

# Resumo

Neste trabalho, mostramos a existência de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + p(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

As principais ferramentas utilizadas são os Teoremas de Deformação, Passo da Montanha e Ponto de Sela.

# Abstract

In this work, we show the existence of solutions for the following class for elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + p(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

The main tools used are the Deformation, Mountain Pass and Saddle Point Theorems.

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Teoremas do Tipo Minimax e Aplicações

por

Jacqueline Félix de Brito

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Dezembro/2005

# Teoremas do Tipo Minimax e Aplicações

por

**Jacqueline Félix de Brito**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB**

---

**Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG**

---

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Dezembro/2005**

# Agradecimentos

**A Deus,**

Como agradecer pelo bem que tens feito a mim?

Como demonstrar quanto amor tu tens ó Deus por mim!

Nem anjos podem expressar a minha eterna gratidão.

Tudo o que sou e o que vier a ser aqui, eu ofereço a ti.

A Deus toda glória, que por mim tanto fez.

"Aos homens isto é impossível, mas a Deus tudo é possível." (Mt. 19:26)

Aos **meus familiares**, a minha eterna gratidão por sua presença em todos os momentos de minha vida, dando-me força, auxiliando-me, compreendendo-me e fortalecendo-me nas horas difíceis.

A meu orientador, **Prof. Claudianor**, pela dedicação, atenção e, principalmente, pelas suas experiências, que muito contribuíram a concluir uma grande e importante etapa de minha vida. Muito obrigada, que Deus continue lhe abençoando!

Aos professores **Marco Aurélio** e **Everaldo S. de Medeiros** por se apresentarem disponível nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

Ao **Prof. Alcionio** pela fundamental colaboração e incansável disponibilidade para discutir e orientar competentemente o Projeto de Iniciação Científica, da qual eu participei.

Ao **Prof. Sérgio Mota**, pelo estímulo e orientações que me deu mesmo antes de minha entrada na Pós-Graduação.

Obrigada aos **Professores do Curso de Matemática**, que me ajudaram a percorrer essa difícil trajetória em busca de conhecimento.

Aos **meus amigos** que compartilharam comigo esses anos de estudos, sabendo cultivar a amizade e a compreensão, os meus agradecimentos.

**A todos que fazem o DME da UFCG.**

**A todos** que contribuíram, de forma direta, ou indiretamente, para concretização deste trabalho, meu muito obrigada!

# Dedicatória

A Deus, Paí de todo conhecimento, que me permitiu concluir mais essa etapa na minha vida...

...A meu pai, Pedro e minha mãe, Odília, alicerce e pilar fundamental da minha existência...

...A meus irmãos, Alexandre, Alexandra e Pedro e a meu namorado Josinaldo, inesgotáveis fontes de estímulo, essenciais nos momentos de mais angústia.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1 Teorema de Deformação</b>	<b>9</b>
1.1 Campo Pseudo-Gradiente . . . . .	9
1.2 Teorema de Deformação . . . . .	13
<b>2 Teorema do Passo da Montanha</b>	<b>21</b>
2.1 Teorema do Passo da Montanha . . . . .	21
2.2 Aplicação do Teorema do Passo da Montanha . . . . .	24
<b>3 Teorema do Ponto de Sela</b>	<b>37</b>
3.1 Teorema do Ponto de Sela . . . . .	37
3.2 Aplicação do Teorema do Ponto de Sela . . . . .	40
<b>4 Teorema do Passo da Montanha Generalizado</b>	<b>55</b>
4.1 Teorema do Passo da Montanha Generalizado . . . . .	55
4.2 Aplicação do Teorema do Passo da Montanha Generalizado . . . . .	58
<b>A Resultados Gerais</b>	<b>71</b>
<b>B Funcionais Diferenciáveis</b>	<b>74</b>
<b>C Resultados Importantes</b>	<b>86</b>
<b>D Teoria do Grau</b>	<b>94</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>97</b>

# Introdução

Neste trabalho, estudamos existência de solução fraca para um problema não-linear do tipo

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + p(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira suave,  $N \geq 3$ ,  $u \in E = H_0^1(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e a função  $p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Por uma solução fraca do problema  $(P_1)$ , entendemos como sendo uma função  $u \in E$  que é um ponto crítico do funcional energia  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 - \lambda u^2] dx - \int_{\Omega} P(x, u) dx, \quad \text{onde} \quad P(x, \xi) = \int_0^{\xi} p(x, t) dt.$$

É natural que, ao falarmos de pontos críticos, pensemos em primeiro lugar em pontos de mínimo [ou de máximo] local ou global e, em segundo lugar, em pontos críticos que são do tipo minimax. Ao longo deste trabalho apresentamos alguns teoremas abstratos para obtenção de pontos críticos para o funcional  $I$ .

No **Capítulo 1**, estudamos algumas versões do Teorema de Deformação segundo os trabalhos de Costa [4], Rabinowitz [11] e Willem [13], nas quais uma delas, será uma ferramenta de fundamental importância na demonstração do Teorema do Ponto de Sela e nas duas versões do Teorema do Passo da Montanha que são utilizadas neste trabalho.

No **Capítulo 2**, mostramos a existência da solução para o Problema  $(P_1)$  considerando  $\lambda < \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor associado ao problema



$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste capítulo assumimos as seguintes hipóteses sob a função  $p$ :

(J<sub>1</sub>)  $p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

(J<sub>2</sub>) Existe uma constante  $a_2 > 0$  tal que

$$|p(x, \xi)| \leq a_2 |\xi|^s, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1;$$

(J<sub>3</sub>) Existem constantes  $2 < \mu \leq 2^*$  e  $r \geq 0$  tais que

$$0 < \mu P(x, \xi) \leq \xi p(x, \xi) \quad \text{para } |\xi| \geq r, \quad \text{onde } P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t) dt.$$

O método utilizado consiste em aplicar um teorema devido a Ambrosetti-Rabinowitz [11], denominado Teorema do Passo da Montanha.

No **Capítulo 3**, mostramos a existência de uma solução para o Problema (**P<sub>1</sub>**), considerando  $\lambda$  um autovalor associado ao Problema (**P<sub>2</sub>**). Para isto, consideramos as seguintes hipóteses sob a função  $p$ :

(H<sub>1</sub>)  $p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

(H<sub>2</sub>) Existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$|p(x, \xi)| \leq M, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R};$$

(H<sub>3</sub>)  $P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t) dt \rightarrow +\infty$ , quando  $|\xi| \rightarrow +\infty$  uniformemente para  $x \in \Omega$ .

Neste capítulo aplicamos o Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz [11] para encontrar a solução desejada.

No **Capítulo 4**, mostramos a existência de uma solução para o Problema (**P<sub>1</sub>**), considerando  $\lambda \geq \lambda_1$ . Para isto, consideramos as seguintes hipóteses sob a função  $p$ :

(G<sub>1</sub>)  $p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

(**G**<sub>2</sub>) Existem constantes  $a_1, a_2 > 0$  tais que

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \text{e} \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde} \quad 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1;$$

(**G**<sub>3</sub>)  $p(x, \xi) = o(|\xi|)$  quando  $\xi \rightarrow 0$ ;

(**G**<sub>4</sub>) Existem constantes  $2 < \mu \leq 2^*$  e  $r \geq 0$  tais que

$$0 < \mu P(x, \xi) \leq \xi p(x, \xi) \quad \text{para} \quad |\xi| \geq r;$$

(**G**<sub>5</sub>)  $\xi p(x, \xi) \geq 0$  para  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Aqui aplicamos o Teorema do Passo da Montanha Generalizado de Rabinowitz [11] para provar novamente a existência de solução.

No **Apêndice A**, enunciamos os principais resultados usados ao longo de nosso trabalho.

No **Apêndice B**, recordamos a definição de funcional diferenciável, mostrando que os funcionais utilizados na dissertação são diferenciáveis.

No **Apêndice C**, demonstramos dois resultados importantes, os quais utilizamos na verificação da condição (PS).

Finalmente, concluímos o nosso trabalho com o **Apêndice D** que contém os principais resultados da Teoria do Grau Topológico que são utilizados na dissertação.

# Capítulo 1

## Teorema de Deformação

Neste capítulo demonstraremos algumas versões do Teorema de Deformação, visto que uma delas, será uma ferramenta de fundamental importância na demonstração do Teorema do Ponto de Sela e nas duas versões do Teorema do Passo da Montanha que iremos trabalhar. Nosso estudo seguirá os trabalhos de, Costa [4], Rabinowitz [11] e Willem [13].

### 1.1 Campo Pseudo-Gradiente

Nesta seção iremos entender o conceito e a construção de um campo pseudo-gradiente que serão fundamentais para a demonstração do Teorema de Deformação.

**Definição 1.1** *Seja  $X$  um espaço de Banach, um campo pseudo-gradiente para  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  é uma aplicação localmente Lipschitziana  $V : Y \rightarrow X$ , que verifica*

$$\|V(u)\| \leq \alpha \|\phi'(u)\| \quad (1.1)$$

e

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle \geq \beta \|\phi'(u)\|^2, \quad (1.2)$$

onde  $0 < \beta < \alpha$  e  $Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}$ .

**Lema 1.1** *Assumindo as condições da Definição 1.1, existe um campo pseudo-gradiente para  $\phi$  em  $Y$ .*

**Demonstração:** Seja  $\tilde{u} \in Y$ , então  $\phi'(\tilde{u}) \neq 0$ . Sendo  $\phi'(\tilde{u})$  um funcional linear contínuo, temos

$$\|\phi'(\tilde{u})\| = \sup_{\|w\|=1} \langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle. \quad (1.3)$$

Uma vez que  $0 < \beta < \alpha$ , obtemos

$$\|\phi'(\tilde{u})\| > \frac{2\beta}{(\alpha + \beta)} \|\phi'(\tilde{u})\|.$$

De (1.3), temos que existe  $(w_n) \subset X$  com  $\|w_n\| = 1$  e

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w_n \rangle \longrightarrow \|\phi'(\tilde{u})\|.$$

Assim, existe  $w = w_n$  para  $n$  suficientemente grande, tal que

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle > \frac{2\beta}{(\alpha + \beta)} \|\phi'(\tilde{u})\|. \quad (1.4)$$

Agora, definindo a função

$$\begin{aligned} v : Y &\longrightarrow X \\ \tilde{u} &\longmapsto v(\tilde{u}) = \frac{(\alpha + \beta)}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| w, \end{aligned}$$

temos

$$\|v(\tilde{u})\| = \frac{(\alpha + \beta)}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| \|w\|,$$

o que implica

$$\|v(\tilde{u})\| = \frac{(\alpha + \beta)}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| < \alpha \|\phi'(\tilde{u})\|,$$

ou seja,

$$\|v(\tilde{u})\| < \alpha \|\phi'(\tilde{u})\|.$$

Além disso,

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \left\langle \phi'(\tilde{u}), \frac{(\alpha + \beta)}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| w \right\rangle,$$

o que implica

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \frac{(\alpha + \beta)}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| \langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle.$$

De (1.4), obtemos

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle > \frac{(\alpha + \beta)}{2} \|\phi'(\tilde{u})\| \frac{2\beta}{(\alpha + \beta)} \|\phi'(\tilde{u})\|,$$

logo

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle > \beta \|\phi'(\tilde{u})\|^2.$$

Sendo  $\phi'$  contínua, existe uma vizinhança aberta de  $\tilde{u} \in Y$ , que denotaremos por  $V_{\tilde{u}}$ , tal que para cada  $u \in V_{\tilde{u}}$ ,

$$\|v(\tilde{u})\| < \alpha \|\phi'(u)\| \quad (1.5)$$

e

$$\langle \phi'(u), v(\tilde{u}) \rangle > \beta \|\phi'(u)\|^2. \quad (1.6)$$

Observe que a família  $\{V_{\tilde{u}_i}; \tilde{u}_i \in Y\}$  é uma cobertura para  $Y$ . Além disso,  $Y \subset X$  é metrizável e portanto paracompacto. Logo, existe um refinamento localmente finito  $\{V_{\tilde{u}_i}\}_{i \in I}$ . Assim, existe uma partição de unidade contínua e localmente Lipschitziana  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  subordinada a  $\{V_{\tilde{u}_i}\}_{i \in I}$  com  $0 \leq \phi_i \leq 1$  e suporte em  $V_{\tilde{u}_i}$ , onde

$$\sum_{i \in I} \phi_i = 1 \text{ em } Y.$$

Considerando

$$V(u) = \sum_{i \in I} \phi_i(u)v_i; \quad v_i = v(\tilde{u}_i) \quad \forall u \in Y,$$

para cada  $u \in Y$ , existe  $J \subset I$  finito tal que

$$V(x) = \sum_{i \in J} \phi_i(x)v_i, \quad \forall x \in B_\delta(u).$$

Para fixar a idéia, vamos supor  $J = \{1, 2, \dots, n_0\}$ ,  $n_0 = n_0(u)$  e  $\delta = \delta(u)$ . Assim,

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(x)v_i, \quad \forall x \in B_\delta(u),$$

em particular

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u)v_i.$$

Note que,  $V$  é localmente Lipschitziana, pois  $V$  é uma soma finita de funções  $\phi_i(u)v_i$  localmente Lipschitziana. Além disso,

$$\|V(u)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u)v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \|v_i\|.$$

Assim, usando (1.5),

$$\|V(u)\| < \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \alpha \|\phi'(u)\|,$$

o que implica

$$\|V(u)\| < \alpha \|\phi'(u)\| \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) = \alpha \|\phi'(u)\| \sum_{i \in I} \phi_i(u),$$

isto é,

$$\|V(u)\| < \alpha \|\phi'(u)\|.$$

Note agora, que tendo

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle = \left\langle \phi'(u), \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) v_i \right\rangle,$$

segue

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \langle \phi'(u), v_i \rangle.$$

Por (1.6), obtemos

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle > \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \beta \|\phi'(u)\|^2,$$

o que implica

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle > \beta \|\phi'(u)\|^2 \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u),$$

portanto

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle > \beta \|\phi'(u)\|^2,$$

mostrando assim a existência de um campo pseudo-gradiente para  $\phi$ . ■

**Observação:** Seja  $X$  é um espaço de Hilbert e  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$ , com derivada localmente Lipschitziana. Então o gradiente de  $\phi$  (quando restrito a  $Y$ ),

$$\nabla \phi : Y \rightarrow X$$

é um campo pseudo-gradiente.

De fato, como  $\nabla \phi : X \rightarrow X$  é definida através do Teorema da Representação de Riesz, de forma que  $\nabla \phi(u) \in X$  é o único vetor tal que  $\phi'(u)h = (h, \nabla \phi(u)) \quad \forall h \in X$  e

$$\|\nabla \phi(u)\|_X = \|\phi'(u)\|_{X'},$$

onde estamos denotando por  $(, )$  o produto interno em  $X$ , segue que  $\nabla \phi$  verifica as condições (1.1) e (1.2) para  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ , pois:

i)  $\|\nabla \phi(u)\| = \|\phi'(u)\| \leq 2 \|\phi'(u)\| \quad \forall u \in X;$

ii)  $\langle \phi'(u), \nabla \phi(u) \rangle = (\nabla \phi(u), \nabla \phi(u)) = \|\nabla \phi(u)\|^2 = \|\phi'(u)\|^2 \quad \forall u \in X.$  ■

## 1.2 Teorema de Deformação

Nesta seção enunciaremos algumas versões do Teorema de Deformação.

Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Dizemos que  $c \in \mathbb{R}$  é um valor crítico de  $\phi$  se existe  $u \in X$  com  $\phi'(u) = 0$  e  $\phi(u) = c$ .

O conjunto de todos os pontos críticos no "nível"  $c$  será designado por

$$K_c = \{u \in X; \phi'(u) = 0 \text{ e } \phi(u) = c\},$$

e denotaremos por  $\phi^c$  o conjunto de todos os pontos em nível menores ou iguais a  $c$ , isto é,

$$\phi^c = \{u \in X; \phi(u) \leq c\}.$$

**Definição 1.2** Dado um subconjunto  $S \subset X$  e  $\alpha > 0$ , designamos por  $S_\alpha$  a vizinhança fechada de  $S$  definida por

$$S_\alpha = \{u \in X; d(u, S) \leq \alpha\},$$

onde  $d(u, S) = \inf \{\|u - v\|; v \in S\}$ .

**Teorema 1.3** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Suponha que  $S \subset X$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $4\beta > \alpha$  e  $\epsilon, \delta > 0$  são tais que

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \quad \forall u \in \phi^{-1} \left( \left[ c - 2\epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right), c + 2\epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) \right] \right) \cap S_{2\delta}. \quad (1.7)$$

Então, existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tal que  $\forall u \in X$  e  $t \in [0, 1]$ , tem-se:

(i)  $\eta(0, u) = u$ ;

(ii)  $\eta(t, u) = u$  se  $u \notin \phi^{-1} \left( \left[ c - 2\epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right), c + 2\epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) \right] \right) \cap S_{2\delta}$ ;

(iii)  $\eta(1, \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$ ;

(iv)  $\eta(1, \cdot) : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo.

**Idéia Geométrica:** Considerando  $S = X$ ,  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ .

Figura 1.1: Deformação

**Demonstração:** Sejam

$$A = \phi^{-1} \left( \left[ c - 2\epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right), c + 2\epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) \right] \right) \cap S_{2\delta},$$

$$B = \phi^{-1} \left( \left[ c - \epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right), c + \epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) \right] \right) \cap S_{\delta}$$

e

$$Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}.$$

Assim, note que  $B \subset A \subset Y$ . Considere  $V : Y \rightarrow X$  um campo pseudo-gradiente para  $\phi$  e uma função localmente Lipschitziana  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\rho(u) = \frac{d(u, X \setminus A)}{d(u, X \setminus A) + d(u, B)}, \quad (\text{Ver [5]})$$

de onde segue que  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $\rho(u) = 1$  se  $u \in B$  e  $\rho(u) = 0$  se  $u \in X \setminus A$ . Considere ainda a seguinte aplicação localmente Lipschitziana  $f : X \rightarrow X$  definida por:

$$f(u) = \begin{cases} -\rho(u) \frac{V(u)}{\|V(u)\|}, & \text{se } u \in A \\ 0, & \text{se } u \notin A. \end{cases} \quad (\text{Ver [5]})$$

Sendo  $\|f(u)\| \leq 1$ ,  $\forall u \in X$ , segue que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = f(w(t)) \\ w(0) = u \end{cases}$$

tem para cada  $u \in X$  a solução definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Seja  $\eta : [0, 1] \times X \rightarrow X$  definida por

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u).$$



Então,

$$(i) \eta(0, u) = w(0, u) = u;$$

$$(ii) \eta(t, u) = u \text{ se } u \notin \phi^{-1} \left( \left[ c - 2\epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right), c + 2\epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) \right] \right) \cap S_{2\delta}.$$

De fato, considerando  $w_1(t) = u, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$\dot{w}_1(t) = 0 = f(w_1(t)) = f(u), \text{ se } u \notin A,$$

logo

$$\begin{cases} \dot{w}_1(t) = f(w_1(t)), & \text{se } u \notin A \\ w_1(0) = u. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções, se  $u \notin A$

$$w(t) = w_1(t) = u, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

portanto

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u) = u, \quad \forall t \in [0, 1];$$

$$(iii) \eta(1, \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

De fato, note que para todo  $t \geq 0$  e  $u \in S$

$$w(t, u) - w(0, u) = \int_0^t f(w(\tau, u)) d\tau,$$

o que implica

$$\|w(t, u) - u\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau, u))\| d\tau \leq \int_0^t d\tau = t.$$

De modo que, sendo  $S_\delta = \{v \in X; d(v, S) \leq \delta\}$ , onde  $d(v, S) = \inf \{\|v - u\|; u \in S\}$ ,

obtemos que  $\forall t \in [0, \delta]$

$$\|w(t, u) - u\| \leq t \leq \delta,$$

de onde segue

$$d(w(t, u), S) \leq \delta, \quad \forall u \in S,$$

o que implica

$$w(t, u) \in S_\delta, \quad \forall u \in S,$$

ou seja,

$$w(t, S) \subset S_\delta, \quad \forall t \in [0, \delta].$$

Logo,

$$\eta(t, S) \subset S_\delta, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.8)$$

Note também que, para cada  $u \in X$  fixado, a função  $\phi(w(t, u))$  é não-crescente, pois

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t, u)) = \phi'(w(t, u))\dot{w}(t, u)$$

e do problema de Cauchy,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t, u)) = \phi'(w(t, u))f(w(t, u)).$$

Da definição de  $f$ , tem-se  $\frac{d}{dt}\phi(w(t, u)) = 0$  se  $w(t, u) \notin A$  e caso contrário,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t, u)) = -\rho(w(t, u))\phi'(w(t, u))\frac{V(w(t, u))}{\|V(w(t, u))\|}.$$

Assim, de (1.2),

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t, u)) \leq -\beta\rho(w(t, u))\frac{\|\phi'(w(t, u))\|^2}{\|V(w(t, u))\|}, \quad (1.9)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t, u)) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde concluímos que  $\phi(w(t, u))$  é não-crescente.

Se  $u \in \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S$ , note que:

a) Se  $\phi(w(\hat{t}, u)) < c - \epsilon$ , para algum  $\hat{t} \in [0, \delta]$ , então

$$\phi(\eta(1, u)) = \phi(w(\delta, u)) \leq \phi(w(\hat{t}, u)) < c - \epsilon.$$

Portanto, de (1.8),

$$\eta(1, u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

b) Observe que para todo  $t \in [0, \delta]$ , temos

$$\phi(w(t, u)) \leq \phi(w(0, u)) = \phi(u) \leq c + \epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right),$$

consequentemente

$$\phi(w(t, u)) \leq c + \epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right).$$

Dessa forma, supondo que

$$w(t, u) \in B = \phi^{-1} \left( \left[ c - \epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right), c + \epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) \right] \right) \cap S_\delta, \quad \forall t \in [0, \delta],$$

usando (1.1), (1.9) e o fato que  $\rho \equiv 1$  em  $B$ , obtemos

$$\phi(w(\delta, u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt} \phi(w(t, u)) dt,$$

de onde segue

$$\phi(w(\delta, u)) \leq \phi(u) - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^\delta \|\phi'(w(t, u))\| dt,$$

logo

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) - \frac{\beta}{\alpha} \frac{4\epsilon}{\delta} \delta \leq c + \epsilon \left( \frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) - \frac{\beta}{\alpha} 4\epsilon,$$

mostrando que

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c - \epsilon.$$

Portanto, em qualquer um dos casos (a) ou (b)

$$\eta(1, u) = w(\delta, u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta, \quad \text{se } u \in \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S;$$

(iv)  $\eta(1, \cdot) : X \longrightarrow X$  é um homeomorfismo. De fato, devemos mostrar que  $\eta$  é contínua e que possui inversa contínua.

