Resumo

Neste trabalho, mostramos a existência de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x,u), \quad \Omega, \\ u = & 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

conhecido como um problema de Dirichlet não-linear.
As principais ferramentas são os Teoremas de Deformação, Passo da Montanha e os Métodos de Mínimização.

Abstract

In this work, we show the existence of solutions for the following problem

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x,u), \quad \Omega, \\ u = & 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

known how the nonlinear Dirichlet of problem.

The main tools used are the Deformation, Mountain Pass Theorems and the Minimization of Methods.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Condições do tipo Ambrosetti-Rabinowitz

por

Luciano dos Santos Ferreira[1]

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Abril/2006

[1]O autor foi bosilta do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Condições do tipo Ambrosetti-Rabinowitz

por

Luciano dos Santos Ferreira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira-UFJF

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves-UFCG

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho-UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2006

Agradecimentos

A Deus, Louvarei ao SENHOR em todo o tempo; o seu louvor estará continuamente na minha boca. Busquei ao SENHOR, e ele me respondeu; livro-me de todos os meus temores. Clamou este pobre, e o SENHOR o ouviu; e o salvou de todas as suas angústias. O anjo do SENHOR acampa-se ao redor dos que o temem, e os livra. Provai e vede que o SENHOR é bom; bem-aventurado o homem que nele confia. Os olhos do SENHOR estão sobre os justos; e os seus ouvidos, atentos ao seu clamor. Muitas são as aflições do justo, mas o SENHOR o livra de todas. (Salmo 34)

A meus familiares, por sempre estarem ao meu lado durante essa caminhada dando-me força, auxiliando-me e fortalecendo-me nos momentos mais importante da minha vida.

Ao Prof. Daniel Cordeiro por ter acreditado em mim, pela dedicação, atenção e principalmente pela sua excelente orientação que muito contribuiram a concluir mais uma etapa de minha vida. Que Deus continue lhe abençoando.

À todos os professores do DME/UFCG, entre eles, os professores Claudianor Alves, Marco Aurélio, Vânio e Braúlio Maia, pelo inestimável apoio recebido durante minha trajetória como aluno desta Instituição.

À todos os funcionários do DME/UFCG, entre eles destaco, Dona Argentina, Salete, Valdir e Marcelino, pelos quais fui bem atendido quando os solicitei.

Aos colegas de mestrado Cícero, Jesualdo, Moisés, Jacqueline e Romero pela amizade e companheirismo.

Por fim, agradeço a todos que, de forma direta ou indiretamente, contribuiram para realização deste trabalho.

Dedicatória

A Deus, pelo seu imerso amor, a Jesus Cristo, o meu Salvador e ao Espírito Santo de Deus, que me ajudou nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Elisio e Maria do Socorro, a meus irmãos, Lucinaldo, Luciana, Luciene e Lucilene e a minha sobrinha Laís, fontes de apoio e estímulo que contribuiram para a minha educação.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência de solução fraca para um problema de Dirichlet não-linear

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x,u), \quad \Omega, \\ \quad u = & 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função carathéodory, isto é, que verifica

[8] $f(x, \cdot)$ é contínua q.t.p $x \in \Omega$

[9] $f(\cdot, t)$ é mensurável.

Sabe-se que encontrar soluções fracas para o problema acima, equivale a encontrar pontos críticos do funcional energia $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - F(x,u))dx,$$

onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz$.

Nesta dissertação vamos utilizar os métodos variacionais para determinar soluções fracas para o problema (1). Mostramos a existência de solução não-nula para o problema (1) segundo os trabalhos de Ambrosetti-Rabinowitz [2] e Martin-Zou [20].

No **Capítulo 1,** estudamos regularização da solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = & \alpha(x)u, \quad \Omega, \\ \quad u = & 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{2,\mu}$, $0 < \mu < 1$ e $\alpha \in L^\infty(\Omega)$.

Dando continuidade, provamos duas versões do Teorema de Deformação segundo os trabalhos de Costa [5], Rabinowitz [18] e Willem [21], que serão ferramentas importantes na demonstração de duas versões do Teorema do Passo da Montanha. Nos capítulos posteriores, vemos que quando um funcional satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, encontramos um ponto crítico para este funcional, e portanto, a solução do problema elíptico ao qual ele está associado. Na seção final do capítulo 1, provamos dois resultados referentes ao estudo do funcional semicontínuo inferiormente.

No **Capítulo 2,** mostramos a existência de solução não-nula para o problema (1). Consideramos as seguintes hipóteses sobre f :

[**2.1**] Existem constantes $c_1, c_2 \geq 0$ tais que

$$|f(x,t)| \leq c_1 + c_2 \, |t|^s \,, \ \ \forall \ \ x \in \overline{\Omega} \ \text{ e } \ t \in \mathbb{R},$$

onde $0 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, ou $s > 1$, se $N = 2$;

[**2.2**] $f(x,t) = o(|t|)$ quando $t \to 0$, $\forall \ x \in \overline{\Omega}$;

[**2.3**] Existem constantes $\mu > 2$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t), \ \ \forall \ \ x \in \overline{\Omega}, \ \ |t| \geq r, \ \ F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz.$$

Observe que a hipótese [**2.3**] é conhecida como a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Usando essas hipóteses, mostramos a existência de uma solução não-nula para o problema (1) via Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz.

No **Capítulo 3,** na primeira seção mostramos a existência de solução não-nula para o problema (1) com as seguintes hipóteses sobre f :

[**3.1**] A função $f(x,t)$ satisfaz

$$|f(x,t)| \leq |t|^s + 1,$$

onde $1 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, ou $s > 1$, se $N = 2$;

[**3.2**] $f(x,t) = o(|t|^s)$ quando $|t| \to +\infty$, $\forall \ x \in \Omega$;

[**3.3**] Existem $\delta > 0$ e um $\lambda < \lambda_1$ tais que

$$2F(x,t) \leq \lambda t^2, \ \ |t| \leq \delta, \ \ x \in \Omega,$$

onde λ_1 é o autovalor associado a autofunção φ_1 para o operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz;$$

[**3**.**4**] Existe uma função $W \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ tal que

$$W(x) \leq \frac{F(x,t)}{t^2} \longrightarrow \infty \text{ quando } t \to \infty, \ \ x \in \Omega$$

ou

$$W(x) \leq \frac{F(x,t)}{t^2} \longrightarrow \infty \text{ quando } t \to -\infty, \ \ x \in \Omega;$$

[**3**.**5**] Existem constantes $\mu > 2$, $C \geq 0$ tais que

$$[\mu F(x,t) - tf(x,t)] \leq C(t^2+1), \ \ t \in \mathbb{R}, \ \ x \in \Omega.$$

O método utilizado aqui, consiste em aplicar um teorema devido a Willem [21], denominado Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale.
Observamos que a diferença do **Capítulo 2** para a primeira seção do **Capítulo 3,** refere-se às hipóteses sobre a não-linearidade. Substituimos a condição [**2**.**2**] por [**3**.**2**], e acrescentamos as hipóteses [**3**.**3**] e [**3**.**4**]. É importante notar que a hipótese [**3**.**5**] é uma condição de Ambrosetti-Rabinowitz mais geral do que a anterior, dada por [**2**.**3**].
A hipótese [**3**.**5**] garante que

$$(\mu F(x,t) - tf(x,t))$$

pode assumir valores positivos, nulos e negativos, enquanto que, por [**2**.**3**], o mesmo termo é menor ou igual a zero.

Finalmente, na última seção consideramos o problema não-linear (1) com as seguintes hipóteses sobre f :
[**3**.**1**] A função $f(x,t)$ satisfaz

$$|f(x,t)| \leq |t|^s + 1,$$

onde $1 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, ou $s > 1$, se $N = 2$;
[**3**.**2**] $f(x,t) = o(|t|^s)$ quando $|t| \to +\infty$, $\forall \ x \in \Omega$;
[**3**.**6**] Existem um $\delta > 0$ e um $\tilde{\lambda} > \lambda_1$ tal que

$$2F(x,t) \geq \tilde{\lambda} t^2, \ \ |t| \leq \delta, \ \ x \in \Omega$$

e

[**3**.**7**] Existem uma função $W \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ tal que

$$W(x) \geq P(x,t) \longrightarrow -\infty \text{ quando } |t| \to +\infty, \ \ x \in \Omega$$

onde

$$P(x,t) = F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 t^2;$$

[**3**.**8**] Seja

$$\lim_{|t|\to\infty} \sup \frac{2F(x,t)}{t^2} \leq \alpha(x) \leq \lambda_1,$$

uniformemente em $x \in \Omega$, onde $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e $0 < \alpha(x) < \lambda_1$ sobre um conjunto de medida positiva.

Nestas condições, usando Métodos de Mínimização mostramos a existência de uma solução não-nula para o problema (1).

Finalmente, nos Apêndices são encontrados os principais resultados utilizados nos capítulos anteriores.

No apêndice A fazemos uma descrição do espectro para o operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ no caso do problema homogêneo de Dirichlet, em seguida, estudamos algumas propriedades dos autovalores do Laplaciano.

No apêndice B, há vários resultados de Análise Funcional, Teoria da Medida e de Equações Diferenciáveis Parciais são apresentados sem demonstração, mas com as referências onde podem ser encontrados.

Notações

Vamos fixar algumas notações que usaremos no decorrer do nosso trabalho.

Seja $1 \leq p < \infty$. *Consideraremos* $L^p(\Omega)$ *como o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis* u, *definidas em* Ω, *tais que*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty,$$

com norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ *dada por*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Para o caso particular, $p = 2$, esse espaço é de Hilbert, com produto escalar dado por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \;\; \forall \;\; u, v \in L^2(\Omega).$$

Consideraremos $L^{\infty}(\Omega)$ *como o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em* Ω. *Ou seja,*

$$f \in L^{\infty}(\Omega) \Longleftrightarrow \ \ existe \ \ C > 0 \ \ tal \ \ que \ \ |f(x)| \leq C \ \ q.s \ \ em \ \ \Omega,$$

com norma $\|\cdot\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ *dada por*

$$\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \inf\left\{C; \ \ |f(x)| \leq C \ \ q.t.p \ \ em \ \ \Omega\right\}.$$

Seja $m \in \mathbb{N}$. *Representamos por* $W^{m,p}(\Omega)$ *os espaços de Sobolev, munido com a norma*

$$\|u\|_{m,p;\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^{p}\, dx + \sum_{1 \leq |j| \leq m} \int_{\Omega} \left|D^{j}u\right|^{p} dx\right)^{1/p},$$

onde $j = (j_1, j_2, \cdots, j_N) \in \mathbb{N}^N$, $\ |j| = \sum_{r=1}^{N} j_r$ *e* $D^j = \dfrac{\partial^{|j|}}{\partial_{x_1}^{j_1} \cdots \partial_{x_N}^{j_N}}$ *é o operador derivada fraca.*

Quando $p = 2$, para simplificar a notação, denotaremos estes espaços de Sobolev por $H^m(\Omega)$ com norma

$$\|u\|_{m,2;\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^{2}\, dx + \sum_{1 \leq |j| \leq m} \int_{\Omega} \left|D^{j}u\right|^{2} dx\right)^{1/2}.$$

Já por $H_0^1(\Omega)$ representamos o espaço $W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,2;\Omega}}$ com norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

induzida pelo produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \ \ \forall \ \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$, *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$, *com norma* $\|\cdot\|_{-m,q;\Omega}$ *dada por*

$$\left\|J'\right\|_{-m,q;\Omega} = \sup_{\|\varphi\|_{m,q;\Omega} \leq 1} \left|\left\langle J', \varphi\right\rangle\right|.$$

Dizemos que uma função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *é Hölder contínua de expoente* μ, $\ 0 < \mu \leq 1$, *se*

$$H_{\mu}[u] = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\mu}} < +\infty.$$

Seja k um inteiro. Designamos por $C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ o espaço das funções reais cujas derivadas possuem extensões contínuas em $\overline{\Omega}$ até a ordem k e suas k-ésimas derivadas são uniformente Hölder contínuas em $\overline{\Omega}$, com expoente de Hölder μ, $0 < \mu \leq 1$. Esses espaços são munidos com as normas

$$\|u\|_{k,\mu} = \sum_{|j| \leq k} \left\| D^j u \right\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{|j|=k} H_\mu \left[D^j u \right].$$

Dizemos que Ω é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{2,\mu}(\Omega)$, se para todo $x \in \Gamma$ existe uma vizinhança U de x no $\mathbb{R}^N$ e uma aplicação $H : Q \to U$ bijetiva tais que

$$H \in C^{2,\mu}(\overline{Q}), \;\; H^{-1} \in C^{2,\mu}(\overline{U}), \;\; H(Q_+) = U \cap \Omega \;\; e \;\; H(Q_0) = U \cap \Gamma,$$

onde

$\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x^*, x_N); x_N > 0\}$,

$Q = \{x = (x^*, x_N); |x^*| < 1 \;\; e \;\; |x_N| < 1\}$

$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^N_+$

$Q_0 = \{x = (x^*, x_N); |x^*| < 1 \;\; e \;\; x_N = 0\}$.

Denotaremos por $C, C_1, C_2, \cdots, K, K_1, K_2, \cdots, M$, constantes reais positivas.

Capítulo 1

Reguralização, Teoremas do Passo da Montanha e Funcional s.c.i

Neste capítulo iremos demonstrar um resultado de Regularidade e duas versões do Teorema do Passo da Montanha segundo os trabalhos de Ambrosetti-Rabinowitz [2] e Willem [21].

Finalmente vamos demonstrar alguns teoremas envolvendo o funcional s.c.i que serão usados no decorrer do nosso trabalho.

1.1 Reguralização

Nesta seção vamos demonstrar um resultado de regularidade, que será de grande utilidade mais adiante.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = & \alpha(x)u, & \Omega, \\ u = & 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{2,\mu}(\Omega)$, $0 < \mu < 1$ e $\alpha \in L^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1 *Uma solução fraca para o problema (1.1) é uma função* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que* *verifica*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \alpha(x) u v dx, \ \ \forall \ \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Usando a teoria dos espaços $L^p(\Omega)$, a teoria de Schauder das equações elípticas e as imersões de Sobolev, conseguimos obter o resultado de reguralização que segue:

Teorema 1.1 *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema (1.1), então*

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}) \ \ se \ \ \alpha \in L^{\infty}(\Omega).$$

Além disso, se $\alpha u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, temos $u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$.

Demonstração:

Parte I:

Inicialmente vamos mostrar o resultado para $N > 2$.

Como, $1 < \dfrac{N}{2}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, segue-se dos Teoremas de Imersão (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), que $u \in L^{2^*}(\Omega)$. Logo $\alpha u \in L^{2^*}(\Omega)$, pois $\alpha \in L^{\infty}(\Omega)$.

Seja $1 < \sigma < 2^* - 1$. Como $\dfrac{2^*}{\sigma} < 2^*$, tem-se (Ver Teorema B.19, Apêndice B)

$$L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega).$$

Portanto, escrevendo $p_1 = \dfrac{2^*}{\sigma}$, temos

$$\alpha u \in L^{p_1}(\Omega).$$

Consequentemente (Ver Teorema B.20, Apêndice B)

$$u \in W^{2,p_1}(\Omega).$$

1^o **Passo:**

Analisaremos os seguintes casos:

1^o **Caso:** $N - 2p_1 < 0 \quad \left(\dfrac{N}{p_1} < 2\right)$

Como

$$u \in W^{2,p_1}(\Omega),$$

resulta das imersões compacta (Ver Teorema B.16, item iii Apêndice B), que

$$u \in C^0(\overline{\Omega}).$$

Donde concluimos que

$$u \in L^r(\Omega), \ \ \forall \ r \geq 1.$$

Logo,

$$\alpha u \in L^r(\Omega), \ \ \text{pois} \ \ \alpha \in L^\infty(\Omega).$$

Como $\dfrac{r}{\sigma} < r$, então (Ver Teorema B.19, Apêndice B)

$$L^r(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{r}{\sigma}}(\Omega), \ \ \text{para} \ \ r > \sigma.$$

Portanto,

$$\alpha u \in L^{\frac{r}{\sigma}}(\Omega) \ \ \text{com} \ \ r > \sigma.$$

Consequentemente (Ver Teorema B.20, Apêndice B)

$$u \in W^{2,\frac{r}{\sigma}}(\Omega), \ \ \text{com} \ \ r > \sigma.$$

É possível escolher $\dfrac{r_0}{\sigma}$ tal que $0 < \dfrac{N}{r_0/\sigma} < 1$. Portanto da imersão de Sobolev (Ver Teorema B.15, item iv Apêndice B), temos

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \ \ \text{com} \ \ 0 < \mu < 1 - \frac{N}{r_0/\sigma}.$$

2^o **Caso:** $N - 2p_1 = 0 \ \ \left(\dfrac{N}{p_1} = 2\right)$

Desde que $u \in W^{2,p_1}(\Omega), \ \ p_1 = \dfrac{2^*}{\sigma}$ temos, pela imersão de Sobolev (Ver Teorema B.15, item ii Apêndice B), que

$$u \in L^q(\Omega), \ \ \text{com} \ \ p_1 \leq q < +\infty.$$

Donde concluímos

$$\alpha u \in L^q(\Omega), \ \ \text{pois} \ \ \alpha \in L^\infty(\Omega).$$

Consequentemente (Ver Teorema B.20, Apêndice B)

$$u \in W^{2,q}(\Omega), \ \ \text{com} \ \ p_1 \leq q < +\infty.$$

Daí, é possivel escolher q_0 de modo que $0 < \dfrac{N}{q_0} < 1$, e portanto, como no caso anterior,

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \ \ \text{com} \ \ 0 < \mu < 1 - \frac{N}{q_0}.$$

3^o **Caso:** $N - 2p_1 > 0 \quad \left(\dfrac{N}{p_1} > 2\right)$

Uma vez que $u \in W^{2,p_1}(\Omega)$ e $\dfrac{N}{p_1} > 2$, temos pela imersão de Sobolev (Ver Teorema B.15, item i Apêndice B), que

$$u \in L^t(\Omega), \quad \text{para} \;\; p_1 \leq t \leq \frac{Np_1}{N - 2p_1} = p_1^*.$$

Em particular,

$$u \in L^{p_1^*}(\Omega) \Rightarrow \alpha u \in L^{p_1^*}(\Omega), \quad \text{pois} \;\; \alpha \in L^\infty(\Omega).$$

Como $\dfrac{p_1^*}{\sigma} < p_1^*$, usando a imersão contínua (Ver Teorema B.19, Apêndice B), obtemos

$$\alpha u \in L^{\frac{p_1^*}{\sigma}}(\Omega), \quad \text{com} \;\; p_1^* > \sigma.$$

Logo (Ver Teorema B.20, Apêndice B),

$$u \in W^{2,p_2}(\Omega), \quad \text{onde} \;\; p_2 = \frac{p_1^*}{\sigma}.$$

Agora observemos que:

- $p_1 > 1$.

  De fato,
  $$p_1 = \frac{2^*}{\sigma} > \left(\frac{2N}{N-2}\right) \cdot \left(\frac{N-2}{N+2}\right) > 1, \quad \text{se} \;\; N > 2.$$

- $\dfrac{p_2}{p_1} > 1$.

