
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DIFUSÃO EM SÓLIDOS ESFEROIDAIS OBLATOS:
MODELAGEM E SIMULAÇÃO

João Evangelista Franco do Carmo

Campina Grande, Pb

2000

João Evangelista Franco do Carmo

**DIFUSÃO EM SÓLIDOS ESFEROIDAIS OBLATOS:
MODELAGEM E SIMULAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós
Graduação em Engenharia Mecânica da
Universidade Federal da Paraíba, em
cumprimento às exigências para obtenção
do Grau de Mestre

Orientador: Antonio Gilson Barbosa de Lima

Campina Grande, Pb

2000



C287d Carmo, João Evangelista Franco do.
Difusão em sólidos esferoidais oblatos : modelagem e simulação / João Evangelista Franco do Carmo. - Campina Grande, 2000.
80 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2000.
"Orientação : Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima".
Referências.

1. Difusão - Engenharia Mecânica. 2. Esferóide Oblato. 3. Modelagem e Simulação. 4. Secagem. 5. Volumes Finitos. 6. Dissertação - Engenharia Mecânica. I. Lima, Antonio Gilson Barbosa de. II. Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB). III. Título

CDU 620.01(043)

JOÃO EVANGELISTA FRANCO DO CARMO

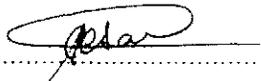
**DIFUSÃO EM CORPOS ESFEROIDAIS OBLATOS: MODELAGEM E
SIMULAÇÃO**

DISSERTAÇÃO APROVADA COM DISTINÇÃO EM 22/09/2000

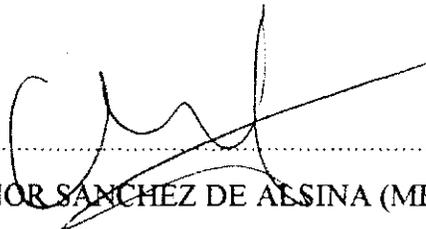
BANCA EXAMINADORA



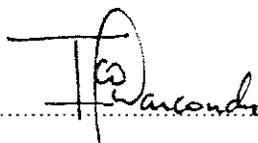
Prof. Dr. ANTONIO GILSON BARBOSA DE LIMA (ORIENTADOR)



Prof. Dr. CARLOS ANTONIO CABRAL DOS SANTOS (MEMBRO)



Prof. Dra. ODÉLSIA LEONOR SANCHEZ DE ALSINA (MEMBRO)



Prof. Dr. FRANCISCO MARCONDES (MEMBRO)

A meus pais João Borges do Carmo (in memorian)
e Haidee Simões do Carmo, e a meus irmãos,
OFEREÇO. Com amor, à minha esposa Adima
Saqueli de Aquino Franco e aos meus filhos
Rafael de Aquino Franco e Aline de Aquino
Franco, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima, pelo tema de dissertação, sua constante orientação e estímulo à realização deste trabalho.

Ao colega e Professor Dr. Natanael de Oliveira Victor por ter-me incentivado voltar a trabalhar com pesquisas.

Ao colega e chefe do DF/CCT, Professor Marcos José de Almeida Gama

Ao DEM / CCT / CAMPUS II / UFPB

A Vinicius de Souza Melo, pelas discussões e presteza em auxiliar-me na realização de trabalhos computacionais.

Aos demais colegas de mestrado, pelas discussões sobre temas relacionados à nossa área de pesquisa.

E a DEUS que nos oferece sempre a vida e o equilíbrio.

O homem pode subir aos mais altos
picos, mas não pode permanecer ali
por muito tempo.

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

1	INTRODUÇÃO	01
2	REVISÃO DE LITERATURA	03
2.1	O processo de secagem	03
2.2	O material úmido	04
2.3	Mecanismos de migração de umidade nos sólidos	05
2.4	Teorias e modelos de secagem	07
2.4.1	Teoria da difusão líquida	07
2.4.1.1	Difusão em sólidos esferoidais oblato e prolato	08
2.4.2	Teoria capilar	11
2.4.3	Teoria da condensação – evaporação	11
2.4.4	Teoria de Luikov	12
2.4.5	Teoria de Philip e De Vries	12
2.4.6	Teoria de Krischer	13
2.5	Coefficientes de transporte no processo de secagem dos sólidos	13
2.5.1	Propriedades de transporte de calor e massa	14
	▪ A difusividade de massa	14
	▪ A condutividade térmica	16
	▪ A difusividade térmica	17
2.5.2	Coefficientes de transferência de calor e massa convectivos	17
2.6	Análise concentrada do processo de secagem	18
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	20
3.1	Modelagem de processos físicos	20
3.2	A equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esferoidais oblato	21
3.3	Solução numérica da equação de difusão em corpos esferoidais oblato	29
3.3.1	Discretização da equação de difusão	30
3.4	Modelos difusionais	35
3.4.1	Modelo A: difusão com condição de equilíbrio na superfície do sólido	36

3.4.2 Modelo B: difusão com condição convectiva na superfície do sólido	44
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	49
4.1 Introdução	49
4.2 Resultados numéricos	50
4.2.1 Refinamento de malha no tempo	50
4.2.2 Resultados obtidos com o modelo A	52
4.2.3 Resultados obtidos com o modelo B	59
5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS	73
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Características de um corpo esferoidal oblato	22
Figura 3.2 – Sistema de coordenadas esferoidais oblatos	23
Figura 3.3 – Superfície contínua, subdividida em pontos nodais.	31
Figura 3.4 – Ponto nodal de fronteira do corpo.	34
Figura 3.5 – Diagrama de blocos do programa computacional.	48
Figura 4.1 – Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1 = 5,00$	51
Figura 4.2 – Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1 = 1,43$	52
Figura 4.3 – Comparação entre os teores de umidade adimensional numérico e analítico(Haji-Sheik, 1986), no centro de um esferóide oblato com $L_2/L_1 = 2,00$.	53
Figura 4.4 – Teor de umidade adimensional médio em função do número de Fourier, para vários esferóides oblato, com condição de equilíbrio na superfície.	54
Figura 4.5 – Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato, para vários valores números de Fourier e $L_2/L_1 = 5,00$, com condição de equilíbrio na superfície.	55
Figura 4.6 – Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato, para vários números de Fourier e $L_2/L_1 = 1,43$, com condição de equilíbrio na superfície.	57
Figura 4.7 – Distribuição do teor de umidade adimensional em um sólido esferoidal oblato com razão de aspecto $L_2/L_1 = 5,00$, com condição de equilíbrio na superfície.	58
Figura 4.8 – Comparação entre os valores analíticos dados por Luikov (1968) e numéricos do teor de umidade adimensional como função da coordenada radial, para $Bi = 1,0$ e $L_2/L_1 = 1,001$.	59
Figura 4.9 – Comparação entre os valores do teor de umidade médio adimensional, numérico e analítico dados por Luikov (1968), para esfera ($L_2/L_1=1,00$) e $Bi=1,0$, durante o processo de secagem.	60
Figura 4.10 – Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=5,00$.	61
Figura 4.11 – Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=2,00$.	61

Figura 4.12 – Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=1,43$.	62
Figura 4.13 – Teor de umidade adimensional no ponto focal do esferóide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=5,00$.	63
Figura 4.14 – Teor de umidade adimensional no centro do esferóide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=5,00$.	63
Figura 4.15 – Teor de umidade adimensional no ponto focal do esferóide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=2,00$.	64
Figura 4.16 – Teor de umidade adimensional no centro do esferóide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=2,00$.	64
Figura 4.17 – Teor de umidade adimensional no ponto focal do esferóide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=1,43$.	65
Figura 4.18 – Teor de umidade adimensional no centro do esferóide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=1,43$.	65
Figura 4.19 – Teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com $L_2/L_1=5,00$, em função da coordenada angular η , para $Bi=1,0$, vários números de Fourier e em $\xi=0$.	67
Figura 4.20 – Teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com $L_2/L_1=5,00$, em função da coordenada radial ξ , para $Bi=1,0$, vários números de Fourier e em $\eta=1$.	67
Figura 4.21 – Teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com $L_2/L_1=1,43$, em função da coordenada angular η , para $Bi=1,0$, vários números de Fourier e em $\xi=0$.	68
Figura 4.22 – Teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com $L_2/L_1=1,43$, em função da coordenada radial ξ , para $Bi=1,0$, vários números de Fourier e em $\eta=1$.	68
Figura 4.23 – Distribuição do teor de umidade adimensional em um sólido esferoidal oblato com razão de aspecto $L_2/L_1 = 5,00$ e $Bi=1,0$, para três números de Fourier.	69
Figura 4.24 – Teor de umidade adimensional em função de η , para $L_2/L_1=5,00$, $Fo=0,01098$, vários números de Biot, e em $\xi=0$.	70
Figura 4.25 – Teor de umidade adimensional em função de ξ , para $L_2/L_1=5,00$, $Fo=0,01098$, vários números de Biot, e em $\eta=1$.	70
Figura 4.26 – Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier para $Bi = 1,0$.	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Teor de umidade médio adimensional para diferentes malhas, em diferentes valores do intervalo de tempo, $L_2/L_1=2,00$ e número de Biot igual a 10,00. 50

NOMENCLATURA

a' - coeficiente da equação 3.9	[-]
b' - coeficiente da equação 3.9	[-]
c' - coeficiente da equação 3.9	[-]
d' - coeficiente da equação 3.9	[-]
e' - coeficiente da equação 3.9	[-]
f' - coeficiente da equação 3.9	[-]
A - área superficial	[m ²]
A_p - coeficiente da equação 3.30	[-]
A_N - coeficiente da equação 3.30	[-]
A_S - coeficiente da equação 3.30	[-]
A_E - coeficiente da equação 3.30	[-]
A_W - coeficiente da equação 3.30	[-]
A_p^0 - coeficiente da equação 3.30	[-]
D - coeficiente de difusão	[m ² /s]
D_0 - fator de Arrhenius	[m ² /s]
D_{ij} - coeficiente da equação 3.27	[-]
$\partial M/\partial t$ - taxa de difusão	[1/s]
e, w, s, n - faces dos pontos nodais	[-]
E_a - energia de ativação para a difusão	[kJ/kmol]
f - ponto na fronteira do sólido da figura 3.3	[-]
F_0 - número de Fourier	[-]
h_m - coeficiente de transferência de massa	[m/s]
h_H - coeficiente de transferência de calor	[w/m ² /K]
i, j - posição do ponto nodal na malha	[-]
J - jacobiano da transformação	[-]
J_1 - fluxo difusivo de massa	[kg/m ² /s]
L - comprimento focal	[m]
L_1, L_2 - dimensões do esferóide oblato	[m]
M - teor de umidade	[kg/kg]
m - massa	[kg]
M'' - fluxo do teor de umidade	[1/m ²]
\bar{M} - teor de umidade médio	[kg/kg]
\bar{M}^* - razão de umidade médio	[kg/kg]
N, S, E, W, P - pontos nodais	[-]
q - taxa de calor	[J/s]
r - coordenada radial esférica	[-]
R - constante dos gases	[kJ/kmol/k]
S - área superficial do sólido	[m ²]
S_η - área perpendicular ao fluxo angular ϕ	[m ²]
S_ξ - área perpendicular ao fluxo radial de ϕ	[m ²]
S_ζ - área perpendicular ao fluxo angular de ϕ em torno do eixo z	[m ²]
S^ϕ - termo fonte	[-]

\overline{SM} - fator que indica na equação 3.73, o efeito convectivo de umidade na superfície do sólido	[-]
t - tempo	[s]
T - temperatura	[C°]
T _k - temperatura	[K]
t _m [*] - tempo adimensional de transferência de massa	[-]
$\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$ - coeficiente métricos	[-]
u, v, w - componentes do vetor velocidade	[m/s]
V - volume	[m ³]
X - umidade absoluta	[kg/kg]

Letras Gregas

α_{ij} - parâmetros da equação 3.7	[-]
ε - porosidade do material seco	[-]
Φ'' - fluxo de Φ por unidade de área	[1/m ²]
Φ - função	[-]
Γ^ϕ - propriedade do material	[-]
η - coordenada angular	[-]
k - condutividade térmica	[W/m/K]
μ, ϕ, ω - coordenadas esferoidais oblato	[-]
ρ - densidade (massa específica)	[kg/m ³]
ξ - coordenada radial	[-]
ζ - coordenada angular	[-]
\mathfrak{S} - propriedade física do sólido	[-]
∇ - gradiente	[-]

Superescritos

- + - tempo posterior
- * - adimensional
- o - anterior

Subescritos

- W - água
- s - sólido
- e - equilíbrio
- a - ar

RESUMO

Carmo, João Evangelista Franco do, Fenômenos de difusão em sólidos esferoidais oblatos: Modelagem e simulação. Campina Grande 2000. 94p. (Dissertação) Mestrado em Engenharia Mecânica – Universidade Federal da Paraíba.

Uma solução numérica da equação de difusão para descrever a transferência de massa dentro de esferóides oblatos considerando coeficiente de difusão e condição de contorno constantes e do tipo convectiva, são apresentados. A equação de difusão no sistema de coordenadas esferoidais oblato foi usada para um caso bidimensional, e o método de volumes finitos foi empregado para discretizar a equação básica. O sistema de equações gerado a partir da discretização da equação de difusão foi resolvido iterativamente usando o método de Gauss-Seidel. Como aplicação vários resultados para várias razões de aspecto são apresentados. Os efeitos dos números de Fourier e Biot e da razão de aspecto na taxa de secagem, teor de umidade médio e distribuição do teor de umidade, durante o processo são apresentados e analisados. Para investigar o efeito da razão de aspecto, diferentes resultados do teor de umidade médio, são mostrados. Os resultados obtidos são consistentes e o modelo apresentado pode ser utilizado para resolver problemas de difusão tais como secagem, umidificação, aquecimento e resfriamentos de sólidos com geometria que vai desde disco circular até esfera, incluindo esferóides oblatos.

Palavras-chave

Difusão, Esferóide oblato, Modelagem, Simulação, Secagem, Volumes finitos

ABSTRACT

Carmo, João Evangelista Franco do, Difusion phenomena in oblate spheroidal solids: modeling and simulation, Campina Grande, 2000. 94p. (Dissertação) Mestrado em Engenharia Mecânica- Universidade Federal da Paraíba.

A numerical solution of the diffusion equation to describe mass transfer inside oblate spheroids, considering diffusion coefficient and constant or convective boundary condition, are presented. The diffusion equation in oblate spheroidal coordinate system was used, in a two dimensional case, and the finite-volume method was applied to discretize the basic equation. The set of equation was solved iteratively using the Gauss-Seidel method. In application various results for various aspect ratios, are presented. The effects of the Fourier, Biot number and the aspect ratio of body on the drying rate, mean moisture content and moisture content distribution during the process are presented and analyzed. To investigate the effect of the aspect ratio only, different results of the average moisture content are showed. The results show that the model is consistent and it may be used to solve diffusion problems such as drying, wetting, heating and cooling in oblate spheroidal solids, including circular disk and sphere.

Key words

Diffusion, Oblate spheroid, Modeling, Drying, Finite-volume

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A secagem é um complicado processo que envolve a transferência simultânea de calor, massa e quantidade movimento linear. Existem duas dificuldades básicas para a obtenção de dados confiáveis com a utilização de um determinado modelo matemático. A primeira é relacionar todas as grandezas físicas relevantes no processo, e a segunda é a solução da equação representativa do fenômeno. Na tentativa de melhor elucidar um processo de secagem real, várias teorias sobre a secagem de sólidos foram propostas, vários modelos matemáticos foram desenvolvidos, sendo que quase todos, baseados no modelo de difusão.

O estudo ou análise de um processo físico normalmente passa por um modelamento matemático capaz de representar ou simular este processo. Vários parâmetros afetam a cinética de secagem de produtos higroscópicos, tais como: coeficiente de difusão, as condições ambientais externas e encolhimento do produto. Evidentemente quanto maior for o número de parâmetros relevantes incluídos no modelamento matemático de um processo, mais próximo se estará da situação física real.

A taxa de secagem de um produto higroscópico normalmente se dá em duas fases distintas. No primeiro estágio de secagem, a taxa é constante, e no segundo estágio, ela é decrescente. Neste segundo estágio, um modelo bastante usado para descrever a transferência de umidade no interior do sólido é baseado na teoria da difusão líquida.

O estudo da difusão líquida é bastante comum na literatura. Na sua maioria é aplicado a corpos com geometrias bem conhecidas tais como: paralelepípedos, cilindros e esferas, utilizando-se para a solução do problema condições de contorno de equilíbrio ou

convectivas na superfície do corpo. Sendo assim, existe a necessidade de estudos que envolvam outras formas geométricas, tais como esferóides prolatos e oblatos, formas estas tão comuns na natureza. Por exemplo, banana, casulo do bicho-da-seda, arroz e trigo têm forma aproximada de um esferóide prolato. Já a lentilha, alguns tipos de comprimidos e sementes de várias frutas e vegetais apresentam formas que se assemelham a um esferóide oblato. O esferóide prolato é obtido através da revolução de uma superfície elíptica em torno do seu eixo maior, já o esferóide oblato é obtido a partir da revolução da superfície elíptica em torno do seu eixo menor.

O presente estudo constitui-se numa análise numérica do processo de difusão (secagem, umidificação, aquecimento ou resfriamento) em corpos com geometria esferoidal oblato. O autor se propõe em síntese, atingir os seguintes objetivos.

- Apresentar uma solução numérica para o problema de difusão transiente, baseando-se no modelo difusivo.
- Adaptar um programa computacional existente, para simular o processo de difusão em corpos esferoidais oblatos.
- Focalizando particularmente a secagem, simular a distribuição do teor de umidade no interior de corpos esferoidais oblatos e suas respectivas cinéticas de difusão.

CAPÍTULO II

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 O processo de secagem

As operações de secagem ou de desidratação são importantes passos na indústria química, no processamento de alimentos e na estocagem de grãos. A finalidade da secagem é a remoção parcial de um líquido (geralmente a água) da matéria sólida. A particularidade da secagem em relação a outras técnicas de separação é que a retirada das moléculas é obtida por uma movimentação da água, graças a uma diferença de pressão parcial do vapor d'água entre a superfície do produto a ser secado e o ar que o envolve. No caso dos alimentos, a remoção de água do material úmido é realizada até um nível onde o estrago provocado por microorganismos possa ser minimizado.

O ar é utilizado como agente de secagem para a maioria dos processos industriais de secagem. Ele é uma mistura de vapor de água com o ar seco (na sua maioria composta por moléculas de oxigênio e nitrogênio). Para a modelagem do processo de secagem, o conhecimento das propriedades termodinâmicas do ar e suas mudanças no decorrer do processo se tornam imprescindíveis.

Num processo de secagem com ar aquecido, o material úmido está em contato com o ar não saturado, e como resultado o teor de umidade do material decresce e o ar é umidificado. Durante a secagem de um material ocorrem simultaneamente transferência de calor e massa no interior do sólido e na camada de contorno entre o sólido e o agente de secagem. Esta dinâmica está sujeita a influências exercidas pelas condições externas tais como temperatura,

umidade relativa e velocidade do ar, bem como pela estrutura interna do material a ser secado.

O processo de secagem pode provocar mudanças na forma e estrutura do produto, o aparecimento de fendas e a oxidação de componentes instáveis. Para completar, estudos sobre o aparecimento de fissuras e o poder de germinação em sólidos durante o processo de secagem, indicam que tensões sobre o material podem ser minimizadas se for feito durante a secagem, uma avaliação da distribuição do teor de umidade e da temperatura no interior do produto Soravacos e Kostarapoulos (1995).

Do exposto, pode-se afirmar que um estudo cuidadoso das propriedades termodinâmicas do ar e mecanismos de transporte de umidade no interior do produto, durante o processo de secagem, é de suma importância.

2.2 O material úmido

Usualmente, os materiais passíveis de se submeterem a um processo de secagem, consistem de um esqueleto (ou substrato) de material seco adicionado a uma quantidade de umidade, principalmente no estado líquido. Os chamados materiais úmidos apresentam propriedades físicas, químicas e estruturais diferentes, que resultam das propriedades do esqueleto junto com as características da água contida nele. Entre estas propriedades, as que mais influenciam o processo de secagem são as relacionadas com aspectos mecânicos-estruturais, tipo de umidade e o tipo de ligação sólido-água. De acordo com Luikov (1968), citado por Strumillo e Kundra (1986), os materiais úmidos podem ser classificados em corpos coloidais, corpos porosos capilares e corpos porosos capilares coloidais. A característica dos corpos coloidais é que, em um processo de secagem, estes mudam suas dimensões, mas conservam suas propriedades elásticas. Os corpos porosos capilares, depois da secagem, se contraem e tornam-se um tanto quebradiços. O terceiro tipo de material úmido possui uma característica intermediária entre os dois citados anteriormente.

Para o material úmido pode-se definir o teor de umidade de duas formas:

- Teor de umidade em base seca (b.s.)

$$M = m_w / m_s \quad (2.1)$$

- Teor de umidade em base úmida (b.u)

$$M = m_w / m \quad (2.2)$$

onde $m = m_w + m_s$, é a massa do produto úmido, m_w é a massa de água contida no produto e m_s é a massa do sólido.

Durante a secagem, o material pode atingir os seguintes teores de umidade comumente definidos na literatura: teor de umidade inicial, crítico e de equilíbrio. O teor de umidade inicial é o valor da umidade no material quando se inicia o processo de secagem. O teor de umidade crítico se dá quando acontece uma mudança na taxa de secagem, de constante para decrescente. O teor de umidade de equilíbrio se dá quando o material úmido está em equilíbrio com o agente de secagem, em uma determinada condição, neste caso, não existe fluxo de umidade entre eles. Quando este estado de equilíbrio é atingido, o teor de umidade no interior do sólido passa a ser uniforme. As isotermas de sorção mostram curvas bem definidas, que relacionam o teor de umidade do sólido e a umidade relativa do ar de secagem, quando o estado de equilíbrio é atingido. Várias destas isotermas podem ser encontradas na literatura Iglesias e Chirife (1982).

