Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teoria do Grau e Aplicações

por

Orlando Batista de Almeida

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Maio/2006

.

Teoria do Grau e Aplicações

por

Orlando Batista de Almeida

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros - UFAL

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Maio/2006

Resumo

Nesta dissertação, seguindo o trabalho do **Berestycki** [7] e idéias desenvolvidas por **Alves & de Figueiredo** [3] e **Alves, Corrêa & Gonçalves** [4], estudamos a Teoria do Grau de **Brouwer e Leray & Schauder,** bem como o **Método de Galerkin** para obter solução de alguns problemas elípticos.

Abstract

In this of dissertation, motivated by work of **Berestycki** [7] and ideas conceived by **Alves & from Figueiredo** [3] and **Alves, Corrêa & Gonçalves** [4], we styding the theory of Degree from **Brouwer and Leray & Schauder**, well how the **Method from Galerkin** to obtain solution of some ellíptic problems.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por toda benção e glória, saúde, força, coragem e perseverança para que eu podesse concluir este trabalho.

Ao meu querido professor e amigo Claudianor, um profissional e um ser humano que dispensa comentários, pela atenção, compreensão, paciência, que teve comigo nesta difícil jornada.

Ao professor Marco Aurélio Souto, ser humano maravilhoso, que foi responsável pela minha vinda para o mestrado da UFCG.

Aos professores Aparecido Jesuíno, Bráulio Maia, Claudianor, Daniel Cordeiro e Marco Aurélio pelas disciplinas que lecionaram e, que com seus conhecimentos contribuíram de forma decisiva para a minha formação.

A todos que fazem parte do Departamento de Matemática e Estatística da UFCG, pelo acolhimento.

Ao meu irmão e amigo Otacílio Almeida pelo incentivo e apoio.

Aos queridos e inesquecíveis AMIGOS, Aldo Trajano, Moisés Dantas, José Fernando, Cícero, Luiz Paulo, Tatiana, Jesualdo e JESUS pelo companheirismo, motivação, paciência e humildade e, que indiretamente contribuiram para a elaboração deste trabalho.

Aos professores: Dr. Amauri da Silva Barros e Dr. José de Arimatéia Fernandes por si mostrarem prestativos e disponíveis para fazerem à avaliação deste meu trabalho de dissertação, fazendo parte da Banca Examinadora.

A toda minha família, em especial as minhas filhas: Michaella, Sabrina, O'hana e O'hara pela ausência e falta de atenção nos momentos que mais precisaram de mim, e que mesmo assim me deram muita força e incentivo para que pudesse concluir este curso de pós-graduação e, dizer que foi nelas que encontrei força e inspiração.

Dedicatória

A minha mãe Edite, a minha esposa, minhas filhas: Michaella, Sabrina, O'hana e O'hara e aos meus irmãos.

Notações:

(1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produto interno.

(2) $[\cdot]$ referência bibliográfica.

(3) $(\cdot)$ referência citada no texto.

(4) $\rho\{A, B\}$ distância entre os conjuntos A e B.

(5) $supt\varphi$ suporte da função φ.

(6) Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma função, usamos ao longo da dissertação as seguintes notações:

 (i) $|f(x)|$ é a norma usual do $\mathbb{R}^N$ para $f(x)$.

 (ii) $|x|$ é a norma usual do $\mathbb{R}^N$ para x.

 (iii) $|x|$ é o valor absoluto de x, se $n = 1$.

 (iv) $|f'(x)|$ é a norma da transformação linear de $f'(x)$, se f for diferenciável.

(7) Se $f : X \to Y$ é uma função com X *e* Y espaços de Banach, usamos as mesmas notações do item (6) usando-se $\|\cdot\|$ ao invés de $|\cdot|$.

(8) $div\varphi$ é o divergente da aplicação φ.

(9) $diamA$ é o diâmetro do conjunto A.

(10) $m(A)$ é a medida do conjunto A.

(11) $m^*(A)$ é a medida exterior do conjunto A.

(12) $J_f(x) = det[f'(x)]$ é o valor do determinante jacobiano de f aplicado no ponto x.

(13) $\overline{B}_r(x)$ é a bola fechada de centro x e raio r.

(14) $sgnf$ é o sinal da função f

Conteúdo

Introdução

Muitos problemas em Análise Funcional não-linear podem ser reduzidos ao estudo de encontrar soluções para equações do tipo:

$$\varphi(x) = b \tag{1}$$

sobre um espaço de Banach adequado.

A teoria do grau tem sido desenvolvida como um método utilizado para estudar o conjunto das soluções da equação (1), obtendo infomações sobre a existência, multiplicidade e a natureza destas soluções.

Este tipo de abordagem tem sido usada principalmente em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Equações Diferenciais Parciais (EDP).

Neste trabalho , temos por objetivo apresentar a Teoria do Grau, que será estudada em duas etapas: Na primeira será feita o estudo do Grau Topológico de Brouwer que vale em espaços vetoriais de dimensão finita e na segunda etapa será estudado o Grau de Leray & Schauder que vale em espaços vetoriais de dimensão infinita, que teve por base o trabalho da Tese de Doutorado de Henry Berestycki [7] de 1975, cujo objeto de estudo foi Métodos Topológicos e Problemas Auxiliares Limitados. Uma vez mostrada a existência do grau topológico usamos o mesmo para obter soluções para duas classes de problemas elípticos. O método aplicado para obter as soluções dos problemas está centralizado no **Método de Galerkin** e no teorema do **Ponto Fixo de Schaeffer.**

No Capítulo 1, seguindo o trabalho de Berestycki [7], construímos o Grau Topológico de Brouwer, definindo o mesmo para o caso Regular. Depois estudamos o grau para as funções contínuas, e em seguida estudamos suas propriedades e as principais consequências dessas propriedades. Definimos o Grau de Leray & Schauder, trabalhamos as suas propriedades e as suas principais consequências.

No capítulo 2, norteado ainda pelo trabalho de Berestycki [7], definimos alguns espaços de Schauder com suas respectivas normas e apresentamos alguns resultados devido a Schauder. Usando a teoria do Grau de Leray & Schauder demonstramos o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer, o qual juntamente com os resultados de Schauder são usados para mostrar a existência de solução para a seguinte classe de problemas elípticos quaselineares

$$\begin{cases} Lu &= F(x,u), & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

onde, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, o operador L diferencial é dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x)$$

com $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, sendo uma função de classe $C^2(\overline{\Omega})$, $N \geq 1$ e $F \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\alpha \in (0,1)$.

No capítulo 3, seguindo idéias desenvolvidas por **Alves & de Figueiredo** [3] (2003) e **Alves, Corrêa & Gonçalves** [4] (2005), usamos o grau de Brouwer para demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e uma consequência do mesmo, o qual chamaremos de Lema Fundamental, que é utilizado para mostrar a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas elípticos singulares

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{1}{u^{\gamma}}, & \Omega \\ u &> 0, & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $0 < \gamma < 1$, $N \geq 2$. O método utilizado para obter tal solução é conhecido como **Método de Galerkin,** que é uma técnica de resolução de alguns problemas não lineares, que consiste em aproximar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por uma sequência de subespaço de dimensão finita. Neste capítulo, usamos um resultado de Regularidade devido a Agmon [1], e também destacamos um importante resultado devido a Ambrosetti, Brézis e Cerami [5], que é um Teorema envolvendo Subsolução e Supersolução, o qual estabelece a unicidade de solução para uma classe de problemas singulares que inclui o problema (P_1).

No apêndice **A,** recordamos algumas definições e enunciamos os principais teoremas de análise no $\mathbb{R}^N$ utilizados neste trabalho.

No apêndice **B,** apresentamos alguns resultados envolvendo os espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração que foram usados nesta dissertação.

Capítulo 1

O Grau Topológico

Nosso objetivo neste capítulo é definir e demonstrar os principais resultados sobre a teoria do grau de **Brouwer** e do grau de **Leray & Schauder.**

1.1 O Grau Topológico de Brouwer

Nesta seção iremos mostrar como é construído o grau de Brouwer. Começamos o nosso estudo com o seguinte resultado.