  De fato,
  $$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1^*}{\sigma} . \frac{\sigma}{2^*} = \frac{p_1^*}{2^*} = \left(\frac{p_1 N}{N - 2p_1}\right) . \frac{N-2}{2N} > 1,$$

pois, por meio de alguns cálculos, chegamos que a desigualdade anterior é equivalente a $\sigma < 2^* - 1$. Assim, podemos escolher $A_0 > 1$ tal que

$$p_1 > A_0 > 1 \;\; \text{e} \;\; \frac{p_2}{p_1} > A_0. \tag{1.2}$$

Consequentemente,

$$p_2 > p_1 . A_0 > A_0^2. \tag{1.3}$$

2^o **Passo:**

Recordando que $u \in W^{2,p_2}(\Omega)$, onde $p_2 = \dfrac{p_1^*}{\sigma}$, vamos considerar, nesta segunda etapa, os seguintes casos:

1^o **Caso:** $N - 2p_2 < 0 \quad \left(\dfrac{N}{p_2} < 2\right)$

De modo inteiramente análogo ao 1^o Caso do passo anterior, obtemos que

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \ \text{ com } \ 0 < \mu < 1 - \frac{N}{t_0/\sigma},$$

para algum $t_0 \in \mathbb{R}^+$.

2^o **Caso:** $N - 2p_2 = 0 \quad \left(\dfrac{N}{p_2} = 2\right)$

Semelhantemente ao 2^o Caso do passo anterior, temos

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \ \text{ com } \ 0 < \mu < 1 - \frac{N}{b_0},$$

para algum $b_0 \in \mathbb{R}^+$.

3^o **Caso:** $N - 2p_2 > 0 \quad \left(\dfrac{N}{p_2} > 2\right)$

Desde que $u \in W^{2,p_2}(\Omega)$ e $\dfrac{N}{p_2} > 2$, temos pela imersão de Sobolev (Ver Teorema B.15, item i Apêndice B), que

$$u \in L^{p_2^*}(\Omega), \ \text{ onde } \ p_2^* = \frac{Np_2}{N - 2p_2}.$$

Daí,

$$\alpha u \in L^{p_2^*}(\Omega).$$

Usando a imersão contínua (Ver Teorema B.19, Apêndice B), com $\dfrac{p_2^*}{\sigma} < p_2^*$, temos

$$\alpha u \in L^{p_3}(\Omega), \ \text{ onde } \ p_3 = \frac{p_2^*}{\sigma}.$$

Logo (Ver Teorema B.20, Apêndice B),

$$u \in W^{2,p_3}(\Omega).$$

Agora, provaremos que

- $\dfrac{p_3}{p_2} > \dfrac{p_2}{p_1}$.

De fato,

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2^*}{\sigma}.\frac{\sigma}{p_1^*} = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \left(\frac{Np_2}{N - 2p_2}\right) . \left(\frac{N - 2p_1}{Np_1}\right) = \frac{p_2}{p_1}. \left(\frac{N - 2p_1}{N - 2p_2}\right) > \frac{p_2}{p_1},$$

se, e somente se,

$$\frac{N-2p_1}{N-2p_2} > 1,$$

ou equivalentemente,

$$p_2 > p_1.$$

Portanto, mostramos que

$$\frac{p_3}{p_2} > \frac{p_2}{p_1},$$

e usando (1.2) e (1.3), obtemos

$$p_3 > A_o^3.$$

Se não cairmos nos primeiro e segundo casos, continuando com este processo, encontraremos uma seqüência de números reais $\{p_j\}$ tal que

$$A_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_j < p_{j+1} < \cdots ,$$

$$A_0 < \frac{p_2}{p_1} < \frac{p_3}{p_2} < \frac{p_4}{p_3} < \cdots < \frac{p_{j+1}}{p_j} < \cdots$$

e

$$p_j > A_0^j.$$

Uma vez que $A_0 > 1$, segue-se que

$$p_j \longrightarrow +\infty \;\text{ quando }\; j \longrightarrow +\infty.$$

Daí, podemos escolher p_0 tal que $0 < \dfrac{N}{p_0} < 1$ e consequentemente pela imersão de Sobolev (Ver Teorema B.15, item iv Apêndice B), em um dos passos do 3^o Caso, resultará que

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \;\text{ com }\; 0 < \mu < 1 - \frac{N}{p_0}.$$

Para mostrar o caso $N = 2$, procederemos de maneira análoga ao caso em que $N > 2$, fazendo apenas algumas modificações que elencaremos abaixo: Primeiramente, substituimos a imersão contínua $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q = 2^*$ (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), pela imersão $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $1 \leq q < \infty$ (Ver Teorema B.14, item ii Apêndice B). Em seguida, aplica-se o Teorema B.20 (Ver Apêndice B) e finalmente, usa-se a imersão $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\mu}(\overline{\Omega})$ (Ver Teorema B.15, item iv Apêndice B).

Parte II:

Agora, supondo que $f \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, segue-se que f é lipschitziana, isto é, existe $C > 0$ tal que $x, y \in \overline{\Omega}$ implica,

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|\,.$$

Considerando $x, y \in \overline{\Omega}$, com $x \neq y$ e $0 < \mu < 1$, temos

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\mu}} \leq C\frac{|x - y|}{|x - y|^{\mu}} \leq C\,|x - y|^{1-\mu}\,, \ \ \forall \ \ x, y \in \overline{\Omega}, \ \ \text{com} \ \ x \neq y.$$

Logo,

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\mu}} \leq C \sup_{x \neq y} |x - y|^{1-\mu}\,,$$

o que implica

$$H_{\mu}\,[f(\cdot)] \leq C\left(\sup_{x \neq y} |x - y|\right)^{1-\mu},$$

donde segue-se que

$$H_{\mu}\,[f(\cdot)] \leq C\left[\left(diam(\overline{\Omega})\right)^{1-\mu}\right] < \infty$$

desde que Ω seja limitado.

Portanto,

$$f \in C^{\mu}(\overline{\Omega}), \ \ \text{com} \ \ 0 < \mu < 1.$$

Daí (Ver Teorema B.18, Apêndice B), resulta que o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = & f(x), \quad \Omega, \\ \quad\ \ v = & 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução $v \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$.

Em particular para $f = \alpha u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, temos o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = & \alpha u, \quad \Omega, \\ \quad\ \ v = & 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução $v \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$. Assim, u e v são soluções fracas do problema (1.1), isto é,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \alpha(x) u(x) dx, \ \ \forall \ \ \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \alpha(x) u(x) dx, \ \ \forall \ \ \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega \nabla(v-u)\nabla\varphi dx = 0, \ \ \forall \ \ \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

o que implica

$$u = v \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega)$$

e assim,

$$u = v \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Por outro lado, uma vez que as funções u e v são contínuas em Ω resulta

$$u \equiv v \ \text{ em } \ \Omega.$$

E portanto,

$$u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega}), \ \ 0 < \mu < 1.$$

■

1.2 Teorema de Deformação

Nesta seção vamos demonstrar duas versões do Teorema de Deformação que serão fundamentais para as demonstrações dos Teoremas do Passo da Montanha.

Definição 1.2 *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de Φ se existe $u \in X$ com $\Phi'(u) = 0$ e $\Phi(u) = c$.*

Denotaremos por Φ^c o conjunto de todas os pontos em níveis menores do que ou iguais a c, isto é,

$$\Phi^c = \{u \in X; \Phi(u) \leq c\}.$$

Definição 1.3 *Seja X um espaço de Banach, um campo pseudo - gradiente para $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ é uma aplicação localmente Lipschitziana*[1] *$V : Y \to X$, onde*

$$Y = \left\{u \in X; \Phi'(u) \neq 0\right\}$$

[1]Sejam X, Y espaços de Banach. Uma aplicação é dita localmente Lipschitziana, se para cada ponto $u \in X$ existem uma constante $K > 0$ e uma vizinhança V de u tais que

$$\|f(u) - f(v)\| \leq K\|u - v\|, \ \ \forall \ \ u, v \in V.$$

tal que, para cada $u \in Y$,

$$\|V(u)\|_X \leq 2 \left\|\Phi'(u)\right\|_{X'} \tag{1.4}$$

$$\Phi'(u)V(u) \geq \left\|\Phi'(u)\right\|_{X'}^2 . \tag{1.5}$$

Definição 1.4 *Seja* X *um espaço de Banach,* $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. *O funcional* Φ *satisfaz a condição de Palais-Smale-(PS) se qualquer seqüência* $\{u_n\} \subset X$ *tal que*

$$|\Phi(u_n)| \leq const \;\; e \;\; \Phi'(u_n) \to 0 \;\; em \;\; X'$$

possui uma subseqüência convergente.

Teorema 1.2 (Teorema de Deformação)
Suponha que $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfaz a condição Palais-Smale. Se* $c \in \mathbb{R}$ *não é um valor crítico de* Φ *então, para todo* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existe* $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ *tal que para qualquer* $u \in X$ *e* $t \in [0,1]$ *tem-se:*
(1) $\eta(t,u) = u$ *se* $u \notin \Phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
(2) $\eta(1, \Phi^{c+\epsilon}) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

Demonstração: Como $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de Φ, devem existir constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que $u \in \Phi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha])$ implique $\left\|\Phi'(u)\right\|_{X'} \geq \beta$, pois caso contrário, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$ existirá

$$u^* \in \Phi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha]),$$

com

$$\left\|\Phi'(u^*)\right\|_{X'} < \beta.$$

Considerando $\alpha = \dfrac{1}{2n}$, $\beta = \dfrac{1}{n}$ e $u_n = u_n^*$, tem-se

$$c - \frac{1}{n} \leq \Phi(u_n) \leq c + \frac{1}{n} \;\; \text{e} \;\; \left\|\Phi'(u_n)\right\|_{X'} < \frac{1}{n}.$$

Assim, passando ao limite quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\Phi(u_n) \longrightarrow c \;\; \text{e} \;\; \Phi'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Da condição Palais-Smale, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_k} \longrightarrow u.$$

Desde de que $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, temos

$$\Phi(u_{n_k}) \longrightarrow \Phi(u) \;\text{ e }\; \Phi^{'}(u_{n_k}) \longrightarrow \Phi^{'}(u).$$

Portanto, pela unicidade do limite, obtemos

$$\Phi(u) = c \;\text{ e }\; \Phi^{'}(u) = 0,$$

donde concluímos que c é um valor crítico de Φ, contrariando a hipótese. Logo, mostramos que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que, se $u \in \Phi^{-1}\left([c-2\alpha, c+2\alpha]\right)$, temos $\left\|\Phi'(u)\right\|_{X'} \geq \beta$.

Agora, considere $\epsilon \in (0, \alpha]$ fixado e $\delta = \dfrac{4\epsilon}{\beta}$.
Sejam

$$A = \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right),$$

$$B = \Phi^{-1}\left([c-\epsilon, c+\epsilon]\right)$$

e

$$Y = \left\{u \in X; \Phi^{'}(u) \neq 0\right\}.$$

Além disso, considere $V : Y \to X$ um campo pseudo-gradiente para Φ e $0 \leq \rho \leq 1$ uma função localmente lipschitziana definida por

$$\begin{array}{rcl} \rho \;:\; X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \rho(u) = \dfrac{d(u, X\setminus A)}{d(u, X\setminus A) + d(u, B)}. \end{array} \qquad \text{(Ver [6])}$$

Segue da definição de ρ que $\rho(u) = 1$ se $u \in B$ e $\rho(u) = 0$ se $u \in X \setminus A$. Defina a seguinte aplicação localmente Lipschitziana $f : X \longmapsto X$ definida por

$$f(u) = \begin{cases} -\rho(u)\frac{V(u)}{\|V(u)\|_X}, & \text{se } \; u \in A \\ 0, & \text{se } \; u \notin A, \end{cases} \qquad \text{(Ver [6])}$$

temos $\|f\|_X \leq 1$ para todo $u \in X$. Segue da teoria de E.D.O, que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}w(t,u) & = & f(w(t,u)) \\ w(0,u) & = & u \end{cases}$$

tem solução única (Ver Teorema B.2, Apêndice B), a qual denotaremos por $w(t,u)$, que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e para cada $u \in X$.

Seja $\eta : [0,1] \times X \longmapsto X$ definida por $\eta(t,u) = w(\delta t, u)$. Vamos mostrar:
(1) $\eta(t,u) = u$ se $u \notin \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right) = A$.

De fato, seja $w_1(t,u) = u \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{R}$. Note que

$$\frac{d}{dt} w_1(t,u) = 0 = f(w_1(t,u)), \quad \text{pois} \ \ u \notin A$$

o que implica,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} w_1(t,u) & = & f(w_1(t,u)), \ \ \text{se} \ \ u \notin A \\ w_1(0,u) & = & u \end{cases}$$

Assim, pelo teorema de existência e unicidade (Ver Teorema B.2, Apêndice B), temos

$$w_1(t,u) = w(t,u) = u \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$\eta(t,u) = w(\delta t, u) = u \ \ \forall \ \ t \in [0,1].$$

Logo, mostramos (1).

(2) $\eta\left(1, \Phi^{c+\epsilon}\right) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

De fato, para cada $u \in X$ fixado a função $\Phi(w(t,u))$ é decrescente pois,

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt}(w(t,u)) &= \Phi'(w(t,u)).\frac{d}{dt}w(t,u) \\ &= \Phi'(w(t,u)).f(w(t,u)) \\ &= -\rho(w(t,u)).\Phi'(w(t,u)).\frac{V(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|_X} \end{aligned}$$

donde concluímos por (1.5), que

$$\frac{d\Phi}{dt}(w(t,u)) \leq -\rho(w(t,u)).\frac{\left\|\Phi'(w(t,u))\right\|_X^2}{\|V(w(t,u))\|_X} \leq 0. \tag{1.6}$$

Portanto $\Phi(w(t,u))$ é decrescente em t para cada $u \in X$ fixado.

Seja $u \in \Phi^{c+\epsilon}$. Vamos considerar os seguintes casos:

1^o **Caso:** $\Phi(w(t^*,u)) < c - \epsilon$ para algum $t^* \in [0,\delta)$

Se $\Phi(w(t^*,u)) < c-\epsilon$ para algum $t^* \in [0,\delta)$ tem-se

$$\Phi(\eta(1,u)) = \Phi(w(\delta,u)) \leq \Phi(w(t^*,u)) < c-\epsilon,$$

pois Φ é decrescente em t, de onde podemos concluir que

$$\eta(1,u) \in \Phi^{c-\epsilon}.$$

2^o **Caso:** $\Phi(w(t,u)) \geq c-\epsilon, \ \ \forall \ t \in [0,\delta]$

Usando o fato de Φ ser decrescente em t e $u \in \Phi^{c+\epsilon}$, obtemos

$$\Phi(w(t,u)) \leq \Phi(w(0,u)) = \Phi(u) \leq c+\epsilon.$$

E como,

$$\Phi(w(t,u)) \geq c-\epsilon, \ \ \forall \ t \in [0,\delta],$$

logo,

$$w(t,u) \in \Phi^{-1}\left([c-\epsilon, c+\epsilon]\right) = B, \ \ \forall \ t \in [0,\delta].$$

Usando (1.6) e (1.4) e o fato que $\rho \equiv 1$ em B, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Phi(w(\delta,u)) &= \Phi(u) + \int_0^\delta \frac{d\Phi}{dt}(w(t,u))dt \\
&\leq \Phi(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \left\|\Phi^{'}(w(t,u))\right\|_X dt \\
&\leq c+\epsilon - \frac{1}{2}.\frac{4\epsilon}{\delta}.\delta = c-\epsilon
\end{aligned}$$

mostrando que

$$\Phi(w(\delta,u)) \leq c-\epsilon.$$

Portanto, em qualquer um dos casos 1^o ou 2^o, temos

$$\eta(1,u) = w(\delta,u) \in \Phi^{c-\epsilon} \ \text{ se } \ u \in \Phi^{c+\epsilon}.$$

Portanto, provamos (2). ■

Teorema 1.3 (Teorema de Deformação)
Sejam X um espaço de Hilbert, $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Assuma que

$$\left\|\Phi^{'}(u)\right\|_{X'} \geq 2\epsilon, \ \ \forall \ u \in \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right).$$

Então existe $\eta \in C(X,X)$ *tal que*
(3) $\eta(u) = u$ *se* $u \notin \Phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;
(4) $\eta(\Phi^{c+\epsilon}) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

Demonstração: A prova desse teorema, segue de forma análoga ao **Teorema 1.2**, para maiores detalhes sugerimos a referência [6]. ■

1.3 Teoremas do Passo da Montanha

Nesta seção vamos demonstrar duas versões do Teorema Passo da Montanha as quais serão utilizados nos próximos capítulos.

Vamos demonstrar o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz [2].

Teorema 1.4 *Sejam* X *um espaço de Banach real e* $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ *satisfazendo a condição Palais-Smale-(P.S). Suponha que* $\Phi(0) = 0$ *e que*
[**1.1**] *Existem constantes* $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\Phi\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$, *e*
[**1.2**] *Existe um* $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ *tal que* $\Phi(e) < 0$.

Então, Φ *possui um valor crítico* $c \geq \alpha$, *com*

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} \Phi(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1]), X);\ \ g(0) = 0\ \ e\ \ g(1) = e\}$.

Demonstração: Seja

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} \Phi(u),$$

ou seja,

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)).$$

Vamos provar inicialmente que c está bem definido. De fato, sendo $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $g \in C([0,1],X)$, segue-se que $\Phi\circ g$ é uma função contínua. Como $[0,1]$ é um conjunto compacto, temos $\Phi \circ g$ possui máximo em $[0,1]$.

Afirmação 1: $\max_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)) > \alpha,\ \ \forall\ \ g \in \Gamma$.

De fato, seja $g \in \Gamma$ e defina

$$\begin{array}{rcl} h \ : \ [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) = \|g(t)\| \, . \end{array}$$

Observe que h é uma composição de funções contínuas, logo h é uma função contínua. Além disso, sendo $e \in X \setminus \overline{B\rho}$, temos

$$h(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$$

e

$$h(1) = \|g(1)\| = \|e\| > \rho,$$

ou seja, $h(0) < \rho < h(1)$. Daí, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = \|g(t_0)\| = \rho$, donde segue pela condição [$\mathbf{1.1}$] que $\Phi\left(g(t_0)\right) > \alpha$. Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi\left(g(t)\right) > \alpha, \ \ \forall \ \ g \in \Gamma, \tag{1.7}$$

mostrando, assim, a **Afirmação 1.**

Definido $H = \left\{\max_{t\in[0,1]} \Phi\left(g(t)\right); g \in \Gamma\right\}$, segue da **Afirmação 1,** que H é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Assim pelo Postulado de Dedekind, podemos definir o ínfimo de H em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi\left(g(t)\right)$$

está bem definido. De (1.7), temos α é uma cota inferior para H. Daí, pela definição de c, temos $c \geq \alpha$.

Suponha por contradição que c não é um valor crítico, então pelo **Teorema de Deformação (1.2),** dado $0 < \epsilon < \dfrac{c-\alpha}{2}$, existe $\eta \in C\left([0,1] \times X, X\right)$ tal que

(1) $\eta(t,u) = u$ se $u \notin \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)$ e $t \in [0,1]$;

(2) $\eta\left(1, \Phi^{c+\epsilon}\right) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

Além disso, pela definação de c, existe $g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi\left(g(t)\right) \leq c + \epsilon. \tag{1.8}$$

Considere $h^*(t) = \eta\left(1, g(t)\right)$. Sendo $\eta \in C\left([0,1] \times X, X\right)$ e $g \in C\left([0,1], X\right)$, segue-se que $h^* \in C\left([0,1], X\right)$. Note que, como $\Phi(e) < \alpha < c - 2\epsilon$, temos $\Phi(e) \notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, o que implica, $e \notin \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)$. Da mesma forma, temos

$\Phi(0) = 0 < \alpha < c - 2\epsilon$, o que implica $\Phi(0) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$, ou seja, $0 \notin \Phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$. Assim, por (1), temos

$$h^*(0) = \eta(1, g(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$h^*(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, e) = e$$

donde segue que $h^* \in \Gamma$.