2.3 Mecanismos de migração de umidade nos sólidos

O processo de retirada da umidade em um sólido pode ser dividido em dois períodos distintos. Aquele caracterizado por uma taxa constante de retirada de umidade e outro por uma taxa decrescente. Neste último período, o mecanismo de retirada da umidade sofre uma grande influência das características do sólido. No período da taxa de secagem constante, a

transferência de calor e massa depende principalmente dos mecanismos de transporte nas camadas superficiais do sólido, porém, no período de taxa de secagem decrescente, a este fator externo é adicionado a resistência ao transporte de umidade dentro do material a ser secado. Os seguintes mecanismos de transporte da umidade no interior dos sólidos são apresentados na literatura por Strumilo e Kundra (1986), Fortes e Okos (1980): a) difusão líquida no interior do sólido, devido a um gradiente de concentração de umidade; b) movimento de líquido devido a forças capilares; c) difusão superficial, devido a um gradiente de concentração de umidade superficial; d) movimento do líquido, devido à força gravitacional; e) fluxo de vapor e/ou líquido, devido a diferença total de pressão.

Tomando em consideração os mecanismos de movimento da umidade no interior dos sólidos, Luikov (1968) dividiu ainda os corpos capilares em microcapilares ($r < 10^{-7} \text{ m}$) e macrocapilares ($r > 10^{-7} \text{ m}$), com "r" sendo o valor do raio interno do poro. É assumido ser de 10^{-7} metros o valor do livre caminho médio do vapor de água quando este estiver submetido a uma pressão igual a pressão atmosférica. Nos materiais microcapilares, o transporte da umidade se dá através da difusão ordinária de vapor ou líquido. Nos corpos microcapilares, os poros estarão preenchidos com a água na fase líquida, se houver uma adsorção de uma camada de líquido polimolecular nas paredes dos poros. Em contrapartida, os corpos macrocapilares só estarão preenchidos com a fase líquida se estiverem em contato direto com um líquido.

Do exposto pode-se afirmar que a umidade pode existir na superfície e no interior de materiais úmidos sob a forma de vapor e/ou líquido. Na superfície, a umidade é um líquido que existe como uma película externa sobre o material, fixa ao sólido devido ao efeito de tensão superficial. A ligação da umidade com o material pode ser uma ligação química, físico-química ou físico-mecânica. Como mencionado anteriormente, existe um valor do teor de umidade para a qual o corpo está em equilíbrio com o agente de secagem, acima ou abaixo deste valor o corpo deverá estar em um processo de secagem ou de umidificação, ou seja, estará havendo o movimento de umidade no interior e na superfície do corpo (Marinos-Kouris e Maroulis 1995).

2.4 Teorias e modelos de secagem

Atualmente várias teorias para descrever o processo secagem são apresentadas. Os seguintes modelos teóricos para a transferência de calor e massa em corpos porosos têm sido amplamente sugeridos na literatura.

- Teoria da difusão líquida
- Teoria da capilaridade
- Teoria da condensação - vaporização
- Teoria de Krischer
- Teoria de Luikov
- Teoria de Phillip - DeVries

2.4.1 Teoria da difusão líquida

A teoria de difusão líquida tem como modelo matemático a equação de Fick, considerando que o fluxo de umidade no interior do sólido é gerado por um gradiente de concentração. A seguinte equação é válida :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M) \quad (2.3)$$

onde M é o teor de umidade do material e D é a difusividade de massa.

A difusão líquida tem sido proposta como o principal mecanismo para o fluxo de umidade no interior dos sólidos. Esta teoria tem sido aplicada para diversos materiais, considerando o coeficiente de difusão como sendo constante ou depende da temperatura e/ou do teor de umidade Alsina et al (1997), Júnior e Correa (1999), Wagner e Shlunder, (1998), Júnior e Coirncross (1998), Azzouz et al. (1998), Sanjuan et al. (1998), Gouveia et al. (1999). Segundo Queiroz (1994), o modelo de difusão líquida apresenta bons resultados para a análise de secagem em grãos, frutos e cereais devido a peculiaridade destes produtos não apresentarem um período de taxa constante nas suas curvas características de secagem,

permitindo que o processo seja totalmente controlado pelas condições internas do material. A ausência do período de taxa constante de secagem é observado por exemplo no processo de secagem do quiabo fresco Shivhare et al. (2000). Também foi citado por Luccas (1996) que no período de secagem decrescente, os processos difusivos de água do interior do material para a sua superfície, controlam a operação de secagem.

No entanto, segundo Hougen et al (1940), citado por (Fortes e Okos (1980) a difusão líquida vista com o único mecanismo de movimento da umidade tem sido sujeito a severas críticas. Na verdade, as discrepâncias entre resultados experimentais e teóricos podem e devem ser sempre minimizadas. Estas discrepâncias, em geral, são oriundas da aplicação do modelo de difusão líquida considerando o coeficiente de difusão constante ao longo do processo de secagem, condições de contorno inadequadas, não encolhimento do produto, entre outras.

Apesar das ressalvas feitas pôr diversos autores, a predição do movimento de umidade através da difusão líquida não pode ser negada, até porque teorias mais sofisticadas utilizam a Lei de Fick para determinar o movimento de vapor e/ou líquido nos sólidos. As críticas a esta teoria se concentram mais no fato da sua aplicabilidade em todos os estágios da secagem. Nestes casos o significado físico do coeficiente de difusão se perde, ou é interpretado como a soma de vários efeitos simultâneos.

2.4.1.1 Difusão em sólidos esferoidais oblatos e prolatos

O modelo de difusão aplicado a sólidos esferoidais tem sido considerado na literatura. Niven (1880) apresenta uma solução analítica para o problema de condução do calor em esferóides com a consideração de condição de equilíbrio na superfície.

Haji-Sheikh (1986), utilizando o método de Galerkin e condição de equilíbrio na superfície, apresenta uma solução para a equação de difusão em uma fronteira irregular. Este método de solução foi utilizado para fornecer a distribuição de temperatura no interior de esferóides.

Shen e Hayakawa (1992) apresentam resultados sobre a influência de parâmetros tais como o encolhimento volumétrico, sobre o tempo de degelo de alimentos com forma esferoidal ou cilíndrica. Difusão convectiva e adsorção em partículas esferoidais oblatas e prolatas são apresentadas no trabalho de Couteliens et al (1995).

Haji-Sheikh e Sparrow (1966) apresentam uma solução analítica para condução de calor transiente em corpos esferoidais prolatos para o caso de temperatura constante na superfície. Resultados das temperaturas no centro e no ponto focal são apresentadas para vários esferóides.

Haji-Sheikh e Sparrow (1967) apresentaram uma solução numérica para a temperatura no interior de corpos esferoidais, assumindo condição de contorno convectiva e radiativa e usando o método de Monte Carlo, em coordenadas cartesianas. Os resultados obtidos apresentam boa concordância com resultados analíticos reportados num trabalho anterior de Haji-Sheikh e Sparrow (1966).

Normiton e Blackwell (1964) propõem uma solução formal para transferência de calor transiente de esferóides prolato e oblato com temperatura constante na superfície. A metodologia foi aplicada apenas para calcular numericamente a temperatura ao longo da coordenada radial de um disco circular ao longo do tempo.

Wrobel e Brebbia (1981) reportam uma formulação numérica usando o método de elementos de fronteira em coordenadas polares, para análise do problema de condução de calor transiente em corpos axialmente simétricos com condição de contorno de equilíbrio na superfície. Como uma das aplicações, o método é usado para descrever a temperatura no centro de um esferóide prolato. Os resultados obtidos apresentam boa concordância com dados analíticos obtidos por Haji-Sheikh e Sparrow (1966) e numéricos obtidos pelo uso de elementos finitos, por Zienkiewicz e Parekh (1970).

Elvira (1990) reporta uma solução numérica para o problema de difusão em corpos elípticos com condição de equilíbrio na superfície, usando um método implícito de direção alternada, em coordenadas polares, com malhas ortogonais e não-ortogonais. Como aplicação, o método foi testado para descrever os processos de umidificação de arroz e batata, apresentando boa concordância com dados experimentais.

Haghighi et al. (1990) apresentam uma formulação utilizando o método de elementos finitos para resolver o problema de transferência de calor e massa em corpos com simetria axial. O modelo foi usado para simular o processo de secagem de grãos de cevada. Os resultados do modelo ajustaram-se bem aos dados experimentais. Procedimentos similares foram utilizados por Sokhansanj (1980) e Sarker et al. (1994) para simular processo de secagem de grãos de arroz. Em todos os casos foi assumida condição de contorno convectiva.

Lu e Siebenmorgen (1992) usando o método de elementos finitos em coordenadas polares, apresentam um modelamento para descrever a adsorção de umidade em grãos de arroz, assumindo condição de equilíbrio na superfície. Os resultados obtidos numericamente são comparados com os dados experimentais e excelente concordância foi obtida.

O arroz é um grão que em geral tem a forma de um esferóide oblato. Vários estudos sobre a secagem do arroz são apresentados na literatura, os mais simples consideram o modelo de resfriamento de Newton. Sharma et al (1982) descreve a secagem do arroz baseando-se em um modelo semi-teórico análogo à equação de resfriamento de Newton, mas considerando o grão de arroz composto por dois compartimentos diferentes e sobrepostos.

Diferentes formas geométricas, principalmente a forma cilíndrica, são comumente utilizadas para simular a secagem do arroz. No entanto, numa análise mais realística, Lu e Siebenmorge (1992), consideraram para o estudo da secagem do arroz, a difusão em um sólido com geometria esferoidal prolata. Lima (1999) apresenta um estudo numérico/analítico da difusão de calor e massa em esferoides prolatos, com aplicação a secagem de bananas.

2.4.2 Teoria capilar

A teoria capilar se refere ao fluxo de um líquido através dos interstícios e sobre a superfície de um sólido, como sendo devido as atrações moleculares entre o líquido e o sólido. Esta teoria é baseada no conceito do potencial capilar (ϕ), que pode ser entendido como a diferença de pressão entre a água e o ar, na interface água-ar, presente em um capilar. Para condições isotérmicas, o potencial capilar é assumido ser proporcional ao gradiente de concentração da umidade. No entanto, segundo Fortes e Okos (1980), Ceaglske e Hougen (1937) destacaram que na secagem de sólidos granulares, o fluxo de água é completamente determinado por forças capilares, sendo independentes da concentração de água. Foi mostrado através de experimento que o fluxo de umidade pode até está na direção de incremento da umidade. Na secagem de alimentos, a teoria do fluxo capilar tem sido aceita principalmente para os estágios da secagem em alta umidade.

2.4.3 Teoria da condensação - evaporação

Segundo Fortes e Okos (1980), o modelo teórico da condensação – evaporação foi motivado pelos trabalhos de Henry (1939), quando da tentativa de compreensão da umidade existente em fardos de algodão. Seu modelo considera o sólido constituído por redes contínuas de poros e as equações que governam o fluxo de umidade no material são derivadas de um apropriado balanço de calor e massa. O balanço de massa considera o movimento de vapor através do sólido, e o balanço de energia é feito considerando o fluxo de calor através da condução adicionando-se o calor envolvido na adsorção e/ou absorção de umidade pelo sólido.

Embora muitos trabalhos posteriores ao de Henry tenham limitado o fluxo de umidade através do sólido somente na fase de vapor, sua teoria não se limitou ao vapor como única substância difusiva.

Hougen et al. (1940), citado por Fortes e Okos (1980) estabeleceu que a umidade pode mover por difusão de vapor através de um sólido, desde que seja estabelecido no seu interior

um gradiente de temperatura, que por sua vez irá criar um gradiente de pressão na direção da superfície de secagem. Desta forma, na secagem de uma partícula com o agente externo a uma determinada temperatura, só existirá fluxo de vapor enquanto o material não entrar em equilíbrio térmico com o agente de secagem; a partir daí, o fluxo de massa através do sólido se dará predominantemente por difusão líquida.

2.4.4 Teoria de Luikov

Segundo Fortes e Okos (1980), no desenvolvimento de sua teoria Luikov se baseou nos princípios da Termodinâmica de Processos Irreversíveis e assumiu que os fluxos de umidade devido à difusão de vapor e líquido, são devidos respectivamente a um gradiente de temperatura e de concentração total de umidade no interior do sólido. As equações que descrevem o modelo de Luikov sugerem que o transporte molecular de vapor d'água, ar e líquido acontecem simultaneamente. Estes modelos de transferência de umidade são do tipo difusivos e podem ser expressos por uma equação similar à lei de Fick. O modelo matemático da teoria de Luikov é amplamente discutido na literatura, o destaque feito neste texto é que a teoria agrega simultaneamente os fluxos de umidade na forma de vapor e líquido.

2.4.5 Teoria de Philip e De Vries

Esta teoria considera que em materiais porosos, a água se move através da difusão de vapor e por capilaridade. O fluxo de vapor é considerado ser dependente da sua concentração e dos gradientes de temperaturas no sólido e o fluxo de umidade na fase líquida é devido a efeitos de capilaridade e pode se dar em condições isotérmicas ou não. A teoria de Philip e DE Vries também considera o fluxo de umidade devido a potenciais gravitacionais. Em geral, pode-se dizer que a difusividade líquida é um fator importante para condições em que estão presentes altos teores de umidade, enquanto que a difusividade de vapor é importante para condições de baixo valor do teor de umidade.

2.4.6 Teoria de Krischer

Em sua teoria, Krischer citado por Fortes e Okos (1980) assumiu que durante a secagem, o fluxo de umidade pode se dar no estado líquido, por capilaridade, ou no estado de vapor devido a um gradiente de concentração de vapor. Esta teoria leva em conta a transferência de calor e massa simultânea, e, pode ser aplicada em uma variedade de meios porosos. O trabalho de Krischer serve como base para teorias mais complexas como a de Berger e Pei, e tem sido aplicada para a análise em variados tipos de alimentos (Fortes e Okos, 1980).

Como foi visto, vários modelos para a difusão de umidade através dos sólidos podem ser encontrados na literatura, quase todos levando em consideração a migração da umidade na forma de vapor e/ou líquido. O fluxo de umidade é considerado ser provocado pelo gradiente de uma grandeza escalar tal como a temperatura, pressão total, concentração de umidade ou pelo potencial químico entre a água e a rede de poros capilar do sólido. Neste trabalho será utilizada a teoria da difusão líquida, sendo o fluxo de umidade provocado por um gradiente de concentração de umidade no interior do sólido.

2.5 Coeficientes de transporte no processo de secagem dos sólidos

A secagem de sólidos e o projeto de equipamentos utilizados para realizar esse processamento requerem constantes dados sobre as propriedades físico-químicas das substâncias a serem tratadas. A relativa carência destes dados se deve principalmente a complexidades das estruturas físicas e químicas apresentadas por algumas substâncias tais como alimentos e grãos. Os produtos sólidos tais como frutas e vegetais são particularmente sensíveis a tensões térmicas ou mecânicas, requerendo equipamentos de processamento especializados, para que possíveis danos causados na qualidade final do alimento possam ser minimizados.

As propriedades de transporte para gases e líquidos podem ser diretamente medidas ou preditas, baseando-se em princípios físico – químicos, no entanto, para materiais sólidos tais

como alimentos, este procedimento não é possível (Saravacos e Kostarapoulos, 1995). Nestes casos, a predição pode ser feita através do ajuste entre dados experimentais e dados obtidos através de simulação.

2.5.1 Propriedades de transporte de calor e massa

A difusividade de umidade e a condutividade térmica são propriedades do material que em geral dependem do teor de umidade, da temperatura e da estrutura física do material. Já os coeficientes de transporte convectivos de calor e massa na superfície de contorno entre o material e o agente de secagem dependem das condições do agente (normalmente o ar seco mais vapor de água) tais como, umidade absoluta, temperatura, velocidade e também da geometria do corpo sólido que está sendo secado ou umedecido.

Desta forma, o processo de secagem depende ao mesmo tempo das propriedades de transporte no interior do material, das condições do ar de secagem e do tipo de condição de contorno entre a superfície do corpo e o ar que o envolve. Para grandes partículas e altas velocidades do ar, o processo de secagem depende principalmente das propriedades físicas do material. Ao contrário, para pequenas partículas e baixas velocidades do ar, o processo de secagem depende mais das condições do ar de secagem. Para corpos com alta porosidade, tem-se um alto valor do coeficiente de transporte de umidade e um pequeno valor da condutividade térmica; nestes casos, o processo de secagem é controlado pela resistência à transferência de calor. Como se vê, para a análise da cinética e dinâmica da secagem de um material sólido, é fundamental o conhecimento de suas propriedades físicas, e das características do ar que o envolve (Strumilo e Kundra 1986).

▪ A difusividade de massa

A difusão nos materiais sólidos é um complicado processo que envolve difusão molecular, fluxo por capilaridade, difusão superficial e outros. A combinação de todos esses fenômenos gera o que é definido na lei de Fick por difusividade efetiva, também conhecida

por coeficiente de difusão e até mesmo por difusividade de massa. Para corpos heterogêneos, a heterogeneidade do material é incorporada na difusividade efetiva.

Alguns métodos específicos para medidas experimentais da difusividade de massa são sugeridos na literatura tais como: cinética de sorção, traçadores radioativos, curvas de concentração, ressonância nuclear magnética. (Marinos-Kouris e Maroulis 1995). Em geral, principalmente para o caso de alimentos, é difícil a comparação entre os dados existentes na literatura, porque os métodos de estimação são diferentes e sempre há uma certa variação entre os dados apresentados.

A maioria dos dados na literatura referentes à difusividade de massa, diz respeito ao transporte de água nos processos de secagem ou hidratação. A difusividade de massa depende fortemente da estrutura física do produto alimentício, em geral, quanto maior a porosidade, maior o coeficiente de difusão. No processo de secagem, existe sempre o transporte de calor e massa no interior do produto sendo que em várias situações o transporte de calor pode se dar muito mais rápido do que o transporte de massa. Nesta circunstância, o produto entra rapidamente em equilíbrio térmico com o ar de secagem e a partir daí somente a transferência de massa devido a gradientes que não seja de temperatura deve ser considerada.

O valor da difusividade, como já foi dito é função da temperatura e do teor de umidade do corpo. A dependência com a temperatura pode ser expressa pela equação de Arrhenius:

$$D = D_0 e^{\frac{-E_a}{RT}} \quad (2.4)$$

onde D_0 (m^2/s) é o fator de Arrhenius, E_a (kJ/kmol) é a energia de ativação, R (kJ/kmol/K) é a constante dos gases e T é a temperatura absoluta.

A dependência da difusividade D com o teor de umidade é semelhante à mostrada na equação 2.4. Várias expressões mostrando a dependência da difusividade com o teor de umidade e/ou temperatura, válidas para diferentes materiais podem ser vistas em Marinos-

Kouris e Maroulis (1995). Uma destas expressões, válidas para a cenoura e maçã, tem a seguinte forma.

$$D(M, T) = a_0 e^{a_1 M} e^{-a_2 / T}$$

(2.5)

onde M é o teor de umidade, a₁ e a₂ são constantes e T é a temperatura

Assim, a difusividade de massa do material aumenta com o aumento da temperatura e do teor de umidade. Várias outras equações mostrando a dependência deste coeficiente de transporte com a temperatura e/ou teor de umidade serão encontradas em Lima (1999), Strumilo e Kundra (1986).

▪ A condutividade térmica

A medida dos valores da condutividade térmica é feita através de várias técnicas que podem ser agrupadas em métodos transiente e permanente (Marinos-Kouris e Maroulis, 1995).

No método em estado permanente a distribuição de temperatura ao longo da amostra é medida. A amostra é colocada entre uma fonte e um sorvedouro de calor. O método em estado transiente consiste no uso de uma fonte linear ou plana de calor. O procedimento usual é aplicar um fluxo constante de calor na amostra e medir o aumento de temperatura em um de seus pontos.

A condutividade térmica pode variar fortemente com a estrutura física do material, desta forma, em frutas e vegetais a condutividade térmica é uma função da porosidade (ϵ); em geral, quanto maior a porosidade, menor é a condutividade térmica do alimento. A condutividade térmica de um material poroso pode ser estimada a partir da condutividade do material sólido, mais a condutividade do ar e a porosidade (ϵ), (Maroulis et al., 1990, citados por Saravacos e Kostaropoulos, 1995).

▪ Difusividade térmica

Quando a condutividade térmica no interior de um sólido não depender das coordenadas espaciais, a equação de condução do calor expressa pela lei de Fourier pode ser escrita utilizando-se a difusividade térmica. Esta propriedade é definida como:

$$\alpha = k/\rho c_p \quad (2.7)$$

O calor específico e a entalpia dos alimentos dependem fortemente do seu teor de umidade, visto que a água possui o maior calor específico de todos os elementos que entram na composição do alimento. A difusividade térmica de um material homogêneo depende da temperatura e da sua composição, seus valores podem ser determinados através de equações empíricas. Para materiais heterogêneos, tais como sólidos porosos, o efeito da geometria do material deve ser considerada, e a estimação da condutividade térmica pode ser feita utilizando-se de modelos estruturais (Kouris e Maroulis 1995).

2.5.2 Coeficientes de transferência de calor e massa convectivos

Os coeficientes de transporte convectivos de calor e massa na superfície do material estão relacionados com uma pequena camada de ar que envolve o material durante o processo de secagem, denominada camada limite. Existem duas formas para se definir o coeficiente de transporte de massa, uma está relacionada com o teor de umidade do material e a outra com a umidade absoluta do ar de secagem. Em símbolos:

$$J_1 = h_m \rho_a (X_a - X_{as}) \quad (2.8-a)$$

$$J_1 = h_m \rho_s (M - M_{cq}) \quad (2.8-b)$$

onde J_1 ($\text{kg/m}^2/\text{s}$) é o fluxo difusivo de massa, h_m é o coeficiente de transferência convectiva de massa, ρ_a e ρ_s são respectivamente a densidade do ar e do sólido e X_a é a umidade absoluta do ar e X_{as} é a umidade absoluta do ar na superfície.

Já o coeficiente de transferência de calor é definido como sendo o fator de proporcionalidade que aparece na equação que define a lei de Newton para o resfriamento.

$$q = h_H A (T_a - T) \quad (2.9)$$

Os valores dos coeficientes de transferência de calor e massa na superfície do material são influenciados pelas propriedades térmicas do ar, velocidade do ar e rugosidade da superfície do sólido.