Teorema 1.1 *(Teorema de Sard) Seja Λ um aberto do $\mathbb{R}^N$, f uma função de classe $\mathcal{C}^1(\Lambda, \mathbb{R}^N)$ e $S = \{x \in \Lambda; J_f(x) = 0\}$. Então, $f(S)$ é um conjunto de medida nula.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ um cubo fechado contido em Λ de lado a. Vamos dividir $\mathcal{C}$ em K^N subcubos, com K um número natural.
Temos que a aplicação f' é uniformemente contínua em $\mathcal{C}$, pois f' é contínua e está definida no compacto $\mathcal{C}$ (*ver Teorema* A.9), então dado $\epsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \ \mathcal{C} \ \ teremos \ \ |x - y| < \ \alpha \ \Rightarrow \ |f'(x) - f'(y)| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Fixe K de maneira que os subcubos $\widetilde{C} \subset \mathcal{C}$ tenham diâmetro menor que α. Desde que, o diâmetro de $\widetilde{C}$ é dado por $diam(\widetilde{C}) = \dfrac{a}{K}\sqrt{N}$, então $\dfrac{a}{K}\sqrt{N} < \alpha$. Além disso, f é lipschitziana em $\mathcal{C}$ com

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in \mathcal{C}, \ com \ M = \max_{z \in \mathcal{C}} |f'(z)|.$$

Dado $x \in \mathcal{C} \cap S$, existe $\widetilde{C} \subset \mathcal{C}$ tal que $x \in \widetilde{C} \cap S$, então $\forall y \in \widetilde{C}$ tem-se

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Sendo $diam(\widetilde{C}) = \sup\{|x-y|; x, y \in \widetilde{C}\}$ temos $|x-y| \leq diam(\widetilde{C})$ e assim

$$|f(x) - f(y)| \leq M diam(\widetilde{C}).$$

Portanto,

$$f(y) \in \overline{\mathcal{B}}(f(x), M diam(\widetilde{C})),$$

onde $\mathcal{B}(f(x), M diam(\widetilde{C}))$ é a bola fechada de centro $f(x)$ e raio $M diam(\widetilde{C})$. Desde que, $y \in \widetilde{C}$ é qualquer concluímos

$$f(\widetilde{C}) \subset \overline{\mathcal{B}}(f(x), M diam(\widetilde{C})).$$

Por outro lado, pelo teorema $A.6$ temos

$$f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) = \int_0^1 [f'(x + t(y-x)) - f'(x)](y-x)dt.$$

Daí, segue

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| = \Big| \int_0^1 [f'(x + t(y-x)) - f'(x)](y-x)dt \Big|$$

o que implica

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leq \int_0^1 |[f'(x + t(y-x)) - f'(x)](y-x)|dt. \tag{1.2}$$

Sendo

$$|f'(x)| = \sup_{|v| \neq 0} \frac{|f'(x)v|}{|v|}$$

obtemos

$$\frac{|f'(x)v|}{|v|} \leq |f'(x)| \text{ e portanto } |f'(x)v| \leq |f'(x)||v|.$$

Assim, segue de (1.2)

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leq \int_0^1 |[f'(x + t(y-x)) - f'(x)]||y-x|dt.$$

Desde que,

$$|x + t(y-x) - x| = |t(y-x)| = |t||y-x| < |y-x| < \alpha,$$

pois $t \in [0,1]$, segue de (1.1)

$$|f'(x + t(y-x)) - f'(x)| < \epsilon.$$

Consequentemente

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leq \epsilon |y-x|,$$

o que implica

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leq \epsilon \, diam(\widetilde{C}). \tag{1.3}$$

Desde que, $x \in \mathcal{C} \cap S$ tem-se que $J_f(x) = 0$. Logo $f'(x)$ não é inversível e podemos afirmar que $f'(x)(\mathbb{R}^N) \subset H$, onde H é um hiperplano do $\mathbb{R}^N$.

Por (1.3) temos

$$|f(y) - (f(x) + f'(x)(y-x))| \leq \epsilon \, diam(\widetilde{C}), \;\; onde \;\; f'(x)(y-x) \in H$$

e sendo $\rho(f(y), f(x) + H)$ a distância entre o ponto $f(y)$ e o conjunto $f(x) + H$, por definição da função distância temos

$$\rho(f(y), f(x) + H) = inf\{|f(y) - (f(x) + h)|; h \in H\}.$$

Assim, se considerarmos $h = f'(x)(y-x)$, obtemos

$$\rho(f(y), f(x) + h) \leq |f(y) - (f(x) + f'(x)(y-x))|, \forall \; h \in H$$

e com isso

$$\rho(f(y), f(x) + H) \leq \epsilon \, diam(\widetilde{C}).$$

Desta forma, $f(\widetilde{C})$ está contido num paralelepípedo P de centro $f(x)$ e volume

$$V(P) = 2\epsilon \, diam(\widetilde{C})(2M diam(\widetilde{C}))^{N-1}.$$

Sendo assim, a medida exterior do conjunto $f(\widetilde{C})$ é dada por

$$m^*(f(\widetilde{C})) \leq 2\epsilon \, diam(\widetilde{C})(2M diam(\widetilde{C}))^{N-1}$$

implicando

$$m^*(f(\widetilde{C})) \leq 2^N M^{N-1} diam(\widetilde{C})^N \, \epsilon.$$

Logo

$$m^*(f(\widetilde{C})) \leq 2^N M^{N-1} (\frac{a}{K}\sqrt{N})^N \, \epsilon.$$

Agora, veja que

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq \sum_{\widetilde{C} \cap S \neq \emptyset} m^*(f(\widetilde{C} \cap S))$$

e consequentemente

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq \sum_{\widetilde{C} \cap S \neq \emptyset} m^*(f(\widetilde{C})),$$

donde obtemos

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq 2^N M^{N-1} N^{\frac{N}{2}} (\frac{a}{K})^N . \epsilon . K^N .$$

Portanto

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq 2^N M^{N-1} N^{\frac{N}{2}} (a)^N \, \epsilon.$$

Considerando $2^N M^{N-1} N^{\frac{N}{2}} (a)^N = \sigma$, temos que $m^*(f(C \cap S)) \leq \sigma\epsilon$.

Fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos

$$m^*(f(C \cap S)) = 0.$$

Agora, considere uma família de cubos abertos $\{C_\lambda\}$ verificando

$$S \subset \bigcup_{S \cap C_\lambda \neq \emptyset} C_\lambda, \;\; com \;\; C_\lambda \;\; aberto \;\; e \;\; C_\lambda \subset \Lambda.$$

Segue do teorema de Lindëlof que existe $\{C_j\}_{j \in N} \subset \{C_\lambda\}$, tal que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\overline{C}_j \cap S).$$

Daí, segue

$$f(S) \subset f(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\overline{C}_j \cap S)),$$

implicando

$$f(S) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} f(\overline{C}_j \cap S).$$

Logo

$$m^*(f(S)) \leq m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} f(\overline{C}_j \cap S))$$

e consequentemente

$$0 \leq m^*(f(S)) \leq \sum_{\overline{C_j} \cap S \neq \emptyset} m^*(f(\overline{C}_j \cap S)) = 0,$$

donde concluímos

$$m^*(f(S)) = 0.$$

Conforme resultado da teoria da medida (ver Teorema $B.3$) temos que $f(S)$ é mensurável com $m(f(S)) = m^*(f(S)) = 0$. ■

1.1.1 Definição do Grau para o Caso Regular

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções k-vezes continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$, isto é, o espaço das funções contínuas em $\overline{\Omega}$ que possuem todas as derivadas até ordem k, sendo restrições de funções contínuas definidas em $\overline{\Omega}$.

Para o espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ vamos considerar a seguinte norma

$$\|\varphi\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \Omega} \|D^{(j)}\varphi(x)\|.$$

Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$, onde J_φ representa a matriz jacobiana de φ. Seja $b \in \mathbb{R}^N$ com $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$.

Se $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$ temos que $J_\varphi(x) \neq 0$, então pelo Teorema da Aplicação Inversa φ é um difeomorfismo de uma vizinhança $\mathbf{U}$ de x sobre uma vizinhança $\mathbf{V}$ de b, isto é, $\varphi_{|\mathbf{U}} : \mathbf{U} \rightarrow \varphi(\mathbf{U}) = \mathbf{V}$ é um difeomorfismo.

Afirmação: O conjunto $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito.

De fato, $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um fechado em $\overline{\Omega}$, consequentemente $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um fechado e limitado em $\mathbb{R}^N$, pois $\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \overline{\Omega}$. Portanto, $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um compacto.

Para cada $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$, considere a bola $B_{r_x}(x) \subset \mathbf{U}_x$.

Assim

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subseteq \bigcup_{x_j \in \varphi^{-1}(\{b\})} B_{r_j}(x_j),$$

e desde que $\{B_{r_j}(x_j)\}$ é uma cobertura por abertos para o compacto $\varphi^{-1}(\{b\})$, pelo Teorema de Borel-Lebesgue podemos extrair uma subcobertura finita de maneira que

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{r_j}(x_j),$$

mostrando que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito, ou seja, $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_k\}$ com $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

Definição 1.2 *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação φ em relação a Ω no ponto b, como sendo o número inteiro*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi(\xi_i))$$

onde sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn\ (t) = \begin{cases} 1, & se \quad t > 0 \\ -1, & se \quad t < 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.1 *Considere a aplicação* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$*, definida por* $\varphi(x) = sen\, x$ *com* $\Omega = (0, \frac{5\pi}{2})$ *e* $b = \frac{\pi}{4}$*. Nosso objetivo é calcular o grau topológico de Brouwer de* φ *com relação a* Ω *no ponto* b*, ou seja* $d(\varphi, \Omega, b)$*.*
Resolução:
Devemos primeiramente verificar se $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$*, para que o* $d\Big(senx, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big)$ *esteja bem definido. Veja que:*
$\partial\Omega = \{0, \frac{5\pi}{2}\}$, $\varphi(S) = \{x \in (0, \frac{5\pi}{2}); cos\, x = 0\} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, $\varphi(\partial\Omega) = \{0, 1\}$, $\varphi(S) = \{-1, 1\}$*, logo* $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S) = \{-1, 0, 1\}$.
Com isso concluimos que $\frac{\pi}{4} \notin \{-1, 0, 1\}$.
Assim,

$$\varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

Por definição,

$$d\Big(senx, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\})} sgn(J_\varphi(\xi_i))$$

logo,

$$d\Big(senx, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) = sgn(\varphi'(\xi_1)) + sgn(\varphi'(\xi_2)) + sgn(\varphi'(\xi_3))$$

consequentemente,

$$d\Big(senx, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) = 1 + (-1) + 1.$$