Assim, considere as seguintes funções

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto g(u) = w(\delta t, u) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto h(u) = w(-\delta t, u). \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, h(u)),$$

de onde segue

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u)).$$

Usando propriedades de fluxo, obtemos

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t - \delta t, u) = w(0, u) = u,$$

ou seja,

$$(g \circ h)(u) = u.$$

De modo análogo, temos

$$(h \circ g)(u) = u.$$

Logo, temos que  $\eta(t, u) = w(\delta t, u)$  possui inversa, dada por  $\eta^{-1}(t, u) = w(-\delta t, u)$ . Note ainda que  $\eta(t, \cdot)$  é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais para  $w(\delta t, u)$ . Da mesma forma, temos que  $\eta^{-1}(\cdot, u)$  também é contínua, donde concluímos que  $\eta(1, \cdot) : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo. ■

**Definição 1.4** Dizemos que  $\phi$  satisfaz a condição de Palais-Smale -(PS), se qualquer sequência  $(u_n)$  tal que  $\phi(u_n)$  é limitada e  $\phi'(u_n) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , possui uma subsequência convergente.

Como consequência do **Teorema 1.3**, considerando  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ , obtemos os seguintes teoremas:

**Teorema 1.5** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Suponha que  $\phi$  satisfaz a condição (PS). Se  $c \in \mathbb{R}$  não é um valor crítico de  $\phi$ . Então, para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tal que,  $\forall u \in X$  e  $t \in [0, 1]$ , tem-se:

- (i)  $\eta(0, u) = u$ ;
- (ii)  $\eta(t, u) = u$  se  $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ ;
- (iii)  $\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$ ;
- (iv)  $\eta(1, \cdot) : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo.

**Demonstração:** Devem existir constantes  $\theta, \gamma > 0$  tais que, se  $u \in \phi^{-1}([c - 2\theta, c + 2\theta])$ , temos  $\|\phi'(u)\| \geq \gamma$ , pois, caso contrário, existe uma sequência  $(u_n)$  com

$$\phi(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \phi'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty. \quad (1.10)$$

Por hipótese, temos que  $\phi$  satisfaz a condição (PS), logo existe uma subsequência  $(u_{n_k}) \subset (u_n)$  tal que  $u_{n_k} \rightarrow u$  em  $X$ . Sendo  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ , segue-se

$$\phi(u_{n_k}) \rightarrow \phi(u) \quad (1.11)$$

e

$$\phi'(u_{n_k}) \rightarrow \phi'(u). \quad (1.12)$$

De (1.10)-(1.12), tem-se

$$\phi(u) = c \quad \text{e} \quad \phi'(u) = 0,$$

donde concluimos que  $c$  é um valor crítico de  $\phi$ , contrariando a hipótese, logo mostramos que existem constantes  $\theta, \gamma > 0$  tais que, se  $u \in \phi^{-1}([c - 2\theta, c + 2\theta])$ , temos  $\|\phi'(u)\| \geq \gamma$ .

Assim, considerando  $S = X$ ,  $\epsilon \in (0, \theta]$  fixado e  $\delta = \frac{4\epsilon}{\gamma}$ , ou seja,  $\gamma = \frac{4\epsilon}{\delta}$ , pelo

**Teorema 1.3**, segue o resultado. ■

**Observação 1.1** *Na demonstração acima, observe que o Teorema 1.5 é válido sob a seguinte condição mais fraca de compacidade introduzida por Brézis-Coron-Nirenberg:*

**Condição (PS)<sub>c</sub>:** *Se uma sequência  $(u_n)$  é tal que  $\phi(u_n) \rightarrow c$  e  $\phi'(u_n) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , então  $c$  é um valor crítico de  $\phi$ .*

**Teorema 1.6** *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Suponha que  $\phi$  satisfaz a condição de Palais-Smale  $-(PS)$ . Se  $U$  é uma vizinhança aberta de  $K_c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , então para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tal que,  $\forall u \in X$  e  $t \in [0, 1]$ , tem-se:*

- (i)  $\eta(0, u) = u$ ;
- (ii)  $\eta(t, u) = u$  se  $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ ;
- (iii)  $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \setminus U) \subset \phi^{c-\epsilon}$ ;
- (iv)  $\eta(1, \cdot) : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo.

**Idéia Geométrica:**

Figura 1.2: Deformação

**Demonstração:** Seja  $S = X \setminus U$ . Então, existem constantes  $\epsilon, \delta > 0$  tais que, se  $u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$ , temos  $\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$ , pois, caso contrário, para cada  $\epsilon = \frac{1}{2n}$  e  $\delta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$  com  $n \in \mathbb{N}$ , existiria

$$u_n \in \phi^{-1}\left(\left[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right]\right) \cap S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad \text{com} \quad \|\phi'(u_n)\| \leq \frac{4\sqrt{n}}{n},$$

ou seja,

$$\phi(u_n) \in \left[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right] \quad \text{e} \quad u_n \in S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad \text{com} \quad \|\phi'(u_n)\| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Assim, teríamos uma sequência  $(u_n) \subset S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$  com

$$\phi(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \phi'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty. \quad (1.13)$$

Por hipótese, temos que  $\phi$  satisfaz a condição (PS), logo existiria uma subsequência  $(u_{n_k}) \subset (u_n)$  tal que  $u_{n_k} \rightarrow u$  em  $X$ . Sendo  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ , segue-se

$$\phi(u_{n_k}) \rightarrow \phi(u) \quad (1.14)$$

e

$$\phi'(u_{n_k}) \rightarrow \phi'(u). \quad (1.15)$$

De (1.13)-(1.15), tem-se

$$\phi(u) = c \quad \text{e} \quad \phi'(u) = 0,$$

donde concluímos que  $u \in K_c$ .

Por outro lado, temos que  $u_n \in S_{1/\sqrt{n}}$ , o que implica  $d(u_n, S) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Além disso, sendo  $d$  uma função contínua, obtemos  $d(u, S) = 0$ . Dessa forma, uma vez que  $S = X \setminus U$  é um conjunto fechado, segue-se  $u \in S$ .

Portanto,  $u \in S \cap K_c$ , o que é uma contradição, pois  $S \cap U = \emptyset$ , logo mostramos que existem constantes  $\epsilon, \delta > 0$  tais que, se  $u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$ , temos  $\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$ .

Assim, considerando  $S = X \setminus U$ , pelo **Teorema 1.3**, segue o resultado. ■

## Capítulo 2

# Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo, demonstraremos um teorema devido a Ambrosetti-Rabinowitz [11], denominado Teorema do Passo da Montanha. Em seguida fazemos uma aplicação do mesmo, mostrando a existência de uma solução fraca para uma classe de problemas elípticos.

### 2.1 Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz.

**Teorema 2.1** *Seja  $E$  um espaço de Banach real e  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale-(PS). Suponha que  $I(0) = 0$  e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(I<sub>1</sub>) *Existem constantes  $\alpha, \rho > 0$  tais que  $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ , e*

(I<sub>2</sub>) *Existe um  $e \in E \setminus \bar{B}_\rho$  tal que  $I(e) \leq 0$ .*

*Então,  $I$  possui um valor crítico  $c \geq \alpha$ , com*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u),$$

onde  $\Gamma = \{g \in C([0,1], E) \mid g(0) = 0 \text{ e } g(1) = e\}$ .

**Idéia Geométrica:**

Figura 2.1: Passo da Montanha

**Demonstração:** Seja  $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u)$ , ou seja,  $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t))$ . Afirmamos que  $c$  está bem definido. De fato, pois sendo  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  e  $g \in C([0,1], E)$ , segue que  $I \circ g$  é uma função contínua e sendo  $[0,1]$  um conjunto compacto, temos que  $I \circ g$  possui máximo em  $[0,1]$ .

**Afirmção 1:**  $\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geq \alpha, \quad \forall g \in \Gamma.$

De fato, seja  $g \in \Gamma$  e defina

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = \|g(t)\|. \end{aligned}$$

Observe que  $h$  é uma composição de funções contínuas, logo  $h$  é contínua. Além disso, sendo  $e \in E \setminus \overline{B}_\rho$ , temos que

$$h(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$$

e

$$h(1) = \|g(1)\| = \|e\| > \rho,$$



ou seja,  $h(0) < \rho < h(1)$ . Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $t_o \in (0, 1)$  tal que  $h(t_o) = \|g(t_o)\| = \rho$ , de onde segue pela condição **(I<sub>1</sub>)** que  $I(g(t_o)) \geq \alpha$ , logo

$$\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geq \alpha, \quad \forall g \in \Gamma, \quad (2.1)$$

mostrando assim a **Afirmção 1**.

Definindo  $H = \left\{ \max_{t \in [0,1]} I(g(t)); g \in \Gamma \right\}$ , segue-se da **Afirmção 1**, que  $H$  é limitado inferiormente em  $\mathbb{R}$ . Assim pelo Postulado de Dedekind, existe o ínfimo de  $H$  em  $\mathbb{R}$ , isto é,  $\inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t))$  está bem definido.

De (2.1) temos que  $\alpha$  é uma cota inferior para  $H$ , conseqüentemente pela definição de  $c$ , segue que  $c \geq \alpha$ .

Suponha por contradição que  $c$  não é um valor crítico. Então, pelo **Teorema de Deformação 1.5**, temos que dado  $0 < \epsilon < \frac{c - \alpha}{2}$ , existe  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$  tal que

- (i)  $\eta(t, u) = u$  se  $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$  e  $t \in [0, 1]$ ;
- (ii)  $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$ .

Além disso, pela definição de  $c$ , existe  $g \in \Gamma$  tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \leq c + \epsilon. \quad (2.2)$$

Considere  $\tilde{h}(t) = \eta(1, g(t))$ . Sendo  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$  e  $g \in C([0, 1], E)$ , segue que  $\tilde{h} \in C([0, 1], E)$ . Uma vez que,  $I(e) < \alpha < c - 2\epsilon$ , tem-se  $I(e) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$ , o que implica  $e \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ . Da mesma forma, sendo  $I(0) = 0 < \alpha < c - 2\epsilon$ , tem-se  $I(0) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$ , ou seja,  $0 \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ . Assim, de **(i)**,

$$\tilde{h}(0) = \eta(1, g(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$\tilde{h}(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, e) = e,$$

donde concluímos, que  $\tilde{h} \in \Gamma$ . Por (2.2), obtemos

$$I(g(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica  $g(t) \in I^{c+\epsilon} \quad \forall t \in [0, 1]$ . De **(ii)**,

$$\tilde{h}(t) = \eta(1, g(t)) \in I^{c-\epsilon} \quad \forall t \in [0, 1],$$

ou seja,  $I(\tilde{h}(t)) \leq c - \epsilon \quad \forall t \in [0, 1]$ , logo

$$\max_{t \in [0, 1]} I(\tilde{h}(t)) \leq c - \epsilon$$

e sendo,  $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(g(t))$ , temos que

$$c \leq \max_{t \in [0, 1]} I(\tilde{h}(t)) \leq c - \epsilon,$$

visto que  $\tilde{h} \in \Gamma$ . Assim,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que um absurdo. Portanto, concluímos que  $c$  é um valor crítico para  $I$ , finalizando assim a demonstração do **Teorema 2.1**. ■

## 2.2 Aplicação do Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção estudaremos a existência de solução para o seguinte problema:

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + p(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira suave e  $\lambda < \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor associado ao problema

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue consideraremos  $N \geq 3$  e as seguintes hipóteses sobre  $p$  :

(**J<sub>1</sub>**)  $p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

(**J<sub>2</sub>**) Existe uma constante  $a_2 > 0$  tal que

$$|p(x, \xi)| \leq a_2 |\xi|^s, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1;$$

(**J<sub>3</sub>**) Existem constantes  $2 < \mu \leq 2^*$  e  $r \geq 0$  tais que

$$0 < \mu P(x, \xi) \leq \xi p(x, \xi), \quad \text{para } |\xi| \geq r, \quad \text{onde } P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t) dt.$$

Além disso, denotaremos por

$$\|u\| = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

as normas em  $E = H_0^1(\Omega)$  e  $L^p(\Omega)$  respectivamente, ao longo de toda a dissertação.

Nosso objetivo é mostrar a existência de uma solução fraca para o **Problema (P<sub>1</sub>)**. O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

**Teorema 2.2** *Suponha que  $\lambda < \lambda_1$  e  $p$  satisfaz as condições  $(J_1) - (J_3)$ . Então o Problema  $(P_1)$  possui uma solução fraca.*

**Demonstração:** Vamos mostrar que o funcional  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 - \lambda u^2] dx - \int_{\Omega} P(x, u) dx.$$

onde  $P(x, \xi) = \int_0^{\xi} p(x, t) dt$ , satisfaz as hipóteses do **Teorema do Passo da Montanha 2.1** e assim, encontrar um ponto crítico para o funcional, pois já sabemos que existe uma relação entre os pontos críticos de  $I$  com as soluções fracas do **Problema (P<sub>1</sub>)**, visto que

$$I'(u)v = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla v - \lambda uv] dx - \int_{\Omega} p(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad (\text{Ver Apêndice B})$$

temos que  $u \in H_0^1(\Omega)$  é ponto crítico de  $I$  se  $I'(u)v = 0$ , ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} [\lambda uv + p(x, u)v] dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

de onde segue que  $u$  é uma solução fraca para o **Problema (P<sub>1</sub>)**.

Note que, se  $\lambda < \lambda_1$ , a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_* &: E \rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\|_* = \left( \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 - \lambda u^2] dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

define uma norma em  $E$ . De fato, considere em  $E$  a seguinte forma bilinear

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_* &: E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle_* = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla v - \lambda uv] dx. \end{aligned}$$

Note que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  é um produto interno, pois  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  verifica as seguintes propriedades:

$$[1] - \langle u + v, w \rangle_* = \langle u, w \rangle_* + \langle v, w \rangle_* \quad \forall u, v, w \in E.$$

$$[2] - \langle u, v \rangle_* = \langle v, u \rangle_* \quad \forall u, v \in E.$$

$$[3] - \langle \alpha u, v \rangle_* = \alpha \langle u, v \rangle_* \quad \forall u, v \in E \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$[4] - \langle u, u \rangle_* \geq 0, \quad \forall u \in E.$$

De fato, seja  $u \in E$ , então

$$\langle u, u \rangle_* = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla u - \lambda u u] dx,$$

o que implica

$$\langle u, u \rangle_* = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Sendo  $\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}$ , temos

$$\lambda < \lambda_1 \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}, \quad \forall u \in E \setminus \{0\},$$

o que implica

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx, \quad \forall u \in E \setminus \{0\},$$

ou seja,

$$\langle u, u \rangle_* \geq 0, \quad \forall u \in E.$$

$$[5] - \langle u, u \rangle_* = 0 \iff u = 0.$$

De fato, considere  $u \in E$  tal que  $\langle u, u \rangle_* = 0$ , note que:

i) Se  $0 \leq \lambda < \lambda_1$ ,

$$\langle u, u \rangle_* \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2, \quad \forall u \in E,$$

de onde segue

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 \leq 0.$$

Por outro lado, temos que  $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 \geq 0, \forall u \in E$  e  $\lambda < \lambda_1$ , portanto

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 = 0.$$

Sendo  $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) > 0$ , segue-se  $\|u\| = 0$ , o que implica  $u = 0$ .

ii) Se  $\lambda < 0$ ,

$$\langle u, u \rangle_* = \|u\|^2 + |\lambda| \|u\|_{L^2}^2 = 0,$$

logo

$$\|u\|_{L^2} = 0 \quad \text{e} \quad \|u\| = 0,$$

o que implica  $u = 0$ .

De [1]-[5], podemos concluir que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  define um produto interno, assim

$$\|u\|_* = \sqrt{\langle u, u \rangle_*},$$

de onde segue que  $\| \cdot \|_*$  é uma norma.

**Afirmção 2:** As normas  $\| \cdot \|_*$  e  $\| \cdot \|$  são equivalentes em  $E$ .

Temos que  $\|u\|_*^2 \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2, \forall u \in E$  e  $0 \leq \lambda < \lambda_1$ . Considerando

$$C_1 = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{1/2},$$

$$\|u\|_* \geq C_1 \|u\|, \quad \forall u \in E.$$

Observe que para  $\lambda < 0$ , basta considerar  $C_1 = 1$ , pois

$$\|u\|_* = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + |\lambda| \int_{\Omega} |u|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

ou seja,

$$\|u\|_* \geq \|u\|, \quad \forall u \in E.$$

Assim, considerando  $C_2 = \min\{C_1, 1\}$ , mostramos que existe  $C_2 > 0$ , tal que para  $\lambda < \lambda_1$ ,

$$\|u\|_* \geq C_2 \|u\|, \quad \forall u \in E.$$

Por outro lado, temos

$$\|u\|_*^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + |\lambda| \int_{\Omega} |u|^2 dx, \quad \forall u \in E \text{ e } \lambda < \lambda_1.$$

o que implica

$$\|u\|_*^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{|\lambda|}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \left(1 + \frac{|\lambda|}{\lambda_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Considerando  $C_3 = \left(1 + \frac{|\lambda|}{\lambda_1}\right)^{1/2}$ ,

$$\|u\|_* \leq C_3 \|u\|, \quad \forall u \in E.$$

Assim, existem  $C_2$  e  $C_3 > 0$  tais que

$$C_2 \|u\| \leq \|u\|_* \leq C_3 \|u\|, \quad \forall u \in E,$$

portanto,  $\|\cdot\|_*$  e  $\|\cdot\|$  são normas equivalentes em  $E$ .

Vamos mostrar que o funcional  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 - \lambda u^2] dx - \int_{\Omega} P(x, u) dx,$$

onde  $P(x, \xi) = \int_0^{\xi} p(x, t) dt$ , satisfaz as hipóteses do **Teorema 2.1**.

Observe inicialmente que  $E = H_0^1(\Omega)$  é um espaço de Banach real. Sendo as condições **(J<sub>1</sub>)** e **(J<sub>2</sub>)** satisfeitas, segue que  $I$  está bem definido e  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  (**ver Apêndice B**). Além disso,

$$I'(u)v = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla v - \lambda uv] dx - \int_{\Omega} p(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in E.$$

Note ainda que  $I(0) = 0$ . No que segue vamos mostrar que o funcional  $I$  verifica as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

**Verificação da condição (I<sub>1</sub>):**

Da condição **(J<sub>2</sub>)**, temos que existe uma constante  $a_2 > 0$  tal que

$$|p(x, \xi)| \leq a_2 |\xi|^s, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1,$$

logo

$$|P(x, \xi)| \leq a_2 \frac{|\xi|^{s+1}}{s+1},$$

de onde segue

$$|P(x, \xi)| \leq C_1 |\xi|^p, \quad \text{onde } 2 < p < 2^*.$$

Sendo

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|_*^2 - \int_{\Omega} P(x, u) dx,$$

obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_*^2 - \int_{\Omega} C_1 |u|^p dx,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_*^2 - C_1 \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Sendo as normas  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_*$  equivalentes, obtemos

$$I(u) \geq C_2 \|u\|^2 - C_1 \|u\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

e pela imersões contínuas de Sobolev, temos

$$I(u) \geq C_2 \|u\|^2 - C_3 \|u\|^p.$$

Sendo  $C_2$  e  $C_3$  constantes positivas e  $p > 2$ , podemos encontrar  $\alpha > 0$  e  $\rho > 0$  tais que

$$I(u) \geq \alpha > 0, \quad \text{para } \|u\| = \rho,$$

mostrando que  $I$  satisfaz **(I<sub>1</sub>)**.

### Verificação da condição **(I<sub>2</sub>)**:

De  $(J_3)$ , temos que existem constantes  $2 < \mu \leq 2^*$  e  $r \geq 0$  tais que

$$0 < \mu P(x, \xi) \leq \xi p(x, \xi), \quad \text{para } |\xi| \geq r$$

**Afirmção 3:** Existem constantes positivas  $C$  e  $C_3$ , tais que  $P(x, \xi) \geq C |\xi|^\mu - C_3$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$  e  $x \in \bar{\Omega}$ .