Finalmente, por (1.8), obtemos

$$\Phi(g(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica $g(t) \in \Phi^{c+\epsilon}, \ \forall \ t \in [0,1]$. E mais, de (2) segue

$$h^*(t) = \eta(1, g(t)) \in \Phi^{c-\epsilon}, \ \forall \ t \in [0,1],$$

ou seja, $\Phi(h^*(t)) \leq c - \epsilon, \ \forall \ t \in [0,1]$. Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi(h^*(t)) \leq c - \epsilon$$

e sendo,

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in[0,1]} \Phi(g(t)),$$

temos

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \Phi(h^*(t)) \leq c - \epsilon,$$

visto que $h^* \in \Gamma$. Assim,

$$c \leq c - \epsilon$$

o que é um absurdo. Portanto, concluímos que c é um valor crítico para Φ, finalizando assim, a demonstração do **Teorema (1.4).** ■

Vamos demonstrar o próximo Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale devido a Willem [21].

Teorema 1.5 *Sejam X um espaço de Banach, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $r > 0$ e $e \in X$ satisfazendo*

$$\|e\| > r \ \ e \ \ b = \inf_{\|u\|=r} \Phi(u) > \Phi(0) \geq \Phi(e).$$

Então, para cada $\epsilon \in (0, \frac{c}{2})$, *existe* $u \in X$ *tal que*
[**1.3**] $c - 2\epsilon \leq \Phi(u) \leq c + 2\epsilon$;
[**1.4**] $\left\|\Phi'(u)\right\| < 2\epsilon$;
onde

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi\left(g(t)\right).$$

e

$$\Gamma = \left\{g \in C([0,1]), X); \;\; g(0) = 0 \;\; e \;\; g(1) = e\right\}.$$

Demonstração: Pela definição de b, temos

$$b \leq \Phi(u), \;\; \forall \;\; u \in X, \;\; \text{tal que} \;\; \|u\| = r.$$

Considerando a função

$$\begin{array}{rcl} h \; : \; [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) = \|g(t)\| \end{array}$$

segue-se que a mesma é contínua, pois é composição de funções contínuas $(\|\cdot\|\,; g)$.
Note que:

$$i) \;\; h(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 \;\; \text{e} \;\; ii) \;\; h(1) = \|g(1)\| = \|e\| > r,$$

isto é,

$$h(0) < r < h(1).$$

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$h(t_0) = \|g(t_0)\| = r.$$

Logo, existe $u_0 = g(t_0) \in X$, tal que $\|u_0\| = r$. Assim, $b \leq \Phi(u_0)$ e

$$\Phi(u_0) = \Phi\left(g(t_0)\right) \leq \max_{t \in [0,1]} \Phi\left(g(t)\right),$$

implicando que

$$b \leq \max_{t \in [0,1]} \Phi\left(g(t)\right).$$

Sendo $g \in \Gamma$ arbitrário, temos

$$b \leq c \leq \max_{t \in [0,1]} \Phi\left(g(t)\right).$$

Vamos mostrar que [**1.3**] ocorre. De fato, pela definição de c, existe um caminho $g_0 \in \Gamma$ tal que para $\epsilon > 0$, temos

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi\left(g_0(t)\right) \leq c + \epsilon.$$

Por outro lado,

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \Phi\left(g(t)\right).$$

Logo,

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \Phi\left(g_0(t)\right) \leq c + \epsilon. \tag{1.9}$$

Assim, como o máximo é atingido, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$c - 2\epsilon < c \leq \Phi\left(g_0(t_0)\right) \leq c + \epsilon < c + 2\epsilon.$$

Portanto, para cada $\epsilon \in \left(0, \dfrac{c}{2}\right)$ existe $u = g_0(t_0) \in X$ tal que

$$c - 2\epsilon < c \leq \Phi(u) \leq c + \epsilon < c + 2\epsilon.$$

Vamos provar a condição [**1.4**]. Suponha que não seja verdade, isto é, existe $\epsilon \in \left(0, \dfrac{c}{2}\right)$ tal que

$$\left\|\Phi^{'}(u)\right\| \geq 2\epsilon, \;\; \forall \;\; u \in \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right).$$

Usando a contra positiva de [**1.3**], isto é, existe $\epsilon \in \left(0, \dfrac{c}{2}\right)$ tal que

$$c - 2\epsilon > \Phi(u) \;\text{ ou }\; \Phi(u) > c + 2\epsilon, \;\; \forall \;\; u \in X.$$

Em particular, temos

$$c - 2\epsilon > \Phi(0) \;\text{ ou }\; \Phi(0) > c + 2\epsilon.$$

Como $b > \Phi(0)$ por hipótese, então não podemos ter

$$\Phi(0) > c + 2\epsilon,$$

pois $b > c + 2\epsilon \Rightarrow 0 > c - b + 2\epsilon > 0$ um absurdo, já que $b \leq c$.

Logo,

$$c - 2\epsilon > \Phi(0) \geq \Phi(e). \tag{1.10}$$

Logo, pelo **Teorema de Deformação (1.3)** existe $\eta \in C(X,X)$ tal que

(3) $\eta(u) = u$ se $\forall\ \ u \notin \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)$

(4) $\eta\left(\Phi^{c+\epsilon}\right) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

Considere $h^*(t) = \eta\left(g_0(t)\right)$. Vamos mostrar que $h^* \in \Gamma$. Sendo $\eta \in C\left(X,X\right)$ e $g_0 \in C\left([0,1],X\right)$, segue-se que $h^* \in C\left([0,1],X\right)$. Além disso,

$$h^*(0) = \eta\left(g_0(0)\right) = \eta(0)$$

Observamos que (1.10) implica em obtermos

$$0 \notin \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right),$$

de onde segue por (3) que $\eta(0) = 0$, ou seja, $h^*(0) = 0$. De modo análogo

$$h^*(1) = \eta\left(g_0(1)\right) = \eta(e).$$

e por (1.10), segue-se que

$$e \notin \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right),$$

logo, por (3) temos $\eta(e) = e$. O que implica $h^*(1) = e$. Portanto, $h^* \in \Gamma$.

Finalmente, segue-se que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \Phi\left(h^*(t)\right).$$

De (1.9), obtemos

$$g_0(t) \in \Phi^{c+\epsilon}, \ \ \forall\ \ t \in [0,1]$$

logo, por (4), temos

$$h^*(t) = \eta\left(g_0(t)\right) \in \Phi^{c-\epsilon}, \ \ \forall\ \ t \in [0,1].$$

Portanto,

$$\Phi\left(h^*(t)\right) \leq c-\epsilon, \ \ \forall\ \ t \in [0,1],$$

ou seja,

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi\left(h^*(t)\right) \leq c-\epsilon < c$$

o que é um absurdo, pois contradiz a definição de c.

Concluímos com isto que, dado $\epsilon \in \left(0, \dfrac{c}{2}\right)$, existe $u \in \Phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)$ verificando $\left\|\Phi'(u)\right\| < 2\epsilon$. Provando o Teorema. ■

1.4 Funcional semicontínuo inferiormente (s.c.i)

Nesta seção vamos demonstrar alguns teoremas envolvendo o funcional s.c.i, que serão usados no decorrer do nosso trabalho.

Definição 1.5 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que um funcional $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é semicontínuo inferiormente (s.c.i), se para qualquer $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in X; \Phi(x) > a\}$ é aberto.*

Definição 1.6 *Seja X um espaço topológico. Um funcional $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é seqüencialmente semicontínua inferiormente (s.s.c.i) se, para toda seqüência $u_n \subset X$ com*

$$u_n \longrightarrow u_0,$$

ocorrer

$$\lim_{n\to\infty} \inf \Phi(u_n) \geq \Phi(u_0).$$

Definição 1.7 *Seja X um espaço topológico. Um funcional $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dito fracamente s.c.i (f.s.c.i) se é s.c.i, considerando X com sua topologia fraca.*

Teorema 1.6 *Sejam X um espaço topológico compacto e $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional s.c.i. Então Φ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\Phi(u_0) = \inf_X \Phi.$$

Demonstração: Seja $A_n = \{u \in X; \Phi(u) > -n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que Φ é s.c.i, temos para cada $n \in \mathbb{N}$, que A_n é aberto.

Note que podemos escrever

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sendo X um espaço topológico compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n.$$

Logo,

$$\Phi(u) > -n_0, \ \ \forall \ \ u \in X.$$

Donde segue-se que Φ é limitado inferiormente. Do Postulado de Dedekind, o conjunto $\{\Phi(u); u \in X\}$ tem um ínfimo.

Provaremos agora que o ínfimo é atingido e vamos denotar

$$c = \inf_X \Phi.$$

Suponha que não seja atingido o ínfimo, isto é,

$$\Phi(u) > c, \ \ \forall \ \ u \in X.$$

Então

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ u \in X; \Phi(u) > c + \frac{1}{n} \right\}.$$

Assim, uma vez que X é um espaço topológico compacto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{k} \left\{ u \in X; \Phi(u) > c + \frac{1}{n} \right\}.$$

Logo,

$$\Phi(u) > c + \frac{1}{k}, \ \ \forall \ \ u \in X.$$

Portanto, $c + \dfrac{1}{k}$ é uma cota inferior do conjunto $\{\Phi(u); u \in X\}$. Ora, como o ínfimo é a maior das cotas inferiores, temos

$$c + \frac{1}{k} \leq c, \ \ \forall \ \ u \in X$$

o que é um absurdo. Portanto existe $u_0 \in X$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_X \Phi.$$

Provando assim o Teorema. ■

Teorema 1.7 *Seja X um espaço de Hilbert (ou um espaço de Banach reflexivo) e suponha que o funcional $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é*
(5) fracamente semicontínuo inferiormente (fracamente s.c.i);
(6) coercivo, isto é, $\Phi(u) \longrightarrow +\infty$ quando $\|u\| \longrightarrow +\infty$.
Então Φ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_X \Phi.$$

Além disso, se o funcional $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então qualquer ponto de mínimo u_0 é um ponto crítico de Φ, isto é,

$$\Phi'(u_0) = 0 \in X'.$$

Demonstração: Uma vez que Φ é coercivo, dado $M > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\Phi(u) > M, \;\; \forall \;\; u \in B_R^C(0).$$

Escolha $M > \Phi(0)$ e teremos

$$\Phi(u) > \Phi(0), \;\; \forall \;\; u \in B_R^C(0).$$

Desde que X é um espaço de Banach reflexivo (Ver Teorema B.1, Apêndice B), temos a bola fechada $\overline{B_R(0)}$ é fracamente compacta.

Além disso, por hipótese, Φ é fracamente s.c.i em X. Em particular,

$$\Phi : \overline{B_R(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

é fracamente s.c.i. Assim, uma vez que:
(5) $\overline{B_R(0)}$ é fracamente compacto
e
(6) $\Phi : \overline{B_R(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ é fracamente s.c.i,
temos pelo **Teorema 1.6**, que Φ é limitado inferiomente em $\overline{B_R(0)}$ e existe $u_0 \in \overline{B_R(0)}$ tal que

$$\Phi\left(u_0\right) = \inf_{\overline{B_R(0)}} \Phi.$$

Logo,

$$\Phi\left(u_0\right) = \inf_X \Phi$$

pois $\Phi(u_0) \leq \Phi(0) < \Phi(u), \;\; \forall \;\; u \in B_R^C(0)$.

Vamos mostrar que $\Phi'(u_0) = 0 \in X'$. De fato, para cada $h \in X$ fixado, considere a seguinte função

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_h & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & X \\ & & t & \longmapsto & \varphi_h(t) = u_0 + th. \end{array}$$

Note que claramente, para cada $h \in X$, φ_h é diferenciável em t. Seja
$\psi(t) = \left(\Phi \circ \varphi_h\right)(t)$.

Observe que:
i) ψ é diferenciável, pois é composição de funções diferenciáveis.
ii) zero é um ponto de mínimo local para ψ, pois $\psi(0) = \Phi(u_0) \leq \Phi\left(u_0 + th\right) = \psi(t), \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{R}$.

Daí, $\psi^{'}(0) = 0$, isto é,

$$0 = \psi^{'}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(t+0) - \psi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi\left(u_0 + th\right) - \Phi\left(u_0\right)}{t}.$$

Ora,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi\left(u_0 + th\right) - \Phi\left(u_0\right)}{t} = \frac{\partial \Phi}{\partial h}(u_0).$$

Logo,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(u_0) = 0, \;\; \forall \;\; u \in X.$$

Por hipótese Φ é Fréchet Diferenciável, assim, concluímos que

$$\Phi^{'}(u_0)h = \frac{\partial \Phi}{\partial h}(u_0), \;\; \forall \;\; u \in X,$$

isto é,

$$\Phi^{'}(u_0) = 0.$$

Provando assim o Teorema. ■

Capítulo 2

Existência de solução fraca para um problema de Dirichlet não-linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Neste capítulo estudaremos a existência de solução fraca para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x,u), \quad \Omega, \\ \quad u = & 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ é um domínio limitado com fronteira suave e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory e f satisfaz as seguintes hipóteses:

[**2.1**] Existem constantes $c_1, c_2 \geq 0$ tais que

$$|f(x,t)| \leq c_1 + c_2 |t|^s, \quad \forall \ x \in \overline{\Omega} \ \text{ e } \ t \in \mathbb{R},$$

onde $0 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, ou $s > 1$, se $N = 2$;

[**2.2**] $f(x,t) = o(|t|)$ quando $t \to 0$, $\forall \ x \in \overline{\Omega}$;

[**2.3**] Existem constantes $\mu > 2$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t), \ \ \forall \ x \in \overline{\Omega}, \ \ |t| \geq r, \ \text{ onde } \ F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz.$$

Além disso, consideraremos que a norma em $H_0^1(\Omega)$ é dada por

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

a qual é equivalente a seguinte norma em $H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{1,2;\Omega} = \left(\int_\Omega \left(u^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De fato, pela desigualdade de Poincaré (Ver Teorema B.6, Apêndice B), temos

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \Rightarrow \left(\int_\Omega \left(u^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left((C+1) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

implicando em

$$\|u\|_{1,2;\Omega} \leq K \, \|u\| .$$

Por outro lado,

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \left(u^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde obtemos

$$\|u\| \leq \|u\|_{1,2;\Omega} .$$

Mostrando, assim, a nossa afirmação.

O método utilizado consiste em aplicar o **Teorema 1.4**, conhecido como Teorema do Passo da Montanha para encontrar um ponto crítico do funcional

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 - F(x,u)) dx, \tag{2.2}$$

definido em $H_0^1(\Omega)$.

Mostraremos posteriormente que:

$$I^{'}(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é ponto crítico de I se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u) v dx, \ \ \forall \ \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Donde segue que u é uma solução fraca para o **problema (2.1)** se, e somente se, for um ponto crítico de I.

Lema 2.1 *Sob a hipótese* [**2.1**], *temos que* I *está bem definido.*

Demonstração: Vejamos:

$I)$ $I_1(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \frac{1}{2}\|u\|^2 < +\infty$, pois $u \in H_0^1(\Omega)$.

$II)$ $I_2(u) := \int_\Omega F(x,u)dx$ está bem definido.

De fato, vamos começar mostrando a seguinte desigualdade

$$|F(x,t)| \leq c_1|t| + c_2\frac{|t|^{s+1}}{s+1}, \text{ onde } 0 \leq s < \frac{N+2}{N-2} \text{ e } N > 2. \tag{2.3}$$

Vamos analisar os seguintes casos:

$A)$ $t \geq 0$

Por [**2.1**]

$$|F(x,t)| \leq \int_0^t |f(x,z)|\,dz \leq c_1\int_0^t dz + c_2\int_0^t |z|^s\,dz = c_1t + c_2\frac{t^{s+1}}{s+1} = c_1|t| + c_2\frac{|t|^{s+1}}{s+1}.$$

$B)$ $t < 0$

Temos

$$|F(x,t)| = \left|\int_0^t f(x,z)dz\right| = \left|-\int_t^0 f(x,z)dz\right| \leq \int_t^0 |f(x,z)|\,dz,$$

logo,

$$|F(x,t)| \leq c_1\int_t^0 dz + c_2\int_t^0 |z|^s\,dz \leq c_1\int_t^0 dz + c_2\int_t^0 (-z)^s dz,$$

ou seja,

$$|F(x,t)| \leq c_1\int_t^0 dz + c_2\int_t^0 (-1)^s z^s dz = c_1(-t) + c_2(-1)^{s+1}\frac{t^{s+1}}{s+1} = c_1(-t) + c_2\frac{(-t)^{s+1}}{s+1}.$$

Concluímos,

$$|F(x,t)| \leq c_1|t| + c_2\frac{|t|^{s+1}}{s+1}.$$

Conseqüentemente, (2.3) vale.

Como $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$|I_2| \leq \int_\Omega |F(x,t)|\,dx \leq c_3\int_\Omega |u|\,dx + c_4\int_\Omega |u|^{s+1}\,dx < +\infty,$$

por causa da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}(\Omega)$ (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), onde $s+1 \in [1, 2^*]$. ■

Proposição 2.1 *Sob a hipótese* [**2.1**], *temos* $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ *e*

$$I^{'}(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração: Dividiremos a demonstração em dois casos:

1^o **Caso:** $N > 2$.

De fato,

III) Seja $I_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx := \frac{1}{2}\langle u, u\rangle$.

Mostraremos que I_1 é Fréchet Diferenciável com derivada contínua.

Temos

$$\frac{\partial I_1}{\partial v}(u) = \lim_{h \to 0} \frac{I_1(u+hv) - I_1(u)}{h}$$

Logo,

$$\frac{\partial I_1}{\partial v}(u) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u+hv, u+hv\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle}{h}$$

daí, obtemos

$$\frac{\partial I_1}{\partial v}(u) = \lim_{h \to 0}[\langle u, v\rangle + \frac{1}{2}h\langle v, v\rangle] = \langle u, v\rangle .$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0,$$

onde $r(v) = I_1(u+v) - I_1(u) - \langle u, v\rangle$.

Vejamos,

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\| \to 0} \frac{I_1(u+v) - I_1(u) - \langle u, v\rangle}{\|v\|} &= \lim_{\|v\| \to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u+v, u+v\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle}{\|v\|} \\ &= \lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{2}\frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{2}\|v\| = 0. \end{aligned}$$

Mostrando que I_1 é diferenciável em $H_0^1(\Omega)$, com

$$I_1^{'}(u).v = \langle u, v\rangle$$

e conseqüentemente I_1 é contínua.

Vamos mostrar agora a continuidade de I_1'. Considere $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. Mostraremos que

$$I_1'(u_n) \longrightarrow I_1'(u) \text{ em } (H_0^1(\Omega))'$$

ou equivalentemente

$$\left\| I_1'(u_n) - I_1'(u) \right\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Por definição,

$$\left\| I_1'(u_n) - I_1'(u) \right\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \Big(I_1'(u_n) - I_1'(u) \Big) .v \right| .$$

Note que

$$\left| \Big(I_1'(u_n) - I_1'(u) \Big) .v \right| = \left| I_1'(u_n).v - I_1'(u).v \right| = |\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| = |\langle u_n - u, v\rangle| .$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Ver Teorema B.23, Apêndice B), segue que

$$\left| \Big(I_1'(u_n) - I_1'(u) \Big) .v \right| \leq \|u_n - u\| . \|v\| \leq \|u_n - u\| ,$$

pois $\|v\| \leq 1$. Pela definição do supremo, obtemos

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \left| \Big(I_1'(u_n) - I_1'(u) \Big) .v \right| \leq \|u_n - u\| .$$

donde segue que

$$\left\| I_1'(u_n) - I_1'(u) \right\|_{(H_0^1(\Omega))'} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Logo, I_1' é contínua.