Portanto,

$$d\Big(senx, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) = 1.$$

Observação 1.1 *Uma primeira observação que destacamos a partir da definição* 1.2 *é a seguinte igualdade*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Com efeito, note primeiramente que

$$\varphi(x) = b \Leftrightarrow \varphi(x) - b = 0.$$

Considerando $\varphi - b = \psi$ temos que $\psi^{-1}(\{0\}) = \varphi^{-1}(\{b\})$. Desta forma,

$$d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\psi, \Omega, 0),$$

que implica

$$d(\psi,\Omega,0) = \sum_{\eta_i \in \psi^{-1}(\{0\})} sgn[J_\psi(\eta_i)].$$

Desde que, a quantidade de parcelas dos dois somatórios

$$\sum_{\eta_i \in \psi^{-1}(\{0\})} sgn[J_\psi(\eta_i)] \ \ e \ \ \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn[J_\varphi(\xi_i)]$$

são iguais e

$$\psi(\eta_i) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\eta_i) - b = 0 \Leftrightarrow \varphi(\eta_i) = b$$

concluímos que $\xi_i = \eta_i$. Assim,

$$d(\psi,\Omega,0) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn[J_\varphi(\xi_i)].$$

Portanto,

$$d(\psi,\Omega,0) = d(\varphi,\Omega,b).$$

1.1.2 Cálculo do Grau por Integração

Considerando $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3,...,\xi_k\}$ temos $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1,2,3,...,k\}$. Logo pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança $\mathbf{U}_i$ de ξ_i e $\varphi(\mathbf{U}_i)$ de b tal que $\varphi_{|\mathbf{U}_i} : \mathbf{U}_i \ \rightarrow \ \varphi(\mathbf{U}_i)$ com $i \in \{1,2,3,...,k\}$ é um difeomorfismo. Além disso, existe $\epsilon > 0$ e vizinhanças $B_\epsilon(b)$ de b e $\mathbf{U}_i$ de ξ_i com $i \in \{1,2,3,...,k\}$ tais que

$$\varphi_{|\mathbf{U}_i} : \mathbf{U}_i \ \rightarrow \ B_\epsilon(b)$$

é um difeomorfismo.

Para todo $\epsilon > 0$, existe uma aplicação $J_\epsilon \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ tal que $suptJ_\epsilon \subset B_\epsilon(b)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x)dx = 1$, onde $suptJ_\epsilon$ é o suporte da função J_ϵ, que é definido por

$$suptJ_\epsilon = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N; J_\epsilon(x) \neq 0\}}.$$

Agora, vamos definir

$$I_\epsilon = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x))J_\varphi(x)dx.$$

Note que

$$I_\epsilon = \int_{\{x\in\Omega;|\varphi(x)-b|<\epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x))J_\varphi(x)dx.$$

Fixando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, considere as vizinhanças $\mathbf{U}_i$ de ξ_i, desta forma I_ϵ é dado por

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbf{U}_i} J_\epsilon(\varphi_{|\mathbf{U}_i}(x)) J_{\varphi_{|\mathbf{U}_i}}(x)dx,$$

onde $\varphi_i = \varphi_{|\mathbf{U}_i}$ com $1 \leq i \leq k$. Sendo

$$\varphi(\mathbf{U}_i) = B_\epsilon(b) \text{ temos} \quad \text{que } \mathbf{U}_i = \varphi^{-1}(B_\epsilon(b)).$$

Assim

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi_i{}^{-1}(B_\epsilon(b))} J_\epsilon(\varphi_i(x)) J_{\varphi_i}(x)dx.$$

Usando o Teorema de Mudança de Variávéis temos

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(\varphi_i(\varphi_i^{-1}(x))) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) |J_{\varphi_i^{-1}}(x)|dx,$$

ou seja,

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) |J_{\varphi_i^{-1}}(x)|dx. \tag{1.4}$$

Desde que

$$\varphi_i(\varphi_i^{-1}(x)) = x$$

temos

$$|J_{\varphi_i^{-1}}(x)| = \frac{1}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|}. \tag{1.5}$$

Usando a igualdade (1.5) em (1.4) obtemos

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) \frac{1}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|} dx.$$

Observe que

$$\frac{J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|} = \begin{cases} 1 & , se \quad J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) > 0 \\ -1 & , se \quad J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) < 0 \end{cases}$$

e portanto

$$\frac{J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|} = sgn[J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))].$$

Consequentemente,

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) sgn[J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))]dx.$$

Desde que,

$$sgn\Big[J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))\Big] = sgn J_\varphi(\xi_i), \ \ \forall\, x \in B_\epsilon(b),$$

segue-se que

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) sgn[J_\varphi(\xi_i)]dx.$$

Assim,

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} sgn[J_\varphi(\xi_i)] \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x)dx.$$

Sendo $supt J_\epsilon \subset B_\epsilon(b)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x)dx = 1$$

temos

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} sgn[J_\varphi(\xi_i)]$$

donde podemos concluir que

$$I_\epsilon = d(\varphi, \Omega, b).$$

O número I_ϵ é denominado a Forma Integral do Grau Topológico de Brouwer de φ com relação a Ω no ponto b.

Observação 1.2 *Podemos concluir a partir do que já foi visto sobre a teoria do grau que, se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.*

De fato, se $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi(\xi_i)) = \int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x)dx.$$

Sendo $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, por hipótese, temos

$$\int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x)dx \neq 0$$

implicando que $\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\} \neq \emptyset$. Consequentemente, existe $x_\epsilon \in \Omega$ tal que $|\varphi(x_\epsilon) - b| < \epsilon$. Desde que $\overline{\Omega}$ seja limitado, fazendo $\epsilon \to 0$ temos que, $\varphi(x_0) - b = 0$ concluimos que $\varphi(x_0) = b$.

Lema 1.3 *Seja $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Então, existe uma vizinhança* **U** *de φ pela topologia de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\forall\, \psi \in$* **U**, *temos que:*
(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$,
(ii) $x \in \psi^{-1}(b) \Rightarrow J_\varphi(x) \neq 0$,
(iii) $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Demonstração: Prova do item (i).

Seja $\epsilon_1 = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$ e vamos considerar a seguinte vizinhança de φ

$$\|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_1}{2}. \tag{1.6}$$

Afirmação: $b \notin \psi(\partial\Omega)$.

De fato, segue de (1.6)

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\epsilon_1}{2}, \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{1.7}$$

Assim, não existe $x_0 \in \partial\Omega$ com $\psi(x_0) = b$, pois caso contrário, em (1.7) teríamos

$$|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\epsilon_1}{2}, \ \ ou \ \ seja, \ \ |b - \varphi(x_0)| \leq \frac{\epsilon_1}{2}$$

implicando que

$$\epsilon_1 = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} \leq \frac{\epsilon_1}{2},$$

que é um absurdo.

Prova do item (ii).

Considere $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k\}$ e as vizinhanças $\mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}, \mathbf{U_3}, \ldots, \mathbf{U_k}$ e $\epsilon > 0$, tais que

$$\varphi_i = \varphi\Big|_{\mathbf{U_i}} : \mathbf{U_i} \ \rightarrow \ B_\epsilon(b)$$

é um difeomorfismo e vamos supor que

$$|J_{\varphi_i}(x)| > \eta > 0, \ \forall\, x \in \ \mathbf{U_i}, \ i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Usando o fato que $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, dado

$$\epsilon^* = \frac{1}{2M}, \ \text{onde } 0 < M = \max\{|\varphi'(\xi_i)^{-1}|;\, i = 1, 2, 3, \ldots, k\},$$

existe $r > 0$ tal que

$$\forall\, x \in \ B_r(\xi_i), \ i = 1, 2, 3, \ldots, k \ \text{ tem-se } |\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)| < \epsilon^* = \frac{1}{2M}.$$

Logo,

$$|\varphi'(\xi_i)^{-1}[\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)]| \leq |\varphi'(\xi_i)^{-1}||\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)|$$

e daí temos

$$|\varphi'(\xi_i)^{-1}[\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)]| < M \cdot \frac{1}{2M} = \frac{1}{2}, \ \forall\, x \in \ B_r(\xi_i), \ i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

O r é escolhido de tal maneira que

$$sgnJ_\varphi(x) = sgnJ_\varphi(\xi_i),\ \forall\, x \in\ B_r(\xi_i),\ i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Considere $\mathbb{D} = \overline{\Omega} \backslash \bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i)$. Note que $\mathbb{D}$ é um compacto, pois $\mathbb{D}$ é um fechado e limitado, e além disso, $b \notin \mathbb{D}$.

Considere $\epsilon_2 = \rho\{b, \varphi(\mathbb{D})\} > 0$ então, para $\forall\, \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_2}{2}$$

devemos ter $b \notin \psi(\mathbb{D})$. Assim, as soluções da equação $\psi(x) = b$, caso existam, devem pertencer ao conjunto $\bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i)$.