2.6 Análise concentrada do processo de secagem

Como apresentado na equação 2.3, o teor de umidade depende da posição dentro do sólido e do tempo, durante o processo de secagem. No entanto, quando os gradientes de umidade dentro do sólido, praticamente inexistem, modelos matemáticos mais simples podem ser utilizados para descrever o teor de umidade médio ao longo do processo de secagem. Segundo Marinou - Kouris e Maroulis (1995) para materiais higroscópios porosos, durante o período de taxa decrescente, a taxa do teor de umidade médio é proporcional à diferença instantânea entre o teor de umidade médio do material e o teor de umidade de equilíbrio higroscópico. Para esta suposição, as condições do ar de secagem são mantidas constantes. Matematicamente pode-se escrever

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -\hat{k}(\bar{M} - \bar{M}_e) \quad (2.9)$$

Me é o teor de umidade de equilíbrio característico do processo.

A constante de secagem \hat{k} , na equação 2.9, incorpora todos os efeitos e parâmetros que influenciam o processo tais como: difusividade de massa, mudanças na estrutura do material, encolhimento etc.

Situações em que gradientes de umidade dentro do material são desprezíveis ocorrem quando se tem uma secagem muito lenta. Podendo existir para secagem a baixas temperaturas e baixa velocidade do ar de secagem, que proporcionam baixos coeficientes de transporte convectivo de massa, ou seja, baixo número do Biot de massa.

CAPÍTULO III

MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 Modelagem de processos físicos

As análises e previsões sobre um determinado processo físico geralmente são feitas a partir da solução de uma ou mais equações diferenciais que descrevem o problema. A solução é obtida conhecendo-se a priori as condições iniciais e de contorno das grandezas físicas que definem o processo. Em vários problemas, as condições de contorno são tais que ficam melhor especificadas se estiverem definidas sobre superfícies esféricas, cilíndricas ou esferoidais. Nestes casos, a equação diferencial em coordenadas cartesianas não é a forma adequada para se resolver o problema, e, outro sistema de coordenadas deve ser utilizado.

A predição da secagem de sólidos úmidos envolve a solução de equações para transferência de calor e massa simultânea e o tratamento matemático deste problema naturalmente é muito complicado. Para reduzir esta complexidade, simplificações são geralmente efetuadas nos modelos. Uma delas por exemplo, é assumir que a secagem ocorre sem os efeitos dos gradientes de temperatura dentro do sólido.

A descrição matemática de um fenômeno é tanto mais complexa quanto mais o modelo utilizado se aproxima da realidade. Em processos de secagem pode haver um encolhimento do material e os coeficientes de difusão podem variar com o teor de umidade e/ou temperatura. Desta forma, uma representação matemática deste problema pode resultar em equações não lineares, tornando a solução analítica difícil de ser obtida. Nestes casos, por serem mais gerais e incorporarem com facilidade as mudanças sofridas pelo sólido durante o processo, uma

solução numérica para o problema é recomendável. As soluções analíticas e/ou numéricas da equação de difusão para vários casos, com coeficiente de difusão constante ou variável e condições de contorno constantes ou de tipo convectivo, para várias geometrias, podem ser encontradas em Carslaw & Jaeger (1957); Luikov (1968); Karkaç e Yener (1993) Crank (1992) e Gebhart (1993); todos para paralelepípedo, cilindro e esferas. Para esferóides prolatos podem ser citados trabalhos de Haji-Sheikh e Sparrow (1966); Lima et al. (1997), Lima e Nebra (1997), Lima e Nebra (1999a e 1999b), Lima (1999) e Lima (2000), enquanto que para esferóide oblato citam-se Haji-Sheikh (1986), Carmo e Lima (2000 a) e (2000 b).

Como o objetivo deste trabalho é apresentar o desenvolvimento e solução numérica de um modelo de difusão de massa em corpos sólidos com geometria do tipo esferoidal oblato, a seguir é apresentada uma metodologia para se obter a equação 2.3, formulada no sistema de coordenadas esferoidais oblato.

3.2 A equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esferoidais oblato

A equação de Fick (equação 2.3) no sistema de coordenadas cartesianas para o caso tridimensional é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial M}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial M}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

Como mencionado esta equação é ideal para descrever o problema de difusão de massa em placas retangulares e em corpos com a forma geral de um paralelepípedo. Para sólidos esferoidais oblatos, o sistema adequado é o esferoidal oblato.

A Figura 3.1 mostra as principais características de um corpo com a geometria esferoidal oblato.

Quando a relação $L_2/L_1 > 1$ tem-se um sólido esferoidal oblato. Para $L_2/L_1 < 1$ tem-se um esferóide prolato. Para $L_2/L_1 = 1$ tem-se uma esfera e para $L_2/L_1 \rightarrow \infty$, o esferóide oblato tende a um disco circular.

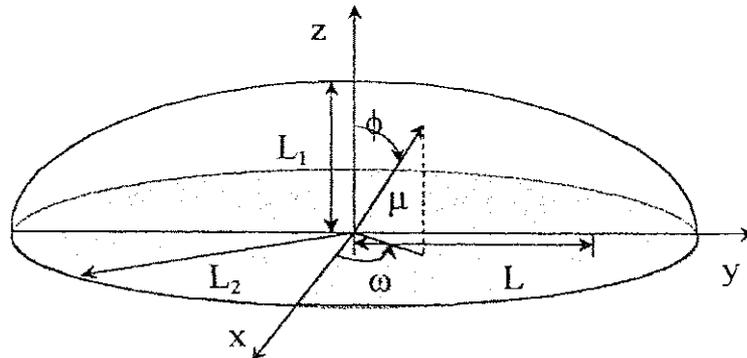


Figura 3.1 - Características de um corpo esferoidal oblato

As relações entre o sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) e o esferoidal oblato (μ, φ, ω) , são as seguintes (Magnus et al., 1966).

$$\begin{aligned} x &= L \cosh \mu \sin \phi \cos \omega \\ y &= L \cosh \mu \sin \phi \sin \omega \\ z &= L \sinh \mu \cos \phi \end{aligned} \quad (3.2)$$

Da Figura 3.1 têm-se também as seguintes relações.

$$\varepsilon = L_2/L \quad (3.3a)$$

$$L_1 = L \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (3.3b)$$

então, combinando as equações 3.3a e 3.3b, pode-se mostrar que:

$$L = \sqrt{L_2^2 - L_1^2} \quad (3.3c)$$

Considerando as seguintes variáveis:

$$\xi = \sinh \mu \qquad \eta = \cos \phi \qquad \zeta = \cos \omega \qquad (3.4)$$

e por substituição direta na equação 3.2, tem-se:

$$\begin{aligned} x &= L \sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)} \zeta \\ y &= L \sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)} \sqrt{1-\zeta^2} \\ z &= L \xi \eta \end{aligned} \qquad (3.5)$$

O domínio das novas variáveis esféricas ξ , η e ζ (em termos de ω) é:

$$0 \leq \xi \leq L_1/L \qquad 0 \leq \eta \leq 1 \qquad 0 \leq \omega \leq 2\pi \qquad (3.6)$$

Informações adicionais sobre o sistema de coordenadas esféricas oblatas podem ser encontradas em Robin (1959), Stratton (1956), Page e Adams (1938); Page (1944a); Page (1944b); Aoi (1955); Acho (1992); Do-Nhat e MacPhie (1996a) e Do-Nhat e MacPhie (1996b). A figura abaixo mostra linhas onde as variáveis ξ e η são constantes.

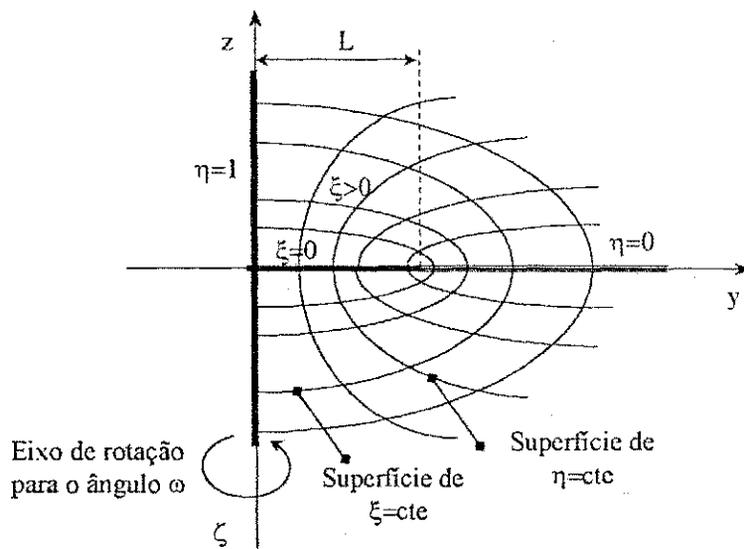


Figura 3.2 – Sistema de coordenadas esféricas oblatas

A equação de difusão no novo sistema de coordenadas será obtida a seguir, baseando-se na metodologia utilizada por Maliska (1995). A equação de conservação, aplicada a um volume de controle e escrita de forma a ser utilizada em um sistema de coordenadas generalizadas, é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \Phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \bar{u} \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho \bar{v} \Phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho \bar{w} \Phi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{13} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{21} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{23} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{31} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{32} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{33} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \\ - P^{\phi} + S^{\phi} \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde J é denominado o jacobiano da transformação e pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Os outros termos da equação 3.7 são definidos por:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{a'}{J^2}; & \alpha_{22} &= \frac{b'}{J^2}; & \alpha_{33} &= \frac{c'}{J^2} \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{d'}{J^2}; & \alpha_{31} = \alpha_{13} &= \frac{e'}{J^2}; & \alpha_{32} = \alpha_{23} &= \frac{f'}{J^2} \\ a' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b' &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \\
c' &= \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \\
d' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \\
e' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\
f' &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Um sistema de coordenadas é dito ser ortogonal se os vetores que definem o sistema forem ortogonais entre si. As condições necessárias e suficientes para que um sistema de coordenadas seja ortogonal são (Mac Robert, 1967):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} &= 0 \\
\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= 0 \\
\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} &= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Pode-se verificar através das equações 3.10 que o sistema de coordenadas esferoidais oblato é um sistema ortogonal. Neste caso, os termos d' , e' e f' na equação 3.9 valem zero. Considerando que o problema é puramente difusivo e sem geração de energia, a equação 3.7 se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{33} J \Gamma \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \tag{3.11}$$

sendo

$$J^{-1} = \frac{L^3(\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\alpha_{11} = \frac{L^4(1+\xi^2)(\xi^2 + \eta^2)}{1-\zeta^2}$$

$$\alpha_{22} = \frac{L^4(1-\eta^2)(\xi^2 + \eta^2)}{1-\zeta^2}$$

$$\alpha_{33} = \frac{L^4(\xi^2 + \eta^2)^2}{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}$$

Substituindo os valores do Jacobiano e dos coeficientes α_{11} , α_{22} e α_{33} , Γ^Φ por ρD e Φ por M na equação 3.11, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} = & \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) D \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) D \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{L^2(\xi^2 + 1)(1-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1-\zeta^2}) D \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta é a equação de difusão escrita no sistema de coordenadas esferoidais oblato.

Como o sólido apresentado na Figura 3.1 é resultante da rotação de uma superfície elíptica em torno do eixo z, existe uma simetria em torno deste eixo, a derivada $\partial/\partial\omega$ será zero, implicando que $\partial/\partial\zeta=0$. Por conseguinte o terceiro termo da equação 3.12 é zero, reduzindo-a à seguinte forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) D \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) D \frac{\partial M}{\partial \eta} \right] \quad (3.13)$$

Outras quantidades transformadas podem ser dadas através das seguintes relações Magnus et al. (1966); Brodkey (1967); Abromowitz e Stegun (1972) e Kreyszig (1988):

- Volume diferencial:

$$dV = \frac{1}{\hat{U}\hat{V}\hat{W}} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.14)$$

- Áreas diferenciais de fluxo de Φ :

$$dS_\xi = \frac{1}{\hat{V}\hat{W}} d\eta d\zeta \quad (3.15)$$

$$dS_\eta = \frac{1}{\hat{W}\hat{U}} d\zeta d\xi \quad (3.16)$$

$$dS_\zeta = \frac{1}{\hat{U}\hat{V}} d\xi d\eta \quad (3.17)$$

- Gradiente de Φ

$$\nabla\Phi = \left(\hat{U} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}; \hat{V} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}; \hat{W} \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right) \quad (3.18)$$

onde

$$\frac{1}{\hat{U}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\hat{V}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{\hat{W}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (3.21)$$

Os parâmetros \hat{U} , \hat{V} e \hat{W} são chamados de coeficientes métricos da transformação. É possível demonstrar que o produto dos coeficientes métricos dá como resultado o próprio jacobiano da transformação (J). Com a substituição dos coeficientes métricos nas equações de 3.14 a 3.21, obtém-se:

$$dV = \frac{L^3(\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.22)$$

$$dS_\xi = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + 1)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\eta d\zeta \quad (3.23)$$

$$dS_\eta = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(1-\eta^2)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\xi d\zeta \quad (3.23a)$$

$$dS_\zeta = \frac{L^2(\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1-\eta^2)}} d\xi d\eta \quad (3.23b)$$

$$\nabla M = \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \xi}; \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta}; \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{(\xi^2 + 1)(1-\eta^2)}} \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \quad (3.24)$$

A área superficial de um esferóide oblato é dada por (Selby, 1971):

$$S = 2\pi L_2^2 + \frac{\pi L_1^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}} \right) \quad (3.25)$$

O volume de um esferóide oblato é obtido pela integração da equação 3.22 sobre todo o domínio físico, e, é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi L_1 L_2^2 \quad (3.26)$$

3.3 Solução numérica da equação de difusão em corpos esferoidais oblatos

Soluções analíticas de problemas difusivos com geometrias dos tipos retangular, cilíndrica ou esférica, que usam técnicas que transformam a equação diferencial parcial de difusão em equações lineares são facilmente encontrados em livros textos ou trabalhos científicos. Quando a representação matemática do problema exige equações não-lineares ou a utilização de geometrias complexas, diferentes das citadas acima, a solução analítica em geral se torna complexa e de difícil obtenção, nestes casos, uma solução numérica para a equação é mais apropriada, ou, muitas vezes a única possível. Com o advento dos computadores com memórias e velocidades de operação cada vez maiores, aliado ao número crescente de profissionais trabalhando com técnicas numéricas, a solução de um determinado problema físico utilizando-se de técnicas computacionais vem se tornando cada vez mais viável.

O método numérico, em síntese, transforma a equação diferencial parcial que descreve o problema, em um conjunto ou sistema de equações algébricas lineares a ser determinado. A solução deste sistema resulta nos valores da grandeza física que está sendo analisada, em pontos discretos do domínio de interesse.

Pode-se encontrar com facilidade na literatura atual o desenvolvimento de várias técnicas numéricas. Normalmente, cada termo da equação envolvendo as diferenciais, são aproximadas por somas ou diferenças de valores pontuais da grandeza física representativa do fenômeno, localizadas em pontos discretos do domínio, denominados de pontos nodais. Neste

trabalho, será utilizado para a obtenção do sistema de equações algébricas, o método dos volumes finitos.

Naturalmente existem outros métodos que poderiam ser empregados aqui, tais como: elementos finitos, diferenças finitas e elementos de fronteira. Várias discussões sobre cada um destes métodos podem ser encontradas nos trabalhos de Shih, (1984); Minkowicz et al., (1988); Patankar, (1980) e Maliska, (1995).

3.3.1 Discretização da equação de difusão.

A formulação numérica para um problema qualquer começa com a identificação do domínio de interesse e, a partir daí sua subdivisão em um número finito de sub-domínios. A proposta deste trabalho é a difusão de massa no sólido ilustrado na Figura 3.1. Pode ser observado para um sólido esferoidal oblato, planos de simetria que passam pelos pontos $(x=0, y=0, z=0)$ e $(x=0, y=L_2, z=0)$, em particular, o plano $x \times y \perp z$. Outros planos de simetria passam pelos pontos $(x=0, y=0, z=0)$ e $(x=0, y=0, z=L_1)$, em particular o plano $z \times y \perp x$.

Na Figura 3.3 são mostradas as linhas com ξ e η constantes, e que delimitam cada um dos pontos nodais "P", distribuídos ao longo do domínio. Os pontos nodais N, S, E, W vizinhos a "P", bem como as respectivas dimensões e distâncias de P a seus vizinhos também são mostrados.

A interseção das linhas ξ e η em torno dos pontos "p" definem a malha numérica. Como já mencionado anteriormente, o sistema esferoidal oblato é ortogonal, então, o cálculo do fluxo de Φ através das faces do volume de controle é facilitado pois as linhas que unem dois pontos nodais são perpendiculares à face (por exemplo, a linha PN na Figura 3.3).

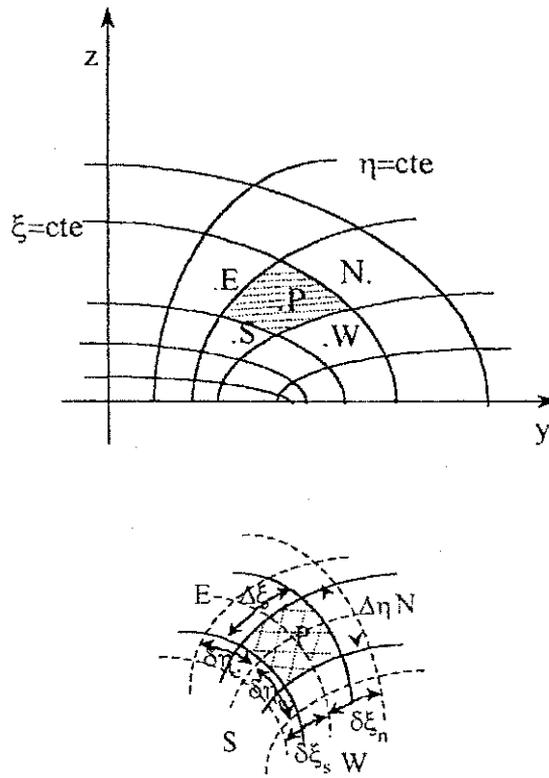


Figura 3.3 – Superfície contínua subdividida em pontos nodais

O método dos volumes finitos consiste na integração da equação 3.11 para cada volume de controle, ao longo de toda a malha mostrada na Figura 3.3. Assumindo uma formulação totalmente implícita, isto é, o valor da variável Φ em um ponto nodal é admitido ser constante durante todo o intervalo de tempo Δt , e igual ao valor de Φ no instante $t + \Delta t$. Integrando-se a equação 3.11, no volume e no tempo para todos pontos internos do volume de controle tem-se que (Patankar, 1980; Maliska, 1995):

$$\frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\rho_p \Phi_p - \rho_p^o \Phi_p^o}{\Delta t} \right] = \left[D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n - D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_s \right] + \left[D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_e - D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_w \right] \quad (3.27)$$

Na equação 3.27, os coeficientes D_{ij} valem:

$$D_{11} = \Gamma^\phi J \alpha_{11} \Delta \eta \Delta \zeta; \quad D_{22} = \Gamma^\phi J \alpha_{22} \Delta \xi \Delta \zeta \quad \Delta V = \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \quad (3.28)$$

A principal vantagem da utilização do procedimento totalmente implícito é que este é incondicionalmente estável (Patankar, 1980). Para o problema proposto, levam-se em consideração apenas efeitos difusivos; nestes casos, é razoável utilizar uma função linear como função de interpolação espacial entre os pontos nodais. Desta forma a aproximação para as derivadas pode ter a seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta \xi_n}; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\delta \xi_s} \quad (3.29)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta \eta_e}; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta \eta_w}$$

Substituindo as equações 3.28 e 3.29, juntamente com os valores conhecidos de J e α_{ij} na equação (3.27), obtêm-se a equação de difusão na forma algébrica, aplicada para cada ponto "P" do domínio de interesse, dada por.

$$A_p \phi_p = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_p^0 \Phi_p^0 \quad (3.30)$$

onde

$$A_N = \frac{\Gamma_n^\phi L (\xi_n^2 + 1)}{\delta \xi_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}} \Delta \eta;$$

$$A_S = \frac{\Gamma_s^\phi L (\xi_s^2 + 1)}{\delta \xi_s \sqrt{1 - \zeta_s^2}} \Delta \eta$$

$$A_E = \frac{\Gamma_e^\phi L (1 - \eta_e^2)}{\delta \eta_e \sqrt{1 - \zeta_e^2}} \Delta \xi;$$

$$A_W = \frac{\Gamma_w^\phi L (1 - \eta_w^2)}{\delta \eta_w \sqrt{1 - \zeta_w^2}} \Delta \xi$$

$$A_p^0 = \frac{\Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_p^2 + \eta_p^2) \rho_p^0}{\Delta t \sqrt{1 - \zeta_p^2}}$$

$$A_p = A_N + A_S + A_E + A_W + \frac{\rho_p \Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_p^2 + \eta_p^2)}{\Delta t (\sqrt{1 - \zeta_p^2})}$$

Como a difusão está sendo considerada em um plano com ζ constante, os termos envolvendo $1 - \zeta$, na equação 3.0, podem ser eliminados. A equação 3.30 é válida para uma propriedade Φ qualquer; no caso de substituição de Φ por M (teor de umidade) e de Γ^Φ por ρD e, considerando a densidade do corpo constante durante o processo, a equação 3.30 assumirá da seguinte forma:

$$A_P M_P = A_N M_N + A_S M_S + A_E M_E + A_W M_W + A_P^0 M_P^0 \quad (3.31)$$

onde:

$$A_N = \frac{D_n (\xi_n^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n}; \quad A_S = \frac{D_s (\xi_s^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s}$$

$$A_E = \frac{D_e (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e}; \quad A_W = \frac{D_w (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w}$$

$$A_P^0 = \frac{\Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_P^2 + \eta_P^2)}{\Delta t} \quad A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_P^0$$

Se Φ for substituído T , ρ por ρc_p e Γ^Φ por k a equação 3.30 passa a representar a equação de condução de calor.

A equação 3.31 é válida para todos os pontos internos ao domínio computacional, no entanto, ela não é aplicada aos pontos nodais situados nos volumes adjacentes às fronteiras que delimitam o corpo e sua vizinhança. Para estes volumes de fronteira, o procedimento é realizar a integração das equações de conservação ao longo de cada um deles, considerando as condições de contorno pertinentes ao problema. A Figura 3.4 apresenta um ponto nodal de fronteira e suas dimensões e variáveis características.