Assim, concluímos que $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

IV) Seja $I_2(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$, onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz$.

Mostraremos que I_2 é Fréchet Diferenciável com derivada contínua.

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ fixado e para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ considere

$$r(v) = I_2(u+v) - I_2(u) - \int_\Omega f(x,u)vdx. \tag{2.4}$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0,$$

isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| < \delta \Rightarrow |r(v)| \leq \epsilon \|v\| . \tag{2.5}$$

De (2.4), temos

$$r(v) = \int_\Omega (F(x, u+v) - F(x,u))\, dx - \int_\Omega f(x,z) v dx.$$

Segue do Teorema Fundamental do Cálculo, aplicado à função $h(z) = F(x, u+zv)$ que

$$F(x, u+v) - F(x,u) = \int_0^1 \frac{d}{dz} F(x, u+zv) dz.$$

Ora,

$$\frac{d}{dz} F(x, u+zv) = f(x, u+zv).v,$$

conseqüentemente

$$\int_0^1 \frac{d}{dz} F(x, u+zv) dz = \int_0^1 f(x, u+zv).v dz$$

e portanto,

$$r(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 f(x, u+zv).v dz \right] dx - \int_\Omega f(x,u) v dx$$

o que implica,

$$|r(v)| \leq \int_\Omega \left[\int_0^1 |f(x, u+zv) - f(x,u)| \, . \, |v| \, dz \right] dx. \tag{2.6}$$

Seja $q = 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $r = \dfrac{2N}{N+2}$, onde $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$. Como $v \in H_0^1(\Omega)$, então da imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), temos $v \in L^q(\Omega)$.

Vamos mostrar que $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^r(\Omega)$. De fato, desde que f satisfaz a condição de crescimento dado por [**2.1**], temos

$$\int_\Omega |f(x,u)|^r \, dx \leq \int_\Omega [c_1 + c_2 |u|^s]^r \, dx \leq K \int_\Omega [|c_1|^r + |c_2|^r |u|^{sr}] \, dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |f(x,u)|^r \, dx \leq M |\Omega| + C \int_\Omega |u|^{sr} \, dx.$$

Resta-nos mostrar que esta última integral é finita. A condição de crescimento [**2.1**] é válida também para $1 \leq \overline{s} < \frac{N+2}{N-2}$, com $N > 2$, visto que:

1. Para $0 \leq s \leq 1$, temos

(1.a) Se $0 \leq |t| < 1$, segue

$$c_1 + c_2 |t|^s \leq c_1 + c_2 1^s \leq c_1 + c_2 + c_3 |t|^{\overline{s}}$$

onde c_3 é uma constante positiva. Considerando $c_4 = c_1 + c_2$, assim

$$|f(x,t)| \leq c_1 + c_2 |t|^s \leq c_4 + c_3 |t|^{\overline{s}}, \text{ onde } 1 \leq \overline{s} < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N > 2.$$

(1.b) Se $|t| \geq 1$, segue

$$c_1 + c_2 |t|^s \leq c_1 + c_2 |t|^{\overline{s}}.$$

Assim,

$$|f(x,t)| \leq c_1 + c_2 |t|^s \leq c_1 + c_2 |t|^{\overline{s}}, \text{ onde } 1 \leq \overline{s} < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N > 2.$$

Logo, de (1.a) e (1.b) mostramos

$$|f(x,t)| \leq c_1 + c_2 |t|^{\overline{s}}, \text{onde } 1 \leq \overline{s} < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N > 2 \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Daqui em diante denotaremos $\overline{s}$ por s.

Como $1 \leq s < \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow 1 < r \leq sr < 2^*$, com $N > 2$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Usando a imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{sr}(\Omega)$ (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), segue que $u \in L^{sr}(\Omega)$, o que implica

$$\int_\Omega |u|^{sr}\, dx < +\infty.$$

Logo,

$$\int_\Omega |f(x,u)|^r\, dx < +\infty$$

mostrando, assim, que $f(\cdot,(u(\cdot)) \in L^r(\Omega)$.

Em (2.6), aplicando o Teorema de Fubini (Ver Teorema B.17, Apêndice B), obtemos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_\Omega |f(x,u+zv) - f(x,u)| \,.\, |v|\, dx\right] dz.$$

Usando Hölder (Ver Teorema B.5, Apêndice B), segue que

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|f(\cdot, u+zv) - f(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}\, dz. \tag{2.7}$$

Afirmação 2.1 Vale a convergência

$$f(\cdot, u+zv) \longrightarrow f(\cdot, u) \;\text{ em }\; L^{\frac{q}{s}}(\Omega)$$

uniformemente para $z \in [0,1]$, $\forall\; x \in \Omega$ quando $v \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Observamos que esta afirmação é equivalente a

$$f(\cdot, u+zv_n) \longrightarrow f(\cdot, u) \;\text{ em }\; L^{\frac{q}{s}}(\Omega)$$

uniformemente em $z \in [0,1]$, $\forall\; x \in \Omega$, com $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. **Demonstração da Afirmação 2.1:** Considere $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Segue da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q}{s}}(\Omega)$ (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), que

$$v_n \to 0 \;\text{ em }\; L^{\frac{q}{s}}(\Omega). \tag{2.8}$$

Logo, (Ver Teorema B.13, Apêndice B), existe uma subseqüência de (v_n) (que continuaremos denotando por (v_n)) e $g \in L^{\frac{q}{s}}(\Omega)$ de modo que

$$|v_n(x)| \leq g(x) \;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega,$$

e

$$v_n \to 0 \;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega.$$

Daí,

$$|(u+zv_n)(x)| \leq (|u| + g(x))\,(x) \;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega, \;\; \forall\; z \in [0,1] \tag{2.9}$$

e

$$(u+zv_n)(x) \longrightarrow u(x) \;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega. \tag{2.10}$$

Agora, usando o fato de que f é uma função Caracthéodory e (2.10), temos

$$f\left(x, (u+zv_n)(x)\right) \longrightarrow f\left(x, u(x)\right) \;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega,$$

ou seja,

$$\left|f\left(x, (u+zv_n)(x)\right) - f\left(x, u(x)\right)\right|^{\frac{q}{s}} \longrightarrow 0 \;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega.$$

Além disso, usando a condição de crescimento dada por [**2.1**], a limitação uniforme em (2.9) e o fato de Ω ser limitado, resulta que existe uma função $\Phi \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f\,(x,(u+zv_n)(x)) - f\,(x,u(x))|^{\frac{q}{s}} \leq \Phi,$$

donde segue-se, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema B.7, Apêndice B), que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega |f\,(x,(u+zv_n)(x)) - f\,(x,u(x))|^{\frac{q}{s}}\,dx\right) = 0.$$

Observação: Em verdade mostramos que dado $\{v_n\}$, com $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n\to+\infty$, existe $\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\}$ satisfazendo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega \left|f\left(x,(u+zv_{n_j})(x)\right) - f\,(x,u(x))\right|^{\frac{q}{s}}\,dx\right) = 0. \tag{2.11}$$

O limite em (2.11) ocorre de fato para seqüência $\{v_n\}$.

Suponha por contradição que não ocorre a convergência uniforme. Então, existem $\epsilon_0 > 0$ e $z_{n_j} \subset [0,1]$ verificando,

$$\left\|f(\cdot,(u+s_{n_j}v_{n_j})(\cdot) - f(\cdot,u(\cdot)\right\|_{L^{\frac{q}{s}}(\Omega)} \geq \epsilon_0, \;\; \forall \;\; n_j \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Repetindo os mesmos argumentos que fizemos de (2.8) até (2.11) para z_{n_j}, chegaremos que a menos de subseqüência, dado $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|f(\cdot,(u+z_{n_j}v_{n_j})(\cdot) - f(\cdot,u(\cdot)\right\|_{L^{\frac{q}{s}}(\Omega)} < \epsilon, \;\; \forall \;\; n_j \geq n_0,$$

o que contradiz (2.12), assim, mostramos a **afirmação 2.1.**

A **afirmação 2.1** significa que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| < \delta \Rightarrow \|f(.,u+zv) - f(.,u)\|_{L^{\frac{q}{s}}(\Omega)} < \epsilon,$$

uniforme em $z \in [0,1]$. Como $1 < r < \dfrac{q}{s}$ e Ω é limitado (Ver Teorema B.19, Apêndice B), então vale a seguinte imersão contínua

$$L^{\frac{q}{s}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Daí,

$$\|v\| < \delta \Rightarrow \|f(\cdot,u+zv) - f(\cdot,u)\|_{L^r(\Omega)} < C\epsilon, \tag{2.13}$$

uniforme em $z \in [0,1]$. Substituindo (2.13) em (2.7) encontramos

$$|r(v)| \leq C\epsilon. \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Assim, pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pois $q = 2^*$ (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), resulta em

$$|r(v)| \leq C_1\epsilon. \|v\|, \text{ sempre que } \|v\| < \delta,$$

mostrando (2.5). Concluímos desse modo que o funcional I_2 definido anteriormente é Fréchet diferenciável, com

$$I_2'(u).v = \int_\Omega f(x,u)vdx, \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega).$$

Agora mostraremos a continuidade de I_2'. De fato, seja

$$(v_n) \subset H_0^1(\Omega), \text{ com } v_n \to 0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Como no item anterior, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema B.7, Apêndice B), temos

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_\Omega |f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{q}{s}} dx \right) = 0.$$

Uma vez que $1 < r < \dfrac{q}{s}$ e Ω é limitado (Ver Teorema B.19, Apêndice B), então

$$\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quando } v_n \to 0 \text{ em } H_0^1(\Omega). \quad (2.14)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\left\| I_2'(u+v_n) - I_2'(u) \right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)'} = \sup_{\|v\|\leq 1} \left| \left\langle I_2'(u+v_n) - I_2'(u) \right\rangle .v \right|. \quad (2.15)$$

No entanto, usando a desigualdade de Hölder (Ver Teorema B.5, Apêndice B) para $v \in L^q(\Omega)$ e $f \in L^r(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$ e em seguida a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pois $q = 2^*$ (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), decorre que

$$\left| \left\langle I_2'(u+v_n) - I_2'(u) \right\rangle .v \right| \leq K \|f(\cdot,(u+zv_n)(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot))\|_{L^r(\Omega)} . \|v\|. \quad (2.16)$$

Combinando (2.16) com (2.15), e usando a convergência dada em (2.14), chegamos

$$\left\| I_2'(u+v_n) - I_2'(u) \right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)'} \longrightarrow 0,$$

mostrando, assim, a continuidade do funcional I_2', para $N > 2$.

Logo $I_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

2^o **Caso:** $N = 2$.

Neste caso, procederemos de maneira análoga ao 1^o Caso, fazendo apenas algumas modificações que elencaremos abaixo: Primeiramente, substituimos a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q = 2^*$ (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $1 \leq q < \infty$ (Ver Teorema B.14, item ii Apêndice B). Em seguida, utilizando a imersão acima citada, mostra-se que

$$f(\cdot, u) \in L^{\frac{\rho}{\rho-1}}(\Omega),$$

onde $\dfrac{\rho}{\rho - 1}$ é o conjugado de ρ, e

$$f(x, u + zv) \longrightarrow f(x, u) \text{ em } L^{\frac{\rho}{\rho-1}}(\Omega)$$

uniforme em $s \in [0, 1]$.

Unindo os dois casos, mostra-se que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ para $N \geq 2$, com

$$I'(u).v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x, u) v dx, \quad \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

■

Teorema 2.2 *Sob as hipóteses* [**2.1**] − [**2.3**], *o problema (2.1) tem uma solução não-trivial.*

Demonstração: Vamos mostrar que o funcional I verifica as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Note que $I(0) = 0$.

Verificação da Condição [1.1] do Teorema 1.4:

De fato, pela condição [**2.2**], dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t| \leq \delta \Rightarrow |f(x, t)| \leq \epsilon |t|. \tag{2.17}$$

De forma análoga ao que foi feito para demonstrar (2.3) sabendo que, neste caso, substituiremos a condição [**2.1**] por (2.17), concluímos

$$|F(x, t)| \leq \frac{1}{2}\epsilon |t|^2, \text{ para } |t| \leq \delta. \tag{2.18}$$

Por outro lado, usando (2.3) para $|t| > \delta$, obtemos

$$|F(x,t)| \leq \left(\frac{c_1}{\delta^s} + c_2\right) |t|^{s+1} \Rightarrow |F(x,t)| \leq A\, |t|^{s+1}\,, \tag{2.19}$$

com $A = A(\delta) = \left(\frac{c_1}{\delta^s} + c_2\right)$.

Combinando as estimativas (2.18) e (2.19), obtemos

$$|F(x,t)| \leq \frac{1}{2}\epsilon\, |t|^2 + A\, |t|^{s+1}\,, \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{R} \ \ \text{e} \ \ x \in \overline{\Omega}. \tag{2.20}$$

Finalmente, como

$$I(u) = \frac{1}{2}\, \|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx$$

de (2.20) segue,

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\, \|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega u^2 dx - A\int_\Omega |u|^{s+1}\, dx.$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, temos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\, \|u\|^2 - K\epsilon\, \|u\|^2 - M\, \|u\|^{s+1}\,,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \|u\|^2 . \left(\frac{1-2K\epsilon}{2} - M\, \|u\|^{s-1}\right) \ \ \forall \ \ u \in H_0^1(\Omega).$$

Para ϵ suficientemente pequeno e fixando

$$0 < \rho < \left(\frac{1-2K\epsilon}{2M}\right)^{\frac{1}{s-1}}$$

e escolhendo

$$\alpha = \rho^2. \left[\frac{1-2K\epsilon}{2} - M\rho^{s-1}\right],$$

temos

$$I(u) \geq \alpha > 0$$

para $\|u\| = \rho$, mostrando, assim, [**1.1**].

Verificação da Condição [1.2] **do Teorema 1.4:**

Afirmação 2.2 Seja [**2.3**] então

$$F(x,t) \geq a_3\, |t|^\mu - a_4, \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{R} \ \ \text{e} \ \ x \in \overline{\Omega}. \tag{2.21}$$

Observação: Como $\mu > 2$, então F é uma função superquadrática em t pela desigualdade (2.21).

Demonstração da Afirmação 2.2 Considere os seguintes casos:

1^o **Caso:** $t > 0$

Por [**2.3**], obtemos:

$$0 < \frac{\mu}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)}, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$

o que implica

$$\int_r^t \frac{\mu}{z} dz \leq \int_r^t \frac{f(x,z)}{F(x,z)} dz,$$

donde segue

$$\mu \ln |z| \Big|_r^t \leq \ln |F(x,z)| \Big|_r^t, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$

ou seja,

$$\mu \ln t - \mu \ln r \leq \ln F(x,t) - \ln F(x,r), \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, obtemos

$$\ln \left(\frac{t}{r} \right)^{\mu} \leq \ln \frac{F(x,t)}{F(x,r)}, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Concluímos

$$e^{\ln \left(\frac{t}{r} \right)^{\mu}} \leq e^{\ln \frac{F(x,t)}{F(x,r)}}, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$

o que implica

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,r)}{r^{\mu}} t^{\mu}, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Considere

$$K_1 = \min_{x \in \overline{\Omega}} F(x,r).$$

Assim,

$$F(x,t) \geq \frac{K_1}{r^{\mu}} t^{\mu}, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Logo,

$$F(x,t) \geq C_1 t^{\mu}, \ \ t \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}, \tag{2.22}$$

com $C_1 = \dfrac{K_1}{r^{\mu}}$.

2^o **Caso:** $t < 0$

Por [**2.3**], obtemos:

$$\frac{f(x,t)}{F(x,t)} \leq \frac{\mu}{t}, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega}$$

o que implica

$$\int_t^{-r} \frac{f(x,z)}{F(x,z)} dz \leq \int_t^{-r} \frac{\mu}{z} dz, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Analogamente ao primeiro caso, obtemos

$$F(x,t) \geq C_2 |t|^{\mu}, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega}, \tag{2.23}$$

onde $C_2 > 0$.

Seja $a_3 = \min \{C_1, C_2\}$. Logo, por (2.22) e (2.23), obtemos:

$$F(x,t) \geq a_3 |t|^{\mu}, \ \ \forall \ \ |t| \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Por outro lado,

$$F(x,t) \geq M, \ \ \text{para} \ \ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-r,r],$$

onde

$$M = \min_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ t \in [-r,r]}} F(x,t).$$

Considere $a_4 > 0$, de modo que

$$a_4 \geq a_3 r^{\mu} - M \Rightarrow a_4 \geq a_3 |t|^{\mu} - M, \ \ \forall \ \ t \in [-r,r],$$

ou seja,

$$M \geq a_3 |t|^{\mu} - a_4, \ \ \forall \ \ t \in [-r,r].$$

Assim, obtemos

$[R_1]$ $F(x,t) \geq a_3 |t|^{\mu} - a_4, \ \ \forall \ \ t \in [-r,r], \ \ x \in \overline{\Omega}.$

$[R_2]$ $F(x,t) \geq a_3 |t|^{\mu} - a_4, \ \ \forall \ \ |t| \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$

De $[R_1]$ e $[R_2]$ segue (2.21), mostrando, assim, a **Afirmação 2.2.**

Seja $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ fixo. Então, para $t \geq 0$, temos

$$I(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\| - \int_{\Omega} F(x,tu)dx.$$

Assim, por (2.21), obtemos:

$$I(tu) \leq \frac{t^2}{2} \|u\| - a_3 t^{\mu} \int_{\Omega} |u|^{\mu} \, dx - a_4 |\Omega|, \tag{2.24}$$

por causa de (2.18).

Passando o limite em (2.24) quando $t \to +\infty$, concluímos que

$$I(tu) \longrightarrow -\infty,$$

já que $\mu > 2$. Segue que existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|t_0 u\| > \rho \ \text{ e } \ I(t_0 u) < 0,$$

onde podemos escolher $e = t_0 u$.

Portanto, existe $e \in H_0^1(\Omega) - \overline{B_\rho}$ tal que

$$I(e) < 0$$

mostrando [**1.2**].