A aplicação $\varphi' : \overline{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ é contínua e com isso, $\varphi'(\overline{\Omega})$ é um compacto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Por outro lado, a aplicação $det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é contínua, donde podemos concluir que a mesma é uniformemente contínua sobre uma vizinhança compacta K de $\varphi'(\overline{\Omega})$. Assim, existe $\epsilon_3 > 0$ tal que

$$|X - Y| < \epsilon_3 \Rightarrow |detX - detY| < \eta,\ \forall\, X, Y \in\ K.$$

Se $|X - Y| < \epsilon_3$, para algum $X \in \varphi'(\overline{\Omega})$ tem-se que $Y \in K$. Considerando agora a vizinhança de φ em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ dada por

$$\|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_3}{2}\ \text{ com }\ \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$$

temos que

$$\forall\, x \in\ \Omega,\ \psi'(x) \in K\ \ e\ \ |J_\psi(x) - J_\varphi(x)| < \eta.$$

Considerando

$$\mathbf{U_1} = \{\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_4}{2}\}$$

onde, $\epsilon_4 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ obtemos

$$J_\psi(x) \neq 0,\ \forall\, \psi \in \mathbf{U_1}\ \ e\ \ \forall\, x \in\ \bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i).$$

De fato, note que

$$|J_\varphi(x)| - |J_\psi(x)| \leq |J_\varphi(x) - J_\psi(x)| < \eta$$

implicando que

$$|J_\psi(x)| > |J_\varphi(x)| - \eta, \;\; \forall\; x \in \bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i).$$

Mostrando que

$$J_\psi(x) \neq 0, \;\; \forall\; \psi \in \mathbf{U_1} \;\; e \;\; \forall\; x \in \bigcup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i),$$

provando assim, o item (ii).

Prova do item (iii).

Para demonstrar que

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b), \;\; \forall\; \psi \;\in\; \mathbf{U_1},$$

devemos mostrar que em cada bola $B_r(\xi_i)$, existe um único $x_0^i \in B_r(\xi_i)$ tal que $\psi(x_0^i) = b$.

Fixe

$$a = 1 + \max_{1 \leq i \leq k}\{|\varphi'(\xi_i)^{-1}|\} > 0.$$

Podemos encontrar uma vizinhança $\mathbf{U}$ de φ contida em $\mathbf{U_1}$ tal que:

(1º) $\forall\; \psi \;\in\; \mathbf{U},\; |\psi'(\xi_i)^{-1}| < a,\; \forall\; i = 1, 2, 3, \ldots, k$, tendo em vista que a inversão de matrizes é uma imersão contínua.

(2º) $|\psi'(\xi_i)^{-1}[\psi'(y) - \psi'(\xi_i)]| < \dfrac{3}{4},\; \forall\; y \;\in\; B_r(\xi_i),\; i = 1, 2, 3, \ldots, k.$

Para fixar as idéias, considere

$$\mathbf{U} = \{\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\varphi - \psi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \epsilon\} \;\; com \;\; 0 < \epsilon < \min\left\{\epsilon_4, \frac{r}{4a}\right\}.$$

Neste caso,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \epsilon < \frac{r}{4a}, \;\; \forall\; x \;\in\; \overline{\Omega}.$$

Defina a função

$$\theta_i(x) = \psi'(\xi_i)^{-1}\psi(x), \;\; \forall\; x \;\in\; B_r(\xi_i).$$

Afirmação: $\theta_i - I$ é uma $\dfrac{3}{4} -$ contração.

De fato,

$$|\theta_i^{'}(x) - I| = \max\{|\theta_i^{'}(x)v - v|; |v| = 1\}$$

implicando que

$$|\theta_i^{'}(x) - I| = \max\{|\psi'(\xi_i)^{-1}\psi'(x)v - v|; |v| = 1\}.$$

Logo

$$|\theta_i'(x) - I| = \max\{|\psi'(\xi_i)^{-1}[\psi'(x)v - \psi'(\xi_i)v]|; |v| = 1\},$$

donde se obtém

$$|\theta_i'(x) - I| \leq \frac{3}{4}, \ \forall \ x \in \ B_r(\xi_i).$$

Definindo $\psi_i(x) = \theta_i - x$ tem-se que $\theta_i = x + \psi_i(x)$, onde ψ_i é $\dfrac{3}{4} -$ contração. Usando o Lema $A.17 - (ii)$, θ_i é injetiva em $B_r(\xi_i)$, implicando que ψ é injetiva em $B_r(\xi_i)$.

Defina

$$\phi(x) = \theta_i(x + \xi_i) - \theta_i(\xi_i)$$

e note que

$$\phi(x) = x + (\theta_i(x + \xi_i) - x - \theta_i(\xi_i)).$$

Repetindo o mesmo argumento utilizado para mostrar que $\theta_i - I$ é $\dfrac{3}{4} -$ contração, podemos concluir que $\theta_i(x + \xi_i) - x - \theta_i(\xi_i)$ é $\dfrac{3}{4} -$ contração em $B_r(0)$.

Logo, pelo Lema $A.17$ temos que

$$\phi(B_r(0)) \supset B_{\frac{r}{4}}(0), \ \textit{ou seja}, \ \theta_i(B_r(\xi_i)) \supset B_r(0) + \theta_i(\xi_i) = B_{\frac{r}{4}}(0)(\theta_i(\xi_i)),$$

isto é,

$$\psi(B_r(\xi_i)) \supset \psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4}}(\theta_i(\xi_i))).$$

Além disso,

$$\psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4}}(\theta_i(\xi_i))) \supset B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i)), \tag{1.8}$$

pois para $y \in B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))$ temos

$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| = |\psi'(\xi_i)^{-1}y - \psi'(\xi_i)^{-1}\psi(\xi_i)|$$

implicando que

$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| = |\psi'(\xi_i)^{-1}[y - \psi(\xi_i)]|.$$

Assim

$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| \leq |\psi'(\xi_i)^{-1}|\,|y - \psi(\xi_i)|,$$

e consequentemente

$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| < a\frac{r}{4a} = \frac{r}{4}.$$

Desta forma,

$$\psi'(\xi_i)^{-1}(y) \in B_{\frac{r}{4}}(\theta(\xi_i))$$

que implica

$$y \in \psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))),$$

ou seja,

$$B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i)) \subset \psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))). \tag{1.9}$$

De (1.8) e (1.9) obtemos

$$\psi(B_r(\xi_i)) \supset B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i)). \tag{1.10}$$

Recorde que

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \frac{r}{4a}, \ \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

e com isso, para $x = \xi_i$ temos

$$|\varphi(\xi_i) - \psi(\xi_i)| < \frac{r}{4a}$$

isto é,

$$|b - \psi(\xi_i)| < \frac{r}{4a}$$

implicando que $b \in B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))$ e por (1.23) temos que $b \in \psi(B_r(\xi_i))$. Mostrando que existe um elemento $x_0^i \in B_r(\xi_i)$ verificando $\psi(x_0^i) = b$. Desde que ψ injetiva, tal elemento é único. Portanto,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b), \ \forall\, \psi \in \mathbf{U}.$$

■

Observação 1.3 *O item (iii) afirma que o grau topológico de Brouwer é localmente constante na topologia* $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

Lema 1.4 *Sejam* $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* b_1, b_2 *pontos de* $\mathbb{R}^N$ *que não pertencem a* $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. *Se* b_1 *e* b_2 *estão na mesma componente conexa de* $\mathbb{R}^N \setminus \Big(\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)\Big)$, *tem-se que*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Sejam b_1 e b_2 pontos de $\mathbb{R}^N \backslash \Big(\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)\Big)$. Desde que, a componente conexa que contém b_1 e b_2 é um aberto em $\mathbb{R}^N$, pois $\mathbb{R}^N \backslash \Big(\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)\Big)$ é um aberto, a mesma é conexa por caminhos, donde segue que existe

$$\begin{aligned} q: \ [0,1] &\to \mathbb{R}^N \\ t &\mapsto q(t) \in C_{b_1,b_2}, \end{aligned}$$

com $q(0) = b_1$ e $q(1) = b_2$ onde C_{b_1,b_2} é a componente contendo b_1 e b_2. Note que $q([0,1]) \subset C_{b_1,b_2}$ é um compacto em $\mathbb{R}^N$. Assim, existem $\epsilon > 0$ e $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$ tais que

$$q([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_\epsilon(x_i) \quad e \quad B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset, \quad com \ \ i = 1,2,3,...,s-1.$$

Vamos fixar nossa atenção a $B_\epsilon(x_1)$ com $x_1 = b_1$ e $x_s = b_2$.
Considere $x \notin \Big(\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)\Big)$. Assim $d(\varphi, \Omega, x)$ está bem definido e pelo Lema 1.3 temos

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi - b_1, \Omega, 0).$$

Além disso,

$$\|(\varphi - b_1) - (\varphi - x)\|_{C^1} = |b_1 - x| < \epsilon,$$

e pelo Lema 1.3 com ϵ suficientemente pequeno, temos que

$$d(\varphi - b_1, \Omega, 0) = d(\varphi - x, \Omega, 0), \forall x \in B_\epsilon(b_1),$$

que implica

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, x), \forall x \in B_\epsilon(x).$$

Seguindo com este raciocínio temos

$$d(\varphi, \Omega, x_i) = d(\varphi, \Omega, y), \ \forall \ y \in B_\epsilon(x_i), \ \ com \ \ i = 1,2,3,...,s.$$

Desde que $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$ podemos concluir que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

■

Lema 1.5 *Seja* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* b_1, b_2 *pontos de* $\mathbb{R}^N$ *que não pertencem a* $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. *Se* b_1 *e* b_2 *estão na mesma componente conexa de* $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, *temos que*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Considere Θ a componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$ que contém b_1 *e* b_2. Sendo Θ aberto e conexo, o mesmo é conexo por caminhos, logo existe um caminho

$$\begin{aligned} q: \quad [0,1] & \rightarrow \mathbb{R}^N \\ t \quad & \mapsto q(t) \in \Theta \end{aligned}$$

com $q(0) = b_1$ e $q(1) = b_2$.