De fato, considerando  $P(x, \xi) \neq 0$  e  $\xi \neq 0$ , vamos analisar os seguintes casos:

**1º Caso:** Para  $\xi > 0$ , obtemos

$$0 < \frac{\mu}{\xi} \leq \frac{p(x, \xi)}{P(x, \xi)}, \quad \text{para } \xi \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega},$$

o que implica  $\int_r^\xi \frac{\mu}{t} dt \leq \int_r^\xi \frac{p(x,t)}{P(x,t)} dt$ , de onde segue

$$\mu \ln \xi - \mu \ln r \leq \ln P(x, \xi) - \ln P(x, r), \quad \text{para } \xi \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega},$$

logo

$$\ln \left( \frac{\xi}{r} \right)^\mu \leq \ln \frac{P(x, \xi)}{P(x, r)}, \quad \text{para } \xi \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega}.$$

Usando o fato da função  $\ln$  ser uma função crescente, obtemos

$$\left( \frac{\xi}{r} \right)^\mu \leq \frac{P(x, \xi)}{P(x, r)}, \quad \text{para } \xi \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega},$$

ou seja,

$$P(x, \xi) \geq \frac{P(x, r)}{r^\mu} \xi^\mu, \quad \text{para } \xi \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega}.$$

Considerando  $M_1 = \min_{x \in \bar{\Omega}} P(x, r)$ , observamos que  $M_1$  está bem definido, visto que  $P(\cdot, r)$  é contínua e  $\bar{\Omega}$  é compacto. Além disso,

$$P(x, \xi) \geq \frac{M_1}{r^\mu} \xi^\mu, \quad \text{para } \xi \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega}.$$

Assim, fixado  $C_1 = \frac{M_1}{r^\mu} > 0$ ,

$$P(x, \xi) \geq C_1 \xi^\mu, \quad \forall \xi \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega}. \quad (2.3)$$

**2º Caso:** Para  $\xi < 0$ , obtemos

$$\frac{p(x, \xi)}{P(x, \xi)} \leq \frac{\mu}{\xi}, \quad \text{para } \xi \leq -r \text{ e } x \in \bar{\Omega},$$

o que implica  $\int_\xi^{-r} \frac{p(x,t)}{P(x,t)} dt \leq \int_\xi^{-r} \frac{\mu}{t} dt$ , de onde segue

$$\ln P(x, -r) - \ln P(x, \xi) \leq \mu \ln |-r| - \mu \ln |\xi|, \quad \text{para } \xi \leq -r \text{ e } x \in \bar{\Omega},$$

logo

$$\ln \left| \frac{-r}{\xi} \right|^\mu \geq \ln \frac{P(x, -r)}{P(x, \xi)}, \quad \text{para } \xi \leq -r \text{ e } x \in \bar{\Omega}.$$

Usando o fato da função  $\ln$  ser uma função crescente, obtemos

$$\left| \frac{-r}{\xi} \right|^\mu \geq \frac{P(x, -r)}{P(x, \xi)}, \quad \text{para } \xi \leq -r \text{ e } x \in \bar{\Omega},$$



ou seja,

$$P(x, \xi) \geq \frac{P(x, -r)}{r^\mu} |\xi|^\mu, \quad \text{para } \xi \leq -r \text{ e } x \in \bar{\Omega}.$$

Considerando  $M_2 = \min_{x \in \bar{\Omega}} P(x, -r)$ , observamos que  $M_2$  está bem definido, visto que  $P(\cdot, -r)$  é contínua e  $\bar{\Omega}$  é compacto. Além disso, tem-se

$$P(x, \xi) \geq \frac{M_2}{r^\mu} |\xi|^\mu, \quad \text{para } \xi \leq -r \text{ e } x \in \bar{\Omega}.$$

Assim, considerando  $C_2 = \frac{M_2}{r^\mu} > 0$ ,

$$P(x, \xi) \geq C_2 |\xi|^\mu, \quad \forall \xi \leq -r \text{ e } x \in \bar{\Omega}. \quad (2.4)$$

Considerando  $C = \min \{C_1, C_2\}$ , segue-se de (2.3) e (2.4),

$$P(x, \xi) \geq C |\xi|^\mu, \quad \forall |\xi| \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega}.$$

Dessa forma,

$$P(x, \xi) \geq C |\xi|^\mu - C_3, \quad \forall |\xi| \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega}.$$

onde  $C_3 > 0$  é uma constante positiva arbitrária.

Considerando  $M = \min_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in [-r, r]}} P(x, \xi)$ , note que  $M$  está bem definido, pois  $P$  é contínua e  $\bar{\Omega} \times [-r, r] \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$  é um compacto, logo

$$P(x, \xi) \geq M, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \in [-r, r].$$

Considere  $C_3 > 0$ , de modo que

$$C_3 \geq Cr^\mu - M,$$

logo

$$C_3 \geq C |\xi|^\mu - M, \quad \forall \xi \in [-r, r],$$

ou seja,

$$M \geq C |\xi|^\mu - C_3, \quad \forall \xi \in [-r, r].$$

Assim,

$$P(x, \xi) \geq C |\xi|^\mu - C_3, \quad \forall \xi \in [-r, r] \text{ e } x \in \bar{\Omega} \quad (2.5)$$

e

$$P(x, \xi) \geq C |\xi|^\mu - C_3, \quad \forall |\xi| \geq r \text{ e } x \in \bar{\Omega}. \quad (2.6)$$

De (2.5) e (2.6), segue

$$P(x, \xi) \geq C |\xi|^\mu - C_3, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \bar{\Omega},$$

donde concluímos que a **Afirmção 3** é verdadeira.

Seja  $u \in E \setminus \{0\}$  e  $\varphi = tu$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Note que, para  $t \geq 0$

$$I(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|_*^2 - \int_{\Omega} P(x, tu) dx.$$

Sendo as normas  $\|\cdot\|_*$  e  $\|\cdot\|$  equivalentes, obtemos

$$I(tu) \leq C_4 t^2 \|u\|^2 - \int_{\Omega} [C |tu|^\mu - C_3] dx.$$

Desde que  $E \hookrightarrow L^\mu$ , obtemos

$$I(tu) \leq C_4 t^2 \|u\|^2 - C t^\mu \|u\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu + C_3 |\Omega|,$$

onde estamos denotando por  $|\Omega|$  a medida de Lebesgue de  $\Omega$ . Portanto, como  $\mu > 2$ , temos que  $I(tu) \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , logo existe  $e \in E \setminus \bar{B}_\rho$  tal que  $I(e) < 0$ , mostrando assim que  $I$  satisfaz a condição **(I<sub>2</sub>)**.

### Verificação da condição (PS):

Seja  $(u_n)$  uma sequência (PS), isto é,

$$|I(u_n)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

e

$$I'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Vamos mostrar que  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente, ou seja, existe uma subsequência  $(u_{n_j})$  tal que  $u_{n_j} \rightarrow u$  em  $E$ . Note que  $I'(u_n) \rightarrow 0$  implica que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_\circ \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|I'(u_n)\|_{E'} < \epsilon, \quad \forall n \geq n_\circ,$$

ou seja,

$$\sup_{\substack{\varphi \in E \\ \|\varphi\| \neq 0}} \frac{|I'(u_n)\varphi|}{\|\varphi\|} < \epsilon, \quad \forall n \geq n_\circ.$$

Assim,

$$\frac{|I'(u_n)\varphi|}{\|\varphi\|} < \epsilon, \quad \forall n \geq n_o \text{ e } \varphi \in E \setminus \{0\},$$

isto é,

$$|I'(u_n)\varphi| \leq \epsilon \|\varphi\|, \quad \forall n \geq n_o \text{ e } \varphi \in E.$$

Sendo  $u_n \in E$ , obtemos

$$|I'(u_n)u_n| \leq \epsilon \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_o. \quad (2.8)$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} \lambda |u_n|^2 dx \right] - \int_{\Omega} P(x, u_n) dx - \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \left[ \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} \lambda |u_n|^2 dx \right] + \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n dx, \end{aligned}$$

portanto

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|_*^2 + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu} p(x, u_n) u_n - P(x, u_n) \right] dx.$$

Sendo  $\|\cdot\|_*$  e  $\|\cdot\|$  equivalentes,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) C_1 \|u_n\|^2 + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu} p(x, u_n) u_n - P(x, u_n) \right] dx.$$

Considerando  $A_n = \{x \in \Omega ; |u_n(x)| \geq r\}$ , tem-se

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) C_1 \|u_n\|^2 + \\ &\quad \int_{A_n} \left[ \frac{1}{\mu} p(x, u_n) u_n - P(x, u_n) \right] dx + \int_{A_n^c} \left[ \frac{1}{\mu} p(x, u_n) u_n - P(x, u_n) \right] dx. \end{aligned}$$

Da condição **(J<sub>3</sub>)**, segue

$$\frac{1}{\mu} p(x, u_n) u_n - P(x, u_n) \geq 0, \quad \forall x \in A_n,$$

o que implica

$$\int_{A_n} \left[ \frac{1}{\mu} p(x, u_n) u_n - P(x, u_n) \right] dx \geq 0,$$

logo

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) C_1 \|u_n\|^2 + \int_{A_n^c} \left[ \frac{1}{\mu} p(x, u_n) u_n - P(x, u_n) \right] dx,$$

e conseqüentemente

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) C_1 \|u_n\|^2 - \int_{A_n^c} \left| \frac{1}{\mu} p(x, u_n)u_n - P(x, u_n) \right| dx.$$

Sendo  $p$  e  $P$  funções contínuas,  $g(x, t) = \left| \frac{1}{\mu} p(x, t)t - P(x, t) \right|$  é uma função contínua. Assim, uma vez que  $\bar{\Omega} \times [-r, r]$  é um conjunto compacto, segue-se que  $g$  é limitada neste compacto, logo existe  $C > 0$  tal que

$$|g(x, t)| \leq C, \quad \forall (x, t) \in \bar{\Omega} \times [-r, r],$$

o que implica

$$\left| \frac{1}{\mu} p(x, u_n)u_n - P(x, u_n) \right| \leq C, \quad \forall x \in \bar{A}_n^c.$$

Assim,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) C_1 \|u_n\|^2 - \int_{\bar{A}_n^c} C dx,$$

de onde segue

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) C_1 \|u_n\|^2 - C |\bar{A}_n^c|.$$

Além disso,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) C_1 \|u_n\|^2 - C |\Omega|,$$

isto é,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) C_1 \|u_n\|^2 - C_2. \quad (2.9)$$

Por outro lado, de (2.7) e (2.8), segue-se

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \leq \left| I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \right|,$$

o que implica

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \leq |I(u_n)| + \frac{1}{\mu} |I'(u_n)u_n|,$$

de onde segue

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \leq |I(u_n)| + \frac{1}{\mu} \|I'(u_n)\|_{E'} \|u_n\|,$$

logo existe  $n_o \in \mathbb{N}$  tal que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \leq M + \frac{1}{\mu} \epsilon \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_o. \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10), tem-se

$$M + \frac{1}{\mu}\epsilon \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - C_2, \quad \forall n \geq n_0.$$

Fixando  $\widetilde{M} = M + C_2 > 0$ ,  $\widetilde{K} = \frac{\epsilon}{\mu}$  e  $\widetilde{C} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 > 0$ , obtemos

$$\widetilde{M} + \widetilde{K} \|u_n\| \geq \widetilde{C} \|u_n\|^2, \quad \forall n \geq n_0,$$

mostrando que  $(u_n)$  é limitada em  $E$ .

Para provarmos que  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente, aplicaremos a **Proposição C.1 (Ver Apêndice C)**. Portanto, no que segue mostraremos que  $I$  satisfaz as suas hipóteses. Considere  $f(x, \xi) = \lambda\xi - p(x, \xi)$ . Vamos mostrar que  $f$  satisfaz as condições  $(\overline{\mathbf{H}}_1)$  e  $(\overline{\mathbf{H}}_2)$  da **Proposição C.1**.

**Verificação da condição  $(\overline{\mathbf{H}}_1)$ :**

Temos que  $p$  satisfaz  $(\mathbf{J}_1)$  e  $\xi, \lambda \in \mathbb{R}$ . Logo,  $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Verificação da condição  $(\overline{\mathbf{H}}_2)$ :**

Pela condição  $(\mathbf{J}_2)$ , obtemos

$$|f(x, \xi)| \leq |\lambda| |\xi| + |p(x, \xi)| \leq |\lambda| |\xi| + a_2 |\xi|^s, \quad \text{onde } 1 < s < 2^* - 1.$$

Observe que

$$\frac{|\lambda| |\xi| + a_2 |\xi|^s}{|\xi|^{s+\epsilon}} = \frac{|\lambda|}{|\xi|^{s+\epsilon-1}} + \frac{a_2}{|\xi|^\epsilon} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } |\xi| \rightarrow +\infty,$$

logo existe  $R > 0$  tal que

$$|\lambda| |\xi| + a_2 |\xi|^s \leq \begin{cases} |\xi|^{s+\epsilon}, & \text{se } |\xi| > R \\ A, & \text{se } |\xi| \leq R \end{cases}$$

o que implica

$$|\lambda| |\xi| + a_2 |\xi|^s \leq A + |\xi|^{s+\epsilon}, \quad \text{onde } 1 < s < 2^* - 1.$$

Considerando  $\alpha = s + \epsilon$ , segue-se

$$|f(x, \xi)| \leq A + |\xi|^\alpha, \quad \text{onde } 1 < \alpha < 2^* - 1,$$

ou seja,  $f$  satisfaz  $(\overline{\mathbf{H}}_2)$  para  $s = \alpha$ .

Portanto, mostramos que  $f$  satisfaz  $(\overline{\mathbf{H}}_1)$  e  $(\overline{\mathbf{H}}_2)$ , logo podemos aplicar a **Proposição C.1**, para o funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} u^2 - P(x, u) \right) dx$$

donde concluímos que  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente. Mostrando assim, que  $I$  satisfaz a **condição (PS)**.

Finalmente, podemos aplicar o **Teorema 2.1** e concluir a existência de um ponto crítico de  $I$ , isto é, uma solução fraca para o **problema  $(\mathbf{P}_1)$** , finalizando a demonstração do **Teorema 2.2**. ■

# Capítulo 3

## Teorema do Ponto de Sela

Nosso objetivo neste capítulo, é demonstrar o Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz [11] e mostrar uma aplicação de tal teorema.

### 3.1 Teorema do Ponto de Sela

Nesta seção, vamos demonstrar o Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz [11].

**Definição 3.1** *Se  $D$  é uma vizinhança de 0 em  $X$ ; a classe de deformação de  $\bar{D}$  em  $X$  que fixa  $\partial D$ , denotada por  $\Gamma$ , é definida como sendo*

$$\Gamma = \{h \in C(\bar{D}, X); h(u) = u, \forall u \in \partial D\}.$$

**Teorema 3.2** *Seja  $X = V \oplus W$  um espaço de Banach, com  $V \neq \{0\}$  e  $\dim(V) < +\infty$ , e seja  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  uma aplicação satisfazendo a condição de Palais-Smale-(PS). Se  $D$  é uma vizinhança limitada de 0 em  $V$  tal que*

$$a = \max_{\partial D} \phi < \inf_W \phi = b, \tag{3.1}$$

então

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \bar{D}} \phi(h(u))$$

é um valor crítico de  $\phi$  com  $c \geq b$ .

**Idéia Geométrica:**

Figura 3.1: Ponto de Sela

**Demonstração:** Primeiramente, vamos verificar que  $h(D) \cap W \neq \emptyset$  qualquer que seja  $h \in \Gamma$ . De fato, defina

$$\begin{aligned} P : X &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto P(x) = x_1, \end{aligned}$$

onde  $x = x_1 + x_2$  com  $x_1 \in V$ , ou seja,  $P$  é a projeção  $X$  sobre  $V$ . Assim,  $Ph \in C(\bar{D}, V)$  e  $Ph(u) = Pu = u \neq 0, \quad \forall u \in \partial D$ .

Portanto, uma vez que podemos indentificar  $V$  com  $\mathbb{R}^N$ , o grau de Brouwer  $d(Ph, D, 0)$  está bem definido e pelas propriedades do grau (**Ver Apêndice D**), segue

$$d(Ph, D, 0) = d(Id, D, 0) = 1.$$

Logo, existe  $u_0 \in D$  tal que  $Ph(u_0) = 0$ , isto é,  $h(u_0) \in W$ , donde concluímos que

$$h(D) \cap W \neq \emptyset.$$

Assim, sendo  $b = \inf_W \phi = \inf \{\phi(w); w \in W\}$  e  $h(u_0) \in W$ ,

$$b \leq \phi(h(u_0))$$

de onde segue

$$b \leq \phi(h(u_0)) \leq \max_{u \in \bar{D}} \phi(h(u)), \quad \forall h \in \Gamma,$$

portanto, pela definição de ínfimo, concluímos que  $c \geq b$ .



Suponha por contradição que  $c$  não é um valor crítico para  $\phi$ . Então, pelo **Teorema de Deformação 1.5**, temos que dado  $0 < \epsilon < \frac{b-a}{2}$ , existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tal que

$$\eta(t, u) = u \text{ se } u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]), \quad \forall t \in [0, 1] \quad (3.2)$$

e

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}. \quad (3.3)$$

Considere  $h \in \Gamma$  tal que

$$\max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)) \leq c + \epsilon \quad (3.4)$$

e defina  $\widehat{h}(u) = \eta(1, h(u))$ . Sendo  $2\epsilon < b - a$ , ou seja,  $a < b - 2\epsilon$ , temos que

$$\phi(u) \leq \max_{u \in \partial D} \phi(u) = a,$$

o que implica

$$\phi(u) < b - 2\epsilon \leq c - 2\epsilon, \quad \forall u \in \partial D,$$

e portanto

$$\phi(u) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon], \quad \forall u \in \partial D,$$

isto é,

$$u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]).$$

Logo, por (3.2),

$$\widehat{h}(u) = \eta(1, h(u)) = \eta(1, u) = u, \quad \forall u \in \partial D,$$

donde concluímos que  $\widehat{h} \in \Gamma$ . Além disso, de (3.3) e (3.4), obtemos

$$\phi(h(u)) \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica

$$h(u) \in \phi^{c+\epsilon}.$$

Assim, por (3.3)

$$\eta(1, h(u)) = \widehat{h}(u) \in \phi^{c-\epsilon}, \quad \forall u \in \overline{D},$$

isto é,

$$\max_{u \in \overline{D}} \phi(\widehat{h}(u)) \leq c - \epsilon.$$

Sendo  $c \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u))$ ,  $\forall h \in \Gamma$ , obtemos

$$c \leq \max_{u \in \overline{D}} \phi(\widehat{h}(u)) \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo. Assim, mostramos que  $c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u))$  é um valor crítico para  $\phi$ . ■

## 3.2 Aplicação do Teorema do Ponto de Sela

Nesta seção estudaremos a existência de solução para problemas do tipo

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + p(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira suave e  $\lambda$  é um autovalor associado ao problema

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue consideraremos  $N \geq 3$  e as seguintes hipóteses sobre  $p$ :

(H<sub>1</sub>)  $p(x, \xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

(H<sub>2</sub>) Existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$|p(x, \xi)| \leq M, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R};$$

(H<sub>3</sub>)  $P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t) dt \rightarrow +\infty$ , quando  $|\xi| \rightarrow +\infty$  uniformemente para  $x \in \Omega$ .

Nosso objetivo é mostra a existência de uma solução fraca para o **Problema (P<sub>1</sub>)**. O principal resultado desta seção é o seguinte:

**Teorema 3.3** *Suponha que  $\lambda = \lambda_k \leq \lambda_{k+1}$  e  $p$  satisfaz as condições (H<sub>1</sub>) – (H<sub>3</sub>). Então o Problema (P<sub>1</sub>) possui uma solução fraca.*

**Demonstração:** Considere o funcional  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por:

$$I(u) = \int_{\Omega} \left( |\nabla u|^2 - \frac{\lambda_k}{2} u^2 - P(x, u) \right) dx.$$

Observe inicialmente que sendo as condições  $(\mathbf{H}_1)$  e  $(\mathbf{H}_2)$  satisfeitas, segue que  $I$  está bem definido e  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  (**ver Apêndice B**). Além disso, temos

$$I'(u)v = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla v - \lambda_k uv] dx - \int_{\Omega} p(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in E.$$

Seja  $V \equiv \bigoplus_{j=1}^k V_{\lambda_j} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ , onde  $V_{\lambda_j}$  é o espaço gerado pelas autofunções  $v_n^j$  do **Problema (P<sub>2</sub>)** associadas ao autovalor  $\lambda_j$ , e normalizadas de modo que

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n^j|^2 dx = 1 = \lambda_j \int_{\Omega} (v_n^j)^2 dx.$$

Seja  $W \equiv \bigoplus_{j=k+1}^{\infty} V_{\lambda_j}$ , com  $W = V^{\perp}$ , onde denotamos por  $V^{\perp}$  o complementar ortogonal de  $V$ . Note que  $E = V \oplus W$ . Vamos mostrar que  $I$  satisfaz as seguintes condições:

**(I<sub>1</sub>)** Existe uma constante  $\beta$  tal que  $I|_W \geq \beta$ .

**(I<sub>2</sub>)** Existe uma constante  $\alpha < \beta$  e uma vizinhança limitada  $D$  de 0 em  $V$  tal que

$$I|_{\partial D} \leq \alpha.$$

**Condição (PS):** Qualquer sequência  $(u_n)$  tal que  $I(u_n)$  é limitada e  $I'(u_n) \rightarrow 0$ , possui uma subsequência convergente.

Uma vez demonstrado **(I<sub>1</sub>)**, **(I<sub>2</sub>)** e a condição **(PS)**, pelo **Teorema do Ponto de Sela 3.2**, segue o **Teorema 3.3**.

