação a respeito dos erros de equalização, o que não se verifica quando se dispõe de apenas um estimador.

À luz da discussão apresentada nos parágrafos anteriores propõe-se o esquema para

¹Malgrado a maior velocidade de convergência do filtro de Kalman, é nessa situação que o LMS atinge os melhores resultados no que concerne à taxa de aprendizagem e ao valor de EQM em regime permanente [5, 8].

²A característica de robustez a erros na seqüência de referência que este algoritmo possui, decorre do emprego de um modelo que caracteriza estatisticamente a evolução temporal dos parâmetros a serem estimados.

detecção de erros na saída de receptores adaptativos ilustrado no diagrama de blocos da Figura 4.1, no qual o receptor adaptativo é genérico e o canal de comunicação possui resposta ao impulso caracterizada pelo efeito de DVSF.

Conforme ilustrado na Figura 4.1, o procedimento proposto consiste basicamente em realizar um teste de hipóteses observando as saídas dos dois estimadores da RI do canal. Esses estimadores usam como seqüência de referência a seqüência de símbolos detectada pelo receptor adaptativo, e como observação o sinal em tempo discreto presente na entrada do receptor.

Como mencionado anteriormente, os estimadores devem ser despolarizados e possuir características distintas de robustez a erros na seqüência de referência. Uma opção interessante é utilizar o algoritmo LMS e o KF com modelo estatístico bem ajustado ao do canal.

Pelas características de desempenho desses algoritmos, é razoável esperar a ocorrência de duas situações típicas na comparação das estimativas da RI do canal obtidas. A primeira delas se daria quando a seqüência de referência fosse igual à seqüência transmitida. Neste caso, como os estimadores são despolarizados, as estimativas por eles fornecidas tenderiam para a RI do canal de comunicação. Por outro lado, quando a seqüência de referência contiver erros espera-se que as estimativas obtidas pelos dois estimadores sejam diferentes.

Diante do acima exposto, e considerando que o receptor adaptativo está recebendo símbolos desconhecidos, é razoável afirmar que se as estimativas se aproximarem, provavelmente o receptor adaptativo estará operando adequadamente. Do contrário, poderá estar ocorrendo erros em surto, em decorrência de algum dos motivos ventilados no início deste capítulo. Neste último caso, o processo de recepção deve ser reinicializado e as observações descartadas ou armazenadas para posterior processamento, conforme as exigências da aplicação em questão.

Para implementar a técnica de detecção de erros acima delineada é necessário definir um teste estatístico, que utilize uma medida adequada da separação entre as estimativas obtidas pelos dois estimadores e a compare com um limiar para decidir sobre a hipótese de ocorrência de erros em surto.

Neste trabalho será considerado como estatística de teste para detecção de erros de equalização, aqui denotado por T_{DS} , o módulo da diferença entre as estimativas da RI do canal obtidas pelos dois estimadores. Admitindo que a RI do canal possui L

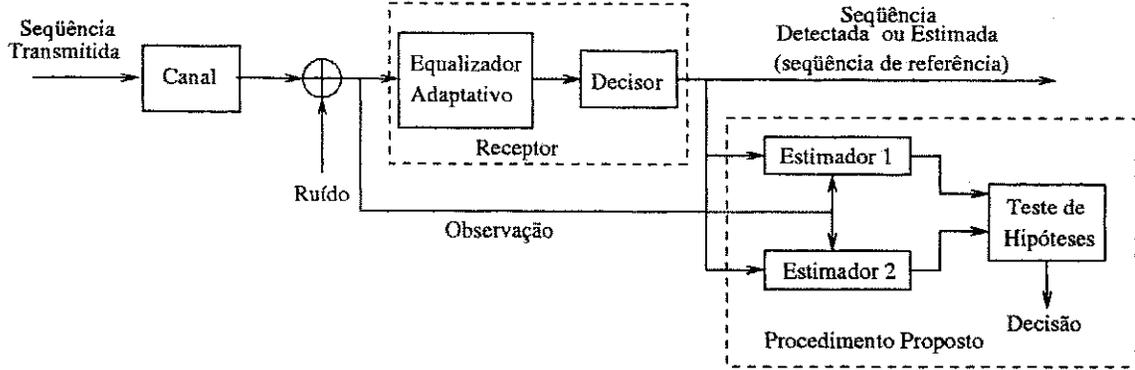


Figura 4.1: Diagrama de blocos simplificado de um sistema de comunicações que emprega o esquema proposto para detectar erros de equalização.

coeficientes, T_{DS} fica dada por

$$T_{DS} = (\hat{\mathbf{h}}_1(k) - \hat{\mathbf{h}}_2(k))^* (\hat{\mathbf{h}}_1(k) - \hat{\mathbf{h}}_2(k)) = \sum_{i=0}^{L-1} \left| \hat{h}_i^1(k) - \hat{h}_i^2(k) \right|^2, \quad (4.1)$$

sendo $\hat{\mathbf{h}}_1(k) = (h_0^1(k), \dots, h_{L-1}^1(k))'$ e $\hat{\mathbf{h}}_2(k) = (h_0^2(k), \dots, h_{L-1}^2(k))'$ as estimativas obtidas pelos Estimador 1 e Estimador 2 no k -ésimo intervalo de símbolo, respectivamente.

Antes de encerrar esta seção, vale mencionar que o próprio receptor adaptativo pode empregar um algoritmo de filtragem adaptativa para identificar a RI do canal. Neste caso, o procedimento proposto para detecção de erros de equalização irá requerer apenas um algoritmo adicional de filtragem adaptativa, além do cálculo da estatística de teste e comparação com limiar.

4.2 O Teste Estatístico

Nesta seção, considerando certas hipóteses de independência que serão explicitadas oportunamente, é obtida a função densidade de probabilidade condicional da variável de teste T_{DS} definida na seção anterior, dado que a sequência de referência não contém erros.

As estimativas fornecidas pelos estimadores podem ser escritas como

$$\hat{\mathbf{h}}_1(k) = \mathbf{h}(k) + \mathbf{e}_1(k) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{h}}_2(k) = \mathbf{h}(k) + \mathbf{e}_2(k), \quad (4.2)$$

sendo $e_1(k)$ e $e_2(k)$ vetores aleatórios de L componentes que modelam os erros produzidos pelos respectivos estimadores.

Considerando o uso de estimadores despolarizados e de ruído aditivo gaussiano com média nula, as componentes dos vetores aleatórios $e_1(k)$ e $e_2(k)$ podem ser modeladas por VAs conjuntamente gaussianas com média nula. As matrizes de covariâncias desses vetores aleatórios são denotadas por Λ_1 e Λ_2 , respectivamente.

Substituindo a Equação 4.2 na Equação 4.1, tem-se

$$T_{DS} = (e_1(k) - e_2(k))^*(e_1(k) - e_2(k)) = \sum_{l=0}^{L-1} |e_l^1(k) - e_l^2(k)|^2. \quad (4.3)$$

Para simplificar a modelagem estatística de T_{DS} , admite-se que as matrizes Λ_1 e Λ_2 são diagonais e que os vetores aleatórios $e_1(k)$ e $e_2(k)$ são estatisticamente independentes. Neste caso, considerando um determinado instante de tempo, a estatística de teste fica dada por

$$T_{DS} = \sum_{i=0}^{L-1} \alpha_i, \quad (4.4)$$

em que cada uma das VAs $\{\alpha_i\}$ segue uma distribuição exponencial [3]. As fdps dessas VAs, $\{f(\alpha_i)\}$, são dadas por

$$f(\alpha_i) = \frac{1}{\bar{\alpha}_i} \exp\left(\frac{-\alpha_i}{\bar{\alpha}_i}\right) \text{ para } \alpha_i \geq 0 \text{ e } i \in [0, L-1], \quad (4.5)$$

sendo que $\bar{\alpha}_i$ representa a média estatística da distribuição da VA referente à i -ésima componente³, que é dada pela soma das variâncias dos erros de estimação do i -ésimo coeficiente do canal produzidos pelos dois estimadores. Em termos algébricos tem-se

$$\bar{\alpha}_i = \Lambda_1(i, i) + \Lambda_2(i, i) \text{ para } i \in [0, L-1], \quad (4.6)$$

sendo $\Lambda_l(i, i)$ o i -ésimo elemento da diagonal principal de Λ_l , para $l = 1$ e 2 .

A função característica da VA α_i é

$$\Psi(w) = \frac{1}{1 - jw\bar{\alpha}_i}. \quad (4.7)$$

Considerando que as VAs $\{\alpha_i\}$ são estatisticamente independentes, a função característica de T_{DS} fica dada por

$$\Psi(w) = \prod_{i=0}^{L-1} \frac{1}{1 - jw\bar{\alpha}_i}. \quad (4.8)$$

³Para obter este resultado foi admitido que estas médias estatísticas são distintas. O resultado obtido considerando médias iguais também é abordado na referência [3].

Calculando a transformada inversa da função característica acima obtém-se a seguinte expressão para a fdp condicional da variável de teste T_{DS} , dada a ausência de erros

$$f(T_{DS}) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\Pi_i}{\bar{\alpha}_i} \exp\left(-\frac{T_{DS}}{\bar{\alpha}_i}\right) \text{ para } T_{DS} \geq 0, \quad (4.9)$$

com

$$\Pi_k = \prod_{i=0, i \neq k}^{L-1} \frac{\bar{\alpha}_k}{\bar{\alpha}_k - \bar{\alpha}_i}, \quad (4.10)$$

para $\bar{\alpha}_k$ distintos.⁴

Para implementar um teste de hipóteses ótimo, no sentido de minimizar a probabilidade de errar na detecção, seria necessário estabelecer a fdp da variável de teste condicionada à ocorrência de erros de equalização. A partir desta fdp e da obtida anteriormente, poder-se-ia buscar um limiar de detecção de mínima probabilidade de erro.

Contudo, é extremamente difícil estabelecer uma expressão fechada para a fdp condicionada à ocorrência de erros na seqüência de referência. Diante disso, optou-se por usar o critério de Neyman-Pearson [46], o qual, como se mostra a seguir, permite otimizar a escolha do limiar usando apenas a fdp condicional apresentada na Equação 4.9.

Seja P_{FA} a probabilidade de que a VA T_{DS} supere o limiar de decisão quando a seqüência de referência não contém erros. Nessa situação, o teste de hipóteses tomará uma decisão equivocada. O subscrito "FA" de P_{FA} faz alusão a expressão "Falso Alarme" comum na área de Radar e que é empregada para denotar a efeito de detectar um alvo quando de fato ele não existe [46].

É importante mencionar que a probabilidade de falso alarme pode ser reduzida aumentando o valor do limiar de decisão, porém isto reduz a probabilidade de detecção da ocorrência de erros, reduzindo a eficácia do procedimento. Para avaliar esta probabilidade de detecção seria preciso conhecer a fdp condicionada à ocorrência de erros na seqüência de referência, o que, por razões já mencionadas, não é viável.

A adoção do critério Neyman-Pearson e a avaliação qualitativa do efeito do limiar sobre a probabilidade de detecção permitem contornar este problema e estabelecer o limiar de detecção L_{DS} para um valor pré-estabelecido de P_{FA} . Neste caso a P_{FA} é

⁴Uma expressão para esta função de densidade de probabilidade considerando valores iguais de $\bar{\alpha}_k$ é apresentada em [5].

dada por

$$P_{FA} \triangleq \Pr(T_{DS} \geq L_{DS}) = \sum_{k=0}^{L-1} \Pi_k \exp\left(-\frac{L_{DS}}{\bar{\alpha}_k}\right). \quad (4.11)$$

A expressão acima pode ser invertida numericamente, para obter o valor do limiar que produz a probabilidade de falso alarme desejada. No entanto, caso a aplicação não exija soluções precisas, pode-se utilizar os seguintes limitantes para P_{FA} :

$$\begin{aligned} P_{FA} &\leq L\Pi_{max} \exp\left(-\frac{L_{DS}}{\bar{\alpha}_{max}}\right) = P_{FA}^{max}, \\ P_{FA} &\geq L\Pi_{min} \exp\left(-\frac{L_{DS}}{\bar{\alpha}_{min}}\right) = P_{FA}^{min}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

sendo Π_{max} e $\bar{\alpha}_{max}$ os valores máximos de $\{\Pi_k\}$ e $\{\bar{\alpha}_k\}$, respectivamente, ao passo que Π_{min} e $\bar{\alpha}_{min}$ são os valores mínimos de $\{\Pi_k\}$ e $\{\bar{\alpha}_k\}$, respectivamente.

Usando esses limitantes, o limiar de decisão fica confinado ao intervalo

$$\bar{\alpha}_{min} \left\{ \ln \left[\frac{L\Pi_{min}}{P_{FA}} \right] \right\} \leq L_{DS} \leq \bar{\alpha}_{max} \left\{ \ln \left[\frac{L\Pi_{max}}{P_{FA}} \right] \right\}, \quad (4.13)$$

na qual $\ln(\cdot)$ representa o logaritmo natural do seu argumento.

4.3 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados resultados de simulações computacionais referentes ao procedimento de detecção de erros de equalização proposto. Inicialmente, esses resultados foram obtidos sem entrar em detalhes a respeito do esquema de recepção envolvido. Posteriormente, são mostrados e discutidos resultados particulares de desempenho do esquema de recepção BPSP-KF2 empregando este procedimento de detecção de erros. Por razões que serão discutidas adiante, emprega-se neste caso o algoritmo de Viterbi para realizar a escolha das seqüências sobreviventes e não o algoritmo M, como ocorreu no Capítulo 3.

O modelo de canal usado foi apresentado na Seção 2.1. Em particular, são considerados $L = 3$ e dois valores de $f_D T$: 0,001 e 0,01. Foram também produzidos outros resultados de simulações, não apresentados aqui para fins de concisão do texto, contemplando canais com uma quantidade maior de raios. É importante mencionar que a essência destes resultados é a mesma dos que se seguem.

Os algoritmos de filtragem adaptativa adotados no procedimento de detecção de erros de equalização são o LMS, referido com Estimador 1, e o filtro de Kalman, referido como o Estimador 2. Neste último caso foi adotado o modelo autoregressivo de segunda ordem para aproximar a evolução temporal da RI do canal na equação de estado. Vale mencionar que o modelo em espaço de estados empregado é um caso particular do apresentado no Capítulo 3, com $M = 2$.

O passo do algoritmo LMS foi estabelecido analiticamente, de acordo com o procedimento apresentado no Capítulo 2. Para tal, além dos parâmetros mencionados na Seção 2.1, foi admitido o conhecimento da velocidade do equipamento de recepção. Em adição, para determinação de alguns parâmetros estatísticos empregados pelo procedimento de detecção de erros de equalização, admitiu-se também o conhecimento do perfil de intensidade de multipercurso.

Sendo σ_1^2 a variância mínima do erro quadrático médio em regime permanente do algoritmo LMS, conforme resultados apresentados no Capítulo 2, e $\sigma_{c_i}^2$ a potência canalizada pelo i -ésimo coeficiente da RI do canal, cujo valor é especificado pelo perfil de intensidade de multipercurso do canal (Apêndice B), tem-se $\Lambda_1(i, i) = \sigma_{c_i}^2 \sigma_1^2$. Por outro lado, $\Lambda_2(i, i)$ é a variância do erro de estimação obtida pelo filtro de Kalman, cujo valor é fornecido recursivamente pelo referido esquema de filtragem.

Com as definições apresentadas acima, as médias das distribuições $\{\bar{\alpha}_i\}$ ficam especificadas e, por conseguinte, também o fica a função densidade de probabilidade da variável de teste T_{DS} condicionada à ausência de erros de detecção.

Na obtenção de todos os resultados apresentados a seguir, os limiares do teste de hipóteses foram estabelecidos considerando o valor superior da faixa apresentada na Equação 4.13, de modo que a probabilidade de falso alarme fosse atendida com folga.

4.3.1 Resultados Obtidos Gerando os Erros na Saída do Receptor

Nesta seção, pretende-se ressaltar o caráter geral do procedimento de detecção de erros. Para tal são apresentados resultados de simulações deste procedimento introduzindo erros na seqüência transmitida para gerar a seqüência de referência, sem simular nenhum sistema de comunicações específico. Os resultados foram obtidos sob condições de variação da quantidade de erros dentro de um bloco de tamanho pré-fixado, da RSR e de alguns parâmetros do canal.

Os resultados de simulação computacional são mostrados nas Tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 e representam o percentual de blocos que são classificados pelo teste de hipóteses como apresentando surtos, ou seja, o percentual de blocos cuja variável de teste supera o limiar de comparação. Cabe notar que esses resultados foram obtidos para limiares estabelecidos considerando valores da probabilidade de falso alarme máxima (P_{FA}^{max}) igual a 0,1 e 0,01.

As simulações foram realizadas considerando a transmissão de 500.000 blocos de símbolos QPSK estatisticamente independentes. Cada bloco contém uma quantidade pré-estabelecida de erros, indicada na segunda coluna das tabelas. Esses erros foram inseridos em posições aleatórias, escolhendo-se aleatória e independentemente um dos outros três símbolos da constelação para substituir o símbolo transmitido em cada posição onde se deseja gerar um erro.

As Tabelas 4.1 e 4.2 foram obtidas considerando a transmissão de blocos de dez símbolos, no início dos quais se dispunha de estimativas da RI do canal obtidas pelos algoritmos LMS e KF com o auxílio de uma seqüência de treinamento de trinta e dois símbolos⁵. A geração de cada tabela se diferencia apenas pelo valor assumido para a intensidade de efeito Doppler: $f_D T = 0,001$ para a Tabela 4.1 e $f_D T = 0,01$ para a outra.

Conforme se pode verificar nessas tabelas, o procedimento proposto funciona muito bem. Em particular, pode-se observar na Tabela 4.1 que mais de 85% dos blocos que contêm apenas um erro são detectados para uma RSR de apenas 20 dB. Verifica-se também, como era de se esperar, que a eficiência da técnica melhora ainda mais com o aumento da RSR e/ou da quantidade de símbolos errados por bloco. Pode-se notar que, considerando uma RSR de 40 dB, todos os blocos contendo mais de dois erros foram detectados. Mesmo considerando uma RSR de 20 dB, mais de 99% dos blocos com essa quantidade de erros foram detectados.

Da comparação dos resultados obtidos para $P_{FA}^{max} = 0,1$ e $P_{FA}^{max} = 0,01$ outros aspectos interessantes, que demonstram o bom funcionamento da técnica, podem ser notados. Para uma mesma RSR e quantidade de erros por bloco, verifica-se que a quantidade de blocos detectados cai quando P_{FA}^{max} diminui. É importante mencionar que outros testes, cujos resultados não são aqui relatados, realizados com outros valores de P_{FA}^{max} , confirmam esse comportamento. Trata-se de um resultado esperado, pois à

⁵Esse tipo de simulação visa contemplar os esquemas de comunicações móveis usuais, os quais fazem uso de seqüências de treinamento.

Tabela 4.1: Taxa de detecção de erros de equalização considerando seqüência de treinamento, bloco de tamanho 10, $f_D T = 0,001$ e alguns valores de RSR, de P_{FA}^{max} e da quantidade de erros por bloco.

$f_D T = 0,001$		$P_{FA}^{max} = 0,1$				$P_{FA}^{max} = 0,01$			
		10 dB	20 dB	30 dB	40 dB	10 dB	20 dB	30 dB	40 dB
Número de erros	0	0,0306	0,0032	0,0010	0,0067	0,0077	0,0004	0,0001	0,0017
	1	0,1861	0,8597	0,9880	0,9975	0,0892	0,7763	0,9806	0,9959
	2	0,4033	0,9667	0,9991	0,9999	0,2666	0,9391	0,9980	0,9998
	3	0,5988	0,9909	0,9998	1,0000	0,4592	0,9803	0,9996	1,0000
	4	0,7384	0,9965	0,9999	1,0000	0,6241	0,9923	0,9999	1,0000
	5	0,8374	0,9984	1,0000	1,0000	0,7491	0,9966	1,0000	1,0000
	6	0,9002	0,9993	1,0000	1,0000	0,8367	0,9986	1,0000	1,0000
	7	0,9383	0,9998	1,0000	1,0000	0,8924	0,9993	1,0000	1,0000
	8	0,9600	0,9998	1,0000	1,0000	0,9310	0,9997	1,0000	1,0000
	9	0,9733	0,9999	1,0000	1,0000	0,9553	0,9998	1,0000	1,0000
	10	0,9842	1,0000	1,0000	1,0000	0,9704	0,9999	1,0000	1,0000

medida que se reduz P_{FA}^{max} , aumenta-se o valor do limiar de decisão e conseqüentemente reduz-se a capacidade de detecção do procedimento.

Da comparação dos resultados apresentados na Tabela 4.1 com aqueles apresentados na Tabela 4.2, vê-se que houve apenas uma pequena degradação de desempenho, apesar da intensidade do efeito Doppler ter sido elevada em dez vezes, o que representa um resultado importante.

Os resultados apresentados nas Tabelas 4.3 e 4.4 foram obtidos considerando a transmissão de blocos contendo trinta e dois símbolos, no início dos quais foram utilizadas estimativas de RI do canal igual a um vetor nulo, com a intenção de modelar o que ocorre com os receptores cegos.

Na essência os resultados são similares aos apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2, sendo observada apenas uma pequena degradação de desempenho quando se compara caso a caso os resultados da Tabela 4.3 com os da Tabela 4.1 e os da Tabela 4.4 com os da Tabela 4.2. Esse comportamento é razoável diante das condições mais severas impostas para obtenção das Tabelas 4.3 e 4.4.

Tabela 4.2: Taxa de detecção de erros de equalização considerando seqüência de treinamento, blocos de tamanho 10, $f_D T = 0,01$ e alguns valores de RSR, de P_{FA}^{max} e da quantidade de erros por bloco.

$f_D T = 0,01$		$P_{FA}^{max} = 0,1$				$P_{FA}^{max} = 0,01$			
		10 dB	20 dB	30 dB	40 dB	10 dB	20 dB	30 dB	40 dB
Número de erros	0	0,0020	0,0983	0,0909	0,0709	0,0001	0,0095	0,0099	0,0098
	1	0,0503	0,5640	0,8139	0,7846	0,0107	0,3627	0,7011	0,7156
	2	0,1890	0,7998	0,9549	0,9498	0,0721	0,6532	0,9071	0,9207
	3	0,3631	0,9034	0,9855	0,9888	0,1881	0,8122	0,9678	0,9779
	4	0,5231	0,9530	0,9957	0,9974	0,3303	0,8985	0,9880	0,9931
	5	0,6535	0,9757	0,9979	0,9992	0,4631	0,9461	0,9939	0,9970
	6	0,7537	0,9868	0,9989	0,9997	0,5870	0,9689	0,9969	0,9988
	7	0,8248	0,9929	0,9996	0,9998	0,6867	0,9821	0,9989	0,9995
	8	0,8757	0,9959	0,9998	1,0000	0,7700	0,9891	0,9996	0,9998
	9	0,9126	0,9977	0,9999	1,0000	0,8216	0,9933	0,9998	0,9999
10	0,9373	0,9983	0,9999	1,0000	0,8756	0,9963	0,9997	0,9999	

Vale ressaltar que foram também produzidos resultados com blocos de 24 símbolos QPSK, os quais se mostraram bem parecidos com os acima comentados. Todo esse conjunto de resultados evidencia a validade do procedimento proposto e das expressões obtidas para a escolha do limiar de decisão nele usado.

Antes de encerrar esta seção é importante notar que, independente da RSR, os percentuais de blocos obtidos considerando seqüências de símbolos sem erros (resultados apresentados nas primeiras linhas das tabelas anteriores) são inferiores aos valores de P_{FA}^{max} considerados. Estes percentuais representam estimativas das respectivas probabilidades de falso alarme e estão em consonância com o que se deveria esperar (são menores do que os respectivos valores de P_{FA}^{max}).

Tabela 4.3: Taxa de detecção de erros de equalização para diferentes valores de RSR, P_{FA}^{max} e quantidade de erros por bloco de 32 símbolos. Os resultados foram obtidos sem treinamento, para $f_D T = 0,001$.

$f_D T = 0,001$		$P_{FA}^{max} = 0,1$				$P_{FA}^{max} = 0,01$			
		10 dB	20 dB	30 dB	40 dB	10 dB	20 dB	30 dB	40 dB
Número de erros	0	0,0998	0,0119	0,0016	0,0070	0,0099	0,0027	0,0001	0,0015
	1	0,1537	0,3838	0,8375	0,9589	0,0784	0,2758	0,7823	0,9368
	2	0,2092	0,6182	0,9679	0,9971	0,1171	0,5001	0,9467	0,9937
	3	0,2535	0,7496	0,9924	0,9995	0,1518	0,6428	0,9822	0,9989
	4	0,2971	0,8236	0,9964	1,0000	0,1849	0,7377	0,9930	0,9995
	5	0,3344	0,8734	0,9983	1,0000	0,2212	0,7988	0,9967	0,9999
	6	0,3640	0,8995	0,9993	1,0000	0,2474	0,8417	0,9982	1,0000
	7	0,3996	0,9231	0,9994	1,0000	0,2774	0,8685	0,9990	1,0000
	8	0,4292	0,9393	0,9997	1,0000	0,3024	0,8929	0,9993	1,0000
	9	0,4500	0,9452	0,9998	1,0000	0,3294	0,9107	0,9995	1,0000
	10	0,4745	0,9554	0,9998	1,0000	0,3455	0,9231	0,9997	1,0000

4.3.2 Desempenho de um Receptor BPSP-KF2 com Detecção de Ocorrência de Erros

Nesta seção é avaliado o desempenho do esquema de recepção BPSP-KF2 que utiliza o procedimento para detecção de erros de equalização proposto neste capítulo. É importante lembrar que este esquema de recepção emprega filtros de Kalman para obter um conjunto de estimativas condicionais da RI do canal, sendo preciso acrescentar a ele apenas um filtro adaptativo, no caso o LMS, para implementar a técnica de detecção de erros de equalização.

Para implementar o teste de hipóteses é preciso escolher uma das seqüências sobreviventes e a estimativa de canal a ela atrelada. O procedimento adotado para efetuar esta escolha é detalhado a seguir, com base na propriedade de fusão de seqüências sobreviventes (em inglês esta propriedade é denominada *merging*), característica da operação do algoritmo de Viterbi.

Esta propriedade é ilustrada na Figura 4.2, na qual se mostra uma treliça hipotética

Tabela 4.4: Taxa de detecção de erros de equalização para diferentes valores de RSR, P_{FA}^{max} e quantidade de erros por bloco de 32 símbolos. Os resultados foram obtidos sem treinamento, para $f_D T = 0,01$.

$f_D T = 0,01$		$P_{FA}^{max} = 0,1$				$P_{FA}^{max} = 0,01$			
		10 dB	20 dB	30 dB	40 dB	10 dB	20 dB	30 dB	40 dB
Número de erros	0	0,0008	0,0264	0,0890	0,0721	0,0001	0,0043	0,0098	0,0098
	1	0,0305	0,3163	0,4206	0,4034	0,0121	0,2272	0,3314	0,3311
	2	0,0714	0,5347	0,6381	0,6227	0,0328	0,4185	0,5504	0,5445
	3	0,1205	0,6859	0,7748	0,7612	0,0566	0,5727	0,6994	0,6957
	4	0,1735	0,7842	0,8599	0,8515	0,0874	0,6792	0,8015	0,7923
	5	0,2330	0,8527	0,9145	0,9068	0,1172	0,7674	0,8682	0,8645
	6	0,2816	0,8977	0,9469	0,9406	0,1541	0,8237	0,9129	0,9080
	7	0,3346	0,9285	0,9661	0,9623	0,1923	0,8705	0,9413	0,9382
	8	0,3863	0,9479	0,9788	0,9760	0,2283	0,9028	0,9610	0,9619
	9	0,4312	0,9628	0,9859	0,9847	0,2684	0,9253	0,9741	0,9729
	10	0,4695	0,9728	0,9902	0,9896	0,3013	0,9421	0,9818	0,9827

contendo quatro estados rotulados por 1, 2, 3 e 4. Vê-se nessa figura que no instante $(n-4) \times T$, sendo n a amostra processada por último, as quatro seqüências sobreviventes se fundem ou se aglutinam em um único estado: o estado 1. Deste ponto para trás, todas as seqüências sobreviventes são iguais e, como o AV retém apenas uma seqüência por estado, trata-se da parte inicial da seqüência de símbolos que será fornecida na saída do referido algoritmo ao término do processamento.

O fenômeno de confluência é aleatório, tanto no que se refere ao estado no qual ele ocorre, quanto no que tange ao retardo em relação ao instante de processamento. Porém, a probabilidade de que ele ocorra aumenta com o retardo e, em particular, quando o AV opera com o conhecimento da RI do canal, é possível mostrar que essa probabilidade se aproxima de 1 para um retardo igual a $5 \times (L - 1)$ intervalos de símbolos [48].

Devido à propriedade de confluência das seqüências sobreviventes apresentada pelo AV e à estrutura dos receptores MLSE-PSP, considerando um retardo de q intervalos de símbolos em relação ao intervalo atual de processamento, sendo $q \geq 5 \times (L - 1)$, é

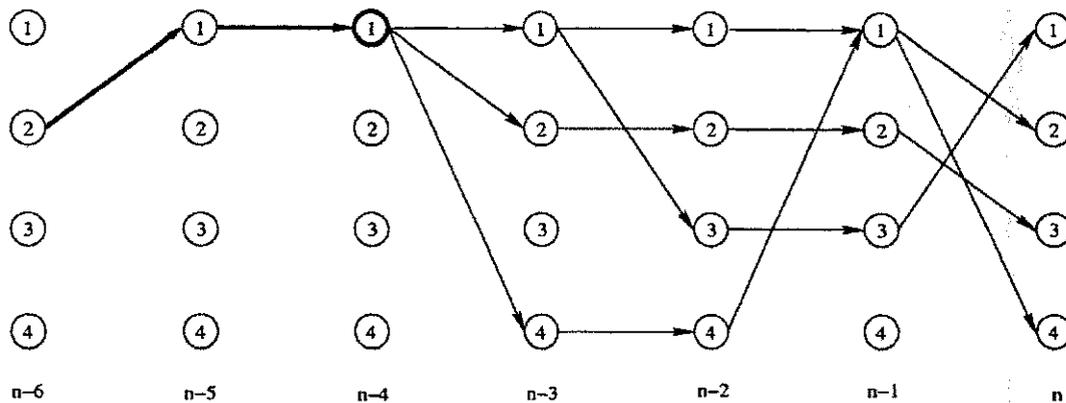


Figura 4.2: Diagrama em treliça no qual o AV realiza a busca das seqüências sobreviventes. Em destaque o ponto em que ocorre fusão dessas seqüências.

provável que todas as seqüências sobreviventes e conseqüentemente todas as estimativas condicionais da RI do canal sejam iguais.

Diante do exposto acima, propõe-se o esquema de recepção BPSP-KF2 cujo diagrama de blocos é mostrado na Figura 4.3, o qual incorpora a técnica de detecção de erros de equalização e será doravante denominado de BPSP-KF2 proposto.

Além dos blocos do esquema BPSP-KF2 convencional, vê-se na Figura 4.3 que o novo receptor conta ainda com um estimador LMS, um bloco que realiza o teste de hipóteses relativo a ocorrência de erros e células de memória para armazenar amostras passadas do vetor de observação, da seqüência de referência e da RI do canal. É importante lembrar que a seqüência de referência é qualquer uma das seqüências sobreviventes com retardo de q símbolos, o qual deve ser suficiente para garantir uma elevada probabilidade de ocorrência da fusão de seqüências sobreviventes.

O tempo considerado para realizar o teste de hipóteses é um parâmetro que deve afetar sobremodo o desempenho do procedimento proposto, especialmente, em canais caracterizados pelo efeito de desvanecimento rápido e seletivo em freqüência. Nestes casos, o retardo deve por um lado ser suficientemente grande para que se verifique a convergência do algoritmo LMS e, por outro lado, deve ser o menor possível para evitar problemas de perda de acompanhamento do LMS. Há de se considerar também que o teste de hipóteses deve ser realizado o mais rápido possível para aumentar a eficiência do esquema de recepção.

Antes de iniciar a discussão dos resultados é cabível realizar dois comentários importantes. Em primeiro lugar, a propriedade de confluência das seqüências sobreviventes

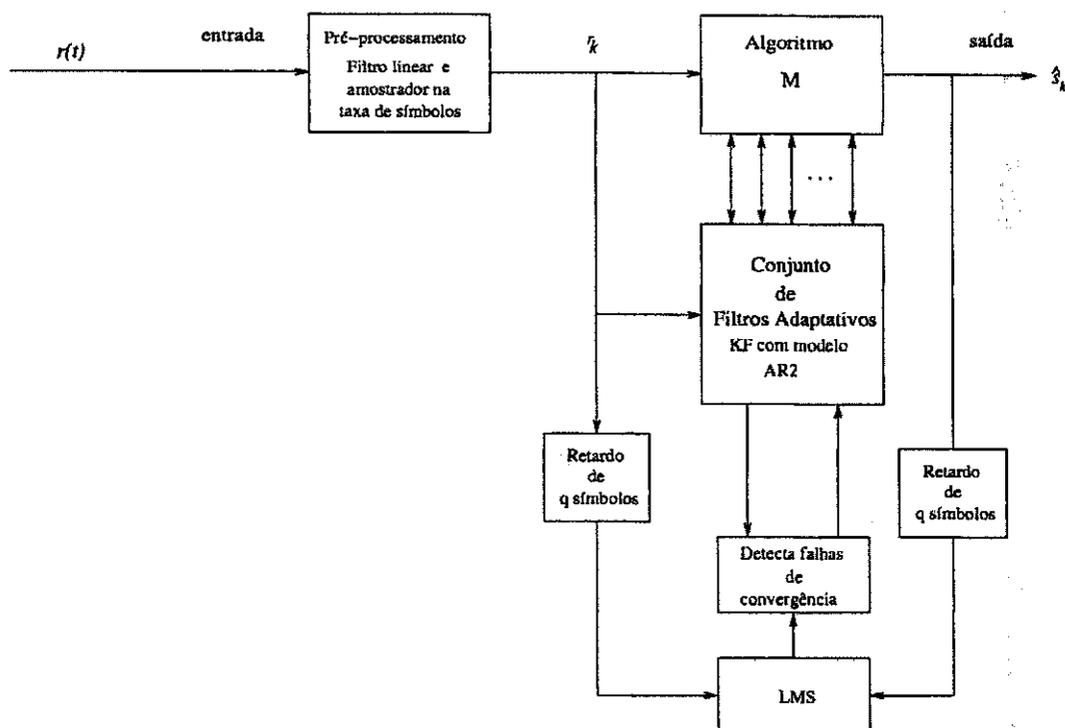


Figura 4.3: Esquema de recepção BPSP-KF2 proposto.

facilita a escolha da seqüência de referência e a estimativa condicional de canal. Este foi o motivo peremptório para o uso do algoritmo de Viterbi no contexto aqui investigado. No entanto, os parâmetros supracitados podem ser estabelecidos, de maneira pragmática, escolhendo o estado que apresente menor custo. Esta abordagem pode ser empregada para qualquer algoritmo de busca.

Em segundo lugar, se a hipótese de ocorrência de erro for verificada, os estimadores de canal devem ser reinicializados, e as observações descartadas ou armazenadas para posterior processamento, conforme os requisitos da aplicação em questão. Cabe observar, que esta escolha influencia no dimensionamento do *buffer*.

Os resultados de simulação apresentados nesta seção, foram obtidos descartando os símbolos que provocam a verificação da hipótese de erro de equalização.

O efeito do uso do procedimento de detecção de erros de equalização no esquema BPSP-KF2, para $f_D T = 0,005$ e $L = 3$, é ilustrado nas Figuras 4.4 e 4.5. A primeira apresenta a SER em função da RSR, ao passo que o segundo mostra curvas de aprendizagem. Nos dois casos são exibidas quatro curvas, uma referente ao esquema convencional e as outras decorrem da adoção do procedimento proposto. Estas últimas

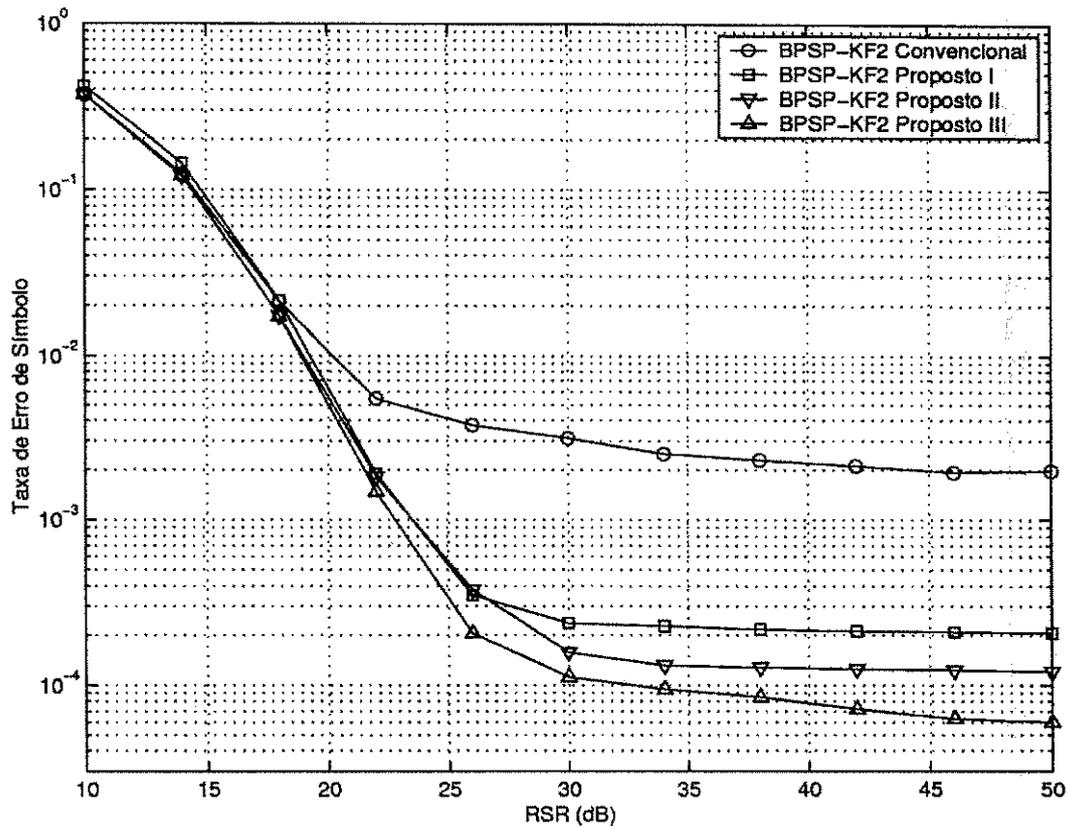


Figura 4.4: Efeito da técnica de detecção de erros de equalização no desempenho do esquema de recepção BPSP-KF2.

são rotuladas por BPSP-KF2 Proposto I, BPSP-KF2 Proposto II e BPSP-KF2 Proposto III, e foram obtidas considerando $P_{FA}^{max} = 0,01$, 10 símbolos de retardo ($q = 10$). Os quais se diferenciam pelo instante em que é realizado o teste de hipóteses, que foi fixado no vigésimo, trigésimo e quadragésimo intervalo de símbolo, para a obtenção das curvas dos esquemas BPSP-KF2 Proposto I, II e III, respectivamente.

Os resultados obtidos mostram claramente que a adoção da técnica de detecção de erros de equalização permite melhorar sensivelmente as características de desempenho do esquema de recepção BPSP-KF2. No que se refere à taxa de erro de símbolo (veja Figura 4.4) o patamar de PEI é reduzido sobremodo, principalmente considerando o esquema de recepção BPSP-KF2 Proposto III. Neste caso, a PEI passa de 2×10^{-3} para 6×10^{-5} . Os patamares de PEI para os esquemas de recepção BPSP-KF2 Proposto I e BPSP-KF2 Proposto II são 1×10^{-3} e 2×10^{-4} , respectivamente.

Na Figura 4.5 são apresentadas curvas de aprendizagem para os esquemas de re-

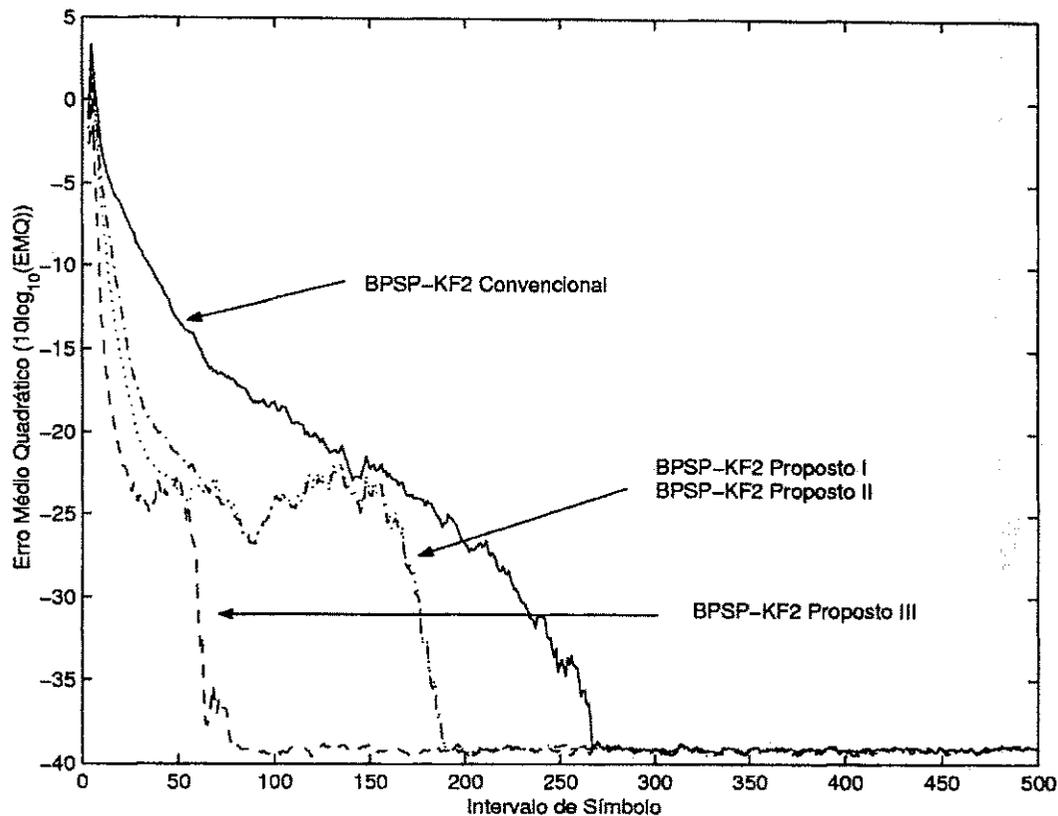


Figura 4.5: Efeito da técnica de detecção de erros de equalização na curva de aprendizagem do esquema de recepção BPSP-KF2 para RSR=40 dB.

cepção BPSP-KF2 Convencional, Proposto I, II e III. Essas curvas foram obtidas considerando 40 dB de RSR e a seqüência ML estimada. Vê-se que a adoção da técnica de detecção de erros de equalização permite melhorar as características de transitório do algoritmo de filtragem adaptativa, fato que foi corroborado por resultados obtidos considerando outros valores de RSR.

Para o esquema de recepção convencional, o nível de erro em regime estacionário é atingido apenas após 270 símbolos, ao passo que esse mesmo nível é alcançado com 190 símbolos para os esquemas BPSP-KF2 Proposto I e BPSP-KF2 Proposto II, e com apenas 70 símbolos para o esquema de recepção BPSP-KF2 Proposto III.

Como mencionado anteriormente, os resultados aqui apresentados foram obtidos descartando os símbolos pertencentes aos blocos cujos valores da variável de teste supera o limiar. Isso tem uma implicação na vazão da informação do esquema de recepção proposto. A Tabela 4.5 mostra a vazão atingida pelos esquemas propostos

Tabela 4.5: Vazão da informação do esquema BPSP-KF2 para diversos valores de RSR.

RSR	BPSP-KF2 Proposto I	BPSP-KF2 Proposto II	BPSP-KF2 Proposto III
10	0,9924	0,9923	0,9914
14	0,9916	0,9919	0,9915
18	0,9900	0,9910	0,9907
22	0,9887	0,9892	0,9899
26	0,9855	0,9867	0,9886
30	0,9829	0,9845	0,9894
34	0,9804	0,9854	0,9912
38	0,9812	0,9890	0,9914
42	0,9824	0,9910	0,9911
46	0,9855	0,9912	0,9919
50	0,9881	0,9923	0,9921

para diversos valores de RSR. Os valores mostrados nesta tabela são dados pela razão entre a quantidade de símbolos detectados pela quantidade de símbolos transmitidos.

Para todos os esquemas propostos e RSR investigadas, verifica-se, na Tabela 4.5, que atingiu-se vazão superior a 98%, o que é um indicativo do bom funcionamento do procedimento de detecção de erro de equalização proposto.

4.4 Considerações Finais

Neste capítulo foi proposto um procedimento para detectar erros de equalização com base no uso de estimativas de canal fornecidas por dois estimadores despolarizados e que possuem características distintas no que se refere à robustez a erros na seqüência de referência. O procedimento desenvolvido contempla aplicações que envolvem canais com desvanecimento variante no tempo e seletivo em frequência, é simples e apresenta excelentes características de desempenho.

Capítulo 5

Redução de ruído no Processamento de Entrada de Receptores Digitais: Proposição e Análise de Desempenho em Canais AWGN com Modulação BPSK

Neste capítulo é proposto um novo processamento de entrada para receptores digitais, cuja capacidade de remoção do ruído se baseia no uso de técnicas de *denoising*, em contraposição às técnicas convencionais que se baseiam no uso de filtros lineares e invariantes ao deslocamento.

De um lado, motivado pelo desejo de avaliar analiticamente o desempenho de esquemas de recepção que incorporam o processamento de entrada aqui proposto e, de outro lado, constatando a enorme dificuldade em contemplar, nessa análise, canais seletivos na frequência e/ou no tempo, será investigado um sistema de comunicação bastante simples no qual emprega-se modulação BPSK e canal AWGN, sendo este um primeiro passo para se investigar analiticamente o uso do referido processamento em sistemas de comunicações mais complexos.

Inicialmente, na Seção 5.1, são apresentados os fatores ou aspectos que motivaram o uso de técnicas de *denoising* para remover ruído no contexto dos sistemas de comunicações. Essa discussão contempla aspectos que se referem a sistemas de comunicações mais complexos do que os discutidos neste capítulo, principalmente no que tange ao

modelo de canal adotado. A Seção 5.2 se destina à discussão das técnicas de *denoising* em um contexto geral, abordando dois esquemas tradicionais que empregam limiar de escopo global. Na Seção 5.3 o processamento de entrada proposto é apresentado e, no final desta seção, obtém-se uma aproximação analítica para a função densidade de probabilidade do sinal em sua saída. Na Seção 5.4 é realizado o cálculo da probabilidade de erro de bit de um esquema de recepção que emprega a estrutura de processamento de entrada proposta. Na Seção 5.5 são apresentados os resultados numéricos e finalmente na Seção 5.6 são apresentadas as conclusões referentes a este capítulo.

5.1 Considerações preliminares

IES e ruído são dois dos principais fatores que comprometem a confiabilidade da camada física dos sistemas de comunicações digitais que operam em canais seletivos em frequência. Ao longo dos anos pesquisas vêm sendo realizadas com o intuito de mudar essa realidade, apesar do progressivo e incessante aumento de demanda por serviços e produtos de comunicações digitais, que impõe a necessidade de eficiência espectral cada vez maior, e do uso de cenários cada vez mais severos para o projeto de sistemas de comunicações.

Conforme discutido no capítulo introdutório deste trabalho, a IES é controlada ou combatida pelas técnicas de equalização. O efeito do ruído, por seu turno, pode ser combatido com o uso de filtros lineares previamente projetados. Em canais AWGN essa abordagem conduz ao projeto de MF, o qual permite maximizar a RSR nos instantes de amostragem na taxa de símbolos, promovendo uma conversão analógico-digital ótima nesse sentido. Em canais seletivos em frequência e variantes no tempo muitas das estruturas de processamento de entrada apontam também para o projeto de filtros lineares, no entanto nesse caso filtros previamente projetados não conseguem maximizar a RSR nos instantes de amostragem. Isso poderia ser obtido com o uso de filtros adaptativos, mas essa abordagem pode provocar instabilidades no esquema de recepção devido à necessidade de se utilizar no processamento de entrada símbolos previamente detectados.

É importante ressaltar que o MF é um procedimento linear projetado com o intuito de maximizar a RSR nos instantes de amostragem na taxa de símbolos. Aqui propõe-se uma estrutura de processamento de entrada não-linear, implementada no domínio da transformada *wavelet* e que pode ser projetada para otimizar a probabilidade de erro

do sistema.

A comparação de desempenho do esquema proposto com relação ao MF é uma questão ainda em aberto e será obtida como desdobramento dos resultados apresentados neste trabalho. No entanto, as expectativas são boas, tendo em vista o critério de otimização empregado e o potencial da transformada *wavelet* e das técnicas de *denoising*, que vêm sendo utilizadas com sucesso em outras aplicações.

As técnicas de *denoising* mais conhecidas são procedimentos de estimação não-lineares, não-paramétricos e que são realizados no domínio da transformada *wavelet*. Esses procedimentos tomam os coeficientes da expansão *wavelet* e excluem do processo de síntese componentes que estão abaixo de um determinado limiar. O objetivo é eliminar os coeficientes que decorrem unicamente da decomposição do ruído ou de componentes formadas pela junção de ruído e de porções de sinal com pouca energia. Vale ressaltar que nesse último caso ocorrerá distorção no sinal de interesse, efeito que deve ser controlado, sob pena de degradar o desempenho do sistema, apesar da redução do nível de ruído.