Verificação da Condição (PS):

Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $|I(u_n)| \leq C$ e $I^{'}(u_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$, mostraremos que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

De fato,

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega F(x,u_n)dx$$

então

$$I^{'}(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx.$$

Além disso,

$$\left|I^{'}(u_n)u_n\right| \leq \left\|I^{'}(u_n)\right\| . \|u_n\|$$

de onde, temos

$$\left|I^{'}(u_n)u_n\right| \leq \|u_n\| \tag{2.25}$$

para n suficientemente grande. Observe agora que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I^{'}(u_n)u_n = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega F(x,u_n)dx - \left(\frac{1}{\mu}\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx\right).$$

Segue-se que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I^{'}(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx.$$

Considerando $A_n = \{x \in \Omega; |u_n| \geq r\}$, tem-se

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I^{'}(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 +$$

$$\int_{A_n} \left(\frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right) dx + \int_{A_n^C} \left(\frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right) dx.$$

Da condição [**2.3**], segue-se

$$\frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \geq 0, \ \ \forall \ \ x \in A_n,$$

o que implica

$$\int_{A_n} \left(\frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right) dx \geq 0,$$

logo

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 + \int_{A_n^C} \left(\frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right) dx,$$

e consequentemente

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - \int_{A_n^C} \left| \frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right| dx.$$

Sendo f e F funções contínuas, segue-se que $g(x,u_n) = \left| \frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right|$ é uma função contínua. Assim, uma vez que $\overline{\Omega} \times [-r,r]$ é um conjunto compacto, obtemos que g é limitada neste compacto, logo existe $C > 0$ tal que

$$|g(x,u_n)| \leq C, \ \ \forall \ \ (x,u_n) \in \overline{\Omega} \times [-r,r],$$

o que implica

$$\left| \frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right| \leq C, \ \ \forall \ \ (x,u_n) \in \overline{A_n^C}.$$

Assim

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - \int_{\overline{A_n^C}} C dx,$$

de onde segue

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - C \left| \overline{A_n^C} \right|.$$

Além disso,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - C |\Omega|,$$

isto é,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - C_2. \tag{2.26}$$

Por outro lado, segue-se

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \leq \left| I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \right|,$$

o que implica

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \leq |I(u_n)| + \frac{1}{\mu}\left| I^{'}(u_n)u_n \right|.$$

Usando o fato que $|I(u_n)| \leq C$ e (2.25), obtemos

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I^{'}(u_n)u_n \leq C + \frac{1}{\mu}\|u_n\|, \tag{2.27}$$

para n suficientemente grande. De (2.26) e (2.27), tem-se

$$C + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - C_2,$$

para n suficientemente grande. Fixando $\tilde{M} = C + C_2 > 0$, $\tilde{K} = \dfrac{1}{\mu} > 0$ e $\tilde{C} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mu}\right) > 0$, obtemos

$$\tilde{M} + \tilde{K}\|u_n\| \geq \tilde{C}\|u_n\|^2,$$

para n suficientemente grande, mostrando que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Provaremos que (u_n) possui uma subseqüência convergente. De fato, sabemos que o funcional dado por (2.2) é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I^{'}(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx, \text{ onde } I^{'}(u) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^{'}.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema da Representação de Riesz (Ver Teorema B.3, Apêndice B), temos

$$I^{'}(u).v = \langle \nabla I(u), v \rangle, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega), \text{ com } \left\| I^{'}(u) \right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^{'}} = \|\nabla I(u)\|. \tag{2.28}$$

Considere

$$J^{'}(u).v = \int_\Omega f(x,u)v dx. \tag{2.29}$$

Assim,

$$I^{'}(u).v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - J^{'}(u).v, \ \forall \ u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.30}$$

Usando novamente o Teorema da Representação de Riesz (Ver Teorema B.3, Apêndice B), para (2.29), obtemos:

$$J^{'}(u).v = \langle \nabla J(u), v \rangle, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \left\| J^{'}(u) \right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^{'}} = \|\nabla J(u)\|. \tag{2.31}$$

Logo, substituindo (2.28) e (2.31) em (2.30), obtemos

$$\langle \nabla I(u), v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle \nabla J(u), v \rangle$$

o que implica

$$\langle \nabla I(u), v \rangle = \langle u - \nabla J(u), v \rangle \,, \ \ \forall \ \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Conseqüentemente,

$$\nabla I(u) = u - \nabla J(u). \tag{2.32}$$

Considere a seguinte aplicação $T : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$, com $T(u) = \nabla J(u)$. Assim, por (2.32), obtemos

$$\nabla I(u) = u - T(u).$$

Afirmação 2.3 O operador $T : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ é compacto.

De fato, considere $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma seqüência limitada. Devemos mostrar que a seqüência $T(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ possui uma subseqüência convergente.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo (Ver Teorema B.22, Apêndice B), então existe uma subseqüência (que continuaremos denotando por (u_n)) tal que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Da imersão compacta de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \ \ \forall \ \ r \in [1, 2^*]$ (Ver Teorema B.16, item i Apêndice B), implica que

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^r(\Omega)$$

é um operador linear compacto.

Logo (Ver Teorema B.10, Apêndice B),

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ em } \ L^r(\Omega). \tag{2.33}$$

Agora, fixando r, com $s + 1 \leq r < 2^*$ e considerando q o conjugado de r, isto é, $q = \dfrac{r}{r-1}$. Vamos mostrar que

$$f\left(\cdot, u_n(\cdot)\right) \longrightarrow f\left(\cdot, u(\cdot)\right) \ \text{ em } \ L^q(\Omega).$$

De fato, segue de (2.33) (Ver Teorema B.13, Apêndice B) que, a menos de subseqüência,

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \;\; \text{q.t.p} \;\; x \in \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq G(x) \;\; \text{q.t.p} \;\; x \in \Omega, \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N} \;\; \text{e} \;\; G \in L^r(\Omega). \tag{2.34}$$

Desde que f é uma função de Carathéodory, temos

$$f\left(x, u_n(x)\right) \longrightarrow f\left(x, u(x)\right) \;\; \text{q.t.p} \;\; x \in \Omega,$$

e daí,

$$\left|f\left(x, (u_n)(x)\right) - f\left(x, u(x)\right)\right|^{\frac{r}{s}} \longrightarrow 0 \;\; \text{q.t.p} \;\; x \in \Omega.$$

Além disso, usando a condição de crescimento dada por [**2.1**], a limitação uniforme em (2.34) e o fato de Ω ser limitado, resulta que existe uma função $\Phi \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left|f\left(x, (u_n)(x)\right) - f\left(x, u(x)\right)\right|^{\frac{r}{s}} \leq \Phi,$$

donde segue-se, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema B.7, Apêndice B), que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_\Omega \left|f\left(x, (u_n)(x)\right) - f\left(x, u(x)\right)\right|^{\frac{r}{s}} dx \right) = 0,$$

isto é,

$$f(\cdot, u_n(\cdot)) \longrightarrow f(\cdot, u) \;\; \text{em} \;\; L^{\frac{r}{s}}(\Omega).$$

Como $1 < q < \dfrac{r}{s}$ e Ω é limitado (Ver Teorema B.19, Apêndice B), então vale a seguinte imersão contínua

$$L^{\frac{r}{s}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Logo,

$$\left\|f\left(\cdot, u_n(\cdot)\right) - f\left(\cdot, u(\cdot)\right)\right\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0 \;\; \text{quando} \;\; n \to +\infty. \tag{2.35}$$

Note que

$$\|T(u_n) - T(u)\| = \left\|J'(u_n) - J'(u)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)'} = \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \left(J'(u_n) - J'(u)\right).v \right|.$$

Mas,

$$\left|\left(J^{'}(u_n)-J^{'}(u)\right).v\right|=\left|\int_{\Omega}\left(f(x,u_n)-f(x,u)\right).vdx\right|$$

o que implica

$$\left|\left(J^{'}(u_n)-J^{'}(u)\right).v\right|\leq\int_{\Omega}\left|f(x,u_n)-f(x,u)\right|.\left|v\right|dx$$

aplicando Hölder (Ver Teorema B.5, Apêndice B), obtemos:

$$\left|\left(J^{'}(u_n)-J^{'}(u)\right).v\right|\leq\left\|f\left(\cdot,u_n(\cdot)\right)-f\left(\cdot,u(\cdot)\right)\right\|_{L^q(\Omega)}\left\|v\right\|_{L^r(\Omega)}.$$

Usando a imersão contínua $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega)$, com $r\in[s+1,2^*]$ (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B) temos

$$\left|\left(J^{'}(u_n)-J^{'}(u)\right).v\right|\leq M\left\|f\left(\cdot,u_n(\cdot)\right)-f\left(\cdot,u(\cdot)\right)\right\|_{L^q(\Omega)}\left\|v\right\|$$

de onde obtemos:

$$\left|\left(J^{'}(u_n)-J^{'}(u)\right).v\right|\leq M\left\|f\left(\cdot,u_n(\cdot)\right)-f\left(\cdot,u(\cdot)\right)\right\|_{L^q(\Omega)},\quad\text{pois}\quad\left\|v\right\|\leq 1.$$

Logo,

$$\left\|J^{'}(u_n)-J^{'}(u)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^{'}}\leq M\left\|f\left(\cdot,u_n(\cdot)\right)-f\left(\cdot,u(\cdot)\right)\right\|_{L^q(\Omega)},$$

isto é,

$$\left\|T(u_n)-T(u)\right\|\leq M\left\|f\left(\cdot,u_n(\cdot)\right)-f\left(\cdot,u(\cdot)\right)\right\|_{L^q(\Omega)}.\tag{2.36}$$

Assim de (2.35) e (2.36), obtemos que, a menos de subseqüência,

$$\left\|T(u_n)-T(u)\right\|\longrightarrow 0.\tag{2.37}$$

Mostrando que T é compacto, isto é, provamos a **Afirmação 2.3.**

Por outro lado,

$$I^{'}(u_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\quad\Leftrightarrow\quad\left\|I^{'}(u_n)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^{'}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\,.\tag{2.38}$$

Logo, por (2.28) e (2.38), temos

$$\left\|\nabla I(u_n)\right\|\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\quad\Leftrightarrow\quad\nabla I(u_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\,.\tag{2.39}$$

Sendo

$$\nabla I(u_n) = u_n - T(u_n) \Rightarrow u_n = \nabla I(u_n) + T(u_n). \tag{2.40}$$

Passando o limite em (2.40) e usando as convergências (2.37) e (2.39), obtemos, a menos de subseqüência, que

$$u_n \longrightarrow T(u) \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

mostrando, assim, a **condição (PS). Observação:** Mostramos a **condição (PS)** para $N > 2$. Já o caso em que $N = 2$, basta substituir a imersão contínua e compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \ 1 \leq q < 2^*$ (Ver Teorema B.14 e Teorema B.16, item i Apêndice B) pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ (Ver Teorema B.14 e Teorema B.16, item ii Apêndice B).

Portanto, aplicando o **Teorema 1.4** (Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti Rabinowitz), concluímos a existência de um ponto crítico de I, isto é, uma solução fraca do problema (2.1). ■

Capítulo 3

Existência de solução fraca para um problema de Dirichlet não-linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz mais geral

Estudaremos a existência de solução fraca para o problema (2.1) definido no capítulo anterior segundo os trabalhos de Martin and Zou [20]. Mostraremos a existência de solução através do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale e também via Métodos de Mínimização.

3.1 Existência de solução para um problema de Dirichlet não-linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz mais geral

Nesta seção vamos demonstrar a existência de solução fraca para o problema (2.1). Uma das ferramentas que vamos usar é o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale.

Considere $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função carathéodory e f satisfaz as seguintes hipóteses:

[**3.1**] A função $f(x,t)$ satisfaz

$$|f(x,t)| \leq |t|^s + 1,$$

onde $1 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, ou $s > 1$, se $N = 2$;

[**3.2**] $f(x,t) = o(|t|^s)$ quando $|t| \to +\infty$, $\forall \ x \in \Omega$;

[**3.3**] Existem $\delta > 0$ e um $\lambda < \lambda_1$ tais que

$$2F(x,t) \leq \lambda t^2, \ \ |t| \leq \delta, \ \ x \in \Omega,$$

onde λ_1 é o autovalor associado a autofunção φ_1 para o operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz;$$

[**3.4**] Existe uma função $W \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ tal que

$$W(x) \leq \frac{F(x,t)}{t^2} \longrightarrow \infty \ \text{ quando } \ t \to \infty, \ \ x \in \Omega$$

ou

$$W(x) \leq \frac{F(x,t)}{t^2} \longrightarrow \infty \ \text{ quando } \ t \to -\infty, \ \ x \in \Omega;$$

[**3.5**] Existem constantes $\mu > 2$, $C \geq 0$ tais que

$$[\mu F(x,t) - tf(x,t)] \leq C(t^2+1), \ \ t \in \mathbb{R}, \ \ x \in \Omega.$$

Observação: Pela hipótese [**3.4**], concluímos que F é uma função superquadrática em t, pois caso contrário $\dfrac{F(x,t)}{t^2}$ não converge para ∞ quando $t \to \pm\infty$. Além disso, a hipótese [**3.5**] é conhecida como a condição de Ambrosetti-Rabinowitz generalizada.

Defina

$$I(u) = \|u\|^2 - 2\int_\Omega F(x,u)dx. \tag{3.1}$$

Proposição 3.1 *Sob a hipótese* [**3.1**], *temos* $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ *e*

$$I'(u)v = 2\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - 2\int_\Omega f(x,u)v dx, \ \ u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

Observação: A demonstração desta proposição é inteiramente análoga a proposição 2.1.

Teorema 3.2 *Sob as hipóteses* $[\mathbf{3.1}] - [\mathbf{3.5}]$, *o problema (2.1) tem uma solução não-trivial.*

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que o funcional I satisfaz à Geometria do Teorema Passo da Montanha. Mostraremos que existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$I(u) \geq \alpha, \quad \text{para} \quad \|u\| = \rho. \tag{3.3}$$

De fato, da condição $[\mathbf{3.2}]$, dado $\rho > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t| > \delta \Rightarrow |f(x,t)| \leq \rho\,|t|^s\,, \quad x \in \Omega.$$

De (3.3), temos

$$|F(x,t)| \leq \rho\,|t|^{s+1}\,, \quad \text{para} \quad |t| > \delta. \tag{3.4}$$

Combinando a estimativa (3.4) e a hipótese $[\mathbf{3.3}]$, obtemos

$$F(x,t) \leq \frac{\lambda}{2}t^2 + \rho\,|t|^{s+1} \quad \forall \ t. \tag{3.5}$$

Finalmente, de (3.5) e (3.1), tem-se

$$I(u) \geq \|u\|^2 - \lambda \int_\Omega u^2 dx - 2\rho \int_\Omega |u|^{s+1}\,dx,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \|u\|^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\|u\|^2 - 2\rho \int_\Omega |u|^{s+1}\,dx.$$

Pela imersão contínua, concluímos

$$I(u) \geq \|u\|^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\|u\|^2 - 2\rho C\,\|u\|^{s+1}\,,$$

Considere $\rho = \|u\|$, assim, obtemos:

$$I(u) \geq \rho^2.\left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - 2C\rho^{s-1}\right].$$

Portanto, para ρ suficientemente pequeno, temos

$$1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - 2C\rho^{s-1} > 0,$$

e escolhendo

$$\alpha = \rho^2\left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - 2C\rho^{s-1}\right]$$

implica

$$I(u) \geq \alpha > 0, \quad \text{para} \quad \|u\| = \rho.$$

Vamos agora mostrar que existe $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| > \rho$ tal que

$$I(v) < 0.$$

De fato, considere $\varphi_1(x) \neq 0$ q.t.p em Ω uma autofunção associada ao autovalor λ_1 para o operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Daí, temos $R\varphi_1(x) \to \pm\infty$, quando $R \to +\infty$. Então

$$\frac{F(x, \pm R\varphi_1(x))}{R^2\varphi_1^2(x)}\varphi_1^2(x) \to +\infty, \quad \text{q.t.p } x \in \Omega \tag{3.6}$$

devido a hipótese [**3.4**]. Mostraremos que

$$\int_\Omega \frac{F(x, \pm R\varphi_1(x))}{R^2\varphi_1^2(x)}\varphi_1^2(x)dx \to +\infty,$$

quando $R \to +\infty$.

De fato, considere $\Omega_\alpha = \left\{x \in \overline{\Omega}; \varphi_1(x) \geq \alpha\right\}$ onde

$$\alpha < M = \max_{x \in \overline{\Omega}} \varphi_1(x).$$

Em Ω_α, temos

$$\varphi_1(x) \geq \min_{x \in \overline{\Omega}_\alpha} \varphi_1(x) = B \geq \alpha.$$

De (3.6), dado $M > 0$ existem $N > 0$ e $R > 0$ tais que
$|RB| > N \;\; \Rightarrow \;\; |R\varphi_1(x)| > N$ com $x \in \overline{\Omega}_\alpha$, temos

$$\frac{F(x, \pm R\varphi_1(x))}{R^2\varphi_1^2(x)}\varphi_1^2(x) > M.$$

Por outro lado, temos

$$\frac{F(x, \pm R\varphi_1(x))}{R^2\varphi_1^2(x)}\varphi_1^2(x) > \frac{F(x, \pm R\varphi_1(x))}{R^2} \geq \frac{K}{R^2},$$

onde

$$K = \min_{x \in \overline{\Omega}_\alpha^C} F(x, \pm R\varphi_1),$$

pois F é contínua.

Portanto,

$$\int_\Omega \frac{F(x, \pm R\varphi_1)}{R^2\varphi_1^2}\varphi_1^2 dx = \int_{\Omega - \overline{\Omega}_\alpha} \frac{F(x, \pm R\varphi_1)}{R^2\varphi_1^2}\varphi_1^2 dx + \int_{\overline{\Omega}_\alpha} \frac{F(x, \pm R\varphi_1)}{R^2\varphi_1^2}\varphi_1^2 dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \frac{F(x, \pm R\varphi_1)}{R^2\varphi_1^2}\varphi_1^2 dx \geq \int_{\Omega-\overline{\Omega}_\alpha} \frac{K}{R^2}dx + \int_{\overline{\Omega}_\alpha} M dx \geq \frac{K}{R^2}\left|\Omega - \overline{\Omega}_\alpha\right| + M\left|\overline{\Omega}_\alpha\right|.$$

Como $R \to +\infty$, então para R suficientemente grande, temos

$$\tilde{M} = \frac{K}{R^2}\left|\Omega - \overline{\Omega}_\alpha\right| + M\left|\overline{\Omega}_\alpha\right| > 0.$$

Concluímos que dado $\tilde{M} > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que $R > R_0$ implica

$$\int_\Omega \frac{F(x, \pm R\varphi_1(x))}{R^2\varphi_1^2(x)}\varphi_1^2(x) dx \geq \tilde{M}.$$

Logo,

$$\int_\Omega \frac{F(x, \pm R\varphi_1(x))}{R^2\varphi_1^2(x)}\varphi_1^2(x) dx \to +\infty$$

quando $R \to +\infty$.

Sabemos que

$$\frac{I(\pm R\varphi_1)}{R^2} = \|\varphi_1\|^2 - 2\int_\Omega \frac{F(x, \pm R\varphi_1)}{R^2\varphi_1^2}\varphi_1^2 dx$$

passando ao limite na última expressão, obtemos

$$\frac{I(\pm R\varphi_1)}{R^2} \longrightarrow -\infty \text{ quando } R \to \infty.$$

Segue a existência de $R_0 > 0$ tal que

$$\|R_0\varphi_1\| > \rho \text{ e } I(R_0\varphi_1) < 0,$$

de onde podemos escolher $v = R_0\varphi_1$.

Logo, existe $v \in H_0^1(\Omega) - \overline{B_\rho(0)}$ tal que

$$I(v) < 0.$$

Note que $I(0) = 0$ e

$$I(v) < I(0) < \inf_{\|u\|=\rho} I(u), \quad \text{com} \quad \|v\| > \rho.$$

Portanto, pelo **Teorema 1.5**, para todo $\epsilon > 0$ existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

(I) $c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$

$(II) \left\| I^{'}(u) \right\| \leq 2\epsilon,$

onde

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I\left(g(t)\right)$$

e

$$\Gamma = \left\{ g \in C([0,1], H_0^1(\Omega)); \;\; g(0) = 0 \;\; e \;\; g(1) = v \right\}.$$

Concluímos que existe uma seqüência $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que:

$(I) \;\; c - \dfrac{2}{k} \leq I(u_k) \leq c + \dfrac{2}{k}$

$(II) \left\| I^{'}(u_k) \right\| \leq \dfrac{2}{k}.$

Passando o limite em (I) e (II) quando $k \to +\infty$, obtemos:

$$I(u_k) \longrightarrow c \geq \alpha$$

e

$$I^{'}(u_k) \longrightarrow 0. \tag{3.7}$$

Considere $\rho_k = \|u_k\|$, onde $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$.