**Verificação da condição (I<sub>1</sub>):**

Seja  $u \in W$ . Então  $u = \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j$ , onde  $\phi_j = \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j$  e os  $v_n^j$  são as autofunções associadas a  $\lambda_j$  e  $s = \dim V_{\lambda_j}$ . Usando o fato dos  $v_n^j$  serem ortonormais em  $E$ , segue

$$\langle v_n^i, v_m^j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \text{ e } n = m \\ 0, & \text{se } i \neq j \text{ ou } n \neq m. \end{cases}$$

Logo,  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$ , se  $i \neq j$ , pois

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^p a_n^i v_n^i, \sum_{m=1}^s a_m^j v_m^j \right\rangle = \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^s a_n^i a_m^j \langle v_n^i, v_m^j \rangle,$$

de onde segue

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0, \text{ se } i \neq j.$$

Note que

$$\left\langle \sum_{i=k+1}^n \phi_i, \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right\rangle = \sum_{i=k+1}^n \left\langle \phi_i, \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right\rangle = \sum_{i,j=k+1}^n \langle \phi_i, \phi_j \rangle,$$

ou seja,

$$\left\| \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right\|^2 = \sum_{j=k+1}^n \|\phi_j\|^2. \quad (3.5)$$

Observe também que

$$\int_{\Omega} \lambda_k \left( \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right) \left( \sum_{i=k+1}^n \phi_i \right) dx = \sum_{j,i=k+1}^n \lambda_k \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx.$$

Usando novamente o fato dos  $v_n^j$  serem ortonormais, obtemos:

$$\int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx = 0, \quad \text{se } i \neq j,$$

visto que, sendo  $v_n^j$  ortonormais, temos que

$$\int_{\Omega} v_n^i v_m^j dx = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_j}, & \text{se } i = j \text{ e } n = m \\ 0, & \text{se } i \neq j \text{ ou } n \neq m. \end{cases}$$

Assim,

$$\int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx = \int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^p a_n^i v_n^i \right) \left( \sum_{m=1}^s a_m^j v_m^j \right) dx = \sum_{n=1}^p \left( \sum_{m=1}^s a_n^i a_m^j \int_{\Omega} v_n^i v_m^j dx \right),$$

o que implica

$$\int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx = 0, \quad \text{se } i \neq j,$$

logo

$$\int_{\Omega} \lambda_k \left( \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right) \left( \sum_{i=k+1}^n \phi_i \right) dx = \sum_{j,i=k+1}^n \lambda_k \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx = \sum_{j=k+1}^n \lambda_k \int_{\Omega} \phi_j \phi_j dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \lambda_k \left( \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right) \left( \sum_{i=k+1}^n \phi_i \right) dx = \sum_{j=k+1}^n \lambda_k \int_{\Omega} \phi_j^2 dx. \quad (3.6)$$

Por outro lado, sendo  $v_n^j$  soluções fracas do problema

$$(P_3) \quad \begin{cases} -\Delta v^j = \lambda_j v^j, & \Omega \\ v^j = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

segue

$$\int_{\Omega} \nabla v_n^j \nabla h dx = \int_{\Omega} \lambda_j v_n^j h dx, \quad \forall h \in E.$$

Fixando  $h = v_n^j$ , obtemos

$$\|v_n^j\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v_n^j|^2 dx = \int_{\Omega} \lambda_j (v_n^j)^2 dx.$$

Note que,  $\phi_j = \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j$  também é solução fraca para o **Problema (P<sub>3</sub>)**. De fato, pois

$$-\Delta \left( \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j \right) = \sum_{n=1}^s a_n^j (-\Delta v_n^j) = \sum_{n=1}^s a_n^j \lambda_j v_n^j,$$

o que implica

$$\begin{cases} -\Delta \left( \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j \right) = \lambda_j \left( \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j \right), & \Omega \\ \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta \phi_j = \lambda_j \phi_j, & \Omega \\ \phi_j = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo  $\phi_j$  uma solução fraca para o **Problema (P<sub>3</sub>)**, temos

$$\|\phi_j\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \phi_j|^2 dx = \lambda_j \int_{\Omega} \phi_j^2 dx,$$

de onde segue

$$\frac{\|\phi_j\|^2}{\lambda_j} = \int_{\Omega} \phi_j^2 dx. \quad (3.7)$$

De (3.6) e (3.7), obtemos

$$\int_{\Omega} \lambda_k \left( \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right) \left( \sum_{i=k+1}^n \phi_i \right) dx = \sum_{j=k+1}^n \lambda_k \frac{\|\phi_j\|^2}{\lambda_j} = \sum_{j=k+1}^n \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda_k}{\lambda_j}. \quad (3.8)$$

Assim, de (3.5) e (3.8),

$$\left\| \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right\|^2 - \lambda_k \int_{\Omega} \left( \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right) \left( \sum_{i=k+1}^n \phi_i \right) dx = \sum_{j=k+1}^n \|\phi_j\|^2 - \sum_{j=k+1}^n \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda_k}{\lambda_j},$$

o que implica

$$\left\| \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right\|^2 - \lambda_k \int_{\Omega} \left( \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right) \left( \sum_{i=k+1}^n \phi_i \right) dx = \sum_{j=k+1}^n \|\phi_j\|^2 \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} \right).$$

Uma vez que  $\lambda_{k+1} \leq \lambda_j \quad \forall \quad j \geq k+1$ ,

$$\left\| \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right\|^2 - \lambda_k \int_{\Omega} \left( \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right) \left( \sum_{i=k+1}^n \phi_i \right) dx \geq \sum_{j=k+1}^n \|\phi_j\|^2 \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right),$$

logo

$$\left\| \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right\|^2 - \lambda_k \int_{\Omega} \left( \sum_{j=k+1}^n \phi_j \right) \left( \sum_{i=k+1}^n \phi_i \right) dx \geq \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n \|\phi_j\|^2. \quad (3.9)$$

Sendo as funções  $f(u) = \|u\|^2$  e  $g(u) = \lambda_k \int_{\Omega} u^2 dx$  contínuas, passando ao limite em (3.5) e (3.9) quando  $n \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j \right\|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\phi_j\|^2$$

e

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j \right\|^2 - \lambda_k \int_{\Omega} \left( \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j \right) \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \phi_i \right) dx \geq \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\phi_j\|^2.$$

Assim,

$$\|u\|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\phi_j\|^2$$

e

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2) dx \geq \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \|u\|^2, \quad \forall \quad u \in W. \quad (3.10)$$

Considerando  $M \equiv \sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} |p(x, \xi)|$ , o mesmo está bem definido devido a condição **(H<sub>2</sub>)**.

Então,

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u) dx \right| \leq \int_{\Omega} |P(x, u)| dx = \int_{\Omega} \left| \int_0^u p(x, t) dt \right| dx,$$

o que implica

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u) dx \right| \leq \int_{\Omega} M |u| dx = M \int_{\Omega} |u| dx = M \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo  $\Omega$  limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, segue

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u) dx \right| \leq M_1 \|u\|, \quad \forall \quad u \in E. \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11),

$$I(u) \geq \left| \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2) dx \right| - \left| \int_{\Omega} P(x, u) dx \right|,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|u\|^2 - M_1 \|u\|, \quad \forall u \in W.$$

Considerando  $M_2 = \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)$ , temos

$$I(u) \geq M_2 \|u\|^2 - M_1 \|u\|, \quad \forall u \in W,$$

logo, existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$I(u) \geq \beta, \quad \forall u \in W,$$

mostrando assim, a condição **(I<sub>1</sub>)**.

**Verificação da condição (I<sub>2</sub>):**

Seja  $u \in V$ , então  $u = u^\circ + u^-$ , onde  $u^\circ \in E^\circ \equiv V_{\lambda_k}$  e  $u^- \in E^- \equiv \bigoplus_{j=1}^{k-1} V_{\lambda_j}$ .

**Afirmção 1:**  $\|u\|^2 = \|u^\circ\|^2 + \|u^-\|^2$ .

De fato, note que

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \langle u^\circ + u^-, u^\circ + u^- \rangle,$$

o que implica

$$\|u\|^2 = \langle u^\circ, u^\circ \rangle + 2\langle u^\circ, u^- \rangle + \langle u^-, u^- \rangle.$$

Sendo  $u^\circ \in E^\circ \equiv V_{\lambda_k}$  e  $u^- \in E^- \equiv \bigoplus_{j=1}^{k-1} V_{\lambda_j}$ , então  $u^\circ$  e  $u^-$  são da forma  $u^\circ = \phi_k$  e  $u^- = \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j$ , onde  $\phi_j = \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j$ . Assim,

$$\langle u^\circ, u^- \rangle = \left\langle \phi_k, \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} \langle \phi_k, \phi_j \rangle = 0,$$

pois, já mostramos que  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$ , se  $i \neq j$ , logo

$$\|u\|^2 = \langle u^\circ, u^\circ \rangle + \langle u^-, u^- \rangle,$$

ou seja,

$$\|u\|^2 = \|u^\circ\|^2 + \|u^-\|^2,$$

mostrando a **Afirmção 1**.

Agora, sendo  $u \in V$ , temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2 = \|u^{\circ}\|^2 + \|u^{-}\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u^{\circ}|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u^{-}|^2 dx,$$

o que implica

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u^{\circ}|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u^{-}|^2 dx. \quad (3.12)$$

Observe também que

$$\int_{\Omega} \lambda_k u^2 dx = \int_{\Omega} \lambda_k u u dx = \int_{\Omega} \lambda_k (u^{\circ} + u^{-})(u^{\circ} + u^{-}) dx = \int_{\Omega} \lambda_k [(u^{\circ})^2 + (u^{-})^2 + 2u^{\circ}u^{-}] dx.$$

de onde segue

$$\int_{\Omega} \lambda_k u^2 dx = \lambda_k \int_{\Omega} (u^{\circ})^2 dx + \lambda_k \int_{\Omega} (u^{-})^2 dx + 2\lambda_k \int_{\Omega} u^{\circ}u^{-} dx.$$

Mas,

$$\int_{\Omega} u^{\circ}u^{-} dx = \int_{\Omega} \phi_k \left( \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j \right) dx = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Omega} \phi_k \phi_j dx = 0,$$

visto que já mostramos anteriormente que  $\int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx = 0$ , se  $i \neq j$ . Logo,

$$\int_{\Omega} \lambda_k u^2 dx = \lambda_k \int_{\Omega} (u^{\circ})^2 dx + \lambda_k \int_{\Omega} (u^{-})^2 dx. \quad (3.13)$$

De (3.12) e (3.13),

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2) dx = \int_{\Omega} |\nabla u^{\circ}|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u^{\circ})^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u^{-}|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u^{-})^2 dx,$$

sendo  $u^{\circ} = \phi_k$  uma solução fraca para o **Problema (P<sub>3</sub>)** com  $j = k$ , segue

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{\circ}|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u^{\circ})^2 dx = 0,$$

e portanto

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2) dx = \int_{\Omega} |\nabla u^{-}|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u^{-})^2 dx.$$

Uma vez que  $u^{-} \in E^{-}$ , temos  $u^{-} = \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j$ , onde  $\phi_j = \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j$ , logo

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{-}|^2 dx = \langle u^{-}, u^{-} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i, \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{k-1} \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \sum_{j=1}^{k-1} \langle \phi_j, \phi_j \rangle,$$

o que implica

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{-}|^2 dx = \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2. \quad (3.14)$$



Observe também que

$$\int_{\Omega} \lambda_k (u^-)^2 dx = \int_{\Omega} \lambda_k u^- u^- dx = \int_{\Omega} \lambda_k \left( \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j \right) \left( \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j \right) dx = \lambda_k \sum_{j,i=1}^{k-1} \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx,$$

logo

$$\int_{\Omega} \lambda_k (u^-)^2 dx = \lambda_k \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Omega} \phi_j \phi_j dx = \lambda_k \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Omega} \phi_j^2 dx = \lambda_k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|\phi_j\|^2}{\lambda_j},$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \lambda_k (u^-)^2 dx = \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda_k}{\lambda_j}. \quad (3.15)$$

De (3.14) e (3.15),

$$\int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u^-)^2 dx = \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda_k}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} \right).$$

Usando o fato de  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ , obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u^-)^2 dx \leq \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \right). \quad (3.16)$$

Sendo

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2) dx - \int_{\Omega} P(x, u) dx = \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u^-)^2 dx - \int_{\Omega} P(x, u) dx,$$

temos

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \right) - \int_{\Omega} P(x, u) dx,$$

o que implica

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \right) - \int_{\Omega} P(x, u^\circ) dx - \int_{\Omega} [P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ)] dx.$$

Assim,

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \right) - \int_{\Omega} P(x, u^\circ) dx + \int_{\Omega} |P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ)| dx. \quad (3.17)$$

**Afirmação 2:**  $\int_{\Omega} |P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ)| dx \leq M_1 \|u^-\|.$

De fato, considere sem perda de generalidade que  $u^\circ < u^\circ + u^-$  para cada  $x$  fixado e defina

$$\begin{aligned} g &: [u^\circ, u^\circ + u^-] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = P(x, t). \end{aligned}$$

Note que  $g$  é contínua em  $[u^\circ, u^\circ + u^-]$  e derivável em  $(u^\circ, u^\circ + u^-)$  com derivada  $g'(t) = p(x, t)$ . Assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $s \in (u^\circ, u^\circ + u^-)$ , tal que

$$g(u^\circ + u^-) - g(u^\circ) = g'(s) [(u^\circ + u^-) - u^\circ],$$

logo

$$P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ) = p(x, s)u^-, \quad \text{onde } s \in (u^\circ, u^\circ + u^-),$$

o que implica por **(H<sub>2</sub>)**

$$\int_{\Omega} |P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ)| dx \leq M \int_{\Omega} |u^-| dx,$$

e portanto

$$\int_{\Omega} |P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ)| dx \leq M \|u^-\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo,  $\Omega$  limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, temos

$$\int_{\Omega} |P(x, u^\circ + u^-) - P(x, u^\circ)| dx \leq M_1 \|u^-\|.$$

mostrando assim a **Afirmção 2**.

Voltando a desigualdade (3.17), obtemos

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) - \int_{\Omega} P(x, u^\circ) dx + M_1 \|u^-\|.$$

Considerando  $M_2 = \left|1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right|$ , temos  $-M_2 = 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}$ , visto que  $1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} < 0$ .

Assim,

$$I(u) \leq -M_3 \sum_{j=1}^{k-1} \|\phi_j\|^2 - \int_{\Omega} P(x, u^\circ) dx + M_1 \|u^-\|, \quad \text{onde } -M_3 = -\frac{1}{2}M_2,$$

isto é,

$$I(u) \leq -M_3 \|u^-\|^2 - \int_{\Omega} P(x, u^\circ) dx + M_1 \|u^-\|, \quad \forall u \in V, \quad (3.18)$$

logo, lembrando que  $\|u\|^2 = \|u^\circ\|^2 + \|u^-\|^2$ , então quando  $\|u\| \rightarrow +\infty$ , temos as seguintes possibilidades:

(1)  $\|u^\circ\| \rightarrow +\infty$  e  $\|u^-\| \rightarrow +\infty$ ;

(2)  $\|u^\circ\| \rightarrow +\infty$  e  $\|u^-\|$  limitada;

(3)  $\|u^-\| \rightarrow +\infty$  e  $\|u^\circ\|$  limitada.

Supondo sem perda de generalidade que  $\|u^-\| > 0$ , segue de (3.18)

$$I(u) \leq \|u^-\|^2 \left( -M_3 + \frac{M_1}{\|u^-\|} \right) - \int_{\Omega} P(x, u^\circ) dx, \quad \forall u \in V.$$

Note que, se (1) ou (2) ocorrer, pelo **Lema (C.1) (Ver Apêndice C)**, segue

$$I(u) \rightarrow -\infty.$$

Por outro lado, se (3) ocorrer, então sendo  $\|u^\circ\|$  limitada, temos

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u^\circ) dx \right| \leq \int_{\Omega} |P(x, u^\circ)| dx \leq \int_{\Omega} M |u^\circ| dx = M \|u^\circ\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo  $\Omega$  limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u^\circ) dx \right| \leq \widetilde{M} \|u^\circ\| \leq \overline{M},$$

logo

$$I(u) \rightarrow -\infty.$$

Portanto, concluímos que  $I(u) \rightarrow -\infty$  quando  $u \rightarrow +\infty$  em  $V$ , mostrando que  $I$  satisfaz a condição **(I<sub>2</sub>)**.

### Verificação da condição (PS):

Seja  $(u_n) \subset E$  uma sequência do tipo (PS), isto é, existe  $C > 0$ , tal que

$$|I(u_n)| \leq C \quad \text{e} \quad I'(u_n) \rightarrow 0.$$

Devemos mostrar que  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente, ou seja, existe  $(u_{n_j}) \subset (u_n)$  tal que  $u_{n_j} \rightarrow u$  em  $E$ . Sendo  $u_n \in E = V \oplus X = E^\circ \oplus E^- \oplus X$ , então  $u_n = u_n^\circ + u_n^- + u_n^+$ , onde  $u_n^\circ \in E^\circ$ ,  $u_n^- \in E^-$  e  $u_n^+ \in X$ . Assim,

$$\|u_n\|^2 = \|u_n^\circ\|^2 + \|u_n^-\|^2 + \|u_n^+\|^2.$$

Agora, sendo

$$I(u_n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} u_n^2 dx - \int_{\Omega} P(x, u_n) dx,$$

segue-se que para cada  $h \in E$ , temos

$$|I'(u_n)h| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla h dx - \lambda_k \int_{\Omega} u_n h dx - \int_{\Omega} p(x, u_n) h dx \right|. \quad (3.19)$$

(i) Considerando  $h = u_n^+$  em (3.19), obtemos

$$|I'(u_n)u_n^+| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u_n^+ dx - \lambda_k \int_{\Omega} u_n u_n^+ dx - \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^+ dx \right|. \quad (3.20)$$

**Afirmção 3:**  $|I'(u_n)h| \leq \|h\|$ ,  $\forall h \in E$  e  $n$  suficientemente grande.

De fato, sendo  $I'(u_n)$  um funcional linear contínuo,

$$|I'(u_n)h| \leq \|I'(u_n)\| \|h\|.$$

Por hipótese temos  $I'(u_n) \rightarrow 0$ , o que implica  $\|I'(u_n)\| \rightarrow 0$ . Logo, existe  $n_o \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|I'(u_n)\| < 1, \quad \text{para } n \geq n_o.$$

Portanto,

$$|I'(u_n)h| \leq \|h\|, \quad \text{para } n \geq n_o,$$

mostrando assim a **Afirmção 3**.

Voltando a (3.20), obtemos

$$\|u_n^+\| \geq \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u_n^+ dx - \lambda_k \int_{\Omega} u_n u_n^+ dx - \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^+ dx \right|,$$

ou seja,

$$\|u_n^+\| \geq \int_{\Omega} \nabla (u_n^{\circ} + u_n^- + u_n^+) \nabla u_n^+ dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u_n^{\circ} + u_n^- + u_n^+) u_n^+ dx - \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^+ dx,$$

o que implica

$$\|u_n^+\| \geq \int_{\Omega} |\nabla u_n^+|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u_n^+)^2 dx - \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^+ dx.$$

Sendo  $u_n^+ \in W$ , pela desigualdade (3.10),

$$\|u_n^+\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|u_n^+\|^2 - \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^+ dx,$$

o que implica

$$\|u_n^+\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|u_n^+\|^2 - \int_{\Omega} |p(x, u_n)| |u_n^+| dx.$$

Pela condição **(H<sub>2</sub>)**, segue

$$\|u_n^+\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|u_n^+\|^2 - M \|u_n^+\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo  $\Omega$  limitado, pelas imersões contínua de Sobolev, obtemos

$$\|u_n^+\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|u_n^+\|^2 - M_1 \|u_n^+\|.$$

Considerando  $M_2 = 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}$ , temos

$$(1 + M_1) \|u_n^+\| \geq M_2 \|u_n^+\|^2.$$

Note que, para  $\|u_n^+\| > 0$ , temos  $\|u_n^+\| \leq M_3$ , onde  $M_3 = \frac{(1 + M_1)}{M_2}$ , mostrando que  $(u_n^+)$  é limitada.

**(ii)** Vamos mostrar que  $(u_n^-)$  é limitada.

Considerando  $h = u_n^-$  em (3.19), obtemos

$$|I'(u_n)u_n^-| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u_n^- dx - \lambda_k \int_{\Omega} u_n u_n^- dx - \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^- dx \right|.$$

Pela **Afirmção 3**, temos

$$\|u_n^-\| \geq \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u_n^- dx - \lambda_k \int_{\Omega} u_n u_n^- dx - \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^- dx \right|,$$

de onde segue

$$\|u_n^-\| \geq - \left[ \int_{\Omega} \nabla (u_n^{\circ} + u_n^- + u_n^+) \nabla u_n^- dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u_n^{\circ} + u_n^- + u_n^+) u_n^- dx - \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^- dx \right],$$

o que implica

$$\|u_n^-\| \geq - \left[ \int_{\Omega} |\nabla u_n^-|^2 dx - \lambda_k \int_{\Omega} (u_n^-)^2 dx \right] + \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^- dx.$$

Pela desigualdade (3.16), segue

$$\|u_n^-\| \geq - \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) \|u_n^-\|^2 + \int_{\Omega} p(x, u_n) u_n^- dx,$$

logo

$$\|u_n^-\| \geq - \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) \|u_n^-\|^2 - \int_{\Omega} |p(x, u_n)| |u_n^-| dx.$$

e pela condição **(H<sub>2</sub>)**, temos

$$\|u_n^-\| \geq - \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) \|u_n^-\|^2 - M \|u_n^-\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo  $\Omega$  limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\|u_n^-\| \geq - \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right) \|u_n^-\|^2 - M_1 \|u_n^-\|.$$

Considerando  $M_2 = - \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)$  e sendo  $M_1, M_2 > 0$  temos

$$(1 + M_1) \|u_n^-\| \geq M_2 \|u_n^-\|^2$$

donde concluímos que, para  $\|u_n^-\| > 0$ , temos  $\|u_n^-\| \leq M_3$ , onde  $M_3 = \frac{(1 + M_1)}{M_2}$ , mostrando que  $(u_n^-)$  é limitada.

(iii) Vamos mostrar que  $(u_n^\circ)$  é limitada.