Embora a abordagem analítica apresentada neste capítulo contemple apenas canais AWGN, muitas das motivações para investigar o uso das técnicas de *denoising* em receptores digitais advêm de particularidades que se adequam a canais mais complexos, como os caracterizados pelo efeito de DVSF. Dentre os aspectos que motivaram o uso dessas técnicas destacam-se:

- devido à limitação de banda exercida pelos filtros de transmissão os sinais na entrada do procedimento de *denoising* são suaves e, como é sabido da teoria de *denoising*, esse é um requisito importante para o bom desempenho desses procedimentos;
- não é preciso conhecer a resposta ao impulso do canal. Essa talvez seja a característica mais importante do procedimento de *denoising* que viabiliza o seu uso em processamentos de entrada para aplicações em receptores cegos, comunicações móveis e, de maneira geral, em situações nas quais é difícil obter parâmetros relativos à RI do canal;
- os procedimentos de *denoising* compreendem uma vasta coleção de opções e parâmetros que podem ser projetados para reduzir a probabilidade de erro do sistema de comunicação;

- não é preciso usar os símbolos detectados no processamento de entrada do esquema de recepção, independentemente da dinâmica de evolução temporal dos coeficientes da RI do canal. Essa é uma característica que pode contribuir para a estabilidade do receptor, especialmente em aplicações que envolvem canais caracterizados pelo efeito de desvanecimento rápido;
- o procedimento é adequado para processadores digitais pois funciona basicamente com operações de soma, multiplicação, decimação e expansão.

Em suma, os procedimentos de *denoising* são simples, podem reduzir o nível de ruído sem requerer o conhecimento ou a parametrização da RI do canal de comunicação, e incluem, de fato, uma coleção de procedimentos que podem ser projetados para reduzir a probabilidade de erro do sistema.

É importante mencionar que o processamento de entrada proposto neste trabalho emprega superamostragem e os esquemas de recepção que dele se utilizarem tendem a possuir complexidade computacional superior àqueles que adotam estruturas de processamento de entrada que operam na taxa de símbolos. No entanto, nos esquemas aqui investigados a superamostragem é adotada apenas no processamento de entrada, sendo a detecção de informação realizada na taxa de símbolos. Cabe notar que é possível conjugar a redução de ruído com a sincronização de relógio na qual o uso de superamostragem é extremamente importante, sem falar que o *denoising* também pode se constituir numa ferramenta auxiliar poderosa para os circuitos de sincronização.

Outro ponto que merece destaque e que pode parecer um pouco contraditório, ou até irrelevante, é a proposição de um esquema de redução de ruído para sistemas de transmissão que envolvem canais seletivos em frequência e variantes no tempo, pois nesses casos o desempenho de alguns sistemas é geralmente limitado pela IES e não pelo nível de ruído. Porém, mesmo para sistemas que apresentam o efeito de PEI, é importante observar que o ruído também impõe sérias restrições de desempenho, pois ele afeta a estimação de parâmetros do canal que são utilizados no esquema de recepção e o próprio desempenho do decisor.

O real impacto do ruído certamente depende do tipo de receptor utilizado. No entanto, os efeitos danosos por ele provocado no decisor e no estimador de canal interagem no sentido de dificultar a recuperação da informação. Em decorrência disso, os desempenhos desses sistemas de comunicação são severamente degradados em baixa RSR. A ação do ruído é especialmente comprometidora quando os canais são rapida-

mente variantes no tempo, devido à maior dificuldade em estimar e acompanhar seus parâmetros, bem como em equalização e identificação cega do canal. Por tais motivos, processamentos de combate ao ruído são sempre desejáveis [55].

5.2 Técnicas de *denoising*

O recente ressurgimento do interesse na estimação não-paramétrica pode ser atribuído ao aparecimento de funções de bases *wavelets* e suas propriedades de compactação ou concentração de energia e localização no plano tempo-frequência que motivaram diversas aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento humano. De olho nessas propriedades, Donoho e Johnstone em [26] propuseram o uso de funções de base *wavelets* ortonormais para remover ruído de sinais e a esse procedimento denominaram *denoising*.

Os procedimentos de *denoising* atuam diretamente sobre os coeficientes da transformada *wavelet* da observação ruidosa e se beneficiam da propriedade de concentração da energia dessa transformada que permite representar, com boa fidelidade, as funções do espaço de sinal com uma pequena parcela dos coeficientes da expansão, o que não se verifica para o ruído, principalmente se ele for modelado por um processo com DEP plana. Neste caso ele pertence a um espaço funcional de dimensão infinita e, na média, se projeta igualmente em todas as funções de base com coeficientes descorrelacionados. No domínio da transformada os coeficientes são contaminados por ruído com variâncias iguais aquela do ruído que contamina as amostras do sinal no domínio do tempo, porém a energia do sinal fica confinada a poucos coeficientes. Em função disso, o nível de ruído pode ser reduzido zerando os coeficientes da expansão que se encontram abaixo de um limiar pré-estabelecido.

O desempenho do procedimento de *denoising* depende sensivelmente do limiar de comparação. Segundo Donoho e Johnstone, se este parâmetro for adequadamente escolhido, bons resultados podem ser obtidos para uma vasta gama de sinais [56].

Uma questão basilar referente ao uso da transformada *wavelet* está relacionada com a escolha da família de funções de base. Nesse tipo de transformada, diversas famílias de funções podem ser usadas para realizar a decomposição, desde que atendam a determinados requisitos (para uma melhor discussão deste assunto veja o Apêndice D e as referências lá citadas). Existem duas amplas classes de transformadas *wavelets*: contínua e discreta. As transformadas discretas, que são as utilizadas neste trabalho,

podem empregar funções de base redundantes, ortogonais, biortogonais, por exemplo, e mesmo nessas subdivisões existem diversas classes de *wavelets*, como por exemplo a de Daubechies que ganhou notoriedade na década de 1990.

Para a aplicação de *denoising* é importante que as funções de base concentrem a energia do sinal útil em poucos coeficientes da expansão. Quanto maior for essa concentração, mais coeficientes da expansão poderão ser eliminados no processo de síntese sem provocar distorção, promovendo, dessa forma, uma severa redução do nível de ruído. No entanto, para a aplicação em sistemas de comunicações a busca das funções de base pode ser realizada de forma mais pragmática: escolher funções que minimizem a probabilidade de erro, que é, em última instância, o principal parâmetro para avaliação de desempenho dos sistemas digitais. Um inconveniente desta abordagem diz respeito à dificuldade de manipulação matemática para a avaliação da probabilidade de erro.

O autor reconhece a importância de se realizar busca de funções de base, mas essa discussão não será aqui abordada em sua plenitude. Para canais AWGN e modulação BPSK, foi estabelecido um ponto inicial para uma discussão mais profunda desse tema, obtendo a probabilidade de erro em função do limiar de *denoising* e da transformada *wavelet* usada. A partir daí, pode-se realizar uma busca de funções de base no sentido de minimizar a probabilidade de erro do sistema.

A próxima seção discute a técnica de *denoising* conforme inicialmente proposta por Donoho e Johnstone [26, 56, 57].

5.2.1 Princípios básicos

Os procedimentos de *denoising* têm por objetivo estimar o sinal x_n a partir de observações ruidosas y_n . Algebricamente as observações são dadas por

$$y_n = x_n + \tilde{\eta}_n, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N_1 \quad (5.1)$$

sendo $\tilde{\eta}_n$ o ruído de observação que é modelado por um processo estocástico gaussiano estacionário, com média nula, variância σ^2 e densidade espectral de potência plana.

Os procedimentos de *denoising* tomam a *transformada wavelet discreta* (DWT, da expressão em inglês *Discrete Wavelet Transform*) de $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N_1})'$ e passam os coeficientes da transformada por um processador não-linear, no qual as amplitudes desses coeficientes são comparadas com um limiar λ . Os coeficientes cujas amplitudes

estiverem abaixo do limiar de comparação são igualados a zero e os que estiverem acima podem ser mantidos inalterados ou terem suas amplitudes reduzidas, de acordo com o esquema de *denoising* adotado. A estimativa de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N_1})'$, que será denotada por $\hat{\mathbf{x}}$, é obtida realizando a *transformada wavelet inversa* (IDWT, da expressão em inglês *Inverse Discrete Wavelet Transform*) dos coeficientes resultantes (Figura 5.1).

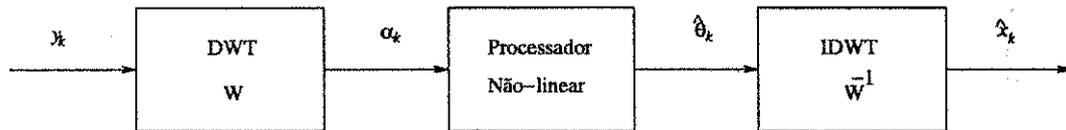


Figura 5.1: Diagrama de bloco do procedimento de *denoising*.

É importante mencionar que as técnicas de *denoising* investigadas neste capítulo usam apenas um limiar para todos os coeficientes. Classifica-se por *escopo global* os procedimentos que funcionam dessa maneira, em contraposição aos procedimento de *escopo local*, que adotam diversos limiares de comparação. Esta abordagem é empregada no próximo capítulo e apresenta algumas vantagens para os casos que envolvem ruído colorido.

O procedimento descrito no parágrafo anterior será agora detalhado. Denotando por $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N_2})'$ o vetor cujas componentes representam os coeficientes da transformada *wavelet* discreta de \mathbf{y} , tem-se

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{W}\mathbf{y}, \quad (5.2)$$

na qual \mathbf{W} é uma matriz de dimensão $N_2 \times N_1$ que representa o operador linear responsável pela realização da transformada *wavelet*. No Apêndice D algumas propriedades da transformada *wavelet* são discutidas e, em particular, a construção dessas matrizes.

De forma similar, denotando por $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{N_2})'$ e $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{N_2})'$ os coeficientes da transformada *wavelet* discreta de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N_1})'$ e $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{N_1})'$, respectivamente, a Equação 5.1 pode ser reescrita no domínio da transformada *wavelet* da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}. \quad (5.3)$$

No procedimento de *denoising* se utiliza funções de base *wavelets* ortonormais. Neste caso,

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (5.4)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade de dimensão $N_1 \times N_1$. Além disso, $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}'^1$

Inicialmente foram propostos dois procedimentos para obter os coeficientes modificados a partir da comparação com o limiar λ , e que são aqui denotados por $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{N_2})'$. Um deles adota um limiar abrupto e o outro um limiar suave. Ambos são discutidos neste trabalho. Outros mecanismos foram propostos e uma discussão sobre eles pode ser encontrada em [58].

No procedimento com limiar abrupto, aqui denotado por T_A , se a amplitude de um determinado coeficiente da observação estiver abaixo de λ ele será eliminado da expansão (igualado a zero). Por outro lado, se o coeficiente possuir amplitude maior do que o limiar ele será mantido inalterado, ou seja

$$\hat{\theta}_i = T_A(\alpha_i, \lambda) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{se } |\alpha_i| > \lambda \\ 0, & \text{se } |\alpha_i| \leq \lambda \end{cases}, \quad (5.5)$$

para todo $i \in [1, \dots, N_2]$.

No procedimento com limiar suave, aqui denotado por T_S , se um coeficiente possui amplitude menor do que o limiar, ele é igualado a zero. Do contrário, sua amplitude é reduzida por uma quantidade igual ao limiar. Nesse caso, $\hat{\theta}_i$ fica dado por

$$\hat{\theta}_i = T_S(\alpha_i, \lambda) = \begin{cases} \text{sgn}(\alpha_i)(|\alpha_i| - \lambda), & |\alpha_i| > \lambda \\ 0, & |\alpha_i| \leq \lambda \end{cases}, \quad (5.6)$$

em que $\text{sgn}(\cdot)$ denota a função sinal.

Os mapeamentos realizados pelos operadores não-lineares T_A e T_S são ilustrados na Figura 5.2. Independentemente do mapeamento, o sinal estimado na saída do procedimento de *denoising*, $\hat{\mathbf{x}}$, é dado por

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}'\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Para uma mesma família de funções de base *wavelets*, o desempenho das técnicas de *denoising* depende basicamente do limiar λ e da estratégia de mapeamento. Em [56]

¹Devido às sucessivas operações de convolução realizadas para obter a transformada wavelet discreta, em geral $N_2 \geq N_1$ e \mathbf{W}^{-1} representa, na realidade, a inversa à direita de \mathbf{W} (Apêndice D).

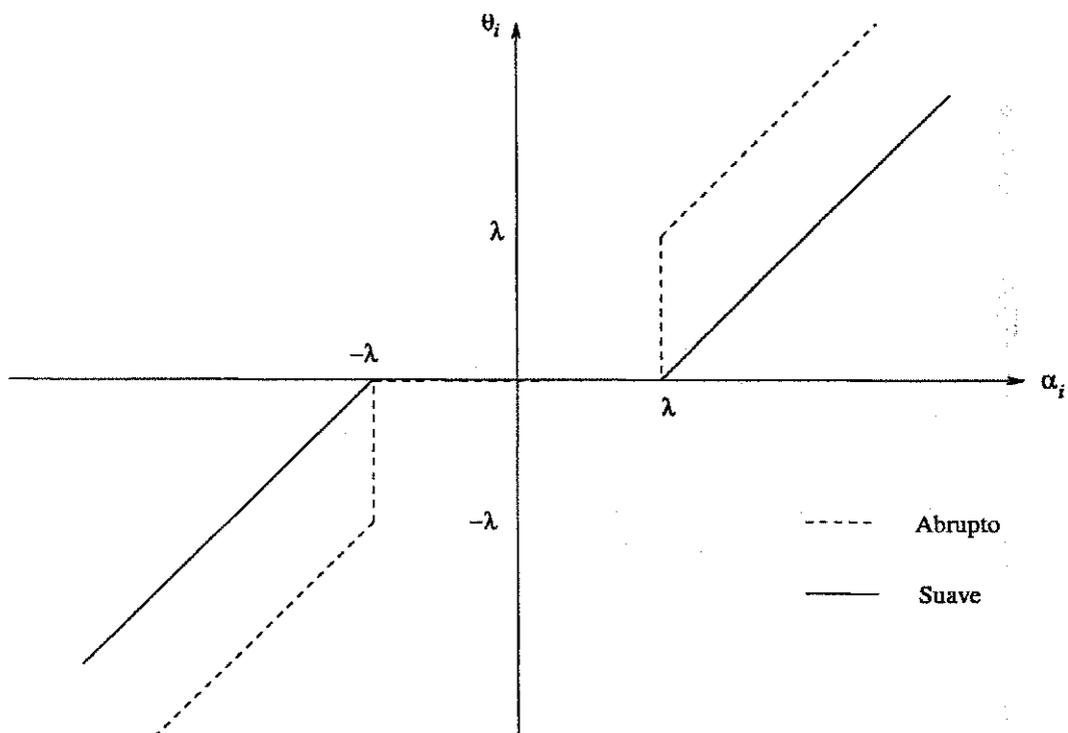


Figura 5.2: Mapeamento com limiar λ usando procedimento abrupto (linha tracejada) e suave (linha cheia).

e [26] foi proposto o limiar

$$\lambda_u = \sigma \sqrt{2 \log N_1}, \quad (5.7)$$

denominado *limiar universal*, que segundo os autores produz bons padrões de desempenho.

A partir do trabalho seminal de Donoho muitos esquemas de *denoising* foram e continuam sendo propostos. Técnicas desenvolvidas para ruído colorido, com base na teoria de teste de hipóteses e na estimação bayesiana são alguns dos esquemas que vêm sendo apresentados em congressos e em revistas especializadas. Trabalhos interessantes que discutem essas e outras alternativas são comentados em [58].

Na próxima seção o procedimento proposto para remover ruído em receptores digitais é avaliado analiticamente, considerando um sistema de comunicação que compreende canal AWGN e modulação BPSK.

5.3 Denoising em Sistemas de Comunicações

Embora neste trabalho o interesse esteja voltado para transformadas *wavelets* discretas, inicialmente a discussão é realizada assumindo uma representação em tempo contínuo. Essa abordagem de apresentação permite evitar num primeiro momento discussões a respeito da passagem da representação do sinal de tempo contínuo para tempo discreto. O intuito principal é discutir primeiro o sinal e suas estatísticas na saída do procedimento de *denoising*. Posteriormente, discute-se a implementação do procedimento adotando transformadas discretas.

O sinal recebido na entrada do receptor em uma janela de tempo de duração τ_0 centralizada em torno de τ é dado pela equação

$$y(t) = x(t) + \tilde{\eta}(t) \text{ para } \tau - \frac{\tau_0}{2} \leq t \leq \tau + \frac{\tau_0}{2}, \quad (5.8)$$

na qual $\tilde{\eta}(t)$ representa o ruído, que é aqui modelado por um processo estacionário gaussiano branco, com média nula e variância σ^2 .

No Apêndice E é mostrado que, para um procedimento de *denoising* que emprega uma estratégia de mapeamento suave e limiar global λ , a estimativa de $x(\cdot)$, aqui denotada por $\hat{x}(\cdot)$, fica dada por

$$\hat{x}(t) = \sum_{j,k} \theta_{j,k} U_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{j,k} \eta_{j,k} U_{j,k} \psi_{j,k}(t) - \lambda \sum_{j,k} V_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (5.9)$$

na qual $\{U_{j,k}\}$ e $\{V_{j,k}\}$ são VAs que assumem valores nos conjuntos $\{0, 1\}$ e $\{-1, 0, 1\}$, respectivamente, $\{\theta_{j,k}\}$ e $\{\eta_{j,k}\}$ são os coeficientes da transformada *wavelet* de $x(t)$ e $\tilde{\eta}(t)$, respectivamente e $\psi_{j,k}(\cdot)$ são funções de base *wavelets*. As definições e fdps das VAs supracitadas são também apresentadas no Apêndice E, sendo determinadas basicamente pelo limiar de *denoising* e pela transformada *wavelet*.

Analisando a Equação 5.9, vê-se que o sinal $\hat{x}(\cdot)$ depende da informação transmitida (embutida em $\{\theta_{j,k}\}$), do limiar de comparação e da transformada *wavelet*, dependências essas evidentes de antemão, mas que agora foram explicitadas matematicamente.

A segunda parcela do lado direito da Equação 5.9 decorre do ruído que não é eliminado pelo processo de *denoising*. Esta parcela é responsável pela variância do estimador. Por outro lado, os termos do primeiro somatório para os quais $U_{j,k} = 0$, juntamente com a terceira parcela do lado direito desta equação, contribuem para a polarização do estimador.

Conforme pode ser verificado no Apêndice E, para um dado conjunto de funções de base *wavelets*, à medida que λ aumenta a probabilidade de que $U_{j,k} = 0$ também aumenta, causando o aumento da polarização e a redução da variância do estimador. No tocante à terceira parcela, o comportamento com λ é mais complexo, pois a probabilidade de que $V_{j,k} \neq 0$ se reduz com o aumento de λ . Para este termo, o aumento de λ causa um aumento das parcelas que compõem o somatório, mas também uma redução na quantidade de parcelas não-nulas.

É importante notar que, além do limiar de *denoising*, as funções de base *wavelets* possuem um papel importante na determinação da variância e da polarização do estimador. Para a aplicação em questão, um compromisso ou uma combinação ótima desses parâmetros e de outras estatísticas de maior ordem, pode ser obtida de forma indireta minimizando a probabilidade de erro do sistema.

Multiplicando ambos os lados da Equação 5.9 por $\psi_{l,m}(t)$ e integrando o resultado no corpo dos reais (\mathbb{R}), obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t)\psi_{l,m}(t)dt = \sum_{j,k} \theta_{j,k}U_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t)\psi_{l,m}(t)dt + \sum_{j,k} \eta_{j,k}U_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t)\psi_{l,m}(t)dt - \lambda \sum_{j,k} V_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t)\psi_{l,m}(t)dt,$$

supondo uma transformação ortogonal, a equação acima se reduz a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t)\psi_{l,m}(t)dt = \theta_{l,m}U_{l,m} + \eta_{l,m}U_{l,m} - \lambda V_{l,m}. \quad (5.10)$$

Varrendo os índices l e m em suas faixas de valores para cobrir todas as possíveis translações e níveis de resolução da transformada, o lado direito da Equação 5.10 produz a transformada *wavelet* de $\hat{x}(\cdot)$.

A passagem da representação da transformada *wavelet* em tempo contínuo para tempo discreto envolve, inevitavelmente, uma certa aproximação, da mesma forma que ocorre com a transformada de Fourier.

Admitindo que $\hat{x}(\cdot)$ pertence ou é bem aproximado por sua projeção no espaço funcional \mathcal{V}_J , que é o subespaço funcional de maior resolução da transformada, então

$$\hat{x}(t) = \sum_k \hat{\theta}_{J,k} \phi_{J,k}(t), \quad (5.11)$$

em que J é a quantidade de níveis de decomposição ou de resolução, $\{\hat{\theta}_{J,k}\}$ e $\{\phi_{J,k}(\cdot)\}$ são os coeficientes e as funções de base do nível de maior resolução, respectivamente.

Uma aproximação de ordem prática geralmente imposta é admitir que os coeficientes $\{\hat{\theta}_{j,k}\}$ são obtidos por amostragem da função contínua $\hat{x}(\cdot)$. Neste caso, a transformada *wavelet* pode ser implementada pelo algoritmo piramidal, operando diretamente sobre esses coeficientes, empregando apenas filtros lineares e decimação, sem usar, de fato, as funções de base que definem os espaços funcionais². Uma discussão sucinta deste algoritmo é apresentada no Apêndice D.

À primeira vista pode parecer que a imposição acima mencionada é bastante restritiva. No entanto, é importante ressaltar que independentemente das funções de base adotadas, à medida que J aumenta, as durações dessas funções vão se reduzindo. Em particular, para valores elevados de J , as funções de base referentes ao espaço funcional de maior resolução atuam aproximadamente como “funções impulso” e os coeficientes referentes a este nível de resolução são amostras da função contínua $\hat{x}(t)$. Certamente um requisito importante para que isto se verifique é que a função $\hat{x}(t)$ seja limitada em banda e que a amostragem atenda ao primeiro critério de Nyquist.

Diante do exposto nos últimos parágrafos, os coeficientes da transformada *wavelet* de $\hat{x}(\cdot)$ podem ser obtidos, atendendo certas restrições, com o algoritmo piramidal a partir de suas amostras.

Agrupando as amostras da função $\hat{x}(\cdot)$ no vetor \hat{x} tem-se

$$W\hat{x} = U \odot \theta + \eta \odot U - \lambda V, \quad (5.12)$$

na qual \odot denota o produto de Hadamard [59]; $U = (U_1, \dots, U_{N_2})'$, $V = (V_1, \dots, V_{N_2})'$ e $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{N_2})'$ são vetores aleatórios obtidos arrumando organizando as VAs $\{U_{j,k}\}$, $\{V_{j,k}\}$ e $\{\eta_{j,k}\}$, de acordo com a disposição das funções de base na representação matricial da transformada, e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{N_2})'$ e $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{N_2})'$ são vetores cujos elementos são dados por $\{\theta_{j,k}\}$ e $\{\eta_{j,k}\}$, respectivamente. A ordenação destes dois últimos vetores segue a mesma lógica dos vetores aleatórios.

A lógica de organização dos índices é a seguinte. Inicialmente, são agrupados os coeficientes referentes ao nível de maior resolução $j = J$. A seguir são agrupados os coeficientes do nível $j = J - 1$, posteriormente são agrupados os coeficientes do nível $J - 2$, e assim sucessivamente, até que seja atingido o nível de menor resolução. Conforme denotado na representação dos vetores aleatórios, a quantidade total de coeficientes no domínio *wavelets* é igual a N_2 .

²Informações concernentes a essas funções ficam embutidas nos coeficientes dos filtros utilizados.

Dessa forma tem-se

$$\hat{x} = W^{-1}\hat{\theta}, \quad (5.13)$$

sendo

$$\hat{\theta} = \theta \odot U + \eta \odot U - \lambda V. \quad (5.14)$$

Como mostrado no Apêndice E, θ e η representam os coeficientes da transformada contínua de $x(\cdot)$ e de $\eta(\cdot)$, respectivamente. No entanto, adotando a mesma abordagem empregada na Equação 5.11, esses coeficientes podem ser aproximados pela DWT dos respectivos sinais amostrados.

Considerando as discussões apresentadas, neste trabalho é proposto um processamento de entrada para receptores digitais, cuja capacidade de remoção de ruído advém do uso de *denoising*. O diagrama de blocos simplificado de um sistema de comunicações que emprega o referido procedimento é mostrado na Figura 5.3, no qual o receptor e seu processamento de entrada são indicados em destaque, sendo o último composto basicamente de um filtro limitador de faixa, um amostrador na taxa P/T , sendo P o fator de superamostragem, células de memória (*buffer*), procedimento de *denoising* e decimador.

Na discussão que se segue é assumido que o filtro elimina o ruído faixa larga mas mantém sua DEP plana dentro da banda passante do sinal de interesse, que a taxa de amostragem é superior à taxa de símbolos e que o *buffer* acumula as amostras necessárias para viabilizar o procedimento de *denoising*, o qual é realizado em lotes. Além disso, a discussão considera o esquema de modulação BPSK, canais caracterizados pelo modelo AWGN e procedimentos de *denoising* que empregam mapeamento suave com limar de escopo global. O algoritmo de recepção opera na taxa de símbolos, por esse motivo foi incluído um decimador na saída do processamento de entrada.

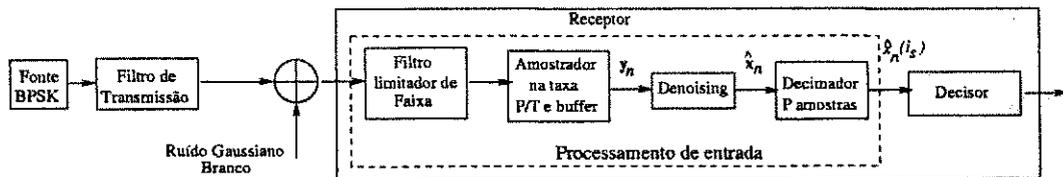


Figura 5.3: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação que emprega o processamento de entrada proposto.

O sinal armazenado no *buffer* no n -ésimo intervalo de símbolo é dado por

$$y_k(n) = x_k(n) + \tilde{\eta}_k(n), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, P, \quad (5.15)$$

em que $\tilde{\eta}_k(n)$ é modelado por ruído gaussiano branco com média nula e variância σ^2 e $x_k(n) = s_n h_T(k)$, sendo s_n o símbolo transmitido no n -ésimo intervalo de símbolo e $h_T(\cdot)$ o pulso básico de transmissão, que se admite possuir duração igual ou inferior ao intervalo de símbolo. Assume-se também que os símbolos transmitidos são IID e extraídos do conjunto $\{-1, 1\}$.

Denotando a DWT de $\mathbf{y}(n) = (y_1(n), \dots, y_P(n))'$ por $\boldsymbol{\alpha}(n) = (\alpha_1(n), \dots, \alpha_{N_2}(n))'$ tem-se

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \mathbf{W} \mathbf{y}(n), \quad (5.16)$$

na qual \mathbf{W} possui dimensão $N_2 \times P$. É importante ressaltar que o valor de N_2 depende do tipo de funções de base *wavelets* adotado. Em particular, considerando *wavelets* de Haar tem-se $N_2 = P$. Para outras *wavelets* $N_2 > P$.

Denotando as DWTs de $\mathbf{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_P(n))'$ e $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(n) = (\tilde{\eta}_1(n), \dots, \tilde{\eta}_P(n))'$ por $\boldsymbol{\theta}(n) = (\theta_1(n), \dots, \theta_{N_2}(n))'$ e $\boldsymbol{\eta}(n) = (\eta_1(n), \dots, \eta_{N_2}(n))'$, respectivamente, a Equação 5.15 pode ser escrita no domínio da transformada *wavelet* da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \boldsymbol{\theta}(n) + \boldsymbol{\eta}(n). \quad (5.17)$$

Considerando essas notações e os resultados apresentados nas Equações 5.13 e 5.14, na saída do procedimento de *denoising* tem-se

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{W}' \hat{\boldsymbol{\theta}}(n), \quad (5.18)$$

sendo

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(n) = \boldsymbol{\theta}(n) \odot \mathbf{U}(n) + \boldsymbol{\eta}(n) \odot \mathbf{U}(n) - \lambda \mathbf{V}(n). \quad (5.19)$$

Admitindo que o índice do instante ótimo de amostragem dentro do intervalo de símbolo é i_s , então a amostra do sinal na entrada do decisor referente ao n -ésimo intervalo de símbolo é expresso por

$$\hat{x}_{i_s}(n) = \mathbf{W}(i_s, :)' \hat{\boldsymbol{\theta}}(n), \quad (5.20)$$

sendo $W(i_s, :)$ a i_s -ésima coluna de W .

A seguir, as VAs $\{U_i(n)\}$ e $\{V_i(n)\}$ e suas respectivas fdps são apresentadas. De acordo com as definições contidas no Apêndice D essas VAs são dadas por ³ :

$$U_i = \begin{cases} 0, & \text{se } |\theta_i + \eta_i| \leq \lambda \\ 1, & \text{se } |\theta_i + \eta_i| > \lambda \end{cases}, \quad (5.21)$$

e

$$V_i = \begin{cases} -1, & \theta_i + \eta_i < -\lambda \\ 0, & |\theta_i + \eta_i| \leq \lambda \\ 1, & \theta_i + \eta_i > \lambda \end{cases}, \quad (5.22)$$

com fdps dadas por

$$f_U(U_i) = (1 - p_i) \delta(U_i) + p_i \delta(U_i - 1) \quad (5.23)$$

e

$$f_V(V_i) = \tilde{q}_i \delta(V_i + 1) + (1 - p_i) \delta(V_i) + q_i \delta(V_i - 1), \quad (5.24)$$

sendo

$$\begin{aligned} p_i &= \Pr(|\xi_i| > \lambda), \\ q_i &= \Pr(\xi_i > \lambda), \\ \tilde{q}_i &= \Pr(\xi_i < -\lambda) = p_i - q_i, \end{aligned}$$

nas quais

$$\xi_i \sim \mathcal{N}(\theta_i, \sigma^2).$$

denota uma VA gaussiana com média θ_i e variância σ^2 .

A fim de analisar o desempenho do sistema, é importante inicialmente encontrar a fdp de $\hat{\theta}_i$. No desenvolvimento que conduziu à determinação dessa fdp, as seguintes propriedades estatísticas foram consideradas:

³Para simplificar a notação, doravante o argumento que indica o intervalo de símbolo dessas VAs será omitido, sendo utilizado apenas quando sua informação for indispensável. Dessa forma, será empregado x_i em vez de $x_i(n)$, η_i em vez de $\eta_i(n)$, U_i em vez de $U_i(n)$ e V_i em vez de $V_i(n)$. Além disso, será utilizado $\hat{\theta}_i$ em vez de $\hat{\theta}_i(n)$.

- as VAs $\{\eta_i\}$ são estatisticamente independentes. Este fato decorre do uso de funções de base ortonormais e do modelo de ruído;
- a independência estatística das VAs $\{\eta_i\}$ faz com que as variáveis aleatórias $\{U_i\}$ e $\{V_i\}$ sejam independentes entre si.

Considerando essas propriedades, foi mostrado no Apêndice E que a fdp de $\hat{\theta}_i$ é dada por

$$f_{\hat{\theta}_i}(\zeta) = (1 - p_i) \delta(\zeta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\zeta - \theta_i + \lambda)^2}{2\sigma^2}\right] u(\zeta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\zeta - \theta_i - \lambda)^2}{2\sigma^2}\right] u(-\zeta) \quad (5.25)$$

na qual $u(\cdot)$ e $\delta(\cdot)$ denotam as funções degrau unitário e impulso unitário, respectivamente.

É importante verificar que para $\lambda = 0$ (processamento de entrada sem *denoising*), tem-se $p_i = 1$ e $f_{\hat{\theta}_i}(\cdot)$ fica dada por uma fdp gaussiana com média x_i e variância σ^2 , para todo i , como esperado. Por outro lado, quando $\lambda \rightarrow \infty$, tem-se $p_i \rightarrow 0$ e $f_{\hat{\theta}_i}(\cdot) \rightarrow \delta(\cdot)$, o que também é esperado pois, para sinais de energia, que são os de interesse neste trabalho, é impossível que algum coeficiente supere o limiar neste caso.

De acordo com a Equação 5.20, $\hat{x}_{i_s}(n)$ é dada pela combinação linear das variáveis aleatórias $\hat{\theta}_i$ com pesos dados pelas entradas da i_s -ésima coluna da matriz *wavelet*. Como é mostrado no Apêndice D, as variáveis aleatórias $\hat{\theta}_i$ são estatisticamente independentes. Portanto, a fdp de $\hat{x}_{i_s}(n)$ é obtida convolvendo as fdps das variáveis aleatórias $\kappa_i \triangleq W(i, i_s) \hat{\theta}_i$, cuja aproximação analítica é considerada a seguir.

Define-se Z_k como a soma parcial das variáveis aleatórias κ_i ,

$$Z_k \triangleq \sum_{i=1}^k \kappa_i, \quad 1 \leq k \leq N \quad (5.26)$$

e se denota por:

$$\begin{aligned} \mu_Z^m(k) &= E(Z_k^m), \\ \mu_{\kappa_i}(m) &= E(\kappa_i^m), \\ \mu_{\hat{x}}(m) &= E(\hat{x}_{i_s}^m) \text{ e} \\ \mu_{\hat{\theta}_i}(m) &= E(\hat{\theta}_i^m), \end{aligned} \quad (5.27)$$

os momentos de ordem m de Z_k , κ_i , \hat{x}_i e $\hat{\theta}_i$, respectivamente.

Os momentos de Z_k podem ser expressos em função dos momentos de κ_i , da seguinte maneira

$$\mu_Z^m(k) = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \mu_Z^p(k-1) \mu_{\kappa_k}(m-p) \quad \text{para } k > 1. \quad (5.28)$$

A Equação 5.28 fornece, de forma recursiva, os momentos da soma de k VAs estatisticamente independentes em termos dos momentos da soma de $k-1$ dessas VAs e dos momentos da k -ésima VA. Em particular, tem-se

$$\mu_{\hat{x}}(m) = \mu_Z^m(N). \quad (5.29)$$

Combinando as Equações 5.28 e 5.29, verifica-se que para determinar os momentos de \hat{x}_i , é preciso apenas obter os momentos das VAs $\{\theta_i\}$, visto que a relação entre estes momentos e os momentos de κ_i é

$$\mu_{\kappa_i}(m) = W(i, i_s)^m \mu_{\theta_i}(m). \quad (5.30)$$

Tendo sido determinados os momentos de \hat{x}_i , pode-se empregar uma técnica baseada em momentos para aproximar analiticamente a fdp do sinal na entrada do decisor.

Conforme apresentado no Apêndice D os momentos de $\hat{\theta}_i$ são dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{\theta}_i}(0) &= 1 \text{ e} \\ \mu_{\hat{\theta}_i}(m) &= \mu_m^1 + \mu_m^2, \text{ para } m \geq 1 \end{aligned} \quad (5.31)$$

com

$$\begin{aligned} \mu_m^1 &= (m-1)\sigma^2 \mu_{m-2}^1 + (\theta_i - \lambda) \mu_{m-1}^1, \\ \mu_m^2 &= (m-1)\sigma^2 \mu_{m-2}^2 + (\theta_i + \lambda) \mu_{m-1}^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

As equações recorrentes apresentadas acima são válidas para $m \geq 2$, com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} \mu_0^1 &= \theta_i, \\ \mu_1^1 &= (\theta_i - \lambda) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta_i - \lambda)^2}{2\sigma^2}\right], \\ \mu_0^2 &= p_i - q_i \text{ e} \\ \mu_1^2 &= (\theta_i + \lambda) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta_i + \lambda)^2}{2\sigma^2}\right]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

5.3.1 Aproximação Analítica de fdp Usando Técnicas dos Momentos

A aproximação de fdp usando momentos estatísticos é um campo vasto de investigação, para o qual há vários procedimentos propostos. O Apêndice C apresenta, de forma bastante resumida, quatro técnicas com este propósito, a saber: a *regra da quadratura de Gauss* (RQG), a *série de Edgeworth* (SE), a *série de Gram-Charlier* (SGC) e a *maximização da entropia* (ME). Além disso, no referido apêndice são comentadas e listadas diversas referências no assunto.

Inicialmente, as quatro técnicas supracitadas foram empregadas no sentido de obter a aproximação da fdp de \hat{x}_i , usando os momentos deduzidos na seção anterior. No entanto, os desempenhos obtidos não foram satisfatórios. Algumas das técnicas, como a SGC, a SE e a ME, geraram aproximações com valores negativos nas caudas e nas proximidades da descontinuidade (mostra-se adiante que há uma descontinuidade nesta fdp). Para a RQG as funções geradas não apresentaram valores negativos, o que é garantido por construção, mas as curvas de desempenho obtidas usando as fdps aproximadas divergiram grosseiramente daquelas obtidas por simulação computacional.

Malgrado não existir uma prova cabal, provavelmente esses resultados se explicam pela presença conjunta de impulso e descontinuidade na fdp de $\hat{\theta}_i$, o que, apesar das sucessivas operações de convolução para gerar \hat{x}_i , faz com que a fdp desta VA, aqui denotada por $f_{\hat{x}}$, possua também um impulso e descontinuidade.

O impulso em \hat{x}_i , não representa um sério problema pois sua localização e peso podem ser determinados analiticamente sendo, portanto, possível excluí-lo do processo de aproximação da fdp alvo. No entanto, a descontinuidade não pode ser tratada da mesma forma, pois ela afeta todos os momentos de forma desconhecida.

Diante do exposto, as operações de convolução foram expandidas e os termos relacionados com o impulso e com a descontinuidade foram identificados. O procedimento adotado será discutido a seguir.

A fdp de κ_i pode ser expressa da seguinte maneira

$$f_{\kappa_i}(\zeta) = P_i\delta(\zeta) + f_i(\zeta), \quad (5.34)$$

com

$$f_i(\zeta) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi w_i^2 \sigma}} \exp \left[-\frac{(\zeta - (\theta_i - \lambda)w_i)^2}{2\sigma^2 w_i^2} \right] u(\zeta) \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi w_i^2 \sigma}} \exp \left[-\frac{(\zeta - (\theta_i + \lambda)w_i)^2}{2\sigma^2 w_i^2} \right] u(-\zeta). \quad (5.35)$$

e $P_i \triangleq 1 - p_i$, sendo $\{w_i\}$ extraídos dentre os elementos não nulos da i_s -coluna da matriz *wavelet*.

Considerando essas definições, a fdp de \hat{x}_{i_s} pode ser escrita por

$$f_{\hat{x}}(\zeta) = (P_0 \delta(\zeta) + f_0(\zeta)) \otimes \cdots \otimes (P_{K-1} \delta(\zeta) + f_{K-1}(\zeta)) \\ = \bigotimes_{i=0}^{K-1} (P_i \delta(\zeta) + f_i(\zeta)), \quad (5.36)$$

na qual K denota a quantidade de valores não nulos de $W(:, i_s)$, portanto, $K \leq N$, e \otimes denota a operação de convolução.

Utilizando as propriedades de distributividade e linearidade do operador convolução, a Equação 5.36 pode ser reescrita da seguinte maneira

$$f_{\hat{x}}(\zeta) = \delta(\zeta) \prod_{i=0}^{K-1} P_i + \sum_{i=0}^{K-1} \left(f_i(\zeta) \prod_{j=0, j \neq i}^{K-1} P_j \right) + \sum_{i=1}^{l_2(K)} \left[\left(\prod_{j \neq V_2(i)} P_j \right) \left(\bigotimes_{i=V_2(i,1)}^{V_2(i,2)} f_i(\zeta) \right) \right] \\ + \cdots + \sum_{i=1}^{l_{K-1}(K)} \left[\left(\prod_{j \neq V_{K-1}(i)} P_j \right) \left(\bigotimes_{i=V_{K-1}(i,1)}^{V_{K-1}(i, K-1)} f_i(\zeta) \right) \right] + \bigotimes_{i=0}^{K-1} f_i(\zeta), \quad (5.37)$$

em que $l_j(m)$ é um inteiro que denota a quantidade de termos formados convolvendo j funções, considerando que existem m entradas não nulas em $W(:, i_s)$. É possível obter a seguinte relação de recorrência

$$l_j(k) = l_{j-1}(k-1) + l_j(k-1), \quad (5.38)$$

cujas condições de contorno são:

$$l_k(k) = 1, \text{ para } \forall k, k \leq K; \\ l_1(k) = 1, \text{ para } \forall k, k \leq K \text{ e} \\ l_j(k) = 0, \text{ para } \forall k, j \text{ com } k > j \text{ e } k \leq K. \quad (5.39)$$

Ainda com relação à Equação 5.37, V_j é uma matriz de índices de dimensão $l_j(k) \times j$. Cada linha dessa matriz contém os índices das funções que compõem a convolução. Por exemplo, considerando $k = 4$, com índices 0, 1, 2 e 3, e $j = 2$, então $l_2(4) = 6$ e

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Definindo os parâmetros A_i e A como

$$A_i = \prod_{j=0, j \neq i}^{K-1} P_j, \quad A = \prod_{i=0}^{K-1} P_i \quad (5.41)$$

tem-se

$$\begin{aligned} f_{\hat{x}}(\zeta) = & A\delta(\zeta) + \sum_{i=0}^{K-1} f_i(\zeta)A_i + \sum_{i=1}^{l_2(K)} \left(A_{V_2(i)} \otimes_{i=V_2(i,1)}^{V_2(i,2)} f_i(\zeta) \right) \\ & + \dots + \sum_{i=1}^{l_{K-1}(K)} \left(A_{V_{K-1}(i)} \otimes_{i=V_{K-1}(i,1)}^{V_{K-1}(i,K-1)} f_i(\zeta) \right) + \otimes_{i=0}^{K-1} f_i(\zeta). \end{aligned} \quad (5.42)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 5.42 representa um impulso em zero com amplitude conhecida. Já o segundo termo é uma soma ponderada das funções $\{f_i(\cdot)\}$, na qual tanto essas funções quanto os termos de ponderação são conhecidos, sendo este termo responsável pela presença do impulso e da descontinuidade na fdp da VA que representa a saída do procedimento de *denoising*.

A Equação 5.42 contém um total de

$$\sum_{m=1}^K l_m(K) = 2^K, \quad (5.43)$$

parcelas, das quais $K + 1$ são conhecidos: o impulso e o segundo somatório do lado direito da referida equação.

Considerando a Equação 5.42, a função característica da VA \hat{x}_i , aqui representada

por $C_{\hat{x}}$, pode ser expressa por

$$C_{\hat{x}}(w) = A + \sum_{i=0}^{K-1} C_i(w)A_i + \sum_{i=1}^{l_2(K)} \left(A_{V_2(i)} \prod_{i=V_2(i,1)}^{V_2(i,2)} C_i(w) \right) + \dots + \sum_{i=1}^{l_{K-1}(K)} \left(A_{V_{K-1}(i)} \prod_{i=V_{K-1}(i,1)}^{V_{K-1}(i,K-1)} C_i(w) \right) + \prod_{i=0}^{K-1} C_i(w). \quad (5.44)$$

A expressão acima pode ser reescrita como

$$C_{\hat{x}}(w) = S(w) + R(w), \quad (5.45)$$

sendo,

$$S(w) = A + \sum_{i=0}^{K-1} A_i C_i(w), \quad (5.46)$$

com

$$C_i(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) e^{jwx} dx, \quad (5.47)$$

e

$$R(w) = \sum_{i=1}^{l_2(K)} \left(A_{V_2(i)} \prod_{i=V_2(i,1)}^{V_2(i,2)} C_i(w) \right) + \dots + \sum_{i=1}^{l_{K-1}(K)} \left(A_{V_{K-1}(i)} \prod_{i=V_{K-1}(i,1)}^{V_{K-1}(i,K-1)} C_i(w) \right) + \prod_{i=0}^{K-1} C_i(w). \quad (5.48)$$

Admitindo que $C_i(w)$ pode ser representado por

$$C_i(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(jw)^l \mu_i(l)}{l!}, \quad (5.49)$$

com

$$\mu_i(m) = \begin{cases} \mu_{\kappa_i}(m) & \text{se } m \geq 1, \\ 1 - P_i & \text{se } m = 0, \end{cases} \quad (5.50)$$

pode-se expressar $S(w)$ como

$$S(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(jw)^l \mu_s(l)}{l!}, \quad (5.51)$$

com

$$\mu_s(l) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{K-1} A_i \mu_i(l) & \text{se } l \geq 1 \\ A + \sum_{i=0}^{K-1} A_i \mu_i(0) & \text{se } l = 0 \end{cases}. \quad (5.52)$$

Supondo também que $C_{\hat{x}}(w)$ admite uma expansão do tipo

$$C_{\hat{x}}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jw)^k \mu_{\hat{x}}(k)}{k!}, \quad (5.53)$$

$R(\cdot)$ pode ser expressa da seguinte maneira

$$R(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(jw)^l \mu_r(l)}{l!}, \quad (5.54)$$

com

$$\mu_r(l) = \mu_g(l) - \mu_s(l). \quad (5.55)$$

A partir das equações dadas acima $R(\cdot)$ e $S(\cdot)$ podem ser vistas como funções características das “variáveis aleatórias” r e s , a menos de uma constante de normalização. Tomando a transformada de Fourier inversa obtém-se

$$f_{\hat{x}}(\zeta) = A\delta(\zeta) + \sum_{i=0}^{K-1} f_i(\zeta)A_i + f_r(\zeta), \quad (5.56)$$

na qual A , $\{A_i\}$ e as funções $\{f_i(\cdot)\}$ são conhecidas. Portanto, a fdp de \hat{x}_i pode ser determinada a partir de $f_r(\cdot)$. Vale lembrar que os momentos de r são conhecidos e que $f_r(\cdot)$ é contínua. Assim sendo, é provável que se possa obter uma boa aproximação analítica para $f_r(\cdot)$ usando uma das técnicas dos momentos discutidas no Apêndice B.

Admitindo que tal aproximação de $f_r(\cdot)$, aqui denotada por $\hat{f}_r(\cdot)$, tenha sido obtida, a aproximação analítica da fdp de \hat{x}_i pode ser representada por

$$\hat{f}_{\hat{x}}(\zeta) = A\delta(\zeta) + \sum_{i=0}^{K-1} A_i f_i(\zeta) + \hat{f}_r(\zeta). \quad (5.57)$$

Na próxima seção será avaliado o desempenho do sistema de comunicação em questão, usando esse tipo de aproximação.

5.4 Cálculo da Probabilidade de Erro

No Apêndice E mostra-se que os momentos pares da VA $\hat{x}_i(n)$ independem do símbolo transmitido no n -ésimo intervalo de símbolo. Por outro lado, os momentos ímpares dessa VA condicionado à $s_n = 1$ são simétricos aos respectivos momentos quando condicionados a $s_n = -1$. Algebricamente tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} f_{\hat{x}|1}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} f_{\hat{x}|-1}(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} f_{\hat{x}|1}(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} f_{\hat{x}|-1}(x) dx \end{aligned} \quad (5.58)$$

na qual $f_{\hat{x}|s}(\cdot)$ é a fdp de $\hat{x}_{i_s}(n)$ condicionada a $s_n = s$. Considerando que x^{2k} é uma função par e sempre positiva (exceto para $x = 0$), que $f_{\hat{x}|1}(\cdot)$ e $f_{\hat{x}|-1}(\cdot)$ são funções positivas definidas e que estas duas últimas funções possuem a mesma forma, a única maneira de atender às equações apresentadas acima é admitir que $f_{\hat{x}|1}(\cdot) - f_{\hat{x}|-1}(\cdot)$ e $f_{\hat{x}|1}(\cdot) + f_{\hat{x}|-1}(\cdot)$ sejam funções ímpar e par, respectivamente. Assim sendo, as fdps supracitadas são simétricas em relação à origem. Diante disso, o limiar ótimo de decisão para estimar o símbolo transmitido é zero. Este resultado é importante, pois como o procedimento de *denoising* é não-linear e polarizado, não havia confirmação prévia acerca desse fato.

Para o limiar de detecção estabelecido acima, a probabilidade de erro do sistema fica dada por

$$P_e = \Pr(\hat{x}_{i_s}(n) > 0 | s_n = -1). \quad (5.59)$$

Considerando a Equação 5.59, a aproximação analítica da probabilidade de erro, que é aqui denotada por \hat{P}_e , fica dada por

$$\hat{P}_e = \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{K-1} A_i \tilde{\Phi}_G \left(\frac{-\tilde{h}_i + \lambda}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \int_0^{\infty} \hat{f}_r(\tau) d\tau, \quad (5.60)$$

sendo $\tilde{\Phi}_G(\cdot)$ definida por,

$$\tilde{\Phi}_G(x_0) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{\infty} \exp(-\tau^2) d\tau, \quad (5.61)$$

e $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_{N_2})'$ a DWT da RI do pulso de transmissão.

É importante ressaltar que, dependendo da técnica dos momentos empregada, a integral presente na Equação 5.60 tem uma forma fechada.

De acordo com a Equação 5.60, a probabilidade de erro do sistema fica explicitamente determinada em função do limiar de *denoising* e implicitamente pelas funções de base da transformada *wavelet*, cuja dependência se reflete nos valores assumidos por \tilde{h} , A e $\{A_i\}$.

Face ao exposto no parágrafo anterior, o problema de otimização do desempenho de um sistema de comunicação pode ser encarado como um problema de minimização com restrições, no qual a função custo é a probabilidade de erro e as restrições são especificadas de tal sorte que \mathbf{W} possua as propriedades de uma matriz *wavelet*, discutidas no Apêndice D.

5.5 Resultados Numéricos

Esta seção apresenta alguns resultados de simulação computacional de um sistema de comunicação cujo canal é caracterizado pelo modelo AWGN, e que emprega modulação BPSK e o processamento de entrada proposto neste capítulo. O objetivo principal dessas simulações é o de avaliar os resultados analíticos aqui obtidos.

O diagrama de blocos do sistema utilizado para esta avaliação de desempenho foi apresentado na Figura 5.3, no qual, o filtro limitador de faixa não distorce a forma do pulso básico. O procedimento de *denoising* emprega mapeamento suave com limiar global λ e é realizado com base nas P amostras tomadas dentro do intervalo de símbolo, portanto o *buffer* deve ter a capacidade de armazenar esta quantidade de amostras.

Na saída do processamento de entrada é incluído um decimador de P amostras para fornecer ao decisor apenas uma amostra por intervalo de símbolo. A RI do filtro de transmissão é dada pelo pulso de Hanning, que foi escolhido arbitrariamente. Vale mencionar que outras simulações, cujos resultados não estão aqui incluídos, foram realizadas, considerando outras formas de pulsos e na essência os resultados obtidos são similares aos apresentados a seguir.

Nas figuras que se seguem são mostradas as curvas de desempenho que foram obtidas analiticamente e via simulação computacional. Os resultados analíticos foram obtidos aproximando a Equação 5.60 pela série de Gram-Charlier com seis momentos.

Os resultados de simulações foram obtidos considerando *wavelets* dadas pelas funções de base de Haar e de Daubechies. Nesse último caso, foram consideradas as famílias conhecidas como Daubechies-2 e Daubechies-3, aqui denotados por Db2 e Db3, respectivamente [28].