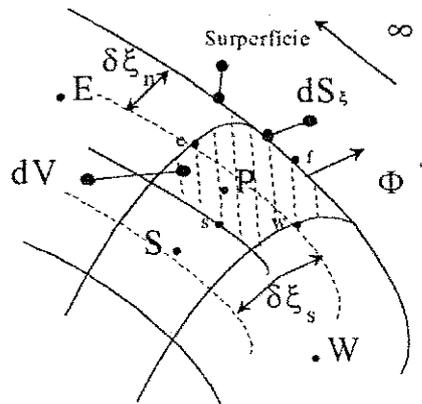


Figura 3.4 – Ponto nodal de fronteira do corpo

Para a integração espacial nos volumes de fronteira, deve-se especificar os fluxos difusivos através dos pontos "f". Três tipos diferentes de condições de contorno podem ser utilizados: ϕ prescrito, fluxo de ϕ prescrito e convecção.

- Φ prescrito

$$\Phi^r = \Gamma_n^\phi \left(\frac{\Phi_n - \Phi_P}{\delta\xi_n} \right) \quad (3.32)$$

onde Φ_n é a propriedade especificada na fronteira.

- Fluxo de Φ prescrito

$$\Phi^r dS_\xi = \text{valor conhecido} = D_{11} \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_n} \right|_n \quad (3.33)$$

Neste caso, o valor de Φ^r deve ser substituído pelo valor prescrito do fluxo na fronteira.

- Convecção

Neste caso, o fluxo difusivo que atravessa a fronteira é igual ao fluxo convectivo nas vizinhanças da mesma.

$$\Phi'' dS_{\xi} = D_{11} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\text{in}} = \text{fluxo convectivo} \quad (3.34)$$

A integração da equação de difusão (3.11) para os volumes de fronteira (ponto “p” da Figura 3.4) dará o seguinte resultado:

$$\frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\rho_p \Phi_p - \rho_p^0 \Phi_p^0}{\Delta t} \right] = \left[\mathfrak{I} \Phi'' dS_{\xi} - D_{11} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_c - \left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \quad (3.35)$$

Comparando as equações 3.35 com a 3.27, vê-se que o termo representativo do fluxo através da fronteira norte foi substituído por $\mathfrak{I} \Phi'' dS_{\xi}$. Isto deve-se ao fato de que para pontos nodais localizados na fronteira, não existindo um valor definido para o ponto vizinho Φ_N , não existirá o termo $A_N \Phi_N$ que aparece na equação 3.27. No lugar deste termo aparecerá o fluxo especificado pela condição de contorno. Este procedimento para a discretização dos pontos nos volumes de fronteira não é o único, outra alternativa, por exemplo, seria a criação de volumes fictícios em torno da fronteira do corpo. Esta técnica, descrita em Maliska (1995), tem como principal desvantagem o aumento do tamanho da malha numérica, implicando em um maior tempo e esforço computacional. Na equação 3.35, D_{11} e D_{22} tem o mesmo significado já mencionado anteriormente e, para o caso de difusão de massa, \mathfrak{I} é igual a ρ e para a difusão de calor $\mathfrak{I} = 1$.

3.4 Modelos difusionais

Até então foi desenvolvida uma formulação geral para a transformação de sistemas de coordenadas e a discretização da equação de difusão, ou seja, a obtenção de um sistema de equações lineares a partir da equação diferencial que descreve o problema. A solução deste sistema de equações dará os valores da propriedade em estudo, nos pontos discretos pertencentes ao domínio computacional escolhido. A seguir, em função de determinadas características das propriedades físico-químicas do material e das condições de contorno a que

pode estar submetido este material durante o processo de difusão, dois modelos matemáticos distintos são descritos.

3.4.1 Modelo A – Difusão com condição de equilíbrio na superfície.

▪ Formulação Analítica

As seguintes simplificações para a formulação matemática do problema foram consideradas:

- a) O produto é assumido ser homogêneo e isotrópico;
- b) O processo de difusão na partícula individual ocorre sob taxa decrescente;
- c) A condução de calor através do esferóide oblato é desconsiderada, isto é, a partícula entra imediatamente em equilíbrio térmico com o ar de secagem;
- d) O campo do teor de umidade é considerado ser axi-simétrico em torno do eixo z, constante e uniforme no início do processo;
- e) As propriedades termo físicas são constantes, durante o processo, isto é, são independentes da posição e do teor de umidade no interior do produto;
- f) Não há efeito de capilaridade;
- g) O encolhimento volumar do material é desprezível durante o processo;
- h) O processo ocorre sob condições de equilíbrio na superfície, com teor de umidade constante e igual ao teor de umidade de equilíbrio;

A seguir, são dadas as condições iniciais e de contorno para este problema de difusão.

- Superfície livre: o teor de umidade é constante e igual ao teor de umidade de equilíbrio.

$$M(\xi = \xi_f, \eta, t) = M_e \quad (3.36)$$

onde M_e é constante e $\xi_f = L_1/L$ na superfície do sólido.

- Planos de simetria: os gradientes radiais e angulares do teor de umidade são iguais a zero nos planos de simetria.

$$\frac{\partial M(\xi, 1, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(\xi, 0, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(0, \eta, t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.37)$$

- Condição inicial no interior do sólido.

$$M(\xi, \eta, 0) = M_0 = \text{constante} \quad (3.38)$$

Para generalizar os resultados, uma prática comum e bastante recomendável na literatura é obter a equação de difusão na forma adimensional. O problema ao ser apresentado nesta forma, tem uma solução independente de valores particulares de cada um dos parâmetros D , t , L_1 e L_2 , dependendo apenas de valores globais tais como o número de Fourier e a razão de aspecto.

Para se obter a equação de difusão na forma adimensional considera-se as seguintes definições das variáveis dimensionais:

$$M^* = \frac{M - M_e}{M_0 - M_e} \quad \eta^* = \eta \quad \xi^* = \xi \quad t_m^* = \frac{Dt}{L^2} \quad V^* = \frac{V}{L^3} \quad (3.39a-d)$$

Por substituição da equação 3.39 a-d e suas derivadas na equação 3.13, tem-se a seguinte equação na forma adimensional:

$$\frac{\partial M^*}{\partial t_m^*} = \frac{1}{\left[(\xi^*)^2 + (\eta^*)^2 \right]} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left[(\xi^*)^2 + 1 \right] \frac{\partial M^*}{\partial \xi^*} \right\} + \frac{1}{\left[(\xi^*)^2 + (\eta^*)^2 \right]} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left[1 - (\eta^*)^2 \right] \frac{\partial M^*}{\partial \eta^*} \right\} \quad (3.40)$$

Na formulação onde são consideradas as variáveis adimensionais, as condições iniciais e de contorno são dadas por:

$$M^*(\xi^* = \xi_f^*; \eta^*; t_m^*) = 0 \quad M^*(\xi^*, \eta^*, 0) = 1 \quad (3.41a-b)$$

$$\frac{\partial M^*(\xi^*, 1, t_m^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial M^*(\xi^*, 0, t_m^*)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \frac{\partial M^*(0, \eta^*, t_m^*)}{\partial \xi^*} = 0 \quad (3.41c-e)$$

Aqui, t_m^* é designado por número de Fourier. Ele é definido como sendo a razão entre a taxa de difusão de massa no sólido e a taxa de acúmulo de massa no mesmo (Incropera e de Witt, 1990).

No modelo de difusão líquida, o transporte de umidade no sólido é gerado a partir de um gradiente do teor de umidade no interior do mesmo. Sabe-se também que o teor de umidade no interior do sólido durante o estado transiente do processo de difusão é uma função da posição e do tempo, logo, pode-se definir para o sólido um teor de umidade médio. Este teor de umidade médio é dado por (Whitaker, 1990):

$$\bar{M} = \frac{1}{V} \int_V M dV \quad (3.42)$$

Na forma adimensional tem-se:

$$\bar{M}^* = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} M^* dV^* \quad (3.43)$$

ou ainda,

$$\bar{M}^* = \frac{1}{\int_0^1 \int_0^1 \left[(\xi^*)^2 + (\eta^*)^2 \right] d\xi^* d\eta^*} \int_0^1 \int_0^1 M^*(\xi^*, \eta^*) \left[(\xi^*)^2 + (\eta^*)^2 \right] d\xi^* d\eta^* \quad (3.44)$$

onde V^* é o volume total no domínio considerado ($0 \leq \xi \leq L_1/L$ e $0 \leq \eta \leq 1$)

▪ **Formulação Numérica**

Partindo da equação 3.40 e realizando-se um procedimento numérico similar ao que foi empregado anteriormente, pode ser obtida a seguinte equação algébrica para os pontos nodais pertencentes ao domínio computacional:

$$A_P M_P^* = A_E M_E^* + A_W M_W^* + A_N M_N^* + A_S M_S^* + A_P^0 M_P^0 \quad (3.45)$$

Onde:

$$A_E = \frac{(1 - \eta_e^{*2})}{\delta \eta_e^*} \Delta \xi^* ; \quad A_W = \frac{(1 - \eta_w^{*2})}{\delta \eta_w^*} \Delta \xi^*$$

$$A_N = \frac{(\xi_n^{*2} + 1)}{\delta \xi_n} \Delta \eta^* ; \quad A_S = \frac{(\xi_s^{*2} + 1)}{\delta \xi_s^*} \Delta \eta^*$$

$$A_P^0 = \frac{(\xi_p^{*2} + \eta_p^{*2})}{\Delta t_m^*} \Delta \eta^* \Delta \xi^* \quad A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0$$

A equação 3.45 é válida para todos os elementos internos do domínio inclusive os pontos de fronteira.

Nos pontos próximos aos eixos y e z, baseando-se na existência de simetrias do corpo, é razoável fazer as seguintes aproximações:

$$M^*(\xi^*, \eta^* = 0, t_m^*) = M^*(\xi^*, \eta^* = \frac{\Delta \eta}{2}, t_m^*) \quad (3.46-a)$$

$$M^*(\xi^* = 0, \eta^*, t_m^*) = M^*(\xi^* = \frac{\Delta\xi^*}{2}, \eta^*, t_m^*) \quad (3.46-b)$$

$$M^*(\xi^*, \eta^* = 1, t_m^*) = M^*(\xi^*, \eta^* = 1 - \frac{\Delta\eta^*}{2}, t_m^*) \quad (3.46-c)$$

A equação 3.45 aplicada a todos os volumes de controle da malha numérica, juntamente com as aproximações mostradas nas equações 3.46a-c definem o sistema de equações algébricas a ser resolvido. A solução deste sistema dará os valores do teor de umidade em pontos discretos do domínio estudado.

O teor de umidade médio do material em um determinado instante é dado por:

$$\bar{M}^* = \frac{1}{V^*} \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{m-1} M_{i,j}^* \Delta V_{ij}^* \quad (3.47)$$

onde m e n são respectivamente o número de pontos nas direções das coordenadas ξ e η e os pares (i, j) dão a localização destes pontos na malha.

A malha numérica utilizada é ortogonal, regular e definida em coordenadas esferoidais oblatas. A distância do j -ésimo ponto nodal ao eixo y é dado por:

$$\xi_j^* = (j-1) \frac{\Delta\xi^*}{2}; \quad j = 1, 2, 4, \dots, m \quad (3.48)$$

sendo

$$\Delta\xi^* = \frac{\frac{L_1}{m-1}}{2}, \quad \text{com } m \text{ ímpar}$$

representando o espaçamento entre duas coordenadas ξ^* consecutivas. Similarmente, a distancia do i -ésimo ponto nodal ao eixo z é dado por:

$$\eta_i^* = (i-1) \frac{\Delta\eta^*}{2}, \quad i = 1, 2, 4, \dots, n \quad (3.49)$$

sendo

$$\Delta\eta^* = \frac{1}{\frac{n-1}{2}} \quad \text{com } n \text{ impar}$$

representando o espaçamento entre duas coordenadas η^* consecutivas.

Para resolver o conjunto de equações gerado pelas equações 3.45, foi utilizado um programa computacional codificado em Fortran, desenvolvido por Lima (1999), que utiliza o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver o sistema de equações algébricas gerado a partir da equação discretizada, o qual foi adaptado para problema objeto deste trabalho.

Para cada intervalo de tempo, a convergência da solução numérica é admitida se for satisfeito o seguinte critério:

$$\left| M^{*k-1} - M^{*k} \right| \leq 10^{-8}, \quad \text{para cada ponto nodal} \quad (3.50a)$$

onde k representa a k -ésima interação em cada instante de tempo.

No que se refere aos pontos localizados nos planos de simetria, estes não entram no conjunto de equações a ser resolvido. Após a resolução do sistema de equações, sua estimativa é feita. Para esta estimativa, é assumido que o fluxo de umidade na direção da coordenada esferoidal (angular ou radial) nas faces do volume de controle é igual à taxa de variação da propriedade com o tempo nesse mesmo volume. Matematicamente, pode-se escrever:

□ Para os pontos em $\eta=0$ ($L \leq y < L_2$)

$$\frac{-D}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_e = \frac{-D}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_w \quad (3.51)$$

Discretizando e arranjando os termos, tem-se:

$$M_W = \left[1 + \frac{\frac{D_e}{\delta \eta_e} \sqrt{\frac{1-\eta_e^2}{\xi_P^2 + \eta_e^2}}}{\frac{D_P}{\delta \eta_w} \sqrt{\frac{1-\eta_w^2}{\xi_P^2 + \eta_w^2}}} \right] M_P - \frac{\frac{D_e}{\delta \eta_e} \sqrt{\frac{1-\eta_e^2}{\xi_P^2 + \eta_e^2}}}{\frac{D_P}{\delta \eta_w} \sqrt{\frac{1-\eta_w^2}{\xi_P^2 + \eta_w^2}}} M_E \quad (3.52)$$

Para o coeficiente de difusão constante e utilizando-se das variáveis adimensionais tem-se que:

$$M_W^* = \left[1 + \frac{\frac{+1}{\delta \eta_e^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_e^*)^2}{(\xi_P^*)^2 + (\eta_e^*)^2}}}{\frac{+1}{\delta \eta_w^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_w^*)^2}{(\xi_P^*)^2 + (\eta_w^*)^2}}} \right] M_P^* - \frac{\frac{+1}{\delta \eta_e^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_e^*)^2}{(\xi_P^*)^2 + (\eta_e^*)^2}}}{\frac{+1}{\delta \eta_w^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_w^*)^2}{(\xi_P^*)^2 + (\eta_w^*)^2}}} M_E^* \quad (3.53)$$

□ Para pontos em $\eta=1,0$ ($0 \leq z \leq L_1$)

$$\frac{-D}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_w = \frac{-D}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_e \quad (3.54)$$

Discretizando e rearranjando os termos, tem-se:

$$M_E = \left[1 + \frac{\frac{D_w}{\delta\eta_w} \sqrt{\frac{1-\eta_w^2}{\xi_P^2 + \eta_w^2}}}{\frac{D_p}{\delta\eta_c} \sqrt{\frac{1-\eta_c^2}{\xi_P^2 + \eta_c^2}}} \right] M_P - \frac{\frac{D_w}{\delta\eta_w} \sqrt{\frac{1-\eta_w^2}{\xi_P^2 + \eta_w^2}}}{\frac{D_e}{\delta\eta_c} \sqrt{\frac{1-\eta_c^2}{\xi_P^2 + \eta_c^2}}} M_W \quad (3.55)$$

ou ainda, usando-se das variáveis adimensionais, com a consideração de que o coeficiente de difusão é constante, pode-se escrever:

$$M_E^* = \left[1 + \frac{\frac{1}{\delta\eta_w^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_w^*)^2}{(\xi_P^*)^2 + (\eta_w^*)^2}}}{\frac{1}{\delta\eta_c^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_c^*)^2}{(\xi_P^*)^2 + (\eta_c^*)^2}}} \right] M_P^* - \frac{\frac{1}{\delta\eta_w^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_w^*)^2}{(\xi_P^*)^2 + (\eta_w^*)^2}}}{\frac{1}{\delta\eta_c^*} \sqrt{\frac{1-(\eta_c^*)^2}{(\xi_P^*)^2 + (\eta_c^*)^2}}} M_W^* \quad (3.56)$$

□ Para os pontos $\xi=0,0$ ($0 \leq y \leq L$)

$$\frac{-D}{L} \sqrt{\frac{\xi^2+1}{\xi^2+\eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \Big|_n = \frac{-D}{L} \sqrt{\frac{\xi^2+1}{\xi^2+\eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \Big|_s \quad (3.57)$$

Discretizando tem-se:

$$M_S = \left[1 + \frac{\frac{D_n}{\delta\xi_n} \sqrt{\frac{\xi_n^2+1}{\xi_n^2+\eta_P^2}}}{\frac{D_e}{\delta\xi_s} \sqrt{\frac{\xi_s^2+1}{\xi_s^2+\eta_P^2}}} \right] M_P - \frac{\frac{D_n}{\delta\xi_n} \sqrt{\frac{\xi_n^2+1}{\xi_n^2+\eta_P^2}}}{\frac{D_p}{\delta\xi_s} \sqrt{\frac{\xi_s^2+1}{\xi_s^2+\eta_P^2}}} M_N \quad (3.58)$$

Na base das variáveis adimensionais, tem-se que:

$$M_S^* = \left[\frac{1}{\delta \xi_n^*} \sqrt{\frac{(\xi_n^*)^2 + 1}{(\xi_n^*)^2 + (\eta_P^*)^2}} \right] \frac{1}{\delta \xi_n^*} \sqrt{\frac{(\xi_n^*)^2 + 1}{(\xi_n^*)^2 + (\eta_P^*)^2}} M_N^* \quad (3.59)$$

$$\left[\frac{1}{\delta \xi_s^*} \sqrt{\frac{(\xi_s^*)^2 + 1}{(\xi_s^*)^2 + (\eta_P^*)^2}} \right] \frac{1}{\delta \xi_s^*} \sqrt{\frac{(\xi_s^*)^2 + 1}{(\xi_s^*)^2 + (\eta_P^*)^2}}$$

Outras formas de extrapolação de resultados podem ser utilizadas, por exemplo assumir uma função polinomial da propriedade em cada uma das coordenadas, de tal forma que $M=M(\xi)$ ou $M=M(\eta)$ em cada instante de tempo.

3.4.2 Modelo B - Difusão com condição convectiva na superfície do sólido

▪ Formulação analítica

No estudo deste modelo foi assumido todas as considerações feitas para o modelo A, exceto a condição de que o teor de umidade na superfície seja constante e igual ao teor de umidade de equilíbrio. No modelo B, o fenômeno de difusão ocorre sob condição convectiva, sendo o teor de umidade na superfície dependente da posição angular e do tempo.

As condições inicial e de simetria são idênticas às apresentadas no modelo A. A condição de contorno na superfície do sólido é a seguinte.

- fluxo difusivo é igual ao fluxo convectivo de umidade na superfície do esferoide oblato

$$\frac{-D}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=\xi_r} = h_m [M(\xi = \xi_r; \eta; t) - M_e] \quad (3.60)$$

Com este modelo, para que se possa ter a equação de difusão na forma adimensional, deve-se acrescentar às variáveis adimensionais já definidas para o modelo A, o número de Biot que é definido por:

$$Bi = \frac{h_m L}{D} \quad (3.61)$$

O número de Biot é definido como a razão entre a resistência convectiva à transferência de massa e a resistência interna ao fluxo de massa, medidos na superfície do corpo.

As condições inicial e de simetria do corpo no modelo B escritas na sua forma adimensional são idênticas àquelas mostradas para o modelo A. A condição de contorno na superfície do sólido na forma adimensional é dada por:

$$M^* \left(\xi^* = \xi_f; \eta^*; t_m^* \right) = \frac{-1}{Bi} \sqrt{\frac{\xi^{*2} + 1}{\xi^{*2} + \eta^{*2}}} \frac{\partial M^*}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^* = \xi_f} \quad (3.62)$$

A equação de difusão escrita na forma adimensional para este modelo é a mesma que foi mostrada no modelo A (equação 3.40).

- **Formulação numérica**

Partindo da equação de difusão escrita na sua forma adimensional, equação 3.40, e integrando todos os seus termos no volume e no tempo, seguindo a mesma metodologia já apresentada anteriormente para o modelo A, obtém-se o mesmo sistema de equações lineares gerado pela equação 3.45. Para a determinação das equações discretizadas válidas para os pontos de fronteira adota-se o seguinte procedimento.

Cada termo da equação 3.60 representa o fluxo de umidade por unidade de área (M''). Esta equação na forma discretizada pode ser escrita na forma:

$$M'' = h_m [M_f - M_e] = \frac{D}{L} \frac{\sqrt{\xi_f^2 + 1}}{\sqrt{\xi_f^2 + \eta_p^2}} \left(\frac{M_p - M_f}{\delta \xi_s} \right) \quad (3.63)$$

Isolando o valor de M_f na equação 3.63 e substituindo-o no termo que representa o fluxo convectivo otem-se:

$$M'' = \frac{(M_p - M_e)}{\frac{1}{h_m} + \frac{\delta \xi_s L}{D \sqrt{\xi_f^2 + 1}}} \quad (3.64)$$

Substituindo o valor de $\Phi'' = M''$, $\mathfrak{I} = \rho$, os coeficientes D_{ij} , o valor de dS_ξ e todos os termos de derivada na forma aproximada, na equação 3.35 e ainda utilizando das variáveis adimensionais já definidas, obtém-se a seguinte equação na forma discretizada.

$$A_p M_p^* = A_E M_E^* + A_W M_W^* + A_S M_S^* + A_p^0 M_p^0 \quad (3.65)$$

onde os termos A_E , A_W , A_S e A_p^0 , são idênticos aos apresentados no modelo A. O coeficiente A_p é dado por:

$$A_p = \sum A_K + A_p^0 + \overline{SM} \quad (3.66)$$

com:

$$\overline{SM} = \frac{\Delta \eta^*}{\frac{1}{Bi \left(\sqrt{(\xi_f^*)^2 + (\eta_p^*)^2} \right) \sqrt{(\xi_p^*)^2 + 1}} + \frac{\delta \xi_n^*}{(\xi_f^*)^2 + 1}} \quad (3.67)$$

A quantidade \overline{SM} é um termo fonte que contém o efeito convectivo na superfície e que é adicionado ao ponto nodal de fronteira. Esta é uma formulação geral para o modelo com

condição convectiva na superfície. No caso particular do número de Biot ser infinito, este modelo recai no modelo A. De fato, se na equação 3.67 $Bi \rightarrow \infty$, o termo \overline{SM} será o coeficiente A_N , que é o termo representativo do fluxo difusivo da propriedade através da fronteira norte, encontrado na formulação do modelo A.