Afirmação 3.1 ρ_k é limitada.

Suponha que ρ_k não seja limitada, isto é, $\forall \;\; M > 0$ existe $K_M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_{K_M}\| > M.$$

Assim, existe uma subseqüência $\rho_{k_j} \subset \rho_k$ tal que

$$\rho_{k_j} \to +\infty. \tag{3.8}$$

Vamos denotar ρ_{k_j} por ρ_k.

Seja $\tilde{u}_k = \dfrac{u_k}{\rho_k}$, então $\|\tilde{u}_k\| = 1$. E mais,

$$I(u_k) = \rho_k^2 - 2\int_\Omega F(x, u_k)dx \longrightarrow c \tag{3.9}$$

e

$$I^{'}(u_k).u_k = 2\rho_k^2 - 2\int_\Omega f(x, u_k)u_k dx. \tag{3.10}$$

Como a seqüência $\tilde{u}_k$ é limitada e $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert (Ver Teorema B.21, Apêndice B), então, a menos de subseqüência, temos

$$\tilde{u}_k \rightharpoonup \tilde{u} \;\; \text{em} \;\; H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado,

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é um operador linear compacto. Assim (Ver Teorema B.10, Apêndice B),

$$\tilde{u}_k \longrightarrow \tilde{u} \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Daí (Ver Teorema B.13, Apêndice B), existe uma subseqüência de $(\tilde{u}_k)$ (que continuaremos denotando por $(\tilde{u}_k)$) tal que

$$\tilde{u}_k(x) \longrightarrow \tilde{u}(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega. \tag{3.11}$$

Por (3.9) e (3.8) segue,

$$1 - \int_\Omega \frac{2F(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx = \frac{I(u_k)}{\rho_k^2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \frac{2F(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx \ \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ 1 \ . \tag{3.12}$$

Logo

$$\int_\Omega \frac{\mu F(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx \ \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ \frac{\mu}{2} \ . \tag{3.13}$$

De (3.10), temos:

$$1 - \int_\Omega \frac{f(x,u_k).u_k}{\rho_k^2} dx = \frac{I'(u_k)u_k}{2\rho_k.\rho_k}$$

o que implica

$$1 - \int_\Omega \frac{f(x,u_k)u_k}{\rho_k^2}.\frac{u_k^2}{u_k^2} dx = \frac{I'(u_k)\tilde{u}_k}{2\rho_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \frac{u_k f(x,u_k)\tilde{u}_k^2}{u_k^2} dx \ \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ 1 \ . \tag{3.14}$$

Seja $\Omega_1 = \{x \in \Omega; \tilde{u}(x) \neq 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$. Então:

$$\frac{2F\left(x,u_k(x)\right).\tilde{u}_k^2(x)}{u_k^2(x)} \longrightarrow +\infty, \ \ x \in \Omega_1. \tag{3.15}$$

De fato, como $u_k(x) = \rho_k \tilde{u}_k(x)$, então:

$$\frac{2F\left(x,\rho_k\tilde{u}_k(x)\right).\tilde{u}_k^2(x)}{\rho_k^2\tilde{u}_k^2(x)} \longrightarrow +\infty, \ \ x \in \Omega_1, \ \ \text{quando} \ \ \rho_k \to \infty,$$

por causa da hipótese [**3.4**] e (3.11), pois

$$\rho_k \tilde{u}_k(x) \to +\infty, \text{ se } \tilde{u}(x) > 0$$

ou

$$\rho_k \tilde{u}_k(x) \to -\infty, \text{ se } \tilde{u}(x) < 0.$$

Portanto, mostramos (3.15).

Mostraremos que

$$\int_\Omega W(x)\tilde{u}_k^2 dx \leq M, \tag{3.16}$$

onde $W \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $\tilde{u}_k \in H_0^1(\Omega)$.

De fato, como $\tilde{u}_k \in H_0^1(\Omega)$ segue da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $q \in [1, 2^*]$ (Ver Teorema B.16, item i Apêndice B), que

$$\tilde{u}_k \in L^q(\Omega) \;\; \Rightarrow \;\; \tilde{u}_k \in L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega), \text{ pois } 1 < \frac{N}{N-2} < 2^*.$$

Desde que $W(x) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $\tilde{u}_k \in L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$, onde $\frac{1}{N/2} + \frac{1}{N/N-2} = 1$, segue da desigualdade de Hölder (Ver Teorema B.5, Apêndice B),

$$\int_\Omega W(x)\tilde{u}_k^2 dx \leq \left(\int_\Omega (W(x))^{\frac{N}{2}} dx\right)^{\frac{1}{N/2}} \cdot \left(\int_\Omega (\tilde{u}_k)^{\frac{2N}{N-2}} dx\right)^{\frac{2}{2N/N-2}},$$

ou seja,

$$\int_\Omega W(x)\tilde{u}_k^2 dx \leq \|W\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \cdot \|\tilde{u}_k\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C \|W\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \cdot \|\tilde{u}_k\|^2 \leq M.$$

Logo, mostramos (3.16).

Suponha que Ω_1 tem medida positiva, e mais

$$\int_\Omega \frac{2F(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx \geq \int_{\Omega_1} \frac{2F(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx + \int_{\Omega_2} \frac{2F(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx$$

pela condição [**3.4**] temos:

$$\int_\Omega \frac{2F(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx \geq \int_{\Omega_1} \frac{2F(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx + \int_{\Omega_2} 2W(x)\tilde{u}_k^2 dx. \tag{3.17}$$

Passando o limite quando $k \to +\infty$ em (3.17) e usando (3.12), (3.15) e (3.16), obtemos um absurdo, pois 1 não pode ser maior ou igual do que $+\infty$.

Logo,

$$|\Omega_1| = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \tilde{u}(x) = 0 \;\text{ q.t.p }\; \text{em } \; \Omega.$$

Assim por (3.11), concluímos, a menos de subseqüência, que

$$\tilde{u}_k(x) \longrightarrow 0 \;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega.$$

Por outro lado, de (3.13) e (3.14), temos

$$\int_\Omega \frac{\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx \longrightarrow \frac{\mu}{2} - 1,$$

onde $\frac{\mu}{2} - 1 > 0$.

Pela hipótese [**3.5**], temos

$$\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k) - C(u_k^2+1) \leq 0 \Rightarrow \frac{\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 - C\frac{(u_k^2+1)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 \leq 0,$$

ou seja,

$$C\frac{(u_k^2+1)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 - \frac{\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 \geq 0.$$

Logo, pelo Teorema B.25, Apêndice B, obtemos

$$\int_\Omega \liminf_{k\to\infty}\left(C\frac{(u_k^2+1)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 - \frac{\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2\right)dx$$
$$\leq \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega \left(C\frac{(u_k^2+1)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 - \frac{\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2\right)dx,$$

o que implica

$$\int_\Omega \liminf_{k\to\infty} C\frac{(u_k^2+1)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx + \int_\Omega \liminf_{k\to\infty}\left(-\frac{\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2\right)dx$$
$$\leq \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega C\frac{(u_k^2+1)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx + \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega \left(-\frac{\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2\right)dx.$$

Segue então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema B.7, Apêndice B), que

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega C\frac{(u_k^2+1)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx \to 0,$$

pois $\tilde{u}_k$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Daí, temos

$$-\int_\Omega \limsup_{k\to\infty}\frac{\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx \leq -\limsup_{k\to\infty}\int_\Omega \frac{\mu F(x,u_k) - u_k f(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 dx,$$

o que implica

$$\lim_{k\to\infty}\sup\int_\Omega \frac{\mu F(x,u_k)-u_kf(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2dx \leq \int_\Omega \lim_{k\to\infty}\sup \frac{\mu F(x,u_k)-u_kf(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2dx. \tag{3.18}$$

Mas, pela hipótese [**3.5**],

$$\lim_{k\to\infty}\sup \frac{\mu F(x,u_k)-u_kf(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 \leq \lim_{k\to\infty}\sup C\frac{(u_k^2+1)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2 = 0. \tag{3.19}$$

Segue, por (3.18) e (3.19), que

$$\lim_{k\to\infty}\sup\int_\Omega \frac{\mu F(x,u_k)-u_kf(x,u_k)}{u_k^2}\tilde{u}_k^2dx \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{\mu}{2}-1\leq 0,$$

o que é um absurdo, pois $\dfrac{\mu}{2}-1>0$.

Logo, ρ_k é limitada.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo e $\{u_k\}$ uma seqüência limitada (Ver Teorema B.21, Apêndice B), então existe uma subseqüência (que continuaremos denotando por $\{u_k\}$) tal que

$$u_k \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega)$$

o que implica (Ver Teorema B.11, Apêndice B),

$$J(u_k)\longrightarrow J(u) \ \ \forall \ \ J\in (H_0^1(\Omega))'. \tag{3.20}$$

Em particular (3.20), vale para $I'\in (H_0^1(\Omega))'$, ou seja,

$$I'(u_k)\longrightarrow I'(u).$$

De (3.7), a menos de subseqüência, temos

$$I'(u_k)\longrightarrow 0.$$

Por unicidade de limite, obtemos:

$$I'(u)=0$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)vdx, \ \ \forall \ \ v\in H_0^1(\Omega).$$

Afirmação 3.2 u é uma solução não-trivial, isto é, $u \neq 0$.

Se $u = 0$ então

$$I(u) = I(0) = 0$$

o que é um absurdo, pois

$$I(u) = c \geq \alpha > 0.$$

Logo, $u \neq 0$.

Isto completa a prova do **Teorema 3.2.** ■

3.2 Existência de solução para um problema de Dirichlet não-linear sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Nesta seção vamos mostrar a existência de solução fraca para o problema (2.1) Via Métodos de Mínimização.

Considere as seguintes hipóteses:

[**3**.**6**] Existem um $\delta > 0$ e um $\tilde{\lambda} > \lambda_1$ tal que

$$2F(x,t) \geq \tilde{\lambda} t^2, \ \ |t| \leq \delta, \ \ x \in \Omega;$$

[**3**.**7**] Existem uma função $W \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ tal que

$$W(x) \geq P(x,t) \longrightarrow -\infty \ \ quando \ \ |t| \to +\infty, \ \ x \in \Omega$$

onde

$$P(x,t) = F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 t^2.$$

Observação: Pela hipótese [**3**.**7**], concluímos que F não é uma função superquadrática em t, pois caso contrário, passando o limite em $P(x,t) = F(x,t) - \dfrac{1}{2}\lambda_1 t^2$ quando $|t| \to +\infty$, teríamos menos infinito à esquerda e mais infinito à direita, o que é absurdo.

Teorema 3.3 *Sob as hipóteses* [**3**.**1**], [**3**.**2**], [**3**.**6**] *e* [**3**.**7**] *o problema (2.1) tem uma solução não-trivial.*

Para provar o **teorema 3.3**, usaremos os seguintes Lemas:

Lema 3.1 *Sob a hipótese* [**3.6**], *existe um* $\alpha \neq 0$ *tal que* $I(\alpha\varphi_1) < 0$.

Demonstração: Suponha que $\|\varphi_1\| = 1$. Veja o seguinte,

$$\alpha\varphi_1(x) > \delta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha\varphi_1(x)}{\delta} > 1.$$

Como $s+1 \geq 2$. Assim,

$$\frac{\alpha^2\varphi_1^2(x)}{\delta^2} \leq \frac{\alpha^{s+1}\varphi_1^{s+1}(x)}{\delta^{s+1}} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2\varphi_1^2(x) \leq \frac{\alpha^{s+1}\varphi_1^{s+1}(x)}{\delta^{s-1}}. \tag{3.21}$$

Por outro lado, pela condição [**3.2**], dado qualquer $\alpha > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \alpha\,|t|^s\,, \quad |t| > \delta, \quad x \in \Omega$$

o que implica,

$$-F(x,t) \leq |F(x,t)| \leq \alpha\,|t|^{s+1}\,, \quad |t| > \delta, \quad x \in \Omega. \tag{3.22}$$

Assim,

$$I(\alpha\varphi_1) = \alpha^2 - 2\int_\Omega F(x,\alpha\varphi_1)dx$$

conseqüentemente,

$$I(\alpha\varphi_1) = \alpha^2 - 2\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|\leq\delta\}} F(x,\alpha\varphi_1)dx - 2\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|>\delta\}} F(x,\alpha\varphi_1)dx$$

por [**3.6**] e (3.22), obtemos

$$I(\alpha\varphi_1) \leq \alpha^2 - \tilde{\lambda}\alpha^2\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|\leq\delta\}} \varphi_1^2(x)dx + 2\alpha^{s+2}\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|>\delta\}} |\varphi_1(x)|^{s+1}\,dx$$

de onde segue,

$$I(\alpha\varphi_1) \leq \alpha^2 - \tilde{\lambda}\alpha^2\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|\leq\delta\}} \varphi_1^2(x)dx - \tilde{\lambda}\alpha^2\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|>\delta\}} \varphi_1^2(x)dx$$

$$+\tilde{\lambda}\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|>\delta\}} (\alpha\varphi_1(x))^2\,dx + 2\alpha^{s+2}\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|>\delta\}} |\varphi_1(x)|^{s+1}\,dx.$$

Por (3.21), temos

$$I(\alpha\varphi_1) \leq \alpha^2 - \tilde{\lambda}\alpha^2\,\|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{\lambda}\frac{\alpha^{s+1}}{\delta^{s-1}}\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|>\delta\}} |\varphi_1(x)|^{s+1} + 2\alpha^{s+2}\int_{\{x\in\Omega;|\alpha\varphi_1(x)|>\delta\}} |\varphi_1(x)|^{s+1}\,.$$

Usando teoria da medida, temos

$$I(\alpha\varphi_1) \leq \alpha^2 - \tilde{\lambda}\alpha^2 \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{\lambda}\frac{\alpha^{s+1}}{\delta^{s-1}} \int_\Omega |\varphi_1(x)|^{s+1} dx + 2\alpha^{s+2} \int_\Omega |\varphi_1(x)|^{s+1} dx,$$

ou seja,

$$I(\alpha\varphi_1) \leq \alpha^2 - \tilde{\lambda}\alpha^2 \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\tilde{\lambda}\frac{1}{\delta^{s-1}} + 2\alpha\right).\alpha^{s+1}.\|\varphi_1\|^{s+1}_{L^{s+1}(\Omega)}.$$

Pela imersão contínua (Ver Teorema B.14, item i Apêndice B), concluímos

$$I(\alpha\varphi_1) \leq \alpha^2.\left[1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_1}\right) + \left(\tilde{\lambda}\frac{1}{\delta^{s-1}} + 2\alpha\right).\alpha^{s-1}.C\right].$$

Logo, para α suficientemente pequeno, obtemos:

$$I(\alpha\varphi_1) < 0.$$

■

Lema 3.2 *Sob a hipótese* [**3.7**],

$$I(u) \to \infty \ \ \textit{quando} \ \ \|u\| \to \infty.$$

Demonstração: Suponha que não seja verdade, isto é, $\exists \ L > 0$ tal que $\forall \ N > 0$ existe u_N, com

$$\|u_N\| > N \ \text{ e } \ I(u_N) \leq L.$$

Portanto, existem $L > 0$ e uma seqüência $\{u_k\} \subset H^1_0(\Omega)$ tal que $\rho_k = \|u_k\| \to \infty$ e

$$I(u_k) \leq L.$$

No que segue, considere

$$u_k = w_k + \alpha_k\varphi_1, \ \text{ onde } \ w_k \perp \varphi_1,$$

com $H^1_0(\Omega) = \langle\varphi_1\rangle + \langle\varphi_1\rangle^\perp, \ \alpha_k = \langle u_k, \varphi_1\rangle$ e $w_k = u_k - \langle u_k, \varphi_1\rangle.\varphi_1$.

Se $\lambda_2 > \lambda_1$, onde λ_2 é o primeiro autovalor maior que λ_1 associado ao operador $(-\Delta, H^1_0(\Omega))$ (Ver Teorema A.2, Apêndice A), então

$$\lambda_2 \|w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|w\|^2, \ \ w \perp \varphi_1. \tag{3.23}$$

Assim,

$$I(u_k) = \|u_k\|^2 - 2\int_\Omega F(x,u_k)dx$$

e pela hipótese [**3.7**], obtemos:

$$I(u_k) = \|u_k\|^2 - \lambda_1 \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\int_\Omega P(x,u_k)dx,$$

de onde segue

$$I(u_k) = \|w_k\|^2 + \alpha_k^2 - \lambda_1 \|w_k\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\lambda_1\alpha_k \langle w_k, \varphi_1\rangle_{L^2(\Omega)} - \lambda_1\alpha_k^2 \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\int_\Omega P(x,u_k)dx.$$

Portanto, pelo Teorema A.1, Apêndice A e por (3.23), temos

$$L \geq I(u_k) \geq \|w_k\|^2 + \alpha_k^2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\|w_k\|^2 - \alpha_k^2 - 2\int_\Omega P(x,u_k)dx, \tag{3.24}$$

ou seja,

$$L \geq \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\|w_k\|^2 - 2\int_\Omega W(x)dx. \tag{3.25}$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos:

1^o **caso:** $\|w_k\|$ não é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Assim, para todo $M > 0$ existe $K_M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w_{K_M}\| > M.$$

Logo, existe uma subseqüência de (w_k) (que continuaremos denotando por (w_k)) tal que

$$\|w_k\| \to +\infty.$$

Portanto, a menos de subseqüência, passando o limite em (3.25), obtemos um absurdo, pois L não pode ser maior ou igual do que $+\infty$.