Sendo  $I(u_n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} u_n^2 dx - \int_{\Omega} P(x, u_n) dx$ , tem-se que

$$I(u_n) = \frac{1}{2} \|u_n^\circ\|^2 - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} (u_n^\circ)^2 dx + \frac{1}{2} \|u_n^-\|^2 + \frac{1}{2} \|u_n^+\|^2 - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} [(u_n^-)^2 + (u_n^+)^2] dx - \int_{\Omega} P(x, u_n) dx.$$

Sendo  $u_n^\circ$  uma solução fraca para o **Problema (P<sub>3</sub>)** com  $j = k$ , segue

$$\frac{1}{2} \|u_n^\circ\|^2 - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} (u_n^\circ)^2 dx = 0,$$

portanto

$$I(u_n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_n^-|^2 + |\nabla u_n^+|^2 - \lambda_k ((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2)] dx - \int_{\Omega} P(x, u_n) dx,$$

o que implica

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_n^-|^2 + |\nabla u_n^+|^2 - \lambda_k ((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2)] dx \\ &\quad - \int_{\Omega} [P(x, u_n) - P(x, u_n^\circ)] dx - \int_{\Omega} P(x, u_n^\circ) dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} P(x, u_n^\circ) dx \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_n^-|^2 + |\nabla u_n^+|^2] dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_k ((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2) dx - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} [P(x, u_n) - P(x, u_n^\circ)] dx - I(u_n) \right|, \end{aligned}$$

de onde segue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} P(x, u_n^{\circ}) dx \right| &\leq \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_n^{-}|^2 + |\nabla u_n^{+}|^2] dx \right| + \\ &\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_k ((u_n^{-})^2 + (u_n^{+})^2) dx \right| + \left| \int_{\Omega} [P(x, u_n) - P(x, u_n^{\circ})] dx \right| + |I(u_n)|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Agora observe o seguinte:

**(iii-1)** Sendo  $(u_n^{-})$  e  $(u_n^{+})$  limitadas, temos

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_n^{-}|^2 + |\nabla u_n^{+}|^2] dx \right| = \frac{1}{2} \|u_n^{-}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_n^{+}\|^2 \leq \frac{1}{2} K_1^2 + \frac{1}{2} K_2^2 = K_3.$$

**(iii-2)** Sendo  $\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_k ((u_n^{-})^2 + (u_n^{+})^2) dx \right| \leq \frac{|\lambda_k|}{2} \int_{\Omega} |(u_n^{-})^2| dx + \frac{|\lambda_k|}{2} \int_{\Omega} |(u_n^{+})^2| dx$ , obtemos,

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_k ((u_n^{-})^2 + (u_n^{+})^2) dx \right| \leq \frac{|\lambda_k|}{2} \left[ \|u_n^{-}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_n^{+}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_k ((u_n^{-})^2 + (u_n^{+})^2) dx \right| \leq C \left[ \|u_n^{-}\|^2 + \|u_n^{+}\|^2 \right] \leq C [K_1^2 + K_2^2] = K_4.$$

**(iii-3)** Sendo  $\left| \int_{\Omega} [P(x, u_n) - P(x, u_n^{\circ})] dx \right| \leq \int_{\Omega} |P(x, u_n) - P(x, u_n^{\circ})| dx$ , usando o Teorema do Valor Médio e pela condição **(H<sub>2</sub>)**, obtemos

$$\int_{\Omega} |P(x, u_n) - P(x, u_n^{\circ})| dx \leq M \|u_n - u_n^{\circ}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sendo  $u_n = u_n^{\circ} + u_n^{-} + u_n^{+}$ , segue que  $u_n - u_n^{\circ} = u_n^{+} + u_n^{-}$ . Assim,

$$\int_{\Omega} |P(x, u_n) - P(x, u_n^{\circ})| dx \leq M \|u_n^{+} + u_n^{-}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Agora, sendo  $\Omega$  limitado, pelas imersões de Sobolev, obtemos

$$\int_{\Omega} |P(x, u_n) - P(x, u_n^{\circ})| dx \leq M_1 \|u_n^{+} + u_n^{-}\| \leq M_1 (\|u_n^{+}\| + \|u_n^{-}\|) \leq M_1 (K_1 + K_2) = K_5,$$

**(iii-4)** Por hipótese temos que, existe  $C > 0$ , tal que  $|I(u_n)| \leq C$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo, de (iii-1)-(iii-4) e (3.21), concluímos que

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u_n^{\circ}) dx \right| \leq K_3 + K_4 + K_5 + C = K, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e sendo  $\int_{\Omega} P(x, u_n^{\circ}) dx$  limitada, segue pelo **Lema C.1 (Ver Apêndice C)**, que a menos de subsequência temos que  $(u_n^{\circ})$  é limitada. Portanto, de (i)-(iii), concluímos que  $(u_n)$  é limitada em  $E$ .

Repetindo o mesmo tipo de argumento utilizado no **Capítulo 2**, mostra-se que  $I$  satisfaz as condições  $(\overline{\mathbf{H}}_1)$  e  $(\overline{\mathbf{H}}_2)$  da **Proposição C.1**, donde concluímos que  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente, mostrando assim que  $I$  satisfaz a **condição (PS)**. Finalmente, podemos aplicar o **Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz 3.2** e concluir a existência de um ponto crítico de  $I$ , isto é, uma solução fraca para o **Problema (P<sub>1</sub>)**, demonstrando o **Teorema 3.3**. ■



# Capítulo 4

## Teorema do Passo da Montanha Generalizado

Neste capítulo, demonstraremos uma versão mais generalizada do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [11]. Em seguida fazemos uma aplicação do mesmo, mostrando a existência de uma solução fraca para um determinado problema.

### 4.1 Teorema do Passo da Montanha Generalizado

Nesta seção vamos demonstrar a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha:

**Teorema 4.1** *Seja  $E = V \oplus X$  um espaço de Banach real, onde  $\dim V < +\infty$ . Considere  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale-(PS) e as seguintes condições:*

(I<sub>1</sub>) *Existem constantes  $\alpha, \rho > 0$  tais que  $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$ , e*

(I<sub>2</sub>) *Existe  $e \in \partial B_1 \cap X$  e  $R > \rho$  tais que, se  $Q \equiv \{B_R \cap V\} \oplus \{re; 0 < r < R\}$ , então  $I|_{\partial Q} \leq 0$ .*

*Então,  $I$  possui um valor crítico  $c \geq \alpha$ , com*

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \bar{Q}} I(h(u)),$$

onde  $\Gamma = \{h \in C(\bar{Q}, E); h = id \text{ em } \partial Q\}$ .

**Demonstração:** Seja  $c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \bar{Q}} I(h(u))$ . Vamos provar inicialmente que  $c$  está bem definido. De fato, sendo  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  e  $h \in C(\bar{Q}, E)$ , tem-se que  $I \circ h$  é uma função contínua e sendo  $\bar{Q}$  um conjunto compacto, então  $I \circ h$  possui máximo em  $\bar{Q}$ .

**Afirmção 1:** Se  $h \in \Gamma$ , então

$$h(Q) \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset. \quad (4.1)$$

De fato, se  $P$  denota a projeção de  $E$  sobre  $V$ , então (4.1) é equivalente a

$$\begin{cases} Ph(u) & = 0 \\ \|(id - P)h(u)\| & = \rho \end{cases}$$

para algum  $u \in Q$ . Se  $u \in \bar{Q}$ , então  $u = v + re$ , onde  $v \in \bar{B}_R \cap V$  e  $0 \leq r \leq R$ . Defina

$$\phi(r, v) = (\|(id - P)h(v + re)\|, Ph(v + re)).$$

Note que  $\phi \in C(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R} \times V)$ , pois  $\phi$  é composição de funções contínuas. Além disso, sendo  $h|_{\partial Q} = id$  para  $u \in \partial Q$ , tem-se

$$\phi(r, v) = (\|(id - P)(v + re)\|, P(v + re)),$$

o que implica

$$\phi(r, v) = (\|(v + re) - v\|, v),$$

de onde segue

$$\phi(r, v) = (\|re\|, v).$$

Assim,

$$\phi(r, v) = (|r| \|e\|, v),$$

e sendo  $e \in \partial B_1 \cap X$ , obtemos

$$\phi(r, v) = (r, v), \quad \forall u \in \partial Q, \quad (4.2)$$

isto é,  $\phi = id$  em  $\partial Q$ . Em particular, de **(I<sub>2</sub>)**, temos  $\phi(r, v) \neq (\rho, 0)$  para  $u \in \partial Q$  e  $(\rho, 0) \in Q$ . De fato, sendo  $0 < \rho < R$ , temos que  $(\rho, 0) \notin \partial Q$ , pois para que  $(\rho, 0) \in \partial Q$ , deveríamos ter  $\rho = 0$  ou  $\rho = R$ , mas isto não é possível. Por outro lado, sendo  $0 \in \bar{B}_R \cap V$  e  $0 < \rho < R$ , segue-se  $(\rho, 0) \in Q$ .

Identificando  $\mathbb{R} \times V$  com  $\mathbb{R}^N$ , onde  $\dim(\mathbb{R} \times V) = N$ , tem-se que o grau de Brouwer  $d(\phi, Q, (\rho, 0))$  está bem definido e pelas propriedades do Grau Topológico (**Ver Apêndice D**), obtemos que

$$d(\phi, Q, (\rho, 0)) = d(id, Q, (\rho, 0)) = 1.$$

Logo, existe  $u \in Q$  tal que  $\phi(u) = (\rho, 0)$ , ou seja,

$$(\|(id - P)h(u)\|, Ph(u)) = (\rho, 0),$$

o que implica

$$\begin{cases} \|(id - P)h(u)\| &= \rho \\ Ph(u) &= 0 \end{cases}$$

mostrando assim a **Afirmção 1**.

**Afirmção 2:**  $c \geq \alpha$ .

De fato, pela **Afirmção 1**, temos que existe  $u \in Q$  tal que  $h(u) \in \partial B_\rho \cap X$ . Da condição (**I**<sub>1</sub>), segue-se  $I(h(u)) \geq \alpha$ , o que implica,  $\max_{u \in \bar{Q}} I(h(u)) \geq \alpha$ ,  $\forall h \in \Gamma$ .

Assim, o conjunto  $H = \left\{ \max_{u \in \bar{Q}} I(h(u)); h \in \Gamma \right\}$  é limitado inferiormente em  $\mathbb{R}$ , logo pelo Postulado de Dedekind existe o ínfimo de  $H$  em  $\mathbb{R}$ , isto é,  $c$  está bem definido.

Note ainda que,  $\alpha$  é uma cota inferior para o conjunto  $H$ , então pela definição de  $c$ , segue-se  $c \geq \alpha$ , mostrando assim a **Afirmção 2**.

Agora, suponha por contradição que  $c$  não é um valor crítico de  $I$ , então pelo **Teorema de Deformação 1.5**, temos que dado  $0 < \epsilon < \frac{c - \alpha}{2}$ , existe  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$  tal que

- (i)  $\eta(t, u) = u$  se  $u \notin I^{-1}(c - 2\epsilon, c + 2\epsilon)$  e  $t \in [0, 1]$ ;
- (ii)  $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$ .

Além disso, pela definição de  $c$ , existe  $h \in \Gamma$  tal que

$$\max_{u \in \bar{Q}} I(h(u)) \leq c + \epsilon. \quad (4.3)$$

Considere  $\tilde{h}(u) = \eta(1, h(u))$ . Sendo  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$  e  $h \in C(\bar{Q}, E)$ , segue-se que  $\tilde{h} \in C(\bar{Q}, E)$ . Note ainda que sendo  $u \in \partial Q$ , temos que  $I(u) \leq 0 < \alpha < c - 2\epsilon$ , logo  $I(u) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$ , o que implica  $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ . Assim, por (i), se  $u \in \partial Q$ ,

$$\tilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) = \eta(1, u) = u,$$

de onde segue que  $\tilde{h} \in \Gamma$ . De (4.3),

$$I(h(u)) \leq \max_{u \in \bar{Q}} I(h(u)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica  $h(u) \in I^{c+\epsilon}$ ,  $\forall u \in \bar{Q}$ . Além disso, de (ii) segue

$$\tilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) \in I^{c-\epsilon}, \quad \forall u \in \bar{Q},$$

ou seja,  $I(\tilde{h}(u)) \leq c - \epsilon$ ,  $\forall u \in \bar{Q}$ . Logo,

$$\max_{u \in \bar{Q}} I(\tilde{h}(u)) \leq c - \epsilon,$$

e sendo  $c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \bar{Q}} I(h(u))$ , tem-se que

$$c \leq \max_{u \in \bar{Q}} I(\tilde{h}(u)) \leq c - \epsilon,$$

visto que  $\tilde{h} \in \Gamma$ . Assim,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que um absurdo. Portanto, concluímos que  $c$  é um valor crítico para  $I$ , demonstrando o **Teorema 4.1**. ■

**Observação:** Note que se  $V = \{0\}$  e  $I(0) = 0$ , temos que as condições do Teorema 4.1 coincidem com as condições do Teorema 2.1. Assim, o Teorema 4.1 é uma generalização do Teorema do Passo da Montanha.

## 4.2 Aplicação do Teorema do Passo da Montanha Generalizado

Nesta seção estudaremos a existência de solução para o seguinte problema:

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + p(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira suave e  $\lambda \geq \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor associado ao problema

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue consideraremos  $N \geq 3$  e as seguintes hipóteses sobre  $p$  :

(**G<sub>1</sub>**)  $p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

(**G<sub>2</sub>**) Existem constantes  $a_1, a_2 > 0$  tais que

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1;$$

(**G<sub>3</sub>**)  $p(x, \xi) = o(|\xi|)$  quando  $\xi \rightarrow 0$ ;

(**G<sub>4</sub>**) Existem constantes  $2 < \mu \leq 2^*$  e  $r \geq 0$  tais que

$$0 < \mu P(x, \xi) \leq \xi p(x, \xi), \quad \text{para } |\xi| \geq r, \quad \text{onde } P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t) dt;$$

(**G<sub>5</sub>**)  $\xi p(x, \xi) \geq 0$ , para  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Nosso objetivo é mostrar a existência de uma solução fraca para o **Problema (P<sub>1</sub>)**. Para isto, iremos demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 4.2** *Suponha que  $\lambda \geq \lambda_1$  e  $p$  satisfaz as condições (G<sub>1</sub>) – (G<sub>5</sub>). Então o Problema (P<sub>1</sub>) possui uma solução fraca.*

**Demonstração:** Considere  $E = H_0^1(\Omega)$  e  $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$ . Vamos mostrar que o funcional  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 - \lambda u^2] dx - \int_{\Omega} P(x, u) dx,$$

onde  $P(x, u) = \int_0^u p(x, t) dt$ , satisfaz as hipóteses do **Teorema 4.1**.

Observe inicialmente que  $E = H_0^1(\Omega)$  é um espaço de Banach real. Sendo as condições (**G<sub>1</sub>**) e (**G<sub>2</sub>**) satisfeitas, segue que  $I$  está bem definido e  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  (**ver Apêndice B**). Além disso,

$$I'(u)v = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla v - \lambda uv] dx - \int_{\Omega} p(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in E.$$

Seja  $V \equiv \bigoplus_{j=1}^k V_{\lambda_j} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ , onde  $V_{\lambda_j}$  é o espaço gerado pelas autofunções  $v_n^j$  do **Problema (P<sub>2</sub>)** associadas ao autovalor  $\lambda_j$ , e normalizadas de modo que

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n^j|^2 dx = 1 = \lambda_j \int_{\Omega} (v_n^j)^2 dx.$$

Seja  $X \equiv \bigoplus_{j=k+1}^{\infty} V_{\lambda_j}$ , com  $X = V^{\perp}$ , onde denotamos por  $V^{\perp}$  o complementar ortogonal de  $V$ . Segue das definições de  $V$  e  $X$  que  $E = V \oplus X$ .

**Verificação da Condição (I<sub>1</sub>):**

Seja  $u \in X$ . Então  $u = \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j$ , onde  $\phi_j = \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j$ , os  $v_i^j$  são as autofunções associadas a  $\lambda_j$  e  $\dim V_{\lambda_j} = s$ . Assim, pelos argumentos usados no **Capítulo 3**, segue

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) \|u\|^2, \quad \forall u \in X. \quad (4.4)$$

**Afirmção 3:**  $\int_{\Omega} P(x, u) dx = o(\|u\|^2)$  quando  $u \rightarrow 0$ .

De fato, considere  $J(u) = \int_{\Omega} P(x, u) dx$ . De (**G<sub>3</sub>**), temos que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|\xi| \leq \delta$  temos

$$|p(x, \xi)| \leq \epsilon |\xi|, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Segue da estimativa acima que

$$|P(x, \xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} |\xi|^2, \quad \text{para } |\xi| \leq \delta.$$

De fato:

(i) Considere  $0 \leq \xi \leq \delta$ . Assim,

$$|P(x, \xi)| = \left| \int_0^{\xi} p(x, t) dt \right| \leq \int_0^{\xi} |p(x, t)| dt \leq \int_0^{\xi} \epsilon |t| dt,$$

o que implica

$$|P(x, \xi)| \leq \int_0^{\xi} \epsilon t dt = \epsilon \frac{\xi^2}{2},$$

logo

$$|P(x, \xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} |\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \delta \geq \xi \geq 0. \quad (4.5)$$

(ii) Considere  $-\delta \leq \xi < 0$ . Assim,

$$|P(x, \xi)| = \left| \int_0^{\xi} p(x, t) dt \right| = \left| - \int_{\xi}^0 p(x, t) dt \right| = \left| \int_{\xi}^0 p(x, t) dt \right| \leq \int_{\xi}^0 |p(x, t)| dt \leq \int_{\xi}^0 \epsilon |t| dt,$$

o que implica

$$|P(x, \xi)| \leq \int_{\xi}^0 \epsilon(-t) dt = -\left(-\epsilon \frac{\xi^2}{2}\right),$$

logo

$$|P(x, \xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} |\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } -\delta \leq \xi < 0. \quad (4.6)$$

De (4.5) e (4.6),

$$|P(x, \xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} |\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } |\xi| \leq \delta. \quad (4.7)$$

Por outro lado, de  $(\mathbf{G}_2)$ , temos que existem  $a_1, a_2 > 0$  tais que

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \text{ onde } 1 < s < 2^* - 1.$$

Logo, para  $\xi \geq 0$

$$|P(x, \xi)| \leq \int_0^{\xi} |p(x, t)| dt \leq \int_0^{\xi} (a_1 + a_2 |t|^s) dt \leq \int_0^{\xi} (a_1 + a_2 t^s) dt,$$

o que implica

$$|P(x, \xi)| \leq a_1 \xi + a_2 \frac{\xi^{s+1}}{s+1},$$

ou seja,

$$|P(x, \xi)| \leq a_1 |\xi| + a_2 \frac{|\xi|^{s+1}}{s+1}, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \geq 0. \quad (4.8)$$

Da mesma maneira, se considerarmos  $\xi < 0$ , obtemos

$$|P(x, \xi)| \leq \int_{\xi}^0 |p(x, t)| dt \leq \int_{\xi}^0 (a_1 + a_2 |t|^s) dt \leq \int_{\xi}^0 (a_1 + a_2 (-t)^s) dt,$$

o que implica

$$|P(x, \xi)| \leq -\left(a_1 \xi + a_2 (-1)^s \frac{\xi^{s+1}}{s+1}\right) = a_1 (-\xi) + a_2 \frac{(-\xi)^{s+1}}{s+1},$$

de onde segue

$$|P(x, \xi)| \leq a_1 |\xi| + a_2 \frac{|\xi|^{s+1}}{s+1}, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi < 0. \quad (4.9)$$

De (4.8) e (4.9),

$$|P(x, \xi)| \leq a_1 |\xi| + a_2 \frac{|\xi|^{s+1}}{s+1}, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R},$$

o que implica

$$|P(x, \xi)| \leq \left(\frac{a_1}{|\xi|^s} + \frac{a_2}{s+1}\right) |\xi|^{s+1}, \quad \text{para } |\xi| \neq 0.$$

Sendo  $|\xi| \geq \delta > 0$ , segue  $\frac{1}{|\xi|} \leq \frac{1}{\delta}$ . Assim,

$$|P(x, \xi)| \leq \left( \frac{a_1}{\delta^s} + \frac{a_2}{s+1} \right) |\xi|^{s+1}, \quad \text{para } |\xi| \geq \delta.$$

Considerando  $A = A(\delta) = \left( \frac{a_1}{\delta^s} + \frac{a_2}{s+1} \right)$ , obtemos

$$|P(x, \xi)| \leq A |\xi|^{s+1}, \quad \text{para } |\xi| \geq \delta \text{ e } x \in \bar{\Omega}. \quad (4.10)$$

De (4.7) e (4.10),

$$|P(x, \xi)| \leq \epsilon \frac{|\xi|^2}{2} + A |\xi|^{s+1}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \bar{\Omega},$$

consequentemente

$$|J(u)| \leq \int_{\Omega} |P(x, u)| dx \leq \int_{\Omega} \left( \epsilon \frac{|u|^2}{2} + A |u|^{s+1} \right) dx,$$

mostrando que

$$|J(u)| \leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|_{L^2}^2 + A \|u\|_{L^{s+1}}^{s+1}, \quad \text{onde } 1 < s < 2^* - 1.$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$|J(u)| \leq A_1 \frac{\epsilon}{2} \|u\|^2 + A_2 \|u\|^{s+1}, \quad \text{onde } 1 < s < 2^* - 1,$$

o que implica

$$|J(u)| \leq A_3 \left( \frac{\epsilon}{2} + A_4 \|u\|^{s-1} \right) \|u\|^2.$$

Note agora, que para obtermos  $|J(u)| \leq A_3 \epsilon \|u\|^2$ , devemos ter  $\frac{\epsilon}{2} + A_4 \|u\|^{s-1} \leq \epsilon$ , o que implica  $\|u\|^{s-1} \leq \frac{\epsilon}{2A_4}$ , ou seja,  $\|u\| \leq \left( \frac{\epsilon}{2A_4} \right)^{1/s-1}$ . Logo, para  $\|u\| \leq \left( \frac{\epsilon}{2A_4} \right)^{1/s-1} \equiv \delta_*$

$$|J(u)| \leq A_3 \epsilon \|u\|^2,$$

mostrando assim que

$$J(u) = o(\|u\|^2) \quad \text{quando } u \rightarrow 0,$$

isto é,

$$\int_{\Omega} P(x, u) dx = o(\|u\|^2) \quad \text{quando } u \rightarrow 0,$$



finalizando a demonstração da **Afirmção 3**.