Usando a compacidade do conjunto $q([0,1])$, existe $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$\overline{B}_\epsilon(q(t)) \subset \Theta, \ \forall\, t \ \in \ [0,1],$$

ou seja,

$$B_\epsilon(q(t)) = B_\epsilon(0) + q(t) = B_\epsilon(b_1) - (b_1 - q(t)) \subset \Theta.$$

Considere uma função $J_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $supt J_\epsilon = \overline{B}_\epsilon(b_1)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x)dx = 1$.

Aplicando o Lema $A.19$, considerando $f(x) = J_\epsilon(x)$, $K = \overline{B}_\epsilon(b_1)$ e $\gamma(t) = b_1 - q(t)$ temos

$$J_\epsilon(x + \gamma(0)) - J_\epsilon(x + \gamma(1)) = div\, v(x),$$

que implica

$$J_\epsilon(x) - J_\epsilon(x + b_1 - b_2) = div\, v(x),$$

onde $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $supt\, v \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$, pois $supt\, v \subset \Theta$.

Aplicando agora o Lema $A.18$, existe $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $supt\, u \subset \Omega$ e $div\, u(x) = J_\varphi(x) div\, v(x)$. Assim,

$$(J_\epsilon(\varphi(x)) - J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2))J_\varphi(x) = div\, u(x)$$

e portanto,

$$\int_\Omega (J_\epsilon(\varphi(x)) - J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2))J_\varphi(x)dx = \int_\Omega div\, u(x)dx.$$

Pelo Teorema do Divergente $A.14$ temos

$$\int_\Omega div\, u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u\overrightarrow{\eta}\, dS = 0,$$

pois $u(x) = 0, \ \forall\, x \in \partial\Omega$. Logo,

$$\int_\Omega (J_\epsilon(\varphi(x)) - J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2))J_\varphi(x)dx = 0$$

e consequentemente,

$$\int_\Omega J_\epsilon \varphi(x) J_\varphi(x) = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx,$$

que implica

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx.$$

Vamos mostrar que

$$d(\varphi, \Omega, b_2) = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx.$$

Note que,

$$\int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_{\varphi(x)+b_1-b_2}(x) dx.$$

Definindo a função $\psi(x) = \varphi(x) + b_1 - b_2$ temos que

$$\int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx = \int_\Omega J_\epsilon(\psi(x)) J_\psi(x) dx.$$

Logo

$$d(\psi, \Omega, b_1) = \int_\Omega J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2) J_\varphi(x) dx,$$

isto é,

$$d(\varphi + b_1 - b_2, \Omega, b_1) = d(\varphi + b_1 - b_2 - b_1, \Omega, 0) = d(\varphi - b_2, \Omega, 0) = d(\varphi, \Omega, b_2),$$

e com isso concluimos que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

■

Definição 1.6 *Seja $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $b \in \varphi(S)$. Considere C_b a componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, que contém b. Sendo C_b um aberto, existe $x \in C_b \backslash \varphi(S)$. Definimos no que segue-se*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, x), \forall x \in C_b \backslash \varphi(S).$$

Lema 1.7 *Para $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, existe uma vizinhança $\mathbf{U}$ de φ na topologia $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que para $\forall \psi \in \mathbf{U}$ temos:*
(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$,
(ii) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Temos duas possibilidades a considerar:

(1^0) $b \notin \varphi(S)$, o resultado segue do Lema (1.3).

(2^0) $b \in \varphi(S)$.

Seja $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$. Pelo **Teorema de Sard** existe $b_1 \notin \varphi(S)$ satisfazendo

$$|b_1 - b| < \frac{r}{4}$$

pois caso contrário,

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subseteq \varphi(S)$$

e assim

$$0 < m(B_{\frac{r}{4}}(b)) \leq m(\varphi(S)),$$

que é um absurdo. Além disso, tem-se também

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$$

portanto, b e b_1 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. Usando a definição do grau para o caso $b \in \varphi(S)$ temos que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b_1). \tag{1.11}$$

Temos que $b_1 \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$, assim aplicando o Lema 1.3 encontramos uma vizinhança **U** de φ em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ de maneira que, $\forall \psi \in \mathbf{U}$ temos

$$b_1 \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(S) \quad e \quad d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\psi, \Omega, b_1). \tag{1.12}$$

Note agora que

$$\rho\{b, \psi(\partial\Omega)\} \ \geq \ \frac{r}{2}, \ \forall \psi \in \mathbf{U}$$

implicando

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega), \ \forall \psi \in \mathbf{U}.$$

Portanto, b e b_1 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega), \forall \psi \in \mathbf{U}$. Assim,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1). \tag{1.13}$$

Segue de (1.11), (1.12) e (1.13) que $\quad d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$. ■

Lema 1.8 *(Invariância por Homotopia de Classe C^2) Seja $H(x,t) \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$, com $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então,*

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv constante, \ \forall t \in [0,1].$$

Demonstração: As funções H e $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ são uniformemente contínuas em $\overline{\Omega} \times [0,1]$. Então, para cada $\tau \in [0,1]$ fixado e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0,1], |t-\tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot,t) - H(\cdot,\tau)\|_{C^1} < \epsilon$$

(ver Teorema $A.10$). Segue do Lema 1.7 que

$$d(H(\cdot,\tau),\Omega,b) = d(H(\cdot,t),\Omega,b)$$

para t suficientemente próximo de τ. Assim, a função $t \mapsto d(H(\cdot,t),\Omega,b)$ é localmente constante em $[0,1]$. Sendo $[0,1]$ um compacto e conexo, podemos afirmar que a mesma é constante. ∎

1.1.3 Definição do Grau para Funções Contínuas

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $r = \rho\{b,\varphi(\partial\Omega)\} > 0$. Sendo $C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ denso em $C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, devido ao **Teorema de Aproximação de Weirstrass,** existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi - \psi\|_\infty < \dfrac{r}{2}$.
Fixando

$$\mathbf{U} = \{\psi \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N); \|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}\},$$

tem-se

$$d(\psi_1,\Omega,b) = d(\psi_2,\Omega,b),\ \forall\, \psi_1,\psi_2 \in \mathbf{U}.$$

De fato, defina a aplicação

$$\begin{aligned} H:\ \ \overline{\Omega} \times [0,1] &\to \mathbb{R}^N \\ (x,t) \quad &\mapsto H(x,t) = t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x). \end{aligned}$$

Observe que, $H \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,1],\mathbb{R}^N)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$.
Vamos justificar que

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0,1]).$$

Para $x \in \overline{\Omega}$, e para cada $t \in [0,1]$ temos

$$|H(x,t) - \varphi(x)| = |t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x) - t\varphi(x) - (1-t)\varphi(x)|,$$

que implica

$$|H(x,t) - \varphi(x)| = |t(\psi_1(x) - \varphi(x)) + (1-t)(\psi_2(x) - \varphi(x))|.$$

Portanto,

$$|H(x,t)-\varphi(x)| \leq t|\psi_1(x)-\varphi(x)| + (1-t)|\psi_2(x)-\varphi(x)|, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Desde que

$|\psi_1(x)-\varphi(x)| \leq \|\psi_1-\varphi\|_\infty$ e $|\psi_2(x)-\varphi(x)| \leq \|\psi_2-\varphi\|_\infty, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$

segue-se que

$$|H(x,t)-\varphi(x)| \leq t\|\psi_1-\varphi\|_\infty + (1-t)\|\psi_2-\varphi\|_\infty, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}.$$

Logo

$$|H(x,t)-\varphi(x)| < t\,\frac{r}{2} + (1-t)\,\frac{r}{2},$$

implicando

$$|H(x,t)-\varphi(x)| < \frac{r}{2} \tag{1.14}$$

e consequentemente

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0,1]),$$

pois caso contrário, existiria $x_0 \in \partial\Omega$ e $t_0 \in [0,1]$ tais que $H(x_0,t_0)=b$, e com isso

$$|H(x_0,t_0)-\varphi(x_0)| < \frac{r}{2},$$

que implicaria

$$|b-\varphi(x_0)| < \frac{r}{2}$$

o que é um absurdo, pois sendo $r=\rho\{b,\varphi(\partial\Omega)\}$ tem-se

$$|b-\varphi(x)| \geq r.$$

Portanto,

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0,1]).$$

Pelo Lema 1.8 temos

$$d(H(\cdot,t),\Omega,b) \equiv \text{constante}, \forall t \in [0,1],$$

que implica

$$d(H(\cdot,0),\Omega,b) = d(H(\cdot,1),\Omega,b),$$

isto é,

$$d(\psi_2,\Omega,b) = d(\psi_1,\Omega,b).$$

Definição 1.9 *Definimos o Grau Topológico de Brouwer para* $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *com* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, *como sendo*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b),\ \forall\ \psi \in \mathbf{U}.$$