Similarmente ao modelo A, os pontos situados nos planos de simetria não entram no sistema de equações a ser resolvido. Seus valores são estimados similarmente ao modelo A. Os pontos situados na superfície do sólido são encontrados a partir da equação 3.64, na forma adimensional discretizada e são dados por:

$$M_f^* = \frac{1}{1 + \frac{Bi\delta\xi_s^*}{\sqrt{\frac{(\xi_f^*)^2 + 1}{(\xi_f^*)^2 + (\eta_f^*)^2}}} } \quad (3.68)$$

Os pontos M_f não são pontos que pertencem à malha numérica (pontos nodais), eles são estimados à parte, depois que o sistema de equação envolvendo todos os pontos nodais é resolvido.

A Figura 3.5 apresenta um diagrama de blocos do programa computacional utilizado neste trabalho.

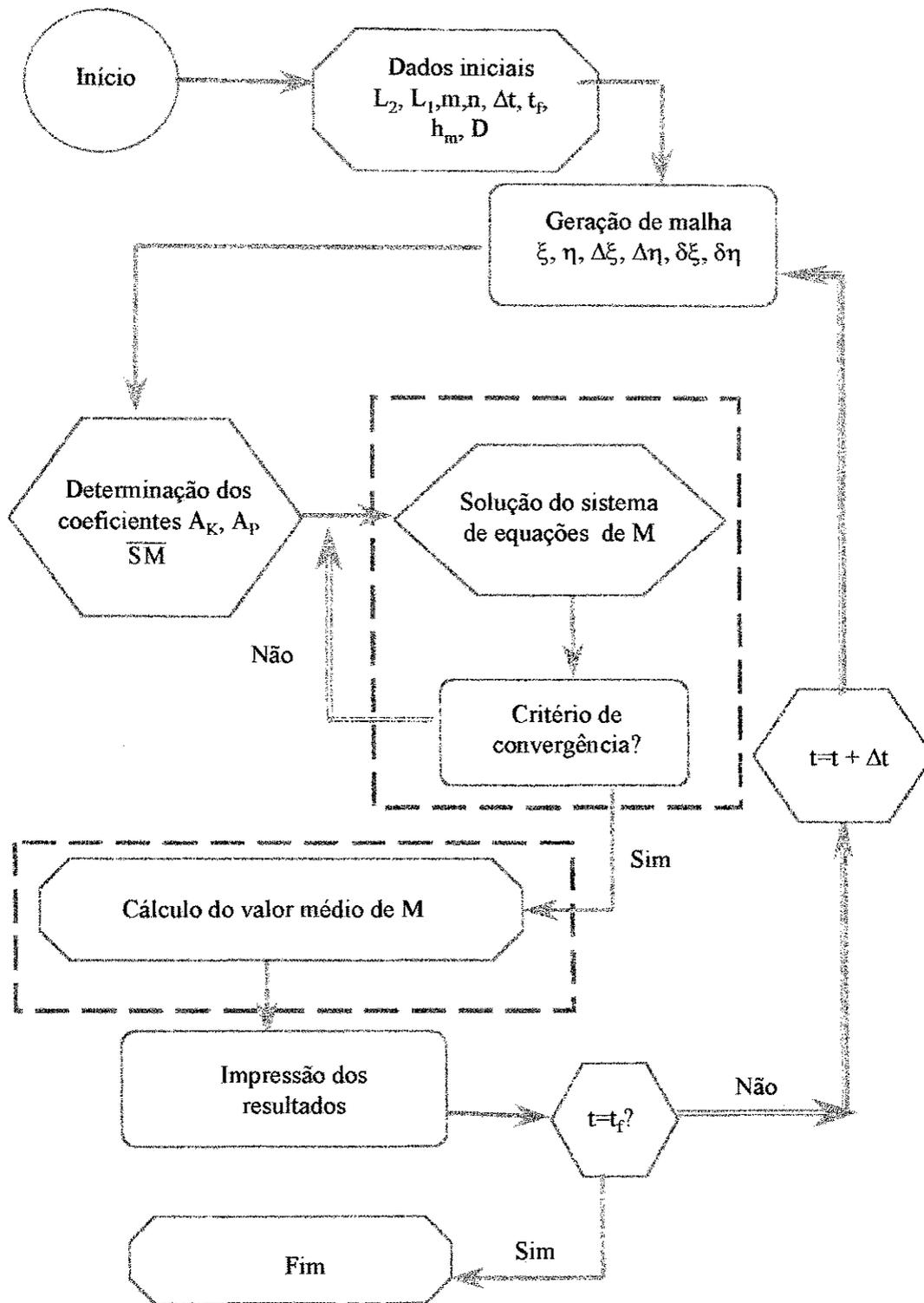


Figura 3.5 – Diagrama de blocos do programa computacional

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Introdução

Dados obtidos através da solução analítica ou numérica de uma equação diferencial que descreve um problema físico, normalmente diferem de resultados experimentais. No caso da secagem de corpos sólidos considerando a difusão líquida como mecanismo de transporte de umidade no interior do produto, estas discrepâncias podem ter como causa a consideração da difusividade constante ao longo de todo o processo de secagem e/ou a escolha inadequada das condições de contorno envolvendo a solução da equação, dependendo do produto em estudo, além de outros fatores.

O modelo matemático apresentado neste trabalho é capaz de prever o comportamento do teor de umidade de um produto com geometria de um esferóide oblato, em função da posição e do tempo. Esta análise pode ser feita em corpos esferoidais com geometria variando desde um disco circular ($L_2/L_1 \rightarrow \infty$) até uma esfera ($L_2/L_1 = 1,00$).

Dois tipos de resultados são mostrados: o primeiro com respeito à cinética da secagem do produto e o outro com respeito aos perfis de teor de umidade no seu interior, durante o processo de secagem. Estes resultados são obtidos com a utilização de duas diferentes condições de contorno aplicadas na superfície do corpo.

4.2 Resultados numéricos

4.2.1 Refinamento de malha e de tempo

Os resultados numéricos obtidos a partir da discretização de uma equação diferencial parcial são influenciados pelo número de pontos que irá formar a malha numérica e do intervalo de tempo Δt , entre dois valores consecutivos (no tempo) da variável estudada, para um mesmo ponto da malha. Para uma escolha otimizada destes valores, vários resultados obtidos com o modelo A, para 3 padrões de malha (10×10 ; 20×20 ; 40×40 pontos nodais) e de intervalo de tempo (20, 30 e 40s) foram obtidos e analisados para um esferóide oblato com $L_2/L_1=2,00$. Estes resultados estão mostrados na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Teor de umidade médio adimensional para diferentes malhas, em diferentes valores do intervalo de tempo. $L_2/L_1=2,00$ e número de Biot igual a 10,00

Δt (s)	t (s)	MALHAS			ERRO (%)	
		A: 10×10	B: 20×20	C: 40×40	(A-B) / A	(C-B) / C
20	120	0,9517	0,9496	0,9492	0,2206	0,0421
	600	0,8155	0,8132	0,8128	0,2820	0,0492
	3000	0,4694	0,4686	0,4685	0,1704	0,0213
30	120	0,9520	0,9500	0,9496	0,2100	0,04200
	600	0,8159	0,8136	0,8132	0,2818	0,0491
	3000	0,4697	0,4690	0,4688	0,1490	0,0426
40	120	0,9523	0,9503	0,9499	0,2100	0,4200
	600	0,8164	0,8141	0,8136	0,2817	0,0614
	3000	0,4701	0,4693	0,4692	0,1701	0,0213

Observa-se que as três malhas apresentaram resultados semelhantes para o teor de umidade médio nos vários instantes de secagem. No início do processo, a malha com 10×10 pontos apresentou uma pequena discrepância em relação às outras duas; e portanto foi descartada. Para as outras duas malhas, os resultados obtidos foram praticamente iguais,

contudo, em virtude da malha 20×20 pontos apresentar menor tempo computacional, esta foi selecionada.

Fixado o número de pontos da malha, obteve-se resultados para diferentes intervalos de tempo ($\Delta t = 20$ s, 30 s e 40 s). Não foi observada discrepância significativa entre os casos avaliados, desta forma, tendo em vista que o processo considerado é transiente, a escolha de um menor intervalo de tempo é mais apropriada. Com base nesta análise, uma malha 20 × 20 pontos, um intervalo de tempo $\Delta t = 20$ s e um coeficiente de difusão $D = 1,22 \times 10^{-9}$ m²/s foi utilizado para gerar todos os resultados apresentados neste trabalho. Vale destacar que estes resultados são apresentados em função da variável adimensional Fo ; desta forma, são independentes do valor particular escolhido para o coeficiente de difusão.

Como já foi mencionado, o sistema esferoidal oblato é ortogonal. Nas Figuras 4.1 e 4.2, são ilustradas alguns esferóides oblatos e suas respectivas malhas numéricas. Neste trabalho a razão L_2/L_1 é definida como a razão de aspecto do corpo e L_2 sempre é considerado ser igual a 1,00.

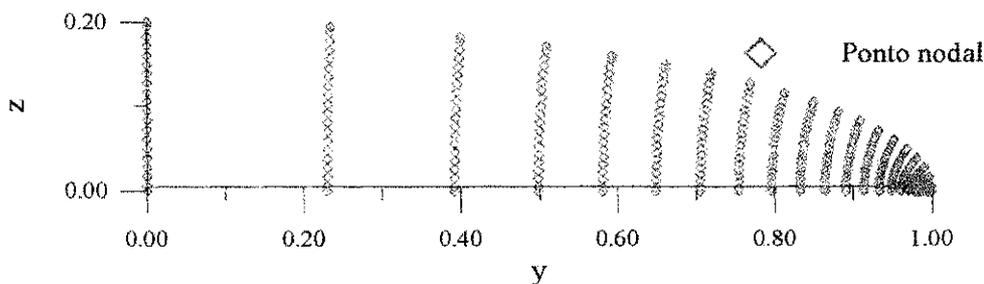


Figura 4.1 – Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1 = 5,00$.

No plano computacional, tem-se uma malha regularmente espaçada. Contudo no plano físico $y \times z$, vê-se que a malha numérica não é regular. Existe uma região com uma maior concentração de pontos nodais localizada próxima ao eixo y , nas vizinhanças do ponto focal. No plano físico o ponto focal se localiza no ponto ($y=L, z=0$). Os pontos nodais próximos ao eixo z ($\eta=1$) estão notadamente mais afastados um dos outros.

Quando a razão de aspecto L_2/L_1 tende para o valor 1,00, a forma do corpo se aproxima de uma esfera. Neste caso, o ponto focal está próximo do centro do corpo sólido. Quando L_2/L_1 cresce, o ponto focal se aproxima da superfície do corpo, sendo que com $L_2/L_1 \rightarrow \infty$ a forma do corpo se aproxima de um disco circular.

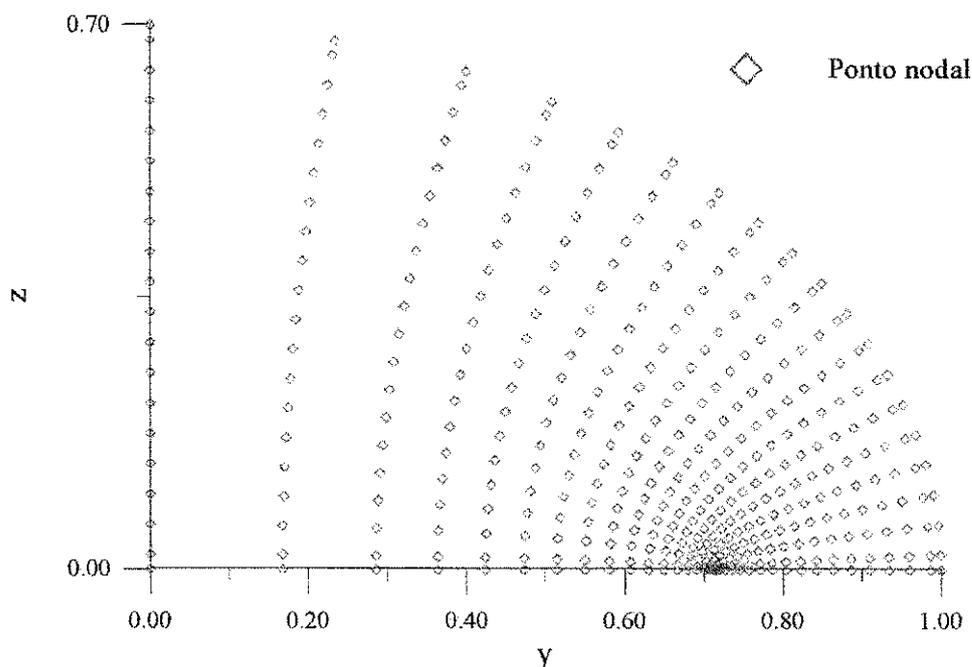


Figura 4.2 – Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1=1,43$.

4.2.2 Resultados obtidos com o modelo A

O modelo A, apresentado no capítulo III, foi utilizado para prever o teor de umidade em vários esferóides oblatos, variando sua forma desde esfera ($L_2/L_1=1,00$) até disco circular ($L_2/L_1 \rightarrow \infty$), casos estes particulares extremos de um esferóide oblato.

Para validar este modelo, resultados numéricos do teor de umidade adimensional no centro de um esferóide oblato com razão de aspecto $L_2/L_1=2,00$, são comparados com resultados analíticos reportados por Haji-Sheikh (1986) conforme mostra a Figura 4.3. Como pode ser notado, os resultados se ajustam perfeitamente, o que ratifica a aproximação assumida nos pontos de simetria (equações 3.53-3.59).

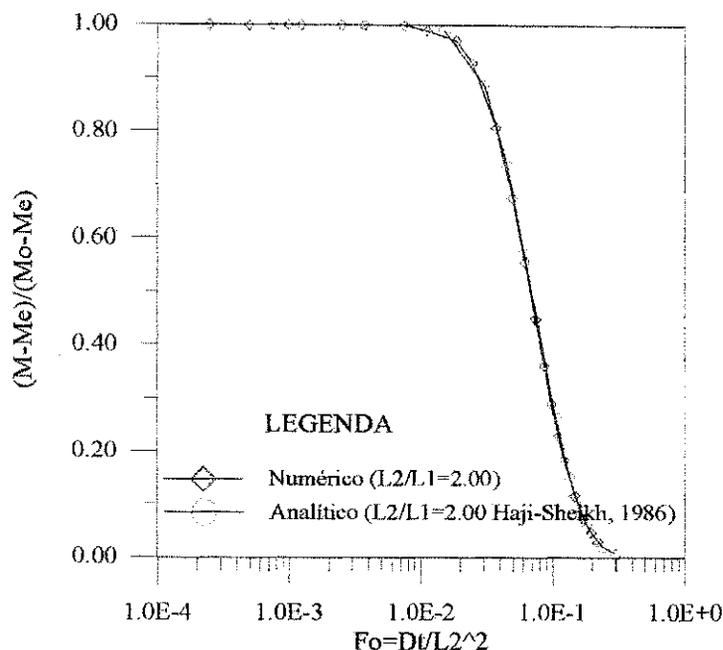


Figura 4.3 - Comparação entre os teores de umidade adimensional numérico e analítico (Haji-Sheikh, 1986), no centro de um esferóide oblato com $L_2/L_1=2,00$.

A Figura 4.4 ilustra o efeito do número de Fourier ($F_o = Dt/L_2^2$) na cinética de secagem de vários sólidos esferoidais oblatos com razões de aspecto (L_2/L_1) diferentes. A análise das curvas indica que o teor de umidade médio decresce com o aumento do Fo para qualquer razão de aspecto L_2/L_1 . É possível também verificar que para qualquer número de Fourier fixo, nos corpos com aproximação para disco e esfera, este decréscimo se dá com maior e menor intensidade, respectivamente. Este fato é devido à menor relação área/volume apresentado pela esfera comparada aos demais sólidos. Estes resultados podem ser estendidos para o problema de difusão de calor, se a taxa de secagem for substituída pela taxa de resfriamento ou aquecimento do corpo. Observe que a definição do número de Fourier (F_o) é diferente da que foi apresentada na equação 3.39. Esta definição será utilizada daqui por diante em todos os resultados tendo em vista ser a mais estável, pois, o valor de L_2 é sempre 1, qualquer que seja a razão de aspecto. Para exemplificar, se $L_2 \rightarrow L_1 \Rightarrow L \rightarrow 0$, conseqüentemente t_m^* dado pela equação 3.39 tende ao infinito, o que dificulta a apresentação dos resultados. O mesmo não ocorre com esta nova definição.

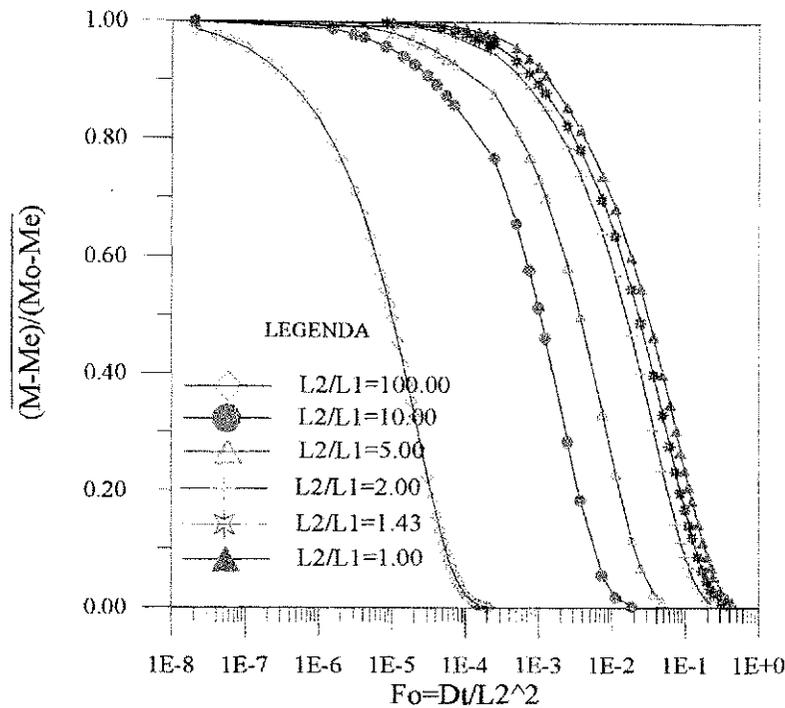


Figura 4.4 - Teor de umidade adimensional médio em função do número de Fourier, para vários esferóides oblato com condição de equilíbrio na superfície.

Em relação ao elipsóide com $L_2/L_1=1,001$, a partir dos resultados do teor de umidade obtidos no interior do material, pode-se dizer que é um corpo aproximadamente esférico, inclusive apresentando independência do teor de umidade com a coordenada angular. Desta forma, a razão de umidade é dependente apenas da coordenada radial. Com respeito ao elipsóide $L_2/L_1=100,0$ pode-se afirmar que é aproximadamente um disco circular, com teor de umidade dependendo das coordenadas radial e angular, sendo com esta última de forma mais acentuada.

As Figuras 4.5 a - b apresentam, respectivamente, a distribuição do teor de umidade adimensional em função das coordenadas radial em $\eta=1$ ($0 \leq z \leq L_1$) e angular em $\xi=0$ ($0 \leq y \leq L$), para um esferóide oblato com $L_2/L_1= 5,00$, para vários números de Fourier. Após análise das curvas, observa-se que o teor de umidade decresce em função do aumento de Fo ; é fortemente dependente das coordenadas radial e angular, decrescendo com o aumento de ξ e o decréscimo de η . Particularmente com relação a coordenada angular, verifica-se a existência

de altos gradientes de umidade nas proximidades do eixo y, no início do processo, deslocando-se para eixo z, a medida que a secagem vai sendo realizada.