Para as *wavelets* de Haar a RI dos filtros *wavelets*, aqui denotada por h_H , e a do filtro de escalonamento, l_H , são:

$$\begin{aligned} l_H &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)', \\ h_H &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)'. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Para as *wavelets* Db2 as RIs desses filtros são denotadas por h_{D2} e l_{D2} , sendo dadas por:

$$\begin{aligned} l_{Db2} &= (-0, 1294, 0, 2241, 0, 8365, 0, 489)'; \\ h_{Db2} &= (-0, 483, 0, 8365, -0, 2241, -0, 1294)'. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Finalmente, para as *wavelets* Db3 as RIs dos filtros *wavelets* e de escalonamento são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} l_{Db3} &= (0,0352, -0,0854, -0,135, 0,4599, 0,8069, 0,3327)'; & (5.64) \\ h_{Db3} &= (-0,3327, 0,8069, -0,4599, -0,1350, -0,0854, 0,0352)'. \end{aligned}$$

Na Figura 5.4 são mostradas curvas de desempenho em função do limiar de *denoising*, considerando uma RSR de 4 dB e $P = 32$. A RSR é expressa em termos da razão entre a potência do sinal transmitido e a do ruído na saída do filtro de recepção que foi considerado ideal com largura de faixa igual a P/T . Com essas especificações o ruído que contamina as amostras do sinal na entrada do procedimento de *denoising* possui DEP plana. Além disso, a DWT é obtida considerando três níveis de resolução ($J = 3$) e as funções de base *wavelets* Db1 e Db2.

Na Figura 5.5 são apresentadas curvas de taxa de erro de bit (BER) em função do limiar de *denoising*, considerando $P = 16$, funções de base *wavelet* Db1, $J = 2$, e três valores de RSR. Por fim, na Figura 5.6 são apresentadas curvas de desempenho em função do limiar de *denoising* considerando $P = 32$, funções de base *wavelet* Db1, RSR=4 dB, e $J = 2, 3$ e 5.

Apesar de se ter utilizado apenas seis momentos na aproximação analítica da fdp da VA r , a análise global dos resultados apresentados nas figuras supracitadas mostra um bom ajuste entre as curvas obtidas mediante aproximação analítica e aquelas geradas por simulação computacional.

Cabe notar que com o aumento do limiar, o termo referente ao impulso da fdp na saída do procedimento de *denoising* vai se tornando mais importante. Por outro lado, para valores pequenos de limiar, o *denoising* exerce pouca influência. Diante disso, a parcela da supracitada fdp referente a aproximação realizada com as técnicas dos momentos é mais importante na faixa intermediária de valores do limiar de *denoising*. Em razão disso, observa-se que nessas faixas de valores um pequeno desajuste entre os resultados analíticos e simulados apresentados nesta seção. Esse desajuste pode ser reduzido aumentando a quantidade de momentos usados na aproximação, no entanto, é importante verificar que as curvas apresentadas são precisas para fins de determinação do limiar de *denoising* ótimo.

A Figura 5.5 mostra que o desempenho do procedimento proposto depende das funções de base empregadas, comportamento esperado em função da propriedade de representação com parcimônia, que depende da “adequação” entre as funções de base

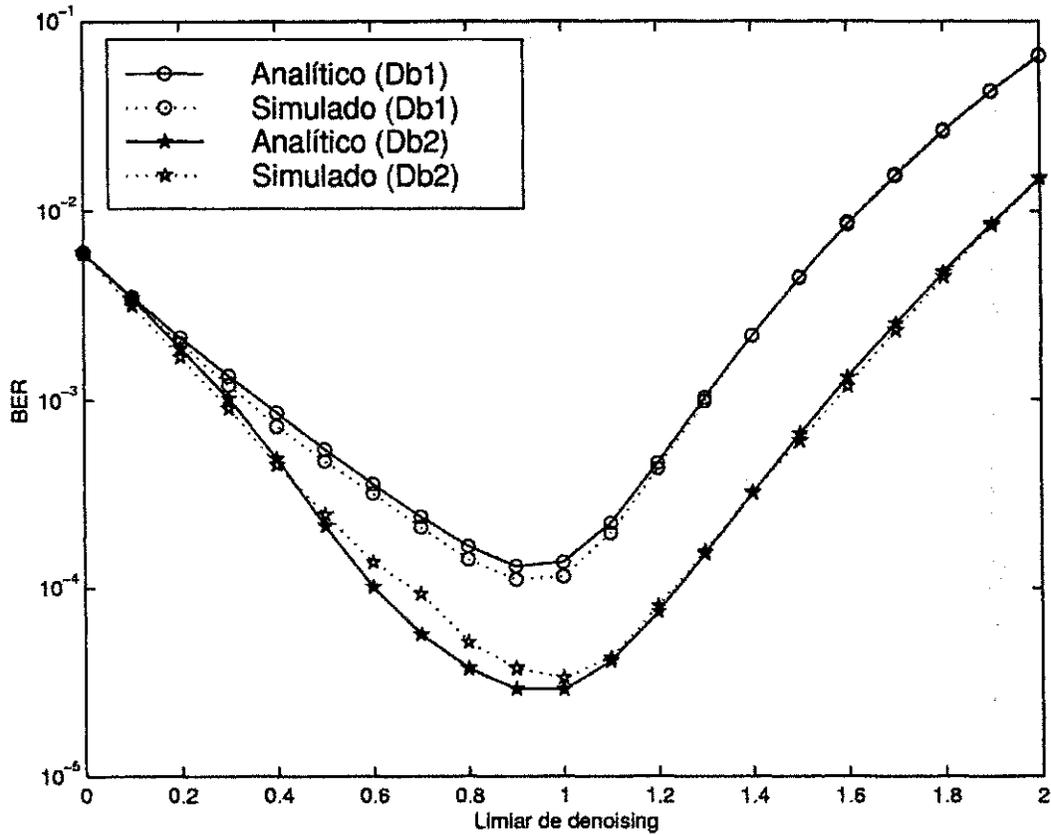


Figura 5.4: BER \times limiar de *denoising* para as funções de base Db1, Db2 e Db3 considerando $J = 2$, $P = 32$ e $RSR = 4$ dB.

e os sinais a serem expandidos.

Vale notar que as Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 indicam que o desempenho da técnica proposta é sensivelmente dependente do valor assumido pelo limiar de *denoising*. Com relação a este aspecto é importante fazer alguns comentários.

Para elevados valores do limiar, poucos coeficientes passam pelo procedimento de comparação, provocando, como discutido na Equação 5.9, elevada polarização e pequena variância do estimador. Nessas condições, verificou-se através de simulações cujos resultados não são aqui apresentados, que os sinais na entrada do decisor são extremamente suaves (componentes de altas frequências do sinal de interesse são suprimidas), corroborando a argumentação acima emitida.

Por outro lado, para λ pequeno, muitos coeficientes passam incólumes pelo procedimento de *denoising*, prejudicando o processo de redução da potência do ruído, o que

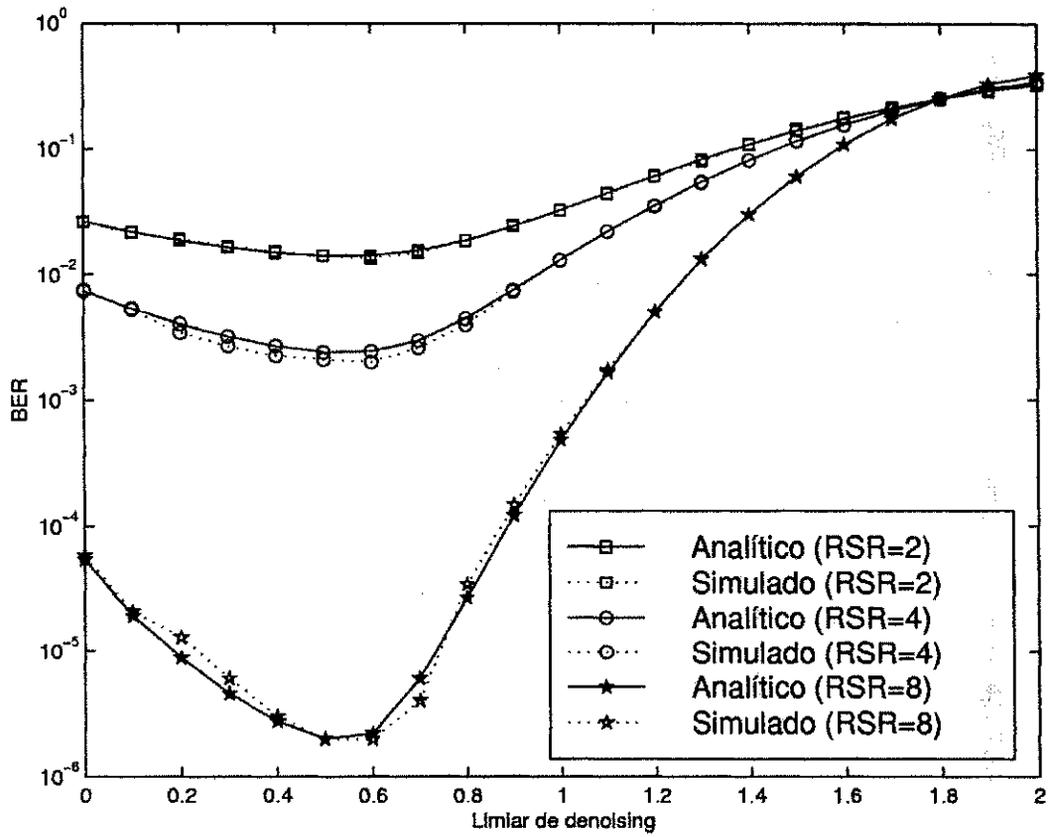


Figura 5.5: BER \times limiar de *denoising* para RSR de 2, 4 e 8 dB considerando Db1, $J = 2$ e $P = 16$.

leva a uma situação inversa da anterior: estimação com grande variância e pequena polarização. Isso também foi constatado mediante simulação computacional.

Em suma, tanto para pequenos quanto para elevados valores de λ , os desempenhos observados foram severamente degradados em comparação ao produzido pelo uso do limiar ótimo. No primeiro caso isso se deve à pequena redução do nível de ruído (grande variância) e no segundo à grande polarização do estimador, resultante da supressão de uma parte considerável da energia do sinal transmitido.

Um aspecto a ser destacado a partir do conjunto de resultados numéricos apresentados é que o valor do limiar ótimo para realizar o procedimento de *denoising* suave, no contexto aqui investigado, se altera significativamente com a quantidade de níveis de resolução, como pode ser observado na Figura 5.6. Para dois e cinco níveis de resolução os valores ótimos desse parâmetro são respectivamente 0,6 e 1,4. Mais importante ain-

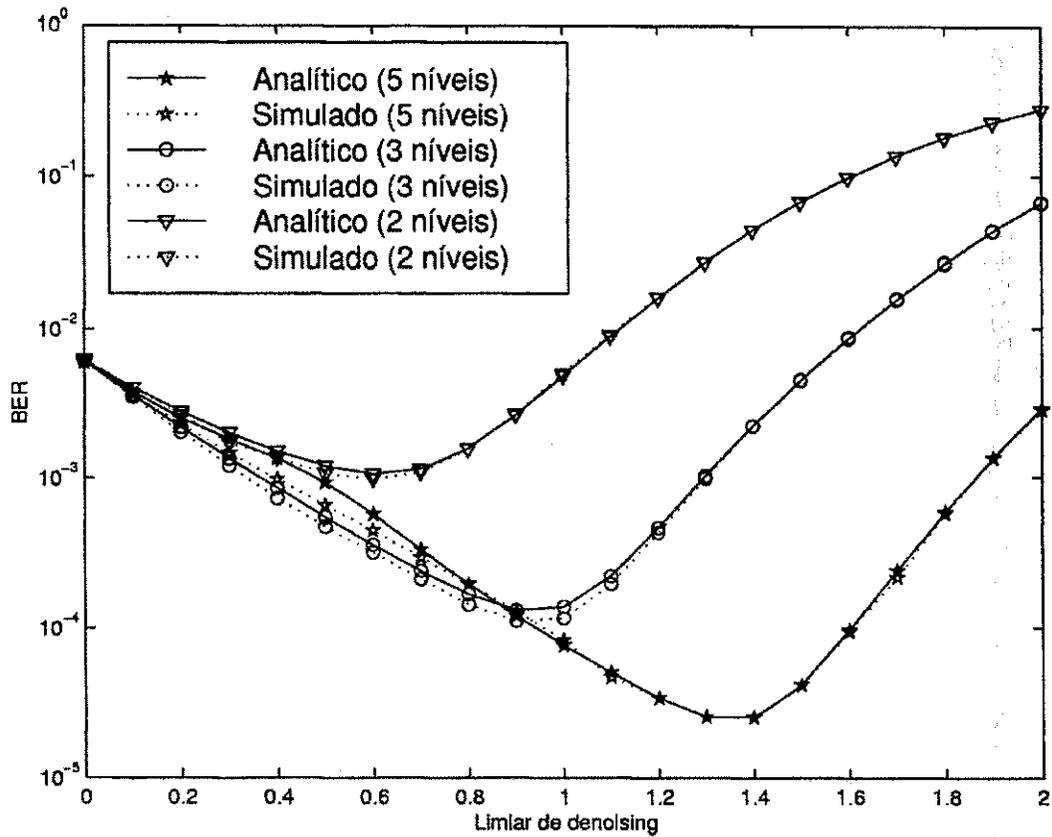


Figura 5.6: BER \times limiar de *denoising* para $J = 2, 3$ e 5 considerando $Db1$, $P = 32$ e $RSR=4$ dB.

da: o uso de $\lambda = 0,6$ no segundo caso provoca uma severa degradação de desempenho. Por outro lado, o valor do limiar ótimo é pouco influenciado pelo tipo de funções de base e RSR.

Apesar do pequeno conjunto de resultados considerados nessa seção, é importante notar que muitos parâmetros influenciam de forma significativa o desempenho do esquema de recepção que emprega o processamento de entrada proposto. Este fato valoriza a análise matemática realizada, que possibilita caracterizar rapidamente o desempenho do referido esquema de recepção para diferentes combinações de formato de pulso básico de transmissão, transformada *wavelet*, limiar de *denoising*, níveis de resolução e fator de superamostragem, o que é praticamente inviável por meio de simulação de Monte Carlo.

5.6 Considerações Finais

Neste capítulo foi proposto um novo processamento de entrada para receptores digitais, cuja capacidade de remoção de ruído advém do uso de técnicas de *denoising*. Apesar do procedimento proposto ser geral, neste capítulo, no afã de desenvolver um conjunto inicial de ferramentas para avaliação analítica de desempenho, foi investigado um cenário de comunicação simples, com modulação BPSK e canal AWGN.

Foi apresentada uma revisão sucinta de algumas técnicas básicas de *denoising*. Considerando o uso de mapeamento suave e limiar de escopo global, a probabilidade de erro do esquema supracitado foi obtida analiticamente, usando técnicas de momentos para aproximar a fdp do sinal na entrada do decisor. É importante ressaltar que, apesar do modelo de sistema de comunicação ser extremamente simples, o processamento de entrada proposto é não-linear, e obter expressões para probabilidade de erro nessas condições é, em geral, uma tarefa árdua. Nesse caso não foi diferente. Muitas dificuldades foram encontradas, especificamente no que se refere ao uso das técnicas dos momentos. Essas dificuldades foram sendo suplantadas mediante soluções originais aqui propostas.

Uma importante dificuldade veio à tona pelo fato dessa fdp possuir descontinuidade e um impulso na origem, características que conjuntamente impõem sérias restrições de desempenho às técnicas dos momentos. Nesse caso, foram realizadas manipulações algébricas nos momentos dessa VA para contornar ou solucionar esses inconvenientes separando a fdp em três partes: uma referente ao impulso, outra decorrente da descontinuidade e a última uma função contínua.

Como fruto da análise realizada, obteve-se uma aproximação analítica da fdp do sinal na entrada do decisor dividida em três parcelas, cada qual decorrente das partes supracitadas. Para as duas primeiras parcelas, que impunham sérias restrições de desempenho às técnicas dos momentos, foram fornecidas expressões fechadas a partir da expansão *wavelet* do pulso básico de transmissão. A última parcela, por seu turno, foi obtida por aproximação analítica a partir de seus momentos estatísticos, os quais foram determinados analiticamente.

A partir da fdp do sinal na entrada do decisor chegou-se à expressão para a probabilidade de erro de bit do esquema de recepção, a qual ficou especificada em termos de parâmetros do procedimento de *denoising*.

Por fim, foram obtidas curvas de desempenho via simulação de Monte Carlo em

função do limiar de *denoising* para alguns valores de RSR, funções de base *wavelets* e níveis de resolução. Esses resultados corroboraram as deduções que foram obtidas, usando a técnica de Gram-Charlier com seis momentos.

No próximo capítulo, avalia-se mediante simulação computacional o desempenho de sistemas mais complexos que empregam a estrutura de processamento de entrada proposta nesta tese.

Capítulo 6

Desempenho do Processamento de Entrada Proposto Para Canais Seletivos em Frequência

Neste capítulo, como no anterior, técnicas de *denoising* são avaliadas no contexto dos sistemas de comunicações digitais, especificamente nas estruturas de processamento de entrada dos receptores cuja finalidade precípua é a de reduzir o nível de ruído subjacente sem distorcer o sinal de interesse. A ação dessas estruturas facilita o trabalho subsequente do receptor no que concerne à detecção ou estimação dos símbolos transmitidos. Ao contrário do capítulo anterior, cuja abordagem focalizava a avaliação analítica de desempenho, este capítulo contempla a obtenção de resultados via simulação computacional.

As simulações apresentadas neste capítulo contemplam cenários de comunicação mais complexos que o discutido no capítulo anterior, principalmente no que se refere ao modelo de canal adotado, que tem implicações diretas na estrutura do receptor. Aqui são considerados canais seletivos em frequência, esquemas de modulação QPSK e filtros de transmissão e recepção cujas RI se estendem além do intervalo de símbolo. Além disso, nos esquemas de recepção são empregados equalizadores.

Para ilustrar os benefícios de desempenho produzidos pelo tipo de processamento de entrada proposto, sua utilização, em conjunto com um DFE (do termo em inglês *decision-feedback equalizer*) [3,25] é avaliada via simulação computacional, considerando canais seletivos em frequência e invariantes no tempo. Para fins de comparação, são também investigados esquemas de recepção que têm sido amplamente empregados, os

quais empregam o DFE na sua versão síncrona (coeficientes dos filtros espaçados no intervalo de símbolo) ou fracionada, com algumas combinações de filtros de transmissão e recepção. No total quatro sistemas de comunicações são avaliados.

O restante deste capítulo é dividido em quatro seções. Na Seção 6.1 apresenta-se alguns comentários importantes referentes ao procedimento de *denoising* empregado no processamento de entrada proposto. Isso se faz necessário devido a algumas diferenças importantes entre o procedimento aqui empregado e o considerado no capítulo anterior. Na Seção 6.2 é apresentado o sistema simulado, com ênfase na estrutura de processamento de entrada. Na Seção 6.3 são apresentados e discutidos os resultados de simulação e, por fim, na Seção 6.4 são apresentadas as conclusões deste capítulo.

6.1 Considerações Preliminares

No capítulo anterior foi considerado um sistema de comunicações extremamente simples a fim de simplificar a análise matemática lá realizada. Apesar dos resultados lá apresentados terem elucidado importantes pontos referentes ao esquema proposto, os cenários estudados limitavam as possibilidades de escolhas dos parâmetros que influenciam o desempenho do processamento de entrada. A estrutura de processamento avaliada neste capítulo apresenta algumas diferenças em relação à discutida no capítulo anterior, especialmente no que se refere à técnica de *denoising* como será visto na seqüência.

As técnicas de *denoising* aqui discutidas empregam estratégia de mapeamento suave com limiares de escopo local. Neste caso, ao contrário das técnicas de escopo global, mais de um limiar de comparação é empregado para implementar a técnica.

Estratégias que empregam limiares de escopo local são especialmente atrativas quando o ruído que contamina o sinal é colorido. Nesses casos, a correlação existente entre as amostras do ruído causa uma concentração de sua energia no domínio da transformada. Vale mencionar que devido à necessidade do uso de superamostragem na implementação do processamento de entrada proposto, em geral, as amostras de ruído são correlacionadas.

De acordo com o esquema de escopo local aqui adotado, para cada nível de resolução da transformada é empregado um limiar diferente λ_j [26, 60, 61]. Combinando a estratégia de mapeamento suave com este esquema de escopo local, os coeficientes no domínio da transformada após o procedimento de *denoising*, denotados por $\{\hat{\theta}_{j,k}\}$, são

dados por

$$\hat{\theta}_{j,k} = \text{sgn}(\alpha_{j,k}) (|\alpha_{j,k}| - \lambda_j) \mathcal{I}_{(|\alpha_{j,k}| > \lambda_j)} \quad \text{para } j \leq J, \quad (6.1)$$

na qual $\text{sgn}(\cdot)$ denota a função sinal, $\alpha_{j,k}$ são os coeficientes da transformada *wavelet* da observação ruidosa, j representa um particular nível de resolução da DWT, $\mathcal{I}_{(\mathcal{A})}$ representa a função indicadora do conjunto \mathcal{A} e J denota o nível de maior resolução da transformada.

É importante lembrar (Apêndice D) que para obter os coeficientes referentes aos menores níveis de resolução da transformada, as amostras do sinal passam por sucessivos processos de filtragem passa-baixas. Como o sinal de interesse deve apresentar um conteúdo espectral nas baixas frequências maior do que o ruído, sua concentração de energia nesses níveis de resolução é maior do que aquela obtida para o ruído. Essa mesma conclusão pode ser atingida lançando mão de argumentos oriundos da abordagem estatística: o sinal é por hipótese mais correlacionado do que o ruído, o que permite uma maior concentração de sua energia nos níveis de menor resolução.

A redução de amplitude dos coeficientes referentes aos menores níveis de resolução da transformada pode aumentar sobremaneira a polarização do estimador. Este é um risco desnecessário, pois, como discutido acima, pouca energia do ruído deve estar presente nesses coeficientes. Diante disso, aqui se propõe que apenas os coeficientes referentes aos níveis de resolução de J_s em diante passem pelo processamento não-linear. Os demais devem ficar inalterados. Algebricamente esse procedimento é dado por

$$\hat{\theta}_{j,k} = \begin{cases} \alpha_{j,k} & \text{para } j \leq J_s, \\ \text{sgn}(\alpha_{j,k}) (|\alpha_{j,k}| - \lambda_j) \mathcal{I}_{(|\alpha_{j,k}| > \lambda_j)} & \text{para } j = J_s + 1 \dots J, \end{cases} \quad (6.2)$$

É importante mencionar que a escolha de J_s permite estabelecer um compromisso entre a variância e a polarização do estimador. Elevados valores de J_s tendem a aumentar a variância e reduzir a polarização do estimador, enquanto que pequenos valores de J_s tendem a aumentar a sua polarização e reduzir a sua variância.

Para implementar o procedimento proposto na Equação 6.2 é preciso determinar os valores dos limiares. Existem vários métodos para estabelecê-los [61, 62], dentre os quais, foi escolhido o seguinte

$$\lambda_j = \hat{\sigma}_j \sqrt{2 \log(n_j)} \quad \text{para } j = J_s + 1, \dots, J \quad (6.3)$$

sendo $\hat{\sigma}_j$ um fator de escala referente ao j -ésimo nível de resolução e n_j a quantidade de coeficientes desse nível.

O fator $\hat{\sigma}_j$ pode ser obtido a partir dos coeficientes da transformada *wavelet* da observação ruidosa do j -ésimo nível de resolução, da seguinte forma

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\text{MAD}(\alpha_{j,k})}{0,6745}, \quad (6.4)$$

sendo $\text{MAD}(\alpha_{j,k})$ o desvio absoluto médio dos coeficientes do j -ésimo nível de resolução e 0,6745 uma constante de calibração, específica para a distribuição gaussiana [61].

Como ficará evidente na próxima seção, por ocasião da discussão referente ao sistema simulado, o procedimento de entrada opera em um conjunto de N intervalos de símbolo, ao contrário do esquema apresentado no capítulo anterior, que considerava apenas amostras tomadas dentro de um intervalo de símbolo. A consideração de apenas um intervalo de símbolo facilitou a manipulação algébrica, porém limitou a análise a poucas famílias de funções de base e levou à necessidade de se usar um fator de superamostragem elevado. Esses inconvenientes são superados aqui.

6.2 O Sistema Simulado

O diagrama de blocos simplificado do sistema de comunicações simulado é apresentado na Figura 6.1. A fonte gera símbolos estatisticamente independentes e identicamente distribuídos. O transmissor é composto de modulador QPSK e filtro de transmissão.

A RI do canal é modelada por um filtro transversal com coeficientes invariantes no tempo e igualmente espaçados. Para alguns canais considerados neste trabalho o espaçamento entre coeficientes vizinhos é igual à metade do intervalo de símbolo $T/2$. Em outros casos são considerados canais com espaçamento igual ao intervalo de símbolo.

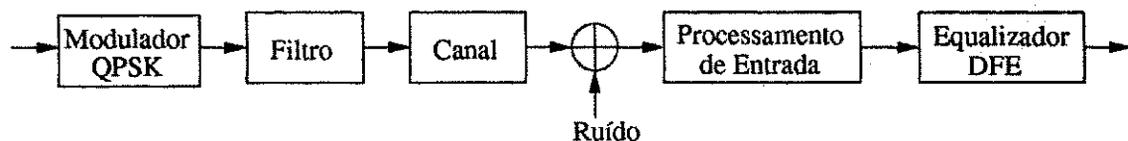


Figura 6.1: Diagrama de blocos do sistema simulado.

O ruído assume valores complexos e é modelado por um processo aleatório estacionário em sentido amplo, cujas componentes real e imaginária são estatisticamente

independentes. A especificação de primeira ordem dessas componentes é dada por VA gaussianas de média nula e variância σ^2 .

O esquema de recepção é composto basicamente de dois blocos: o processamento de entrada e o equalizador. Com relação ao processamento de entrada duas estruturas são avaliadas. A primeira aqui rotulada de convencional é composta basicamente de filtro linear invariante ao deslocamento e amostrador. O segundo, doravante denominado de processamento de entrada proposto, se baseia no emprego de técnicas de *denoising*. Por fim, o uso de equalizador se faz necessário em função do tipo de canal de comunicação considerado. O equalizador utilizado é do tipo DFE.

As estratégias do processamento de entrada consideradas neste capítulo são mostradas na Figura 6.2. Em particular, a estratégia convencional é ilustrada na Figura 6.2a. Como pode ser verificado, este esquema emprega um amostrador que opera na taxa Q/T , sendo Q um fator de superamostragem que depende do esquema de equalização usado. Quando $Q = 1$, o equalizador opera na taxa de símbolos, ao passo que quando $Q \neq 1$, o equalizador é fracionário. Neste trabalho, são considerados equalizadores fracionários com $Q = 2$.

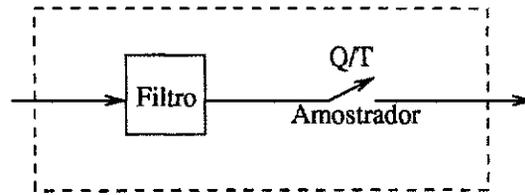
Com relação ao filtro de recepção duas alternativas são consideradas: filtro de recepção casado com o filtro de transmissão [3] e filtro de recepção plano na faixa de passagem [2, 63]. Em ambos os casos a RI conjunta formada envolvendo os filtros de transmissão e recepção é do tipo de cosseno levantado. Diferentes valores de fator de excesso de faixa são considerados.

Na Figura 6.2b é mostrado o processamento de entrada proposto. Ele é composto de filtro de recepção, *buffer*, amostrador na taxa P/T , processamento de *denoising* e um decimador de P amostras, com fator de decimação igual a P . Portanto, independente do valor assumido por P , a saída do processamento de entrada é fornecida na taxa de símbolos.

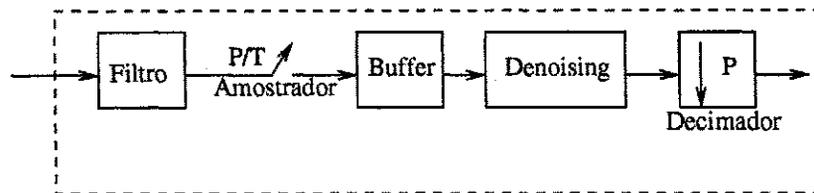
Maiores detalhes referentes aos filtros de transmissão e recepção, aos parâmetros do procedimento de entrada e, principalmente, ao canal de comunicação, são fornecidas adiante.

É importante verificar que o procedimento de entrada proposto demanda mais recursos computacionais do que o procedimento convencional, devido ao uso da técnica de *denoising*, cuja complexidade decorre essencialmente do uso da DWT, e de superamostragem.

Considerando que a observação é formada por PN amostras (sendo N o número



(a) Processamento de entrada convencional



(b) Processamento de entrada proposto

Figura 6.2: Diagrama de blocos do processamento de entrada convencional e proposto.

de símbolos por bloco), a complexidade da DWT, expressa em termos do número de operações de ponto flutuante é dada por $O(PN)$ [62]. Além disso, o esquema proposto introduz um retardo na decisão de N símbolos. Por outro lado, as especificações do filtro de recepção podem ser relaxadas, uma vez que o combate ao ruído é realizado principalmente pelo procedimento de *denoising*. Outro aspecto interessante é que, como não existe a necessidade de se adotar filtros casados no processamento de entrada, o filtro de transmissão pode ser projetado para favorecer ou atender outros requisitos de projeto.

6.3 Resultados Numéricos

A taxa de erro de bit (BER) é o parâmetro de desempenho usado para avaliar o funcionamento dos esquemas de recepção sob investigação. Os valores de BER são computados em função da razão entre a energia do bit (E_b) e a densidade espectral de potência do ruído (N_0).

Os resultados são apresentados em duas sub-seções. O objetivo principal da sub-seção 6.3.1 é investigar o comportamento do esquema de recepção variando alguns parâmetros importantes do processamento de entrada proposto. Na Seção 6.3.2, a

ênfase é voltada para um estudo comparativo de desempenho entre esquemas de recepção convencionais e um que emprega o processamento de entrada baseado em *denoising*.

6.3.1 Desempenho Variando Alguns Parâmetros do Procedimento de Entrada Proposto

As curvas de BER apresentadas nesta seção foram obtidas considerando a transmissão de 10^5 blocos independentes, cada qual composto de 512 símbolos. O treinamento do DFE foi realizado antes da transmissão da informação propriamente dita, usando o algoritmo de filtragem adaptativa LMS e uma seqüência pseudo-aleatória composta de 64 símbolos. O fator de superamostragem foi fixado em dezesseis ($P = 16$). Além disso, todos os resultados de simulação apresentados nesta seção foram obtidos considerando que a DWT possui sete níveis de resolução ($J = 7$).

No processamento de entrada convencional os filtros de transmissão e de recepção são casados do tipo raiz quadrada de cosseno levantado, com fator de excesso de faixa igual a 15%. Outros resultados de simulação, que não são aqui apresentados, foram obtidos considerando outros valores de fator de excesso de faixa e revelaram em sua essência comportamentos similares aos obtidos para o valor de excesso de faixa mencionado acima.

No sistema de comunicação que emprega o processamento de entrada proposto adota-se um filtro de transmissão da família cosseno levantado com fator de excesso de faixa igual a 15% e filtro de recepção do tipo Butterworth de segunda ordem, cuja largura de banda de 3 dB é denotada por B_c .

Três canais, referidos como Ch1, Ch2 e Ch3, cujas RI têm coeficientes dados pelos vetores (0,9014, 0,4294, -0,0531, -0,0178, 0,0058), (0,7767, -0,5097, -0,1514, 0,3223, 0,1007) e (0,7061, -0,5776, -0,0949, 0,3821, 0,1130), respectivamente, são considerados nas simulações. Esses canais possuem atrasos espaçados na metade do intervalo de símbolo ($T/2$) e suas respostas em amplitude são mostradas na Figura 6.3, na qual o eixo de freqüências é normalizado pela taxa de transmissão.

Como fica evidente a partir da figura supracitada, o canal Ch1 apresenta resposta em amplitude pouco dispersiva, oferecendo um pequeno grau de dificuldade para o equalizador, ao contrário dos outros dois canais que contém picos de atenuação dentro da banda de interesse. Em particular, a resposta em amplitude do canal Ch3 mostra

um pico de atenuação extremamente pronunciado na faixa de interesse.

É importante verificar ainda que as respostas ao impulso desses canais não apresentem precursoros, ou seja, o primeiro raio é o dominante. Como consequência deste fato, o DFE projetado apresenta uma estrutura simplificada, na qual apenas a seção de realimentação é incorporada. Neste caso, a matriz de correlação do sinal de referência é dada por uma matriz identidade, situação em que o algoritmo adaptativo LMS produz suas melhores características de desempenho [5, 8]. Diante disso, optou-se por usá-lo para estimar os parâmetros do equalizador durante a fase de treinamento.

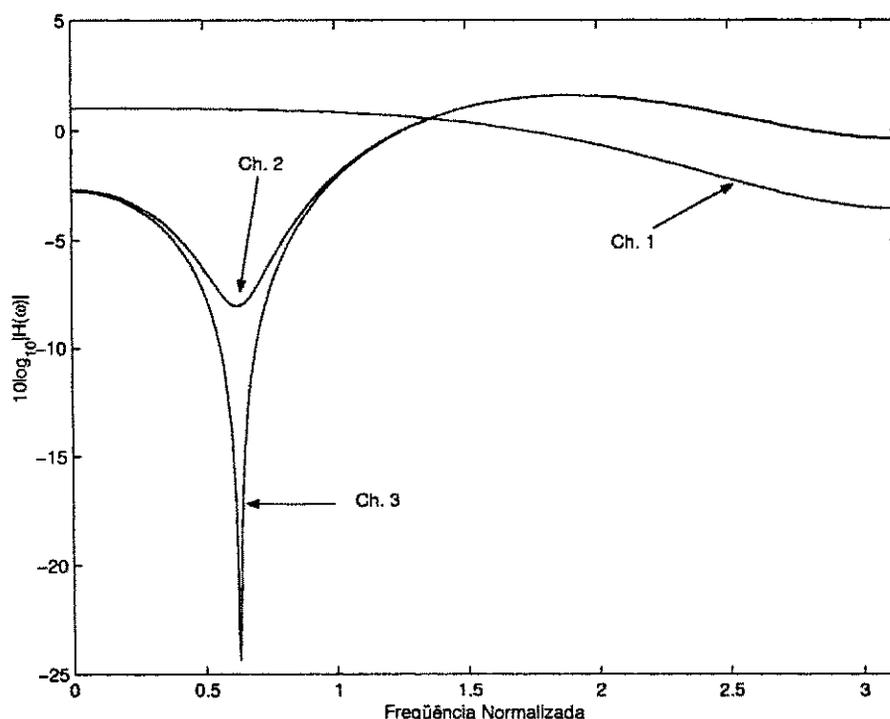


Figura 6.3: Resposta em amplitude dos canais simulados.

Na Figura 6.4 é apresentado o desempenho do receptor que emprega o processamento de entrada proposto em função da largura de banda do filtro de recepção (B_c). Os resultados são obtidos para o canal Ch3, utilizando as funções de base da família Daubechies com cinco graus de regularidade [28], aqui denotada por Db5, e $J_s = 4$.

Nesta figura são incluídos resultados para 14 e 18 dB de razão sinal-ruído (E_b/N_0). Além disso, são incluídos também os resultados obtidos para o esquema de recepção com o processamento de entrada convencional. Neste caso, como B_c é um parâmetro que afeta apenas o processamento de entrada proposto, as curvas de desempenho mostradas são paralelas ao eixo horizontal.

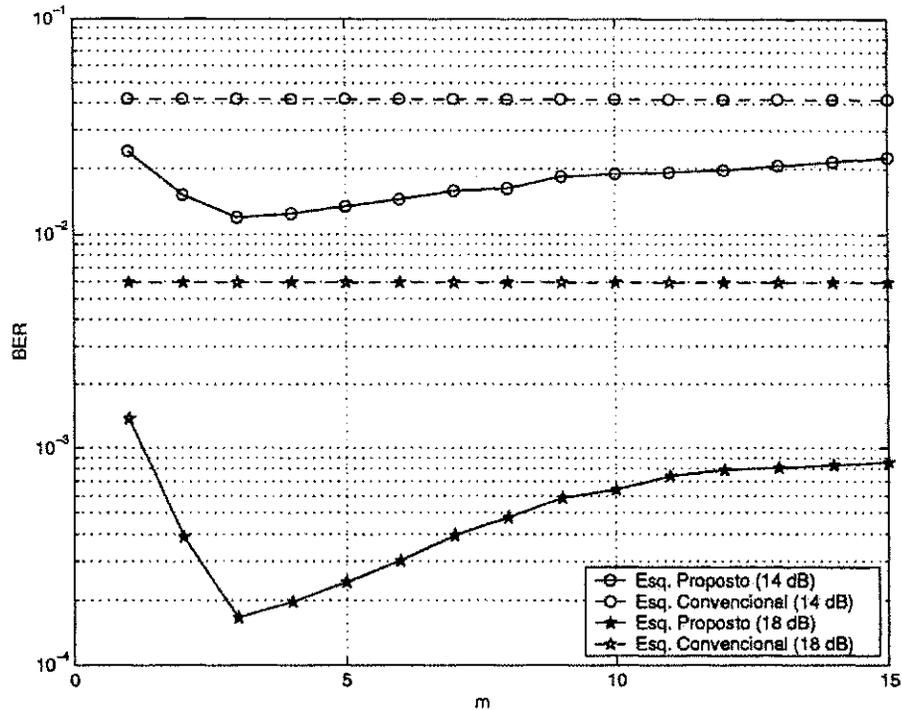


Figura 6.4: Desempenho em função da largura de banda do filtro de recepção (m/T Hz) para $E_b/N_0 = 14$ e 18 dB.

Os resultados apresentados na Figura 6.4 mostram claramente que o esquema de recepção que emprega o processamento de entrada proposto supera o desempenho do esquema de recepção que usa o processamento de entrada convencional, para todos os valores de B_c considerados.

O alargamento da banda de passagem do filtro de recepção aumenta a potência do ruído na entrada do procedimento de *denoising* e reduz a correlação entre as amostras do ruído. Essas tendências provocam efeitos conflitantes no procedimento de *denoising*. Enquanto o primeiro prejudica, por razões óbvias, o seu desempenho, o segundo, o favorece, na medida que não haverá concentração da energia do ruído no domínio da transformada. Conforme indicado na Figura 6.4, o procedimento proposto produziu um desempenho melhor para $B_c = 3/T$. Além desse valor, o impacto negativo provocado pelo aumento da potência do ruído na entrada do procedimento de *denoising* parece ser mais significativo do que os benefícios oriundos da redução de correlação de suas amostras.

Nas Figuras 6.5 e 6.6 são apresentadas curvas de desempenho para o receptor que emprega o processamento de entrada proposto. Esses resultados foram obtidos

variando-se alguns parâmetros importantes da técnica de *denoising*. Os resultados mostrados na Figura 6.5 foram obtidos com $J_s = 4$ e funções de base do tipo Daubechies com cinco, sete e nove graus de regularidade, aqui denotadas por Db5, Db7 e Db9, respectivamente. Já os resultados apresentados na Figura 6.6 foram obtidos usando as funções de base Db5 e quatro diferentes valores de J_s . Em ambos os casos foi considerando o canal Ch3 e E_b/N_0 variando de 0 a 30 dB com incrementos de 2 dB. Além disso, empregou-se $J=7$ e $B_c = 3/T$.

Os resultados apresentados nas Figuras 6.5 e 6.6 indicam claramente que o desempenho do esquema de recepção é sensível à escolha das funções de base e à quantidade de níveis de resolução cujos coeficientes passam incólumes pelo procedimento de *denoising* (J_s). A seguir esses resultados são discutidos em maiores detalhes.

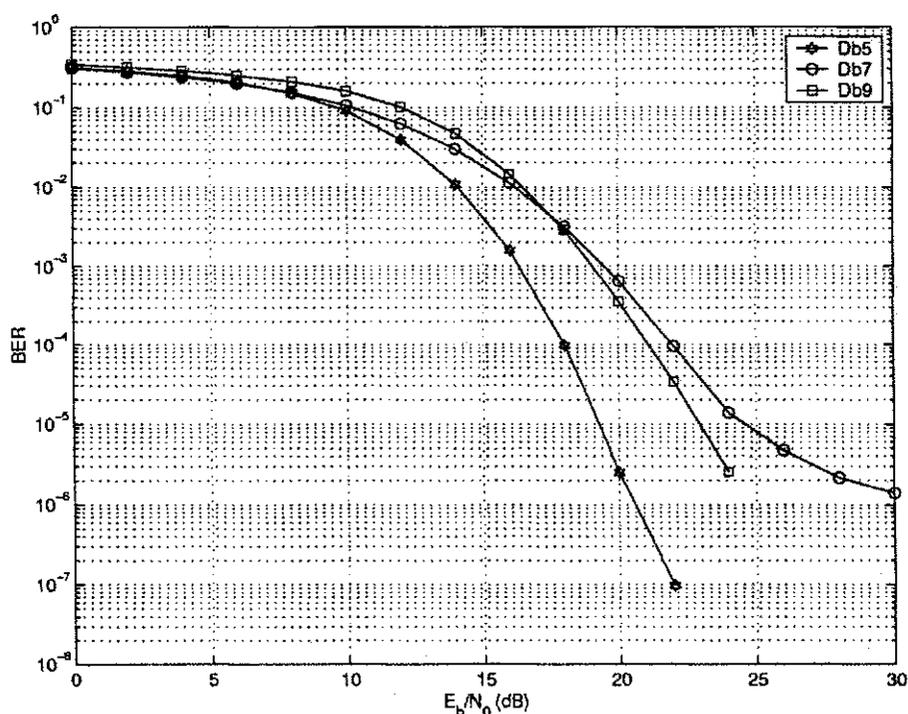


Figura 6.5: Desempenho do esquema proposto para algumas funções de base.

Como mostrado na Figura 6.5, os melhores resultados foram obtidos para as funções de base Db5, principalmente para altos valores de E_b/N_0 , ao passo que os piores foram verificados para as funções de base Db7. Neste último caso observou-se inclusive uma tendência ao surgimento de piso na curva de probabilidade de erro.

No que se refere aos resultados apresentados na Figura 6.6, pode-se observar claramente que a escolha de J_s exerce um forte impacto na taxa de erro de bit do esquema

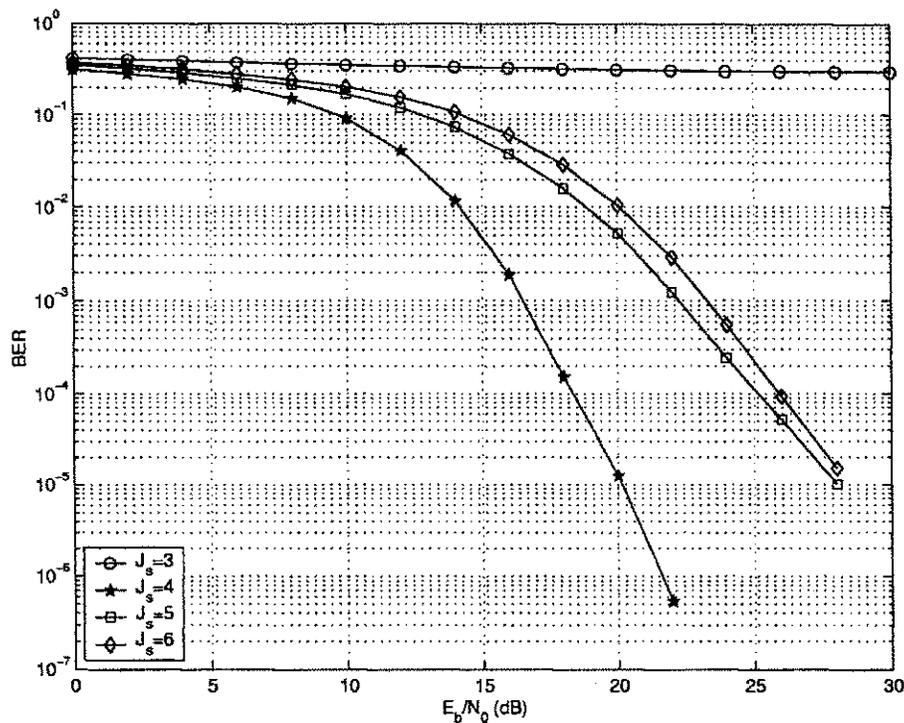


Figura 6.6: Desempenho do esquema proposto para alguns valores de J_s .

proposto. Para um pequeno valor de J_s , coeficientes com conteúdo significativo de energia do sinal de interesse podem ser excluídos, produzindo uma estimativa do sinal transmitido muito suavizada (estimador com polarização grande). Por outro lado, se o valor de J_s é muito elevado, a redução na potência do ruído fica comprometida, produzindo uma estimativa com grande variância. De acordo com os resultados apresentados na Figura 6.6, um bom compromisso entre polarização e variância pode ser obtido com $J_s=4$.

É importante mencionar que em outras simulações realizadas, cujos resultados não são apresentados, revelam que o valor ótimo de J_s está visceralmente relacionado com a quantidade de níveis de resolução da transformada (J), observando-se um aumento do primeiro quando o segundo aumenta.

Considerando um sinal com uma quantidade fixa de amostras, deve-se notar que o número de coeficientes por nível depende da quantidade total de níveis de resolução da transformada (J). Foi verificado, por simulação computacional, que a capacidade de concentração de energia da transformada não é muito influenciada por J . Além disso, cabe lembrar que cerca de 50% dos coeficientes da transformada pertencem no nível J , 25% deles pertencem ao nível $J - 1$, 12,5% pertencem ao nível $J - 3$ e assim em

diante. Dessa forma, admitindo que a maior parte da energia do sinal de interesse fica confinada em um certo percentual dos coeficientes, a quantidade de níveis a que estes coeficientes pertence é diretamente proporcional a J .

Os resultados da comparação de desempenho entre os esquemas de recepção que empregam o processamento de entrada proposto e o convencional são mostrados na Figura 6.7 considerando os canais Ch1, Ch2 e Ch3. O esquema proposto foi simulado com funções de base Db5, $J_s = 4$ e $B_c = 3/T$. Nessa figura inclui-se também a curva de probabilidade de erro de bit teórica para um esquema de modulação QPSK em canal AWGN.

Os resultados de simulação apresentados na Figura 6.7 mostram claramente que o desempenho do receptor que emprega o processamento de entrada proposto é sempre melhor do que o do esquema de recepção com processamento de entrada convencional. Verifica-se também que a vantagem de desempenho propiciada pelo primeiro depende da resposta ao impulso do canal. Por exemplo, para uma taxa de erro de 10^{-5} os ganhos observados são de 0,5 dB para o canal Ch1, 4 dB para o canal Ch2 e superior a 5 dB para o canal Ch3, indicando que essa vantagem aumenta à medida que o pico de atenuação dentro da faixa espectral de interesse fica mais pronunciado. Em particular, obteve-se um considerável ganho em termos de E_b/N_0 para o canal Ch3. Outros resultados não apresentados neste trabalho, que foram obtidos para canais com diferentes respostas ao impulso confirmam essa conjectura.

6.3.2 Comparação de Desempenho Entre os Esquemas Proposto e Convencionais

Nesta seção o desempenho do receptor que emprega o procedimento de entrada proposto é avaliado e comparado com o de esquemas de recepção usuais.

Três destes esquemas, que se diferenciam pelos filtros de transmissão e recepção e pela quantidade de amostras por intervalo de símbolo empregada no filtro avante do DFE, são considerados. São contemplados nas simulações dois modelos clássicos de canal invariante no tempo, que se caracterizam por apresentar severa atenuação dentro da faixa espectral de interesse [3, pp.615-617]. Estes modelos, aqui rotulados por Ch4 e Ch5, têm RI caracterizadas pelos vetores de coeficientes (0,407, 0,815, 0,407) e (0,227, 0,460, 0,688, 0,460, 0,227), respectivamente. Em ambos os casos, a diferença entre dois atrasos adjacentes é sempre igual ao intervalo de símbolo.

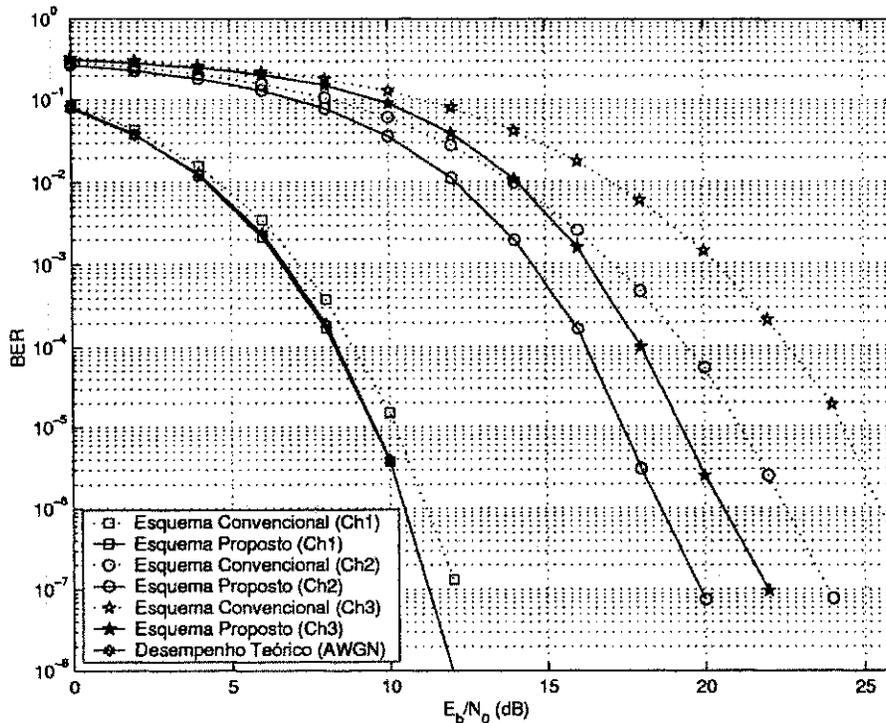


Figura 6.7: Desempenho dos esquemas convencional e proposto para os canais Ch1, Ch2 e Ch3. Inclui-se também a curva de probabilidade de erro de bit para o canal AWGN.

As respostas em amplitude desses modelos são mostradas na Figura 6.8, na qual se vê claramente que o canal Ch5 é pior para fins de equalização, tendo em vista a sua forte atenuação dentro da banda de frequência do sinal transmitido.