Observação 1.4 *Assim, para toda* $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *com* $b \notin \psi(\partial\Omega)$, *temos que* $d(\psi, \Omega, b)$ *está bem definido e não depende da* ψ *escolhida, como foi mostrado acima.*

Um primeiro resultado obtido a partir da definição 1.9 é o seguinte

Lema 1.10 *Seja* $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. *Então,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Demonstração: De acordo com a definição do grau topológico de Brouwer para as funções contínuas temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b),\ \forall\ \psi \in \mathbf{U}. \tag{1.15}$$

Fixando uma $\psi \in \mathbf{U}$ observamos que

$$\varphi(x) = b \Rightarrow (\varphi - b)(x) = 0,\ \forall\ x \in \overline{\Omega}$$

e

$$\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}, \text{ onde } r = \rho\{0, (\varphi - b)(\partial\Omega)\},$$

pois

$$r{=}\rho\{0, (\varphi{-}b)(\partial\Omega)\}{=}inf\{|0{-}(\varphi{-}b)(x)|; x \in \partial\Omega\}{=}inf\{|b{-}(\varphi)(x)|; x \in \partial\Omega\}{=}\rho\{b, (\varphi)(\partial\Omega)\}.$$

Consequentemente,

$$\|\psi - b + b - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}$$

implicando que

$$\|(\psi - b) - (\varphi - b)\|_\infty < \frac{r}{2},$$

e portanto,

$$d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0). \tag{1.16}$$

Claramente,

$$b \notin \psi(\partial\Omega), \forall \psi \in \mathbf{U}.$$

Considere agora $b_1 \notin \psi(S)$ que está na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$ que contém b. Assim

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi - b_1, \Omega, 0). \tag{1.17}$$

Escolhendo b_1 suficientemente próximo de b tal que

$$\|(\psi - b) - (\psi - b_1)\|_\infty = \|b_1 - b\|_\infty = |b_1 - b| < \epsilon < \frac{1}{2}\rho\{0, (\psi - b)(\partial\Omega)\},$$

obtemos

$$d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b_1, \Omega, 0). \tag{1.18}$$

De (1.15) $-$ (1.18) concluímos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi - b_1, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Portanto,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

■

1.1.4 Propriedades Principais do Grau Topológico de Brouwer

($\mathbf{P_1}$) Continuidade

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança V de φ na topologia $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, tal que para $\forall \psi \in V$ temos que:

(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$,

(ii) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Sejam $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$ e $V = \{H \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\varphi - H\|_\infty < \frac{r}{4}\}$.
Se $H \in V$ temos $b \notin H(\partial\Omega)$ e

$$\rho\{b, H(\partial\Omega)\} \geq \frac{3r}{4}, \tag{1.19}$$

pois

$$|b - H(x)| = |b - \varphi(x) + \varphi(x) - H(x)|,$$

que implica

$$|b - H(x)| \geq |b - \varphi(x)| - |\varphi(x) - H(x)|. \tag{1.20}$$

Desde que,

$$|b - \varphi(x)| \geq r,\ \forall x\ \in \partial\Omega$$

e

$$\|\varphi - H\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\varphi(x) - H(x)|,$$

deduzimos que

$$|\varphi(x) - H(x)| \leq \|\varphi - H\|_\infty < \frac{r}{4}, \ \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

implicando por (1.20)

$$|b - H(x)| \geq r - \frac{r}{4}.$$

Consequentemente

$$|b - H(x)| \geq \frac{3r}{4} > 0, \ \forall\, x \in \partial\Omega$$

mostrando assim que $b \notin H(\partial\Omega)$.

Agora fixe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{8}$. Usando a definição do grau topológico de Brouwer para funções contínuas temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b). \tag{1.21}$$

Definindo para $H \in V$ o número $r^{'} = \rho\{b, H(\partial\Omega)\}$ temos que $r^{'} \geq \frac{3r}{4}$ e

$$\|\psi - H\|_\infty < \frac{r^{'}}{2}.$$

De fato, para $x \in \overline{\Omega}$ temos

$$|\psi(x) - H(x)| = |\psi(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - H(x)|,$$

que implica

$$|\psi(x) - H(x)| \leq |\psi(x) - \varphi(x)| + |H(x) - \varphi(x)|.$$

Desde que,

$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty$ e $|\psi(x) - H(x)| \leq \|\psi - H\|_\infty, \forall x \in \overline{\Omega},$

temos que

$$|\psi(x) - H(x)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty + \|H - \varphi\|_\infty.$$

Assim,

$$|\psi(x) - H(x)| < \frac{r}{8} + \frac{r}{4} = \frac{3r}{8} = \frac{1}{2}.\frac{3r}{4} < \frac{r^{'}}{2}$$

e portanto,

$$|\psi(x) - H(x)| < \frac{r^{'}}{2}.$$

Como o conjunto $\{|\psi(x) - H(x)|; x \in \overline{\Omega}\}$ é limitado superiormente, pelo postulado de Dedekind, o mesmo possui supremo. Assim,

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |\psi(x) - H(x)| < \frac{r'}{2}$$

e com isso,

$$\|\psi - H\|_\infty < \frac{r'}{2}.$$

Usando novamente a definição do grau topológico de Brouwer temos

$$d(H, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b). \tag{1.22}$$

De (1.21) e (1.22) concluimos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(H, \Omega, b), \ \forall \ H \in V.$$

■

$(\mathbf{P_2})$ **Invariância do Grau por Homotopia**

Sejam $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \forall t \in [0,1].$$

Demonstração: Para $\tau \in [0,1]$ fixado, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0,1], |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_\infty < \epsilon.$$

Usando a propriedade (P_1) a aplicação $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é localmente constante. Sendo $[0,1]$ um conjunto compacto e conexo, segue que a função $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante, isto é,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv costante, \forall t \in [0,1].$$

■

(P_3) **O Grau é Constante em Componentes Conexas de** $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$.

Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, tem-se que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Sejam b_1 e b_2 pontos de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$ que pertencem a mesma componente conexa $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. Desde que, a componente conexa que contém b_1 e b_2 é um aberto em $\mathbb{R}^N$, pois $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$ é um aberto, a mesma é conexa por caminhos, e com isso existe

$$\begin{aligned} q: \ [0,1] & \to \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto q(t) \in C_{b_1,b_2}, \end{aligned}$$

com $q(0) = b_1$ e $q(1) = b_2$ onde C_{b_1,b_2} é a componente conexa que contém b_1 e b_2. Note que $q([0,1]) \subset C_{b_1,b_2}$ é um compacto em $\mathbb{R}^N$. Assim, existem $\epsilon > 0$ e $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$ tais que

$$q([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_\epsilon(x_i) \quad e \quad B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset, \quad com \ \ i = 1, 2, 3, ..., s-1.$$

Vamos fixar nossa atenção a $B_\epsilon(x_1)$ com $x_1 = b_1$ e $x_s = b_2$. Considerando $x \notin \varphi(\partial\Omega)$, temos que $d(\varphi, \Omega, x)$ está bem definido e pelo Lema 1.10 temos

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi - b_1, \Omega, 0).$$

Além disso,

$$\|(\varphi - b_1) - (\varphi - x)\|_{C^1} = |b_1 - x| < \epsilon.$$

Assim, pelo Lema 1.4 e ϵ suficientemente pequeno, temos

$$d(\varphi - b_1, \Omega, 0) = d(\varphi - x, \Omega, 0), \forall x \in B_\epsilon(b_1),$$

que implica

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, x), \forall x \in B_\epsilon(x).$$

Seguindo com este raciocínio temos

$$d(\varphi, \Omega, x_i) = d(\varphi, \Omega, y), \ \forall \ y \in B_\epsilon(x_i), \ \ com \ \ i = 1, 2, 3, ..., s.$$

Desde que $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$ concluimos que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

$\blacksquare$

($\mathbf{P_4}$) Aditividade

Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ com Ω_1, Ω_2 abertos, disjuntos e limitados. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$ temos que:

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

Demonstração: Sejam $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2) = \varphi(\partial\Omega)$ com $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$.

Considere

$$\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \ \ com \ \ \|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r^*}{2}$$

onde

$$r^* = min\{\rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}, \rho\{b, \varphi(\partial\Omega_1)\}, \rho\{b, \varphi(\partial\Omega_2)\}\}.$$

Usando a definição do grau topológico de Brouwer para funções contínuas temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b),$$

$$d(\varphi, \Omega_1, b) = d(\psi, \Omega_1, b)$$

e

$$d(\varphi, \Omega_2, b) = d(\psi, \Omega_2, b).$$

Escolha $b_1 \notin \psi(S)$ e que pertença as componentes de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$, $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega_1)$ e $\mathbb{R}^N \backslash \Psi(\partial\Omega_2)$ que contém b.