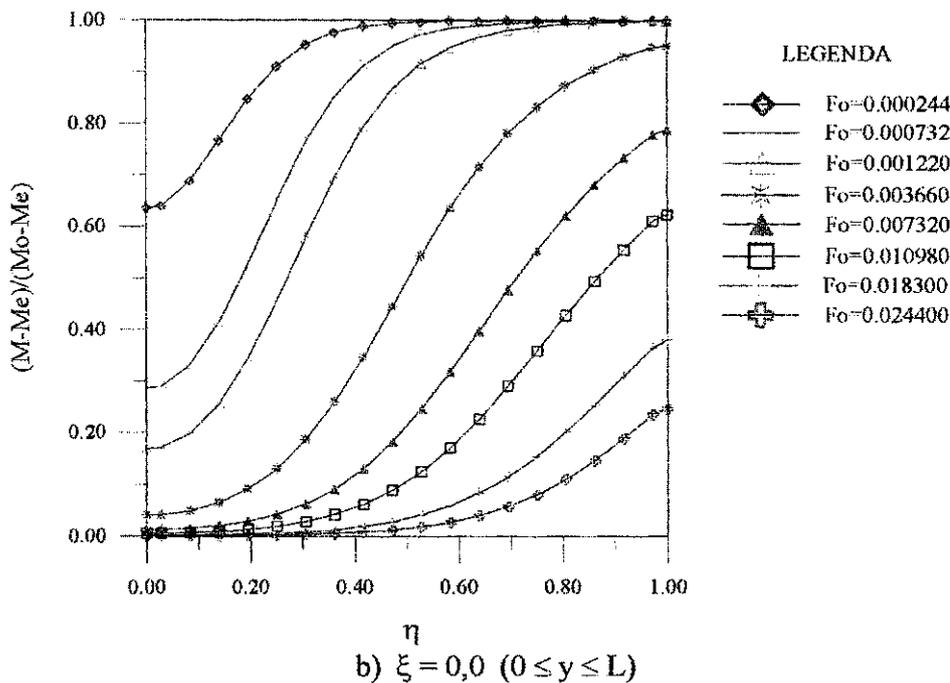
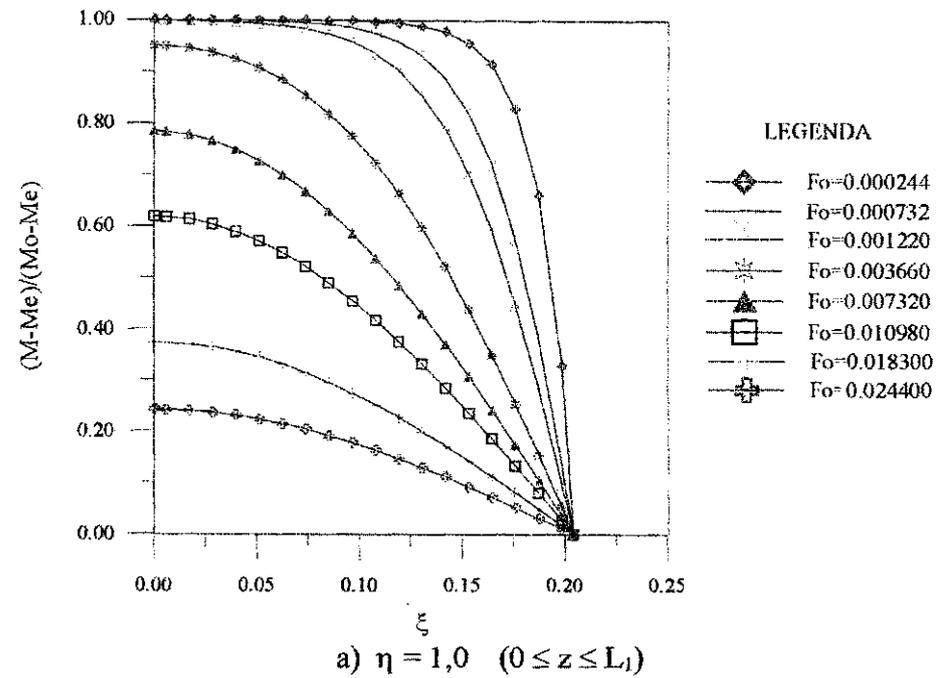


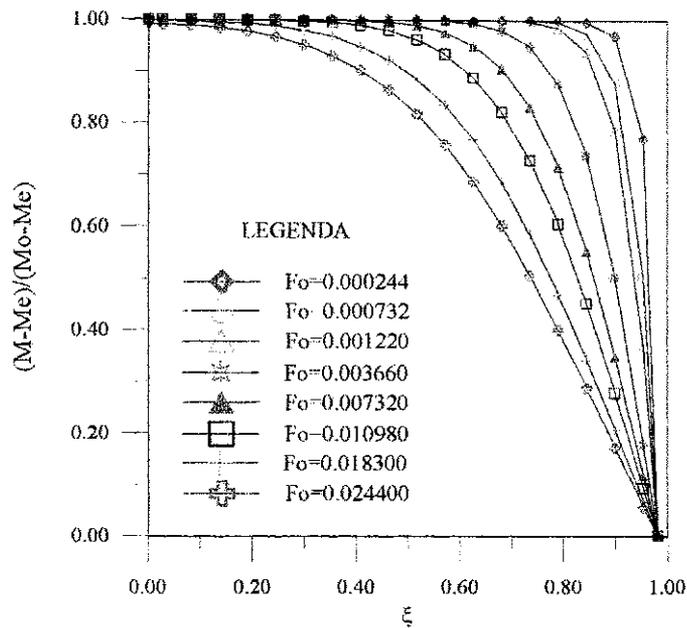
Figura 4.5 - Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato, para vários números de Fourier e $L_2/L_1=5,00$ com condição de equilíbrio na superfície.

As Figuras 4.6 a - b mostram a distribuição do teor de umidade no interior do elipsóide com $L_2/L_1 = 1,43$, para vários Fo , em função das coordenadas ξ e η , respectivamente. Verifica-se neste caso que o teor de umidade decresce com o aumento do número de Fourier e que sua dependência com a coordenada angular diminui substancialmente, quando comparada com o caso $L_2/L_1 = 5,00$. Uma forte dependência com a coordenada radial também é notada.

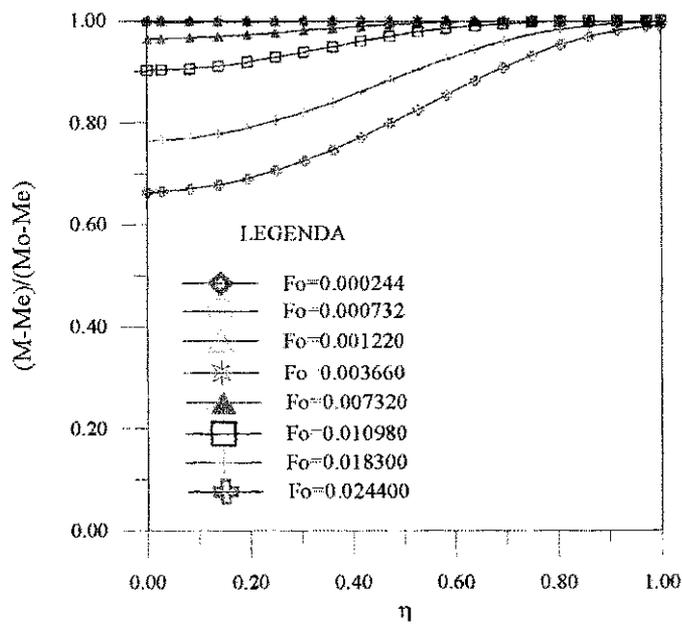
Um comportamento bastante interessante foi observado em corpos com geometria elíptica. Existem duas regiões distintas para difusão de massa: uma nas proximidades do ponto focal e a outra no restante do corpo. A medida que a relação L_2/L_1 aumenta, a difusão de massa nas proximidades do ponto focal aumenta, decrescendo para regiões mais afastadas do mesmo. Este efeito é reduzido com o decréscimo de L_2/L_1 até o caso limite de $L_2/L_1 = 1,00$, onde as regiões se fundem formando uma única região, com um comportamento da difusão de massa independente da coordenada angular. Este fato também foi verificado por Lima (1999), em seu estudo sobre a difusão em esferóides prolatos e por Alassar (1999) em seu estudo sobre a condução de calor em esferóide, ao analisar o comportamento do número de Nusselt e fluxo de calor nos diversos pontos da superfície dos esferóides.

A distribuição do teor de umidade dentro de um sólido esferoidal oblato com razão de aspecto $L_2/L_1 = 5,00$ em três números de Fourier, são mostradas nas Figuras 4.7 a - c. Pode-se notar que o teor de umidade em todos os pontos do interior do corpo decresce com o aumento do número de Fourier. Nestas figuras, estão evidenciadas as linhas de iso-concentração ao longo e no interior do corpo. É observado que estas linhas apresentam uma forma elíptica confocal.

Como comentado, os corpos com razão de aspecto mais elevada, apresentam o ponto focal mais deslocado para próximo da superfície. Nota-se que na região próxima a este ponto os teores de umidade decrescem mais rapidamente e maiores gradientes de umidade são encontrados.



a) $\eta=1,0$ ($0 \leq z \leq L_1$)



$\xi = 0,0$ ($0 \leq y \leq L$)

Figura 4.6 - Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato, para vários Fo e $L_2/L_1=1,43$ com condição de equilíbrio na superfície.

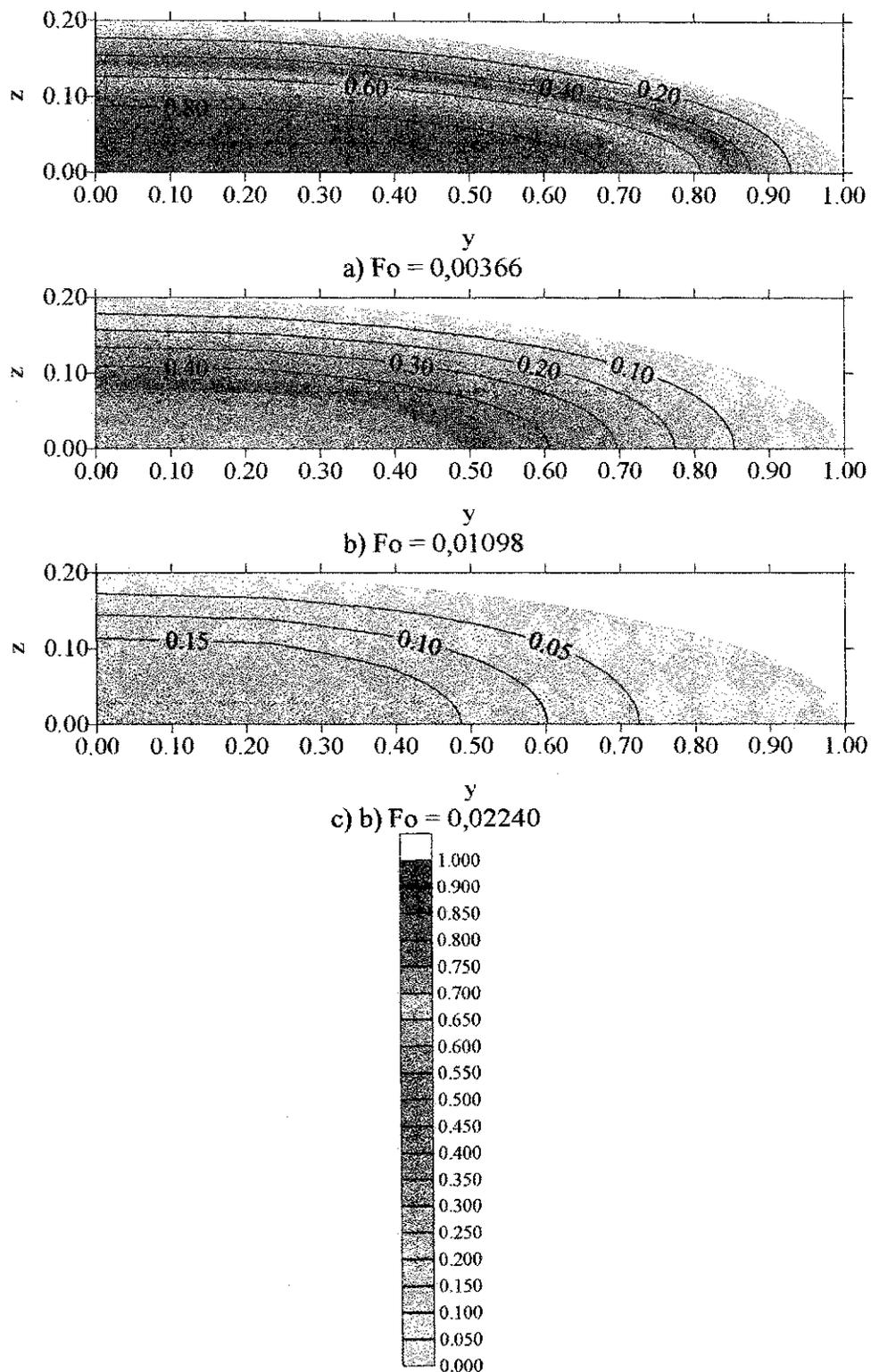


Figura 4.7 – Distribuição do teor de umidade adimensional em um sólido esferoidal oblato com razão de aspecto $L_2/L_1 = 5,00$ e condição de equilíbrio na superfície

4.2.2 Resultados obtidos com o modelo B

O modelo B trata da difusão líquida no interior de um sólido com condição de contorno convectiva na sua superfície. Para a validação deste modelo, resultados foram comparados com os resultados obtidos da solução do problema de difusão em esfera com número de Biot finito, fornecido por Luikov (1968). A Figura 4.8 apresenta os valores dos teores de umidade numérico e analítico, como função da coordenada radial para alguns números de Fourier. Na Figura 4.9 apresenta-se uma comparação entre os teores de umidade médio fornecidos por soluções analíticas (Luikov, 1968) e numéricas obtidas pelo autor. Em ambos os casos, uma excelente concordância é notada.

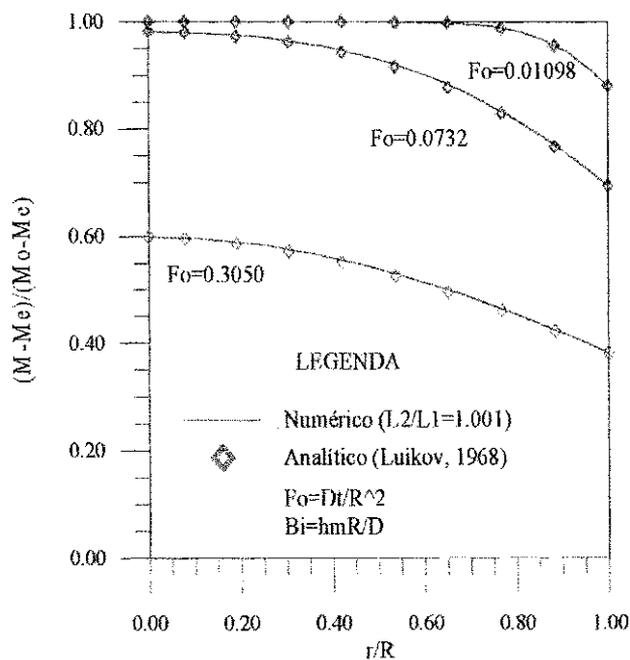


Figura 4.8 - Comparação entre os valores analíticos dados por Luikov (1968) e numéricos do teor de umidade adimensional como função da coordenada radial, para $Bi=1,0$ e $L_2/L_1=1,001$

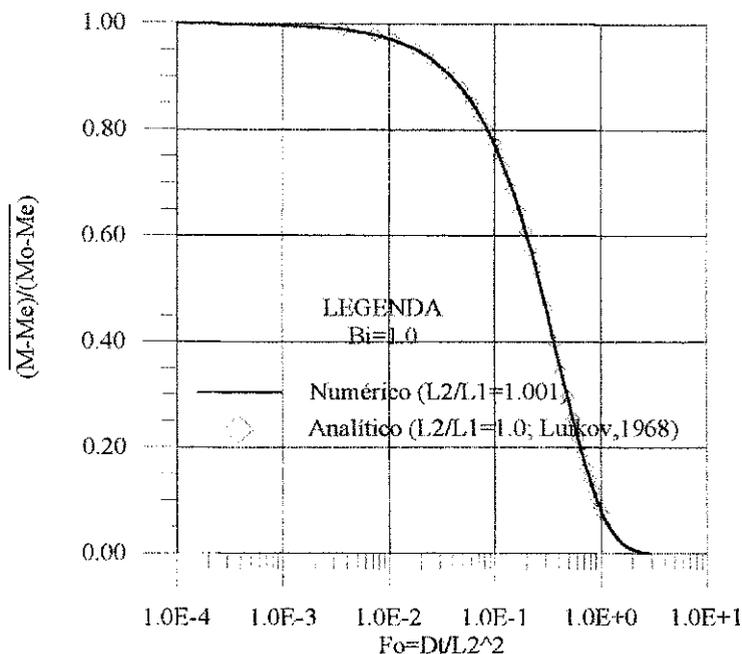


Figura 4.9 – Comparação entre os valores do teor de umidade médio adimensional numéricos e analíticos dados por Luikov (1968), para esfera ($L_2/L_1=1,00$) e $Bi=1,0$, durante o processo de secagem

As Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 ilustram a cinética de secagem em corpos com diferentes razões de aspecto e submetidos a variados números de Biot. As geometrias utilizadas possuem razões de aspecto $L_2/L_1=5,00$; $L_2/L_1=2,00$ e $L_2/L_1=1,43$, respectivamente. Uma análise individual das curvas indica que o teor de umidade médio decresce com o aumento do número de Fourier, para qualquer número de Biot. Para corpos com uma determinada razão de aspecto, a taxa de secagem do produto cresce com o aumento do número de Biot, desta forma, quanto maior o número de Biot, menor será a duração do processo de secagem, para um coeficiente de difusão fixo.

Uma comparação entre as Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 mostra que quanto maior a razão de aspecto, mais rapidamente se efetiva a operação de secagem para qualquer número de Biot fixado. Este efeito é devido à forma do corpo, e está ligado diretamente a sua relação área/volume, como mencionado no item 4.2.1.

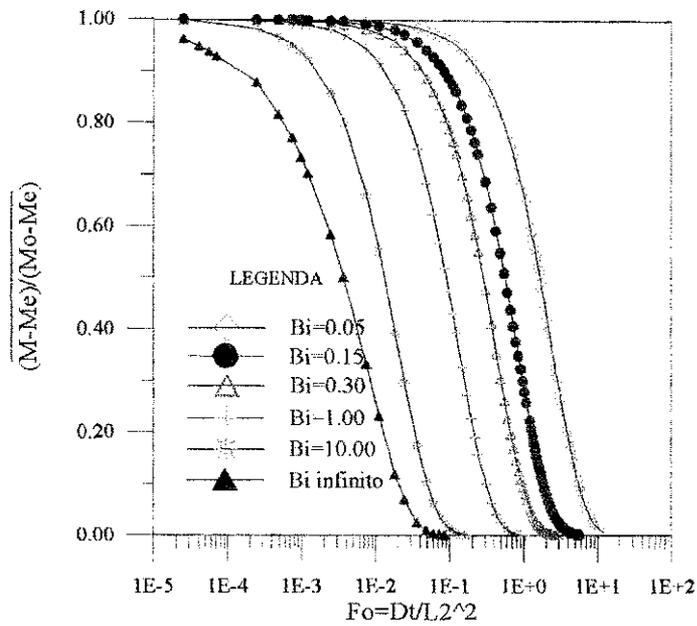


Figura 4.10 - Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=5,00$

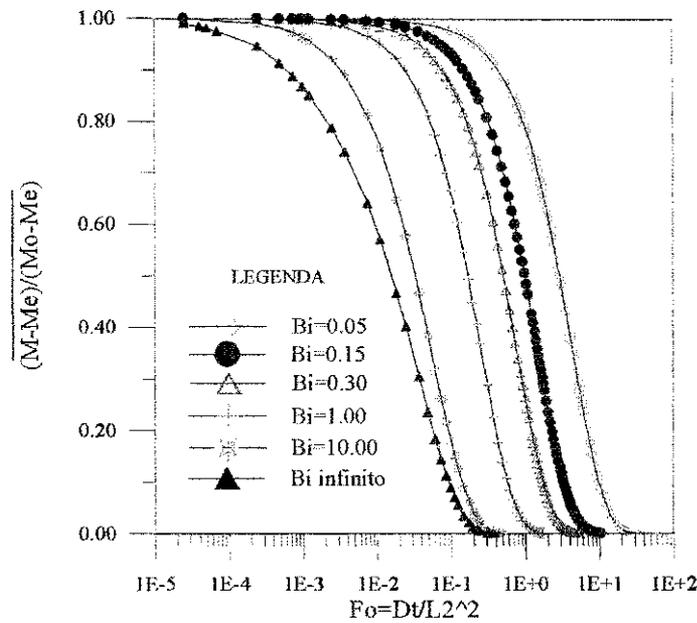


Figura 4.11 - Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=2,00$

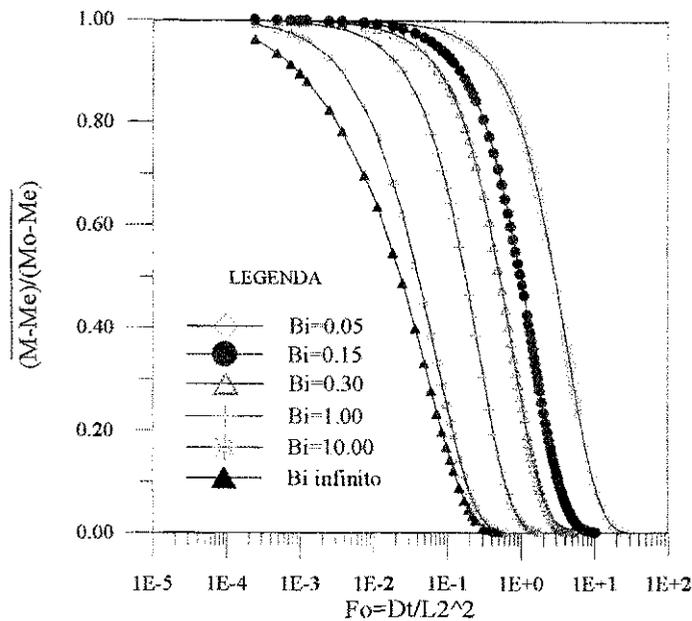


Figura 4.12 - Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=1,43$

As Figuras 4.13, 4.15 e 4.17 ilustram a variação do teor de umidade adimensional no ponto focal do esferóide oblato em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1=5,00$, $L_2/L_1=2,00$ e $L_2/L_1=1,43$, respectivamente. A mesma variação, para as mesmas razões de aspecto e número de Biot, desta feita, no centro do sólido, estão ilustradas nas Figuras 4.14, 4.16 e 4.18.

Dos esferóides oblatos que estão sendo analisados nas Figuras de 4.13 até 4.18, aquele com $L_2/L_1=5,00$ é o que tem o ponto focal mais próximo da superfície do sólido, portanto, mais afastado do seu centro. Neste caso, principalmente para números de Biot mais elevados, é notada uma sensível diferença na cinética de secagem entre estes dois pontos. Este efeito é minimizado para menores valores de Biot, tendo em vista que, quanto menor o número de Biot, menor será o gradiente de umidade no interior do sólido. A análise das Figuras 4.13 e 4.14 evidenciam estas afirmações. Já para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1=2,00$, o ponto focal vai se aproximando do centro. Com o aumento de L_1 e mantendo L_2 fixo, a forma do elipsóide se aproxima cada vez mais de uma esfera e o seu ponto focal tende a coincidir com o centro do corpo, nestes casos pode-se notar que praticamente não há diferenças entre os

teores de umidade no centro e no ponto focal, como pode ser constatado pela análise das Figuras 4.15 e 4.16 e das Figuras 4.17 e 4.18.