Segue da **Afirmção 3**, que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u) dx \right| \leq \epsilon \|u\|^2 \quad \text{para } \|u\| < \delta.$$

Assim, considerando  $0 < \rho < \delta$ , obtemos

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u) dx \right| \leq \epsilon \|u\|^2, \quad \forall u \in \partial B_{\rho}. \quad (4.11)$$

De (4.4) e (4.11),

$$I(u) \geq \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \left| \int_{\Omega} P(x, u) dx \right| \geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} \right) \|u\|^2 - \epsilon \|u\|^2, \quad \forall u \in X \cap \partial B_{\rho}.$$

Considerando  $C_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} \right)$ , note que  $C_2 > 0$ , visto que estamos considerando  $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$ . Logo,

$$I(u) \geq C_2 \|u\|^2 - \epsilon \|u\|^2, \quad \forall u \in X \cap \partial B_{\rho}.$$

Escolhendo  $\epsilon = \frac{C_2}{2} > 0$ , existe  $\rho > 0$  tal que

$$I(u) \geq \frac{C_2}{2} \|u\|^2, \quad \forall u \in X \cap \partial B_{\rho}.$$

Sendo  $u \in \partial B_{\rho}$ , obtemos  $I(u) \geq \frac{C_2}{2} \rho^2$ ,  $\forall u \in X \cap \partial B_{\rho}$ . Considerando  $\alpha = \frac{C_2}{2} \rho^2 > 0$ , tem-se

$$I(u) \geq \alpha, \quad \forall u \in X \cap \partial B_{\rho},$$

mostrando que  $I$  satisfaz a condição **(I<sub>1</sub>)**.

### Verificação da condição **(I<sub>2</sub>)**:

De fato, vamos mostrar inicialmente que  $I|_V \leq 0$ . Seja  $u \in V = \bigoplus_{j=1}^k V_{\lambda_j}$ , então  $u = \sum_{j=1}^k \phi_j$ , onde  $\phi_j = \sum_{n=1}^s a_n^j v_n^j$ , os  $v_i^j$  são as autofunções associadas a  $\lambda_j$  e  $\dim V_{\lambda_j} = s$ . Assim,

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^k \|\phi_j\|^2 \quad (4.12)$$

e

$$\int_{\Omega} \lambda u^2 dx = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda}{\lambda_j} \|\phi_j\|^2. \quad (4.13)$$

De (4.12) e (4.13),

$$\|u\|^2 - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx = \sum_{j=1}^k \|\phi_j\|^2 - \sum_{j=1}^k \|\phi_j\|^2 \frac{\lambda}{\lambda_j},$$

o que implica

$$\|u\|^2 - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx = \sum_{j=1}^k \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right).$$

Sendo  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$ , obtemos

$$\|u\|^2 - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \leq \sum_{j=1}^k \|\phi_j\|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right),$$

e consequentemente

$$\|u\|^2 - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \leq \|u\|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

Considerando  $K = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$ , temos que  $K \geq 0$ , visto que estamos trabalhando com  $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$ , logo

$$\frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \leq -K \|u\|^2, \quad \forall u \in V. \quad (4.14)$$

Pela condição **(G<sub>5</sub>)**, temos

$$\xi p(x, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

o que implica

$$\begin{cases} p(x, \xi) \geq 0, & \text{se } \xi \geq 0 \\ p(x, \xi) \leq 0, & \text{se } \xi \leq 0, \end{cases}$$

portanto  $P(x, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$ ; pois:

(i) Para  $\xi < 0$ , temos  $P(x, \xi) = -\int_{\xi}^0 p(x, t) dt$ . Note que no intervalo  $[\xi, 0)$ , pela condição **(G<sub>5</sub>)**, segue-se  $p(x, \xi) \geq 0$ , consequentemente  $\int_{\xi}^0 p(x, t) dt \leq 0$ , o que implica  $-\int_{\xi}^0 p(x, t) dt \geq 0$ , ou seja,  $P(x, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi < 0$ .

(ii) Para  $\xi \geq 0$ , temos  $P(x, \xi) = \int_0^{\xi} p(x, t) dt$ . Note que no intervalo  $[0, \xi]$ , pela condição **(G<sub>5</sub>)**, segue-se  $p(x, \xi) \geq 0$ , consequentemente  $\int_0^{\xi} p(x, t) dt \geq 0$ , ou seja,  $P(x, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \geq 0$ .

Portanto, de (i) e (ii), concluímos que  $P(x, \xi) \geq 0$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ , logo

$$\int_{\Omega} P(x, u) dx \geq 0. \quad (4.15)$$

De (4.14) e (4.15), tem-se

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} P(x, u) dx \leq -K \|u\|^2 - \int_{\Omega} P(x, u) dx \leq 0, \quad \forall u \in V,$$

ou seja,

$$I|_V \leq 0. \quad (4.16)$$

**Afirmção 4:** Existem  $e \in \partial B_1 \cap X$  e  $\bar{R} > \rho$  tais que  $I(u) \leq 0$  para  $u \in V \oplus \text{span}\{e\}$  com  $\|u\| > \bar{R}$ .

De fato, note que para cada  $u \in E$ , temos

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \int_{\Omega} P(x, u) dx.$$

Desde que  $\lambda > 0$

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} P(x, u) dx.$$

De ( $\mathbf{G}_4$ ), já mostramos anteriormente que existem  $C, C_3 > 0$  tais que

$$P(x, \xi) \geq C |\xi|^\mu - C_3, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \bar{\Omega}, \quad (\text{Ver Capítulo 2})$$

onde  $2 < \mu \leq 2^*$ . Consequentemente,

$$\int_{\Omega} P(x, u) dx \geq C \int_{\Omega} |u|^\mu dx - \int_{\Omega} C_3 dx,$$

o que implica

$$\int_{\Omega} P(x, u) dx \geq C \|u\|_{L^\mu}^\mu - C_3 |\Omega|,$$

logo

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 - C \|u\|_{L^\mu}^\mu + C_4, \quad \forall u \in E.$$

Considerando  $e = v_{k+1}$ , temos que  $e \in X = \bigoplus_{j=k+1}^{\infty} V_{\lambda_j}$  e  $\|e\| = \|v_{k+1}\| = 1$ , de onde segue  $e \in \partial B_1 \cap X$ .

Considere agora,  $V_1 = V \oplus \text{span}\{e\}$ . Note que sendo  $\dim V < +\infty$  e  $\dim(\text{span}\{e\}) < +\infty$ , segue  $\dim V_1 < +\infty$ . Desde que em espaços

de dimensão finita, quaisquer duas normas são equivalentes, existem constantes  $C_5, C_6$  tais que

$$C_5 \|u\| \leq \|u\|_{L^\mu} \leq C_6 \|u\|, \quad \forall u \in V_1, \quad (4.17)$$

logo

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \tilde{C} \|u\|^\mu + C_4, \quad \forall u \in V_1.$$

Portanto, para  $\bar{R}$  suficientemente grande, obtemos

$$I(u) \leq 0, \quad \forall u \in V_1 \text{ e } \|u\| \geq \bar{R},$$

visto que  $\mu > 2$ , mostrando a **Afirmção 4**.

Agora, considerando  $R = 2\bar{R} + 2 > \rho$ , segue de (4.16) e da **Afirmção 4** que  $I(u) \leq 0 \forall u \in \partial Q$  onde  $Q = \{B_R \cap V\} \oplus \{re ; 0 < r < R\}$ . De fato, se  $u \in \partial Q$ , então  $u$  é da forma

$$u = v + Re \text{ ou } u = v, \text{ onde } v \in \bar{B}_R \cap V \text{ e } R = 2\bar{R} + 2.$$

ou

$$u = v + re, \text{ onde } \|v\| = R \text{ e } 0 < r < R.$$

Vamos analisar os casos mencionados acima:

**1º Caso:** Se  $u = v$ , sendo  $v \in V$ , segue de (4.16) que  $I(u) \leq 0$ .

**2º Caso:** Se  $u = v + Re$ , temos que  $u \in V_1$  e

$$\|u\|^2 = \|v + Re\|^2 = \langle v + Re, v + Re \rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, Re \rangle + \|Re\|^2,$$

sendo  $\langle v, Re \rangle = 0$ , obtemos

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + R^2 \geq R^2,$$

ou seja,

$$\|u\| \geq R > \bar{R}.$$

Logo, pela **Afirmção 4**, temos que  $I(u) \leq 0$ .

**3º Caso:** Se  $u = v + re$ , com  $0 < r < R$  e  $\|v\| = R$ , temos que  $u \in V_1$  e

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + r^2 = R^2 + r^2 > R^2 \geq \bar{R}^2.$$

Logo, pela **Afirmção 4**, temos que  $I(u) \leq 0$ .

Analisando todos os casos, concluimos que  $I(u) \leq 0$ ,  $\forall u \in \partial Q$ , mostramos que  $I$  satisfaz a condição **(I<sub>2</sub>)**.

### Verificação da condição **(PS)**:

Seja  $(u_n) \subset E$  uma sequência **(PS)**, isto é, existe  $M > 0$ , tal que

$$|I(u_n)| \leq M \quad \text{e} \quad I'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty. \quad (4.18)$$

**Afirmção 5:**  $(u_n)$  é limitada em  $E$ .

Tendo  $I'(u_n) \rightarrow 0$ , então dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_o \in \mathbb{N}$  tal que

$$|I'(u_n)u_n| \leq \epsilon \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_o. \quad (4.19)$$

Considere  $\beta \in \left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}\right)$ , onde  $\mu > 2$ . Sendo

$$\begin{aligned} I(u) - \beta I'(u)u &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx \right] - \int_{\Omega} P(x, u) dx - \\ &\quad \beta \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx \right] + \beta \int_{\Omega} p(x, u) u dx, \end{aligned}$$

obtemos

$$I(u) - \beta I'(u)u = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} [\beta p(x, u)u - P(x, u)] dx.$$

Considere  $A = \{x \in \Omega; |u(x)| \geq r\}$ , logo

$$\begin{aligned} I(u) - \beta I'(u)u &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_A [\beta p(x, u)u - P(x, u)] dx + \\ &\quad + \int_{A^c} [\beta p(x, u)u - P(x, u)] dx. \end{aligned}$$

Da condição **(G<sub>4</sub>)**, obtemos

$$\begin{aligned} I(u) - \beta I'(u)u &\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_A [\beta \mu P(x, u) - P(x, u)] dx + \\ &\quad + \int_{A^c} [\beta p(x, u)u - P(x, u)] dx, \end{aligned}$$

de onde segue

$$\begin{aligned} I(u) - \beta I'(u)u &\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta\mu - 1) \int_{\Omega} P(x, u) dx - \\ &\quad - (\beta\mu - 1) \int_{A^c} P(x, u) dx + \int_{A^c} [\beta p(x, u)u - P(x, u)] dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta\mu - 1) \int_{\Omega} P(x, u) dx - \int_{\overline{A^c}} |\mu\beta P(x, u) + \beta p(x, u)u| dx.$$

Sendo  $p$  e  $P$  funções contínuas,  $g(x, t) = |\mu\beta P(x, t) + \beta p(x, t)t|$  é uma função contínua. Assim, uma vez que  $\overline{\Omega} \times [-r, r]$  é um conjunto compacto, segue que  $g$  é limitada neste compacto. Logo, existe  $K > 0$  tal que

$$|g(x, t)| \leq K, \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times [-r, r],$$

de onde segue

$$|\mu\beta P(x, u) + \beta p(x, u)u| \leq K, \quad \forall x \in \overline{A^c}.$$

Assim,

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta\mu - 1) \int_{\Omega} P(x, u) dx - \int_{\overline{A^c}} K dx,$$

o que implica

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta\mu - 1) \int_{\Omega} P(x, u) dx - \overline{K},$$

com  $\overline{K} = K |\Omega|$ . Assim,

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta\mu - 1) \int_{\Omega} P(x, u) dx - \overline{K}.$$

Da condição  $(\mathbf{G}_4)$ , mostramos anteriormente que

$$P(x, \xi) \geq C |\xi|^\mu - C_3, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \overline{\Omega}, \quad (\mathbf{Ver Cap\u00edtulo 2})$$

onde  $2 < \mu \leq 2^*$ . Assim,

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta\mu - 1) \int_{\Omega} [C |u|^\mu - C_3] dx - \overline{K}.$$

visto que  $(\beta\mu - 1) > 0$ , logo

$$I(u) - \beta I'(u)u \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta\mu - 1) C \|u\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu - a_7, \quad \forall u \in E, \quad (4.20)$$

onde  $a_7 = \overline{K} + C_3 (\beta\mu - 1) |\Omega|$ .

Por outro lado, considerando  $n$  suficientemente grande, de (4.18) e (4.19), obtemos

$$I(u_n) - \beta I'(u_n)u_n \leq |I(u_n)| + \beta |I'(u_n)u_n|,$$

de onde segue

$$I(u_n) - \beta I'(u_n)u_n \leq M + \beta \epsilon \|u_n\|.$$

Considerando  $\epsilon = 1$  e  $n > n_o(\epsilon)$ , tem-se

$$I(u_n) - \beta I'(u_n)u_n \leq M + \beta \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_o. \quad (4.21)$$

De (4.20) e (4.21), segue-se

$$M + \beta \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u_n\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta\mu - 1) C \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu - a_7. \quad (4.22)$$

Da desigualdade de Young, temos que, dados  $a, b \geq 0$  e  $\epsilon > 0$ , segue

$$a.b \leq \epsilon a^p + K(\epsilon)b^q, \quad \text{onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{e } K(\epsilon) \longrightarrow +\infty \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Agora, sendo  $\mu > 2$  e  $|\Omega| < +\infty$ , temos que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{K} \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)} \leq \epsilon \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)}^{\mu/2} + K(\epsilon)\widehat{K}^q, \quad \text{onde } \frac{1}{\mu/2} + \frac{1}{q} = 1,$$

o que implica

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)}^{\mu/2} + \overline{C}K(\epsilon).$$

De (4.22), obtemos

$$\begin{aligned} M + \beta \|u_n\| &\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u_n\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \left[ \epsilon \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)}^{\mu/2} + \overline{C}K(\epsilon) \right]^2 + \\ &+ (\beta\mu - 1) C \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu - a_7, \quad \forall n \geq n_o, \end{aligned}$$

de onde segue

$$M + \beta \|u_n\| \geq C_1 \|u_n\|^2 - C_2 \epsilon^2 \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu - C_3 K(\epsilon)^2 + C_4 \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu - a_7.$$

Escolhendo  $\epsilon = \left(\frac{C_4}{2C_2}\right)^{1/2}$ , tem-se

$$M + \beta \|u_n\| \geq C_1 \|u_n\|^2 + \frac{C_4}{2} \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu - \tilde{a}_7 \geq C_1 \|u_n\|^2 - \tilde{a}_7, \quad \forall n \geq n_o,$$

ou seja, existem constantes  $C > 0$  e  $a > 0$  tais que

$$M + \beta \|u_n\| \geq C \|u_n\|^2 - a, \quad \forall n \geq n_o,$$

mostrando assim que  $(u_n)$  é limitada em  $E$ .

Repetindo os mesmos argumentos utilizados no **Capítulo 2**, mostra-se que  $I$  satisfaz as condições  $(\overline{\mathbf{H}}_1)$  e  $(\overline{\mathbf{H}}_2)$  da **Proposição C.1**, donde concluímos que  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente, mostrando assim que  $I$  satisfaz a **condição (PS)**. Portanto, podemos aplicar o **Teorema 4.1** e garantir a existência de um ponto crítico de  $I$ , isto é, uma solução fraca para o **Problema  $(\mathbf{P}_1)$** , finalizando a demonstração do **Teorema 4.2**. ■



# Apêndice A

## Resultados Gerais

Neste apêndice, enunciaremos algumas definições e os principais teoremas utilizados nas demonstrações deste trabalho.

**Definição A.1** (Ver [9]) *Uma família  $F = (\sigma_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$  de subconjuntos de um espaço métrico  $M$  chama-se localmente finita quando todo ponto  $x \in M$  possui uma vizinhança que intercepta apenas um número finito de conjuntos  $\sigma_\lambda$ .*

**Observação:** Em outras palavras,  $F$  é localmente finita se, e somente se, para cada  $x \in M$  existir índices  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Gamma$  e uma vizinhança  $V$  de  $x$  tais que  $V \cap \sigma_\lambda \neq \emptyset \implies \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ .

**Definição A.2** (Ver [9]) *Seja  $M$  um espaço métrico. Uma partição da unidade em  $M$  é uma família  $(\phi_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$  de funções contínuas  $\phi_\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$  tais que:*

- (1) *Para todo  $x \in M$  e todo  $\lambda \in \Gamma$ , tem-se  $\phi_\lambda(x) \geq 0$ ;*
- (2) *A família  $F = (\text{supp}(\phi_\lambda))_{\lambda \in \Gamma}$ , é localmente finita em  $M$ ;*
- (3) *Para todo  $x \in M$  tem-se  $\sum_{\lambda \in \Gamma} \phi_\lambda(x) = 1$ .*

**Definição A.3** (Ver [9]) *Um espaço métrico  $M$  chama-se paracompacto quando toda cobertura aberta de  $M$  pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita.*

**Teorema A.4** (Ver [9]) *Todo espaço métrico é paracompacto.*

**Teorema A.5 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)** (Ver [2]) *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções integráveis que convergem em quase toda parte para uma função mensurável  $f$ . Se existe uma função integrável  $g$  tal que*

$$|f_n| \leq g, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então  $f$  é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

**Teorema A.6 (Desigualdade de Hölder)** (Ver [2]) Seja  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$  com  $1 \leq p < +\infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ e } \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Teorema A.7** (Ver [3]) Seja  $E$  um espaço de Banach e  $X$  e  $Y$  dois subespaços vetoriais fechados tais que  $X + Y$  é fechado. Então, existe uma constante  $C \geq 0$  tal que todo  $z \in X + Y$  admite uma decomposição da forma  $z = x + y$  com  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $\|x\| \leq C \|z\|$  e  $\|y\| \leq C \|z\|$ .

**Corolário A.8** (Ver [3]) Se  $X$  é um espaço vetorial normado e  $X = V \oplus W$ , então

$$\begin{aligned} P : X &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto P(x) = x_1; \quad x_1 \in V \end{aligned}$$

é contínua.

**Teorema A.9 (Teorema de Fubini)** (Ver [1]) Suponhamos que  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Então, para todo  $x \in \Omega_1$

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ e } \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para todo  $y \in \Omega_2$ , temos

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ e } \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx.$$

**Teorema A.10 (Critério de Compacidade)** (Ver [6]) Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. Um operador linear  $T : X \longrightarrow Y$  é compacto se, e somente se, toda sequência limitada  $(x_n) \subset X$  tem a propriedade que a sequência  $(T(x_n)) \subset Y$  possui uma subsequência convergente.

**Teorema A.11** (Ver [6]) Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $T : X \longrightarrow Y$  um operador linear compacto. Se  $(x_n) \subset X$  verifica

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X,$$

então

$$T(x_n) \longrightarrow T(x) \text{ em } Y.$$

**Teorema A.12** (Ver [3]) *Sejam  $(x_n)$  uma seqüência fracamente convergente em um espaço normado  $X$ , isto é, existe  $x \in X$  tal que  $x_n \rightharpoonup x$  em  $X$ . Então,*

- (1) *O limite fraco  $x$  de  $(x_n)$  é único;*
- (2) *Toda subsequência  $(x_{n_j}) \subset (x_n)$  converge fraco para  $x$ ;*
- (3) *A seqüência  $(x_n)$  é limitada.*

**Teorema A.13 (Teorema da Representação Riesz)** (Ver [3]) *Todo funcional linear limitado  $f$  sobre um espaço de Hilbert, pode ser representado em termos do produto interno, isto é,*

$$f(x) = \langle z, x \rangle$$

*onde  $z$  é unicamente determinado e verifica  $\|f\| = \|z\|$ .*

**Teorema A.14** (Ver [3]) *Seja  $H$  um espaço de Banach reflexivo. Se  $(x_n)$  é uma seqüência limitada em  $H$ , então existem uma subsequência  $(x_{n_j}) \subset (x_n)$  e  $x \in H$  tais que*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \text{ em } H.$$

**Teorema A.15** (Ver [3]) *Sejam  $(f_n)$  uma seqüência em  $L^p(\Omega)$  e  $f \in L^p(\Omega)$ , tais que*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega).$$

*Então, existe uma subsequência  $(f_{n_j})$  tal que*

- (1)  *$f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ ;*
- (2)  *$|f_{n_j}(x)| \leq g(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ ,  $\forall j$ , onde  $g \in L^p(\Omega)$ .*

# Apêndice B

## Funcionais Diferenciáveis

**Definição B.1** Considere um funcional  $I : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é um espaço normado. O funcional  $I$  é Fréchet Diferenciável em  $u \in U$ , se existir  $T : U \rightarrow \mathbb{R}$  funcional linear contínuo verificando

$$\lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \frac{|I(u + \varphi) - I(u) - T(\varphi)|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Dizemos que o funcional  $I \in C^1(U, \mathbb{R})$  se a derivada a Fréchet  $I'$  é contínua sobre  $U$ .

**Observações:**

i) Se  $H$  é um espaço de Hilbert e  $I$  tem derivada a Fréchet em  $u \in U$ , pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único vetor  $\nabla I(u) \in H$ , tal que

$$I'(u)\varphi = \langle \nabla I(u), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H$$

e

$$\|\nabla I(u)\|_H = \|I'(u)\|_{H'}.$$

onde denotamos  $\nabla I(u)$  o gradiente de  $I$  em  $u$ .

ii) A derivada de Gateaux é dada por

$$I'(u)\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[I(u + t\varphi) - I(u)]}{t}.$$

iii) Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.

Agora, enunciaremos resultados envolvendo imersões nos espaços de Sobolev, os quais foram de fundamental importância para o desenvolvimento do nosso trabalho.

**Definição B.2** *Considere o seguinte espaço*

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \right\},$$

com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_* = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  com  $\lambda > 0$ . Este espaço com o produto interno indicado é de Hilbert.

Fixado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira suave, o espaço  $H_0^1(\Omega)$  é o fecho de  $D(\Omega)$  em  $H^1(\Omega)$ , onde  $D(\Omega)$  é o espaço das funções testes (funções de classe  $C^\infty(\Omega)$  com suporte compacto em  $\Omega$ ). O espaço  $H_0^1(\Omega)$  com o produto interno definido por

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

é um espaço de Hilbert.