Outro fato interessante a ser notado é que as RIs dos canais investigados nesta seção, ao contrário dos considerados na seção anterior, apresentam precursores. Neste caso o DFE é projetado com suas seções avante e de realimentação. Como as amostras que entram na seção avante do DFE são correlacionadas, o desempenho do LMS no ajuste dos parâmetros do equalizador tende a ser bem pior do que o de outros algoritmos que possuem maior robustez à correlação do sinal de referência. Uma alternativa interessante nesses casos, e que foi aqui adotada, é o algoritmo RLS (do termo em inglês *recursive least-squares*) [5, 8].

Os resultados da comparação de desempenho são apresentados nas Figuras 6.9 e 6.10 e foram obtidos considerando a transmissão de 10^6 blocos independentes de 512 símbolos QPSK, dos quais os primeiros 128 símbolos de cada bloco são utilizados para treinar o equalizador.

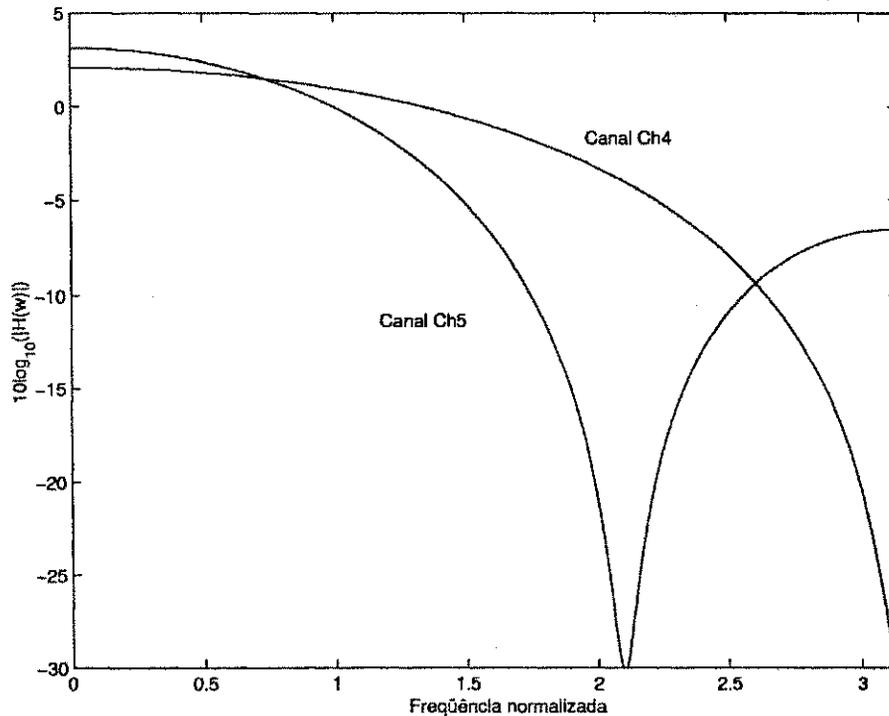


Figura 6.8: Resposta em amplitude para os canais Ch4 e Ch5.

O número de coeficientes do filtro de realimentação do DFE foi fixado em sete. Com respeito à seção avante, foram utilizados dez e vinte coeficientes, respectivamente, para o equalizador espaçado no intervalo de símbolo e para o fracionário. Naturalmente, em ambos os casos, a seção de realimentação adota espaçamento a intervalos de símbolos. Esses equalizadores foram concebidos para considerar a mesma extensão de memória em intervalos de símbolo. Por este motivo a seção avante do esquema fracionário ($Q = 2$) emprega o dobro da quantidade de coeficientes utilizada na referida seção do DFE com amostragem na taxa de símbolos.

O fator de superamostragem do processamento de entrada proposto foi fixado em quatro ($P = 4$). Como mostrado previamente, o desempenho do receptor que emprega este processamento de entrada é afetado pelo tipo de funções de base e pelos parâmetros J e J_s . Uma investigação limitada mostrou que um bom compromisso de desempenho é obtido usando as funções de base da família Daubechies com cinco graus de regularidade [28] (Db5), $J_s = 2$ e $J = 3$. Os resultados apresentados nesta seção foram gerados com esta configuração de parâmetros e funções de base.

Quatro sistemas de comunicação foram avaliados, os quais são caracterizados pela associação de diferentes filtros de transmissão, processamento de entrada e equalizador.

Em todos esses sistemas, a RI conjunta dos filtros de transmissão e recepção é bem aproximada por um cosseno levantado com fator de excesso de faixa igual a 100%.

O primeiro esquema avaliado emprega filtro de transmissão do tipo cosseno levantado, processamento de entrada formado por um filtro Butterworth de ordem 12 e largura de 3 dB igual à taxa de símbolo e DFE espaçado a intervalo de símbolos. Este esquema será referido como “DFE Síncrono I”. O segundo esquema é similar ao anterior exceto pelo fato de adotar um DFE fracionado. Esse sistema de comunicação será aqui referido como “DFE Fracionado”.

O terceiro esquema emprega filtros de transmissão e recepção casados e DFE com coeficientes espaçados a intervalo de símbolos. Este esquema de recepção é referido como “DFE Síncrono II”. Finalmente, o sistema de comunicações que emprega o processamento de entrada proposto, e que será aqui denominado de “Esquema Proposto”, usa filtro de transmissão do tipo cosseno levantado com 100% de fator de excesso de faixa e filtro de recepção do tipo Butterworth de segunda ordem, com largura de banda de 3 dB igual a $1/T$.

As curvas de taxa de erro de bit produzidas pelos quatro esquemas no canal Ch4 são mostrados na Figura 6.9. Pode ser observado que o Esquema Proposto supera o desempenho dos esquemas investigados. Por exemplo, considerando uma BER de 10^{-5} , ele possibilita um ganho na razão E_b/N_0 de 2 dB, 0,7 dB e 0,7 dB, quando comparado com o DFE Síncrono I, o DFE Síncrono II e o DFE fracionado, respectivamente.

A Figura 6.10 exhibe os resultados numéricos obtidos para o canal Ch5. Neste caso, as vantagens de desempenho do Esquema Proposto são mais significativas. Para uma taxa de erro de bit de 10^{-5} , foram obtidos ganhos na razão E_b/N_0 de 2,5 dB, 1,5 dB e 1,0 dB, em relação ao DFE Síncrono I, ao DFE Síncrono II e ao DFE fracionado, respectivamente.

Estes resultados mostram que a capacidade de redução de ruído do processamento de entrada proposto possibilitou a obtenção de excelentes características de desempenho em associação com um filtro de recepção com características bem relaxadas e um equalizador DFE com coeficientes espaçados no intervalo de símbolo. Na visão do autor, um bom compromisso entre desempenho e complexidade do receptor pode ser atingido com a abordagem proposta, para canais que se caracterizem por apresentar severo padrão de IES devido à presença de nulos espectrais dentro da faixa de transmissão.

Com base nos resultados aqui obtidos, conclui-se que o processamento de entrada

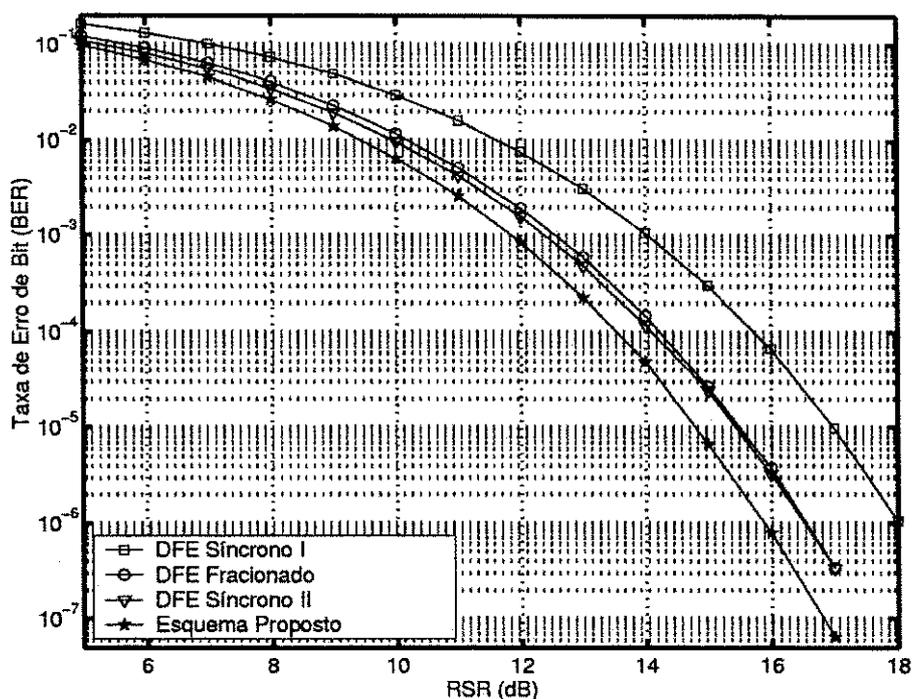


Figura 6.9: Desempenho em função de E_b/N_0 para o canal Ch4.

proposto é menos sensível à resposta em amplitude do canal e que as diferenças de desempenho por ele produzidas em relação aos demais esquemas investigados aumenta à medida que a atenuação na banda de interesse se torna mais pronunciada. Em particular, um considerável ganho de RSR foi obtido para o canal Ch5, o que atesta esta conjuntura e corrobora os resultados obtidos na seção precedente. Além do mais, isso foi também confirmado por resultados não relatados aqui e que foram obtidos para outros canais cujas RI também se caracterizavam por apresentar severas atenuações dentro da faixa de sinal transmitido.

6.4 Considerações Finais

Este capítulo apresentou uma investigação adicional sobre o emprego de procedimentos de *denoising* nos processadores de entrada dos receptores digitais, para reduzir o impacto do ruído no processo subsequente de detecção dos símbolos transmitidos. O uso de *denoising* representa uma alternativa interessante aos esquemas de processamento de entrada convencionais que se baseiam no projeto de filtros lineares previamente projetados. Ao contrário do capítulo anterior, cuja abordagem é analítica e supõe um

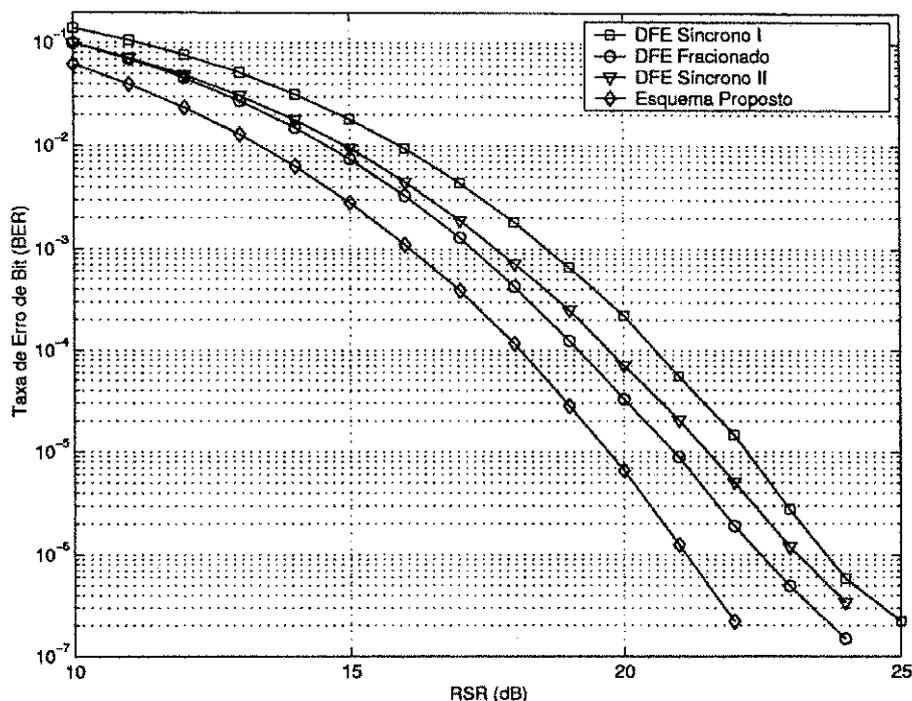


Figura 6.10: Desempenho em função de E_b/N_0 para o canal Ch5.

modelo de sistema de comunicações bastante simples, aqui a avaliação de desempenho é realizada via simulação computacional e contempla cenários mais complexos, principalmente no que tange ao uso de modelos de canais seletivos em frequência.

O desempenho do esquema de recepção que emprega o processamento de entrada proposto foi comparado com o de esquemas que são usualmente utilizados na prática. Considerou-se especificamente equalizadores DFE, cujos coeficientes foram ajustados com o uso dos algoritmos LMS ou RLS. Além disso, alguns dos canais investigados se caracterizam por apresentar severa atenuação dentro da banda espectral de interesse.

Os resultados apresentados indicam que o desempenho produzido pelo processamento de entrada proposto é sensivelmente afetado por alguns parâmetros importantes, tais como o tipo de funções de base *wavelets* e a quantidade de níveis de resolução cujos coeficientes não são afetados pelo procedimento de *denoising*. Para uma configuração adequada desses parâmetros, mostrou-se que o desempenho do processamento de entrada proposto supera o de esquemas convencionais, principalmente quando o canal de comunicação apresentam nulos espectrais dentro da banda de frequências de interesse. Esse comportamento pode ser uma grande vantagem para aplicações na área de comunicações móveis, visto que nesses casos os canais usualmente apresenta nulos espectrais

na faixa de transmissão.

É importante mencionar que a investigação da escolha de parâmetros do processamento de entrada proposto foi bastante limitada. Alguns parâmetros não foram contemplados, e mesmo os que o foram, apenas algumas possibilidades de escolha desses parâmetros foi investigada.

Diante do exposto acima, os resultados da comparação de desempenho relatados neste capítulo, são bastante animadores e motivam a continuação de pesquisas nessa área a fim de que as potencialidades da técnica proposta sejam exploradas plenamente.

Como continuação da pesquisa, o autor pretende estender as ferramentas analíticas desenvolvidas no capítulo anterior para avaliar o desempenho do procedimento proposto nos cenários aqui investigados por simulação. Essa abordagem facilitará a investigação da escolha de parâmetros do processamento de entrada proposto. Outro aspecto que pode ser abordado em pesquisas futuras é a avaliação da robustez deste esquema de processamento de entrada à função densidade de probabilidade do ruído [64].

Capítulo 7

Considerações Finais

Esta tese abordou diversos assuntos vinculados a dois temas principais: o desenvolvimento de procedimentos adaptativos, apoiados ou não pelo uso de seqüências de treinamento, para combater o efeito de interferência entre símbolos e o desenvolvimento de esquemas que visam a redução do efeito do ruído em receptores digitais.

Com relação à primeira vertente deste trabalho, foi avaliado o desempenho de três esquemas de recepção cega do tipo BMLSE-PSP, os quais se diferenciavam pela escolha do algoritmo de filtragem adaptativa empregado. Posteriormente, foi realizado um estudo analítico a respeito do desempenho do algoritmo LMS na identificação de canais variantes no tempo. Por fim, com base na idéia de diversidade em filtragem/estimação, concebida de forma heurística, foi proposto um procedimento para detectar a ocorrência de surtos de erros em equalizadores adaptativos.

No que se refere à redução do efeito do ruído, propôs-se usar, no processamento de entrada de receptores digitais, técnicas de *denoising* como uma alternativa aos esquemas convencionais que se baseiam no uso de filtros lineares. Além disso, propôs-se uma técnica que combina o uso da transformada de Haar com um código de paridade para se combater o efeito de ruído aditivo branco.

Este capítulo, de forma bastante sumária, tece as considerações finais da tese, com ênfase especial nas contribuições principais e propostas para a realização de trabalhos futuros.

7.1 Contribuições da Tese

No que tange à discussão referente aos esquemas de recepção MLSE-PSP cega, foi investigado via simulação de Monte Carlo o desempenho dos esquemas de recepção BPSP-LMS, BPSP-KF1 e BPSP-KF2. Estes receptores empregam algoritmo M para escolher as seqüências sobreviventes, e se diferenciam quanto ao tipo de algoritmo de filtragem adaptativa utilizado: LMS e KF. Neste último caso foram considerados os modelos estatísticos AR(1) e AR(2) para aproximar a evolução temporal do canal de comunicação, cujo espalhamento Doppler foi modelado pelo espectro de Jakes. A avaliação de desempenho foi realizada com base na taxa de erro de símbolo e no erro quadrático médio referente à estimação da RI do canal.

Os resultados obtidos mostraram que os esquemas investigados possuem características de desempenho similares, apresentando níveis de taxa de erro irreduzível elevados. Simulações considerando blocos de símbolos isolados levou à importante conclusão de que alguns blocos contribuem de forma decisiva para se obter desempenhos ruins, por apresentarem uma lenta convergência do estimador da RI do canal. Os resultados mostraram também que os problemas de convergência diminuem com o aumento da quantidade de seqüências sobreviventes, fornecendo um forte indício de que esses problemas decorrem da redução do espaço de busca, o que aumenta as chances do algoritmo de recepção convergir para pontos de mínimos locais. Essa constatação é importante, mas não pode ser adotada para melhorar o desempenho desses receptores, por conta do excessivo aumento na complexidade computacional que o aumento do número de seqüências sobreviventes demandaria. Uma abordagem mais eficiente aponta para o desenvolvimento de procedimentos para detectar falhas de convergência ou surtos de erro no processo de detecção, o que efetivamente foi feito nesta tese, através da proposição e avaliação de um novo algoritmo para detecção a ocorrência de erros em surtos.

Este algoritmo pode ser utilizado em qualquer esquema de recepção, é simples, opera em canais variantes no tempo e, conforme resultados de simulação, possui excelentes características de desempenho. Estes resultados de simulação foram obtidos de duas formas distintas. Inicialmente gerou-se as seqüências de erros sem simular o esquema de recepção. Posteriormente foi avaliado o desempenho de um receptor BPSP-KF2 que utiliza este algoritmo para detectar a ocorrência de erros de equalização, considerando canais com DVSF. Em ambos os casos ficou evidenciada a eficiência da técnica. Em

particular, neste último caso, verificou-se que a adoção do referido procedimento no esquema de recepção BPSP-KF2 permite uma melhora sensível no desempenho. Por exemplo, considerando $f_D T = 0,005$ o patamar de taxa de erro de símbolo é reduzido de 2×10^{-3} para 6×10^{-5} .

Outro tema importante investigado nesta tese foi a avaliação analítica do desempenho do algoritmo de filtragem adaptativa LMS na identificação de canais variantes no tempo. A análise aqui realizada empregou modelos de canal bastante genéricos, de forma diferente do que ocorre em outros trabalhos, que geralmente se restringem a processos do tipo passeio aleatório ou de Markov de primeira ordem.

Foram obtidas expressões gerais para o EQM, sob a condição de regime permanente, em função da autocorrelação dos coeficientes da resposta ao impulso do canal de comunicação, as quais foram particularizadas para o modelo de espalhamento Doppler Jakes e para processos AR. Foi realizada uma comparação entre resultados analíticos e de simulação computacional, verificando-se um bom ajuste entre eles, o que indica a validade das deduções desenvolvidas e, principalmente, das suposições efetuadas.

O passo do LMS foi otimizado no sentido de minimizar o EQM em regime permanente, utilizando os resultados analíticos obtidos. Considerando os processos AR(1) e AR(2) com pólos complexos conjugados foram obtidas expressões exatas para o valor ótimo deste parâmetro. Para alguns processos AR de ordens maiores foi proposto um procedimento para determinação do passo ótimo. Além disso, obteve-se para o modelo de Jakes uma aproximação analítica para o valor ótimo do passo, com base na aproximação deste modelo por um processo AR(2) com pólos complexos conjugados. Resultados numéricos mostraram a validade deste procedimento.

Considerando um canal de comunicação caracterizado pelo efeito de DVSF com espalhamento Doppler modelado pelo espectro de Jakes, verificou-se ainda que a adoção do passo otimizado no receptor PSP-LMS permite ganhos de desempenho em relação ao uso de passo constante, cujo valor foi previamente estabelecido com base na análise de curvas de desempenho obtidas via simulação, ou ao uso de passo estabelecido de acordo com o modelo de Markov de primeira ordem.

Os resultados de simulação obtidos com o uso do passo otimizado pelo procedimento proposto são valiosos e interessantes, especialmente considerando o amplo uso do espectro de Jakes no contexto de comunicações móveis e o fato de que neste caso o passo ótimo fica implicitamente parametrizado pela velocidade do equipamento de recepção, a qual pode vir a ser facilmente estimada. Isto é especialmente interessante

quando se pensa nos futuros sistemas de comunicações móveis, que prevêem o uso de sistemas de posicionamento global.

Por fim, vale mencionar também que as deduções aqui apresentadas, particularmente as de EQM em regime permanente, podem ter outros desdobramentos e aplicações. Um exemplo disso foi apresentado no Capítulo 4 desta tese, que discute um procedimento para detecção de erros de equalização e explora o EQM produzido pelo algoritmo LMS em sua métrica de decisão.

Com referência ao processamento de entrada de receptores digitais, propôs-se empregar técnicas de *denoising* como uma alternativa às técnicas convencionais, baseadas no uso de filtros lineares. Vários aspectos motivaram essa proposição, dentre os quais, destacam-se o fato de a técnica proposta reduzir o nível de ruído sem requerer o conhecimento explícito ou implícito da resposta ao impulso do canal e a existência de diversos parâmetros desta técnica que podem ser escolhidos com o intuito de minimizar a probabilidade de erro do receptor.

O desempenho do processamento de entrada proposto foi avaliado sob dois enfoques. Em primeiro lugar, para canais AWGN e modulação BPSK, obteve-se analiticamente a probabilidade de erro, que ficou especificada em termos de parâmetros da transformada *wavelet* e da técnica de *denoising*. Essa abordagem gerou uma ferramenta que pode ser usada para otimizar o processamento de entrada proposto. Além disso, produziu-se um conjunto de ferramentas analíticas valiosas para generalizar a análise, no sentido de contemplar cenários mais complexos. Em segundo lugar, obteve-se o desempenho por meio de simulação computacional para canais seletivos em frequência, empregando diversas configurações de receptores com equalização DFE.

Os resultados de simulações obtidos para canais seletivos em frequência parecem mostrar que a substituição de técnicas baseadas no projeto prévio de filtros lineares pelo processamento de entrada proposto, com parâmetros adequadamente escolhidos, pode melhorar significativamente o desempenho dos esquemas de recepção investigados, especialmente quando a resposta em frequência do canal apresenta nulos na faixa do sinal transmitido.

As simulações realizadas para canal AWGN e modulação BPSK corroboraram a avaliação analítica apresentada nesta tese. Verificou-se que o desempenho do esquema de recepção é bastante sensível à quantidade de níveis de resolução, ao tipo de funções de base usadas na transformada *wavelet* e ao fator de superamostragem. Como vários parâmetros influenciam a otimização da técnica proposta, eleva-se a importância da

análise matemática realizada, que permite caracterizar o desempenho do esquema de recepção para uma determinada combinação de resposta ao impulso do filtro de transmissão, transformada *wavelet*, limiar de *denoising* e quantidade de níveis de resolução, o que é praticamente inviável via simulação de Monte Carlo.

7.2 Sumário das Principais Contribuições da Tese

Em seguida são sumarizados os principais resultados desta tese, os quais, até onde vai o conhecimento do autor, são originais e possuem desdobramentos importantes para as áreas de equalização adaptativa e redução do ruído em sistemas de comunicações digitais:

- Obtenção de expressões precisas de EQM em regime permanente para o algoritmo LMS aplicado à identificação de canais variantes no tempo, admitindo um conjunto de hipóteses usualmente atendidas na área de comunicações móveis;
- Obtenção do passo ótimo do algoritmo LMS no sentido de reduzir o EQM em regime permanente para modelos de espalhamento Doppler importantes;
- Desenvolvimento do conceito de diversidade em filtragem/estimação e o seu uso na proposição de um procedimento eficiente para detectar a ocorrência de erros de detecção em equalizadores adaptativos;
- Uso de técnicas de *denoising* no processamento de entrada de receptores digitais.

Para cada uma dessas contribuições foram obtidos resultados analíticos, os quais foram corroborados por simulação computacional usando a técnica de Monte Carlo.

7.3 Propostas Para Continuação do Trabalho

A seguir são enumeradas algumas propostas para complementar as pesquisas aqui realizadas.

Com relação ao procedimento de detecção de falhas de erros de equalização, propõe-se:

- Investigar em maior profundidade a ocorrência de confluência das seqüências sobreviventes para outros algoritmos de busca, especialmente o algoritmo M;

- Investigar a escolha da estatística de teste, principalmente no que se refere à adoção de um número maior de amostras na sua definição;
- Investigar de forma criteriosa a escolha do instante de realização do teste de hipóteses.

Com relação ao procedimento de *denoising*, propõe-se:

- Generalizar as deduções apresentadas para contemplar o desempenho de sistemas de comunicações digitais em canais AWGN que empreguem procedimento de *denoising* seletivo ou que adotem procedimentos de escopo local;
- Realizar busca de funções de base *wavelets* otimizadas no sentido de minimizar a probabilidade de erro do esquema de recepção. Um ponto de partida nesse sentido foi estabelecido nesta tese ao se obter o desempenho para canais AWGN em função de parâmetros do procedimento de *denoising* e das *wavelets*;
- Investigar a possibilidade de estender as deduções aqui obtidas para canais seletivos.

Por fim, propõe-se continuar o trabalho de análise de desempenho e otimização de passo do algoritmo LMS na identificação de canais variantes no tempo buscando-se os seguintes objetivos:

- Analisar as características de transitório, admitindo hipóteses usualmente adotadas para comunicações móveis;
- Estender as deduções aqui apresentadas, para contemplar esquemas de modulação QAM;
- Investigar o impacto da adoção do passo otimizado em outros esquemas de recepção;
- Avaliar a robustez dos resultados obtidos para o passo ótimo diante da presença de erros na estimação da variância do ruído e da frequência Doppler máxima.

Apêndice A

Erro Quadrático Médio do Algoritmo de Filtragem Adaptativa LMS

Usando a Equação 2.13 na Equação 2.9, K_{n+1} pode ser escrito como

$$K_{n+1} = A_1(n) + A_2(n) + A_3(n), \quad (\text{A.1})$$

sendo:

$$\begin{aligned} A_1(n) &= E[\epsilon_n^p (\epsilon_n^{p*} \mu \epsilon_n^* s_n s_n^* - \mu v_n s_n^*)], \\ A_2(n) &= -\mu E[s_n s_n^* \epsilon_n (\epsilon_n^{p*} \mu \epsilon_n^* s_n s_n^* - \mu v_n s_n^*)], \\ A_3(n) &= -\mu E[s_n v_n^* (\epsilon_n^{p*} - \mu \epsilon_n^* s_n s_n^* - \mu v_n s_n^*)]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Manipulando $A_1(n)$, obtém-se

$$A_1(n) = E[\epsilon_n^p \epsilon_n^{p*}] - \mu E[\epsilon_n^p \epsilon_n^* s_n s_n^*] - \mu E[\epsilon_n^p v_n s_n^*]. \quad (\text{A.3})$$

Os processos $\{h(\cdot)\}$ e $\{s(\cdot)\}$ são claramente estatisticamente independentes, inclusive pela independência de ordem física desses processos. Além disso, conforme a Suposição S2, na condição de regime permanente a estimativa de $\{h(\cdot)\}$ também é estatisticamente independente de $\{s(\cdot)\}$. Diante desses fatos é razoável aceitar que ϵ_n e s_n são estatisticamente independentes e que ϵ_n^p e s_n também o são. Além disso, usando S1 obtém-se

$$A_1(n) = K_n^p - \mu \tilde{K}_n^p R_s. \quad (\text{A.4})$$

na qual:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n^p &= \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}_n^p \boldsymbol{\epsilon}_n^{p*}], \\ \tilde{\mathbf{K}}_n^p &= \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}_n^p \boldsymbol{\epsilon}_n^*] \text{ e} \\ \mathbf{R}_s &= \mathbb{E}[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^*]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

De forma similar, pode ser mostrado que:

$$\mathbf{A}_2(n) = -\mu \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{K}}_n^{p*} + \mu^2 \mathbb{E}[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^* \boldsymbol{\epsilon}_n \boldsymbol{\epsilon}_n^* \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^*] + \mu^2 \mathbb{E}[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^* \boldsymbol{\epsilon}_n v_n \mathbf{s}_n^*], \quad (\text{A.6})$$

e

$$\mathbf{A}_3(n) = \mu^2 \mathbb{E}[\mathbf{s}_n v_n^* \boldsymbol{\epsilon}_n^* \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^*] + \mu^2 \sigma_v^2 \mathbf{R}_s, \quad (\text{A.7})$$

na qual foi considerado que $\mathbb{E}[\mathbf{s}_n v_n^* \boldsymbol{\epsilon}_n^*] = 0$, o que pode ser facilmente verificado.

Substituindo as Equações A.4, A.6 e A.7 na Equação A.1, e usando a definição de $D(\cdot)$, segue que

$$\begin{aligned} D(n+1) &= \text{Tr} \left[\mathbf{K}_n^p - \mu \sigma_s^2 \left(\tilde{\mathbf{K}}_n^p - \tilde{\mathbf{K}}_n^{p*} \right) \right] \\ &+ \mu^2 \text{Tr} \{ \mathbb{E}[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^* \boldsymbol{\epsilon}_n \boldsymbol{\epsilon}_n^* \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^*] \} \\ &+ \mu^2 \text{Tr} \{ \mathbb{E}[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^* \boldsymbol{\epsilon}_n v_n \mathbf{s}_n^*] \} \\ &+ \mu^2 \text{Tr} \{ \mathbb{E}[\mathbf{s}_n v_n^* \boldsymbol{\epsilon}_n^* \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^*] \} + \mu^2 \sigma_v^2 \sigma_s^2 L. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Considerando a suposição S3, a propriedade de linearidade dos operadores $\mathbb{E}[\cdot]$ e $\text{Tr}[\cdot]$, e que para matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} com dimensões adequadas, $\text{Tr}[\mathbf{AB}] = \text{Tr}[\mathbf{BA}]$, o segundo termo do lado direito da Equação A.8 torna-se

$$\mu^2 \text{Tr} \{ \boldsymbol{\Lambda}_n \mathbf{K}_n \}, \quad (\text{A.9})$$

na qual foi admitido que

$$\boldsymbol{\Lambda}_n = \mathbb{E}[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^* \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^*]. \quad (\text{A.10})$$

Pode ser mostrado que os elementos dessa matriz, denotados por $\Lambda_{j,k}$, são dados por

$$\Lambda_{j,k} = \mathbb{E} \left[s_{n-j+1} s_{n-k+1}^* \sum_{l=0}^{L-1} |s_{n-l+1}|^2 \right],$$

ou ainda por

$$\Lambda_{j,k} = E[s_{n-j+1}s_{n-k+1}^*|s_{n-j+1}|^2] + E[s_{n-j+1}s_{n-k+1}^*|s_{n-k+1}|^2] + E\left[s_{n-j+1}s_{n-k+1}^* \sum_{l \neq j, l \neq k} |s_{n-l+1}|^2\right].$$

Para os esquemas de modulação MPSK aqui considerados (Suposição S2), verifica-se que $\Lambda_n = L\sigma^4 \mathbf{I}$. Portanto,

$$\text{Tr}\{E[s_n s_n^* \epsilon_n \epsilon_n^* s_n s_n^*]\} = L\sigma_s^4 \mathbf{K}_n. \quad (\text{A.11})$$

Além disso,

$$\text{Tr}\{E[s_n s_n^* \epsilon_n v_n s_n^*]\} = \text{Tr}\{E[v_n s_n^* s_n s_n^* \epsilon_n]\} = 0, \quad (\text{A.12})$$

porque

$$E[v_n s_n^* s_n s_n^* \epsilon_n] = E[s_n^* s_n s_n^*] E[v_n \epsilon_n] = \mathbf{0}, \quad (\text{A.13})$$

o que é uma consequência de S1 e S2.

Usando novamente S1 e S2 é possível mostrar que

$$\text{Tr}\{E[s_n v_n^* \epsilon_n^* s_n s_n^*]\} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Considerando as Equações A.11, A.12 e A.14, $D(n+1)$ reduz-se a

$$D(n+1) = \text{Tr}\left[\mathbf{K}_n^p - \mu\sigma_s^2 \left(\tilde{\mathbf{K}}_n^p - \tilde{\mathbf{K}}_n^{p*}\right)\right] + \mu^2 L\sigma_s^4 D(n) + \mu^2 \sigma_v^2 \sigma_s^2 L. \quad (\text{A.15})$$

Usando as Equações 2.10 e 2.14, são obtidas as seguintes expressões \mathbf{K}_n^p e $\tilde{\mathbf{K}}_n^p$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n^p &= 2[\mathbf{R}_h(0) - \mathbf{R}_h(1)] + \mathbf{K}_n \\ &\quad + E[[\mathbf{h}_{n+1} - \mathbf{h}_n]\epsilon_n^*] + E[\epsilon_n[\mathbf{h}_{n+1}^* - \mathbf{h}_n^*]], \\ \tilde{\mathbf{K}}_n^p &= \mathbf{K}_n + E[(\mathbf{h}_{n+1} - \mathbf{h}_n)\epsilon_n^*]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Como pode ser verificado a partir das Equações A.15 e A.16, para obter o EQM é preciso computar a correlação cruzada entre os coeficientes da RI do canal e o vetor erro, ou entre as estimativas dos coeficientes da RI do canal e o vetor erro.

Considera-se inicialmente a seguinte correlação cruzada

$$E[\mathbf{h}_{n+1} \hat{\mathbf{h}}_{n-l}^*] = E\left\{\mathbf{h}_{n+1}[\hat{\mathbf{h}}_{n-l-1}^* + \mu e_{n-l-1} s_{n-l-1}^*]\right\}. \quad (\text{A.17})$$

Usando a definição de $e(\cdot)$ e considerando as suposições S2 e S3, a Equação A.17 pode ser reescrita como

$$E[\mathbf{h}_{n+1}\hat{\mathbf{h}}_{n-l}^*] = \mu\sigma_s^2\mathbf{R}_h(l+2) + (1 - \mu\sigma_s^2)E[\mathbf{h}_{n+1}\hat{\mathbf{h}}_{n-l-1}^*].$$

Escrevendo a Equação A.18 para $l = 0$, tem-se

$$E[\mathbf{h}_{n+1}\hat{\mathbf{h}}_n^*] = \mu\sigma_s^2\mathbf{R}_h(2) + (1 - \mu\sigma_s^2)E[\mathbf{h}_{n+1}\hat{\mathbf{h}}_{n-1}^*]. \quad (\text{A.18})$$

De acordo com a Equação A.18 para $l = 1$, tem-se

$$E[\mathbf{h}_{n+1}\hat{\mathbf{h}}_{n-1}^*] = \mu\sigma_s^2\mathbf{R}_h(3) + (1 - \mu\sigma_s^2)E[\mathbf{h}_{n+1}\hat{\mathbf{h}}_{n-2}^*], \quad (\text{A.19})$$

substituindo a Equação A.19 na Equação A.18 chega-se a

$$E[\mathbf{h}_{n+1}\hat{\mathbf{h}}_n^*] = \mu\sigma_s^2\mathbf{R}_h(2) + \mu\sigma_s^2(1 - \mu\sigma_s^2)\mathbf{R}_h(3)(1 - \mu\sigma_s^2)^2E[\mathbf{h}_{n+1}\hat{\mathbf{h}}_{n-2}^*]. \quad (\text{A.20})$$

Usando a Equação A.18 para $l = 2$ na equação acima, repetindo esse procedimento recorrentemente até que $l = n - 1$ e utilizando o fato de que $\hat{\mathbf{h}}(0) = 0$, chega-se ao seguinte resultado:

$$E[\mathbf{h}_{n+1}\hat{\mathbf{h}}_n^*] = \sum_{l=0}^{n-1} (1 - \mu\sigma_s^2)^l \mu\sigma_s^2 \mathbf{R}_h(l+2). \quad (\text{A.21})$$

De forma similar, pode-se mostrar que

$$E[\mathbf{h}_n\hat{\mathbf{h}}_{n-l}^*] = (1 - \mu\sigma_s^2)E[\mathbf{h}_n\hat{\mathbf{h}}_{n-l-1}^*] + \mu\sigma_s^2\mathbf{R}_h(l+1). \quad (\text{A.22})$$

Iniciando com $l = 0$, e usando recursivamente a Equação A.22 até que $l = n - 1$, e considerando que $\hat{\mathbf{h}}(0) = 0$, chega-se a

$$E[\mathbf{h}_n\hat{\mathbf{h}}_n^*] = \sum_{l=0}^{n-1} (1 - \mu\sigma_s^2)^l \mu\sigma_s^2 \mathbf{R}_h(l+1). \quad (\text{A.23})$$

Das Equações A.21, A.23 e 2.10, obtém-se

$$E\{[\mathbf{h}_{n+1} - \mathbf{h}_n]\epsilon_n^* \} = \mathbf{R}_h(1) - \mathbf{R}_h(0) + \sum_{l=0}^{n-1} (1 - \mu\sigma_s^2)^l \mu\sigma_s^2 [\mathbf{R}_h(l+1) - \mathbf{R}_h(l+2)]. \quad (\text{A.24})$$

Usando a Equação A.24 na Equação A.16, e o resultado na Equação A.15, chega-se finalmente a

$$D(n+1) = (1 - 2\mu\sigma_s^2 + \mu^2 L\sigma_s^4)D(n) + \mu^2\sigma_v^2\sigma_s^2 L + 2\mu\sigma_s^2 \sum_{l=-1}^{n-1} (1 - \mu\sigma_s^2)^{l+1} \text{Tr}[\mathbf{R}_h(l+1) - \mathbf{R}_h(l+2)]. \quad (\text{A.25})$$

Apêndice B

Modelo do Canal de Comunicação

Os canais de comunicação móvel são bastante complexos e apresentam vários distúrbios que afetam sobremaneira o desempenho dos sistemas de comunicação para eles projetados. Dentre os principais destacam-se: IES, interferências entre canais adjacentes e desvanecimento rápido.

Este apêndice apresenta, de forma sumária, considerações a respeito do canal de comunicação móvel. São abordadas as questões de ordem física, o modelo estatístico WSS-US (*Wide Sense Stationary - Uncorrelated Scattering*) e uma técnica de simulação empregada para gerar suas funções amostras.

B.1 Considerações Físicas

O espaço livre representa um grande desafio para o projeto de sistemas de comunicações móveis eficientes, principalmente em importantes centros urbanos, em função da enorme e sempre crescente demanda por sistemas móveis confiáveis.

As dificuldades impostas pelo canal de comunicação móvel advêm principalmente de seus mecanismos físicos de propagação. Devido à grande quantidade de volumosas superfícies refletoras, geralmente localizadas nas proximidades da antena do receptor, pode não existir visada direta entre o transmissor e o receptor. Nesse caso, a propagação é realizada basicamente pelos fenômenos de difração e reflexão, os quais determinam a existência de muitas ondas chegando concomitantemente à antena do receptor.

Dependendo das fases individuais das ondas incidentes, a combinação realizada pela antena do receptor pode resultar num estímulo elétrico de baixa ou de alta intensidade. Além disso, uma pequena alteração na posição do receptor pode provocar uma mudança

imprevisível nas fases dos fasores individuais, mantendo as suas respectivas amplitudes praticamente inalteradas, fazendo com que sinais resultantes em duas posições próximas tenham amplitudes bem diferentes. Isto é possível devido à grande velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no ar aliada aos pequenos comprimentos de onda utilizados nesses meios de comunicação.

Se o receptor, transmissor ou as próprias superfícies refletoras do canal forem dotados de movimento, o fenômeno descrito no parágrafo anterior ocorre dinamicamente. A amplitude do sinal recebido pode sofrer intensas oscilações em torno de um nível médio, resultante de alternâncias entre interferências construtivas e destrutivas. Essas variações na intensidade do sinal recebido são conhecidas como desvanecimento.

Além da fase aleatória, cada onda tem associada a ela um deslocamento Doppler que depende da velocidade do veículo, da frequência da portadora e do ângulo entre o vetor frente de onda e o vetor velocidade do móvel. O resultado global destes deslocamentos é denominado de espalhamento Doppler e determina como o espectro do sinal transmitido é espalhado.

No domínio do tempo o desvanecimento pode ser classificado como lento ou rápido, de acordo com a velocidade das oscilações dos retardos individuais da RI do canal em comparação com a taxa de transmissão utilizada. No domínio da frequência, ele é classificado em plano ou seletivo. Para o desvanecimento plano, o conteúdo espectral do sinal transmitido é afetado pelo canal aproximadamente da mesma forma, ao contrário do que ocorre para canais seletivos em frequência. Neste caso, o conteúdo espectral do sinal transmitido pode ser severamente alterado.

Vale salientar que, em função do movimento relativo entre transmissor e receptor, superfícies refletoras desaparecem enquanto outras surgem. Além disso, os retardos relativos entre os diversos percursos são variáveis. Portanto, a resposta do canal a um impulso aplicado em um determinado instante de tempo pode ser modelado por um trem de impulsos com amplitudes aleatórias, cujas amplitudes individuais, quantidades de impulsos e atrasos relativos entre os diversos impulsos, mudam com o tempo de maneira aleatória. Face à grande quantidade de ondas incidentes, de parâmetros envolvidos e, principalmente, em função da natureza aleatória do canal, geralmente ele é modelado probabilisticamente, no qual muitos destes efeitos são simplificados ou até mesmo desconsiderados.

B.2 O Modelo WSS-US

O canal caracterizado pelo efeito de múltiplos percursos é modelado como um sistema linear variante no tempo. A envoltória complexa de sua saída em resposta a uma entrada $s(\cdot)$ é dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)h(t; \tau)d\tau, \quad (\text{B.1})$$

na qual $h(t; \tau)$ denota a RI do canal no instante t a um impulso aplicado em $t - \tau$.

A grande maioria dos trabalhos que propõem técnicas para simular o canal admite como referência básica o modelo WSS-US, que especifica comportamentos estatísticos que sua RI deve atender.

De acordo com o modelo WSS-US, para um particular valor de retardo τ_0 , $h(t; \tau_0)$ é um processo estocástico estacionário em sentido amplo. Além disso, os processos $h(t, \tau_i)$ e $h(t, \tau_j)$ são descorrelacionados para $i \neq j$. Essas duas suposições explicam o nome dado ao modelo.

A adoção do modelo WSS-US permite caracterizar o canal por uma função bidimensional conhecida como função espalhamento, que quantifica os espalhamentos realizados nos domínios do tempo e da frequência, cuja funções “marginais” são denominadas de perfil de intensidade de atraso e de perfil de espalhamento Doppler.

Estes dois perfis possibilitam a extração de parâmetros que quantificam os efeitos provocados pelo canal. Em particular, do perfil de intensidade de atrasos obtém-se o espalhamento de atraso e do perfil de espalhamento Doppler obtém-se o espalhamento Doppler. Cada um destes parâmetros representa uma largura significativa do seu respectivo perfil, de acordo com alguma medida adotada.

O inverso do espalhamento de atraso define a banda de coerência que, por sua vez, indica a faixa de frequência na qual o desvanecimento é bem correlacionado. O desvanecimento é classificado como plano se o sinal transmitido ocupa uma faixa de frequência igual ou inferior a banda de coerência [25, 29].

O inverso do espalhamento Doppler, por outro lado, define o tempo de coerência do canal, que representa o intervalo de tempo no qual a resposta ao impulso do canal mantém-se bem correlacionada. Este parâmetro, em conjunto com a taxa de transmissão permite classificar o desvanecimento como rápido ou lento.

Malgrado o modelo físico indicar que o canal provavelmente deve ser contínuo na variável τ , a grande maioria dos modelos matemáticos propostos considera um perfil

de espalhamento por atraso discreto com uma determinada quantidade de retardos.

A quantidade de retardos adotada depende da aplicação. Para o sistema celular americano, padrão TDMA (do termo em inglês *Time Division Multiple Access*), tem sido freqüentemente utilizado o modelo contendo dois raios separados por um intervalo de símbolo. Para o sistema GSM (do termo em inglês *Global System for Mobile Communication*), por outro lado, têm sido adotados modelos com uma quantidade maior de retardos, em função da maior largura de banda utilizada nesse sistema.

Várias técnicas têm sido propostas para simular a evolução temporal do canal reproduzindo as propriedades estatísticas do modelo WSS-US. Dentre elas, destaca-se a abordagem de Aulin [29] que utiliza um modelo físico para representar o sinal recebido, doravante denominado “modelo de espalhamento”, em canais faixa larga. Para canais seletivos com perfil de retardo discreto este modelo pode ser facilmente adaptado, basta apenas reapplicá-lo uma quantidade de vezes igual ao número de raios do perfil.

De acordo com o modelo de espalhamento o campo incidente na antena do receptor é composto de N ondas polarizadas horizontalmente e que se propagam no espaço tridimensional com ângulos de chegada e fases individuais aleatórias, todas estatisticamente independentes. A Figura B.1 ilustra a geometria das ondas incidentes.

Na Figura B.1 α_n representa o ângulo formado pela projeção do n -ésimo vetor frente de onda com o plano horizontal (plano ZX) e o eixo X . Por outro lado, β_n representa o ângulo formado por essa projeção e o plano horizontal. A origem dos eixos do sistema tridimensional representa o ponto de incidência (antena do receptor móvel).

No modelo de espalhamento as fases das ondas incidentes possuem distribuição uniforme entre $[0, 2\pi)$. Esta suposição parece razoável para sistemas que operam a partir da faixa de freqüência VHF, nesse caso o comprimento de onda é pequeno e pequenas mudanças no caminho provocam mudanças significativas nas fases das portadoras.

Considerando a transmissão de uma portadora sem modulação, o sinal recebido em um instante de tempo é dado por

$$E(t) = \sum_{n=1}^N E_n(t), \quad (\text{B.2})$$

sendo

$$E_n(t) = C_n \cos \left[w_0 t + \frac{2\pi}{\lambda_p} (\cos \alpha_n \cos \beta_n + y_0 \sin \alpha_n \cos \beta_n + z_0 \sin \beta_n) + \phi_n \right]. \quad (\text{B.3})$$

Na expressão acima C_n , ϕ_n , α_n e β_n representam a amplitude, a fase e os ângulos de chegada da n -ésima onda incidente, respectivamente. Em particular, $E[C_n] = \frac{E_0}{N}$,

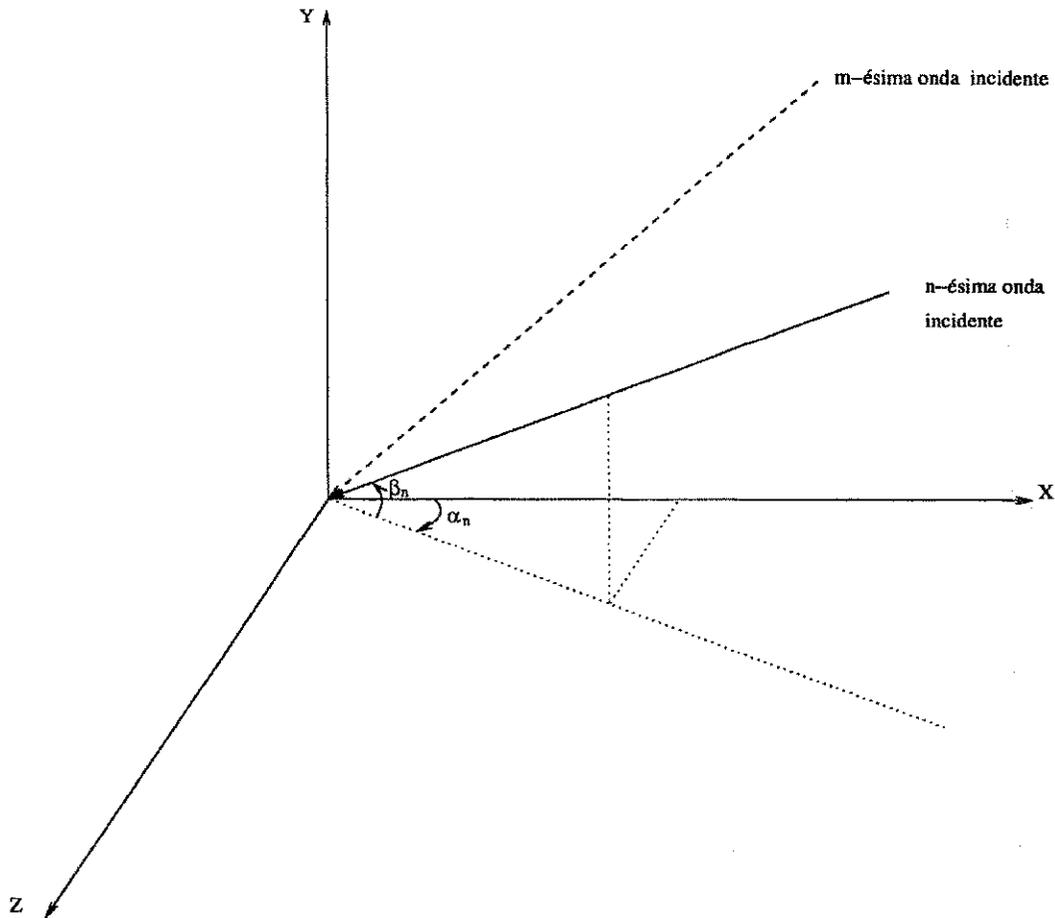


Figura B.1: Geometria pertinente ao modelo de espalhamento.

sendo que E_0 especifica a potência do sinal recebido. A constante λ_p representa o comprimento de onda da portadora e (x_0, y_0, z_0) denota um ponto no espaço tridimensional.

Usando a Equação B.2 na Equação B.3, tomando as componentes em fase e em quadratura de $E(t)$ e supondo que N seja suficientemente grande, argumentos baseados no teorema central do limite apontam para a convergência destas componentes para processos gaussianos. Além disso, é possível mostrar que tais componentes são instantaneamente estatisticamente independentes com média nula. Portanto, de acordo com o modelo, a amplitude do sinal recebido segue uma distribuição de Rayleigh e a fase possui distribuição uniforme entre $[0, 2\pi)$.

Para se obter a função autocorrelação do processo é necessário especificar as distribuições dos ângulos espaciais. Restringindo a propagação ao plano horizontal $\beta_n = 0$, para todo n , e supondo α_n uniforme em $[0, 2\pi)$, é possível mostrar que a autocorrelação

de $E(t)$ é dada por [29]

$$R(\tau) = \frac{E_0}{2} J_0(2\pi f_D \tau), \quad (\text{B.4})$$

sendo que $\frac{E_0}{2}$ representa a potência média associada ao valor de retardo considerado, $J_0(\cdot)$ denota a função de Bessel de ordem zero e f_D o máximo desvio Doppler dado por

$$f_D = \frac{v}{\lambda_p}, \quad (\text{B.5})$$

com v representando a velocidade do móvel.