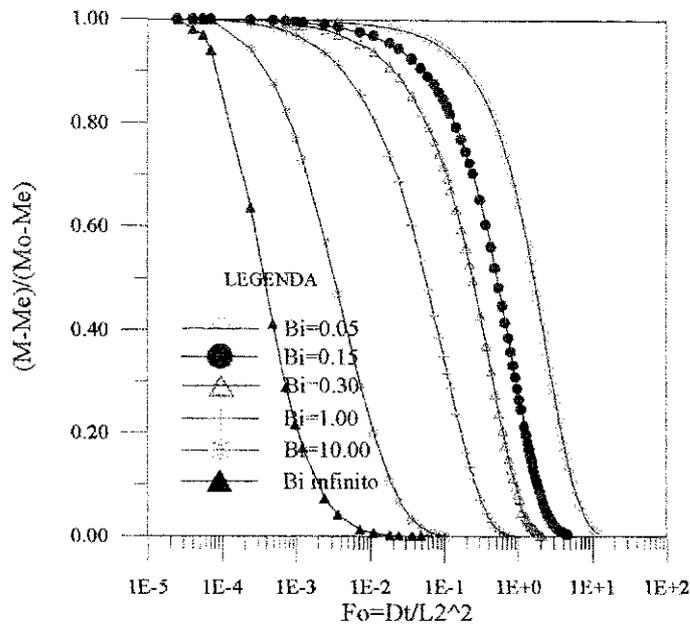


Figura 4.13 – Teor de umidade adimensional no ponto focal do esférico em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1 = 5,00$

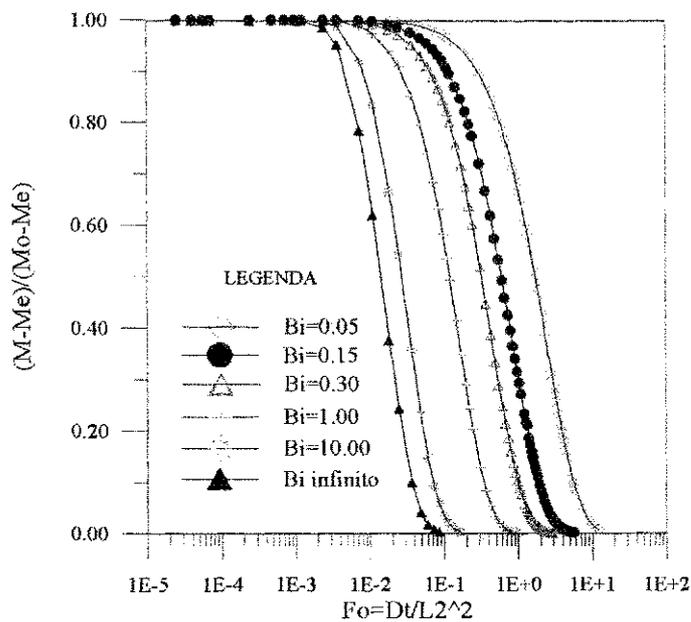


Figura 4.14 – Teor de umidade adimensional no centro do esférico em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1 = 5,00$

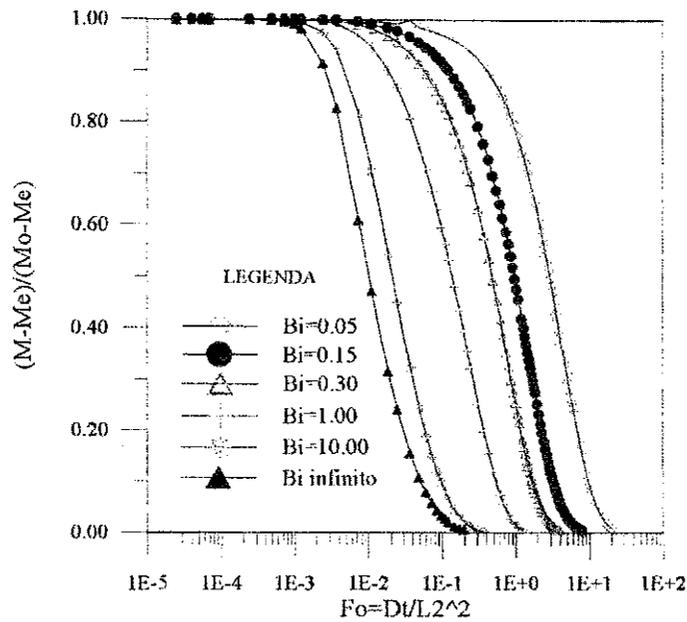


Figura 4.15 - Teor de umidade adimensional no ponto focal do esferoide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1 = 2,00$

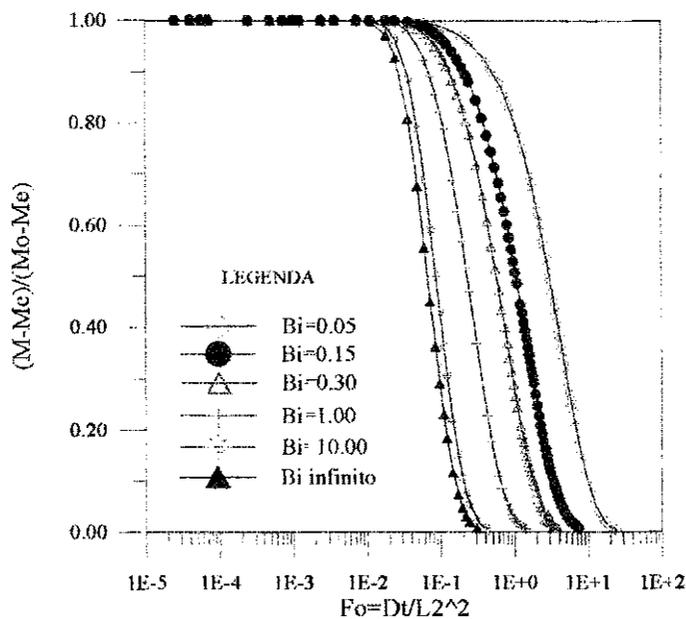


Figura 4.16 – Teor de umidade adimensional no centro do esferoide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1 = 2,00$

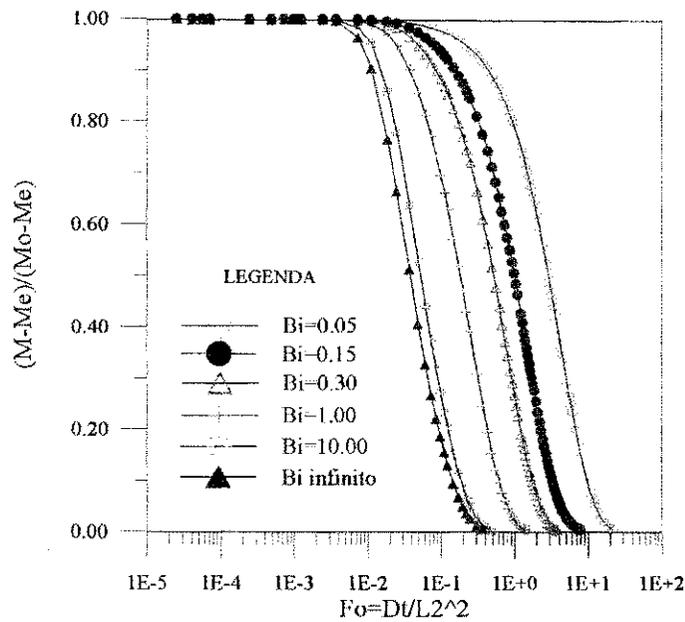


Figura 4.17 – Teor de umidade adimensional no ponto focal do esferóide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1 = 1,43$

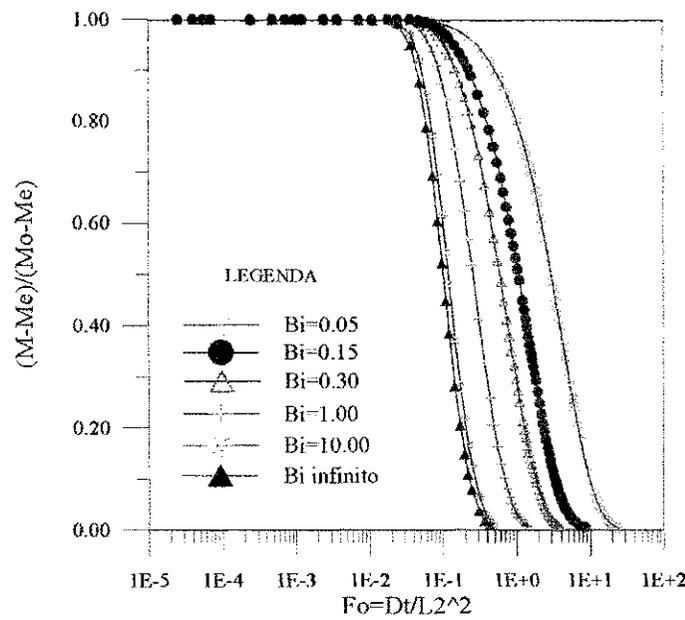


Figura 4.18 – Teor de umidade adimensional no centro do esferóide em função do número de Fourier, para vários números de Biot e $L_2/L_1 = 1,43$

A distribuição do teor de umidade no interior em esferóide oblato com $L_2/L_1 = 5,00$, em função das coordenadas esferoidais η e ξ , para $Bi = 1,0$ é mostrada nas Figuras 4.19 e 4.20 respectivamente. As Figuras 4.21 e 4.22 mostram a mesma distribuição, desta feita para uma razão de aspecto $L_2/L_1=1,43$. Verifica-se após análise das figuras que o teor de umidade no interior do sólido aumenta com o aumento da variável angular η e decresce com o aumento da variável radial ξ , em qualquer número de Fourier. No entanto, comparando-se as Figuras 4.19 e 4.21, verifica-se que a dependência do teor de umidade com a variável η é maior no sólido com maior razão de aspecto, ao contrário do que ocorre com a coordenada radial, como pode ser percebido comparando-se as Figuras 4.20 e 4.22. Neste caso, a forte dependência ocorre em sólidos esferoidais oblatos que possuem menor razão de aspecto. Este comportamento está em concordância com resultados já conhecidos para esfera ($L_2/L_1=1,00$). A medida que L_2/L_1 se aproxima de 1,00, a forma do corpo se aproxima de uma esfera, e neste caso, a dependência do teor no interior do corpo é exclusivamente com a coordenada radial.

As Figuras 4.23 a-c ilustram a distribuição do teor de umidade de um esferóide oblato em corpos com razão de aspecto $L_2/L_1=5,00$, para $Bi=1,0$ em três números de Fourier diferentes. Neste caso, diferente do que acontece com o modelo A, não é observada uma grande diferença no teor de umidade nos pontos próximos ao ponto focal. Pode-se dizer que quanto menor o número de Biot, mais uniforme será a distribuição de umidade no interior do sólido e, conseqüentemente menores os gradientes de umidade. Altos gradientes de umidade são indesejáveis, porque originam tensões mecânicas, que geram trincas e deformações, reduzindo a qualidade do produto pós-secagem.

As Figuras 4.24 e 4.25 mostram a distribuição do teor de umidade no interior do sólido, para $Fo = 0,01098$ e diferentes valores do número de Biot. Pode-se notar que, para pequenos valores de Bi , os gradientes do teor de umidade em todo interior do sólido são pequenos. O teor de umidade varia suavemente com as variáveis ξ e η . Particularmente para $Bi \leq 0,05$, pode-se estudar a difusão de massa no sólido através do método da análise concentrada. Obviamente esta afirmação é dependente da geometria do corpo e da forma como é definido este parâmetro. Para números de Biot mais elevados, os gradientes de umidade, como esperado, são mais acentuados.

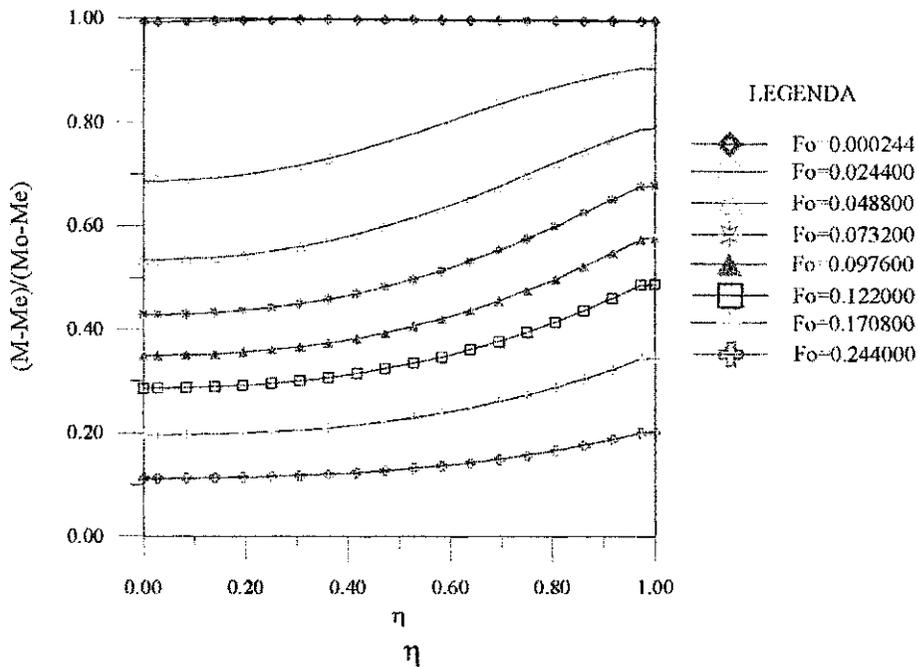


Figura 4.19 – Teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com $L_2/L_1=5,00$ em função da coordenada angular η , para $Bi=1,0$, vários números de Fourier e em $\xi=0$

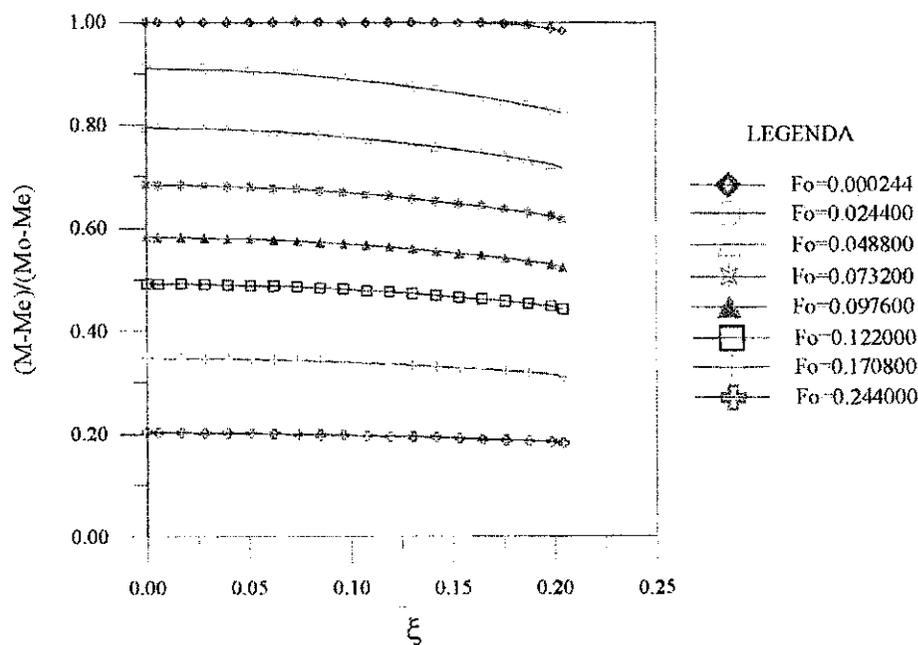


Figura 4.20 - Teor de umidade adimensional no interior de esferóide oblato com $L_2/L_1=5,00$, em função da coordenada radial ξ , para $Bi=1,0$, vários números de Fourier e em $\eta=1$.

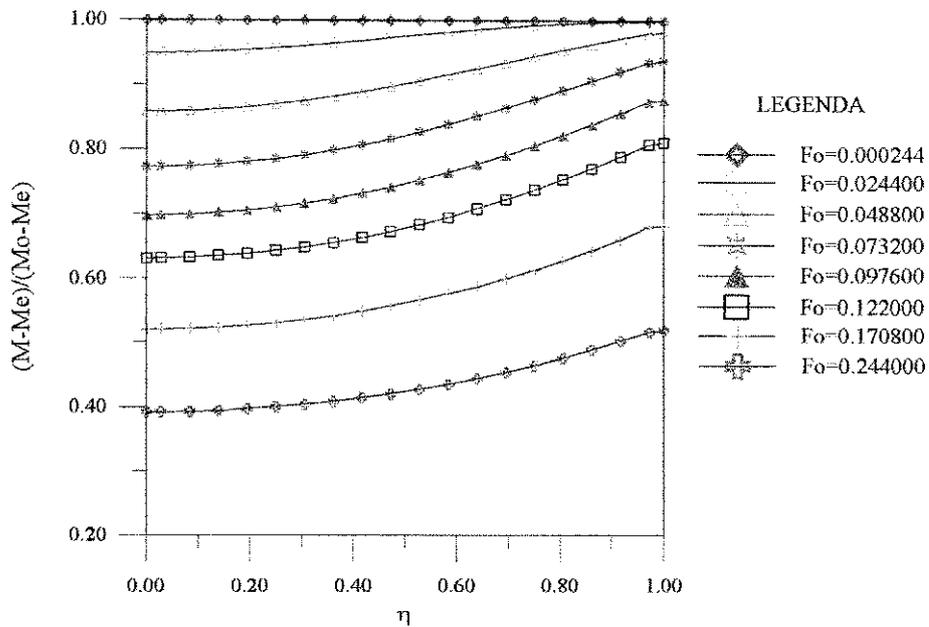


Figura 4.21 — Teor de umidade adimensional no interior de um esferóide oblato com $L_2/L_1=1,43$, em função da coordenada angular η , para $Bi=1,0$, vários números de Fourier e em $\xi=0$

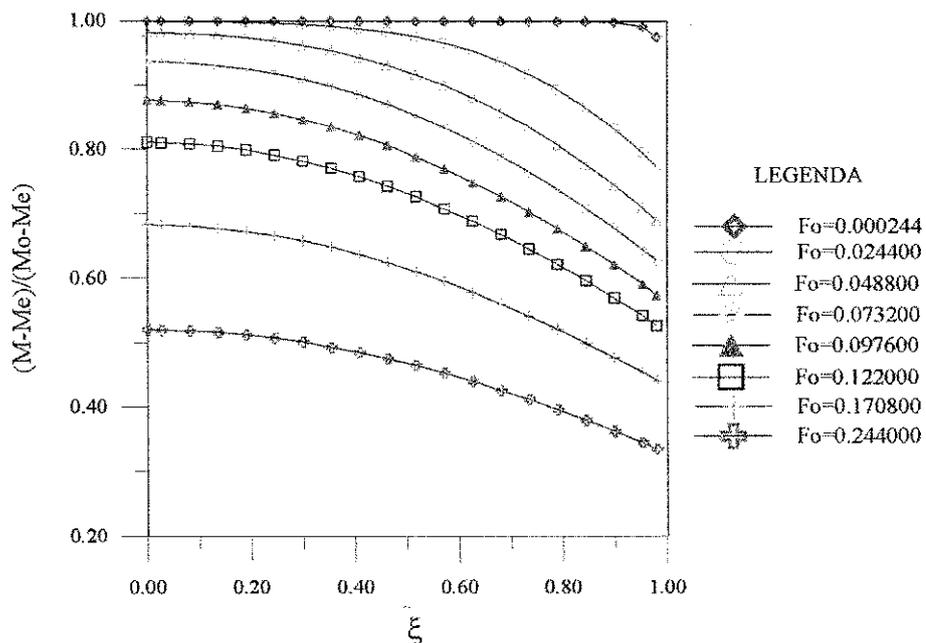


Figura 4.22 – Teor de umidade adimensional no interior de esferóide um oblato com $L_2/L_1=1,43$, m função da coordenada radial ξ , para $Bi=1,0$, vários números de Fourier e em $\eta=1$.