**Teorema B.3 (Imersões de Sobolev)** (Ver [1]) Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  for limitado com fronteira suave, as seguintes imersões são contínuas:

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &\hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty, \quad N = 1 \text{ ou } N = 2; \\ H^1(\Omega) &\hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq 2^*, \quad N \geq 3, \text{ onde } 2^* = \frac{2N}{N-2}. \end{aligned}$$

**Teorema B.4 (Imersões de Rellich)** (Ver [1]) Se  $\Omega$  for limitado com fronteira suave, as seguintes imersões são compactas:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < 2^*, \quad N \geq 3, \text{ onde } 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

A partir de agora, nosso objetivo é mostrar que o funcional  $I$  definido em  $H_0^1(\Omega)$  por

$$I(u) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} u^2 - P(x, u) \right] dx$$

é de classe  $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira suave,  $N \geq 3$ ,  $\lambda \geq \lambda_1$ ,  $P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t) dt$  e  $p$  satisfaz as seguintes condições:

(H<sub>1</sub>)  $p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

(H<sub>2</sub>) Existem constantes  $a_1, a_2 > 0$  tais que

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \text{ com } 1 < s < \frac{N+2}{N-2}.$$

Inicialmente, vamos mostrar que  $I$  está bem definido. De fato, note que:

(i) Sendo  $u \in H_0^1(\Omega)$ , temos  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2 < +\infty$ .

(ii) Além disso, pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos:

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} u^2 dx \right| \leq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx = \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty.$$

(iii) Note que,

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u) dx \right| = \left| \int_{\Omega} \left[ \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right] dx \right| \leq \int_{\Omega} \left| \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right| dx.$$

Vamos analisar os seguintes casos:

**1º Caso:** Considerando  $u \geq 0$ , pela condição **(H<sub>2</sub>)**, segue-se

$$\left| \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right| \leq \int_0^u |p(x, \xi)| d\xi \leq \int_0^u [a_1 + a_2 |\xi|^s] d\xi, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2},$$

logo

$$\left| \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right| \leq \int_0^u [a_1 + a_2 \xi^s] d\xi = a_1 u + a_2 \frac{u^{s+1}}{s+1}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2},$$

ou seja,

$$\left| \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right| \leq a_1 |u| + a_3 |u|^{s+1}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2}.$$

**2º Caso:** Considerando  $u < 0$ , pela condição **(H<sub>2</sub>)**, segue-se

$$\left| \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right| = \left| - \int_u^0 p(x, \xi) d\xi \right| \leq \int_u^0 |p(x, \xi)| d\xi \leq \int_u^0 [a_1 + a_2 |\xi|^s] d\xi,$$

logo

$$\left| \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right| \leq \int_u^0 [a_1 + a_2 (-\xi)^s] d\xi = \int_u^0 [a_1 + a_2 (-1)^s \xi^s] d\xi = a_1 (-u) + a_2 (-1)^{s+1} \frac{u^{s+1}}{s+1},$$

ou seja,

$$\left| \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right| \leq a_1 (-u) + a_2 \frac{(-u)^{s+1}}{s+1} = a_1 |u| + a_3 |u|^{s+1}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2}.$$

Observe que em ambos os casos, obtemos

$$\left| \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right| \leq a_1 |u| + a_3 |u|^{s+1}, \quad \text{onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2},$$

ou seja,

$$\left| \int_0^u p(x, \xi) d\xi \right| \leq a_1 |u| + a_3 |u|^p, \quad \text{onde } 1 < p < \frac{N+2}{N-2} + 1 = 2^*.$$

Sendo  $\Omega$  limitado, temos que  $H_0^1(\Omega)$  está imerso continuamente em  $L^r(\Omega)$ , para  $r \in [1, 2^*]$ , logo

$$\left| \int_{\Omega} P(x, u) dx \right| \leq \int_{\Omega} [a_1 |u| + a_3 |u|^p] dx \leq a_1 \|u\|_{L^1(\Omega)} + a_3 \|u\|_{L^p(\Omega)}^p < +\infty,$$

portanto de (i)-(iii), mostramos que  $I$  está bem definida.

Consideremos os funcionais  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  no espaço de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$  definidos por

$$I_1(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2, \quad I_2(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \quad \text{e} \quad I_3(u) = \int_{\Omega} P(x, u) dx,$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma proveniente do produto interno definido em  $H_0^1(\Omega)$ .

**Afirmção 1:** O funcional  $I_1$  é de classe  $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

**Existência da derivada de Gateaux de  $I_1$ :**

Seja  $u \in H_0^1(\Omega)$ , então para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$ , temos

$$\frac{\partial I_1(u)}{\partial v} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[\|u + tv\|^2 - \|u\|^2]}{t},$$

de onde segue

$$\frac{\partial I_1(u)}{\partial v} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} [2 \langle u, v \rangle + t \|v\|^2] = \frac{1}{2} 2 \langle u, v \rangle,$$

logo

$$\frac{\partial I_1(u)}{\partial v} = \langle u, v \rangle$$

é a nossa candidata a ser a derivada de  $I_1$ .

**Existência da diferencial a Fréchet de  $I_1$ :**

Seja  $u \in H_0^1(\Omega)$ , então para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$ , temos

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|\frac{1}{2} \|u + v\|^2 - \frac{1}{2} \|u\|^2 - \langle u, v \rangle|}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|v\|^2}{2 \|v\|} = \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|v\| = 0,$$

mostrando assim, que  $I_1$  é diferenciável em  $H_0^1(\Omega)$  com

$$I_1'(u)v = \langle u, v \rangle.$$

**Continuidade de  $I_1'$ :**

Considere uma sequência  $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$  com  $u_n \rightarrow u$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Devemos mostrar que  $I_1'(u_n) \rightarrow I_1'(u)$  em  $H^{-1}$ , ou equivalentemente,

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty,$$

onde  $H^{-1}$  denota o dual do  $H_0^1(\Omega)$ . Dado  $\epsilon > 0$  e  $v \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $\|v\| \leq 1$ , temos que para  $n$  suficientemente grande

$$|(I_1'(u_n) - I_1'(u))v| = |\langle u_n - u, v \rangle| \leq \|u_n - u\| \|v\| < \epsilon,$$

o que implica

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} |(I_1'(u_n) - I_1'(u))v| \leq \epsilon,$$

ou seja,

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

donde concluímos que  $I_1'$  é contínua. Consequentemente,  $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

**Afirmção 2:** O funcional  $I_2$  é de classe  $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

**Existência da derivada de Gateaux de  $I_2$ :**

Seja  $u \in H_0^1(\Omega)$ , então para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$ , temos

$$\frac{\partial I_2(u)}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \frac{[(u + tv)^2 - u^2]}{t} dx,$$

de onde segue

$$\frac{\partial I_2(u)}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (2uv + tv^2) dx,$$

logo

$$\frac{\partial I_2(u)}{\partial v} = \lambda \int_{\Omega} uv dx$$

é a nossa candidata a ser a derivada de  $I_2$ .

**Existência da diferencial a Fréchet de  $I_2$ :**

Seja  $u \in H_0^1(\Omega)$ , então para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$ , temos

$$\frac{|I_2(u + v) - I_2(u) - I_2'(u)v|}{\|v\|} = \frac{\left| \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} [(u + v)^2 - u^2] dx - \lambda \int_{\Omega} uv dx \right|}{\|v\|},$$

o que implica

$$\frac{|I_2(u + v) - I_2(u) - I_2'(u)v|}{\|v\|} = \frac{\left| \lambda \int_{\Omega} v^2 dx \right|}{2\|v\|} \leq \frac{\lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{2\|v\|}.$$



Pelas imersões contínuas de Sobolev, existe  $C > 0$  tal que

$$\frac{|I_2(u+v) - I_2(u) - I_2'(u)v|}{\|v\|} \leq C \frac{\lambda \|v\|^2}{2\|v\|} = C \frac{\lambda}{2} \|v\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \|v\| \rightarrow 0,$$

logo

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|I_2(u+v) - I_2(u) - I_2'(u)v|}{\|v\|} = 0,$$

mostrando que  $I_2$  é diferenciável em  $H_0^1(\Omega)$  com

$$I_2'(u)v = \lambda \int_{\Omega} uv dx.$$

### Continuidade de $I_2'$ :

Considere uma sequência  $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$  com  $u_n \rightarrow u$  em  $H_0^1(\Omega)$ . devemos mostrar que

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

Sendo

$$|(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq \lambda \int_{\Omega} |(u_n - u)| |v| dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

pelas imersões contínuas de Sobolev, segue-se  $|v|$  e  $|(u_n - u)| \in L^2(\Omega)$ . Assim, pela desigualdade de Holder,

$$|(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq C\lambda \| (u_n - u) \|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Novamente, segue das imersões contínuas de Sobolev,

$$|(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq \tilde{C}\lambda \| (u_n - u) \| \|v\|.$$

Assim, dado  $\epsilon > 0$  e  $v \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $\|v\| \leq 1$ , temos que para  $n$  suficientemente grande

$$|(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq \epsilon,$$

o que implica

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} |(I_2'(u_n) - I_2'(u))v| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

logo

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

donde concluimos que  $I'_2$  é contínua. Consequentemente,  $I_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

**Afirmção 3:** O funcional  $I_3$  é de classe  $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

Mostraremos que  $I_3$  é Fréchet diferenciável com derivada contínua. Seja  $u \in H_0^1(\Omega)$  e para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$  considere

$$r(v) = I_3(u + v) - I_3(u) - \int_{\Omega} p(x, u)v dx. \quad (\text{B.1})$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0,$$

ou equivalentemente, que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, se  $\|v\| < \delta$  temos  $|r(v)| \leq \epsilon \|v\|$ . Pela definição de  $I_3$ , obtemos

$$r(v) = \int_{\Omega} [P(x, u + v) - P(x, u)] dx - \int_{\Omega} p(x, u)v dx.$$

Considere a função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(t) = P(x, u + tv)$ , onde  $x$  está fixado. Note que,  $g$  é contínua e com derivada  $g'(t) = p(x, u + tv)v$ . Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_0^1 g'(t) dt = g(1) - g(0),$$

ou seja,

$$\int_0^1 p(x, u + tv)v dt = P(x, u + v) - P(x, u),$$

consequentemente

$$r(v) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 p(x, u + tv)v dt \right] dx - \int_{\Omega} p(x, u)v dx.$$

o que implica

$$r(v) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 (p(x, u + tv) - p(x, u)) v dt \right] dx,$$

logo

$$|r(v)| \leq \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 |p(x, u + tv) - p(x, u)| |v| dt \right] dx.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \left[ \int_{\Omega} |p(x, u + tv) - p(x, u)| |v| dx \right] dt. \quad (\text{B.2})$$

Seja  $q = 2^* = \frac{2N}{N-2}$  e  $r = \frac{2N}{N+2}$ , onde  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ . Das imersões contínuas de Sobolev, temos que  $v \in L^q(\Omega)$ . Note ainda, que  $p \in L^r(\Omega)$ . De fato, pois desde que  $p$  satisfaz a condição  $(\mathbf{H}_2)$ , obtemos

$$\int_{\Omega} |p(x, u)|^r dx \leq \int_{\Omega} [a_1 + a_2 |u|^s]^r dx \leq K_1 \int_{\Omega} [a_1^r + a_2^r |u|^{sr}] dx \leq K_2 |\Omega| + K_3 \int_{\Omega} |u|^{sr} dx. \quad (\text{B.3})$$

Por hipótese, temos que  $1 < s < \frac{N+2}{N-2}$ , logo

$$1 < 1 \cdot \frac{2N}{N+2} \leq sr \leq \frac{N+2}{N-2} \frac{2N}{N+2} = \frac{2N}{N-2} = 2^*, \quad \text{para } N \geq 3,$$

ou seja,  $1 < sr \leq 2^*$ . Assim, das imersões contínuas de Sobolev, sendo  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u \in L^{sr}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} |u|^{sr} dx < +\infty.$$

De (B.3), obtemos

$$\int_{\Omega} |p(x, u)|^r dx < +\infty,$$

mostrando que  $p \in L^r(\Omega)$ . Assim, aplicando a desigualdade de Hölder em (B.2), com os expoentes conjugados  $r$  e  $s$ , segue

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|p(\cdot, u + tv) - p(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} dt. \quad (\text{B.4})$$

Vamos provar agora que  $p(\cdot, u + tv) \rightarrow p(\cdot, u)$  em  $L^{q/s}(\Omega)$  uniformemente em  $t$ , ou equivalentemente,  $p(\cdot, u + tv_n) \rightarrow p(\cdot, u)$  em  $L^{q/s}(\Omega)$  uniformemente em  $t$ , onde  $v_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . Considere

$$(v_n) \subset H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \varphi_{n,t}(x) = p(x, u + tv_n(x)), \quad (\text{B.5})$$

onde  $v_n \rightarrow 0$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Das imersões contínuas de Sobolev, segue-se  $v_n \rightarrow 0$  em  $L^q(\Omega)$ , e a menos de subsequência, temos

$$|v_n(x)| \leq g(x), \quad \text{onde } g \in L^q(\Omega)$$

e

$$(u + tv_n) \rightarrow u \quad \text{em } L^q(\Omega).$$

Assim, a menos de subsequência temos

$$(u + tv_n)(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|(u + tv_n)(x)| \leq |u(x)| + t|v_n(x)| \leq |u(x)| + g(x), \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{e q.t.p. em } \Omega,$$

onde  $|u| + g \in L^q(\Omega)$ . Por hipótese tem-se  $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , logo

$$p(x, u + tv_n(x)) \longrightarrow p(x, u(x)) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Considerando  $\varphi(x) = p(x, u(x))$ , obtemos

$$\varphi_{n,t}(x) \longrightarrow \varphi(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

o que implica

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso,

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq (|p(x, u + tv_n(x))| + |p(x, u(x))|)^{q/s}.$$

Pela condição **(H<sub>2</sub>)**, segue

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq (a_1 + a_2|u + tv_n|^s + a_1 + a_2|u|^s)^{q/s},$$

o que implica

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq M_1 + M_2|u + tv_n|^q + M_3|u|^q.$$

Sendo  $t \in [0, 1]$ , tem-se

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq M_1 + \overline{M}_2|u|^q + |u|^q + \widetilde{M}_2 M_3|v_n|^q + M_3|u|^q,$$

de onde segue

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq M_1 + \overline{M}_2|u|^q + |u|^q + \widetilde{M}_2 M_3 g(x)^q + M_3|u|^q \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} |\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} dx \right) = 0, \quad (\text{B.6})$$

isto é,  $\varphi_{n,t} \longrightarrow \varphi$  em  $L^{q/s}(\Omega)$ . Para mostrarmos que  $\varphi_{n,t} \longrightarrow \varphi$  em  $L^{q/s}(\Omega)$  uniformemente em  $t \in [0, 1]$ , suponha por contradição que não ocorre convergência uniforme.

Então, existe  $\epsilon_0 > 0$  e  $t_{n_j} \subset [0, 1]$  verificando,

$$\|\varphi_{n_j, t_{n_j}} - \varphi\|_{L^{q/s}(\Omega)} \geq \epsilon_0 \quad \forall n_j \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.7})$$

Repetindo os mesmos argumentos que fizemos de (B.5) até (B.6) para  $t_{n_j}$ , chegaremos que a menos de subsequência, dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|\varphi_{n_j, t_{n_j}} - \varphi\|_{L^{q/s}(\Omega)} < \epsilon \quad \forall n_j \geq n_0,$$

o que contradiz (B.7), portanto a menos de subsequência  $p(\cdot, u + tv_n) \rightarrow p(\cdot, u)$  em  $L^{q/s}(\Omega)$  uniformemente em  $t$ , onde  $v_n \rightarrow 0$ , em  $H_0^1(\Omega)$ , donde concluímos que

$$p(\cdot, u + tv) \rightarrow p(\cdot, u) \quad \text{em } L^{q/s}(\Omega) \quad \text{uniformemente em } t.$$

Sendo  $r < \frac{q}{s}$  e  $\Omega$  limitado, temos que

$$p(\cdot, u + tv) \rightarrow p(\cdot, u) \quad \text{em } L^r(\Omega) \quad \text{uniformemente em } t.$$

Assim, pela definição de Convergência Uniforme, temos que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|p(\cdot, u + tv) - p(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad \|v\|_{L^r(\Omega)} < \delta, \quad \forall t \in [0, 1].$$

De (B.4), obtemos

$$|r(v)| \leq \epsilon \|v\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{sempre que} \quad \|v\|_{L^r(\Omega)} < \delta.$$

Usando novamente imersões contínuas de Sobolev, tem-se

$$|r(v)| \leq C\epsilon \|v\| \quad \text{sempre que} \quad \|v\| < \delta.$$

mostrando assim que  $I_3$  é Fréchet diferenciável e

$$I_3'(u)v = \int_{\Omega} p(x, u)v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

### Continuidade de $I_3'$ :

Para isto, devemos mostrar que  $\|I_3'(u + v_n) - I_3'(u)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0$  sempre que  $v_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Considere  $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$  e  $J_n(x) = p(x, u + v_n(x))$ , onde  $v_n \rightarrow 0$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Das imersões contínuas de Sobolev, segue que  $v_n \rightarrow 0$  em  $L^q(\Omega)$ , logo

$$(u + v_n) \rightarrow u \quad \text{em } L^q(\Omega)$$

e a menos de subsequência,

$$(u + v_n)(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|(u + v_n)(x)| \leq g(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \quad \text{onde } g \in L^q(\Omega).$$

Por hipótese temos que  $p \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , assim

$$p(x, u + v_n(x)) \rightarrow p(x, u(x)) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Considerando  $J(x) = p(x, u(x))$ , tem-se

$$J_n(x) \rightarrow J(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

portanto

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso,

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \leq (|p(x, u + v_n(x))| + |p(x, u(x))|)^{q/s}.$$

Pela condição **(H<sub>2</sub>)**, segue-se

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \leq (a_1 + a_2 |u + v_n|^s + a_1 + a_2 |u|^s)^{q/s},$$

o que implica

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \leq M_1 + M_2 |u + v_n|^q + M_3 |u|^q.$$

Assim,

$$|J_n(x) - J(x)|^{q/s} \leq M_1 + \bar{M}_2 |u|^q + \widetilde{M}_2 |v_n|^q + M_3 |u|^q,$$

de onde segue

$$|\varphi_{n,t}(x) - \varphi(x)|^{q/s} \leq M_1 + \bar{M}_2 |u|^q + \widetilde{M}_2 g(x)^q + M_3 |u|^q \in L^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} |J_n(x) - J(x)|^{q/s} dx \right) = 0, \quad (\text{B.8})$$

isto é,  $p(\cdot, u + v_n) \rightarrow p(\cdot, u)$  em  $L^{q/s}(\Omega)$ .

Uma vez que  $r < \frac{q}{s}$  e  $\Omega$  é limitado, temos que  $p(\cdot, u + v_n) \longrightarrow p(\cdot, u)$  em  $L^r(\Omega)$ , de onde segue que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_o \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\|p(\cdot, u + v_n) - p(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} < \epsilon, \quad \forall \quad n \geq n_o.$$

Uma vez que  $h \in H_o^1(\Omega)$ , segue-se

$$|(I'_3(u + v_n) - I'_3(u))h| \leq \int_{\Omega} |p(x, u + v_n) - p(x, u)| |h| dx,$$

e sendo  $|h| \in L^q(\Omega)$  e  $|p(\cdot, u + v_n) - p(\cdot, u)| \in L^r(\Omega)$ , pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$|(I'_3(u + v_n) - I'_3(u))h| \leq \|p(\cdot, u + v_n) - p(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} \|h\|_{L^q(\Omega)}.$$

Novamente, segue-se das imersões contínuas de Sobolev,

$$|(I'_3(u + v_n) - I'_3(u))h| \leq \tilde{C} \|p(\cdot, u + v_n) - p(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} \|h\| \leq \epsilon, \quad \text{para } \|h\| \leq 1 \text{ e } \forall n \geq n_o,$$

o que implica

$$\|I'_3(u + v_n) - I'_3(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\substack{v \in H_o^1(\Omega) \\ \|h\| \leq 1}} |(I'_3(u + v_n) - I'_3(u))h| \leq \epsilon \quad \forall \quad n \geq n_o,$$

logo

$$\|I'_3(u + v_n) - I'_3(u)\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

donde concluímos que  $I'_3$  é contínua. Consequentemente,  $I_3 \in C^1(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$ , finalizando a demonstração da **Afirmção 3**.

Portanto, das **Afirmções 1-3**, concluímos que  $I \in C^1(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$ , consequentemente os funcionais definidos, nos **Capítulos 2 e 3** são também de classe  $C^1(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

# Apêndice C

## Resultados Importantes

Neste apêndice enunciaremos e demonstraremos alguns resultados importantes, utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho.

**Lema C.1** *Seja  $P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t)dt$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:*

$(\bar{\mathbf{H}}_1)$   $p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

$(\bar{\mathbf{H}}_2)$  *Existem constantes  $a_1, a_2 > 0$  tais que*

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } 0 \leq s < \frac{N+2}{N-2} \text{ e } N \geq 3;$$

$(\bar{\mathbf{H}}_3)$   $P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t)dt \rightarrow +\infty$ , quando  $|\xi| \rightarrow +\infty$  uniformemente para  $x \in \Omega$ .

Então,

$$\int_{\Omega} P(x, v)dx \rightarrow +\infty, \quad \text{quando } v \rightarrow +\infty, \quad \text{uniformemente para } v \in E^\circ, \quad (\text{C.1})$$

onde  $E^\circ = V_{\lambda_k}$ .