Assim

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1),$$

$$d(\psi, \Omega_1, b) = d(\psi, \Omega_1, b_1)$$

e

$$d(\psi, \Omega_2, b) = d(\psi, \Omega_2, b_1).$$

Segue da teoria do grau topológico de Brouwer para o caso regular

$$d(\psi, \Omega, b_1) = \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{b_1\}) \cap \Omega_1} sgn[J_\psi(\xi_i)] + \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{b_1\}) \cap \Omega_2} sgn[J_\psi(\xi_i)].$$

implicando

$$d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi, \Omega_1, b_1) + d(\psi, \Omega_2, b_1).$$

Portanto

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

$\blacksquare$

1.1.5 Consequências das Propriedades Principais do Grau Topológico de Brouwer

($\mathbf{C_1}$) (Normalização) Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^N$, isto é, $I(x) = x$ então,

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & , se \quad b \in \Omega \\ 0 & , se \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Demonstração: Se $b \in \Omega$, então

$$d(I, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in I^{-1}(\{b\})} sgn J_I(\xi_i) = sgn J_I(\xi_i).$$

Como $J_I(\xi_i) = 1 > 0$ e

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & , se \quad t > 0 \\ -1 & , se \quad t < 0 \end{cases}$$

temos que

$$d(I, \Omega, b) = 1.$$

Agora, se $b \notin \overline{\Omega}$ temos

$$d(I, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in I^{-1}(\{b\})} sgn J_I(\xi_i) = \int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx.$$

Note que, $\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\} = \emptyset$, e com isso

$$\int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx = 0.$$

Consequentemente

$$d(I, \Omega, b) = 0$$

$\blacksquare$

($\mathbf{C_2}$) (Existência de Solução) Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ então, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

Demonstração: Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, e $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$. Como $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é denso em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass (*ver Teorema* A.11), existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, com $\|\psi - \varphi\|_\infty < \dfrac{r}{2}$, tal que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Escolhendo b_1 suficientemente próximo de b com $b_1 \in C_b \backslash \psi(S)$, temos

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1).$$

Sendo $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, por hipótese, temos que $d(\psi, \Omega, b_1) \neq 0$, implicando que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\psi(x_0) = b_1$, pela mesma justificativa feita na observação 1.2.

Afirmação: $b \in \varphi(\Omega)$.

De fato, caso contrário

$$b \notin \varphi(\overline{\Omega}) \text{ com } \rho\{b, \varphi(\overline{\Omega})\} > 0.$$

Fixe $\delta > 0$ e considere o seguinte conjunto $(\varphi(\overline{\Omega}))_\delta = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \rho\{x, \varphi(\overline{\Omega})\} < \delta\}$, que é uma delta vizinhança de $\varphi(\overline{\Omega})$, onde

$$0 < \delta < \frac{1}{2}\rho\{b, \partial(\varphi(\overline{\Omega}))\}.$$

Fixado ψ de maneira que $\|\psi - \varphi\|_\infty < \delta$ temos que $\psi(\overline{\Omega}) \subset (\varphi(\overline{\Omega}))_\delta$. De fato,

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty < \epsilon < \delta, \ \textit{onde} \ 0 < \epsilon < \frac{r}{2}.$$

Assim

$$\rho\{\psi(x), \varphi(\overline{\Omega})\} < \epsilon < \delta,$$

que implica

$$\psi(x) \subset (\varphi(\overline{\Omega}))_\delta, \ \forall x \in \overline{\Omega}$$

e consequentemente

$$\psi(\overline{\Omega}) \subset (\varphi(\overline{\Omega}))_\delta.$$

Logo, $\psi(\overline{\Omega}) \cap \{b_1\} = \emptyset$, que é um absurdo, pois $b_1 \in \psi(\overline{\Omega})$. Portanto, $b \in \varphi(\Omega)$ e segue-se que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$. ∎

Observação 1.5 *Como consequência de* $(\mathbf{C_2})$ *temos que se* $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$, *então*

$$d(\varphi, \Omega, b) = 0.$$

$(\mathbf{C_3})$ Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então $\varphi(\Omega)$ é uma vizinhança de b, isto é, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(b) \subset \varphi(\Omega).$$

Demonstração: Sendo C_b a componente conexa de b em $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, então para $\forall z \in C_b$ tem-se

$$d(\varphi, \Omega, z) = d(\varphi, \Omega, b) \neq 0,$$

por hipótese. Assim, por $(\mathbf{C_2})$, para cada $z \in C_b$ existe $y \in \Omega$ tal que $\varphi(y) = z$ e portanto $C_b \subset \varphi(\Omega)$. Desde que, C_b é um conjunto aberto e $b \in C_b$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(b) \subset C_b \subset \varphi(\Omega)$. Portanto, $B_\delta(b) \subset \varphi(\Omega)$. $\blacksquare$

$(\mathbf{C_4})$ Se $\varphi(\Omega)$ está contido num subespaço próprio de $\mathbb{R}^N$ temos que $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.

Demonstração: Seja V um subespaço próprio de $\mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(\Omega) \subset V$. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então por $(\mathbf{C_3})$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(b) \subset \varphi(\Omega) \subset V$ como todo subespaço próprio de um espaço que contém uma bola é o próprio espaço, concluimos que $V = \mathbb{R}^N$, que é um absurdo. Portanto, $d(\varphi, \Omega, b) = 0$. $\blacksquare$

$(\mathbf{C_5})$ **(Excisão)** Seja $K \subset \overline{\Omega}$ um compacto e $b \notin \varphi(K) \cup \varphi(\partial\Omega)$. Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \backslash K, b).$$

Demonstração: Por definição, o grau topológico de Brouwer de φ com relação a Ω no ponto b, $d(\varphi, \Omega, b)$, está bem definido, pois $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Para que faça sentido a igualdade

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \backslash K, b)$$

devemos mostrar que

$$b \notin \varphi(\partial(\Omega \backslash K)).$$

Afirmação:

$$b \notin \varphi(\partial(\Omega \backslash K)) \subseteq \varphi(\partial\Omega \cup \partial K).$$

De fato, caso contrário $b \in \varphi(\partial\Omega \cup \partial K)$ e assim existiria $x_0 \in \partial\Omega \cup \partial K$ tal que

$$\varphi(x_0) = b \ \ com \ \ x_0 \in \partial\Omega, \ \ isto \text{ é}, \ \ b \in \varphi(\partial\Omega)$$

ou

$$\varphi(x_0) = b \ \ com \ \ x_0 \in \partial K, \ \ isto \text{ é}, \ \ b \in \varphi(\partial K),$$

que é um absurdo, pois por hipótese $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(K)$. Portanto, $b \notin \varphi(\partial(\Omega \backslash K))$.
Fixe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ com

$$\|\psi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{2} \min\{\rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}, \rho\{b, \varphi(K)\}\}.$$

Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) \;\; e \;\; d(\varphi, \Omega \backslash K, b) = d(\psi, \Omega \backslash K, b).$$

Segue da última condição que $b \notin \psi(K)$. De fato, sendo

$$\|\psi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(K)\}$$

e se $b \in \psi(K)$, então existe $x_0 \in K$ tal que $\psi(x_0) = b$.
Assim,

$$|b - \varphi(x_0)| = |\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(K)\}.$$

Desde que

$$\rho\{b, \varphi(K)\} = \inf\{|b - \varphi(y)|; y \in K\}$$

temos

$$\rho\{b, \varphi(K)\} \leq |b - \varphi(x_0)|.$$

Logo

$$\rho\{b, \varphi(K)\} < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(K)\},$$

que é um absurdo. Mostrando que $b \notin \psi(K)$.
Vamos mostrar agora que $b \notin \psi(\partial\Omega)$.
De fato, como $b \notin \psi(\partial\Omega)$ e $\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}$ supondo, por absurdo, que $b \in \psi(\partial\Omega)$ deve existir $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\psi(x_0) = b$.
Assim,

$$|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\},$$

isto é,

$$|b - \varphi(x_0)| < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}.$$

Portanto,

$$\rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\},$$

que é um absurdo. Portanto, $b \notin \psi(\partial\Omega)$.

Agora vamos mostrar que $b \notin \psi(\partial(\Omega \backslash K))$.

Se $b \in \psi(\partial(\Omega \backslash K)) \subseteq \psi(\partial\Omega \cup \partial K)$, temos que

$$b = \psi(x_0) \text{ com } x_0 \in \partial\Omega \text{ e } \text{ com } \text{ isso } b \in \psi(\partial\Omega),$$

ou

$$b = \psi(x_0) \text{ com } x_0 \in \partial K \text{ e } \text{ com } \text{ isso } b \in \psi(\partial K),$$

que é um absurdo, pois já foi mostrado que $b \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(K)$. Mostrando desta forma que $b \notin \psi(\partial(\Omega \backslash K))$.

Desde que $\{b\} \cap \psi(K) = \emptyset$, $\{b\} \cap \psi(\partial\Omega) = \emptyset$ e $\{b\} \cap \psi(\partial(\Omega \backslash K)) = \emptyset$ temos $\rho\{b, \psi(K)\} > 0$, $\rho\{b, \psi(\partial\Omega)\} > 0$ e $\rho\{b, \psi(\partial\Omega \cup \partial K)\} > 0$.

Considerando

$$\alpha = \frac{1}{2} \inf\{\rho\{b, \psi(K)\}, \rho\{b, \psi(\partial\Omega)\}, \rho\{b, \psi(\partial\Omega \cup \partial K)\} > 0,$$

pelo Teorema de Sard, existe $c \in B_\alpha(b)$ tal que

$$\forall x \in \psi^{-1}(\{c\}) \text{ tem-se } J_\psi(x) \neq 0.$$

Caso contrário, $\forall c \in B_\alpha(b)$, existe $x_0 \in \psi^{-1}(\{c\})$ com $J_\psi(x_0) = 0$ implicando que $x_0 \in S$. Logo,

$$\psi(x_0) = c \Rightarrow c \in \psi(S) \Rightarrow \psi(S) \supseteq B_\alpha(b)$$

e assim,

$$0 = m(\psi(S)) \geq m(B_\alpha(b)) = Vol(B_\alpha(b)) > 0,$$

que é um absurdo.