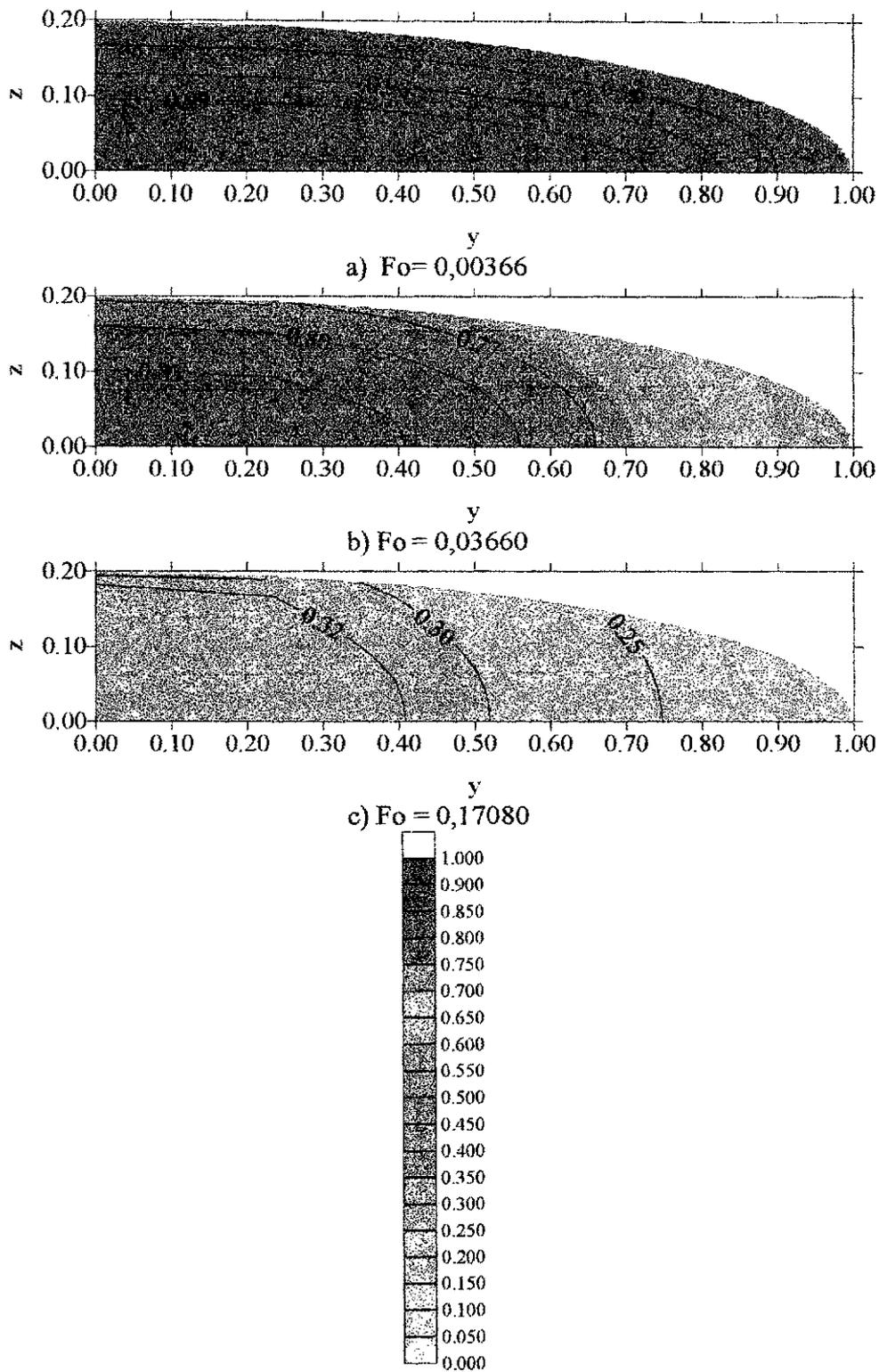


Figura 4. 23 - Distribuição do teor de umidade adimensional em um sólido esferoidal oblato com razão de aspecto $L_2/L_1 = 5,00$ e $Bi=1,0$, para três números de Fourier

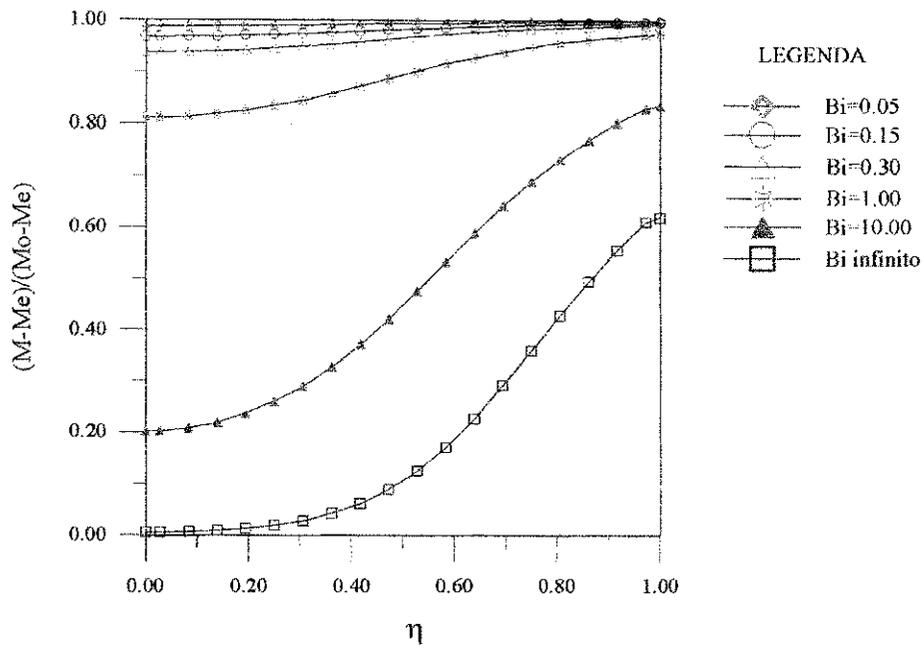


Figura 4.24 – Teor de umidade adimensional em função de η , para $L_2/L_1=5,00$, $Fo=0,01098$, vários números de Biot e em $\xi=0$

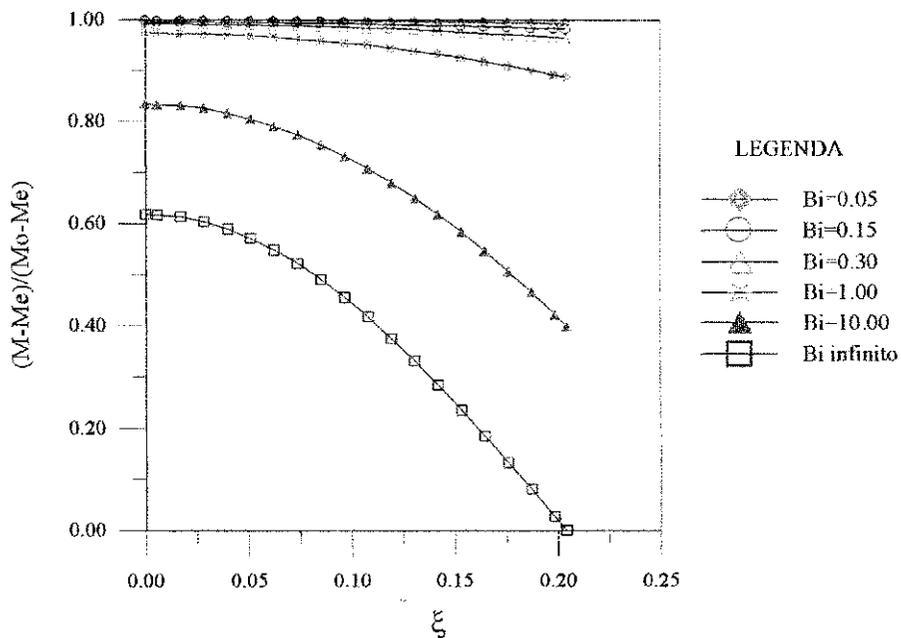


Figura 4.25 – Teor de umidade adimensional em função de ξ , para $L_2/L_1=5,00$, $Fo=0,01098$, vários números de Biot e em $\eta=1$

Finalmente, a Figura 4.26 apresenta o teor de umidade médio adimensional para três razões de aspecto durante o processo de secagem, para um número de Biot igual a 1,0. Percebe-se que corpos esferoidais oblatos com razões de aspecto mais elevadas, secam mais rápido, pelos mesmos motivos já explicitados nas discussões da Figura 4.4 referente ao modelo A. Verifica-se ainda que, diferentemente do comportamento para Bi infinito (situação descrita pelo modelo A), a cinética de difusão para o sólido esferoidal oblato com $L_2/L_1=1,43$ é praticamente idêntica à apresentada para um sólido com $L_2/L_1=2,00$. Além disso, comparando-se ao modelo A, a diferença entre os teores de umidade é menor, em qualquer número de Fourier fixado. Este efeito é exclusivamente devido ao número de Biot.

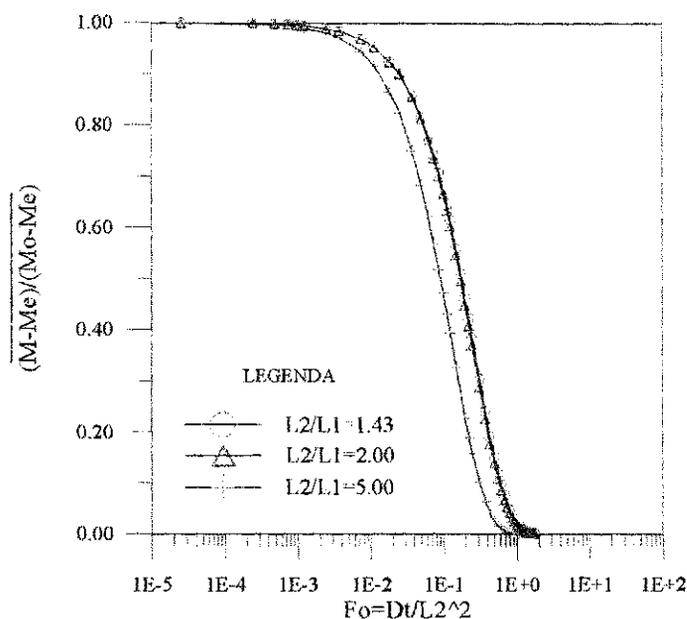


Figura 4.26 – Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier para $Bi=1,0$.

Vale salientar que, apesar deste trabalho ter dado ênfase a transporte de umidade no interior de sólidos esferoidais oblatos, os resultados apresentados também podem ser interpretados como transporte de energia. Portanto, a metodologia apresentada pode ser usada em processos de secagem, umidificação, aquecimento e resfriamento, considerando condição de contorno constante ou do tipo convectiva e ainda em variadas formas geométricas que vai desde esfera até disco circular, inclusive esferóides oblatos.

Como um comentário final, pode-se dizer que o modelo é muito versátil, podendo ser utilizado para descrever a variação do teor de umidade em corpos elipsoidais com variadas geometrias, com coeficiente de difusão constante ou variável e com diferentes condições de contorno sob pequenas modificações.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS.

Conclusões

Considerando a análise dos dados obtidos com a simulação do processo de secagem em corpos com geometria elipsoidal, pode-se concluir de forma geral que :

- O tratamento matemático para a obtenção da solução numérica do problema foi adequado e, pode ser utilizado para descrever outros fenômenos transientes tais como aquecimento, resfriamento e umidificação;
- o método de volumes finitos mostrou-se eficiente para a discretização da equação de difusão no sistema de coordenadas esférico oblato;
- a partir da solução encontrada, é possível obter a distribuição interna da grandeza em estudo, bem como a cinética de difusão em sólidos com geometrias disco circulares, elipsoidais e esféricas, considerando o coeficiente de difusão de massa constante e condições de contorno de equilíbrio ou convectiva na superfície do corpo;
- o teor de umidade médio de um sólido esférico oblato decresce com o crescimento do número de Fourier, para qualquer razão de aspecto (L_2/L_1). Esta observação também é válida para todos os pontos no interior do corpo;
- para qualquer número de Biot, sólidos esféricos oblatos com maior razão de aspecto (L_2/L_1), submetidos às mesmas condições externas do ar de secagem, atingem o

equilíbrio higroscópico mais rapidamente que aqueles que possuem menor razão de aspecto, em virtude de apresentarem uma menor relação área/volume;

- a taxa de difusão de um sólido e a distribuição de umidade em seu interior é afetada pelo número de Biot característico do processo. Para uma razão de aspecto fixada, o aumento do número de Biot implica em um aumento da taxa de secagem, e conseqüentemente têm-se altos gradientes de umidade no interior do sólido;

- a diferença entre o teor de umidade no centro e no ponto focal de um corpo esferoidal oblato depende da sua razão de aspecto e é maior em sólidos com maior razão de aspecto. Esta diferença depende do número de Biot ;

- o teor de umidade dentro do material é função das coordenadas η e ξ . Quando a forma de um corpo se aproxima de uma esfera, o teor de umidade depende apenas da coordenada radial, em qualquer número de Biot;

- as linhas de iso-concentração de umidade mostram que em regiões pontiagudas, o sólido seca mais rapidamente;

- num processo de secagem, caracterizado para pequenos valores do número de Biot ($Bi \leq 0,05$), tem-se pequenos gradientes de umidade no interior do sólido. Nestes casos a cinética de secagem pode ser avaliada utilizando-se o método de análise concentrada.

Sugestões para futuros trabalhos

- Estudar o fenômeno de difusão em corpos esferoidais oblato considerando o coeficiente de difusão variável ao longo do processo de secagem;

- Considerar o efeito do encolhimento do produto durante o processo de secagem;

- Resolver analiticamente o problema de difusão em corpos com geometria esferoidal oblata;

- Validar experimentalmente os modelos apresentados neste trabalho;
- Utilizar o modelo para estimar as propriedades de transporte de sólidos úmidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M.; Stegun, I. A. Handbook of mathematical functions. New York: Dover Publications, Inc., USA, 1972, p. 752-772.
- Acho, T. M. Scalar wave scattering of a prolate spheroid as a parameter expansion of that of a sphere. Quarterly of Applied Mathematics, v. L, n. 3, p. 451-468, 1992.
- Alassar, R. S. Heat conduction from spheroids. Journal of heat Transfer, v.121, n.2, p.497-499, 1999.
- Alsina, O.L.S.; Aragão, R.F.; Monteiro, L.F. Thin layer drying of mesquite beans. In: Inter-American Drying Conference, 1997. Itu: Proceedings..., v. B, p. 524-529
- Aoi, T. On spheroidal functions. Journal of the Physical Society of Japan, v. 10, n. 2, p. 130-141, 1955.
- Azzouz, S.; Jomaa, W.; Belghith, A. Drying kinetic equation of single layer of grapes. In: International Drying Symposium (Drying'98), Thessaloniki: Proceedings..., v.B, 1998, p. 988-997
- Brodkey, Robert S. The phenomena of fluid motions. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1967, p.18-23.
- Butkov, E. Física matemática. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S.A. 1978, 725 p.
- Carmo, J.E.F; Lima, A.G.B. Simulação numérica da transferência de massa em esferóides oblatos. In: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2000). Natal: Anais..., CD-Rom.
- Carmo, J.E.F; Lima, A.G.B. Mass transfer in oblate spheroidal solids. In: Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences (ENCIT 2000), 2000. Porto Alegre: Proceeding..., CD-Rom.
- Carslaw, H. S.; Jaeger, J. C. Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, New York, USA, 1959, 510p.
- Crank, J. The Mathematics of Diffusion. Oxford Science Publications, New York, USA, 1992, 414p.
- Coutelieris, F.A.; Burganos, V. N.; Payatakes, A. C. Convective diffusion and adsorption in a swarm of spheroidal particles. AIChE Journal, V. 41, n.3, May 1995., pp. 1122-1134.
- Do-Nhat, T.; MacPhie, R. H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. Quarterly of Applied Mathematics, v. LIV, n. 4, p.677-685, 1996a.

- Do-Nhat, T.; MacPhie, R. H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. LIV, n. 4, p.721-725, 1996b.
- Elvira, C. The Diffusion process modelling in elliptic shaped bodies. In: *International Congress Engineering and Food, 1990, London. Proceedings...* v. 1, p.456-464.
- Flammer, C. *Spheroidal wave functions*. Stanford University Press, Stanford, 1957, 220p.
- Fortes, M.; Okos, M. R. *Advances in drying*. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, Chapter Five: Drying theories: their bases and limitations as applied to foods and grains, v.1, p. 119-154.
- Feng, Z.; Michaelides, E. E. Unsteady heat and mass transfer from a spheroid. *AIChE Journal*. v. 43 n.3, march 1997.
- Gebhart, B. *Heat Conduction and Mass Diffusion*. McGraw-Hill, Inc., New York, USA, 1993, 634p.
- Gouveia, J.P.G.; Almeida, F.A C.; Murr, F.E.X. Estudo da difusividade e do encolhimento do gengibre durante a secagem. *Revista brasileira de produtos agroindustriais*. V.1 n.1, 1999, p.51-58.
- Haghghi, K.; Irudayaraj, J.; Strohine, R. L.; Sokhansanj, S. Grain kernel drying simulation using the finite element method. *Transaction of the ASAE*, v. 33, n. 6, p. 1957-1965, 1990.
- Haji-Sheikh, A.; Sparrow, E. M. Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid. *Transactions of the ASME: Journal of Heat Transfer*, v. 88, n. 3, p. 331-333, 1966.
- Haji-Sheikh, A. *Integral methods in science and engineering*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA, Chapter: On solution of parabolic partial differential equations using Galerkin functions, 1986, p. 467-479.
- Haji-Sheikh, A.; Sparrow, E. M. The solution of heat conduction problems by probability methods. *Transactions of the ASAE. Journal of Heat transfer*, v. 89 series C, n. 2, May 1967, p. 121-131.
- Iglesias, H. A.; Chirife, J. *Handbook of food isotherms: water sorption parameters for food and food components*. New York: Academic Press, 1982, 347p.
- Incropera, F.P.; de Witt, D.P., *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1990, 455p.

- Kreyszig, E. Advanced engineering mathematics. 6.ed. New York: John Wiley & Sons, 1988, p. 498-504.
- Kakaç, S., Yener, Y. Heat conduction. Washington: Taylor & Francis, 1993, 363p.
- Keey, R. B. Drying of loose and particulate materials. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1992. 502 p.
- Júnior, P.E.P; Cairncross, R.A. Optimization of single-zone drying of polymer solution coatings to avoid blister defects. In: International Drying Symposium (Drying 98), Thessaloniki: Proceedings..., v.C, 1998, p. 1822-1829.
- Lima, A.G.B. Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de banana. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999, 265p. Tese (doutorado).
- Lima, A. G. B.; Nebra, S. A.; Altemani, C. A. C. Simulation of the drying kinetics of the silkworm cocoon considering diffusive mechanism in elliptical coordinate, In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu: Proceedings..., Vol. B, Brasil, p. 317-324.
- Lima, A. G. B.; Nebra, S. A. Influência de parâmetros geométricos na cinética de secagem de elipsóides sólidos, In: XXV Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados (XXV ENEMP), 1997, São Carlos: Anais..., Vol.1, Brasil, p. 195-202.
- Lima, A. G. B.; Nebra, S. A., Sakanaka, P. H. Analytical solution of the mass diffusion equation applied to ellipsoids of revolution. In: XV Congresso Brasileiro de engenharia Mecânica (COBEM), 1999. Águas de Lindóia: Proceedings..., CD-Rom.
- Lima, A. G. B.; Nebra, S. A. Theoretical analysis of the difusion process inside prolate spheroidal solids. . Drying Technology. v.12, n. 1-2, p. 21-48, 2000.
- Lu, R.; Siebenmorgen, T. J. Moisture diffusivity of long-grain in rice components. Transactions of the ASAE, v. 35, n. 6, p. 1955-1961, 1992.
- Luccas, Valdecir. Obtenção de fatias de banana desidratada crocantes através da pré-secagem a altas temperaturas e curto tempo em leito fluidizado, Campinas, Faculdade de Engenharia Química, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 104p. Dissertação (Mestrado).
- Luikov, A.V. Analytical Heat Diffusion Theory. Academic Press, Inc. Ltd., London, England, 1968, 684p.
- Magnus,W.; Oberhettinger, F.; Soni, R. P. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Berlim: Springer-Verlag, 1966, p.472-495.

- MacRobert, T. M. Spherical harmonics: an elementary treatise on harmonic function with application. Oxford: Pergamon Press, 1967, 349 p.
- Maliska, C. R. Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. LTC, Rio de Janeiro, Brasil, 1995, 424 p.
- Marinos-Kouris D.; Maroulis, B. Transport properties in the drying of solids. Handbook of Industrial Drying. New York: Marcel Dekker Inc. v.1 p.113-150, 1995
- Minkowycz, W. J.; Sparrow, E. M.; Schneider, G. E.; Pletcher, R. H. Handbook of numerical heat transfer. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988, 1024p.
- Niven, C. On the conduction of heat in ellipsoids of revolution. Philosophical transactions Royal Society, London, v.171, p.117-151, 1880.
- Norminton, E. J.; Blackwell, J. H. Transient heat flow from constant temperature spheroids and the thin circular disk. Quarterly. Journal. Mechanics and Applied Mathematics, v.17, part 1, Feb. 1964, p.65-72.
- Page, L.; Júnior, N. I. A. The electrical oscillations of a prolate spheroid. The Physical Review, v.53, p.819-831, May 1938.
- Paje, L. The electrical oscillations of a prolate spheroid: Paper II. Prolate spheroidal wave functions. The Physical Review, v. 65, n. 3 e 4, p. 98-110, 1944a.
- Paje, L. The electrical oscillations of a prolate spheroid: Paper III. The antenna problem. The Physical Review, v. 65, n. 3 e 4, p. 111-117, 1944b.
- Patankar, S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation, USA, 1980, 197p.
- Queiroz, Marlene Rita de. Estudo teórico experimental da secagem de bananas. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1994. 176p. Tese (doutorado).
- Robin, L. Fonctions spheriques de Legendre et fonctions spheroidales. Tome III. Paris: Gauthier-Villars, 1959, 288p.
- Sanjuan, N.; Bom, J.; Benedito, J.; Mulet, A. Effect of pretreatments on dehydrate broccoli steam quality. In: International Drying Symposium (Drying 98), Thessaloniki: Proceedings..., v.B, 1998, p. 1179-1186.
- Sarker, N. N.; Kunze, O. R.; Strouboulis, T. Finite simulation of rough rice drying. Drying Technology, v.12, n.4, p.761-775, 1994.
- Saravacos, G. D.; Kostaropoulos, A. E. Transport properties in processing of fruits and vegetables. Food Technology, p.99-105, September 1995.

- Selby, S.M. Standard mathematical tables. Cleveland: The Chemical Rubber Co., 1971. p.18.
- Sharma, A D.; Kunze, O. R.; Tolley, H. D. Rough rice drying as a two-compartment model. Transactions of the ASAE, v.25, p.221-224, 1982.
- Sheen, S.; Hayakawa, K. Parametric analysis for frozen spheroidal (prolate and oblate) or finitely cylindrical food. Journal of Food Science, v.57, n.1, 1992, p. 236-248.
- Shih, T. Numerical heat transfer. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1984, 536p.
- Shivhare, U. S.; Gupta, A.; Bawa, A . S.; Gupta, P. Drying characteristics and product quality of okra. Drying Technology. v.18, n. 1-2 , p. 409-419, 2000.
- Schlunder, E.U.; Wagner,G.R. Drying of polymeric solvent coatings. In: International Drying Symposium (Drying 98), Thessaloniki: Proceedings..., v. C, 1998, p.1772-1779.
- Stratton, J. A.; Morse, P. M.; Chu, L. J.; Little, J. D. C.; Huntner, R. A. Elliptic cylinder and Spheroidal wave functions. The Tech. Press of M. I. T. and John Wiley & Sons, Inc., USA, 1941, 127p.
- Strumilo, C.; Kudra, T. Drying: Principles, science and design.. New York: Gordon and Beach Publishing, 1986, 448 p.
- Whitaker, S. Advances in drying. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, v.1, chapter two: Heat and mass transfer in granular porous media, p. 23-61.
- Wrobel, L. C.; Brebbia, C. A. A formulation of the boundary element method for axi-symmetric transient heat conduction. International Journal Heat and Mass Transfer, v. 24, n. 5, p. 843-850, 1981.