O espectro correspondente a esta função de autocorrelação, conhecido como espectro “clássico” ou de Jakes [29], é dado por

$$S(f) = \frac{E_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_D}\right)^2}} [u(f + f_D) - u(f - f_D)], \quad (\text{B.6})$$

em que $u(\cdot)$ representa a função degrau unitário. A Figura 3.2 mostra este espectro para $f_D = 30$ Hz admitindo-se uma portadora com frequência nula.

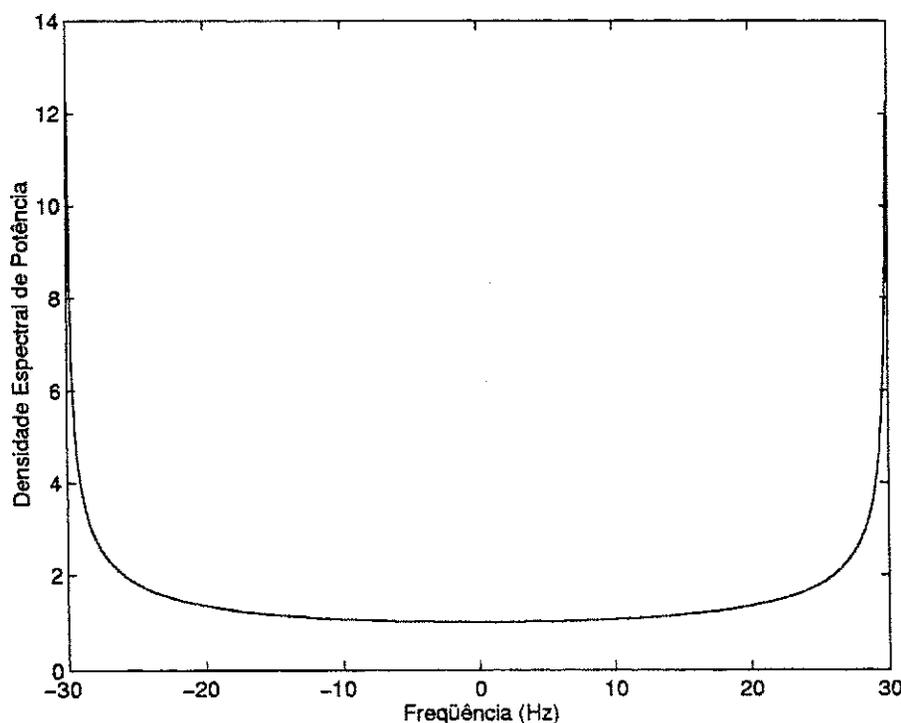


Figura B.2: Espectro de Jakes para $f_D = 30$ Hz.

De acordo com a distribuição da variável aleatória tridimensional, outros espectros podem ser obtidos.

B.3 Técnica de Simulação do Canal de Comunicação Móvel

Existem pelo menos duas estratégias para simular o canal WSS-US com perfil de intensidade de atrasos discretos. A primeira delas se baseia na geração de processos gaussianos complexos brancos, estatisticamente independentes entre si, com média nula. A quantidade de processos gerados deve ser igual à quantidade de retardos do canal simulado. Posteriormente, estes processos são filtrados no domínio da frequência ou no domínio do tempo, de acordo com o espectro Doppler desejado. A segunda abordagem utiliza a técnica de Monte Carlo, na qual a simulação procura aproximar o fenômeno físico de múltiplos percursos. Uma comparação dessas técnicas de simulação é apresentado em [65]. Particularmente, para a técnica de Monte Carlo a realização do canal para um retardo τ é dada por

$$h(t; \tau) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \delta(\tau - t) \exp(j2\pi\nu_n t) \quad (\text{B.7})$$

sendo a_n , ν_n e τ variáveis aleatórias que representam as amplitudes, fases e retardos das diversas ondas incidentes na antena do receptor e N representa a ordem do modelo, que deve ser suficientemente grande para garantir a convergência para o processo gaussiano, tipicamente este valor é igual ou superior a 20. É possível mostrar que o canal dado pela Equação B.7 atende às especificações do modelo WSS-US, desde que as variáveis aleatórias $\{a_n\}$ sejam estatisticamente independentes com variâncias unitárias e que o par (ν_n, τ) seja extraído de uma função densidade de probabilidade conjunta, cuja forma é dada pela função espalhamento do canal a ser simulado [66].

A Figura B.3 mostra o potência instantânea, expressa em decibéis, propagada pelo canal faixa larga em função do tempo. Essa curva foi obtida considerando a técnica de Monte Carlo com ordem igual a vinte, $f_D = 150$ Hz, que corresponde a uma velocidade de 180 km/h para uma frequência de portadora igual a 900 MHz e frequência de amostragem de 24,3 k símbolos por segundo. O tempo de observação do canal representado na figura é de 0,04 segundos, o que corresponde a uma transmissão de 1000 símbolos.

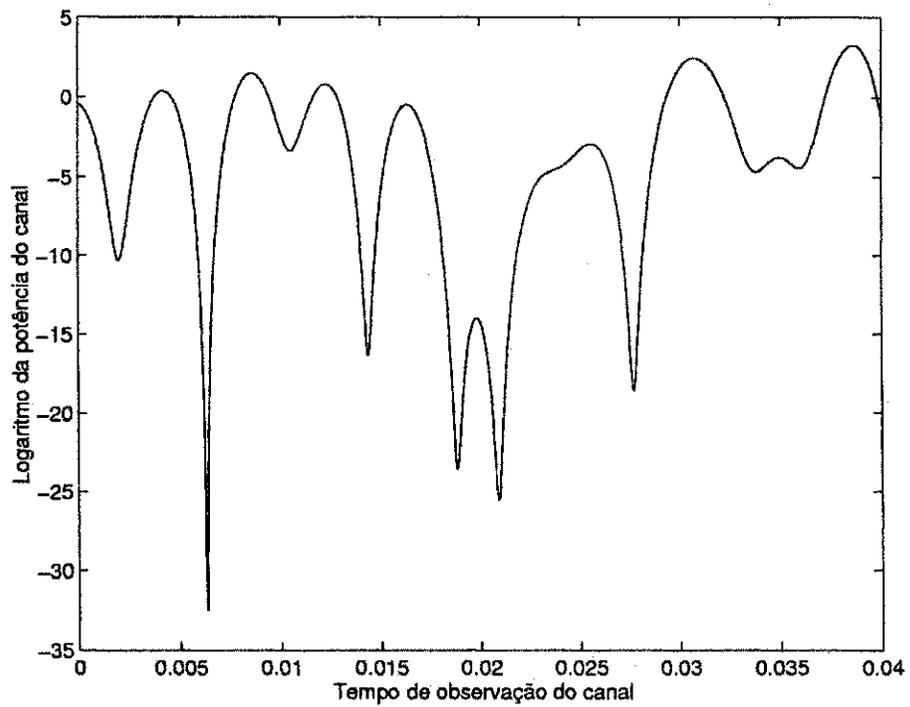


Figura B.3: Logaritmo da potência de uma função amostra do canal simulado pela técnica de Monte Carlo com $f_D = 150$ Hz e $f_S = 24$ k símbolos por segundo.

Apêndice C

Técnicas dos Momentos na Aproximação das Funções Densidade e Distribuição de Probabilidade

Neste apêndice discute-se, de forma bastante sumária, técnicas para aproximar analiticamente a fdp ou a função distribuição de probabilidade (FDP) de uma VA a partir de seus momentos. Diversos procedimentos foram desenvolvidos com este propósito, alguns dos quais são aqui apresentados, a saber: a *regra de quadratura de Gauss* (RQG), a *máxima entropia* (ME), a *série de Gram-Charlier* (SGC) e a *série de Edgeworth* (SE).

Além disso, neste apêndice, discute-se a série de Beaulieu (SB) que obtém a FDP de uma VA gerada pela soma de VAs estatisticamente independentes a partir das funções características dessas VAs. Apesar da diferença básica em relação às demais técnicas aqui discutidas, as quais empregam momentos estatísticos em vez de funções características, a SB foi incluída neste apêndice por se pretender adaptá-la para a aplicação no contexto do presente trabalho.

C.1 Regra da Quadratura de Gauss

Inicialmente, a RQG será apresentada em sua forma clássica. Posteriormente, a sua adaptação para obter a aproximação de uma fdp será discutida.

A RQG tem sido tradicionalmente usada como um procedimento de integração

numérica, sendo particularmente eficiente para aproximar integrais da forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx, \quad (\text{C.1})$$

cujo integrando é fatorado em duas parcelas, uma das quais é denominada função de ponderação ($f(\cdot)$). Esta função não deve assumir valores negativos na faixa de integração¹ e seus momentos estatísticos, definidos por

$$\mu_k = \int_a^b w^k f(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (\text{C.2})$$

devem existir.

Formalmente, a RQG é dada por

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^N \rho_i w(\tau_i) + R_N(\zeta) \text{ com } a < \zeta, \tau_i < b, \text{ e } i = 1, \dots, N, \quad (\text{C.3})$$

na qual os parâmetros ρ_i e τ_i para $i \in [1, N]$ são denominados de pesos e abscissas, respectivamente e $R_N(\cdot)$ representa o erro cometido na aproximação, cuja expressão é dada por

$$R_N(\zeta) = \frac{w^{(2N)}(\zeta)}{(2N)!(K_N)^2}, \quad (\text{C.4})$$

quando a função $w(x)$ possui derivadas contínuas até a ordem $2N$. Na equação apresentada acima $w^{(N)}(x)$ denota a N -ésima derivada de $w(x)$ em relação a x .

Para resolver uma integração numérica usando a RQG é preciso determinar as abscissas e os pesos. Para obtê-los é importante lançar mão de uma coleção de polinômios ortogonais $\{p_n(\cdot)\}$ com respeito à função de ponderação. Algebricamente esses polinômios devem atender às seguintes condições

$$\int_a^b f(x)p_m(x)p_n(x)dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n, \\ 0 & \text{se } m \neq n. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

As abscissas $\{\tau_i\}$ são as raízes do polinômio p_N , ou seja

$$p_N(x) = K_N \prod_{i=1}^N (x - \tau_i), \quad \text{com } K_N > 0 \text{ e } \text{grau}(p_N(x)) = N, \quad (\text{C.6})$$

¹É possível relaxar esta condição e admitir funções de ponderação com trocas de sinal dentro dos limites de integração. No entanto, para estes casos, os seus momentos precisam atender a determinados requisitos e mesmo assim a técnica pode apresentar alguns problemas de precisão numérica [67].

e os $\{\rho_i\}$ são números positivos que podem ser dados por

$$\rho_i = -\frac{K_{N+1}}{K_N} \frac{1}{p_{N+1}(\tau_i)p_N^{(1)}(\tau_i)} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{C.7})$$

com $p_N^{(1)}(\tau_i)$ representado a derivada de $p_N(\cdot)$ aplicada em τ_i .

Fica claro, a partir da Equação C.4, que o erro cometido na aproximação é zero quando $w(\cdot)$ é um polinômio de ordem inferior a $2N$. No entanto, essa equação não permite determinar o referido erro quando $w(\cdot)$ não é diferenciável, apesar de ser ainda possível obter os pesos e as abscissas e, por conseguinte a aproximação. Nesse caso, de acordo com o Teorema 15.2.3 de [31], o procedimento é assintoticamente convergente, se $dF(x)$ é uma função não decrescente e se a integral

$$\int_a^b w(x)dF(x) \quad (\text{C.8})$$

existir. Nessas condições

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \rho_i w(\tau_i). \quad (\text{C.9})$$

Em especial, se a função de ponderação $f(\cdot)$ for uma fdp definida no intervalo $[a, b]$ e se $w(\cdot)$ for dada por $w(x) = \mathcal{I}_\varrho(x)$, sendo $\mathcal{I}_\varrho(x)$ igual a 1 se $x \leq \varrho$ e a 0 se $x > \varrho$, a Equação C.9 fornece uma aproximação da FDP de $f(x)$, aqui denotada por $F(x)$. Doravante este será o caso considerado.

Analisando a Equação C.9 para um valor finito de N , verifica-se que independentemente do tipo de VA envolvida, a aproximação de sua FDP produzida pela RQG é composta de saltos e valores constantes entre sucessivos saltos, assim sendo a fdp aproximada é discreta com pontos de massa situados em $\{\tau_i\}$ e com amplitudes $\{\rho_i\}$. Vale mencionar que de acordo com o Teorema 15.2.3 de [31], à medida que N aumenta os pontos $\{\tau_i\}$ vão se distribuindo ao longo do intervalo $[a, b]$ e a fdp aproximada pode tender para uma forma contínua. No entanto, quando a fdp alvo é de fato contínua, uma abordagem interessante para produzir uma boa aproximação é combinar o uso da RQG com técnicas de interpolação [1].

Para uma fdp alvo discreta que possui M pontos de massa a convergência se verifica quando $N = M$. Aumentando N além desse valor a técnica não funciona, devido à ambigüidade provocada pelo uso de uma quantidade de momentos maior do que $2M$, valor que, nesse caso, caracteriza completamente a fdp.

O procedimento tradicional para a obtenção da RQG passa pela manipulação de polinômios. No entanto, procedimentos mais adequados à implementação computacional obtêm as abscissas e os pesos da aproximação por meio de autovalores e autovetores de matrizes obtidas a partir dos momentos da função de ponderação. Esses procedimentos apresentam soluções precisas quando os polinômios ortonormais à função de ponderação são conhecidos, situações geralmente classificadas como clássicas. Nos demais casos, denominados de não-clássicos, esses polinômios podem ser determinados a partir dos momentos de $f(\cdot)$ [68], mas é possível se incorrer em problemas numéricos que levam a imprecisões na aproximação, principalmente à medida que se aumenta a quantidade de momentos [67].

Em [67], admitindo uma VA cujo domínio é o intervalo $[0, 1]$, mostra-se que o número de condicionamento desses problemas algébricos nos casos não-clássicos é bastante elevado chegando a valores em torno de 10^4 para $N = 5$ e 10^{26} para $N = 20$. Portanto, pequenos erros de imprecisão no cálculo dos momentos ou arredondamento de seus valores podem conduzir a significativos erros nos pesos e abscissas.

Existem vários algoritmos para implementar a RQG referente a abordagem não-clássica. Em [69] a questão da instabilidade numérica com o aumento de N foi abordada e mostrou-se que a técnica fica mais confiável usando combinações lineares dos momentos, os parâmetros resultantes dessas combinações são denominados de momentos modificados. Outros fatores que contribuem para a instabilidade numérica são as imprecisões na decomposição de Cholesky, geralmente usada nas técnicas de cálculo da RQG, e o uso de momentos que são oriundos de distribuições assimétricas ou unilaterais. Nesse último caso, a VA assume apenas valores positivos ou apenas valores negativos.

Em [1] é apresentado um procedimento que combina o uso de momentos modificados apresentado em [69], com a decomposição de Cholesky apresentada em [70] e procedimentos de simetrização de fdp unilaterais. O algoritmo resultante é confiável e será apresentado a seguir. Vale ressaltar que este procedimento pode ser adaptado para distribuições assimétricas de duração finita deslocando a fdp original, para transformá-la em unilateral, e expressando os momentos da fdp resultante em termos dos momentos da fdp original.

O algoritmo discutido em [1] é ilustrado esquematicamente na Figura C.1, cujos blocos básicos são discutidos a seguir.

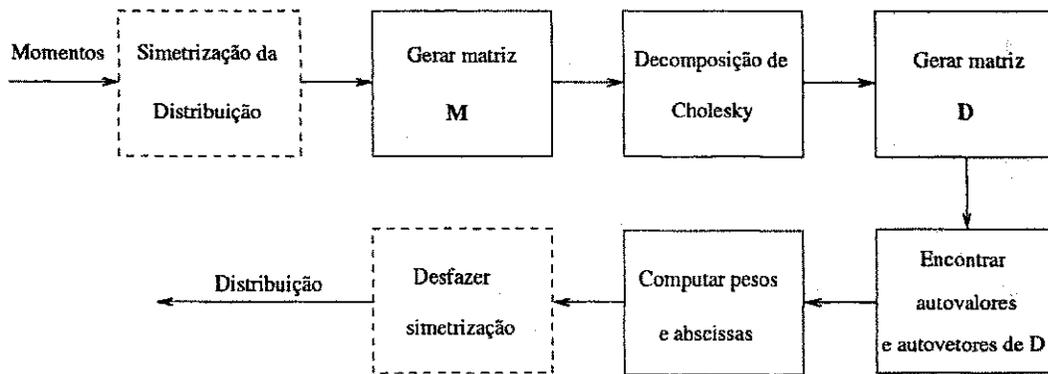


Figura C.1: Algoritmo da RQG proposto em [1].

Se a fdp for unilateral pode-se torná-la simétrica fazendo

$$f_s(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)], \quad (\text{C.10})$$

em que $f_s(\cdot)$ é uma fdp simétrica obtida a partir de $f(\cdot)$. Seus momentos pares são iguais aos momentos de $f(\cdot)$ e os momentos ímpares são nulos.

A partir de $2N$ momentos da fdp simétrica, se for o caso, forma-se a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,N+1} \\ m_{2,1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{N+1,1} & \cdots & m_{N+1,N+1} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

em que,

$$m_{i,j} = \int_a^b T_{i-1}(x)T_{j-1}(x)dF(x) \quad i, j = 1, \dots, N+1, \quad (\text{C.12})$$

na qual $\{T_i(\cdot)\}$ são os primeiros $N+1$ membros de um conjunto de polinômios, não necessariamente ortogonais, que satisfazem a seguinte regra de recorrência:

$$xT_j(x) = a_jT_{j+1}(x) + b_jT_j(x) + c_jT_{j-1}(x) \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad T_{-1}(x) = 0 \text{ e } a_j \neq 0. \quad (\text{C.13})$$

Como os $\{T_i(\cdot)\}$ são polinômios, os momentos modificados $m_{i,j}$ são combinações lineares dos momentos μ_j .

O próximo passo do algoritmo é obter a matriz \mathbf{D} assim definida

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{0,1} & d_{1,1} & & & 0 \\ d_{1,1} & d_{0,2} & d_{1,2} & & \\ & d_{1,2} & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & d_{0,N-1} & d_{1,N-1} \\ 0 & & & d_{1,N-1} & d_{0,N} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

sendo

$$\begin{aligned} d_{0,j} &= b_j + \frac{r_{j,j+1}}{r_{j,j}} a_j - \frac{r_{j-1,j}}{r_{j-1,j-1}} \quad j = 1, \dots, N, \\ d_{1,j} &= \frac{r_{j+1,j+1}}{r_{j,j}} a_j \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

em que $r_{i,j}$ é um dos elementos da matriz \mathbf{R} , obtida a partir da decomposição de Cholesky de \mathbf{M} ($\mathbf{M} = \mathbf{R}'\mathbf{R}$) implementada pelo algoritmo apresentado em [70].

A determinação dos pesos e abscissas envolve o cálculo dos autovalores e autovetores da matriz \mathbf{D} . As abscissas são dadas pelos autovalores,

$$\mathbf{D}\mathbf{q}_j = \tau_j \mathbf{q}_j \quad j = 1, \dots, N, \quad (\text{C.16})$$

e os pesos em termos dos autovetores, da seguinte maneira:

$$\rho_j = q_{1,j}^2 \mu_0, \quad (\text{C.17})$$

sendo $q_{1,j}$ o primeiro elemento do j -ésimo autovetor (\mathbf{q}_j).

Por fim, deve-se desfazer a simetrização. A FDP $F(\cdot)$ é obtida a partir da FDP simetrizada, que é aqui denotada por $F_s(\cdot)$, fazendo

$$F(x) = \begin{cases} 2F_s(x) - 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Para distribuições bilaterais, o procedimento apresentado em [1] não pode ser usado. Além disso, um dos principais problemas da RQG diz respeito à baixa velocidade de convergência. Em muitas aplicações são necessários muitos momentos para se obter uma boa aproximação.

C.2 Maximização da Entropia

A aproximação analítica da fdp pelo método da ME é obtida resolvendo um problema de otimização não-linear com restrições, no qual a função custo é a entropia da fdp

alvo. O problema é estabelecido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } H(f) &= \int_a^b f(x) \ln[f(x)] dx, \\ \text{sujeito a } \mu_i &= \int_a^b x^i f(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \text{com } \mu_0 &= \int_a^b f(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad -\infty < a, b < \infty. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

O problema apresentado na Equação C.19 pode ser resolvido usando multiplicadores de Lagrange, $\{\lambda_k, k = 0, 1, \dots, N\}$, [71]. Definindo

$$H^*(f) = \int_a^b f(x) \ln[f(x)] dx + c \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_a^b x^k f(x) dx, \quad (\text{C.20})$$

com

$$\ln[f(x)] + \lambda_0 + \sum_{k=1}^N \lambda_k x^k = 0 \quad (\text{C.21})$$

sendo $\lambda_0 = c + 1$ e resolvendo para $f(\cdot)$, tem-se que

$$f_N(x) = \exp \left[-\lambda_0 - \sum_{k=1}^N \lambda_k x^k \right], \quad (\text{C.22})$$

na qual $f_N(\cdot)$ representa a aproximação da fdp obtida com N momentos.

Considerando que

$$\int_a^b f_N(x) dx = 1, \quad (\text{C.23})$$

obtem-se

$$Z \triangleq \exp(\lambda_0) = \int_a^b \exp \left[-\sum_{k=1}^N \lambda_k x^k \right] dx. \quad (\text{C.24})$$

Aplicando a Equação C.24 na Equação C.22 obtém-se

$$f_N(x) = \exp \left\{ -\sum_{k=1}^N \lambda_k x^k - \ln \left[\int_a^b \exp \left(-\sum_{k=1}^N \lambda_k z^k \right) dz \right] \right\}. \quad (\text{C.25})$$

Pode-se observar que $f_N(\cdot)$ pertence a uma família de funções que são expressas pela exponencial de polinômios de grau máximo N . Os multiplicadores de Lagrange especificam um membro dessa família.

Pode-se mostrar que os momentos de $f_N(\cdot)$ são dados por [72]

$$\hat{\mu}_i = \int_a^b x^i \exp \left\{ - \sum_{k=1}^N \lambda_k x^k - \ln \left[\int_a^b \exp \left(- \sum_{k=1}^N \lambda_k z^k \right) dz \right] \right\} dx, \quad (\text{C.26})$$

os multiplicadores de Lagrange são determinados igualando os momentos da fdp aproximada, $\{\hat{\mu}_i\}$, aos respectivos momentos da fdp alvo, $\{\mu_i\}$. Isto conduz a um sistema de N equações não lineares com N incógnitas, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, que infelizmente não possui solução analítica, exceto para $N = 1$, cuja solução pode ser encontrada em [71].

Para $N > 1$ a solução pode ser obtida com um método de busca iterativo, como por exemplo pelo método de Newton-Raphson, que no entanto é bastante sensível à escolha do chute inicial, $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_N^0)'$. Outra alternativa é usar a superfície custo, $\Gamma(\cdot)$, apresentada em [73], que, sob determinadas condições, comentadas mais adiante, goza da propriedade de convexidade em \mathbb{R}^N . Neste caso, independentemente do chute inicial obtém-se uma solução global para o problema da determinação dos multiplicadores de Lagrange.

$\Gamma(\cdot)$ é definido por

$$\Gamma(\lambda) = \ln Z + \sum_{n=1}^N \mu_n \lambda_n. \quad (\text{C.27})$$

Em [73] é mostrado que no ponto estacionário de $\Gamma(\cdot)$, tem-se que

$$\hat{\mu}_n = \mu_n \quad \text{para } n = 1, \dots, N, \quad (\text{C.28})$$

ou seja, o ponto estacionário de $\Gamma(\cdot)$ especifica os multiplicadores de Lagrange de interesse.

A convexidade de $\Gamma(\cdot)$ em \mathbb{R}^N depende dos valores dos momentos da fdp alvo. Esse assunto foi abordado em [73] admitindo que a VA alvo assume valores restritos ao intervalo $[0, 1]$. Nesse caso, uma condição necessária e suficiente para que $\Gamma(\cdot)$ possua um único ponto estacionário para um dado N é que a seqüência de momentos da fdp alvo seja completamente monotônica. Essa condição pode ser expressa da seguinte maneira

$$\sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \mu_{n+m} > 0, \quad n, k = 0, 1, \dots. \quad (\text{C.29})$$

É importante mencionar que para a condição acima seja atendida, a fdp alvo deve ser contínua. Outro ponto importante é que as restrições obtidas para o procedimento

de ME são similares às aquelas estabelecidas em [74], no qual foi estudado a existência de soluções para o problema dos momentos de VAs definidas no intervalo $[0, 1]$, sem se ater a um algoritmo em particular. Portanto, pelo menos para distribuições contidas nesse intervalo, a técnica de ME não impõe restrições adicionais às já inerentes ao problema. Neste caso, se for possível aproximar a fdp a partir dos momentos, essa aproximação pode ser encontrada com a técnica da maximização da entropia.

Desde que os momentos atendam às condições expressas nas Inequações C.29, prova-se em [73] que a seqüência $f_N(\cdot)$, para $N = 1, 2, \dots$, converge para a fdp alvo no sentido que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 h(x) f_N(x) dx = \int_0^1 h(x) f(x) dx, \quad (\text{C.30})$$

sendo $h(\cdot)$ uma função contínua em $[0, 1]$.

Na prática a condição para a existência de solução do problema dos momentos é facilmente violada. Em muitas situações o domínio da fdp pode ser diferente do admitido, em alguns casos ele pode ser até ilimitado. Porém, no que concerne ao conhecimento do autor, os resultados analíticos a respeito de convergência e existência de solução se restringem ao caso de VAs que assumem valores no $[0, 1]$.

Em [73], considerando $N = 2$ e uma VA cujo espaço amostral é $[0, \infty)$, mostra-se que a superfície $\Gamma(\cdot)$ possui um ponto de mínimo global se

$$\mu_1^2 < \mu_2 < 2\mu_1^2, \quad \mu_0 = 1. \quad (\text{C.31})$$

É possível escolher valores de μ_1 e μ_2 que atendam às condições estabelecidas acima, mas que violam a condição de momentos completamente monótonos.

De qualquer forma, admitindo que a solução existe, ela pode ser encontrada por algum método numérico, como por exemplo o método de Newton, aceitas as suas limitações mencionadas anteriormente.

Em [72, 73] são apresentados alguns exemplos do uso da maximização da entropia para estimação de fdp. Esses exemplos contemplam algumas situações elementares como a de uma fdp parametrizada por α conforme indicado na Equação C.32

$$f(x) = \alpha + 2(1 - \alpha)x \quad \text{para } 0 < \alpha < 1. \quad (\text{C.32})$$

Nesse caso, os momentos das distribuições formam uma série completamente monótona, a fdp está restrita ao intervalo $[0, 1]$ e os momentos são obtidos analiticamente.

Os resultados são bastante precisos para uma pequena quantidade de momentos, exceto para $\alpha = 0$ e valores de x próximos de 0. Nesta região a fdp alvo assume valor nulo, o que é difícil de ser reproduzido ou sintetizado com um λ finito. Mesmo para $\alpha = 0$, à medida que se afasta da origem o ajuste fica cada vez melhor.

Esses artigos apresentam algumas aplicações particulares. Em [73] são apresentados exemplos mais rebuscados do uso bem sucedido da ME para aproximar fdps, são casos de interesse prático, nos quais os métodos analíticos são extremamente complicados e a simulação de Monte Carlo é computacionalmente inviável. Vale ressaltar que nas aplicações lá discutidas a fdp excursiona em uma faixa de valores conhecida e finita, sendo viável a normalização.

Na referência [72] a técnica de ME é empregada para estimar a fdp na entrada do decisor de um sistema de comunicação digital, permitindo avaliar o desempenho do sistema a partir dos momentos. Para os casos estudados a técnica permite obter uma aproximação similar a da RQG com uma quantidade bem menor de momentos.

C.3 Série de Gram-Charlier

A SGC aproxima uma fdp com momentos conhecidos, usando uma série cujos termos são versões ponderadas de fdps gaussianas e de suas derivadas [75, 76]. Os coeficientes dessa série e os argumentos das fdps gaussianas são dados pelos momentos da fdp alvo. Na realidade a SGC não é uma mera e simples proposição, ela resulta de sucessivos usos da série de Taylor e das definições de momentos e cumulantes. O procedimento que conduz à essa aproximação será discutido nesta seção, de forma bastante concisa, seguindo basicamente os passos apresentados em [75].

Admitindo que a função característica da fdp alvo, denotada por $C(w)$, pode ser expandida usando a série de Taylor por

$$C(w) = 1 + jw\mu_1 - \frac{w^2\mu_2}{2!} + \dots + \frac{(jw)^k\mu_k}{k!} + \dots, \quad (\text{C.33})$$

na qual os $\{\mu_k\}$ são os momentos da fdp alvo, os quais assumem valores finitos por hipótese. Tomando o logaritmo natural da Equação C.33 e expandindo o resultado em série de Taylor em torno do ponto 0, obtém-se:

$$\Omega(w) \triangleq \ln(C(w)) = jw\mu_1 - \frac{w^2\sigma^2}{2!} + r(w), \quad (\text{C.34})$$

sendo σ^2 a variância da VA alvo e $r(w)$ dado por

$$r(w) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\gamma_k (jw)^k}{k!}, \quad (\text{C.35})$$

em que os $\{\gamma_k\}$ são os cumulantes da VA alvo.

A partir da Equação C.34 a função característica fica dada por

$$C(w) = \exp \left(jw\mu_1 - \frac{w^2\sigma^2}{2} \right) \exp \{r(w)\}. \quad (\text{C.36})$$

Expandindo a última exponencial do lado direito da Equação C.36 numa série de Taylor, obtém-se

$$C(w) = \exp \left(jw\mu_1 - \frac{w^2\sigma^2}{2} \right) \left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k (jw)^k \right], \quad (\text{C.37})$$

sendo que os coeficientes $\{c_k\}$ são obtidos da seguinte fórmula

$$\exp \{r(w)\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (jw)^k. \quad (\text{C.38})$$

Em particular, os primeiros coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{\gamma_3}{3!}, \quad c_4 = \frac{\gamma_4}{4!}, \quad c_5 = \frac{\gamma_5}{5!}, \\ c_6 = \frac{\gamma_6}{6!} + \frac{\gamma_3^2}{2!(3!)^2}, \quad c_7 = \frac{\gamma_7}{7!} + \frac{\gamma_3\gamma_4}{2!3!4!} \text{ e } c_8 = \frac{\gamma_8}{8!} + \frac{\gamma_4^2}{2!(4!)^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Analisando a Equação C.37, usando as propriedades da transformada de Fourier, vê-se que a primeira parcela do lado direito desta equação é a transformada de uma fdp gaussiana com média μ_1 e variância σ^2 . Já a transformada inversa dos demais termos,

$$c_k \exp \left(jw\mu_1 - \frac{w^2\sigma^2}{2} \right) (jw)^k, \quad (\text{C.40})$$

é dada por

$$\frac{c_k (-1)^k}{\sigma^{k+1}} D^k f_G \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma} \right), \quad (\text{C.41})$$

na qual o $D^k(\cdot)$ denota a k -ésima derivada e $f_G(\cdot)$ denota a fdp gaussiana com média nula e variância unitária,

$$f_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2). \quad (\text{C.42})$$

Agrupando todos os termos, a fdp expressa pela SGC fica dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \left[f_G \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma} \right) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{\sigma^k} D^k \left\{ f_G \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma} \right) \right\} \right]. \quad (\text{C.43})$$

Definindo a VA normalizada $y = \frac{x - \mu_1}{\sigma}$ e considerando que

$$f_X(x) = \frac{1}{|\sigma|} f_Y \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma} \right), \quad (\text{C.44})$$

obtém-se a partir da Equação C.43

$$f_Y(y) = f_G(y) + \sum_{k=3}^{\infty} a_k D^k \{ f_G(y) \}, \quad (\text{C.45})$$

na qual os $\{a_k\}$ são os coeficientes da expansão, que serão discutidos posteriormente.

Aplicando o operador $D^k(\cdot)$, verifica-se que

$$D^k \{ f_G(y) \} = (-1)^k f_G(y) P_k(y), \quad (\text{C.46})$$

na qual $P_k(\cdot)$ é um polinômio de Chebycheff de grau k . Esses polinômios possuem as seguintes propriedades [31] [77]:

$$\begin{aligned} P_k(y) f_G(y) &= -D[P_{k-1}(y) f_G(y)], \quad k \geq 1; \\ P_k(y) - y P_{k-1}(y) + (k-1) P_{k-2}(y) &= 0, \quad k \geq 2; \\ \int_{-\infty}^{\infty} P_m(y) P_n(y) f_G(y) dy &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \\ n! & \text{se } m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Em decorrência da ortogonalidade dos polinômios de Chebycheff em relação a fdp gaussiana (última das propriedades listadas acima) os coeficientes da expansão apresentada na Equação C.45 podem ser obtidos da seguinte maneira

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) P_k(y) dy. \quad (\text{C.48})$$

Como os $P_k(\cdot)$ são polinômios, os coeficientes definidos acima podem ser expressos em termos dos momentos de $f_Y(\cdot)$. A seguir são listados esses polinômios e os coeficientes

da série para $k \leq 7$:

$$\begin{aligned}
 P_0(y) &= 1; \\
 P_1(y) &= y; \\
 P_2(y) &= y^2 - 1; \\
 P_3(y) &= y^3 - 3y; \\
 P_4(y) &= y^4 - 6y^2 + 3; \\
 P_5(y) &= y^5 - 10y^3 + 15y; \\
 P_6(y) &= y^6 - 15y^4 + 45y^2 - 15 \text{ e} \\
 P_7(y) &= y^7 - 21y^5 + 105y^3 - 105y. \\
 a_0 &= 1; \\
 a_1 &= 0; \\
 a_2 &= 0; \\
 a_3 &= -\frac{1}{3!}\mu_3^Y; \\
 a_4 &= \frac{1}{4!}(\mu_4^Y - 3); \\
 a_5 &= -\frac{1}{5!}(\mu_5^Y - 10\mu_3^Y); \\
 a_6 &= \frac{1}{6!}(\mu_6^Y - 15\mu_4^Y + 30) \text{ e} \\
 a_7 &= -\frac{1}{7!}(\mu_7^Y - 21\mu_5^Y + 105\mu_3^Y),
 \end{aligned}$$

nas quais μ_k^Y denota o k -ésimo momento da VA Y .

Substituindo a Equação C.46 na Equação C.45 obtém-se a seguinte forma normalizada da SGC

$$f_Y(y) = f_G(y) + f_G(y) \sum_{k=3}^{\infty} a_k (-1)^k P_k(y), \quad (\text{C.49})$$

com os $\{a_k\}$ dados pela Equação C.48.

Note que esta expansão se aplica diretamente para VAs que possuem média nula e variância unitária. Nos casos gerais, no entanto, deve-se obter os momentos de Y a partir dos momentos de X , obter a aproximação para a fdp de Y e aplicar a relação C.44 para obter a aproximação analítica da fdp alvo.

C.4 Serie de Edgeworth

Chebyshev e Edgeworth lançaram as bases para se conceber a SE no final do século XIX. Esses pesquisadores discutiram uma construção formal para a expansão da soma de VAs estatisticamente independentes. Hoje a SE pode ser obtida de diversas maneiras, inclusive a partir da série de Gram-Charlier sem entrar no mérito do processo de geração da VA. Alguns dos procedimentos para obter esta série são apresentados em [76, 78–80].

Na verdade, o que diferencia a SE da SGC é basicamente a ordem em que os termos se sucedem nas séries. Contudo, por motivos que serão discutidos oportunamente, as propriedades de convergência da primeira série são melhores do que as da segunda.

Admitindo que X_1, X_2, \dots, X_n são VAs estatisticamente independentes e idênticamente distribuídas com média μ e variância σ^2 . Uma estimativa da média dessas VA pode ser obtida pela média amostral

$$\theta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad (\text{C.50})$$

que é uma VA com média μ e variância dada por $n^{-1}\sigma^2$. Pelo teorema central do limite a distribuição da VA normalizada

$$S_n = \frac{(\theta_n - \mu)n^{1/2}}{\sigma} \quad (\text{C.51})$$

aproxima-se da distribuição gaussiana com média nula e variância unitária à medida que $n \rightarrow \infty$. Esse comportamento assintótico que pode ser expresso em termos da função característica de S_n , aqui denotada por $C_{S_n}(w)$, da seguinte maneira

$$C_{S_n}(w) \triangleq E \{ \exp(jwS_n) \} \rightarrow \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right). \quad (\text{C.52})$$

Usando a definição de S_n na função característica, obtém-se

$$C_{S_n}(w) = \left\{ C_Y\left(\frac{w}{n^{1/2}}\right) \right\}^n, \quad (\text{C.53})$$

na qual Y é uma VA com média nula e variância unitária definida por

$$Y = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad \text{para } i \in [1, n]. \quad (\text{C.54})$$

Denotando os cumulantes e momentos da VA Y por $\{\gamma_k\}$ e $\{\mu_k\}$, respectivamente,

pode-se escrever sua função característica da seguinte forma²

$$C_Y(w) = \exp \left\{ -\frac{w^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(jw)^k \gamma_k}{k!} \right\}. \quad (\text{C.57})$$

Usando a Equação C.57 na Equação C.53 obtém-se a expressão da função característica de S_n em função dos cumulantes, que é dado por

$$C_{S_n}(w) = e^{-\frac{w^2}{2}} \{ 1 + r_1(jw)n^{-1/2} + r_2(jw)n^{-1} + \dots + r_k(jw)n^{-k/2} + \dots \}, \quad (\text{C.58})$$

na qual $r_k(jw)$ é um polinômio com coeficientes reais de grau $3k$ e que depende dos cumulantes, $\gamma_3, \dots, \gamma_{k+2}$, e independe de n . Estes polinômios surgem naturalmente do agrupamento dos termos de mesma potência de n e são importantes para descrever o comportamento assintótico da série de Edgeworth. Em particular,

$$\begin{aligned} r_1(y) &= \frac{1}{6} \gamma_3 y^3, \\ r_2(y) &= \frac{1}{24} \gamma_4 y^4 + \frac{1}{72} \gamma_3^2 y^6. \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

Uma propriedade importante desses polinômios, que pode ser verificada por inspeção, é que $r_k(jw)$ possui grau par quando k é par e ímpar quando k é ímpar.

Lembrando que

$$e^{-w^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} dF_G(x), \quad (\text{C.60})$$

sendo $F_G(\cdot)$ a FDP de uma fdp gaussiana com média nula e variância unitária e aplicando a transformada a ambos os lados da Equação C.58 obtém-se

$$F_{S_n}(x) = F_G(x) + n^{-1/2} R_1(x) + n^{-1} R_2(x) + \dots + n^{-k/2} R_k(x) + \dots, \quad (\text{C.61})$$

²Outra forma de se expressar a função característica em série é por meio dos momentos, como apresentado na Equação C.33

$$C_Y(w) = 1 - \frac{w^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(jw)^k \mu_k}{k!}. \quad (\text{C.55})$$

A partir dessas duas definições pode-se relacionar os cumulantes em termos dos momentos o que resulta em [78]

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \gamma_k (jw)^k = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left\{ \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} \mu_i (jw)^i \right\}^k. \quad (\text{C.56})$$

Particularmente, em [76] mostra-se a relação explícita entre estes parâmetros estatísticos até a ordem 10.

sendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} dR_k(x) = r_k(jw)e^{-w^2/2}. \quad (\text{C.62})$$

Fazendo sucessivas integrações da Equação C.60 mostra-se em [78] que

$$R_k(x) = r_k(-D)F_G(x). \quad (\text{C.63})$$

na qual D denota o operador derivada. Uma propriedade que facilita enormemente o cálculo das derivadas da equação anterior é que

$$(-D)^k F_G(x) = -P_{k-1}^H(x) f_G(x), \quad (\text{C.64})$$

sendo $P_k^H(\cdot)$ os polinômios de Hermite, os quais gozam das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} P_{k+1}^H(x) &= 2xP_k^H(x) - 2kP_{k-1}^H(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P_k^H(x) P_l^H(x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq l, \\ 2^k k! \sqrt{\pi} & \text{se } k = l. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

Com essas definições, tem-se

$$R_1(x) = -\frac{1}{6}\gamma_3 D^3 F_G(x) = -\frac{1}{6}\gamma_3(x^2 - 1)f_G(x), \quad (\text{C.66})$$

e

$$R_2(x) = \left\{ \frac{1}{24}\gamma_4 D^4 + \frac{1}{72}\gamma_3^2 D^6 \right\} F_G(x), \text{ ou seja,} \quad (\text{C.67})$$

$$R_2(x) = -x \left[\frac{1}{24}\gamma_4(x^2 - 3) + \frac{1}{72}\gamma_3^2(x^4 - 10x^2 + 15) \right] f_G(x). \quad (\text{C.68})$$

Pode-se escrever $R_k(x) = p_k(x)f_G(x)$, sendo $p_k(x)$ um polinômio de ordem $3k - 1$. Com estas considerações a SE para a FDP fica dada por

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= F_G(x) + n^{-1/2}p_1(x)f_G(x) + n^{-1}p_2(x)f_G(x) \\ &+ \dots + n^{-k/2}p_k(x)f_G(x) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

enquanto a série para a função densidade de probabilidade fica dada por

$$f_{S_n}(x) = f_G(x) + n^{-1/2}r_1(x)f_G(x) + \dots + n^{-k/2}r_k(x)f_G(x) + \dots, \quad (\text{C.70})$$

As expansões de Gram-Charlier e de Edgeworth raramente convergem para uma quantidade infinita de termos. Na realidade, se uma VA X é contínua, a restrição que deve ser atendida para garantir a convergência é [76]

$$E \left\{ \exp \left(\frac{X^2}{4} \right) \right\} < \infty, \quad (\text{C.71})$$

que é uma condição muito severa, especialmente para distribuições com suporte ilimitado. A violação dessa condição leva a alguns inconvenientes, dentre os quais são típicos os problemas de cauda, que surgem quando a fdp aproximada apresenta valores negativos geralmente nas caudas da referida distribuição, comportamento incompatível com as propriedades de função densidade de probabilidade. Este tipo de problema é mais sério quando os efeitos que se deseja avaliar a partir da fdp aproximada possuem baixa probabilidade, o que ocorre particularmente na avaliação de desempenho de sistemas de comunicação.

A partir do que foi discutido no último parágrafo, a maioria das aplicações bem sucedidas dessas séries se dá quando se consegue uma aproximação aceitável usando uma pequena quantidade de termos. Em particular, alguns exemplos de simulação com a SGC mostram que bons resultados são obtidos quando a fdp alvo possui uma forma monomodal. Com distribuições que se assemelham à forma de combinação linear de gaussianas de médias distintas, por exemplo, a aproximação não é boa.

Na prática, uma quantidade finita de momentos ou cumulantes de uma VA são conhecidos ou podem ser estimados. Nesse caso são geralmente empregadas séries truncadas e, apesar das séries de Gram-Charlier e Edgeworth serem formalmente iguais, é possível que sejam obtidos comportamentos e precisão distintos.

Portanto, motivado, de um lado, pelas situações de ordem prática nas quais dispõe-se apenas de uma quantidade finita de momentos ou de cumulantes e, de outro, pelo fato das séries não serem convergentes, uma questão importante não é se a série infinita pode representar fielmente a fdp alvo, mas se é possível obter, para uma quantidade finita de termos, uma aproximação satisfatória.

Nos casos em que a fdp viola a condição C.71 e/ou se dispõe apenas de uma quantidade finita de momentos, a SE parece oferecer uma abordagem mais precisa, pois os seus termos são agrupados por ordem, o que não ocorre para a SGC. Ou seja, a série de Edgeworth pode ser expressa da seguinte maneira

$$f_{s_n}(x) = f_G(x) + n^{-1/2}r_1(x)f_G(x) + \dots + n^{-k/2}r_k(x)f_G(x) + o(n^{-k/2}), \quad (\text{C.72})$$

sendo que a notação $o(\cdot)$ descreve o comportamento assintótico da série: se $f(x) = o(\varphi(x))$ quando $x \rightarrow \infty$, então³

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow \infty. \quad (\text{C.74})$$

³Existe outro símbolo para explicitar o comportamento assintótico de uma função, trata-se do

Isto significa que o último termo da série truncada possui ordem maior do que o resto da série. Ou seja, ao menos para valores elevados de x , a soma dos termos não incluídos na série é menos significativa do que os termos nela inseridos. Apesar disto não ser verdade para todos os valores de x , o que implica o conceito mais restrito de convergência, ao menos limita o comportamento da série para valores que apresentam sérios problemas quando a série não é convergente.

Este comportamento assintótico, não compartilhado pela SGC, é que alimenta a expectativa de melhor desempenho da SE em relação a SGC.

Antes de encerrar esta seção é importante ressaltar que quando a condição de convergência é violada, a soma de uma quantidade grande de termos pode produzir curvas com valores negativos nas caudas, fato já mencionado anteriormente. Além disso, as séries truncadas em k termos podem apresentar um desempenho pior do que obtido com $k - 1$ termos, para alguns valores de k .

C.5 Série de Beaulieu

A série de Beaulieu, proposta em [82], é derivada conjugando o limite de Chernoff e a série de Fourier, sendo adequada para aproximar fdps resultantes da soma de VAs estatisticamente independentes.

A série é derivada admitindo a soma de L VAs para duas situações. Na primeira delas admite-se que as VAs assumem valores em um intervalo limitado superior e inferiormente, por comodidade essas VAs são aqui denominadas VAs limitadas. Na segunda, obtém-se a série para VAs que são ilimitadas, ou seja para VAs que assumem valores no eixo dos reais. Em ambos os casos, alguns artifícios são empregados. Inicialmente aplica-se o limitante de Chernoff à probabilidade de que a soma de VAs estatisticamente independentes supere um determinado valor. Posteriormente, essa probabilidade é expressa em termos do valor esperado da função degrau unitário, utiliza-se o fato de

símbolo $O(\cdot)$. Se $f(x) = O(\varphi(x))$ quando $x \rightarrow x_0$ então:

$$|f(x)| \leq A|\varphi(x)| \quad \text{quando } x \rightarrow x_0. \quad (\text{C.73})$$

O símbolo $o(\cdot)$ representa uma condição mais restritiva do que o símbolo $O(\cdot)$. Ou seja, se $f(x) = o(\varphi(x))$ então $f(x) = O(\varphi(x))$, o inverso não se verifica necessariamente [81]. Um aspecto importante dessas notações é que o símbolo $O(\cdot)$ contém mais informações a respeito do comportamento assintótico do que o símbolo $o(\cdot)$, pois ele descreve a taxa com que a tendência ocorre. Esse e outros aspectos relacionados com os referidos símbolos são discutidos em [81].

que este valor esperado é limitado superiormente por uma função exponencial. Por fim, deriva-se uma série convergente para a função característica. A seguir este procedimento será detalhado.

Admitindo que $X_i, i = 1, \dots, L$, são VAs independentes e limitadas, com fdps $f_{X_i}(x_i)$ que se anulam para $x_i < B_i^L$ e $x_i > B_i^U$ e

$$X = \sum_{i=1}^L X_i, \quad (\text{C.75})$$

sendo suas funções densidade de probabilidade e distribuição de probabilidade complementar denotadas por $f_X(x)$ e $G_X(x)$, respectivamente. Com as restrições expressas acima, X assume valores limitados superior e inferiormente por $B_L = \sum_{i=1}^L B_i^L$ e $B_U = \sum_{i=1}^L B_i^U$, respectivamente.

Definindo a seguinte função periódica de período T

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2}, & x \in \{-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\} \end{cases}, \quad (\text{C.76})$$

observa-se que

$$G_X(\epsilon L) \triangleq \Pr(X \geq \epsilon L) = E[S(X - \epsilon L)], \quad (\text{C.77})$$

em que $\Pr(A)$ denota a probabilidade do evento A . A Equação C.77 é válida para $T/2 = \max[B_U - \epsilon L, \epsilon L - B_L]$.

Representando $S(\cdot)$ em série de Fourier, tem-se

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=\text{ímpar}}}^{\infty} C_n e^{jnwx}, \quad C_n = \frac{1}{\pi n j}, \quad (\text{C.78})$$

na qual $w = 2\pi/T$. Utilizando as Equações C.77 e C.78 e, efetuando manipulações matemáticas, chega-se aos seguintes resultados:

$$G(\epsilon L) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{ímpar}}}^{\infty} \frac{A_n \sin \theta_n}{n}, \quad (\text{C.79})$$

sendo

$$\begin{aligned} A_n &= \prod_{i=1}^L A_{in} \text{ e} \\ \theta_n &= \sum_{i=1}^L \theta_{in}, \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

com

$$\begin{aligned} A_{in} &= \sqrt{\{E[\cos(nwX_i)]\}^2 + E[\sin(nwX_i)]^2}, \\ \theta_{in} &= \tan^{-1} \left\{ \frac{E[\sin(nw(X_i - \epsilon))]}{E[\cos(nw(X_i - \epsilon))]} \right\}. \end{aligned} \quad (C.81)$$

Em particular, para VAs identicamente distribuídas, a Equação C.79 fica dada por

$$G_X(\epsilon L) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{ímpar}}}^{\infty} \frac{(A_{in})^L \sin(L\theta_{in})}{n}, \quad (C.82)$$

na qual se manteve a notação anterior e deve ser notado que A_{in} e θ_{in} são iguais para todas as L VAs.

Em termos das funções características individuais das VAs $\{X_i\}$, $C_{X_i}(w) \triangleq E\{e^{jwX_i}\}$, a Equação C.79 pode ser reescrita da seguinte maneira

$$G(\epsilon L) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=\text{ímpar}}}^{\infty} \frac{e^{-j\frac{2\pi n \epsilon L}{T}} \prod_{i=1}^L C_{X_i}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) - e^{j\frac{2\pi n \epsilon L}{T}} \prod_{i=1}^L C_{X_i}\left(\frac{-2\pi n}{T}\right)}{n\pi j}. \quad (C.83)$$

Em termos da função característica de X , $C_X(w) \triangleq E\{e^{jwX}\}$, $G(\epsilon L)$ é dada por

$$G(\epsilon L) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=\text{ímpar}}}^{\infty} \frac{e^{-j\frac{2\pi n \epsilon L}{T}} C_X\left(\frac{2\pi n}{T}\right) - e^{j\frac{2\pi n \epsilon L}{T}} C_X\left(\frac{-2\pi n}{T}\right)}{n\pi j}. \quad (C.84)$$

Em suma, a FDP pode ser determinada a partir dos parâmetros $\{A_{in}\}$ e $\{\theta_{in}\}$ ou do conhecimento da função característica nos pontos $\frac{2\pi n}{T}$, $n = 1, 3, \dots$, sendo T estabelecido em função de B_U e B_L .