**Demonstração:** Considerando  $I_3(u) = \int_{\Omega} P(x, u)dx$ , com  $u \in E = H_0^1(\Omega)$ , segue-se que  $I_3 \in C^1(E, \mathbb{R})$  (**Ver Apêndice B**). Pela condição  $(\bar{\mathbf{H}}_3)$ , temos que dado  $K > 0$ , existe  $d_K = d(K)$ , tal que se  $|\xi| \geq d_K$  temos  $P(x, \xi) \geq K$ ,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ . Seja  $v \in E^\circ$  com  $v = t\varphi$ , onde  $\varphi \in \partial B_1 \subset E^\circ$ . Assim, considerando  $\Omega_K = \Omega_K(t\varphi) = \{x \in \Omega \mid P(x, t\varphi) \geq K\}$ , segue

$$\int_{\Omega} P(x, t\varphi)dx = \int_{\Omega_K} P(x, t\varphi)dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_K} P(x, t\varphi)dx \quad (\text{C.2})$$



**Afirmação 1:** Podemos definir  $\inf_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} P(x, \xi)$ .

De fato, analisando a condição  $(\bar{\mathbf{H}}_3)$  temos que  $P(x, \xi) \rightarrow +\infty$  quando  $|\xi| \rightarrow +\infty$  uniformemente em  $x \in \bar{\Omega}$ . Assim, dado  $K = 1$ , existe  $d_1$  tal que

$$|P(x, \xi)| \geq 1 \text{ para } |\xi| \geq d_1 \text{ e } \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (\text{C.3})$$

Por outro lado, existe  $M_1$  tal que

$$|P(x, \xi)| \leq M_1 \quad \forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times [-d_1, d_1],$$

o que implica

$$P(x, \xi) \geq -M_1, \quad \forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times [-d_1, d_1]. \quad (\text{C.4})$$

De (C.3) e (C.4), concluímos que

$$P(x, \xi) \geq \min \{1, -M_1\} = -M_1 \quad \forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R},$$

mostrando que a função  $P$  é limitada inferiormente em  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ , logo  $P$  possui ínfimo, finalizando a demonstração da **Afirmação 1**.

Sendo  $P(x, t\varphi) \geq \inf_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} P(x, \xi)$ , de (C.2), segue-se

$$\int_{\Omega} P(x, t\varphi) dx \geq \int_{\Omega_K} P(x, t\varphi) dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_K} \inf_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} P(x, \xi) dx,$$

logo

$$\int_{\Omega} P(x, t\varphi) dx \geq \int_{\Omega_K} P(x, t\varphi) dx - \int_{\Omega \setminus \Omega_K} \left| \inf_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} P(x, \xi) \right| dx,$$

o que implica

$$\int_{\Omega} P(x, t\varphi) dx \geq \int_{\Omega_K} P(x, t\varphi) dx - \left| \inf_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} P(x, \xi) \right| \int_{\Omega \setminus \Omega_K} dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} P(x, t\varphi) dx \geq \int_{\Omega_K} P(x, t\varphi) dx - \left| \inf_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} P(x, \xi) \right| |\Omega \setminus \Omega_K|,$$

onde estamos denotando  $|\Omega \setminus \Omega_K|$  a medida de Lebesgue de  $\Omega \setminus \Omega_K$ . Assim,

$$\int_{\Omega} P(x, t\varphi) dx \geq \int_{\Omega_K} P(x, t\varphi) dx - \left| \inf_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} P(x, \xi) \right| |\Omega|.$$

Considerando  $M_o \geq \left| \inf_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} P(x, \xi) \right| |\Omega|$ , tem-se

$$\int_{\Omega} P(x, t\varphi) dx \geq \int_{\Omega_K} P(x, t\varphi) dx - M_o. \quad (\text{C.5})$$

Observe agora, que sendo  $\varphi \in \partial B_1 \subset E^\circ$ , então  $\varphi \not\equiv 0$  e  $\varphi = \sum_{j=1}^s a_j^k v_j^k$ , onde cada  $v_j^k \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ , pois prova-se que as autofunções do problema

$$\begin{cases} -\Delta v^k = \lambda_k v^k, & \Omega \\ v^k = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

são de classe  $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ , logo  $\varphi$  é contínua. Portanto, existe  $x_o = x_o(\varphi)$  e  $r > 0$  tais que  $\varphi \neq 0$  em  $B_r(x_o)$ , ou seja,  $|\varphi(x)| > 0 \quad \forall x \in B_r(x_o)$ .

Considerando  $t_o > 0$ , tal que

$$d_K \leq t_o \inf_{x \in B_r(x_o)} |\varphi(x)|.$$

Assim,

$$d_K \leq t_o |\varphi(x)| \quad \forall x \in B_r(x_o),$$

o que implica

$$d_K \leq |t| |\varphi(x)| \quad \forall x \in B_r(x_o) \text{ e } |t| \geq t_o,$$

ou seja,

$$d_K \leq |t\varphi(x)| \quad \forall x \in B_r(x_o) \text{ e } |t| \geq t_o.$$

Pela condição  $(\bar{\mathbf{H}}_3)$ , tem-se

$$P(x, t\varphi) \geq K \quad \forall x \in B_r(x_o) \text{ e } |t| \geq t_o,$$

portanto  $B_r(x_o) \subset \Omega_K$ , para  $|t| \geq t_o$ . E mais, dado  $K > 0$ , existe  $t_o > 0$  tal que se  $|t| \geq t_o$  temos  $P(x, t\varphi) \geq K, \forall x \in B_r(x_o)$ , isto é,

$$P(x, t\varphi) \longrightarrow +\infty \text{ quando } |t| \rightarrow +\infty \text{ uniformemente em } B_r(x_o).$$

Agora sendo  $P(x, t\varphi) \geq K > 0$  e  $B_r(x_o) \subset \Omega_K$ , segue-se

$$\int_{\Omega_K} P(x, t\varphi) dx \geq \int_{B_r(x_o)} P(x, t\varphi) dx \geq K_1 > 0, \text{ para } |t| \geq t_o, \quad (\text{C.6})$$

logo

$$\int_{\Omega_K} P(x, t\varphi) dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } |t| \rightarrow +\infty, \text{ uniformemente.}$$

De (C.5), temos que

$$\int_{\Omega} P(x, t\varphi) dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } |t| \rightarrow +\infty, \text{ uniformemente em } \Omega. \quad (\text{C.7})$$

Sendo  $\partial B_1$  compacto, podemos fazer a seguinte afirmação:

**Afirmação 2:**  $\int_{\Omega} P(x, v) dx \longrightarrow +\infty$ , quando  $v \rightarrow +\infty$ , uniformemente para  $v \in E^\circ$ .

De fato, considere  $f(t, \varphi) = \int_{\Omega} P(x, t\varphi) dx$ . Suponha por contradição que  $f(t, \varphi) \not\rightarrow +\infty$ , quando  $v = t\varphi \rightarrow +\infty$  uniformemente em  $v \in E^\circ$ , isto é, existe  $M_o > 0$  e  $(t_n) \subset \mathbb{R}$  com  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $(\varphi_n) \subset \partial B_1$  tal que

$$f(t_n, \varphi_n) \leq M_o, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.8})$$

Sendo  $\partial B_1$  um compacto e  $(\varphi_n) \subset \partial B_1$  limitada, existe  $(\varphi_{n_j}) \subset (\varphi_n)$  tal que  $\varphi_{n_j} \rightarrow \varphi$  em  $\partial B_1$ .

Por outro lado, sendo  $\dim E^\circ < +\infty$ , as seguintes normas são equivalentes

$$\|\varphi\|_* = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\varphi(x)| \quad \text{e} \quad \|\varphi\| = \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, sendo  $\varphi \not\equiv 0$  e contínua, existe  $x_o = x_o(\varphi)$  e  $r_o > 0$  tais que  $|\varphi(x)| > 0$ , em  $B_{r_o}(x_o)$ , então existe  $\eta > 0$  tal que

$$|\varphi(x)| \geq \eta \quad \text{em } B_{r_o}(x_o),$$

o que implica

$$|\varphi_{n_j}(x)| \geq \frac{\eta}{2} \quad \text{em } B_{r_o}(x_o), \quad \forall n_j \geq n_o,$$

portanto

$$\|\varphi_{n_j}\|_* \geq \frac{\eta}{2} \quad \forall n_j \geq n_o,$$

de onde segue pela equivalência das normas

$$\|t_{n_j} \varphi_{n_j}\| = t_{n_j} \|\varphi_{n_j}\| \geq t_{n_j} \frac{\eta}{2C}, \quad \forall n_j \geq n_o,$$

logo

$$\|t_{n_j} \varphi_{n_j}\| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n_j \rightarrow +\infty.$$

Assim, pela condição  $(\overline{\mathbf{H}}_3)$

$$P(x, t_{n_j} \varphi_{n_j}) \longrightarrow +\infty, \text{ quando } n_j \rightarrow +\infty,$$

o que implica

$$f(t_{n_j}, \varphi_{n_j}) \longrightarrow +\infty, \text{ quando } n_j \rightarrow +\infty,$$

o que é um contradição por (C.8), portanto a **Afirmção 2** é verdadeira, finalizando a demonstração do **Lema C.1** . ■

**Proposição C.1** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^N$  e seja  $p$  satisfazendo*

$(\overline{\mathbf{H}}_1)$   $p(x, \xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  e

$(\overline{\mathbf{H}}_2)$  *Existem constantes  $a_1, a_2 > 0$  tais que*

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } 0 \leq s < \frac{N+2}{N-2} \text{ e } N \geq 3.$$

Considere  $I(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x, u) \right) dx$ , onde  $P(x, \xi) = \int_0^{\xi} p(x, t) dt$ . Se  $(u_n)$  é uma sequência limitada em  $E$  tal que  $I'(u_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , então  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente.

**Demonstração:** Seja  $I(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x, u) \right) dx$ , onde  $u \in E = H_0^1(\Omega)$  e  $P(x, \xi) = \int_0^{\xi} p(x, t) dt$  e  $p$  satisfaz  $(\overline{\mathbf{H}}_1)$  e  $(\overline{\mathbf{H}}_2)$ . Note que  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  (**Ver Apêndice B**) e

$$I'(u)\varphi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} p(x, u) \varphi dx, \quad \text{onde } I'(u) \in E'.$$

Sabendo que  $E = H_0^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert, temos  $I'(u)\varphi = \langle \nabla I(u), \varphi \rangle$   $\forall \varphi \in E$  e  $\|I'(u)\|_{E'} = \|\nabla I(u)\|$ . Considerando  $J'(u)\varphi = \int_{\Omega} p(x, u) \varphi dx$ , obtemos  $I'(u)\varphi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - J'(u)\varphi \forall u, \varphi \in E$ .

Usando novamente o Teorema da Representação de Riesz, para  $J'(u) \in E'$ , segue-se

$$J'(u)\varphi = \langle \nabla J(u), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in E \text{ e } \|J'(u)\|_{E'} = \|\nabla J(u)\|,$$

logo

$$\langle \nabla I(u), \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle - \langle \nabla J(u), \varphi \rangle,$$

o que implica

$$\langle \nabla I(u), \varphi \rangle = \langle u - \nabla J(u), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in E,$$

donde concluimos

$$\nabla I(u) = u - \nabla J(u).$$

Considerando  $T(u) = \nabla J(u)$ , onde  $T : E \rightarrow E$ , tem-se

$$\nabla I(u) = u - T(u).$$

**Afirmação 3:** O operador  $T : E \rightarrow E$  é compacto.

De fato, considere  $(u_n) \subset E$  uma sequência limitada. Devemos mostrar que  $T(u_{n_j}) \rightarrow T(u)$  em  $E$ . Sendo  $E$  reflexivo, então existe uma subsequência  $(u_{n_j}) \subset (u_n)$  tal que  $u_{n_j} \rightharpoonup u$  em  $E$ . Das imersões compacta de Sobolev, temos que

$$u_{n_j} \rightarrow u \text{ em } L^r(\Omega) \quad \forall \quad r \in [1, 2^*), \text{ onde } 2^* = \frac{2N}{N-2}. \quad (\text{C.9})$$

Agora, fixando  $r$  com  $s+1 \leq r < 2^*$  e considerando  $q$  o conjugado de  $r$ , isto é,  $q = \frac{r}{r-1}$ , vamos provar que  $p(\cdot, u_{n_j}(\cdot)) \rightarrow p(\cdot, u(\cdot))$  em  $L^q(\Omega)$ . De fato, segue de (C.9) que a menos de subsequência

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}, \text{ onde } g \in L^r(\Omega).$$

Desde que  $p$  satisfaz a condição  $(\overline{\mathbf{H}}_1)$ , temos

$$p(x, u_n(x)) \rightarrow p(x, u(x)), \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

e portanto

$$|p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} \rightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso,

$$|p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} \leq C \left[ |p(x, u_n(x))|^{r/s} + |p(x, u(x))|^{r/s} \right].$$

Pela condição  $(\overline{\mathbf{H}}_2)$ , obtemos

$$|p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} \leq C \left[ (a_1 + a_2 |u_n|^s)^{r/s} + (a_1 + a_2 |u|^s)^{r/s} \right],$$

de onde segue

$$|p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} \leq M_1 |u_n|^r + M_2 |u|^r + M_3.$$

Sendo  $(u_n)$  uma seqüência limitada em q.t.p. por  $g$ , tem-se

$$|p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} \leq (M_1 |g|^r + M_2 |u|^r + M_3) \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))|^{r/s} dx = 0,$$

o que implica

$$p(\cdot, u_n(\cdot)) \rightarrow p(\cdot, u(\cdot)) \text{ em } L^{r/s}(\Omega).$$

Sendo  $1 < q < \frac{r}{s}$  e  $\Omega$  limitado, obtemos

$$p(\cdot, u_n(\cdot)) \rightarrow p(\cdot, u(\cdot)) \text{ em } L^q(\Omega),$$

ou seja,

$$\|p(\cdot, u_n(\cdot)) - p(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \quad (\text{C.10})$$

Agora, note que

$$\|T(u_n) - T(u)\| = \|J'(u_n) - J'(u)\|_{E'} = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |(J'(u_n) - J'(u)) \varphi|.$$

Mas,

$$|(J'(u_n) - J'(u)) \varphi| \leq \int_{\Omega} |p(x, u_n(x)) - p(x, u(x))| |\varphi| dx.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$|(J'(u_n) - J'(u)) \varphi| \leq \|p(\cdot, u_n(\cdot)) - p(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \|\varphi\|_{L^r(\Omega)}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev, segue

$$|(J'(u_n) - J'(u)) \varphi| \leq C \|p(\cdot, u_n(\cdot)) - p(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \|\varphi\|.$$

Assim, para  $\|\varphi\| \leq 1$ , temos

$$|(J'(u_n) - J'(u)) \varphi| \leq C \|p(\cdot, u_n(\cdot)) - p(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)},$$

logo

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_{E'} \leq C \|p(\cdot, u_n(\cdot)) - p(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|T(u_n) - T(u)\| \leq C \|p(\cdot, u_n(\cdot)) - p(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}. \quad (\text{C.11})$$

De (C.10) e (C.11), obtemos que a menos de subsequência

$$\|T(u_n) - T(u)\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

mostrando que  $T$  é compacto.

Por outro lado, Tendo  $I'(u_n) \rightarrow 0$ , segue que  $\|I'(u_n)\|_{E'} \rightarrow 0$ . Mas,  $\|I'(u_n)\|_{E'} = \|\nabla I(u_n)\|$ , logo  $\|\nabla I(u_n)\| \rightarrow 0$ , o que implica,  $\nabla I(u_n) \rightarrow 0$ . Assim, sendo  $\nabla I(u_n) = u_n - T(u_n)$ , tem-se  $u_n = \nabla I(u_n) + T(u_n)$ . Portanto, a menos de subsequência, temos  $u_n \rightarrow T(u)$  em  $E$ , isto é, existe uma subsequência  $(u_{n_j}) \subset (u_n)$  convergente, de onde segue a demonstração da **Proposição C.1**. ■

# Apêndice D

## Teoria do Grau

Neste apêndice, recordamos a definição de Teoria do Grau de Brouwer e a do Grau de Leray-Schauder e suas propriedades, tendo como referência o livro do Costa [4].

Seja  $\phi \in C(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  onde  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto limitado. Dado  $b \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial U)$  o problema consiste em resolver a equação

$$\phi(x) = b, \tag{D.1}$$

em  $U$ . Isto pode ser feito em certos casos usando-se o chamado Grau de Brouwer da aplicação  $\phi$  (relativo a  $U$  no ponto  $b$ ),  $d(\phi, U, b)$ , o qual é um inteiro que garante a existência (e algumas vezes a multiplicidade) de soluções do Problema (D.1).

Inicialmente, consideraremos o caso regular, no qual  $\phi \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial U)$  é um valor regular de  $\phi$ , isto é,  $\phi'(\xi)$  é inversível qualquer que seja  $\xi \in \phi^{-1}(b)$  e definimos

$$d(\phi, U, b) = \sum_{\xi \in \phi^{-1}(b)} \text{sgn}(\det(\phi'(\xi))),$$

onde

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

**Afirmção:** O conjunto  $\phi^{-1}(b)$  é finito.

De fato, observe primeiramente que  $\phi^{-1}(b)$  é fechado e limitado em  $\mathbb{R}^n$ . Logo,



$\phi^{-1}(b)$  é compacto . Para cada  $\xi \in \phi^{-1}(b)$  considere a bola

$$B_{r_\xi}(\xi) \subset U_\xi.$$

Assim,

$$\phi^{-1}(b) \subseteq \bigcup_{\xi \in \phi^{-1}(b)} B_{r_\xi}(\xi)$$

e pelo Teorema de Borel-Lebesgue, obtemos

$$\phi^{-1}(b) \subseteq B_{r_{\xi_1}}(\xi_1) \cup B_{r_{\xi_2}}(\xi_2) \cup \dots \cup B_{r_{\xi_p}}(\xi_p).$$

Então, desde que  $B_{r_{\xi_i}}(\xi_i) \cap \phi^{-1}(b) = \{\xi_i\}$  para cada  $i = 1, 2, \dots, p$ , com  $p \in \mathbb{N}$ , temos que  $\phi^{-1}(b)$  é finito. ■

A função  $d(\phi, U, b)$  tem as seguintes propriedades:

(i) (Normalização) Se  $Id : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é a aplicação identidade, então

$$d(Id, U, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in U \\ 0, & \text{se } b \notin U \end{cases}$$

(ii) (Existência) Se  $d(\phi, U, b) \neq 0$ , então existe  $x_0 \in U$  tal que  $\phi(x_0) = b$ .

(iii) (Aditividade) Se  $U = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  e  $b \notin \phi(\partial U_1) \cup \phi(\partial U_2)$ , então  $d(\phi, U, b) = d(\phi, U_1, b) + d(\phi, U_2, b)$ .

(iv) (Continuidade) Se  $\psi$  está próxima de  $\phi$ , então  $d(\phi, U, b) = d(\psi, U, b)$ .

(v) (Invariância por homotopia) Se  $H \in C^1([0, 1] \times U, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin H([0, 1] \times \partial U)$ , então  $d(H(t, \cdot), U, b) = \text{constante } \forall t \in [0, 1]$ .

(vi) (Dependência na fronteira ) Se  $\psi \equiv \phi$  em  $\partial U$ , então  $d(\phi, U, b) = d(\psi, U, b)$ .

**Observação:** Se  $b \notin \phi(\bar{\Omega})$ , então  $d(\phi, U, b) = 0$ .

A definição de  $d(\phi, U, b)$  pode ser estendida a uma aplicação geral  $\phi \in C(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial U)$  através dos seguintes passos:

(a) Dada  $\phi \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial U)$ , não necessariamente um valor regular, o Teorema de Sard implica a existência de uma sequência  $b_k \rightarrow b$  onde cada  $b_k$  é um valor regular, define-se então  $d(\phi, U, b)$  mostrando-se que o limite abaixo existe e é independente da escolha de  $(b_k)$ :

$$d(\phi, U, b) = \lim_{k \rightarrow +\infty} d(\phi, U, b_k).$$

(b) Dada  $\phi \in C(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial U)$ , consideremos uma sequência  $\phi_k \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\phi_k \rightarrow \phi$  em  $C(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$  e definimos  $d(\phi, U, b)$  mostrando que o limite abaixo existe e é independente da escolha de  $(\phi_k)$ :

$$d(\phi, U, b) = \lim_{k \rightarrow +\infty} d(\phi_k, U, b).$$

Finalmente, segue-se que o grau assim definido ainda satisfaz as propriedades **(i)**-**(vi)**. Entretanto, devemos mencionar que existe também uma teoria do grau no caso de dimensão infinita, devido a Leray e Schauder, a qual lida com aplicações  $\phi \in C(\bar{U}, X)$ , onde  $U \subset X$  é um conjunto aberto e limitado de um espaço de Banach  $X$  e  $\phi$  é da forma  $\phi(u) = u - T(u)$  com  $T$  uma aplicação compacta. O grau correspondente de Leray-Schauder também satisfaz as propriedades **(i)**-**(vi)**.

# Bibliografia

- [1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] BARTLE, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley, 1995.
- [3] BRÉZIS, Haim, *Analyse fonctionnelle*. 2<sup>a</sup> ed. MASSON, 1987.
- [4] COSTA, David Goldstein, *Tópicos em Análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais*. CNPq-IMPA, 1986.
- [5] CAVALCANTE, Luíz Paulo de Lacerda, *Existência de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos não lineares em domínio não limitados*. Dissertação de Mestrado. UFCG, 2004.
- [6] KREYSZING, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1989. *Mech. Anal.*, 46, 82-95 (1981).
- [7] LIMA, E. L., *Curso de Análise*. Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [8] LIMA, E. L., *Curso de Análise*. Vol. 2 (6<sup>a</sup> Edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- [9] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, CNPq-IMPA, 1977.
- [10] LANG, *Analysis II*. Addison-Wesley, 1969.
- [11] RABINOWITZ, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. American Mathematical Society, 1988.
- [12] SOTOMAYOR, Jorge, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, 1979.

- [13] WILLEM, Michel, *Lectures on Critical Point Theory*. Trabalho de Matemática 199, UnB, Brasilia, 1983.