2^o **caso:** $\|w_k\|$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Escreve-se

$$\tilde{w}_k = \frac{w_k}{\rho_k}, \quad \tilde{\alpha}_k = \frac{\alpha_k}{\rho_k} \quad \text{e} \quad \tilde{u}_k = \frac{u_k}{\rho_k}, \quad \text{onde} \quad w_k \perp \varphi_1 \quad \text{e} \quad \rho_k = \|u_k\| \to +\infty.$$

Assim,

$$\|\tilde{w}_k\| = \frac{\|w_k\|}{\rho_k} \longrightarrow 0, \quad \text{pois} \quad \rho_k \to +\infty. \tag{3.26}$$

De (3.26), segue a seguinte convergência

$$|\tilde{\alpha}_k| \longrightarrow 1, \tag{3.27}$$

pois

$$|\tilde{\alpha}_k| = \frac{|\alpha_k|}{\rho_k} = \frac{\sqrt{\|u_k\|^2 - \|w_k\|^2}}{\rho_k} = \sqrt{1 - \|\tilde{w}_k\|} \longrightarrow 1.$$

Por (3.26), concluímos que $\tilde{w}_k$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então (Ver Teorema B.21, Apêndice B) existe uma subseqüência $(\tilde{w}_{k_r}) \subset (\tilde{w}_k)$ tal que

$$\tilde{w}_{k_r} \rightharpoonup \tilde{w} \ \text{ em } \ \Omega.$$

Por outro lado,

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é um operador linear compacto. Assim (Ver Teorema B.10, Apêndice B),

$$\tilde{w}_{k_r} \longrightarrow \tilde{w} \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Daí (Ver Teorema B.13, Apêndice B), existe uma subseqüência de $(\tilde{w}_{k_r})$ (que continuaremos denotando por $(\tilde{w}_{k_r})$ tal que

$$\tilde{w}_{k_r}(x) \longrightarrow \tilde{w}(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega. \tag{3.28}$$

Além disso, (Ver Teorema B.11, Apêndice B),

$$\|\tilde{w}\| \leq \lim_{k_r \to \infty} \inf \|\tilde{w}_{k_r}\|. \tag{3.29}$$

De (3.26), em particular, temos

$$\|\tilde{w}_{k_r}\| \to 0. \tag{3.30}$$

Logo, de (3.29) e (3.30), obtemos:

$$\tilde{w} = 0. \tag{3.31}$$

Como $\|\tilde{u}_k\| = 1$, em particular $\|\tilde{u}_{k_r}\| = 1$. Logo (Ver Teorema B.21, Apêndice B), existe uma subseqüência de $(\tilde{u}_{k_r})$ (que vamos denotar por $\tilde{u}_k$) tal que

$$\tilde{u}_k(x) \longrightarrow \tilde{u}(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega. \tag{3.32}$$

Em particular, (3.28) vale para uma subseqüência com os mesmos índices de (3.32), (que vamos denotar por $\tilde{w}_k$) tal que

$$\tilde{w}_k(x) \longrightarrow 0 \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega. \tag{3.33}$$

Finalmente,

$$u_k = w_k + \alpha_k \varphi_1 \Rightarrow \frac{u_k}{\rho_k} = \frac{w_k}{\rho_k} + \frac{\alpha_k}{\rho_k}\varphi_1 \Rightarrow \tilde{u}_k = \tilde{w}_k + \tilde{\alpha}_k \varphi_1$$

concluímos por (3.32) e (3.33), que

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{\tilde{u}_k(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\tilde{w}_k(x)}{\varphi_1(x)} \longrightarrow \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{u}(x)}{\varphi_1(x)}$$

o que implica,

$$|\tilde{\alpha}_k| \longrightarrow |\tilde{\alpha}| \,. \tag{3.34}$$

De (3.27) e (3.34), temos

$$|\tilde{\alpha}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha} \neq 0. \tag{3.35}$$

Logo,

$$\tilde{u}_k(x) = \tilde{w}_k(x) + \tilde{\alpha}_k \varphi_1(x) \longrightarrow \tilde{u}(x) = \tilde{\alpha}\varphi_1(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Por (3.35), segue que

$$\tilde{u}(x) = \tilde{\alpha}\varphi_1(x) \neq 0 \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Portanto, a menos de subseqüência, obtemos:

$$|u_k(x)| = \rho_k \, |\tilde{u}_k(x)| \to \infty \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Conseqüentemente,

$$\int_\Omega P(x, u_k)dx \to -\infty,$$

devido a hipótese [**3**.**7**], implicando

$$\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \|w_k\|^2 - 2\int_\Omega P(x, u_k)dx \to +\infty. \tag{3.36}$$

Segue de (3.24), a menos de subseqüência, que

$$L \geq \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \|w_k\|^2 - 2\int_\Omega P(x, u_k)dx. \tag{3.37}$$

De (3.36) e (3.37), obtemos uma contradição.

Logo, concluímos que

$$I(u) \to \infty \ \text{ quando } \ \|u\| \to \infty.$$

$\blacksquare$

Podemos agora deteminar a **Prova do Teorema 3.3:**

Demonstração: Vamos mostrar que I é limitado inferiormente. De fato, usando a hipótese [**3**.**7**] em (3.1), obtemos

$$I(u) = \|u\|^2 - 2\int_\Omega P(x,u)dx - \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \|u\|^2 - 2\int_\Omega W(x)dx - \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx$$

o que implica,

$$I(u) \geq \|u\|^2 - 2\int_\Omega W(x)dx - \|u\|^2 = -2\int_\Omega W(x)dx \geq -C, \ \ \forall \ \ u \in H_0^1(\Omega),$$

pois

$$\int_\Omega W(x)dx \leq C.$$

Poratnto, I é limitado inferiormente. Do Postulado de Dedekind, o conjunto $\{I(u); u \in H_0^1(\Omega)\}$ tem um ínfimo. Provaremos agora que o ínfimo é atingido.

Seja

$$m = \inf_{H_0^1(\Omega)} I.$$

Então existe uma seqüência $\{u_k\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I(u_k) \longrightarrow m. \tag{3.38}$$

Do Lema 3.2, devemos ter $\|u_k\| \leq C$. Assim (Ver Teorema B.22, Apêndice B), existe uma subseqüência de u_k (que continuaremos denotar por u_k) tal que

$$u_k \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega) \tag{3.39}$$

e

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k\| \geq \|u\|. \tag{3.40}$$

Da imersão compacta de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}(\Omega) \;\; \forall \;\; s+1 \in [1, 2^*]$ (Ver Teorema B.16, item i Apêndice B), temos

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^{s+1}(\Omega)$$

é um operador linear compacto.

Logo (Ver Teorema B.10, Apêndice B),

$$u_k \longrightarrow u \;\text{ em }\; L^{s+1}(\Omega).$$

Daí (Ver Teorema B.13, Apêndice B), existe uma subseqüência de (u_k) (que continuaremos denotando por (u_k)) tal que

$$u_k(x) \longrightarrow u(x) \;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega$$

e

$$|u_k(x)| \leq h(x) \;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega, \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N} \;\text{ e }\; h \in L^{s+1}(\Omega).$$

Assim, usando a continuidade da Função F e sua condição de crescimento dada por

$$|F(x,t)| \leq |t|^{s+1} + |t|\,, \;\; 1 < s \leq \frac{N+2}{N-2}, \;\text{ onde }\; N > 2,$$

obtemos

$$F\left(x, u_k(x)\right) \longrightarrow F\left(x, u(x)\right) \;\;\text{ q.t.p }\; x \in \Omega$$

e

$$\left|F\left(x, u_k(x)\right)\right| \leq \left(h(x)\right)^{s+1} + h(x) \in L^1(\Omega).$$

Segue então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema B.7, Apêndice B), que

$$\int_\Omega F\left(x, u_k(x)\right) dx \longrightarrow \int_\Omega F\left(x, u(x)\right) dx. \tag{3.41}$$

Observe que podemos escrever (3.1) da seguinte forma

$$I(u) = \|u_k\|^2 - 2\left\langle (u_k - u)\,, u\right\rangle - \|u_k - u\|^2 - 2\int_\Omega F(x, u_k)dx + 2\int_\Omega \left[F(x,u_k) - F(x,u)\right] dx$$

o que implica

$$I(u) \leq I(u_k) - 2\left\langle (u_k - u)\,, u\right\rangle + 2\int_\Omega \left[F(x,u_k) - F(x,u)\right] dx. \tag{3.42}$$

Afirmação 3.3 Como $u_k \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, então $\langle u_k, u\rangle - \langle u, u\rangle \to 0$.

De fato, considere a seguinte aplicação $\Psi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Psi(u_k) = \langle u_k, u\rangle .$$

Claramente, Ψ é linear e contínua. Em particular, (3.20) vale para $\Psi \in (H_0^1(\Omega))'$. Logo

$$\Psi(u_k) \longrightarrow \Psi(u),$$

onde $\Psi(u) = \langle u, u\rangle$. Portanto, mostramos a **Afirmação 3.3**.

Assim, passando ao limite quando $k \to \infty$ em (3.42) e usando as convergências (3.38), (3.41) e a **Afirmação 3.3**, obtemos:

$$I(u) \leq m.$$

Por outro lado,

$$I(u) \geq m$$

donde concluímos que

$$I(u) = m \text{ e } I'(u) = 0.$$

Segue que u é uma solução fraca do problema (2.1).

Mostraremos que u é uma solução não-trivial.

Se $u = 0$ então

$$I(u) = I(0) = 0$$

o que é um absurdo, pois

$$I(u) = m < 0$$

pelo Lema 3.1.

Logo, $u \neq 0$.

Isto completa a prova do **Teorema 3.3.** ∎

Considere a seguinte hipótese:

[**3.8**] Seja

$$\lim_{|t|\to\infty} \sup \frac{2F(x,t)}{t^2} \leq \alpha(x) \leq \lambda_1,$$

uniformemente em $x \in \Omega$, onde $0 < \alpha \in L^{\infty}(\Omega)$ e $\alpha(x) < \lambda_1$ sobre um conjunto de medida positiva.

Observação: Pela condição [**3.8**], temos que F não é uma função superquadrática, pois caso contrário

$$\lim_{|t|\to\infty} \sup \frac{2F(x,t)}{t^2} \longrightarrow \infty.$$

Teorema 3.4 *Sob as hipóteses* [**3.1**] *e* [**3.8**], *o problema (2.1) tem uma solução não-trivial.*

Demonstração: Inicialmente mostraremos o seguinte: Existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\Theta(u) \equiv \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} \alpha(x) u^2 dx \geq \epsilon_0, \ \ \forall \ \ \|u\| = 1. \tag{3.43}$$

Suponha que não seja verdade, isto é, $\forall \ \ \epsilon > 0$ existe $u \in H_0^1(\Omega)$, com $\|u\| = 1$ tal que

$$\Theta(u) < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$ existe uma seqüência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $\|u_n\| = 1$ tal que

$$\Theta(u_n) < \frac{1}{n},$$

ou seja, existe uma seqüência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $\|u_n\| = 1$ e

$$\Theta(u_n) \longrightarrow 0. \tag{3.44}$$

Como u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$ (Ver Teorema B.21, Apêndice B), então existe uma subseqüência de (u_n) (que vamos denotar por u_n) tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega). \tag{3.45}$$

Por outro lado,

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é um operador linear compacto. Assim (Ver Teorema B.10, Apêndice B),

$$u_n \longrightarrow u_0 \ \text{ em } \ L^2(\Omega). \tag{3.46}$$

Como $0 < \alpha(x) \leq \lambda_1$ em Ω, temos que $\Theta(u_n) \geq 0$, pois

$$\Theta(u_n) \geq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_{\Omega} \alpha(x) u_n^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx - \lambda_1 \int_{\Omega} u_n^2 dx$$

$$\geq \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx = 0.$$

Como e $0 < \alpha \in L^\infty(\Omega)$, temos:

$$\int_\Omega \alpha(x) u_n^2 dx \longrightarrow \int_\Omega \alpha(x) u_0^2 dx. \tag{3.47}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \alpha(x) u_n^2 dx - \int_\Omega \alpha(x) u_0^2 dx \right| &= \int_\Omega |\alpha(x)| \, . \left| u_n^2 - u_0^2 \right| dx \\
&\leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_n + u_0| \, . \, |u_n - u_0| \\
&\leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_n + u_0\|_{L^2(\Omega)} \|u_n - u_0\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \Big(\|u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \Big) \, . \, \|u_n - u_0\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \int_\Omega \alpha(x) u_n^2 dx - \int_\Omega \alpha(x) u_0^2 dx \right| \longrightarrow 0,$$

mostrando, assim, (3.47).

Como $\lim_{k\to\infty} \inf \|u_k\| \geq \|u\|$, $\Theta(u_n) \longrightarrow 0$ e a convergência (3.47), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx - \int_\Omega \alpha(x) u_0^2 dx = 0. \tag{3.48}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx - \int_\Omega \alpha(x) u_0^2 dx &\leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_\Omega \alpha(x) u_0^2 dx \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \alpha(x) u_n^2 dx \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega \alpha(x) u_n^2 dx \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf \Theta(u_n) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Portanto, mostramos (3.48).

Por outro lado,

$$\Theta(u_n) = 1 - \int_\Omega \alpha(x) u_n^2 dx.$$

Usando que $\Theta(u_n) \longrightarrow 0$ e (3.47), passando o limite na última expressão, obtemos

$$\int_\Omega \alpha(x) u_0^2 dx = 1.$$

Donde segue que $\|u_0\| = 1$, devido a (3.48). Daí, temos

$$\|u_0\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|u_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \sup \|u_n\| = 1 = \|u_0\|$$

o que implica

$$\|u_n\| \longrightarrow \|u_0\| . \tag{3.49}$$

Assim, como $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, então (Ver Teorema B.24, Apêndice B)

$$u_n \longrightarrow u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Logo, $u_0 \not\equiv 0$, $\Theta(u) \geq 0 \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega)$ e $\Theta(u_0) = 0$. Assim, u_0 é um ponto crítico de Θ e portanto, é uma solução generalizada do problema (1.1).

Por regularidade (Ver Teorema 1.1), temos $u_0 \in W^{2,2}(\Omega)$, isto é, uma solução forte da equação elíptica. Pelo Príncipio do Máximo Forte (Ver Teorema B.8, Apêndice B), obtemos $u_0(x) \neq 0$ q.t.p em Ω. Usando (3.47) e $\Omega_1 = \{x \in \Omega; u_0(x) \neq 0\}$, onde $|\Omega_1| > 0$, e mais $\Omega_2 = \Omega_1^C$, temos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_{\Omega_1} u_0^2 dx &\leq \lambda_1 \int_{\Omega_1} u_0^2 dx + \lambda_1 \int_{\Omega_2} u_0^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega_1} |\nabla u_0|^2 dx \leq \int_{\Omega_1} \alpha(x) u_0^2 dx < \lambda_1 \int_{\Omega_1} u_0^2 dx, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Assim, mostramos (3.43).

Segue de [**3.8**] que dado $\epsilon < \lambda_1 \epsilon_0$ existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que

$$F(x,t) \leq \frac{\alpha(x) + \epsilon}{2} t^2 + C_\epsilon, \ \forall \ x \in \Omega, \ \forall \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.50}$$

De fato, seja $L(x) = \lim_{|t|\to\infty} \sup \dfrac{2F(x,t)}{t^2} \leq \alpha(x)$, uniformente em $x \in \Omega$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{2F(x,t)}{t^2} \leq L(x) + \epsilon \leq \alpha(x) + \epsilon, \text{ para } |t| \geq \delta.$$

Daí,

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}(\alpha(x) + \epsilon) t^2, \ \forall \ x \in \Omega, \text{ e } |t| \geq \delta. \tag{3.51}$$

Agora, para o $\delta > 0$ obtido acima, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|F(x,t)| \leq C_\epsilon \ \forall \ x \in \Omega, \text{ e } |t| \leq \delta. \tag{3.52}$$

Usando (3.51) e (3.52), concluímos (3.50).

Assim,

$$I(u) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega \alpha(x) u^2 dx - \epsilon \int_\Omega u^2 dx - 2C_\epsilon \, |\Omega| \, .$$

Usando (3.43), temos

$$I(u) \geq \epsilon_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - 2C_\epsilon \, |\Omega| \, ,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \left(\epsilon_0 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - 2C_\epsilon \, |\Omega| \, . \tag{3.53}$$

Segue de (3.53) que $I(u) \longrightarrow \infty$ quando $\|u\| \to \infty$, isto é, I é coercivo. Vamos mostrar que I é fracamente semicontínuo inferiormente (fracamente s.c.i). De fato, seja

$$u_n \rightharpoonup u_0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega).$$

De modo inteiramente análogo do que foi feito para mostrar a convergência (3.41), obtemos:

$$\int_\Omega F\left(x, u_n(x)\right) dx \longrightarrow \int_\Omega F\left(x, u_0(x)\right) dx. \tag{3.54}$$

Agora recordando a definição do funcional I, usando as propriedades de limite, (3.40) e (3.54), temos

$$\lim_{n\to\infty} \inf I(u_n) \geq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\| - 2 \lim_{n\to\infty} \int_\Omega F\left(x, u_n(x)\right) dx \geq \|u_0\| - 2 \int_\Omega F\left(x, u_0(x)\right) dx,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \inf I(u_n) \geq I(u_0),$$

mostrando que o funcional I é fracamente semicontínuo inferiormente.

Como o funcional I é coercivo, fracamente semicontínuo inferiormente e $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, logo pelo **Teorema 1.7**, assegura a existência de um mínimo para o funcional I. Como I é de classe C^1, segue-se então, que esse mínimo será ponto crítico do funcional I associado ao problema (2.1), e portanto, assegurando a existência de pelo menos uma solução fraca. ■

Observação: Pode-se provar o **Teorema 3.3**, usando o **Teorema 1.7**, pois pelo **Lema 3.2,** o funcional I é coercivo. Além disso, ele é fracamente semicontínuo inferiormente e como é de classe C^1, logo garante a existência de um mínimo, que será ponto crítico do funcional I associado ao problema (2.1), e portanto, assegurando a existência de pelo menos uma solução fraca.

Apêndice A

Um pouco de Teoria Espectral

Neste apêndice, apresentaremos uma descrição do espectro do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, no caso do problema homogêneo de Dirichlet e também estudaremos propriedades relacionadas aos autovalores.

Teorema A.1 *Existem uma base Hilbertiana $\{\phi_k : k = 1, 2, \ldots\}$ em $L^2(\Omega)$ e uma seqüência $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de números reais com $\lambda_k > 0$ e*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \overset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

tais que ϕ_k é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda_k u, \quad \Omega, \\ \quad u = & 0, \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é um domínio limitado. E mais,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx.$$

Demonstração: Considere o seguinte problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x), \quad \Omega, \\ \quad u = & 0, \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é uma domínio limitado e $f \in L^2(\Omega)$.

Considerando:

• $H = H_0^1(\Omega)$, com o produto interno definido por $\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ e a norma induzida por

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

• A forma bilinear $\mathbb{A}$ será dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A} \; : \; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \mathbb{A}(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \end{array}$$

que também é simétrica e contínua.

• O funcional T dado por

$$\begin{array}{rcl} T \; : \; H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & T(v) = \int_\Omega f.v dx, \end{array}$$

é linear contínuo. Daí, aplicando o Teorema de Lax-Milgran (Ver Apêndice B, Teorema 21), existe uma única função $u \in H_o^1(\Omega)$ tal que

$$\mathbb{A}(u, v) = T(v), \;\; \forall \;\; v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f.v dx, \;\; \forall \;\; v \in H_0^1(\Omega), \tag{A.3}$$

isto é, uma solução fraca para o problema **(A.2)**.

Pelo que foi exposto até agora, podemos definir uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} S \; : \; L^2(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ f & \longmapsto & S(f) = u, \end{array}$$

isto é, uma aplicação que associa a cada $f \in L^2(\Omega)$ a única solução fraca do problema linear **(A.2)**.

Além disso, observamos pela resolução do problema **(A.2)** que

$$\mathbb{A}(S(f), v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}, \;\; \forall \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Vejamos agora algumas propriedades da aplicação S.

i) S é uma aplicação linear, isto é,

$$S(\alpha_1 f + \alpha_2 g) = \alpha_1 S(f) + \alpha_2 S(g), \;\; \forall \;\; f, g \in L^2(\Omega), \;\; \forall \;\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

De fato, consideremos uma dada $v \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}(S(\alpha_1 f + \alpha_2 g), v) &= \langle(\alpha_1 f + \alpha_2 g), v\rangle \\
&= \langle \alpha_1 f, v\rangle + \langle \alpha_2 g, v\rangle \\
&= \alpha_1 \langle f, v\rangle + \alpha_2 \langle g, v\rangle \\
&= \alpha_1 \mathbb{A}(S(f), v) + \alpha_2 \mathbb{A}(S(g), v) \\
&= \mathbb{A}(\alpha_1 S(f), v) + \mathbb{A}(\alpha_2 S(g), v) \\
&= \mathbb{A}(\alpha_1 S(f) + \alpha_2 S(g), v), \ \ \forall \ \ v \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

o que implica,

$$
S(\alpha_1 f + \alpha_2 g) = \alpha_1 S(f) + \alpha_2 S(g), \ \ \forall \ \ f, g \in L^2(\Omega), \ \ \forall \ \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},
$$

mostrando a linearidade de S.

ii) S é contínua, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$
\|S(f)\| \leq K \|f\|_{L^2(\Omega)}, \ \ \forall \ \ f \in L^2(\Omega).
$$

De fato, de **(A.3)**, considerando $v = u \in H_0^1(\Omega)$, temos :

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega f u dx \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} . \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq K \|f\|_{L^2(\Omega)} . \|u\| .
\end{aligned}
$$

Suponha $f \neq 0$, temos $u \neq 0$. O que implica,

$$
\|u\| \leq K \|f\|_{L^2(\Omega)} \ \ \forall \ \ f \in L^2(\Omega) \backslash \{0\},
$$

ou seja,

$$
\|S(f)\| \leq K \|f\|_{L^2(\Omega)}, \ \ \forall \ \ f \in L^2(\Omega),
$$

mostrando que S é contínua.

iii) $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador linear compacto.