Em [82] é mostrado que a SB converge rapidamente. Além disso, obtém-se um limitante para o erro cometido truncando a série em N termos. Definindo

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{ímpar}}}^N \frac{A_n \sin \theta_n}{n} e \\ R_N &= \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=N+2 \\ n=\text{ímpar}}}^{\infty} \frac{A_n \sin \theta_n}{n}, \end{aligned} \quad (C.85)$$

com S_N representando a aproximação da FDP, $R_N(\cdot)$ o erro e N um inteiro ímpar e usando algumas manipulações algébricas mostra-se em [82] que o erro da aproximação atende a seguinte condição

$$|R_N| \leq \left\{ \min_{i=1, \dots, L} \left\{ \sup_{-\infty < x_i < \infty} f_{X_i}(x_i) \right\} \cdot \left[\frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{ímpar}}}^N \frac{1}{n^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (C.86)$$

na qual \sup denota o supremo.

A Inequação C.86 elucida duas importantes questões. Em primeiro lugar, verifica-se que o erro da aproximação tende para zero quando é utilizada uma quantidade infinita de termos na série. Em segundo lugar, vê-se que é possível obter uma aproximação arbitrária desde que seja utilizada a quantidade adequada de termos.

Com relação a VAs ilimitadas a SB é obtida de forma similar ao procedimento discutido acima. Nesse caso, os valores B_U e B_L devem ser escolhidos tal que $\Pr(X < B_L)$ e $\Pr(X > B_U)$ sejam desprezíveis.

Em [83] é apresentado uma aplicação bem sucedida desta série para avaliar o desempenho de sistemas de comunicações afetados por IES e interferência entre canais adjacentes. Distúrbios que são considerados isolada ou conjuntamente.

O principal problema para aplicar essa técnica reside na dificuldade de se obter os parâmetros $\{A_{in}\}$ e $\{\theta_{in}\}$. A vantagem reside principalmente na rigorosa análise do comportamento do erro cometido ao se usar a técnica.

É importante ressaltar que a série de Beaulieu, ao contrário das demais abordagens apresentadas neste apêndice, não pode ser empregada diretamente a partir dos momentos. Na visão do autor, é interessante adaptá-la para contemplar esta situação, por duas razões principais. Em primeiro lugar, ao contrário das séries de Gram-Charlier e Edgeworth, a série de Beaulieu é convergente. Em segundo lugar, dispõe-se de uma análise minuciosa de um limitante para o erro cometido para uma série truncada.

Apêndice D

Breve Introdução à Transformada *Wavelet*

Resultados importantes concernentes à teoria da transformada *wavelet* são apresentados sumariamente neste apêndice. O conteúdo aqui apresentado, sem muito rigor matemático, pode ser encontrado em maiores detalhes em diversas referências que abordam esse assunto, dentre as quais [27, 28, 58, 84–91].

Apesar dos primeiros trabalhos nessa área contemplarem funções contínuas, as aplicações de maior interesse na atualidade estão voltadas para a classe de sinais discretos. Nesse caso se enquadra inclusive a aplicação discutida neste trabalho.

As transformadas *wavelets* e de Fourier, como tantas outras ferramentas matemáticas, decompõem um certo sinal em funções de base, procedimento que pode ser valioso para análise, síntese, estimação, transmissão e armazenamento de sinais, só para citar algumas aplicações. Para sinais não-estacionários ou que apresentam comportamentos transitórios, a transformada de Fourier possui sérias limitações, muitas das quais advém do uso de bases de escopo global e que podem ser evitadas com o uso de bases com escopo local¹, como por exemplo, as funções de base *wavelets*.

Funções de base localizadas no tempo permitem representar compactamente os sinais, focalizar a análise em torno de uma região de interesse, bem como localizar suas áreas de maior ativação. Da mesma forma que a localização no domínio do tempo, a localização no domínio da frequência possui valiosas vantagens. Ela possibilita por exemplo o desenvolvimento de procedimentos computacionais eficientes, como ocorre

¹Um sinal é dito de escopo local ou localizado quando sua energia está concentrada nas proximidades de um ponto.

com a transformada de Fourier, cujas funções de base são extremamente localizadas no domínio da frequência.

Os procedimentos de decomposição ou de expansão em *wavelets* empregam funções de base localizadas no domínio do tempo e da frequência, aliando as vantagens discutidas no parágrafo anterior, o que tem motivado o seu uso nas mais diversificadas áreas do conhecimento humano.

O restante do assunto apresentado neste apêndice é organizado em três seções. Na primeira delas define-se a transformada *wavelet*. Na segunda, apresenta-se a análise de multiresolução, conceito fundamental para análise, síntese e projeto de *wavelets*. Por fim, apresenta-se a transformada discreta *wavelet* (DWT, da expressão em inglês *Discrete Wavelet Transform*) sob dois enfoques: a partir do algoritmo piramidal e da multiplicação matricial.

D.1 Expansão *Wavelet*

Em muitas situações um determinado sinal pode ser melhor analisado, representado, descrito ou processado se for expresso por uma decomposição linear

$$g(x) = \sum_l a_l \psi_l(x), \quad (\text{D.1})$$

em que l é um índice inteiro, $\{a_l\}$ são os coeficientes da decomposição e $\{\psi_l(\cdot)\}$ são as funções de base do espaço de representação funcional.

A eficiência ou a aplicabilidade da expansão mostrada na Equação D.1 depende principalmente do tipo de funções de base empregadas. A célebre série de Fourier, por exemplo, adota uma expansão trigonométrica que, devido às propriedades de suas funções de base, é adequada para processar sinais periódicos e fenômenos estacionários.

A expansão em *wavelets*, por seu turno, propõe representar um sinal decompondo-o em funções de base que possuem algumas particularidades marcantes, dentre as quais merece destaque o fato de serem controladas por dois parâmetros (escala e translação) e de possuírem localização nos domínios do tempo e da frequência.

A expansão em *wavelets* é dada por

$$g(x) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (\text{D.2})$$

em que j e $k \in \mathbb{Z}$, $\{a_{j,k}\}$ são os coeficientes da expansão e $\{\psi_{j,k}(\cdot)\}$ representam as funções de base. Uma forma equivalente para a expansão *wavelet* é a seguinte

$$g(x) = \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (\text{D.3})$$

sendo $\{c_{j_0,k}\}$ e $\{d_{j,k}\}$ os coeficientes referentes às funções de base $\{\varphi_{j_0,k}(\cdot)\}$ e $\{\psi_{j,k}(\cdot)\}$, respectivamente.

Independentemente da representação, as funções de base são geradas trasladando e escalonando uma única função, $\psi(\cdot)$, da seguinte maneira

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad (\text{D.4})$$

em que $2^{j/2}$ é um fator de normalização e $\psi(\cdot)$ é denominada função *wavelet*, que deve atender à condição de admissibilidade expressa a seguir

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty. \quad (\text{D.5})$$

Nesta equação $\Psi(\cdot)$ é a transformada de Fourier de $\psi(\cdot)$.

A condição de admissibilidade é necessária para garantir a existência da inversa. Um corolário decorrente dessa condição é que $\Psi(0) = 0$, ou que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$.

A expansão *wavelet* proposta na Equação D.2 decorre da condição de admissibilidade. Já a expansão proposta na Equação D.3 advém da análise de multiresolução (AMR). Neste último caso, as funções de base *wavelets* são obtidas indiretamente a partir da função de escalonamento, assunto que será motivo de discussão na próxima seção.

D.2 Análise de Multiresolução

A AMR permite decompor os sinais em vários níveis de resolução e, formalmente, ela é caracterizada por projeções sobre uma seqüência crescente de subespaços fechados, $\{\mathcal{V}_j\}$ com $j \in \mathbb{Z}$, de funções quadraticamente integráveis definidas no corpo dos números reais², $L^2(\mathbb{R})$, ou seja

$$\dots \subset \mathcal{V}_{-2} \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \dots \subseteq L^2, \quad (\text{D.6})$$

com $\mathcal{V}_{-\infty} = \emptyset$ e $\mathcal{V}_{\infty} = L^2(\mathbb{R})$.

²Diz-se que $g(x) \in L^p(\mathbb{R})$ se $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p dx = E < \infty$.

Na AMR uma função $g(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser aproximada com várias gradações de qualidade a partir de suas projeções nos subespaços $\{\mathcal{V}_j\}$. O erro da aproximação se reduz com o aumento de j . Isto significa que a projeção de $g(\cdot)$ em \mathcal{V}_j revela detalhes que são ocultados nas projeções sobre os espaços $\{\mathcal{V}_{j-l}\}$, sendo l qualquer inteiro positivo.

A hierarquização dos subespaços funcionais indicada na definição da AMR pode ser construída se duas condições básicas forem atendidas. A primeira é que, se $g(2^j x) \in \mathcal{V}_j$ então $g(x) \in \mathcal{V}_0$. A segunda é que existe uma função $\varphi(x) \in \mathcal{V}_0$, denominada função de escalonamento, cujas translações geram as funções de base para este subespaço funcional \mathcal{V}_0 . Portanto, o referido subespaço pode ser definido por

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ g(x) \in L^2(\mathbb{R}) \mid g(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x) \right\}, \quad (\text{D.7})$$

sendo $\{\varphi_k(x) = \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ uma base ortogonal para \mathcal{V}_0 .

Admitindo que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0$, restrição que será oportunamente justificada, e considerando a relação entre os espaços funcionais, verifica-se que as funções de base de \mathcal{V}_j podem ser expressas como combinação linear das funções de base do espaço \mathcal{V}_{j+i} , para $i > 0$. Em particular, para $j = 0$ e $i = 1$, existem coeficientes $\{h_e(k)\}$ tais que

$$\varphi(x) = \sum_k h_e(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{D.8})$$

A raiz quadrada na expressão acima decorre, de um lado, da relação diádica entre os subespaços sucessivos e, de outro, do interesse em se obter bases ortonormais para todos os subespaços funcionais.

Utilizando o jargão de processamento de sinais, área que vem contribuindo enormemente para o desenvolvimento e entendimento das *wavelets*, os coeficientes da Equação D.8 podem ser encarados como os pesos de um filtro, comumente denominado filtro de escalonamento $h_e = \{h_e(k)\}$. Dependendo da quantidade de termos incluídos no somatório dessa equação, o filtro pode ter duração finita (FIR, da expressão em inglês *Finite Impulse Response*) ou infinita (IIR, da expressão em inglês *Infinite Impulse Response*).

A Equação D.8 é fundamental para a AMR e recebe várias denominações, dentre as quais os termos “equação de refinamento” e “equação de escalonamento” aparecem com frequência e são aqui usados indistintamente.

As funções de base dos subespaços funcionais $\{\mathcal{V}_j\}$ podem ser geradas a partir das funções de base do subespaço \mathcal{V}_0 generalizando a equação de refinamento mediante a

combinação das operações de translação e dilatação ou escalonamento. Definindo

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad k, j \in \mathbb{Z} \quad \varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (\text{D.9})$$

na qual $\varphi(\cdot)$ é a função de escalonamento, então

$$\mathcal{V}_j = \left\{ g(x) \in L^2(\mathbb{R}) \mid g(x) = \sum_k d_k \varphi_{j,k}(x) \right\}. \quad (\text{D.10})$$

Para $j > 0$, as funções de base ficam mais concentradas no tempo do que as funções $\{\varphi_k(\cdot)\}$, isso faz com que $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_j$. A relação entre os espaços funcionais é invertida se $j < 0$. Neste caso as funções de base $\{\varphi_{j,k}(\cdot)\}$ possuem um suporte maior do que as funções $\{\varphi_k(\cdot)\}$. No que concerne às projeções nos subespaços para $j > 0$, devido à redução do suporte das funções de base, as translações ficam mais próximas umas das outras, possibilitando a representação de detalhes ou de fenômenos mais concentrados no tempo. Por outro lado, para $j < 0$ a situação se inverte, as translações ficam mais espaçadas e as projeções representam informações médias, mais grosseiras ou de menor resolução.

A representação funcional a partir das projeções nos subespaços funcionais $\{\mathcal{V}_j\}$ não é eficiente devido a um certo nível de sobreposição que existe entre esses subespaços, que é expresso pela relação mostrada na Expressão D.6. A informação decomposta no subespaço j está presente nas decomposições nos espaços subseqüentes. Uma forma mais eficiente de fazer esta representação é gerar subespaços ortogonais que conjuntamente possam cobrir todo o $L^2(\mathbb{R})$.

O complemento ortogonal do subespaço \mathcal{V}_j em relação ao subespaço \mathcal{V}_{j+1} será denotado por \mathcal{W}_j , ou seja $\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j$, sendo que \oplus simboliza a operação soma direta. Portanto, por definição, se as funções de base referente a \mathcal{W}_j são $\{\psi_{j,k}(\cdot)\}$ então

$$\langle \psi_{j,k}(x), \varphi_{j,l}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x) \varphi_{j,l}(x) dx = 0, \quad (\text{D.11})$$

sendo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno e j, k e $l \in \mathbb{Z}$.

Considerando essas definições o espaço $L^2(\mathbb{R})$ pode ser representado da seguinte maneira

$$L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{V}_{j_0} \oplus \mathcal{W}_{j_0} \oplus \mathcal{W}_{j_0+1} \oplus \mathcal{W}_{j_0+2} \oplus \dots, \quad (\text{D.12})$$

para um inteiro arbitrário j_0 . Na representação apresentada acima no subespaço \mathcal{V}_{j_0} são projetadas informações grosseiras ou de baixa resolução do sinal em questão, e

sucessivos níveis de detalhamento são fornecidos pelas projeções nos subespaços \mathcal{W}_{j_0+l} para $l \geq 0$.

Admitindo que a função *wavelet* $\psi(\cdot) \in \mathcal{W}_0$ e considerando que $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{V}_1$, existem coeficientes $\{h_w(k)\}$ tais que

$$\psi(x) = \sum_k h_w(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{D.13})$$

A partir das definições e da propriedade de ortogonalidade entre os subespaços é possível mostrar que

$$h_w(k) = (-1)^k h_e(1 - k), \quad (\text{D.14})$$

ou, considerando N coeficientes,

$$h_w(k) = (-1)^k h_e(N - 1 - k). \quad (\text{D.15})$$

De forma similar ao considerado para a função de escalonamento, é conveniente considerar $\mathbf{h}_w = \{h_w(k)\}$ como os pesos de um filtro denominado filtro *wavelet*.

A partir da função *wavelet* é possível gerar funções de base para os subespaços funcionais $\{\mathcal{W}_j\}$ usando operações de translação e dilatação

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad (\text{D.16})$$

o fator multiplicativo na equação anterior mantém a normalização dessas funções de base. Portanto, o conjunto de funções $\{\varphi_{j_0,k}(\cdot)\}$ e $\{\psi_{j,k}(\cdot)\}$ permite gerar todo o espaço $L^2(\mathbb{R})$.

A partir da análise de multiresolução uma função quadraticamente integrável no campo dos reais pode ser representada da seguinte maneira

$$g(x) = \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (\text{D.17})$$

considerando que as funções de base são ortonormais, tem-se

$$c_{j_0,k} = \langle g(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle \quad \text{e} \quad d_{j,k} = \langle g(x), \psi_{j,k}(x) \rangle. \quad (\text{D.18})$$

O primeiro somatório do lado direito da Equação D.17 representa a decomposição ou projeção de $g(\cdot)$ no subespaço \mathcal{V}_{j_0} e fornece uma aproximação grosseira dessa função. O segundo termo do lado direito representa as projeções nos subespaços das *wavelets* $\{\mathcal{W}_j\}$ para $j \geq j_0$ e fornece os detalhes necessários para reconstruir o sinal original.

Os $\{c_{j,k}\}$ e $\{d_{j,k}\}$ são os coeficientes da transformada *wavelet* de $g(\cdot)$. Alguns procedimentos algorítmicos para a sua determinação serão apresentados na próxima seção.

Vale mencionar que, sob a ótica da AMR, o projeto de uma transformada *wavelet* está intimamente vinculado à determinação dos coeficientes dos filtros h_e e h_w .³ Essa é uma contribuição interessante e importante da AMR, que facilita e agiliza sobremodo o entendimento e o projeto de transformadas *wavelets*. Sob esse prisma, é mister apresentar as condições que as funções de base da transformada devem satisfazer em termos de restrições que os coeficientes dos referidos filtros devem atender. Isso será objeto da discussão a seguir.

Aplicando a transformada de Fourier na equação de refinamento (Equação D.8) obtém-se

$$\Phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_e(w/2) \Phi(w/2), \quad (\text{D.19})$$

na qual $\Phi(\cdot)$ denota a transformada de Fourier de $\varphi(\cdot)$ e $H_e(\cdot)$ a transformada discreta de Fourier de h_e . Reaplicando iterativamente a equação acima a si mesma, obtém-se

$$\Phi(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} H_e\left(\frac{w}{2^k}\right) \right\} \Phi(0). \quad (\text{D.20})$$

A partir da Equação D.20 verifica-se que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0$ e que os zeros da transformada de Fourier da função de escalonamento são determinados pelos zeros do filtro de escalonamento.

Integrando ambos os lados da equação de refinamento e admitindo que $\varphi(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$, o somatório e a integração podem ser intercambiados. Considerando que $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \neq 0$ é possível mostrar que

$$\sum_k h_e(k) = \sqrt{2}. \quad (\text{D.21})$$

Se $\varphi(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e se as translações inteiras dessa função são ortogonais

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \varphi(x-k) dx = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0, \end{cases} \quad (\text{D.22})$$

então

$$\sum_l h_e(l) h_e(l-2k) = \delta_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

³ Isso ficará evidente quando da apresentação, na próxima seção, do algoritmo piramidal.

Em particular, para $k = 0$ tem-se

$$\sum_l |h_e(l)|^2 = 1. \quad (\text{D.24})$$

Nos casos em que a função de escalonamento da transformada *wavelet* possui suporte compacto $0 \leq t \leq N - 1$, é possível provar que o filtro de escalonamento é FIR com N coeficientes, ou seja

$$h_e(l) = 0 \quad \text{para } l < 0 \text{ e } l > N - 1. \quad (\text{D.25})$$

Em suma, se $\varphi(\cdot)$ possui um suporte compacto e se as funções $\varphi_k(\cdot)$ são ortogonais, existem $\frac{N}{2} + 1$ restrições e N parâmetros a serem determinados. $\frac{N}{2}$ dessas restrições advém das Equações D.23 e a outra da Equação D.21. Sobram, portanto, $\frac{N}{2} - 1$ graus de liberdade que podem ser utilizados para conferir propriedades ou características desejáveis à transformada *wavelet*.

Uma importante contribuição no tratamento dos graus de liberdade foi dada por Daubechies que conseguiu gerar *wavelets* ortogonais com suporte compacto maximizando a quantidade de momentos nulos para um dado valor de N , ou obtendo o valor mínimo de N para uma quantidade pré-fixada de momentos nulos [28]. É importante mencionar, que quanto maior a quantidade de momentos nulos, mais suave são as funções de base *wavelets* o que, dependendo da aplicação, pode ser uma propriedade interessante.

As condições acima foram apresentadas no domínio do tempo, mas podem ser expressas no domínio da frequência. Em particular, uma consequência da Equação D.21 é que $H_e(0) = \sqrt{2}$. Da condição de ortogonalidade das funções $\{\varphi_k(\cdot)\}$ pode-se mostrar que

$$|H_e(w)|^2 + |H_e(w + \pi)|^2 = 2. \quad (\text{D.26})$$

Fazendo $w = \pi$ nesta equação, considerando a periodicidade de $H_e(\cdot)$ e o valor de $H_e(0)$, verifica-se que $H_e(\pi) = 0$, ou seja, o filtro de escalonamento é do tipo passa-baixas. Além disso, a ortogonalidade no domínio do tempo das funções de escalonamento pode ser expressa no domínio da frequência por

$$\sum_l |\Phi(w + 2\pi l)|^2 = 1. \quad (\text{D.27})$$

Considerando a relação entre os filtros das *wavelets* e o de escalonamento, que é expressa pela Equação D.14, e admitindo que os coeficientes dos filtros de escalonamento satisfazem às condições apresentadas nas Equações D.21 e D.23, pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \sum_k h_w(k) &= H_w(0) = 0; \\ |H_w(w)| &= |H_w(w + \pi)| \quad \text{e} \\ |H_e(w)|^2 + |H_w(w)|^2 &= 2, \end{aligned} \tag{D.28}$$

sendo que $H_w(\cdot)$ denota a transformada discreta de Fourier do filtro *wavelet*. Analisando essas condições, pode-se concluir que o filtro *wavelet* é do tipo passa-altas.

D.3 Transformada *Wavelet* Discreta

Uma maneira computacionalmente eficiente de se obter os coeficientes da expansão *wavelet* para sinais discretos, ou a partir desses coeficientes se recuperar a representação no tempo, é por meio da DWT e da IDWT (da expressão *Inverse Discrete Wavelet Transform*), respectivamente.

Apesar de ser válido e instrutivo pensar na DWT como uma operação matricial, para grandes quantidades de amostras não é razoável obtê-la dessa forma, devido à elevada complexidade computacional e aos enormes requisitos de memória. Na prática, a transformação é implementada eficientemente pelo algoritmo piramidal. Este algoritmo foi originalmente desenvolvido por Peter Burt e Edward Adelson [92,93], com base na teoria de multiresolução, para ser empregado em processamento de imagem. Posteriormente Stéphane Mallat estabeleceu a relação formal entre a teoria de multiresolução, a transformada *wavelet* e esse algoritmo [94,95].

É conveniente associar o sinal discreto original com o espaço \mathcal{V}_J . Com essa associação, à medida que decresce o índice do espaço, obtém-se projeções do sinal cada vez mais grosseiras.

As equações de escalonamento podem ser expressas por:

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_e(l - 2k) \varphi_{j,k}(x) \quad \text{e} \quad \psi_{j-1,k}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_w(l - 2k) \varphi_{j,k}(x), \tag{D.29}$$

estas equações são fundamentais para o desenvolvimento do algoritmo piramidal. Considerando que $\dots \subset \mathcal{V}_{j-1} \subset \mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1} \subset \dots$ e que $g(\cdot) \in \mathcal{V}_j$ então

$$g(x) = \sum_k c_{j,k} \varphi_{j,k}(x). \tag{D.30}$$

Como $\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{j-1} \oplus \mathcal{W}_{j-1}$, então existem funções $v_{j-1}(\cdot)$ e $w_{j-1}(\cdot)$ que pertencem aos subespaços \mathcal{V}_{j-1} e \mathcal{W}_{j-1} , respectivamente, tais que

$$v_j(x) = v_{j-1}(x) + w_{j-1}(x) = \sum_l c_{j-1,l} \varphi_{j-1,l}(x) + \sum_l d_{j-1,l} \psi_{j-1,l}(x). \quad (\text{D.31})$$

Usando a equação de escalonamento e a propriedade de ortogonalidade entre os subespaços obtém-se:

$$c_{j-1,l} = \sum_k h_e(k-2l)c_{j,k} \quad \text{e} \quad d_{j-1,l} = \sum_k h_w(k-2l)c_{j,k}. \quad (\text{D.32})$$

É possível também obter o algoritmo piramidal no sentido contrário, que resulta em

$$c_{j,k} = \sum_l c_{j-1,l} h_e(k-2l) + \sum_l d_{j-1,l} h_w(k-2l). \quad (\text{D.33})$$

Nas Equações D.32 e D.33, os coeficientes $\{\mathbf{d}_j\}$, com

$$\mathbf{d}_j = (\dots, d_{j,k_0}, d_{j,k_0+1}, d_{j,k_0+2}, \dots)', \quad (\text{D.34})$$

são as projeções do sinal nos subespaços funcionais $\{\mathcal{W}_j\}$ e os coeficientes $\{\mathbf{c}_j\}$, com $\mathbf{c}_j = (c_{j,k_0}, c_{j,k_0+1}, c_{j,k_0+2}, \dots)'$, são as projeções do sinal nos subespaços funcionais $\{\mathcal{V}_j\}$. É importante verificar que o espaço funcional é especificado pelo primeiro índice dos coeficientes. Considerando que $\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{j-1} \oplus \mathcal{W}_{j-1}$ para todo j , na realidade o conjunto dos coeficientes cujo primeiro índice é igual a $j-1$ define a projeção do sinal no espaço funcional \mathcal{V}_j , ou no nível de resolução j . A quantidade total de níveis de resolução ou dos subespaços funcionais \mathcal{V}_j é aqui denotada por J .

Conforme apresentado nas Equações D.32 e D.33, o algoritmo piramidal expressa os coeficientes *wavelets* de um determinado nível em termos dos coeficientes do nível adjacente. Uma forma elegante de assinalar sua operação é mediante uso dos operadores de decimação, $[\downarrow 2]$, e de expansão, $[\uparrow 2]$. O primeiro operador retém apenas as amostras pares de uma seqüência, ao passo que o segundo insere zeros entres as amostras originais. Vale ressaltar que na operação de decimação claramente existe a possibilidade de perda de informação, pois com o descarte dos dados pode surgir o efeito de *aliasing*. Já na operação de expansão toda a informação é preservada.

Considerando os operadores discutidos acima, vê-se que o algoritmo piramidal realiza filtragem com os filtros de escalonamento e *wavelets*, seguido de decimação e

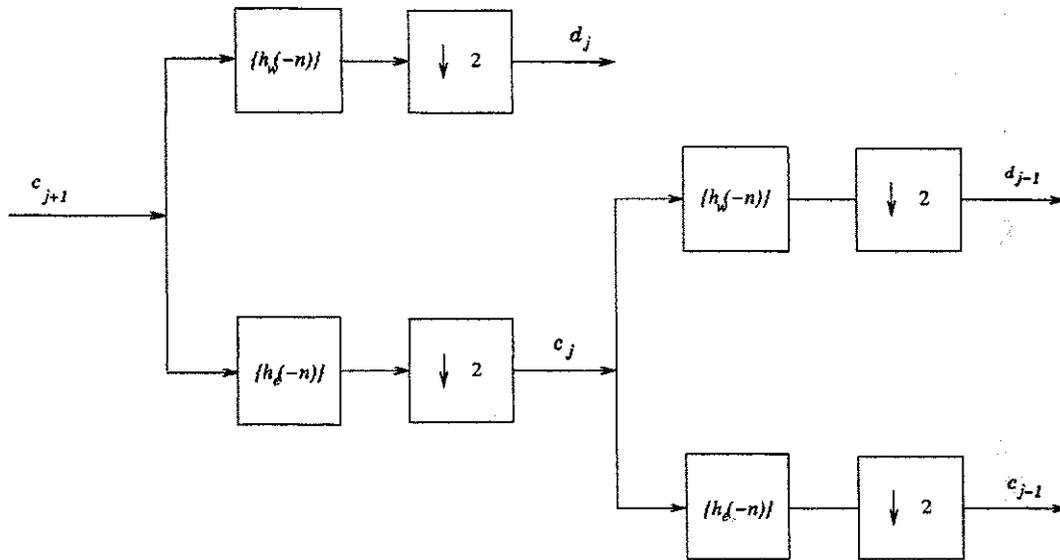


Figura D.1: Dois estágios do algoritmo piramidal no modo de análise (DWT).

expansão, como é ilustrado na Figura D.1 para análise (DWT) e na Figura D.2 para síntese (IDWT), respectivamente. A análise evolui do nível de escala mais fina, com o nível J denotando o próprio sinal, para escalas mais grosseiras. Na operação de síntese o processamento é realizado no sentido inverso, de um nível grosseiro para níveis mais finos. Neste caso, a saída no último nível é o sinal recuperado ou sintetizado.

Devido à ação dos decimadores e expansores, a quantidade de amostras na saída de uma determinada iteração do algoritmo piramidal, tanto na síntese quanto na análise, é praticamente igual à quantidade de amostras em sua entrada. Para filtros de escalonamento e de *wavelets* contendo apenas dois coeficientes, a quantidade é exatamente a mesma, porém para filtros maiores a quantidade de coeficientes na saída de um nível difere da quantidade de amostras em sua entrada. Portanto, se N_1 é a quantidade de amostras do sinal no domínio do tempo e se N_2 é a quantidade de coeficientes no domínio das *wavelets*, então $N_2 \geq N_1$.

É importante ressaltar que, para o processo de análise, o efeito de *aliasing* que ocorre em cada um dos ramos de saída do algoritmo piramidal é compensado, pois as filtragens são complementares (passa-baixas e passa-altas).

Tomando amostras de $y(\cdot)$, aqui denotadas por $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{N_1-1})'$, e admitindo que N_1 é uma potência de dois e que $y(\cdot)$ pertence ao subespaço funcional de maior

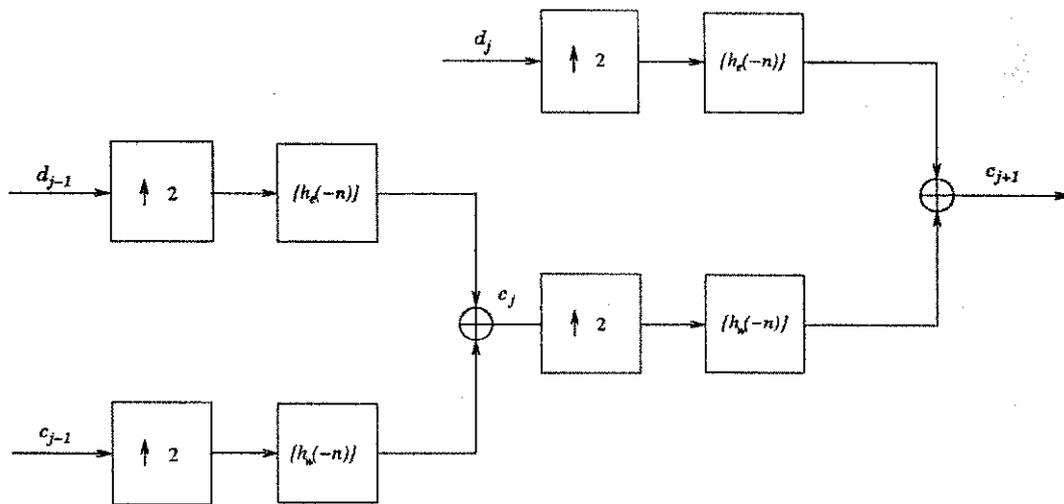


Figura D.2: Dois estágios do algoritmo piramidal no modo de síntese (IDWT).

resolução \mathcal{V}_J então

$$y(x) = \sum_{k=0}^{N_1-1} y_k \varphi_{J,k}(x). \quad (\text{D.35})$$

Fazendo $c_J = \mathbf{y}$, a DWT de \mathbf{y} pode ser obtida pelo algoritmo piramidal a partir dos coeficientes c_J . No sentido inverso, a IDWT pode ser obtida operando nos níveis mais grosseiros para produzir o vetor \mathbf{y} , e o sinal original em tempo contínuo pode ser recuperado a partir da Equação D.35.

Para sinais com uma quantidade de amostras que não é múltipla de dois e para filtros *wavelets* com mais de dois coeficientes, devem ser efetuadas algumas pequenas modificações nos procedimentos discutidos neste apêndice, mas na essência estes procedimentos continuam válidos. Por exemplo, no que se refere à quantidade de amostras que não atende ao requisito supracitado, diversas formas de complementação de dados podem ser utilizadas: o sinal pode ser completado de forma periódica, de forma simétrica, com enchimento por uma constante ou pode-se usar extrapolação polinomial, dentre outras alternativas, consideradas por exemplo em [90].

Outro aspecto importante a observar é que, apesar da implementação da DWT ser bem mais eficiente com o algoritmo piramidal do que com a multiplicação matricial, especialmente para uma grande quantidade de dados, na abordagem analítica discutida neste trabalho os sinais de interesse possuem poucas amostras. Além disso, como pretende-se contemplar a possibilidade de utilização de um algoritmo de busca para obter bases que minimizem a probabilidade de erro do sistema, é possível que a

representação matricial apresente vantagens. Diante disso, a seguir será apresentada a representação matricial para uma dada transformada *wavelet*, caracterizada pelos filtros h_e e h_w , supondo que $N_1 = 2^J$.

Define-se um conjunto de matrizes $\{H_k^e\}$ indexadas por k , de dimensão $(2^{(J-k)} \times 2^{(J-k+1)})$ cujos elementos são obtidos a partir do filtro de escalonamento, sendo o elemento genérico dessas matrizes $\{H_k^e(i, j)\}$ dado por

$$h_e(l), l = (N - 1) + (j - 1) - 2(i - 1) \text{ módulo } 2^{J-k+1}, \quad (\text{D.36})$$

O conjunto de matrizes $\{H_k^w\}$ é definido de forma similar, exceto pelo fato de seus elementos serem obtidos a partir dos coeficientes do filtro *wavelet*.

Note-se que as matrizes definidas acima são circulares: suas i -ésimas linhas são iguais às respectivas primeiras linhas com deslocamento circular de $2(i - 1)$ elementos.

A constante N na Equação D.36 afeta a posição das entradas nas sub-matrizes H_k^e e H_k^w . Para a família das *wavelets* de Daubechies, uma escolha apropriada desse parâmetro é dada pela quantidade de momentos nulos.

Em [58] é mostrado que as matrizes *wavelets* podem ser obtidas a partir das matrizes H_k^e e H_k^w da seguinte maneira

$$W_1 = \begin{bmatrix} H_1^w \\ H_1^e \end{bmatrix}, \quad (\text{D.37})$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2^w \\ H_2^e \end{bmatrix} \cdot H_1^w \\ H_1^e \end{bmatrix}, \quad (\text{D.38})$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_3^w \\ H_3^e \end{bmatrix} \cdot H_2^w \\ H_2^e \end{bmatrix} \cdot H_1^w \\ H_1^e \end{bmatrix}, \quad (\text{D.39})$$

e assim sucessivamente, até se obter W_J . O produto $\alpha = W_J y$ fornece a transformada *wavelet* desejada.

Na representação matricial W_J é aplicada a um conjunto finito de dados, o que corresponde a um truncamento da transformada *wavelet* em relação à aplicada a um sinal de duração infinita. Os coeficientes obtidos na primeira situação podem diferir daqueles obtidos para a segunda.

Há várias abordagens para tentar contornar esse problema, porém as mais usadas são a regra periódica e a da reflexão. Na regra periódica, um sinal com N_1 amostras é transformado em um sinal de duração infinita e periódico, com período N_1 . Este procedimento preserva a ortogonalidade, além de ser rápido e numericamente eficiente. Na regra da reflexão, os dados originais são refletidos nas fronteiras e posteriormente estendidos de forma periódica. Existem algoritmos disponíveis para implementar este procedimento.

Apêndice E

Análise Probabilística dos Coeficientes *Wavelets* Estimados pelo Procedimento de *Denoising*

Neste apêndice, considerando canais AWGN, modulação BPSK e mapeamento suave com limiar de escopo global, é analisado o modelo probabilístico da saída do processamento de entrada proposto, no qual contempla-se a obtenção de funções densidade de probabilidade e de momentos estatísticos.

Este apêndice é organizado da seguinte maneira. Na Seção E.1 obtém-se uma expressão analítica conveniente para a saída do procedimento de entrada proposto. Na Seção E.2 é obtida a expressão para a fdp dos coeficientes *wavelets* do sinal estabelecido na seção anterior. Nas Seções E.3 e E.4, mostra-se que os referidos coeficientes são estatisticamente independentes e que seus momentos estatísticos podem ser determinados de forma recursiva. Finalmente, na Seção E.5 são obtidos, também de forma recursiva, os momentos estatísticos da entrada do decisor.

E.1 Saída do Procedimento de *Denoising*

Nesta seção é obtida uma expressão para a VA que modela a saída do processamento de entrada proposto, em termos do limiar de *denoising* e dos coeficientes *wavelets* do pulso básico de transmissão, do sinal observado na entrada do receptor e do ruído de observação. A determinação dessa VA é importante para se analisar a polarização e a variância do estimador de sinal implementado pelo procedimento proposto.

Considere que o sinal observado na entrada do receptor é dado por

$$y(t) = x(t) + \tilde{\eta}(t) \quad (\text{E.1})$$

na qual $\tilde{\eta}(t)$ representa o ruído que é modelado por um processo estacionário gaussiano branco com média nula e variância σ^2 . A forma de $x(t)$ é imaterial para a discussão contida aqui.

No domínio da transformada *wavelet*, conforme discutido no Apêndice D, a Equação E.1 pode ser representada por

$$\alpha_{j,k} = \theta_{j,k} + \eta_{j,k}, \quad (\text{E.2})$$

em que

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= \int_{\mathbb{S}} y(t) \psi_{j,k}(t) dt, \\ \theta_{j,k} &= \int_{\mathbb{S}} x(t) \psi_{j,k}(t) dt, \\ \eta_{j,k} &= \int_{\mathbb{S}} \tilde{\eta}(t) \psi_{j,k}(t) dt, \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

nas quais $\{\psi_{j,k}(t)\}$ são as funções de base *wavelets* dadas por

$$\psi_{j,k}(t) \triangleq 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \quad (\text{E.4})$$

sendo $\psi(t)$ a função *wavelet* e \mathbb{S} um sub-conjunto do corpo dos reais, \mathbb{R} , que especifica o suporte da função $y(\cdot)$.

A estimativa dos coeficientes *wavelets* do sinal subjacente ao ruído é obtida na saída do limiar de comparação do procedimento de *denoising*. Considerando o uso de mapeamento suave com limiar de escopo global λ , esses coeficientes, aqui denotados por $\{\hat{\theta}_{j,k}\}$, são expressos em termos da transformada *wavelet* do sinal de observação por

$$\hat{\theta}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(\alpha_{j,k}) (|\alpha_{j,k}| - \lambda) & |\alpha_{j,k}| > \lambda \\ 0 & |\alpha_{j,k}| \leq \lambda \end{cases}, \quad (\text{E.5})$$

sendo que $\text{sgn}(\cdot)$ representa a função sinal. Esta equação pode ser escrita de forma mais compacta usando a função indicadora, $\mathcal{I}_{|\alpha_{j,k}| > \lambda}$, como segue

$$\hat{\theta}_{j,k} = \text{sgn}(\alpha_{j,k}) (|\alpha_{j,k}| - \lambda) \mathcal{I}_{|\alpha_{j,k}| > \lambda}. \quad (\text{E.6})$$

A estimativa de $x(t)$, denotada por $\hat{x}(t)$, na saída do procedimento de *denoising* é dada por

$$\hat{x}(t) = \sum_k \sum_j \hat{\theta}_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (\text{E.7})$$

Usando a Equação E.6 na Equação E.7, obtém-se

$$\hat{x}(t) = \sum_k \sum_j \text{sgn}(\alpha_{j,k}) (|\alpha_{j,k}| - \lambda) \psi_{j,k}(t) \mathcal{I}_{|\alpha_{j,k}| > \lambda}. \quad (\text{E.8})$$

Definindo \mathbf{A} como o conjunto formado pelos pares ordenados, (j, k) , tal que $\alpha_{j,k} > 0$ tais que

$$\hat{x}(t) = \sum_{(j,k) \in \mathbf{A}} (\alpha_{j,k} - \lambda) \psi_{j,k}(t) \mathcal{I}_{|\alpha_{j,k}| > \lambda} + \sum_{(j,k) \notin \mathbf{A}} (\alpha_{j,k} + \lambda) \psi_{j,k}(t) \mathcal{I}_{|\alpha_{j,k}| > \lambda}. \quad (\text{E.9})$$

Substituindo a Equação E.2 na Equação E.9, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_{j,k} \theta_{j,k} \psi_{j,k}(t) \mathcal{I}_{|\alpha_{j,k}| > \lambda} + \sum_{j,k} \eta_{j,k} \psi_{j,k}(t) \mathcal{I}_{|\alpha_{j,k}| > \lambda} \\ &\quad - \lambda \sum_{(j,k) \in \mathbf{A}} \psi_{j,k}(t) \mathcal{I}_{|\alpha_{j,k}| > \lambda} + \lambda \sum_{(j,k) \notin \mathbf{A}} \psi_{j,k}(t) \mathcal{I}_{|\alpha_{j,k}| > \lambda}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Definindo as variáveis aleatórias $\{U_{j,k}\}$ e $\{V_{j,k}\}$ como segue:

$$U_{j,k} = \begin{cases} 0, & |\theta_{j,k} + \eta_{j,k}| \leq \lambda \\ 1, & |\theta_{j,k} + \eta_{j,k}| > \lambda \end{cases}. \quad (\text{E.11})$$

e

$$V_{j,k} = \begin{cases} -1, & \theta_{j,k} + \eta_{j,k} < -\lambda \\ 0, & |\theta_{j,k} + \eta_{j,k}| \leq \lambda \\ 1, & \theta_{j,k} + \eta_{j,k} > \lambda \end{cases}, \quad (\text{E.12})$$

a Equação E.10 pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\hat{x}(t) = \sum_{j,k} \theta_{j,k} U_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{j,k} \eta_{j,k} U_{j,k} \psi_{j,k}(t) - \lambda \sum_{j,k} V_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (\text{E.13})$$

Considerando o modelo probabilístico do ruído aditivo, as fdps de $\{U_{j,k}\}$ e $\{V_{j,k}\}$ condicionadas aos coeficientes $\{\theta_{j,k}\}$ ficam dadas por¹:

$$f_U(U_{j,k}) = (1 - p_{j,k}) \delta(U_{j,k}) + p_{j,k} \delta(U_{j,k} - 1) \quad (\text{E.14})$$

¹Para simplificar a notação, os somatórios duplos doravante são representados por apenas um somatório com dois índices.

e

$$f_V(V_{j,k}) = \tilde{q}_{j,k} \delta(V_{j,k} + 1) + (1 - p_{j,k}) \delta(V_{j,k}) + q_{j,k} \delta(V_{j,k} - 1), \quad (\text{E.15})$$

sendo que

$$\begin{aligned} p_{j,k} &= \Pr(|\xi_{j,k}| > \lambda), \\ q_{j,k} &= \Pr(\xi_{j,k} > \lambda), \\ \tilde{q}_{j,k} &= \Pr(\xi_{j,k} < -\lambda) = p_{j,k} - q_{j,k}, \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

nas quais $\{\xi_{j,k}\}$ são VAs que seguem distribuições gaussianas com médias $\{\theta_{j,k}\}$ e variâncias σ^2 , ou seja

$$\xi_{j,k} \sim \mathcal{N}(\theta_{j,k}, \sigma^2),$$

E.2 Função Densidade de Probabilidade dos Coeficientes *Waveletes* na Saída do Procedimento de *Denoising*

Para simplificar a notação doravante será empregado apenas um índice para descrever as VAs e parâmetros definidos na seção anterior. Isto é feito sem perda de generalidade e implica apenas na realização de uma ordenação dos elementos dos referidos vetores.

Definindo z_i por

$$z_i \triangleq \theta_i U_i - \lambda V_i,$$

e observando que $U_i = V_i^2$ (veja definições dessas VAs na seção anterior), então z_i pode ser reescrito da seguinte maneira

$$z_i = \theta_i V_i^2 - \lambda V_i.$$

Como V_i assume os valores $-1, 0$ e 1 então z_i assume os valores $\theta_i + \lambda, 0$ e $\theta_i - \lambda$, respectivamente, e sua fdp pode ser expressa usando o teorema da probabilidade total por

$$f_Z(z_i) = \sum_{V_i} f_V(V_i) f_{Z|V}(z_i | V_i) \quad (\text{E.17})$$

sendo que $f_{Z|V}(z_i|V_i)$ é a fdp de z_i condicionada a V_i , que é dada por:

$$\begin{aligned} f_{Z|V}(\theta_i + \lambda | -1) &= 1, f_{Z|V}(\theta_i + \lambda | 0) = 0, f_{Z|V}(\theta_i + \lambda | 1) = 0 \\ f_{Z|V}(0 | -1) &= 0, f_{Z|V}(0 | 0) = 1, f_{Z|V}(0 | 1) = 0 \\ f_{Z|V}(\theta_i - \lambda | -1) &= 0, f_{Z|V}(\theta_i - \lambda | 0) = 0, f_{Z|V}(\theta_i - \lambda | 1) = 1. \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Substituindo a Equação E.18 na Equação E.17, a fdp de z_i fica dada por

$$f_Z(z_i) = (1 - p_i) \delta(z_i) + q_i \delta(z_i - \theta_i + \lambda) + (p_i - q_i) \delta(z_i - \theta_i - \lambda).$$

A VA $\hat{\theta}_i$ pode ser expressa em termos de z_i da seguinte forma

$$\hat{\theta}_i = z_i + \eta_i U_i = z_i + \eta_i V_i^2$$

e sua fdp por

$$f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}_i) = \int_{\eta_i} \sum_{z_i} \sum_{V_i} f_{\hat{\theta}\eta z V}(\hat{\theta}_i, \eta_i, z_i, V_i) d\eta_i,$$

ou ainda por

$$f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}_i) = \int_{\eta_i} \sum_{z_i} \sum_{V_i} f_{\eta}(\eta_i) f_{V|\eta}(V_i|\eta_i) f_{Z|V\eta}(z_i|V_i, \eta_i) f_{\hat{\theta}|V\eta Z}(\hat{\theta}_i | \eta_i, z_i, V_i) d\eta_i. \quad (\text{E.19})$$

Na qual foi utilizada a definição de fdp condicional e de fdp marginal, cujas expressões serão determinadas a seguir.

Dividindo o espaço amostral de η_i em três partições, R_1 , R_2 e R_3 , definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_1 &\triangleq \{\eta_i \in \mathbb{R} | \eta_i < -\lambda - \theta_i\}; \\ R_2 &\triangleq \{\eta_i \in \mathbb{R} | -\lambda - \theta_i \leq \eta_i \leq \lambda - \theta_i\} \text{ e} \\ R_3 &\triangleq \{\eta_i \in \mathbb{R} | \eta_i > \lambda - \theta_i\}, \end{aligned}$$

a fdp condicional $f_{V|\eta}(V_i|\eta_i)$ pode ser expressa como

$$\begin{aligned} f_{V|\eta}(-1|\eta_i \in R_1) &= 1, f_{V|\eta}(-1|\eta_i \in R_2) = 0, f_{V|\eta}(-1|\eta_i \in R_3) = 0 \\ f_{V|\eta}(0|\eta_i \in R_1) &= 0, f_{V|\eta}(0|\eta_i \in R_2) = 1, f_{V|\eta}(0|\eta_i \in R_3) = 0 \\ f_{V|\eta}(1|\eta_i \in R_1) &= 0, f_{V|\eta}(1|\eta_i \in R_2) = 0, f_{V|\eta}(1|\eta_i \in R_3) = 1. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

A fdp condicional $f_{Z|V\eta}(z_i | V_i, \eta_i) = f_{Z|V}(z_i | V_i)$, pois apesar de Z e η serem variáveis aleatórias dependentes, conhecendo V a variável aleatória η não contém informação adicional a respeito de Z . Por fim, pode ser observado que

$$f_{\hat{\theta}_i|V\eta Z}(\hat{\theta}_i | \eta_i, z_i, V_i) = \delta(\theta_i - z_i - \eta_i V_i^2). \quad (\text{E.21})$$

Utilizando na Equação E.19 as especificações das fdps condicionais dadas nas Equações E.18, E.20 e E.21

$$f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}_i) = \delta(\hat{\theta}_i) \int_{R_2} f_{\eta}(\eta_i) d\eta_i + \int_{R_3} \delta(\hat{\theta}_i - \theta_i - \eta_i + \lambda) f_{\eta}(\eta_i) d\eta_i + \int_{R_1} \delta(\hat{\theta}_i - \theta_i - \eta_i - \lambda) f_{\eta}(\eta_i) d\eta_i, \quad (\text{E.22})$$

sendo $f_{\eta}(\eta_i)$ gaussiana com média nula e variância σ^2 , portanto

$$\int_{R_3} \delta(\hat{\theta}_i - \theta_i - \eta_i + \lambda) f_{\eta}(\eta_i) d\eta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\hat{\theta}_i - \theta_i + \lambda)^2}{2\sigma^2}\right]$$

quando $\eta_i = \hat{\theta}_i - \theta_i + \lambda$. Considerando que $\eta_i \in R_3$, o resultado apresentado acima é válido para $\hat{\theta}_i \geq 0$, e

$$\int_{R_3} \delta(\hat{\theta}_i - \theta_i - \eta_i + \lambda) f_{\eta}(\eta_i) d\eta_i = 0$$

quando $\hat{\theta}_i < 0$. Dessa forma,

$$\int_{R_3} \delta(\hat{\theta}_i - \theta_i - \eta_i + \lambda) f_{\eta}(\eta_i) d\eta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\hat{\theta}_i - \theta_i + \lambda)^2}{2\sigma^2}\right] u(\hat{\theta}_i), \quad (\text{E.23})$$

na qual $u(\cdot)$ representa a função degrau unitário.

De forma semelhante,

$$\int_{R_1} \delta(\hat{\theta}_i - \theta_i - \eta_i - \lambda) f_{\eta}(\eta_i) d\eta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\hat{\theta}_i - \theta_i - \lambda)^2}{2\sigma^2}\right]$$

quando $\eta_i = \hat{\theta}_i - \theta_i - \lambda$. Considerando que $\eta_i \in R_1$, o resultado apresentado acima é válido para $\hat{\theta}_i \leq 0$, e

$$\int_{R_1} \delta(\hat{\theta}_i - \theta_i - \eta_i - \lambda) f_{\eta}(\eta_i) d\eta_i = 0$$

para $\hat{\theta}_i > 0$. Portanto

$$\int_{R_1} \delta(\hat{\theta}_i - \theta_i - \eta_i - \lambda) f_{\eta}(\eta_i) d\eta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\hat{\theta}_i - \theta_i - \lambda)^2}{2\sigma^2}\right] u(-\hat{\theta}_i). \quad (\text{E.24})$$

Substituindo as Equações E.23 e E.24 na Equação E.22 chega-se ao seguinte resultado

$$f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}_i) = (1 - p_i) \delta(\theta_i) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\hat{\theta}_i - \theta_i + \lambda)^2}{2\sigma^2}\right] u(\hat{\theta}_i) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\hat{\theta}_i - \theta_i - \lambda)^2}{2\sigma^2}\right] u(\hat{\theta}_i). \quad (\text{E.25})$$

E.3 Prova de Independência dos Coeficientes *Wavelets* na Saída do Procedimento de *Denoising*

A fdp conjunta de $\hat{\theta}_i$ e $\hat{\theta}_j$, denotada por $f_{\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j}(\cdot, \cdot)$, pode ser representada por

$$f_{\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = \int_{\eta_i} \int_{\eta_j} f_{\eta_i}(\eta_i) f_{\eta_j|\eta_i}(\eta_j|\eta_i) f_{\hat{\theta}_i|\eta_i, \eta_j}(\hat{\theta}_i|\eta_i, \eta_j) f_{\hat{\theta}_j|\eta_i, \eta_j, \hat{\theta}_i}(\hat{\theta}_j|\eta_i, \eta_j, \hat{\theta}_i) d\eta_i d\eta_j.$$

Considerando a hipótese de independência estatística das variáveis aleatórias $\{\eta_i\}$ então

$$f_{\eta_i|\eta_j}(\eta_j|\eta_i) = f_{\eta_i}(\eta_i).$$

Conhecendo as funções de base *wavelets* e o limiar de *denoising*, a realização de η_i especifica univocamente $\hat{\theta}_i$, para qualquer i . Como η_i especifica completamente $\hat{\theta}_i$ e η_i é estatisticamente independente de η_j , então η_j não pode conter informação sobre $\hat{\theta}_i$, sendo assim

$$f_{\hat{\theta}_i|\eta_i, \eta_j}(\hat{\theta}_i|\eta_i, \eta_j) = f_{\hat{\theta}_i|\eta_i}(\hat{\theta}_i|\eta_i),$$

de forma similar,

$$f_{\hat{\theta}_j|\eta_i, \eta_j, \hat{\theta}_i}(\hat{\theta}_j|\eta_i, \eta_j, \hat{\theta}_i) = f_{\hat{\theta}_j|\eta_j}(\hat{\theta}_j|\eta_j),$$

pois, mesmo que $\hat{\theta}_j$ contenha alguma informação de $\hat{\theta}_i$, conhecendo-se η_j essa informação é redundante. Portanto, a fdp conjunta $f_{\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j)$ fica dada por

$$f_{\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = \int_{\eta_i} \int_{\eta_j} f_{\eta_i}(\eta_i) f_{\eta_j}(\eta_j) f_{\hat{\theta}_i|\eta_i}(\hat{\theta}_i|\eta_i) f_{\hat{\theta}_j|\eta_j}(\hat{\theta}_j|\eta_j) d\eta_i d\eta_j,$$

ou seja,

$$f_{\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = f_{\hat{\theta}_i}(\hat{\theta}_i) f_{\hat{\theta}_j}(\hat{\theta}_j).$$

E.4 Determinação dos Momentos dos Coeficientes *Wavelets* na Saída do Procedimento de *Denoi-sing*

A função característica da VA $\hat{\theta}_i$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$C_{\hat{\theta}_i}(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f_{\hat{\theta}_i}(x) dx = (1 - p_i) + C_1^i(w) + C_2^i(w), \quad (\text{E.26})$$

sendo

$$\begin{aligned} C_1^i(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f_1^i(x) dx \quad \text{e} \\ C_2^i(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f_2^i(x) dx, \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

com

$$\begin{aligned} f_1^i(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\theta_i+\lambda)^2}{2\sigma^2}\right] u(x) \quad \text{e} \\ f_2^i(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\theta_i-\lambda)^2}{2\sigma^2}\right] u(-x). \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

Expandindo a função exponencial em série de Taylor tem-se que

$$C_1^i(w) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jwx)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\theta_i+\lambda)^2}{2\sigma^2}\right] dx, \quad (\text{E.29})$$

permutando o símbolo de integração com o de somatório, chega-se a

$$C_1^i(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jw)^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\theta_i+\lambda)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \quad (\text{E.30})$$

Definindo-se

$$I_1^i(k) = \int_0^\infty \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \hat{\theta}_i + \lambda)^2}{2\sigma^2} \right] dx, \quad (\text{E.31})$$

tem-se então

$$C_1^i(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jw)^k}{k!} I_1^i(k). \quad (\text{E.32})$$

De forma análoga,

$$C_2^i(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jw)^k}{k!} I_2^i(k), \quad (\text{E.33})$$

sendo

$$I_2^i(k) = \int_{-\infty}^0 \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \theta_i - \lambda)^2}{2\sigma^2} \right] dx. \quad (\text{E.34})$$

A seguir os coeficientes $\{I_1^i(k)\}$ e $\{I_2^i(k)\}$ serão determinados recursivamente.

Inicialmente, tem-se

$$I_1^i(0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \theta_i + \lambda)^2}{2\sigma^2} \right] dx. \quad (\text{E.35})$$

Fazendo $y = x - \theta_i + \lambda$, obtém-se

$$I_1^i(0) = \int_{-\theta_i+\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \triangleq q_i. \quad (\text{E.36})$$

Para $I_1^i(1)$ tem-se

$$I_1^i(1) = \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \theta_i + \lambda)^2}{2\sigma^2} \right] dx. \quad (\text{E.37})$$

Fazendo $y = x - \theta_i + \lambda$, obtém-se

$$I_1^i(1) = (\theta_i + \lambda)I_1^i(0) + \int_{-\theta_i+\lambda}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2} dy, \quad (\text{E.38})$$

que resulta em

$$I_1^i(1) = (\theta_i - \lambda)I_1^i(0) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\theta_i - \lambda)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (\text{E.39})$$

Fazendo a mesma mudança de variável para $I_1^i(2)$ chega-se a

$$I_1^i(2) = \int_{-\theta_i+\lambda}^{\infty} \frac{[y^2 + (\theta_i - \lambda)^2 + 2y(\theta_i - \lambda)]}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2} dy. \quad (\text{E.40})$$

Usando a propriedade de linearidade da integração e resultados obtidos anteriormente, a Equação E.40 torna-se

$$I_1^i(2) = \int_{-\theta_i+\lambda}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2} dy + 2(\theta_i - \lambda) \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\theta_i-\lambda)^2/2\sigma^2} + (\theta_i - \lambda)^2 I_1^i(0). \quad (\text{E.41})$$

Usando a técnica de integração por partes, agrupando os termos semelhantes e usando a definição de $I_1^i(1)$ é possível mostrar

$$I_1^i(2) = \sigma^2 I_1^i(0) + (\theta_i - \lambda) I_1^i(1). \quad (\text{E.42})$$

Seguindo os mesmos passos para $I_1^i(3)$ chega-se a

$$I_1^i(3) = \int_{-\theta_i+\lambda}^{\infty} \frac{(y + \theta_i - \lambda)^3}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2} dy. \quad (\text{E.43})$$

Expandindo a potência do integrando, usando a propriedade de linearidade do operador de integração e a definição de $I_1^i(0)$, tem-se

$$\begin{aligned} I_1^i(3) &= \int_{-\theta_i+\lambda}^{\infty} \frac{y^3}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2} dy + 3(\theta_i - \lambda) \left[\sigma^2 I_1^i(0) - (\theta_i - \lambda) \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\theta_i-\lambda)^2/2\sigma^2} \right] \\ &+ 3(\theta_i - \lambda)^2 \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\theta_i-\lambda)^2/2\sigma^2} + (\theta_i - \lambda)^3 I_1^i(0). \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

Empregando a técnica de integração por partes no lado direito da Equação E.44, agrupando os termos semelhantes e usando a definição de $I_1^i(1)$ e $I_1^i(2)$ obtém-se o seguinte resultado

$$I_1^i(3) = 2\sigma^2 I_1^i(1) + (\theta_i - \lambda) I_1^i(2). \quad (\text{E.45})$$

Repetindo o procedimento para $I_1^i(4)$ obtém-se

$$I_1^i(4) = 3\sigma^2 I_1^i(2) + (\theta_i - \lambda) I_1^i(3). \quad (\text{E.46})$$

Os resultados obtidos até este ponto indicam que os coeficientes $\{I_1^i(k)\}$ podem ser obtidos recursivamente da seguinte forma

$$I_1^i(k) = (k - 1)\sigma^2 I_1^i(k - 2) + (\theta_i - \lambda) I_1^i(k - 1), \quad (\text{E.47})$$

com as condições iniciais dada pelas Equações E.36 e E.39.

Essa equação recursiva foi testada analiticamente até $I_1^i(6)$ e por simulação no Maple até $I_1^i(50)$. Após estes valores fica extremamente complexo seguir o procedimento

analítico e muito lento realizar as integrações numéricas para comparar com os valores obtidos recursivamente. Apesar de ainda não ter sido dada uma prova definitiva da Equação E.47, a verificação de sua validade para a quantidade de momentos mencionada acima é suficiente para os casos de interesse tratados neste trabalho.

O procedimento apresentado para $\{I_1^i(k)\}$ foi repetido para $\{I_2^i(k)\}$ e chegou-se ao seguinte resultado

$$I_2^i(k) = (k-1)\sigma^2 I_2^i(k-2) + (\theta_i + \lambda)I_2^i(k-1), \quad (\text{E.48})$$

com as condições iniciais:

$$I_2^i(0) = \int_{-\infty}^{-\theta_i - \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \triangleq p_i - q_i. \quad (\text{E.49})$$

e

$$I_2^i(1) = (\theta_i + \lambda)I_2^i(0) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta_i + \lambda)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (\text{E.50})$$

Utilizando os resultados estabelecidos nas Equações E.46 e E.48 nas Equações E.32, E.33 e E.26, a função característica fica dada por

$$C_{\hat{\theta}_i}(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(jw)^k}{k!} I_k^i, \quad (\text{E.51})$$

sendo

$$\begin{aligned} I_1^i &= I_1^i(1) + I_2^i(1); \\ I_2^i &= jw \left\{ (\theta_i - \lambda)I_1^i(0) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta_i - \lambda)^2}{2\sigma^2}\right] + (\theta_i + \lambda)I_2^i(0) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta_i + \lambda)^2}{2\sigma^2}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.52})$$

Em suma, os momentos da VA na saída do limiar de comparação são determinados analiticamente pelos coeficientes da transformada *wavelet* do pulso básico de transmissão, pela variância do ruído que corrompe o sinal de interesse e pelo do limiar de *denoising*.

E.5 Determinação dos Momentos Estatísticos do Sinal na Entrada do Decisor

Nesta seção é mostrado que os momentos pares de \hat{x}_i independem do símbolo transmitido, ao contrário dos momentos ímpares cujo sinal depende do símbolo transmitido.

Como discutido no Capítulo 5, a VA \hat{x}_i pode ser representada pela soma de N VAs estatisticamente independentes, κ_i . Diante dessa relação, os momentos da primeira variável aleatória podem ser determinados como segue

$$\mu_Z^N(k) = \sum_{p=0}^N \binom{N}{p} \mu_Z^p(k-1) \mu_{\kappa_i}(N-p) \quad \text{para } k > 1, \quad (\text{E.53})$$

sendo $\{\mu_{\kappa_i}(\cdot)\}$ os momentos das VAs $\{\kappa_i\}$. Em particular $\mu_{\kappa_i}(m)$ representa o m -ésimo momento da VA κ_i , que está relacionado com o momento de mesma ordem de $\hat{\theta}_i$ por

$$\mu_{\kappa_i}(m) = \mathbf{W}(i, i_s)^m \mu_{\hat{\theta}_i}(m), \quad (\text{E.54})$$

na qual $\mathbf{W}(i, i_s)$ é um elemento da matriz que representa a transformada *wavelet*.

Foi mostrado na seção anterior que

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{\theta}_i|1}(m) &= \mu_{\hat{\theta}_i|-1}(m) \quad \text{para } m \text{ par e} \\ \mu_{\hat{\theta}_i|1}(m) &= -\mu_{\hat{\theta}_i|-1}(m) \quad \text{para } m \text{ ímpar,} \end{aligned} \quad (\text{E.55})$$

sendo $\mu_{\hat{\theta}_i|s}(m)$ o m -ésimo momento da VA $\hat{\theta}_i$ condicionando à transmissão do símbolo s .

Como consequência disso, tem-se

$$\begin{aligned} \mu_{\kappa_i|1}(m) &= \mu_{\kappa_i|-1}(m) \quad \text{para } m \text{ par e} \\ \mu_{\kappa_i|1}(m) &= -\mu_{\kappa_i|-1}(m) \quad \text{para } m \text{ ímpar,} \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

sendo $\mu_{\kappa_i|s}(m)$ o m -ésimo momento da VA κ_i condicionada à transmissão do símbolo s .

Em função das Equações E.55 e E.56, é possível mostrar que

$$\mu_{Z|1}^1(1) = -\mu_{Z|-1}^1(1), \quad (\text{E.57})$$

na qual $\mu_{Z|s}^m(k)$ é o m -ésimo momento condicional de Z (obtido a partir da soma de k VAs κ_i) dada a transmissão do símbolo 1, ao passo que $\mu_{Z|-1}^m(k)$ representa o momento de mesma ordem condicionando ao símbolo -1 .

Usando argumentos similares é possível mostrar que

$$\mu_{Z|1}^1(2) = \mu_{Z|-1}^1(2). \quad (\text{E.58})$$

Admitindo que

$$\begin{aligned}\mu_{Z|1}^m(k-1) &= \mu_{Z|-1}^m(k-1) \quad \text{para } m \text{ par e} \\ \mu_{Z|1}^m(k-1) &= -\mu_{Z|-1}^m(k-1) \quad \text{para } m \text{ ímpar,}\end{aligned}\tag{E.59}$$

é mostrado a seguir que a relação acima é válida para $m+1$.

Considerando que m é ímpar e utilizando a Equação E.53 tem-se

$$\begin{aligned}\mu_{Z|1}^{m+1}(k) &= \sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}} \binom{m+1}{2l} \mu_{Z|1}^{2l}(k-1) \mu_{\kappa|1}(m+1-2l) \\ &+ \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m+1}{2l+1} \mu_{Z|1}^{2l+1}(k-1) \mu_{\kappa|1}(m-2l) \quad \text{para } k > 1.\end{aligned}\tag{E.60}$$

Como $m+1-2l$ é par, $m-2l$ e $2l+1$ são ímpares, então

$$\begin{aligned}\mu_{Z|1}^{m+1}(k) &= \sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}} \binom{m+1}{2l} \mu_{Z|-1}^{2l}(k-1) \mu_{\kappa|-1}(m+1-2l) \\ &+ \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m+1}{2l+1} \mu_{Z|-1}^{2l+1}(k-1) \mu_{\kappa|-1}(m-2l) \quad \text{para } k > 1.\end{aligned}\tag{E.61}$$

Portanto, $\mu_{Z|1}^{m+1}(k) = \mu_{Z|-1}^{m+1}(k)$.

Por outro lado, se m for par tem-se que

$$\begin{aligned}\mu_{Z|1}^{m+1}(k) &= \sum_{l=0}^{\lceil \frac{m+1}{2} \rceil - 1} \binom{m+1}{2l} \mu_{Z|1}^{2l}(k-1) \mu_{\kappa|1}(m+1-2l) \\ &+ \sum_{l=0}^{m-1-\lceil \frac{m+1}{2} \rceil} \binom{m+1}{2l+1} \mu_{Z|1}^{2l+1}(k-1) \mu_{\kappa|1}(m-2l) \quad \text{para } k > 1,\end{aligned}\tag{E.62}$$

na qual $\lceil \cdot \rceil$ denota o maior inteiro menor do que o argumento. Como $m+1-2l$ é ímpar, $m-2l$ e $2l+1$ são pares, chega-se a

$$\begin{aligned}\mu_{Z|1}^{m+1}(k) &= - \sum_{l=0}^{\lceil \frac{m+1}{2} \rceil - 1} \binom{m+1}{2l} \mu_{Z|-1}^{2l}(k-1) \mu_{\kappa|-1}(m+1-2l) \\ &- \sum_{l=0}^{m-1-\lceil \frac{m+1}{2} \rceil} \binom{m+1}{2l+1} \mu_{Z|-1}^{2l+1}(k-1) \mu_{\kappa|-1}(m-2l) \quad \text{para } k > 1.\end{aligned}\tag{E.63}$$

Portanto, $\mu_{Z|1}^{m+1}(k) = -\mu_{Z|-1}^{m+1}(k)$, o que completa a prova por indução.

Apêndice F

Uma Nova Estratégia de Combate ao Ruído Baseada no Uso de Códigos de Paridade e Transformada de Haar

Neste apêndice é apresentado um novo esquema de recepção que combina o uso de código de paridade com a transformada de Haar para combater o efeito do ruído aditivo gaussiano branco (AWGN). A conjunção das duas técnicas permite ao mesmo tempo proteger a informação, devido à adição de redundância, e remover ruído no receptor, devido à propriedade de representação parcimoniosa da transformada de Haar [27,28], efeitos que conjuntamente podem efetivamente contribuir para melhorar o desempenho do enlace.

No procedimento proposto as possíveis seqüências transmitidas são classificadas de acordo com a representação de suas transformadas de Haar, no receptor é proposto um procedimento para detectar o conjunto que contém a seqüência transmitida a partir do vetor de observação. Da ação desse procedimento duas situações podem ocorrer. Na primeira delas, o procedimento detecta o conjunto e remove ruído, adotando uma estratégia que depende do conjunto detectado. Na segunda, o procedimento não consegue detectar o conjunto e a informação não é recuperada, devendo ser transmitida novamente.

Como ponto de partida para apresentação e avaliação analítica da técnica proposta, foi considerado um sistema de comunicação simples, com modulação BPSK e canal

AWGN. O código toma três bits para gerar um bit de paridade, formando dessa forma um bloco de quatro bits e, por conseguinte, quatro símbolos na saída do modulador BPSK. A generalização do procedimento para contemplar outros modelos de canal bem como empregar esquemas de modulação bidimensionais e blocos maiores será investigada na continuação deste trabalho.

O restante deste apêndice é organizado da seguinte maneira. Na Seção F.1 o procedimento é apresentado e seu desempenho é avaliado analiticamente. Na Seção F.2 são discutidos alguns procedimentos para melhorar as características de desempenho do procedimento proposto na seção anterior. Na Seção F.3 são apresentados resultados numéricos da avaliação de desempenho e, por fim, a Seção F.4 é destinada às conclusões e discussão de propostas para trabalhos futuros.

F.1 O Esquema Proposto

As possíveis seqüências de quatro símbolos na saída de um modulador BPSK são mostradas na segunda coluna da Tabela F.1. As transformadas de Haar correspondentes são apresentadas na terceira coluna da tabela e podem ser obtidas multiplicando a saída do modulador, representada por um vetor coluna, pela matriz

$$W = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}. \quad (\text{F.1})$$

Para seqüências longas, a operação matricial é inconveniente por consumir muita memória. Todavia, a transformada pode ser eficientemente implementada com o algoritmo piramidal. O Apêndice D apresenta uma discussão sucinta acerca do referido algoritmo e de como obter matrizes *wavelets*, como a apresentada na Equação F.1. Este apêndice cita uma vasta coleção de referências que contemplam esses temas.

A transformada de Haar é ortonormal e por conseguinte a energia da seqüência é preservada no mapeamento. Porém, devido à sua propriedade de representação com parcimônia, a energia da seqüência fica desbalanceada ao longo dos coeficientes no domínio da transformada. Como mostrado na Tabela F.1, as seqüências mapeadas apresentam componentes nulas: duas ou três para as seqüências com paridade par e

Tabela F.1: Transformada de Haar das seqüências na saída do modulador BPSK.

Seqs.	Saída do modulador	Seqüência transformada
s_1	$(1, 1, 1, 1)'$	$(2, 0, 0, 0)'$
s_2	$(1, 1, 1, -1)'$	$(1, 1, 0, \sqrt{2})'$
s_3	$(1, 1, -1, 1)'$	$(1, 1, 0, -\sqrt{2})'$
s_4	$(1, 1, -1, -1)'$	$(0, 2, 0, 0)'$
s_5	$(1, -1, 1, 1)'$	$(1, -1, \sqrt{2}, 0)'$
s_6	$(1, -1, 1, -1)'$	$(0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2})'$
s_7	$(1, -1, -1, 1)'$	$(0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})'$
s_8	$(1, -1, -1, -1)'$	$(-1, 1, \sqrt{2}, 0)'$
s_9	$(-1, 1, 1, 1)'$	$(1, -1, -\sqrt{2}, 0)'$
s_{10}	$(-1, 1, 1, -1)'$	$(0, 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})'$
s_{11}	$(-1, 1, -1, 1)'$	$(0, 0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})'$
s_{12}	$(-1, 1, -1, -1)'$	$(-1, 1, -\sqrt{2}, 0)'$
s_{13}	$(-1, -1, 1, 1)'$	$(0, -2, 0, 0)'$
s_{14}	$(-1, -1, 1, -1)'$	$(-1, -1, 0, \sqrt{2})'$
s_{15}	$(-1, -1, -1, 1)'$	$(-1, -1, 0, -\sqrt{2})'$
s_{16}	$(-1, -1, -1, -1)'$	$(-2, 0, 0, 0)'$

uma para seqüências com paridade ímpar¹. Portanto, a concentração da energia no domínio da transformada é maior para as seqüências com paridade par. Em razão disso, é mais eficiente remover ruído destas seqüências do que daquelas com paridade ímpar, e a discussão que segue será restrita apenas às seqüências com paridade par².

¹A rigor, o conceito de paridade deve ser atribuído a seqüências binárias (0,1). No entanto, no decorrer deste apêndice o conceito de paridade é atribuído às seqüências na saída do modulador BPSK. Para verificar a paridade dessas seqüências basta apenas considerar que o bit -1 representa o nível lógico zero.

²O código de paridade(4,3) possui capacidade de detectar um erro, independente de se utilizar paridade par ou ímpar. No entanto, como discutido aqui, essas seqüências possuem propriedades distintas no domínio da transformada de Haar e, dependendo do processamento realizado no receptor, um tipo de paridade pode ser mais adequado do que o outro, no caso em questão a paridade par parece ser mais conveniente. Talvez seja possível desenvolver códigos com propriedades interessantes escolhendo suas palavras-código no domínio da transformada. Isto é um fato importante, que merece

As seqüências com paridade par podem ser classificadas em três conjuntos ou classes. O primeiro deles, denotado por C_1 , contém as seqüências s_1 e s_{16} . Essas seqüências se caracterizam por possuírem transformada com as três últimas componentes nulas (veja Tabela F.1). O segundo, C_2 , compreende as seqüências que se caracterizam por apresentar transformada com apenas a segunda componente diferente de zero (s_4 e s_{13}). Por fim, o terceiro conjunto, C_3 , é formado pelas seqüências s_6 , s_7 , s_{10} e s_{11} , cujas representações no domínio da transformada possuem as duas primeiras componentes nulas.

Supondo que o receptor identifica corretamente a classe ou o conjunto que contém a seqüência transmitida, parte do ruído que corrompe o sinal captado em sua entrada pode ser removido, o que facilita o subsequente procedimento de detecção da informação transmitida. A porção do ruído a ser eliminada é a que corrompe as componentes que devem ser nulas. Nessas condições, o ruído pode ser removido sem degradar a informação transmitida, melhorando o desempenho do enlace de comunicação.

Nos termos ideais discutidos no último parágrafo, transmitindo seqüências do conjunto C_3 seria possível, em média, remover 50% da energia total do ruído e para as seqüências que pertencem aos conjuntos C_1 e C_2 seria possível reduzir, em média, 75% da energia total do ruído. Considerando o envio de seqüências equiprováveis, a redução média na energia do ruído seria de 62,5%. Em contrapartida, transmitindo somente seqüências com paridade ímpar, a redução média na energia do ruído seria de apenas 25%.

Em condições reais, o receptor desconhece a classe ou o conjunto que contém a seqüência transmitida. Essa informação poderia ser embutida na mensagem transmitida, contudo isso reduziria a eficiência do enlace de comunicação, o que seria inconveniente uma vez que o procedimento proposto opera em conjunto com um código de paridade, que já compromete parte da capacidade do sistema com redundância.

A alternativa é tentar obter a informação sobre o conjunto que contém a seqüência transmitida a partir do sinal observado no receptor. Essa alternativa não implica em redução adicional na vazão, mas pode ocasionar degradação de desempenho. De fato, um erro na detecção do conjunto prejudica a detecção do corrente bloco de símbolos, pois componentes que contêm energia do sinal transmitido podem ser eliminadas. Portanto, uma estratégia estabelecida em conformidade com esta abordagem deve ser implementada com cautela, para que na média as desvantagens impostas pelas decisões erradas uma investigação mais criteriosa.

sobre o conjunto a que pertence a observação não superem a vantagem da redução do ruído, diante de decisões corretas.

Diante do discutido, propõe-se investigar o sistema de comunicações cujo diagrama de bloco simplificado é mostrado na Figura F.1. O referido diagrama é composto, no lado de transmissão, de uma fonte digital binária, de um código de paridade com taxa 3/4 e de um modulador BPSK, cujo sinal de saída é transmitido por meio de um canal AWGN com variância σ^2 . O receptor é composto de uma estrutura de processamento que controla a operação de remoção de ruído e de um detector de símbolos, sendo o primeiro o núcleo básico do procedimento proposto e que se baseia na classificação da seqüência recebida segundo os conjuntos mencionados anteriormente.

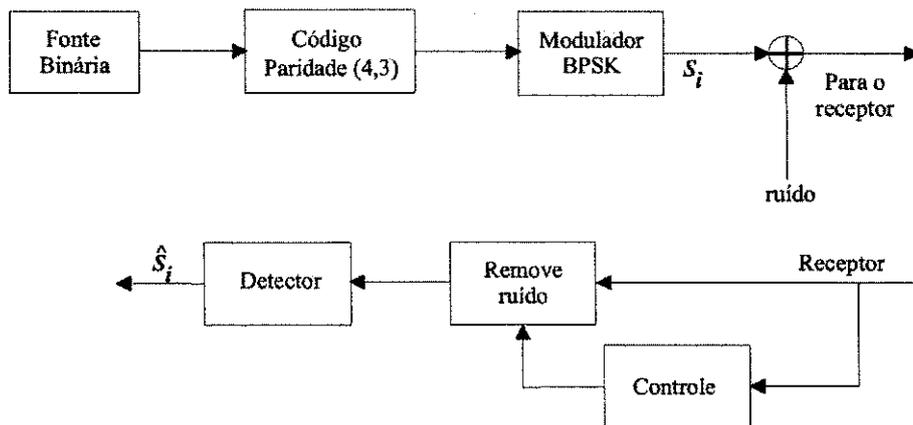


Figura F.1: Diagrama de blocos simplificado do esquema de comunicação estudado neste apêndice.

A seguir será discutido um possível procedimento para detectar o conjunto que contém a seqüência transmitida a partir do vetor de observação, que é ilustrado na Figura F.2. Inicialmente, a transformada de Haar da seqüência recebida \mathbf{y} é obtida, e será aqui representada por \mathbf{v} . Como são transmitidas apenas seqüências com paridade par, assumindo que r e $s \in \{-1, 1\}$, \mathbf{y} pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} &= (r + n_1, r + n_2, r + n_3, r + n_4) \text{ se } s \in \mathcal{C}_1; \\
 \mathbf{y} &= (r + n_1, r + n_2, -r + n_3, -r + n_4) \text{ se } s \in \mathcal{C}_2; \\
 \mathbf{y} &= (r + n_1, -r + n_2, s + n_3, -s + n_4) \text{ se } s \in \mathcal{C}_3.
 \end{aligned}
 \tag{F.2}$$

Em que os $\{n_i\}$ são variáveis aleatórias (VA) gaussianas estatisticamente independentes, cada qual com média nula e variância σ^2 , o que decorre do modelo adotado para o canal de comunicação.

A transformada de Haar dos sinais apresentados na Equação F.2 é:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (2r + e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ se } \mathbf{s} \in \mathcal{C}_1; \\ \mathbf{v} &= (e_1, 2r + e_2, e_3, e_4) \text{ se } \mathbf{s} \in \mathcal{C}_2; \\ \mathbf{v} &= (e_1, e_2, \sqrt{2}r + e_3, \sqrt{2}s + e_4) \text{ se } \mathbf{s} \in \mathcal{C}_3. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Em que os e_i 's são VA gaussianas estatisticamente independentes, cada qual com média nula e variância σ^2 (a transformada mantém as propriedades estatísticas do ruído branco).

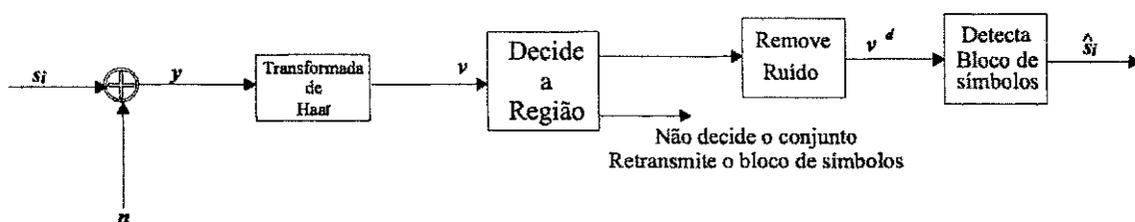


Figura F.2: Diagrama de blocos do esquema de recepção proposto.

O vetor aleatório \mathbf{v} segue para o procedimento de detecção do conjunto discutido a seguir.

F.1.1 Procedimento para Detectar a Classe da Seqüência Transmitida: Regiões e Limiares de Decisão

Nesta seção as distribuições de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)' \in \mathbb{R}^4$ condicionadas aos conjuntos \mathcal{C}_i são obtidas. Esse levantamento estatístico é necessário para estabelecer os limiares e as regiões de decisão para detectar o conjunto, a probabilidade de erro e a vazão do procedimento proposto.

Dada uma seqüência transmitida, as componentes de \mathbf{v} são projeções de VAs estatisticamente independentes em subespaços ortogonais, o que garante a independência estatística dessas componentes. Uma consequência disso é que a fdp condicional de \mathbf{v} , denotada por $f(\mathbf{v})$, é dada por

$$f(\mathbf{v}) = \prod_{i=1}^4 f(v_i), \quad (\text{F.4})$$

sendo $f(v_i)$ a fdp da i -ésima componente ou coordenada de \mathbf{v} .

Considerando a transmissão de seqüências equiprováveis, as fdps condicionadas aos conjuntos, aqui denotados por $f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_i)$, são:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_1) = f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_2) &= \frac{1}{2} [\mathcal{N}(-2, \sigma^2) + \mathcal{N}(2, \sigma^2)] \mathcal{N}^3(0, 2\sigma^2); \\ f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_3) &= \frac{1}{4} \mathcal{N}^2(0, \sigma^2) [\mathcal{N}(-\sqrt{2}, \sigma^2) + \mathcal{N}(\sqrt{2}, \sigma^2)]^2. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Sendo $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ a fdp gaussiana com média m e variância σ^2 .

As regiões de decisão, \mathcal{R}_i , são estabelecidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)' \in \mathbb{R}^4 \mid |v_1| \geq L_1, |v_2| < L_1, |v_3| < L_2, |v_4| < L_2 \}; \\ \mathcal{R}_2 &= \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)' \in \mathbb{R}^4 \mid |v_1| < L_1, |v_2| \geq L_1, |v_3| < L_2, |v_4| < L_2 \}; \\ \mathcal{R}_3 &= \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)' \in \mathbb{R}^4 \mid |v_1| < L_1, |v_2| < L_1, |v_3| \geq L_2, |v_4| \geq L_2 \}. \end{aligned}$$

E a regra de decisão proposta é a seguinte: decide-se pelo i -ésimo conjunto ou classe se $\mathbf{v} \in \mathcal{R}_i$, ou solicita-se retransmissão da seqüência se $\mathbf{v} \notin \mathcal{R}_i$ para $i = \{1, 2, 3\}$.

Os limiares L_1 e L_2 são estabelecidos no sentido de minimizar a probabilidade de errar na decisão do conjunto que contém a seqüência transmitida [46]. O limiar L_1 pode ser estabelecido a partir de v_1 ou de v_2 , enquanto que o limiar L_2 pode ser determinado a partir de v_3 ou de v_4 .

A primeira componente de \mathbf{v} pode ser escrita como $v_1 = p + e_1$, sendo p uma VA discreta que assume os valores $-2, 0$ e 2 com probabilidades $1/8, 6/8$ e $1/8$, respectivamente. Nesse caso,

$$P(p = 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-L_1^2/2\sigma^2] = P(p = 4) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-(L_1 - 2)^2/2\sigma^2], \quad (\text{F.6})$$

sendo que $P(\mathcal{A})$ representa a probabilidade do evento \mathcal{A} . Resolvendo a Equação F.6 obtém-se

$$L_1 = 1 + \frac{\sigma^2 \ln 6}{2}. \quad (\text{F.7})$$

De forma similar, analisando v_3 ou v_4 chega-se a

$$L_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sigma^2 \ln 2). \quad (\text{F.8})$$

É importante observar que o vetor \mathbf{v} pode não pertencer a nenhuma das regiões acima definidas. Nesse caso, o procedimento proposto não decide o conjunto e o receptor solicita retransmissão da informação, o que contribui para reduzir a vazão do enlace.

A seguir o desempenho do procedimento proposto é avaliado. Inicialmente a avaliação é realizada de modo analítico e, posteriormente, os resultados analíticos são comparados com resultados obtidos por meio de simulação computacional usando a técnica de Monte Carlo.

F.1.2 Desempenho do Esquema Proposto

A obtenção da probabilidade de erro de bit ($P(e)$), pode ser facilitada considerando a resposta do esquema proposto diante da análise do vetor observado. Três situações podem ocorrer. Na primeira delas admite-se que o procedimento não detecta o conjunto ou a classe da seqüência transmitida. Na segunda supõe-se que o procedimento realiza a detecção do conjunto corretamente. Por fim, na terceira situação, admite-se que ocorre erro nesta detecção.

Considerando a primeira situação, hipótese denotada por \mathcal{H}_1 , o esquema de recepção não detecta a seqüência transmitida e uma nova transmissão é solicitada. Admitindo que a atual seqüência é descartada esse evento não contribui para a probabilidade de erro, ele tem uma implicação direta na vazão do enlace. Para a segunda e terceira situações, denotadas por \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_3 , respectivamente, o receptor detecta a seqüência de símbolos transmitida. Esses eventos podem, portanto, contribuir para a probabilidade de erro do enlace. Certamente, ocorrendo \mathcal{H}_2 a decisão dos símbolos transmitidos é realizada em condições bem mais favoráveis do que admitindo a ocorrência de \mathcal{H}_3 , pois, para o primeiro caso, uma porção considerável da energia do ruído é removida sem distorcer a informação transmitida, o que não se verifica para o segundo caso, situação em que se degrada severamente o vetor a ser processado pelo decisor.

Diante do exposto acima e considerando que as hipóteses \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_3 são mutuamente excludentes, a probabilidade de erro do esquema de recepção pode ser expressa por

$$P(e) = P(e|\mathcal{H}_2)P(\mathcal{H}_2) + P(e|\mathcal{H}_3)P(\mathcal{H}_3), \quad (\text{F.9})$$

em que $P(e|\mathcal{H}_i)$ representa a probabilidade de erro de bit condicionada à hipótese \mathcal{H}_i .

A seguir as probabilidades de erro condicionais do lado direito da Equação F.9 são determinadas. É importante notar que, diante do discutido acima, pode-se admitir que a expressão da probabilidade de erro é dominada por $P(e|\mathcal{H}_3)P(\mathcal{H}_3)$ e, no afã de simplificar sua expressão final, a probabilidade de erro condicional referente ao primeiro termo do lado direito da Equação F.9 será obtida de forma aproximada.

Utilizando o teorema da probabilidade total [47], é possível expressar $P(e|\mathcal{H}_2)$ da seguinte maneira

$$P(e|\mathcal{H}_2) = \sum_{i=1}^3 P(e|\mathcal{H}_2, \mathbf{s} \in \mathcal{C}_i)P(\mathbf{s} \in \mathcal{C}_i), \quad (\text{F.10})$$

em que $P(e|\mathcal{H}_2, \mathbf{s} \in \mathcal{C}_i)$ representa a probabilidade de erro de bit admitindo que o conjunto \mathcal{C}_i foi detectado corretamente.

Se $\mathbf{s} \in \mathcal{C}_1$ e a hipótese \mathcal{H}_2 for verdadeira, o vetor na saída do procedimento de remoção de ruído, \mathbf{v}^d (veja Figura F.2), fica dado por $\mathbf{v}^d = (v_1^d, v_2^d, v_3^d, v_4^d) = (2r + e_1, 0, 0, 0)'$. Portanto, o problema de detectar o bloco de símbolos transmitidos é o de estimar r a partir de v_1^d , que tem fdp dada por

$$f(v_1^d) = \frac{1}{2} [\mathcal{N}(-2, \sigma^2) + \mathcal{N}(2, \sigma^2)]. \quad (\text{F.11})$$

O limiar de decisão nesse caso é zero e a probabilidade de erro de bit condicionada $P(e|\mathcal{H}_2, \mathbf{s} \in \mathcal{C}_1)$ fica dada por

$$P(e|\mathcal{H}_2, \mathbf{s} \in \mathcal{C}_1) = 4Q\left(\frac{2}{\sigma}\right), \quad (\text{F.12})$$

sendo $Q(\cdot)$ conhecida como a função Q definida, por exemplo, em [3] por

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) dz. \quad (\text{F.13})$$

Analogamente,

$$P(e|\mathcal{H}_2, \mathbf{s} \in \mathcal{C}_2) = 4Q\left(\frac{2}{\sigma}\right). \quad (\text{F.14})$$

Empregando o mesmo raciocínio para as seqüências que pertencem ao conjunto \mathcal{C}_3 e, admitindo que a hipótese \mathcal{H}_2 é verdadeira, o vetor na saída do procedimento de remoção de ruído, \mathbf{v}^d (veja Figura F.2), fica dado por $\mathbf{v}^d = (0, 0, \sqrt{2}r + e_3, \sqrt{2}s + e_4)'$. O problema de detectar o bloco de símbolos transmitidos é o de estimar r e s , algo que pode ser obtido com probabilidade de erro que atende a seguinte inequação

$$P(e|\mathcal{H}_2, \mathbf{s} \in \mathcal{C}_3) \geq 4Q^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right). \quad (\text{F.15})$$

Denotando a probabilidade de detectar um dos conjuntos por P_D ³ e considerando as Equações F.10, F.12, F.14 e F.15, o primeiro termo do lado direito da Equação F.9 fica aproximado por

$$2P_D \left[Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) + Q^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) \right]. \quad (\text{F.16})$$

³ P_D representa a probabilidade do evento $\mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3$. No entanto, havendo sido detectado um conjunto, a probabilidade de que isso tenha sido efetuado com correção é bem maior do que com erro, ou seja $P(\mathcal{H}_2) \gg P(\mathcal{H}_3)$ e $P_D \approx P(\mathcal{H}_2)$. Essa aproximação torna-se cada vez melhor a medida que se aumenta a RSR.

Para obter uma expressão para o segundo termo do lado direito da Equação F.9 considere a seguinte definição

$$P_{C_i} = \int_{\mathcal{R}_i} f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_i^c) d\mathbf{v}, \quad \text{para } i \in \{1, 2, 3\}, \quad (\text{F.17})$$

em que \mathcal{C}_i^c representa o conjunto formado por todas as seqüências que não pertencem ao conjunto \mathcal{C}_i . As probabilidades P_{C_i} são aqui denominadas de probabilidades condicionais de detecção errada. Elas representam a probabilidade de que uma determinada hipótese seja validada quando, de fato, ela é falsa.

Considerando as definições das probabilidades condicionais de detecção errada e o teorema da probabilidade total a probabilidade do evento \mathcal{H}_3 , $P(\mathcal{H}_3)$, é expressa por

$$P(\mathcal{H}_3) = \sum_{i=1}^3 P_{C_i} P(\mathbf{s} \notin \mathcal{C}_i). \quad (\text{F.18})$$

Para determinar as $\{P_{C_i}\}$ é preciso obter as fdps condicionais $f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_i^c)$, que podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_1^c) &= f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_2)P(\mathbf{s} \in \mathcal{C}_2|\mathbf{s} \notin \mathcal{C}_1) + f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_3)P(\mathbf{s} \in \mathcal{C}_3|\mathbf{s} \notin \mathcal{C}_1); \\ f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_2^c) &= f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_1)P(\mathbf{s} \in \mathcal{C}_1|\mathbf{s} \notin \mathcal{C}_2) + f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_3)P(\mathbf{s} \in \mathcal{C}_3|\mathbf{s} \notin \mathcal{C}_2); \\ f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_3^c) &= f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_1)P(\mathbf{s} \in \mathcal{C}_1|\mathbf{s} \notin \mathcal{C}_3) + f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_2)P(\mathbf{s} \in \mathcal{C}_2|\mathbf{s} \notin \mathcal{C}_3). \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

Considerando a transmissão de seqüências equiprováveis tem-se:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_1^c) &= \frac{1}{3}f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_2) + \frac{2}{3}f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_3); \\ f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_2^c) &= \frac{1}{3}f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_1) + \frac{2}{3}f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_3); \\ f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_3^c) &= \frac{1}{2}f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_1) + \frac{1}{2}f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_2). \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Devido à independência estatística condicional das componentes de \mathbf{v} tem-se

$$f(\mathbf{v}|\mathcal{C}_i) = \prod_{i=1}^4 f(v_i|\mathcal{C}_i). \quad (\text{F.21})$$

Substituindo a Equação F.21 na Equação F.20 e o resultado na Equação F.17 tem-se:

$$\begin{aligned} P_{C_1} &= \frac{1}{3} \prod_{i=1}^4 A_1^i + \frac{2}{3} \prod_{i=1}^4 A_2^i; \\ P_{C_2} &= P_{C_1}; \\ P_{C_3} &= \prod_{i=1}^4 B_i, \end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
A_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|v_1| \geq L_1} e^{-v_1^2/2\sigma^2} dv_1; \\
A_1^2 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|v_2| < L_1} \left(e^{-\frac{(v_2-2)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(v_2+2)^2}{2\sigma^2}} \right) dv_2; \\
A_1^3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|v_3| < L_2} e^{-v_3^2/2\sigma^2} dv_3; \\
A_1^4 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|v_4| < L_2} e^{-v_4^2/2\sigma^2} dv_4; \\
A_2^1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|v_1| \geq L_1} e^{-v_1^2/2\sigma^2} dv_1; \\
A_2^2 &= A_1^2; \\
A_2^3 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|v_3| < L_2} \left(e^{-\frac{(v_3-\sqrt{2})^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(v_3+\sqrt{2})^2}{2\sigma^2}} \right) dv_3; \\
A_2^4 &= A_1^4; \\
B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|v_1| < L_1} e^{-v_1^2/2\sigma^2} dv_1; \\
B_2 &= A_1^2; \\
B_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|v_3| > L_2} e^{-v_3^2/2\sigma^2} dv_3; \\
B_4 &= B_3.
\end{aligned} \tag{F.22}$$

Considerando as Equações F.20 e F.21, as probabilidades apresentadas na Equação F.17 ficam dadas por:

$$\begin{aligned}
P_{C_1} &= \left\{ \left[Q\left(\frac{2-L_1}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{2+L_1}{\sigma}\right) \right] \left[1 - 2Q\left(\frac{L_2}{\sigma}\right) \right]^2 + \right. \\
&\quad \left. 2 \left[Q\left(\frac{\sqrt{2}-L_2}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\sqrt{2}+L_2}{\sigma}\right) \right]^2 \left[1 - 2Q\left(\frac{L_1}{\sigma}\right) \right] \right\} \frac{2}{3} Q\left(\frac{L_1}{\sigma}\right);
\end{aligned} \tag{F.23}$$

$$P_{C_3} = 4 \left[Q\left(\frac{2-L_1}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{2+L_1}{\sigma}\right) \right] Q^2\left(\frac{L_2}{\sigma}\right) \left[1 - 2Q\left(\frac{L_1}{\sigma}\right) \right]. \tag{F.24}$$

Como

$$Q\left(\frac{2-L_1}{\sigma}\right) \gg Q\left(\frac{2+L_1}{\sigma}\right) \tag{F.25}$$

e

$$Q\left(\frac{\sqrt{2}-L_2}{\sigma}\right) \gg Q\left(\frac{\sqrt{2}+L_2}{\sigma}\right), \tag{F.26}$$

as Equações F.23 e F.24 podem ser aproximadas pelas expressões:

$$\begin{aligned}
P_{C_1} &= \frac{1}{3} \left\{ 2Q\left(\frac{L_1}{\sigma}\right) Q\left(\frac{2-L_1}{\sigma}\right) \left[1 - 2Q\left(\frac{L_2}{\sigma}\right) \right]^2 + 4Q\left(\frac{L_1}{\sigma}\right) Q^2\left(\frac{\sqrt{2}-L_2}{\sigma}\right) \left[1 - 2Q\left(\frac{L_1}{\sigma}\right) \right] \right\}; \\
P_{C_3} &= 4Q\left(\frac{2-L_1}{\sigma}\right) Q^2\left(\frac{L_2}{\sigma}\right) \left[1 - 2Q\left(\frac{L_1}{\sigma}\right) \right].
\end{aligned} \tag{F.27}$$

Analisando a Tabela F.1, observa-se que as seqüências pertencentes a conjuntos diferentes possuem dois símbolos distintos. Portanto, tem-se que $P(e|\mathcal{H}_3) = 1/2$, sendo assim, a probabilidade de erro do esquema proposto fica dada por

$$P(e) = \frac{3}{4}P_{C_1} + \frac{1}{4}P_{C_3} + 2P_D \left[Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) + Q^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) \right]. \quad (\text{F.28})$$

A expressão para P_D será estabelecida a seguir na discussão da vazão.

Outro importante índice de desempenho para o esquema proposto é a vazão, V . Este parâmetro está relacionado com a P_D por

$$V = RP_D, \quad (\text{F.29})$$

sendo R a taxa do código empregado, que no caso em questão é $3/4$.

Utilizando o teorema da probabilidade total, P_D pode ser expressa por

$$P_D = \sum_{i=1}^3 P_{D_i} P(s \in C_i), \quad (\text{F.30})$$

com P_{D_i} sendo a probabilidade de detecção condicionada ao conjunto C_i , que pode ser obtida por

$$P_{D_i} = \int_{\mathcal{R}_i} f(v|C_i) dv. \quad (\text{F.31})$$

A seguir essas probabilidades condicionais são determinadas.

Em decorrência da Equação F.21

$$P_{D_j} = \prod_{i=1}^4 P_{D_j}^i, \quad (\text{F.32})$$

sendo:

$$\begin{aligned} P_{D_1}^1 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{|v_1| \geq L_1} \left(e^{-\frac{(v_1-2)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(v_1+2)^2}{2\sigma^2}} \right) dv_1; \\ P_{D_1}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{|v_2| < L_1} e^{-v_2^2/2\sigma^2} dv_2; \\ P_{D_1}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{|v_3| < L_2} e^{-v_3^2/2\sigma^2} dv_3; \\ P_{D_1}^4 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{|v_4| < L_2} e^{-v_4^2/2\sigma^2} dv_4. \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

De forma similar tem-se que:

$$\begin{aligned}
P_{D_3}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{|v_1| < L_1} e^{-v_1^2/2\sigma^2} dv_1; \\
P_{D_3}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{|v_2| < L_1} e^{-v_2^2/2\sigma^2} dv_2; \\
P_{D_3}^3 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{|v_3| \geq L_2} \left(e^{-\frac{(v_3-\sqrt{2})^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(v_3+\sqrt{2})^2}{2\sigma^2}} \right) dv_3, \\
P_{D_3}^4 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{|v_4| \geq L_2} \left(e^{-\frac{(v_4-\sqrt{2})^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(v_4+\sqrt{2})^2}{2\sigma^2}} \right) dv_4.
\end{aligned} \tag{F.34}$$

Além disso, pode-se mostrar que $P_{D_2}^i = P_{D_1}^i$, para $i \in \{3, 4\}$, que $P_{D_2}^1 = P_{D_1}^2$ e que $P_{D_2}^2 = P_{D_1}^1$.

Considerando a relação entre $P_{D_1}^i$ e $P_{D_2}^i$, as Equações F.25, F.26, F.32, F.33 e F.34, a probabilidade de detecção fica dada por

$$P_D = \frac{1}{2} \left\{ Q\left(\frac{L_1-2}{\sigma}\right) \left[1 - 2Q\left(\frac{L_1}{\sigma}\right)\right] \left[1 - 2Q\left(\frac{L_2}{\sigma}\right)\right]^2 + \left[1 - 2Q\left(\frac{L_1}{\sigma}\right)\right]^2 Q^2\left(\frac{L_1}{\sigma}\right) \right\} \tag{F.35}$$

Substituindo a Equação F.35 na Equação F.29, obtém-se a expressão para a vazão do esquema proposto.

Na seção de resultados numéricos mostra-se que um dos principais problemas da técnica proposta é a baixa vazão. Com intuito de melhorar as características de desempenho propôs-se algumas modificações no procedimento discutido até este ponto. Essas modificações dificultam a avaliação analítica do procedimento resultante, em razão disso, o seu desempenho será aqui avaliado mediante simulação computacional.

F.2 Detecção Parcial e Remoção de Ruído: Modificações nos Limiares e nas Regiões de Decisão

Considerando a transmissão de seqüências equiprováveis e canal AWGN, o receptor MAP decide em favor da seqüência que está mais próxima do vetor de observação. Matematicamente isto pode ser expresso da seguinte maneira. Decide-se por s_i caso

$$d_i \leq d_j, \tag{F.36}$$

sendo $d_i \triangleq \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_i\|$ a distância euclidiana entre \mathbf{y} e \mathbf{s}_i .

Em vez de adotar o procedimento MAP considere o conjunto S_K que, por definição, contém K elementos, os quais são as seqüências que se caracterizam por apresentar as

menores distâncias euclidianas em relação ao vetor de observação. Ou seja, o conjunto S_K contém as K seqüências que estão mais próximas de \mathbf{y} . Um aspecto importante relacionado com esse conjunto é que, à medida que K , aumenta a probabilidade de que esse conjunto contenha a seqüência transmitida também aumenta. No entanto, vale mencionar, que mesmo para valores pequenos de K essa probabilidade deve ser considerável, devido à definição dos elementos do referido conjunto.

O conjunto S_K pode assumir uma dentre

$$\binom{8}{K} = \frac{8!}{K!(8-K)!} \quad (\text{F.37})$$

possibilidades, que é a quantidade de formas de selecionar, sem reposição, K seqüências dentre oito. No entanto, devido à lei de geração do conjunto S_K nem todos os eventos são igualmente prováveis. Algumas podem ser até impossíveis. Nesse contexto é importante considerar que os elementos de S_K são as seqüências que estão mais próximas do vetor de observação e, portanto, essas seqüências devem estar próximas umas das outras.