De fato, como a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Ver Apêndice B, Teorema 16) é compacta, então $i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador linear compacto e $S : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ é contínua, segue-se que $i \circ S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é uma composição de aplicação contínua com uma compacta, e portanto, é um operador linear compacto.

iv) $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é simétrico (ou auto-adjunto), ou seja,

$$\langle T_f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, T_g\rangle_{L^2(\Omega)}, \;\; \forall \;\; f, g \in L^2(\Omega).$$

De fato, considere os seguintes problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = & f(x), \quad \Omega, \\ \quad u = & 0, \quad\;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.4}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta \phi = & g(x), \quad \Omega, \\ \quad \phi = & 0, \quad\;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.5}$$

Suponhamos $u = T_f$ e $\phi = T_g$, temos:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f\phi dx, \;\; \forall \;\; \phi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla \phi \nabla u dx = \int_\Omega g u dx, \;\; \forall \;\; u \in H_0^1(\Omega),$$

respectivamente as soluções fracas dos problemas **(A.4)** e **(A.5)**.

Logo,

$$\int_\Omega f\phi dx = \int_\Omega g u dx \Rightarrow \int_\Omega f(T_g)dx = \int_\Omega g(T_f)dx$$

isto é,

$$\langle T_f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, T_g\rangle_{L^2(\Omega)}, \;\; \forall \;\; f, g \in L^2(\Omega).$$

v) S é estritamente positiva em $L^2(\Omega)$, pois

$$\langle S(f), f\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (S_f) f dx = \int_\Omega u f dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx > 0,$$

$\forall \;\; f \in L^2(\Omega)$ e com $u \neq 0$.

Portanto, uma vez que $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador nas condições do Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos em um espaço de Hilbert (Ver Apêndice B Teorema 4), resulta que existe uma seqüência (μ_k) de números reais, que são os autovalores, verificando

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots \geq \mu_k \geq \cdots > 0$$

e

$$\mu_k \to 0 \ \text{ quando}, \ \ k \to 0.$$

Associados aos autovalores, existe uma seqüência ϕ_k de funções de $L^2(\Omega)$, denominadas de autofunções de S as quais constituem uma base Hilbertiana para $L^2(\Omega)$.

Em outras palavras, encontramos duas seqüências $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que

$$S(\phi_k) = \mu_k\phi_k, \ \ \forall \ \ k = 1,2,3,\ldots,$$

com $\mu_k > 0, \ \forall \ k = 1,2,3,\ldots,$ e $\mu_k \to 0$ quando $k \to 0$.

Logo,

$$\int_\Omega \nabla(\mu_k\phi_k)\nabla\phi dx = \int_\Omega \phi_k\phi dx, \ \ \forall \ \ \phi \in H_0^1(\Omega),$$

obtemos

$$\int_\Omega \nabla\phi_k\nabla\phi dx = \frac{1}{\mu_k}\int_\Omega \phi_k\phi dx, \ \ \forall \ \ \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, ϕ_k é uma solução fraca do problema **(A.1)**, onde $\lambda_k = \dfrac{1}{\mu_k}$, resultando que (λ_k) é uma seqüência de números reais positivos tais que

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \le \cdots \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \infty \,.$$

Agora vamos mostrar que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \ge \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx.$$

De fato, seja $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\{\phi_k : k = 1,2,\ldots\}$ sendo definida como anteriormente. Se $u \in L^2(\Omega)$ podemos escrever

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k, \ \ \text{onde} \ \ c_k = \langle u, \phi_k\rangle \,.$$

Seja

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k,$$

temos:

$$\int_\Omega \nabla u_N\nabla u_N dx = \langle u_N, u_N\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k, \sum_{j=1}^{N} c_j\phi_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2. \tag{A.6}$$

De **(A.6)**, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u dx \geq \int_\Omega \nabla u_N \nabla u_N dx = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{N} c_k^2 = \lambda_1 \int_\Omega u_N^2 dx.$$

Como u_N converge para u em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx$$

provando, assim, o nosso Teorema. ■

Dando continuidade, vamos mostrar o seguinte teorema que será muito importante em nosso trabalho.

Teorema A.2 *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é ortogonal a ϕ_1, então:*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \lambda_2 \int_\Omega u^2 dx.$$

Demonstração: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\{\phi_k : k = 1, 2, \ldots\}$. Como $u \in L^2(\Omega)$ podemos escrever

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k, \quad \text{onde} \quad c_k = \langle u, \phi_k \rangle .$$

Seja

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k,$$

temos:

$$\int_\Omega \nabla u_N \nabla u_N dx = \sum_{k=2}^{N} \lambda_k c_k^2, \tag{A.7}$$

pois $u \perp \phi_1$, resultando

$$c_1 = \langle u, \phi_1 \rangle = 0.$$

De **(A.7)**, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u dx \geq \int_\Omega \nabla u_N \nabla u_N dx = \sum_{k=2}^{N} \lambda_k c_k^2 \geq \lambda_2 \sum_{k=2}^{N} c_k^2 = \lambda_2 \int_\Omega u_N^2 dx.$$

Como u_N converge para u em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \lambda_2 \int_\Omega u^2 dx,$$

provando, assim, o nosso Teorema. ■

Finalmente, mostraremos duas propriedades relacionadas aos autovalores dado pelo seguinte **Teorema**:

Teorema A.3 *Toda autofunção associada a λ_1 tem sinal definido, enquanto toda autofunção associada a λ_j, com $j \geq 2$, atinge valores positivos e negativos.*

Demonstração: De fato, considere ϕ uma autofunção associada a λ_1 e suponhamos

$$\phi^+ \not\equiv 0 \quad (\phi^- \not\equiv 0),$$

onde

$$\phi^+(x) = \max\{\phi(x), 0\}$$

e

$$\phi^-(x) = \min\{\phi(x), 0\}.$$

Segue dos espaços de Sobolev que $\phi^+ \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\left\langle \phi, \phi^+ \right\rangle = \int_\Omega \nabla\phi\nabla\phi^+ dx = \int_\Omega \nabla\phi^+\nabla\phi^+ dx = \left\|\phi^+\right\|^2$$

e

$$\left\langle \phi, \phi^+ \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\|\phi^+\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Recorde que ϕ verifica a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla v dx = \lambda_1 \int_\Omega \phi v dx, \;\; \forall \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Escolhendo $v = \phi^+$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla\phi^+ dx = \lambda_1 \int_\Omega \phi\phi^+ dx,$$

isto é,

$$\left\langle \phi, \phi^+ \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \phi, \phi^+ \right\rangle_{L^2(\Omega)},$$

o que implica

$$\lambda_1 = \frac{\|\phi^+\|^2}{\|\phi^+\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Agora, usando o fato que

$$w = \frac{\phi^+}{\|\phi^+\|_{L^2(\Omega)}}$$

verifica o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = & \lambda_1 w, \quad \Omega, \\ w = & 0, \quad \partial\Omega \end{cases}$$

desde que $w(x) \geq 0$ e $w \not\equiv 0$.

Afirmação 1: $w(x) > 0, \ \forall \ x \in \Omega$, com $w \not\equiv 0$.

De fato, suponha que a afirmação não vale, então existe $x_0 \in \Omega$, com

$$w(x_0) = 0.$$

Logo, pelo Principio do Máximo forte (Ver Apêndice B, Teorema 8), w deve ser constante em Ω, conseqüentemente

$$w(x) = 0, \ \forall \ x \in \Omega,$$

o que é um absurdo, pois $w \not\equiv 0$. Logo $w(x) > 0$.

Segue da **Afirmação 1**, que

$$\phi^+(x) > 0, \ \forall \ x \in \Omega,$$

isto é,

$$\phi^+(x) = \max\{\phi(x), 0\} > 0.$$

Portanto,

$$\phi(x) > 0, \ \forall \ x \in \Omega.$$

O mesmo raciocínio se aplica a função ϕ^-.

Vamos mostrar que toda autofunção associada a λ_j, com $j \geq 2$, atinge valores positivos e negativos.

De fato, sejam ϕ e w autofunções associadas a λ_1 e λ_j, $(j \geq 2)$, respectivamente. Pelo que já provamos, podemos escolher

$$\phi(x) > 0, \ \forall \ x \in \Omega.$$

Temos as seguintes igualdades

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla v dx = \lambda_1 \int_\Omega \phi v dx, \ \ \forall \ \ v \in H_0^1(\Omega) \tag{A.8}$$

e

$$\int_\Omega \nabla w\nabla v dx = \lambda_j \int_\Omega w v dx, \ \ \forall \ \ v \in H_0^1(\Omega). \tag{A.9}$$

Escolhendo $v = w$ em **(A.8)** e $v = \phi$ em **(A.9)**, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla w dx = \lambda_1 \int_\Omega \phi w dx \ \text{ e } \ \int_\Omega \nabla w\nabla \phi dx = \lambda_j \int_\Omega w\phi dx.$$

Conseqüentemente,

$$(\lambda_j - \lambda_1)\int_\Omega w\phi dx = 0.$$

Desde que $\lambda_j - \lambda_1 > 0$, concluímos

$$\int_\Omega w\phi dx = 0.$$

Mostrando que w muda de sinal. ■

Apêndice B

Resultados Utilizados

Neste Apêndice apresentaremos os resultados utilizados em nosso trabalho. Indicaremos também as referências onde podem ser encontrados as respectivas demonstrações.

Teorema B.1 (Teorema de Kakutani)(ver [4])
Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se, e somente se, $\overline{B_r(0)}$ é fracamente compacta.

Teorema B.2 (ver [14])
Seja J um intervalo aberto contendo o zero e U um aberto em E, com $x_0 \in E$ e $0 < a < 1$ tal que

$$\overline{B_{2a}(x_0)} \subset U.$$

Considere $f : J \times U \mapsto E$ uma função contínua limitada por constante $c > 0$ satisfazendo a condição de Lipschitziana em U com constante $K > 0$ uniformemente com respeito a J. Se $b < min\left\{\frac{a}{c}, \frac{1}{k}\right\}$, então existe um único fluxo

$$\alpha : J_b \times B_a \mapsto U.$$

Além disso, se f é de classe C^p, então cada curva integral $\alpha(t, x)$ também é de classe C^p.

Teorema B.3 (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet) (ver [4])
Seja H um espaço de Hilbert, então dado $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \ \ \forall \ \ v \in H.$$

E mais, verifica-se que

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}.$$

Teorema B.4 (Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos) (ver [4])
Seja H um espaço de Hilbert, com $dimH = +\infty$ e $T : H \to H$ um operador compacto, simétrico e positivo. Então H tem uma base Hilbertiana formados de autovetores e os autovalores que formam uma seqüencia $(\mu_n) \subset (0, +\infty)$, com

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n \geq \ldots > 0 \ \ e$$

$\mu_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Teorema B.5 (Desigualdade de Hölder) (ver [4])
Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $p \geq 1$. Então,

$$f.g \in L^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |f.g|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema B.6 (Desilguadade de Poincaré) (ver [4])
Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$.Então, existe uma costante $C = C(\Omega, p)$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \right)^{1/p}, \ \ \forall \ \ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \ 1 \leq p \leq +\infty.$$

Teorema B.7 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)(ver [3])
Seja f_n uma sequência de funções integravéis. Suponha que
(i) $f_n \to f(x)$ q.t.p. em Ω;
(ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω, para alguma função $g \in L^1(\Omega)$. Então,

$$f \in L^1(\Omega) \ \ e \ \ \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Teorema B.8 (Principio do Máximo Forte) (ver [7])
Assuma que $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ e $c \equiv 0$ em U conexo, aberto e limitado.
i) Se

$$Lu \leq 0 \ \ em \ \ U$$

e u atinge o máximo em $\overline{U}$ sobre um ponto interior, então

$$u \quad constante \ \ em \ \ U.$$

ii) Se

$$Lu \geq 0 \ \ em \ \ U$$

e u atinge o mínimo em $\overline{U}$ *sobre um ponto interior, então*

$$u \quad constante \ \ em \ \ U.$$

Teorema B.9 (Critério de Compacidade) (ver [13])
Sejam X *e* Y *espaços vetoriais normados. Um operador linear* $T : X \longrightarrow Y$ *é compacto se, e somente se, toda seqüência limitada* $(x_n) \subset X$ *tem a propriedade que a seqüência* $(T(x_n)) \subset Y$ *possui uma subseqüência convergente.*

Teorema B.10 (ver [13])
Sejam X *e* Y *espaços vetoriais normados e* $T : X \longrightarrow Y$ *um operador linear compacto. Se* $(x_n) \subset X$ *verifica*

$$x_n \rightharpoonup x \ \ em \ \ X,$$

então,

$$T(x_n) \longrightarrow T(x) \ \ em \ \ Y.$$

Teorema B.11 (ver [4])
Sejam E *um espaço de Banach e* (x_n) *uma seqüência em* E*. Então*
i) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x), \ \ \forall \ f \in E^{'}$,
ii) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \|x_n\|$ *é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$$

Teorema B.12 (Teorema Fundamental do Cálculo) (ver [14])
Sejam G *um espaço vetorial normado completo e* $f : [a,b] \longrightarrow G$ *contínua no intervalo* $[a,b]$*. As seguintes afirmações a respeito de uma Função* $F : [a,b] \longrightarrow G$ *são equivalentes:*
i) Se F *é uma integral indefinida de* f*, então*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt, \ \ \forall \ \ x \in [a,b]$$

ii) Se F *é uma primitiva de* f*, então*

$$F^{'}(x) = f(x) \ \ \forall \ \ x \in [a,b].$$

Teorema B.13 (ver [4])
Seja (f_n) *uma seqüência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$*, tal que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$*. Então, existe uma subseqüência* (f_{n_k}) *tal que*
i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;
ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \ \ \forall \ \ k,$ *q.t.p. em* Ω, *com* $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema B.14 (ver [17])
Sejam Ω um subcojunto limitado do $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, Ω de classe C^m e $1 \leq p \leq \infty$. Então as imersões abaixo são contínuas:
(i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$ *se* $mp < N$.
(ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q \leq \infty$ *se* $mp = N$.
(iii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ *se* $mp > N$,
onde k é um inteiro verificando $k < m - Np \leq k+1$ e μ um número real satisfazendo $0 < \mu \leq m - k - \frac{N}{p} = \mu_0$ *se* $\mu_0 < 1$ *e* $0 < \mu < 1$ *se* $\mu_0 = 1$

Teorema B.15 (Imersão de Sobolev) (ver [9])
Sejam Ω um domínio suave em $\mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ e $1 \leq q \leq +\infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$ as imersões abaixo são contínuas:
i) Se $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$;
ii) Se $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), p \leq q < +\infty$;
iii) Se $m > \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_\beta(\Omega)$;
iv) Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\mu}(\overline{\Omega}), \;\; 0 < \mu < m - \frac{N}{p}.$$

Teorema B.16 (Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov) (ver [9])
Sejam Ω um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $j \geq 0$, $m \geq 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então as imersões abaixo são compactas:
i) Se $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$;
ii) Se $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < +\infty$;
iii) Se $m > \frac{N}{p}$,

- $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < +\infty$;
- $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_\beta(\Omega)$ *e*
- $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$.

iv) Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\mu}(\overline{\Omega}), \;\; 0 < \mu < m - \frac{N}{p}.$$

Teorema B.17 (Teorema de Fubini) (ver [4])
Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \;\; e \;\; \left(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\right) \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \;\; e \;\; \left(\int_{\Omega_1} F(x,y)dy\right) \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Teorema B.18 (ver [11])
Sejam L um operador estritamente elíptico em um domínio limitado Ω, com $c \leq 0$, f e os coeficientes de L pertecentes a $C^{\mu}(\overline{\Omega})$. Suponhamos que Ω é um domínio de classe $C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$. Então o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f, & \Omega, \\ u = \varphi, & \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução em $C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$.

Teorema B.19 (ver [1])
Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ é um conjunto limitado e $1 \leq p \leq q$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, e além disso, a imersão

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua.

Teorema B.20 (ver [11])
Seja $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Então existe uma única $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega, \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante C independente de f e u de modo que

$$\|u\|_{2,p;\Omega} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema B.21 (Teorema de Lax-Milgram) (ver [4])
Sejam H um espaço de Hilbert e $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva em H. Então, para todo $\varphi \in H^{'}$, existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall \ v \in H.$$

Teorema B.22 (ver [4])
Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (u_n) uma seqüência limitada em E. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \ \text{em} \ E.$$

Teorema B.23 (Desigualdade de Schwarz) (ver [13])
Seja $(X, \langle , \rangle)$ *um espaço vetorial com produto interno. Então:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\| .$$

Teorema B.24 (ver [4])
Seja E *um espaço de Banach uniformemente Convexo. Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ *em* $\mathbb{R}$, *tem-se que*

$$x_n \longrightarrow x \ \ em \ \ E.$$

Teorema B.25 (Fatou) (ver [3])
Se $(f_n) \in M^+(X, \aleph)$, *então*

$$\int \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n d\mu.$$

Bibliografia

[1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications,* J. Funct. Anal., **14** 349-381 (1973).

[3] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[4] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico e São Paulo, 1987.

[5] Costa, David G., *Tópicos em Análise não-linear e aplicações às Equações Diferenciais,* VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[6] Cavalcante, Luís Paulo de Lacerda, *Existência de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos não lineares em domínio não limitados.* Dissertação de Mestrado. UFCG, 2004.

[7] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations* Vol. 19, American Mathematical Society, 1998.

[8] Fernandez, Pedro jesus, *Medida e integração,* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1976.

[9] Figueirendo, D.G. de., *Equações Elípticas não lineares,* 11^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas, 1977.

[10] Figueirendo, D.G. de., *Ekeland Variational Principle with Applications and Detours,* Tata Institute, Springer-Verlag, Heidelberg, 1989.

[11] Gilbarg, D. & Trudinger, Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[12] J. Mawhin, J.R. Ward Jr. and M. Willem *Variational methods and semilinear elliptic equations,* Sem. Math. Louvain, Rap. 32 (1983).

[13] Kreyzkig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications,* Wiley, New York, 1989.

[14] Lang, Serg, *Analysis II.* Addison-Wesley, 1969.

[15] Lima, E.L., *Curso de Análise,* Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[16] Lima, E.L., *Curso de Análise,* Vol. 2 (6ª, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[17] Medeiros, L. A., & Miranda, M. A. Milla, *Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos,* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[18] Rabinowitz, Paul H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations,* American Mathematical Society, 1988.

[19] Sánchez, Jesús P., *Principio Variacional de Ekeland y Aplicaciones,* Faculdad de ciencias de la Universidade Venezolana de los Andes, 1998.

[20] Schechter, Martin and Zou, Wenming, *Superlinear Problems* Pacific Journal of Mathematics, Vol. 214, 2004.

[21] Willem, Michel, *Lectures on Critical Point Theory.* Trabalho de Matemática 199, Unb, Brasilia, 1983.