Para respaldar a afirmativa do último parágrafo, considere o gráfico mostrado na Figura F.4, no qual são representados quatro seqüências de dois símbolos (b_1 e b_2 , indicados nos eixos horizontal e vertical da figura) e um vetor hipotético de observação \mathbf{y} .

Admitindo que o vetor de observação está no primeiro quadrante, o receptor MAP decide em favor de \mathbf{c}_1 . Em particular, se ele está sob a reta que passa pelos pontos \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_4 , sua distância euclidiana em relação ao ponto \mathbf{c}_2 é igual a sua distância em relação ao ponto \mathbf{c}_3 , ou seja, $d(\mathbf{c}_2, \mathbf{y}) = d(\mathbf{c}_3, \mathbf{y}) = d$. Pode-se mostrar, empregando desigualdade triangular, que $d \leq d(\mathbf{c}_4, \mathbf{y})$. Portanto, a segunda seqüência mais próxima do vetor de observação é \mathbf{c}_2 ou \mathbf{c}_3 , caso \mathbf{y} esteja abaixo ou acima da referida reta, respectivamente.

Como resultado, se \mathbf{y} está no primeiro quadrante a seqüência mais próxima dele é \mathbf{c}_1 e a segunda não pode ser \mathbf{c}_4 , que é a seqüência que apresenta a maior distância euclidiana de \mathbf{c}_1 . Apesar dessa conclusão ter surgido da análise de um gráfico bidimensional, considerando todas as possíveis seqüências, independentemente de sua paridade, o apelo geométrico pode ser extrapolado para espaços de dimensões maiores. Em suma, se \mathbf{s}_i é a seqüência mais próxima do vetor de observação, então a possibilidade que a seqüência que está mais distante de \mathbf{s}_i seja a segunda mais próxima do vetor de observação é remota ou talvez isso seja impossível.

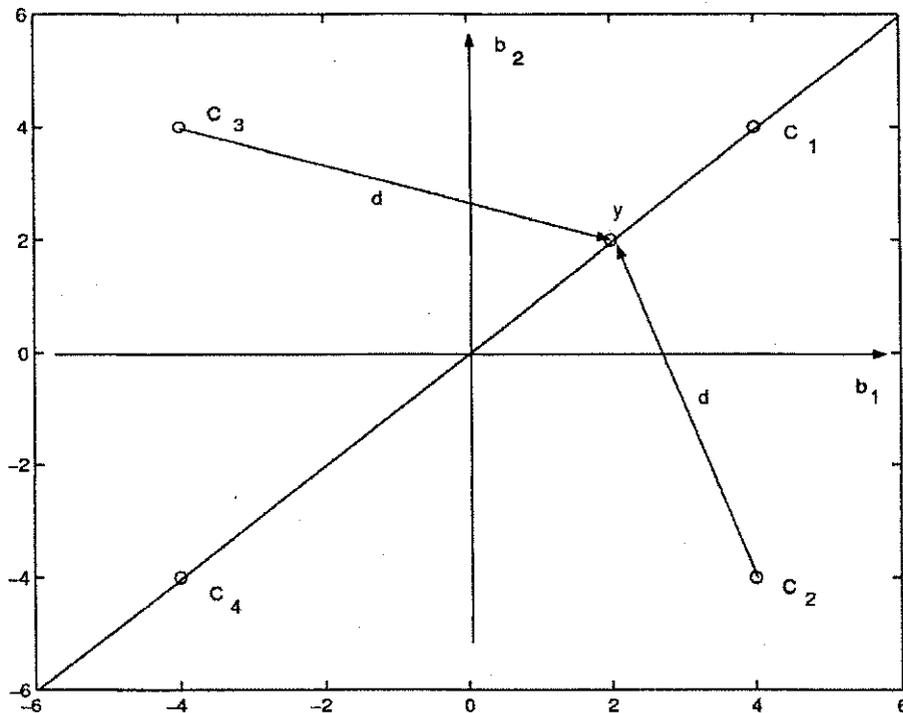


Figura F.3: Gráfico que ilustra um possível vetor de observação y e as quatro possíveis seqüências transmitidas.

O conjunto S_2 pode assumir uma dentre vinte e oito possibilidades. Dessas, vinte e quatro são formadas por pares de seqüências que possuem dois símbolos iguais, ou seja possuem distância euclidiana igual a oito, as quatro possibilidades restantes são compostas pelas seqüências que apresentam todos os bits distintos, ou seja apresentam distâncias euclidianas entre si igual a dezesseis. Considerando a lei de formação do referido conjunto, é improvável que ele assumira uma dentre as quatro últimas possibilidades.

Para consolidar este ponto considere S_3 , cujos elementos são escolhidos dentre cinquenta e seis possibilidades. Dessas, trinta e duas são formadas por seqüências que possuem um bit em comum e as vinte e quatro restantes são constituídos de seqüências que não apresentam bits comuns. É importante verificar que essas últimas contém seqüências que estão mais afastadas (dispersas) e a probabilidade de que S_3 assumira uma dessas possibilidades é pequena.

A propriedade de que o agrupamento dos elementos que pertencem a S_K em torno de um ponto (a observação) restringe a quantidade de maneiras que o conjunto pode assumir foi derivado de forma intuitiva e seria interessante corroborá-la com uma

demonstração algébrica. O autor pretende abordar esse assunto posteriormente.

Considerando como válida a propriedade mencionada acima, é possível direcionar o procedimento de detecção da seqüência e a remoção de ruído no domínio da transformada.

Por exemplo, admitindo que todas as seqüências que pertencem ao conjunto S_K possuem pelo menos um símbolo em comum, certamente a detecção desse símbolo pode ser realizada com grande probabilidade de acerto. Feito isso, a representação no domínio da transformada de Haar da seqüência resultante apresenta redução do ruído em suas componentes. Além disso, pode-se eliminar uma ou mais componentes no domínio da transformada, conforme será explicado adiante.

O processamento combinado nos domínios do tempo e da transformada, juntamente com a definição do conjunto S_K pode, na concepção do autor, representar uma valiosa abordagem para o problema de detecção em presença de ruído aditivo gaussiano branco. A seguir o procedimento discutido será detalhado.

Se as seqüências que formam S_K possuem bits comuns (o que é muito provável pelo menos para $K = 2$ e $K = 3$, face ao discutido), as chances de que estes símbolos sejam iguais ao transmitido são boas. Pois, além do referido bit fazer parte da seqüência detectada pelo critério MAP, ele pertence a outras seqüências que possuem boas métricas de distância.

No que se refere à representação dos elementos do conjunto S_K do domínio da transformada tem-se o seguinte: se todas essas seqüências pertencerem ao conjunto C_3 , as duas primeiras componentes de suas transformadas são nulas e essas componentes do vetor de observação devem conter apenas ruído. Se elas pertencem aos conjuntos C_1 e C_3 ou aos conjuntos C_2 e C_3 suas representações no domínio da transformada possuem uma componente comum nula. Se as referidas seqüências pertencem aos conjuntos C_1 e C_2 , as duas últimas componentes são nulas. Por fim, admitindo que $K = 2$ e que as seqüências pertencem ao conjunto C_1 ou ao conjunto C_2 , três componentes são nulas. Na Tabela F.2 a(s) posição(ões) dentro da seqüência da(s) componente(s) nulas é/são explicitadas.

As componentes são todas distintas apenas quando o conjunto S_K contém seqüências que pertencem a todos os conjuntos C_i , o que é improvável em razão do que foi discutido anteriormente. Portanto, caso a seqüência transmitida pertença ao conjunto S_K é possível remover parte do ruído sem degradar a decisão posterior.

O procedimento proposto nesta seção compreende a geração do conjunto S_K , para

Tabela F.2: Componentes nulas dos elementos do conjunto S_K no domínio da transformada de Haar.

Quando os Elementos de S_K pertencem a	as componentes nulas são
C_1	as três últimas
C_1 e C_2	as duas últimas
C_1 e C_3	a segunda
C_2 e C_3	a primeira
C_2	a primeira, a terceira e a quarta
C_3	as duas primeiras

K escolhido previamente, detecção no domínio do tempo de bits comuns às seqüências que pertencem ao conjunto S_K e a eliminação de componentes comuns às representações no domínio da transformada das seqüências que pertencem a S_K . Após a realização desses procedimentos o conjunto que contém a seqüência transmitida é detectado.

A matriz de covariância de \mathbf{y} é dada por $\sigma^2 \mathbf{I}$, denotando por $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4)'$ a diagonal dessa matriz e realizando a detecção de bits comuns, com elevada probabilidade tem-se que $\Lambda_i = 0$, com i denotando as posições dos bits detectados e $\Lambda_j = \sigma^2$ para $j \neq i$. Os valores assumidos por Λ após o processamento admitem, portanto, que os bits foram detectados corretamente.

O vetor de variâncias no domínio da transformada de Haar, $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \tilde{\Lambda}_3, \tilde{\Lambda}_4)'$, é dado por

$$\tilde{\Lambda} = \mathbf{M}\Lambda, \quad (\text{F.38})$$

sendo

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.39})$$

Considerando a regra de formação de S_K uma, duas ou três componentes da transformada de Haar de seus elementos podem ser zerados, conforme indicado na Tabela F.2. Realizado esse procedimento tem-se que $\tilde{\Lambda}_j = 0$, com j denotando os índices das componentes que se admite conter apenas ruído. Além disso, os limiares de decisão

ficam dados por:

$$\begin{aligned}
L_1 &= 1 + \tilde{\Lambda}_1 \ln 6/2; \\
L_2 &= 1 + \tilde{\Lambda}_2 \ln 6/2; \\
L_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \tilde{\Lambda}_3 \ln 2 \right); \\
L_4 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \tilde{\Lambda}_4 \ln 2 \right), \tag{F.40}
\end{aligned}$$

e as novas regiões de decisão ficam dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)' \in \mathbb{R}^4 \mid |v_1| \geq L_1, |v_2| < L_2, |v_3| < L_3, |v_4| < L_4 \}; \\
\mathcal{R}_2 &= \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)' \in \mathbb{R}^4 \mid |v_1| < L_1, |v_2| \geq L_2, |v_3| < L_3, |v_4| < L_4 \}; \\
\mathcal{R}_3 &= \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)' \in \mathbb{R}^4 \mid |v_1| < L_1, |v_2| < L_2, |v_3| \geq L_3, |v_4| \geq L_4 \}
\end{aligned}$$

sendo que se decide pelo i -ésimo conjunto se $\mathbf{v} \in \mathcal{R}_i$ ou solicita-se retransmissão se $\mathbf{v} \notin \mathcal{R}_i$.

Mesmo após o procedimento discutido acima é possível que alguns blocos que deveriam ser aceitos sejam descartados e que alguns conjuntos sejam estimados erroneamente, comprometendo a vazão e o desempenho do esquema proposto. Resultados de simulação indicam que a vazão ainda é baixa. Diante desse fato, propôs-se um procedimento adicional que é discutido a seguir.

Seja a VA $Z(n)$, n indicando o bloco transmitido, cuja definição é

$$Z(n) = D_1(n)/D_2(n), \tag{F.41}$$

em que $D_1(n)$ e $D_2(n)$ denotam as menores distâncias euclidianas entre o vetor de observação e as possíveis seqüências transmitidas medidas no n -ésimo bloco transmitido ($D_1(n) \leq D_2(n)$). Seja M_1 a média da VA $Z(n)$ dado que $\mathbf{v} \in \mathcal{R}_i$ para algum i e M_2 a média da VA $Z(n)$ dado que $\mathbf{v} \notin \mathcal{R}_i$ para todos os possíveis i .

Nas simulações realizadas considerando o procedimento de detecção de bits comuns e a remoção de ruído no domínio da transformada, verificou-se que quando o procedimento consegue estimar corretamente o conjunto, $Z(n)$ assume valores pequenos. Como isso ocorre quando $\mathbf{v} \in \mathcal{R}_i$ então M_1 também deve assumir um valor pequeno. Por outro lado, quando o procedimento não detecta o conjunto ou quando ele é detectado erroneamente $Z(n)$ assume valores bem maiores e, como isso ocorre geralmente quando $\mathbf{v} \notin \mathcal{R}_i$, M_2 deve assumir um valor bem maior do que M_1 .

No entanto, há situações em que $Z(n)$ assume valores baixos e mesmo assim não se consegue detectar o conjunto que contém a seqüência transmitida. Para tentar capturar essas situações bem como aquelas em que o conjunto é detectado erroneamente, propõe-se o seguinte algoritmo. Escolhe a seqüência MAP se $Z(n) < \text{Th}$, sendo Th função de M_1 e de M_2 .

Nas simulações realizadas e cujos resultados são apresentados na próxima seção foi considerado o seguinte limiar

$$\text{Th} = \frac{M_1 + M_2}{2}. \quad (\text{F.42})$$

Limiars maiores, tendendo para M_2 permitem aumentar a vazão porém com degradação de desempenho. Limiars menores, tendendo para M_1 , permitem melhorar o desempenho com o sacrifício da vazão.

As médias estatísticas M_1 e M_2 não são conhecidas, mas podem ser estimadas recursivamente usando médias temporais (admitindo que $Z(\cdot)$ é um processo ergódico), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{se } \mathbf{v} \in \mathcal{R}_i \quad \hat{M}_1(l+1) &= \frac{l\hat{M}_1(l) + Z(n)}{l+1} \text{ e } l \leftarrow l+1 \\ \text{se } \mathbf{v} \notin \mathcal{R}_i \quad \hat{M}_2(m+1) &= \frac{m\hat{M}_2(m) + Z(n)}{m+1} \text{ e } m \leftarrow m+1 \end{aligned}$$

sendo que $n = l + m$.

Na próxima seção, resultados numéricos referentes à vazão e à probabilidade de erro do esquema de recepção originalmente proposto são obtidos a partir das expressões desenvolvidas nesta seção e serão confrontados com resultados obtidos a partir de simulação computacional. Além disso, são apresentados resultados de simulação para o esquema de recepção que incorpora os procedimentos aqui discutidos.

F.3 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados resultados numéricos para as técnicas propostas e para alguns esquemas convencionais que são incluídos para fins de comparação. No total quatro esquemas são avaliados. Dois propostos: denotados por Proposto I (esquema originalmente proposto) e Proposto II (esquema proposto que inclui as modificações discutidas na última seção) e dois convencionais: esquemas de recepção que empregam os códigos de paridade(4,3) e de Hamming(7,4).

Em todos os esquemas avaliados empregou-se detecção abrupta (os elementos das palavras-código são detectados isoladamente) e, em particular, para os esquemas convencionais os códigos são utilizados para detectar erros. Como é bem conhecido, o código de Hamming(7,4) possui capacidade de detectar dois erros por bloco de sete bits e o código de paridade(4,3) o de detectar um erro por bloco de quatro bits. Em ambos os casos, tendo sido detectado um evento erro é solicitada retransmissão do corrente bloco de informação, cuja estratégia não é discutida neste trabalho. Essa abordagem permite fazer uma comparação justa entre os esquemas propostos e os convencionais, ao menos no que se refere ao tratamento das retransmissões.

Para o esquema Proposto I são incluídos resultados de simulação computacional e analíticos, os primeiros foram obtidos por simulação de Monte Carlo e os seguintes a partir das deduções apresentadas na seção anterior.

Para os outros esquemas de recepção aqui investigados são obtidas curvas de taxa de erro de bit e de vazão por meio de simulação computacional, considerando a transmissão de 10^9 blocos estatisticamente independentes. Os resultados são apresentados nas Figuras F.4, F.5, F.6 e F.7. A primeira e a terceira contêm curvas de probabilidade de erro de bit, ao passo que a segunda e a quarta contêm curvas de vazão, ambas em função da RSR expressa em termos da energia do bit (E_b) e da densidade espectral de potência do ruído (N_0).

Vê-se na Figura F.4 que os resultados analíticos e de simulação computacional estão bem ajustados, percebendo-se apenas uma ligeira polarização para baixos valores de RSR, que certamente decorre das aproximações realizadas na avaliação analítica. Apesar dessas pequenas diferenças, é razoável aceitar que as deduções apresentadas na seção anterior foram corroboradas pela simulação.

Verifica-se também que o procedimento proposto possui um desempenho melhor do que o esquema de recepção que emprega o código de paridade. Por exemplo, o procedimento Proposto I obtém uma BER de 10^{-3} com um ganho em torno de 1,2 dB em relação ao esquema que emprega o código de paridade. O ganho é reduzido com o aumento da RSR mas, mantém-se acima de 0,5 dB para a faixa de RSR apresentada nesta figura. Por outro lado, no que se refere à comparação com o esquema de recepção que emprega o código de Hamming(7,4), observa-se claramente uma degradação de desempenho, principalmente à medida que aumenta-se a RSR.

Os resultados de vazão apresentados na Figura F.5, referentes à simulação compu-

tacional foram obtidos por frequência relativa da seguinte maneira

$$V = R \frac{n}{N}, \quad (\text{F.43})$$

sendo R a taxa do código, n a quantidade de blocos nos quais o conjunto que contém a seqüência transmitida é detectado ($\mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3$) e N a quantidade total de blocos transmitidos. Para o esquema proposto R é igual a $3/4$ e para os esquemas que empregam código de paridade e Hamming(7,4), os valores para a taxa são $3/4$ e $4/7$, respectivamente.

Como pode ser observado na Figura F.5, os resultados analíticos obtidos para o esquema proposto foram validados pelos resultados de simulação. Além disso, verifica-se que o esquema Proposto I apresenta uma característica de vazão intermediária entre uma vazão melhor, obtida pelo esquema que emprega o código de paridade, e uma pior, obtida pelo esquema que emprega o código de Hamming(7,4).

Analisando conjuntamente os resultados de probabilidade de erro da Figura F.4 com os de vazão da Figura F.5 vê-se claramente um compromisso de desempenho \times vazão.

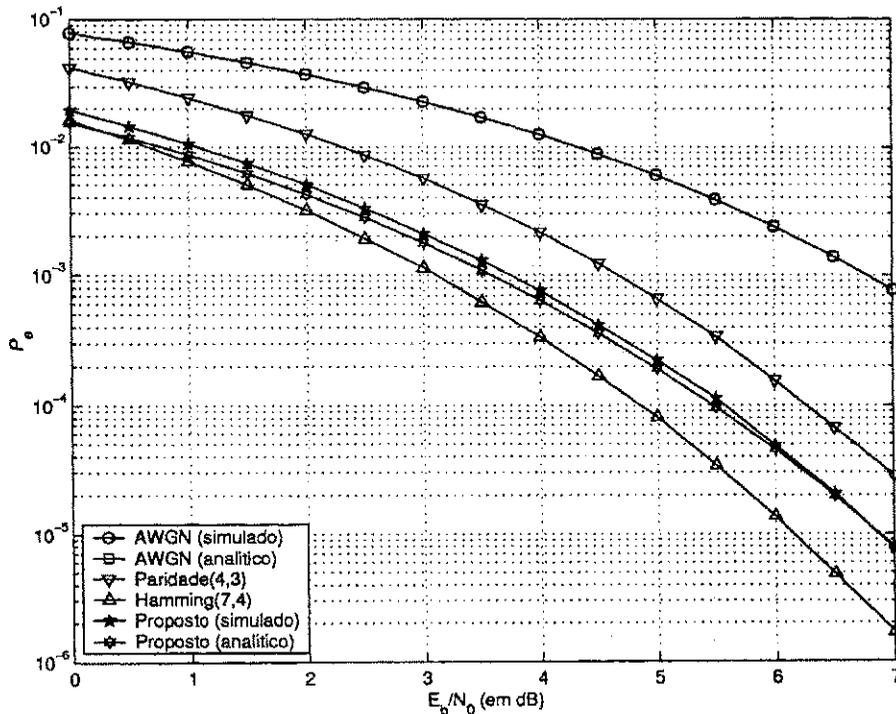


Figura F.4: BER $\times E_b/N_0$ para o esquema Proposto I (análise e simulação) e os esquemas convencionais (simulação).

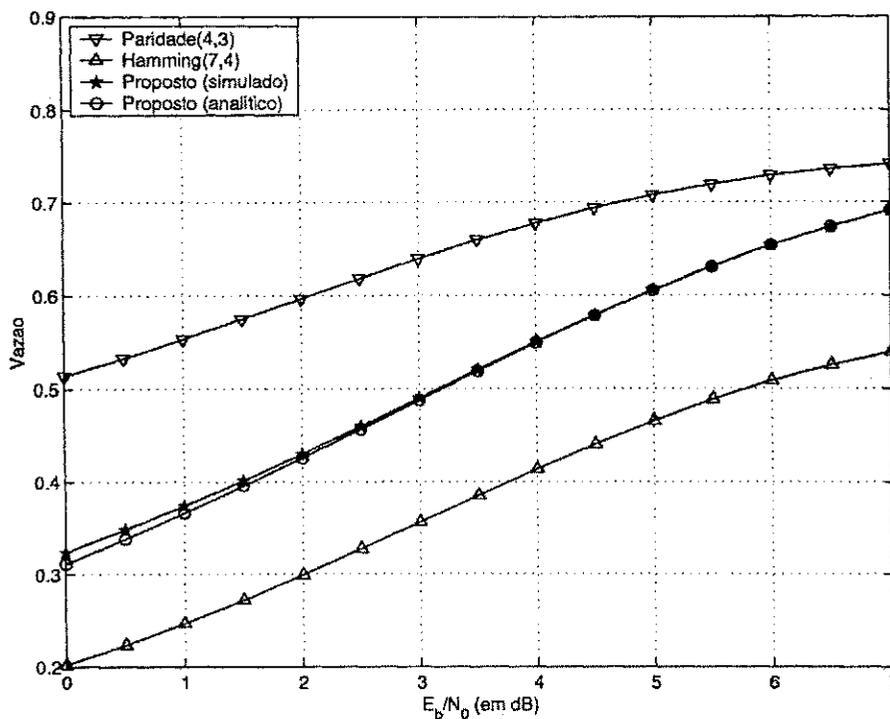


Figura F.5: Vazão $\times E_b/N_0$ para o esquema Proposto I (análise e simulação) e os esquemas convencionais (simulação).

Na Figura F.6 verifica-se que o esquema Proposto II apresenta melhor desempenho do que os demais esquemas avaliados⁴. Para uma RSR de 5 dB, o esquema Proposto II apresenta uma BER de aproximadamente 10^{-5} , desempenho obtido para o esquema Proposto I com uma RSR de 7 dB, e para o esquema que emprega o código de Hamming(7,4) com uma RSR de 6 dB, proporcionando um ganho de 2 e 1 dB, respectivamente. É valioso verificar que a vantagem de desempenho proporcionado pelo esquema Proposto II aumenta sensivelmente com o aumento da RSR.

Além da melhor característica de desempenho em termos da taxa de erro de bit proporcionada pelo procedimento Proposto II, vê-se claramente na Figura F.7 que sua vazão é bem melhor do que a obtida pelo esquema de recepção que emprega o código de Hamming(7,4)⁵.

O esquema Proposto II apresenta vazão um pouco inferior a do esquema que em-

⁴Os resultados para o esquema Proposto II foram obtidos considerando $K = 3$.

⁵A vazão máxima do esquema de recepção que emprega o código de Hamming(7,4) é $7/4 \approx 57\%$, ao passo que para 7 dB o esquema proposto já obtém uma vazão em torno de 64%.

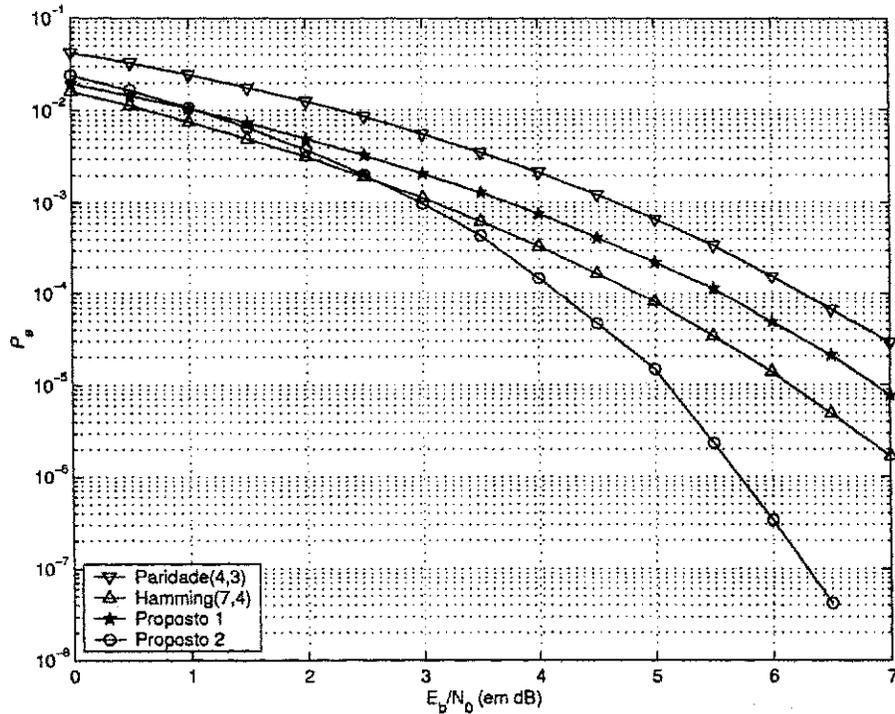


Figura F.6: BER $\times E_b/N_0$ para os esquemas propostos e convencionais (simulação).

prega o código de paridade(4,3). Já com relação ao esquema Proposto I, ele apresenta uma vazão menor a partir de 5,5 dB. No entanto, em termos de taxa de erro o esquema Proposto II permite obter uma grande vantagem em relação a esses esquemas, especialmente na faixa de valores de RSR supracitada, o que leva a afirmar que dentre os esquemas investigados o esquema Proposto II foi o que apresentou o melhor compromisso entre desempenho e vazão. Neste contexto, é importante mencionar ainda que o procedimento proposto permite trocar desempenho por vazão e vice-versa de uma forma bastante simples: variando o parâmetro T_h em direção a \hat{M}_1 ou \hat{M}_2 , conforme o requisito principal da aplicação seja redução da taxa de erro ou aumento da vazão, respectivamente.

Certamente a vantagem de desempenho proporcionada pelo esquema Proposto II e a sua simplicidade no tratamento do compromisso entre taxa de erro e vazão são obtidas com um acréscimo na complexidade computacional. Uma análise criteriosa no tocante a este tema será efetuada em trabalho subsequente.

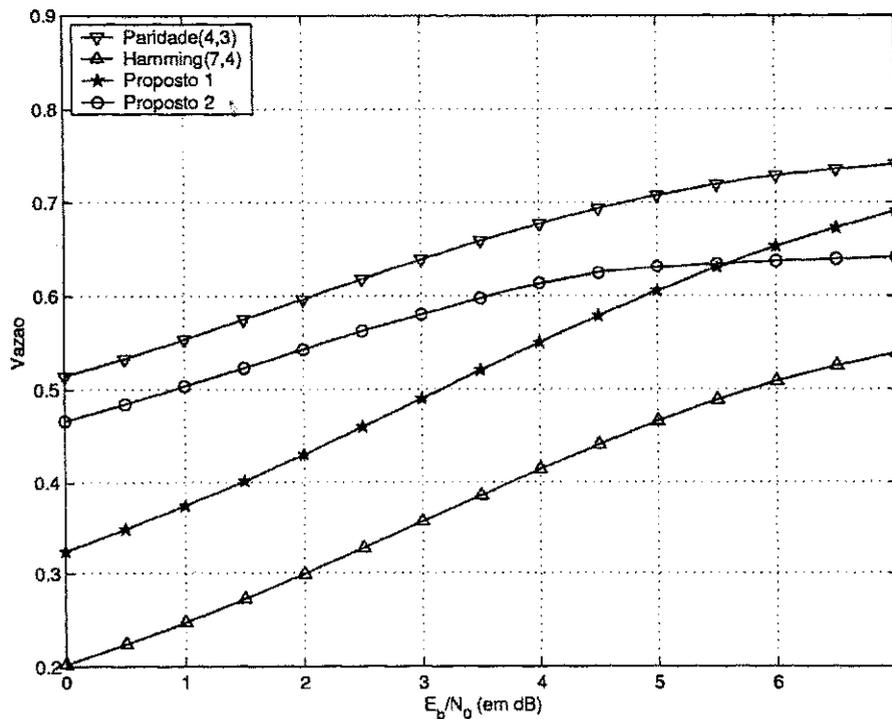


Figura F.7: Vazão $\times E_b/N_0$ para os esquemas propostos e convencionais (simulação).

F.4 Conclusão

Este trabalho apresentou dois novos procedimentos para esquemas de recepção em canais AWGN e modulação BPSK. Os esquemas propostos empregam conjuntamente o código de paridade par e a transformada de Haar para combater o efeito do ruído.

A escolha do código foi determinada pela boa concentração de energia no domínio da transformada de suas palavras-código, o que permite melhorar o desempenho do procedimento de remoção do ruído.

A probabilidade de erro de bit e a vazão do procedimento Proposto I foram avaliados analiticamente e por simulação computacional, tendo sido mostrado um bom ajuste entre esses resultados. Mostrou-se também que a probabilidade de erro de bit do esquema proposto é bem melhor do que o que emprega paridade e pior do que o esquema que emprega código de Hamming(7,4). Mostrou-se também que a melhoria de desempenho do esquema Proposto I em relação ao esquema de recepção que emprega o código de paridade(4,3) foi obtida com redução na vazão. Além disso, mostrou-se que a vazão do esquema Proposto I é bem superior do que a do esquema de recepção

que emprega o código de Hamming(7,4).

Em suma, os resultados comparativos de desempenho entre o esquema Proposto I e os esquemas de recepção aqui denominados de convencionais não permitem eleger um esquema superior. Na realidade, o esquema Proposto I apresenta um compromisso de probabilidade de erro e vazão diferente dos esquemas convencionais. Uma probabilidade de erro de bit intermediária entre o esquema de recepção que emprega o código de Hamming(7,4), que apresentou melhor desempenho, e o esquema de recepção que emprega o código de paridade(4,3), que apresentou o pior desempenho. Por outro lado, o esquema Proposto I apresenta uma vazão intermediária entre o código de paridade(4,3), que apresentou melhor vazão, e o de Hamming(7,4), que apresentou pior vazão.

Por outro lado, o esquema Proposto II apresenta nítida vantagem de desempenho em relação aos demais esquemas investigados. Em particular, com relação ao esquema de recepção que emprega o código de Hamming(7,4), o esquema Proposto II proporciona melhor desempenho em termos da taxa de erro de bit e de vazão.

É mister mencionar que as regiões de decisão e os limiares para a detecção destes conjuntos foram estabelecidos heurísticamente.

Os resultados aqui apresentados, principalmente devido à sua natureza incipiente, são animadores e motivam a escolha criteriosa de parâmetros ou procedimentos fundamentais para o desempenho da estrutura de recepção proposta. Talvez essa busca leve a procedimentos que proporcionem melhores características de desempenho do que as obtidas aqui. Os resultados aqui obtidos encorajam essa busca e validaram a idéia peremptória desse trabalho: olhar no domínio da transformada de Haar as seqüências candidatas a palavras-código e escolher aquelas que possuem maior concentração de energia, propriedade que tem reflexo direto na extração de ruído subjacente sem comprometer ou reduzir a qualidade da informação transmitida.

Além disso, pretende-se dar continuidade ao trabalho aplicando o esquema proposto para outros cenários, como por exemplo em canais sujeitos ao efeito de desvanecimento plano e para esquemas de modulação QPSK. Outro tema importante a ser considerado em investigação subsequente diz respeito à extensão da técnica para considerar blocos maiores. Por fim, pretende-se avaliar analiticamente o desempenho do esquema Proposto II.

Apêndice G

Publicações no Período

- [1] J. F. Galdino, E. L. Pinto e M. S de Alencar, Uso de *Denoising* no Processamento de Entrada de Receptores Digitais Para Canais Seletivos em Frequência. A ser submetido para a Revista de Sociedade Brasileira de Telecomunicações.
- [2] J. F. Galdino, E. L. Pinto e M. S de Alencar, A Novel Strategy for the Detection of Equalization Errors Over Time-Varying Frequency-Selective Channels. A ser submetido para a IEEE Transactions on Communications
- [3] J. F. Galdino, E. L. Pinto e M. S de Alencar, Blind MLSE-PSP Reception Employing Filtering Diversity to Detect Equalization Errors. A ser submetido para a IEEE Transactions on Communications.
- [4] J. F. Galdino, E. L. Pinto e M. S de Alencar, Desempenho do Algoritmo LMS na Identificação de Canais Variantes no Tempo e seu Emprego em Esquemas de Recepção MLSE-PSP. Aceito para publicação na Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações (SBrT), Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [5] J. F. Galdino, Pinto, E. L. and Alencar, M. S., Analytical Performance of the LMS Algorithm on the Estimation of Wide Sense Stationary Channels. IEEE Transactions on Communications (Em processo de revisão)
- [6] J. F. Galdino, Pinto, E. L. and Alencar, M. S., Use of LMS Algorithm With Optimized Step-Size Parameter on the MLSE-PSP Receivers In *IEEE International Conference on Communications (ICC'03)*.

- [7] J. F. Galdino, Pinto, E. L. and Alencar, M. S., Using Denoising at the Receiver Front-end for Frequency-Selective Channels. *IEEE Transactions on Communications* (Aceito para publicação-processo de revisão concluído)
- [8] J. F. Galdino, Pinto, E. L. and Alencar, M. S., Uso de Transformada de Haar no Combate ao Efeito do Ruído em Canais AWGN. X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica (SBMO), Recife, Pernambuco, Agosto, 2002.
- [9] W. T. A. Lopes, J. F. Galdino and M. S. Alencar., Modulation Diversity for Wireless Communications: Impact of the Channel Estimation Errors and Doppler Effect on the System Performance. Chapter in the book "Communications, Information and Network Security (Vahid Tarokh, ed.), New York, USA, 2002 (Capítulo 1).
- [10] W. T. A. Lopes, J. F. Galdino e M. S. Alencar., Diversidade em Modulação Aplicada a Canais de Comunicações Móveis. *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações (SBrT)*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Dezembro, 2002, pp. 111-122.
- [11] E. L. Pinto, J. F. Galdino, and P. H. Coelho. Desempenho dos Equalizadores PSP-LMS e EKF-CRTRL em Canais com Desvanecimento Rápido e Seletivo em Frequência. In *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Fortaleza, Ceará, Set. 2001.
- [12] J. F. Galdino and M. S. de Alencar. The Denoising Technique Applied to Frequency-Selective Channels. In *IEEE International Conference on Communications (ICC'01)*, Helsinki, Finland, June 2001.
- [13] J. F. Galdino and M. S. de Alencar. Use of Blind Equalization for Fast Frequency Selective Fading channels. In *IEEE International Conference on Communications (ICC'01)*, Helsinki, Finland, Jun. 2001.
- [14] J. F. Galdino, E. L. Pinto, and M. S. de Alencar. Avaliação Analítica do uso de *Denoising* em Receptores Digitais para Modulação BPSK e Canais AWGN. In *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Fortaleza, Ceará, Set. 2001.
- [15] J. F. Galdino, E. L. Pinto, and M. S. de Alencar. Desempenho de *Denoising* para Receptores PSP-LMS em Canais com Desvanecimento Seletivo em Frequência. *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Fortaleza, Ceará, Set. 2001.

- [16] G. A. da Silva, J. F. Galdino, and F. M. de Assis. Desempenho de Códigos Espaço-Temporais com Estimação de Canal Utilizando o Algoritmo LMS. In *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Fortaleza, Ceará, Set. 2001.
- [17] G. A da Silva J. F. Galdino and F. M. de Assis. Desempenho de Códigos Espaço-Temporais Utilizando Estimação Cega de Canal. In *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Fortaleza, Ceará, Set. 2001.
- [18] W. T. A. Lopes, J. F. Galdino, and M. S. de Alencar. Desempenho de um Sistema QPSK Rotacionado em Canais com Desvanecimento Rayleigh Sujeito a Erros de Estimação de Canal. In *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Fortaleza, Ceará, Set. 2001.
- [19] G. A. da Silva, J. F. Galdino, and F. M. de Assis. Performance of Space-Time Codes Over Selective Frequency Channel in Presence of Channel Estimation Erros. In *ICT 2001*, 2001.
- [20] J. F. Galdino and M. S de Alencar. Desempenho de Receptores MLSE Cegos em Canais Seletivos e com Desvanecimento Rápido. In *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Gramado, Rio Grande do Sul, Set. 2000.
- [21] J. F. Galdino and M. S. de Alencar. Detecção de Blocos Divergentes em Receptores MLSE Cegos Aplicados a Canais Seletivos e com Desvanecimento Rápido. In *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Gramado, Rio Grande do Sul, Set. 2000.
- [22] J. F. Galdino and E. L. Pinto. Desempenho de Receptores PSP-KF2 com Desajuste na Modelagem do Canal. In *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Gramado, Rio Grande do Sul, Set. 2000.
- [23] J. F. Galdino and E. L. Pinto. Search Algorithm for MLSE-PSP Receivers Over Frequency-Selective Fading Channels. In *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Gramado, Rio Grande do Sul, Set. 2000.
- [24] J. F. Galdino and M. S. de Alencar. Avaliação de Desempenho de Esquemas de Identificação Cega de Canais Baseados em Superamostragem. In *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Gramado, Rio Grande do Sul, Set. 2000.

Bibliografia

- [1] M. H. Meyers. "Computing the Distribution of a Random Variable via Gaussian Quadrature Rules". *Bell System Technical Journal*, vol. 61, no. 9, pp. 2245–2261, March 1982.
- [2] S. U. H. Qureshi. "Adaptive Equalization". *Proceedings of the IEEE*, vol. 73, no. 9, pp. 1349–1387, September 1985.
- [3] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, 1995.
- [4] S. Benedetto, E. Bigliere and V. Castellane. *Digital Transmission Theory*. Prentice-Hall, 1987.
- [5] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 1991.
- [6] G. K. Kaleh and R. Vallet. "Joint Parameter Estimation and Symbol Detection for Linear or Nonlinear Unknown Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 7, pp. 2406–2413, July 1994.
- [7] D. N. Godard. "Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 28, no. 11, pp. 1867–1875, November 1980.
- [8] P. S. R. Diniz. *Adaptive Filtering Algorithms and Practical Implementation*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [9] B. Farhang-Boroujeny and H. Gazor. "Performance of LMS-Based Adaptive Filters in Tracking a Time-Varying Plant". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 11, pp. 2868–2871, November 1996.

- [10] E. Eweda. "Comparation of RLS, LMS and Sign Algorithms for Tracking Randomly Time-Varying Channels". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 11, pp. 2937-2944, November 1994.
- [11] N. R. Yousef and A. H. Sayed. "A Unified Approach to the Steady-State and Tracking Analyses of Adaptive Filters". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 2, pp. 314-324, February 2001.
- [12] R. Raheli, A. Polydoros and C. Tzou. "Per-Survivor Processing: A General Approach MLSE in Uncertain Environments". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 2/3/4, pp. 354-364, February/March/April 1995.
- [13] K. M. Chugg and A. Polydoros. "MLSE for Unknown Channel - Part I: Optimality Considerations". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 44, no. 7, pp. 836-846, July 1996.
- [14] K. M. Chugg and A. Polydoros. "MLSE for Unknown Channel - Part II: Tracking Performance". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 44, no. 8, pp. 949-958, August 1996.
- [15] H. Kubo, K. Murakami and T. Fujino. "An Adaptive Maximum-Likelihood Sequence Estimator for Fast Time-Varying Intersymbol Interference Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 1872-1880, April 1994.
- [16] G. Pappariso and K. M. Chugg. "PSP Array Processing for Multipath Fading Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 4, pp. 504-507, April 1999.
- [17] F. R. Magee and J. G. Proakis. "Adaptive Maximum-Likelihood Sequence Estimation for Digital Signaling in the Presence of Intersymbol Interference". *IEEE Transactions on Information Theory*, pp. 120-124, January 1973.
- [18] J. F. Galdino. "Recepção de Seqüências de Símbolos em Canais Variantes com o Tempo". Tese de mestrado, Instituto Militar de Engenharia (IME), Dezembro 1997.

- [19] T. Hashimoto. "A List-Type Reduced-Constraint Generalization of the Viterbi Algorithm". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 33, no. 6, pp. 866–876, November 1987.
- [20] G. D. J. Forney. "The Viterbi Algorithm". *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, no. 3, pp. 268–278, March 1973.
- [21] J. F. Galdino and E. L. Pinto. "A New MLSE-PSP Scheme Over Fast Frequency-Selective Fading Channels". In *IEEE International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA)*, 1998.
- [22] L. N. Kanal and A. R. K. Sastry. "Models for Channels With Memory and Their Application to Error Control". *Proceedings of the IEEE*, vol. 39, pp. 724–744, July 1987.
- [23] K. Dogançay and V. Krishnamurthy. "Blind On-Line Testing for Equalization Errors in Digital Communication Systems". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 4, pp. 1677–1686, July 1998.
- [24] K. Dogançay and R. A. Kennedy. "Blind Detection of Equalization Errors in Communication Systems". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 43, no. 2, pp. 469–482, March 1997.
- [25] T. S. Rappaport. *Wireless Communications. Principles and Practice*. Prentice-Hall, 1996.
- [26] D. L. Donoho. "De-Noising by Soft-Thresholding". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, no. 3, pp. 613–627, May 1995.
- [27] S. Mallat. *Wavelet Signal Processing*. Academic Press, 1997.
- [28] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- [29] J. D. Parsons. *The Mobile Radio Propagation Channel*. John Wiley, 1992.
- [30] W. C. Jakes. *Microwave Mobile Communications*. John Wiley, 1974.
- [31] G. Szegö. *Orthogonal Polynomials*. Colloquium Publications, 1991.
- [32] L. Ljung. *System Identification Theory for the User*. Prentice Hall, 1999.

- [33] M. E. Rollins and S. J. Simmons. "Simplified Per-Survivor Kalman Processing in Fast Frequency-Selective Fading Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 45, no. 5, pp. 544-553, May 1997.
- [34] Q. Dai and E. Shwedyk. "Detection of Bandlimited Signals Over Frequency Selective Rayleigh Fading Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 941-950, February 1994.
- [35] J. F. Galdino and E. L. Pinto. "A Simulation Study of Adaptive Filtering Applied to MLSE-PSP Receivers". In *IEEE Military Communications Conference (MILCOM)*, 1998.
- [36] Y. Zhang, M. Fitz and S. B. Gelfand. "Soft Output Demodulation on Frequency-Selective Rayleigh Fading Channels Using AR Channel Models". In *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM)*, November 1997.
- [37] H. P. William, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1993.
- [38] Y. Sato. "A Method of Self-Recovering Equalization for Multilevel Amplitude-Modulation". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 23, pp. 679-682, June 1975.
- [39] C. A. Rocha and J. M. T. Romano. "Equalização Autodidata: Fundamentos, Novas Propostas e Perspectivas". *Revista Brasileira de Telecomunicações*, vol. 10, no. 1, pp. 25-31, Dezembro 1995.
- [40] M. K. Tsatsanis and G. B. Giannakis. "Equalization of Rapidly Fading Channels: Self-Recovering Methods". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 44, no. 5, pp. 619-630, May 1996.
- [41] G. Picchi and G. Prati. "Blind Equalization and Carrier Recovery Using a Stop-and-Go Decision-Directed Algorithm". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 35, no. 9, pp. 877-887, September 1987.
- [42] N. Seshadri. "Joint Data and Channel Estimation Using Blind Trellis Search Techniques". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 1000-1011, February 1994.

- [43] G. Lee, S. B. Gelfand and M. P. Fitz. "Bayesian Techiques for Blind Deconvolution". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 44, no. 7, pp. 826–835, July 1996.
- [44] J. K. Tugnait. "Blind Estimation of Digital Communications Channel Impulse Response". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 1606–1616, February 1994.
- [45] Z. Ding. "Blind Equalization Based on Joint Minimum MSE Criterion". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 648–654, February/March/April 1994.
- [46] H. L. V. Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory*. Wiley, 1968.
- [47] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1991.
- [48] G. D. J. Forney. "Maximum-Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the Presence of Intersymbol Interference". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 363–378, May 1972.
- [49] J. Wu and A. H. Aghvami. "A New Adaptive Equalizer with Channel Estimator for Mobile Radio Communications". *IEEE Transactions on Vehicular Tecnology*, vol. 45, no. 3, pp. 467–474, August 1996.
- [50] Y. Gu and T. Le-Ngoc. "Adaptive Combined DFE/MLSE Techniques for ISI Channels". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 44, no. 7, pp. 847–857, July 1996.
- [51] G. J. Foschini. "A Reduced State Variant of Maximum Likelihood Sequence Detection Attaining Optimum Performance for High Signal-to-Noise Ratios". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 23, no. 5, pp. 605–609, September 1977.
- [52] M. V. Eyuboglu and S. U. H. Qureshi. "Reduced-State Sequence Estimation with Set Partitioning and Decision Feedback". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 36, no. 1, pp. 13–20, January 1988.
- [53] A. Duel-Hallen and C. Heegard. "Delayed Decision-Feedback Sequence Estimation". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 37, pp. 428–436, May 1989.

- [54] A. G. Melo and E. L. Pinto. "Performance Evaluation of Bayesian Blind Equalizers Over WSS-US Channels". In *XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, pp. 694–699, 1999.
- [55] J. F. Galdino and M. S. de Alencar. "Desempenho de Receptores MLSE Cegos Em Canais Seletivos e Com Desvanecimento Rápido". In *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, Setembro 2000.
- [56] I. M. Johnstone and D. L. Donoho. "Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage". *Biometrika*, vol. 81, pp. 425–455, 1994.
- [57] D. L. Donoho and I. M. Johnstone. "Neo-Classical Minimax Problems, Thresholding, and Adaptation". *Bernoulli*, 1995.
- [58] B. Vidakovic. *Statistical Modeling by Wavelets*. John Wiley, 1999.
- [59] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins, 1996.
- [60] S. Mallat, H. Krim, D. Tucker and D. Donoho. "On Denoising and Best Signal Representation". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 7, pp. 2225–2238, November 1999.
- [61] I. M. Johnstone and B. W. Silverman. "Wavelet Threshold Estimators for Data with Correlated Noise". *J. Roy. Statist. Soc.*, vol. Ser. B, no. 59(2), pp. 319–351, 1997.
- [62] R. T. Ogden. *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*. Birkhäuser, 1997.
- [63] J. Treichler, I. Fijalkov and C. Johnson. "Fractionally Spaced Equalizers". *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 65–81, May 1996.
- [64] H. Krim and I. C. Schick. "Minimax Description Length for Signal Denoising and Optimized Representation". *IEEE Transactions of Information Theory*, vol. 45, no. 3, pp. 898–908, April 1999.
- [65] A. G. Guimarães, C. J. A. Silva, J. F. Galdino and E. L. Pinto. "Comparação de Desempenho de Simuladores de Canais com Desvanecimento Rápido: Parte I - Avaliação Numérica". In *XV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, pp. 426–430, Recife - PE, Setembro 1997.

- [66] A. Müller. "Simulation of Multipath Fading Channels Using Monte Carlo Method". In *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, pp. 1536–1540, 1994.
- [67] W. Gautschi. "Construction of Gauss-Christoffel Quadrature Formulas". *Mathematics of Computation*, vol. 22, pp. 251–270, 1968.
- [68] G. H. Golub and J. H. Welsch. "Calculation of Gauss Quadrature Rules". *Mathematics of Computation*, vol. 26, pp. 221–230, April 1969.
- [69] W. Gautschi. "On the Construction of Gaussian Quadrature Rules from Modified Moments". *Mathematics of Computation*, vol. 24, pp. 245–260, April 1970.
- [70] R. S. Martin, G. Peters and J. H. Wilkinson. "Symmetric Decomposition of a Positive Definite Matrix". *Numer. Math*, vol. 7, no. 5, pp. 362–383, December 1965.
- [71] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 1984.
- [72] M. Kavehrad and M. Joseph. "Maximum Entropy and the Method of Moments in Performance Evaluation of Digital Communications Systems". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 34, no. 12, pp. 1183–1189, December 1986.
- [73] L. R. Mead and N. Papanicolaou. "Maximum Entropy in the Problem of Moments". *Journal Math. Phys.*, vol. 25, no. 8, pp. 2404–2417, August 1984.
- [74] D. V. Widder. *The Laplace Transform*. Princeton, 1946.
- [75] K. S. Shanmugan and A. M. Breipohl. *Random Signals: Detection, Estimation, and Data Analysis*. John Wiley & Sons, 1988.
- [76] M. G. Kendall and A. Stuart. *The Advanced Theory of Statistics*. Charles Griffin, 1963.
- [77] N. N. Lebedev. *Special Functions & Their Applications*. Dover, 1972.
- [78] P. Hall. *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. Springer, 1992.
- [79] J. E. Kolassa. *Series Approximation Methods in Statistics*. Springer, 1997.
- [80] P. McCullagh. *Tensor Methods in Statistics*. Capman and Hall, 1987.

- [81] N. G. de Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis*. Dover, 1991.
- [82] N. C. Beaulieu. "An Infinite Series for the Computation of the Complementary Probability Distribution Function of a Sum of Independent Random Variables and its Application to the Sum of Rayleigh Random Variables". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 38, pp. 1463–1474, September 1990.
- [83] N. C. Beaulieu. "The Evaluation of Error Probabilities for Intersymbol and Co-channel Interference". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 39, pp. 1740–1749, December 1991.
- [84] P. P. Vaidyanathan. *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice Hall, 1993.
- [85] M. W. Frazier. *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*. Spring, 1999.
- [86] G. Strang and T. Nguyen. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [87] B. B. Hubbard. *The World According to Wavelets*. A. K. Peters, 1998.
- [88] P. Wojtaszczyk. *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Cambridge University Press, 1997.
- [89] C. S. Burrus and R. A. Gopinath and H. Guo. *Introduction to Wavelets and Wavelets Transforms: A Primer*. Prentice Hall, 1998.
- [90] M. V. Wickerhauser. *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*. A. K. Peters, 1995.
- [91] Y. Meyer. *Wavelets and Operators*. Cambridge, 1992.
- [92] E. H. Adelson and P. J. Burt. "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 31, pp. 532–540, 1983.
- [93] E. H. Adelson and P. J. Burt. "A Multiresolution Spline with Applications to Image Mosaic". *ACM Trans. Graphics*, vol. 2, pp. 217–236, 1983.
- [94] S. G. Mallat. "Multiresolution Aproximation and Wavelets Orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$ ". *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 315, pp. 69–87, 1989.

- [95] S. G. Mallat. "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation". *IEEE Trans. on Patt. Anal. Mach. Intell*, vol. 11, pp. 674-693, 1989.