Note que, $c \notin \psi(K)$ implica que não existe $x_0 \in K$ tal que $\psi(x_0) = c$, e como $\psi^{-1}(\{c\}) \subset \Omega$ temos $\psi(x) = c \Rightarrow \psi^{-1}(\{c\}) \subset \Omega \backslash K$. Pela escolha do α temos que $c \notin \psi(K)$, b e c estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$ e de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial(\Omega \backslash K))$, respectivamente. Consequentemente,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, c) \;\; e \;\; d(\psi, \Omega \backslash K, b) = d(\psi, \Omega \backslash K, c).$$

Desde que estamos tratando do grau topológico de Brouwer no caso regular temos

$$d(\psi, \Omega, c) = \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{c\})} sgn J_\psi(\xi_i) = \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{c\}) \cap (\Omega \backslash K)} sgn J_\psi(\xi_i)$$

que implica

$$d(\psi,\Omega,c)=\sum_{\xi_i\in\Omega\backslash K} sgnJ_\psi(\xi_i),$$

ou seja,

$$d(\psi,\Omega,c)=d(\psi,\Omega\backslash K,c).$$

Portanto,

$$d(\varphi,\Omega,b)=d(\psi,\Omega,b)=d(\psi,\Omega,c)=d(\psi,\Omega\backslash K,c)=d(\psi,\Omega\backslash K,b)=d(\varphi,\Omega\backslash K,b).$$

Mostrando assim que

$$d(\varphi,\Omega,b)=d(\varphi,\Omega\backslash K,b).$$

■

$(\mathbf{C_6})$ Seja $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ uma família de conjuntos abertos contidos em Ω, dois a dois disjuntos, e b um ponto tal que

$$\varphi^{-1}(b)\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i.$$

Então, $d(\varphi,\Omega_i,b)=0$ a menos de um número finito de índices $i\in I$ e mais

$$d(\varphi,\Omega,b)=\sum_{i\in I}d(\varphi,\Omega_i,b).$$

Demonstração:

Devemos mostrar que o grau $d(\varphi,\Omega,b)$ está bem definido e para isso devemos provar que $b\notin\varphi(\partial\Omega_i),\ \forall i\in I.$

Afirmação: $b\notin\varphi(\partial\Omega_i),\ \forall i\in I$. Caso contrário, existiria um índice i tal que $b\in\varphi(\partial\Omega_i)$, e daí existiria $x_0\in\partial\Omega_i$ tal que $\varphi(x_0)=b$, que implica $x_0\in\varphi^{-1}(\{b\})$. Assim $x_0\in\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ e consequentemente, $x_0\in\Omega_{j_0}$ com $j_0\in I$. Logo $x_0\in\Omega_{j_0}\cap\partial\Omega_i$ e com isso $\Omega_{j_0}\cap\partial\Omega_i\neq\emptyset$, que é um absurdo, pois $\Omega_{j_0}\cap\partial\Omega_i=\emptyset$. Portanto, $b\notin\varphi(\partial\Omega_i),\forall i\in I$ e consequentemente $d(\varphi,\Omega_i,b)$ está bem definido para todo $i\in I$.

Desde que $\varphi^{-1}(\{b\})=\{x\in\overline{\Omega}\,;\,\varphi(x)=b\}$ é compacto, pois é fechado (devido ao fato de ser imagem inversa de um fechado por uma função contínua) e limitado pois $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito, existe um número finito de abertos $\Omega_i\subset\Omega$, que cobrem $\varphi^{-1}(\{b\})$, ou seja, existe um conjunto finito de índices I_0 tais que

$$\varphi^{-1}(\{b\})\subset\bigcup_{i\in I_0}\Omega_i\subset\Omega\ \ com\ \ I_0\subset I.$$

Dessa forma, para todo $i \in I \backslash I_0$, $b \notin \varphi(\overline{\Omega}_i)$ e pela observação 1.4 temos que $d(\varphi, \Omega_i, b) = 0$. Sendo $K = \overline{\Omega} \backslash \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i$ um compacto, pois $K = \overline{\Omega} \cap (\bigcap_{i \in I_0} \Omega_i^c)$ então K é fechado e como, $K \subset \overline{\Omega}$, então K é limitado e consequentemente compacto. Sendo $b \notin \varphi(K)$, pela propriedade da excisão ($\mathbf{C_5}$) segue-se que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \backslash K, b) = d(\varphi, \Omega \backslash (\overline{\Omega} \backslash \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i), b) = d(\varphi, \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i, b).$$

Assim, pela propriedade aditiva do grau topológico de Brouwer, obtemos

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i \in I_0} d(\varphi, \Omega_i, b),$$

ou seja,

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i \in I} d(\varphi, \Omega_i, b).$$

■

(C_7 **(Dependência da Fronteira)** Suponha que $\varphi = \Psi$ em $\partial\Omega$ e que $\varphi, \Psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Então, $\forall\, b \notin \varphi(\partial\Omega) = \Psi(\partial\Omega)$ tem-se que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$.

Demonstração:

Considere a seguinte aplicação contínua

$$\begin{array}{rlcl} H: & \Omega \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^N \\ & (x,t) & \mapsto & H(x,t) = t \cdot \varphi(x) + (1-t) \cdot \psi(x). \end{array}$$

Afirmação: $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$.

De fato, caso contrário existiria $x_0 \in \partial\Omega$ e $t \in [0,1]$ tal que $b = H(x_0, t)$. Como $\varphi = \psi$ em $\partial\Omega$, por hipótese, para todo $x \in \partial\Omega$ temos

$$H(x,t) = t \cdot \varphi(x) + (1-t) \cdot \varphi(x) = \varphi(x) = \psi(x).$$

Considerando $x = x_0$ segue-se que $b = H(x_0, t) = \varphi(x_0)$ o que é um absurdo, pelo fato que $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, mostrando que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Sendo o grau topológico de Brouwer invariante por homotopia, concluímos que

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, b) = d(H(\cdot, 1), \Omega, b),$$

donde segue-se que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b).$$

■

$(\mathbf{C_8})$ Sendo $\varphi,\, \Psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, e supondo que existe $\widetilde{H} \in C(\partial\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ com $\widetilde{H}(\cdot, 0) = \varphi_{|_{\partial\varphi}}$ e $\widetilde{H}(\cdot, 1) = \Psi_{|_{\partial\varphi}}$ tem-se que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Pelo Teorema de Tietze (*ver Teorema* A.12), podemos estender $\widetilde{H}$ a uma função H contínua sobre $\overline{\Omega} \times [0,1]$ a valores no $\mathbb{R}^N$.

Assim,

$$\overline{\varphi} = \widetilde{H}(\cdot, 0) = H(\cdot, 0)_{|\partial\Omega} = \varphi_{|\partial\Omega} \text{ e } \overline{\psi} = \widetilde{H}(\cdot, 1) = H(\cdot, 1)_{|\partial\Omega} = \psi_{|\partial\Omega},$$

ou seja, $\overline{\varphi} = \varphi_{|\partial\Omega}$ e $\overline{\psi} = \psi_{|\partial\Omega}$, onde $\overline{\psi}$ e $\overline{\psi}$ são extensões de $\varphi_{|\partial\Omega}$ e $\psi_{|\partial\Omega}$, respectivamente.

Desde que, o grau topológico de Brouwer é invariante por homotopia temos que

$$d(\widetilde{H}(\cdot, 0), \Omega, b) = d(\widetilde{H}(\cdot, 1), \Omega, b),$$

mostrando que

$$d(\overline{\varphi}, \Omega, b) = d(\overline{\psi}, \Omega, b).$$

De acordo com a propriedade $(\mathbf{C_7})$ temos

$$d(\overline{\varphi}, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b) \text{ pois } \overline{\varphi}_{|\partial\Omega} = \varphi_{|\partial\Omega}.$$

De modo análogo, temos

$$d(\overline{\psi}, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) \text{ pois } \overline{\psi}_{|\partial\Omega} = \psi_{|\partial\Omega}.$$

Portanto, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$. ■

$(\mathbf{C_9})$ **(Teorema da Não-Contração da Bola Unitária)**

Não existe aplicação contínua $\varphi : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$ com $\varphi_{|_{\partial B_1(0)}} \equiv I$.

Demonstração: Suponha que exista tal aplicação φ. Por $(\mathbf{C_3})$ temos $d(\varphi, B_1(0), 0) = 0$, pois $0 \notin \varphi(\overline{B_1(0)})$. Por outro lado, como $\varphi_{|_{\partial B_1(0)}} \equiv I_{|_{\partial B_1(0)}}$ e usando as propriedades $(\mathbf{C_1})$ e $(\mathbf{C_8})$ deduzimos que

$$0 = d(\varphi, B_1(0), 0) = d(I, B_1(0), 0) = 1,$$

que é um absurdo. Logo temos $(\mathbf{C_9})$. ■

$(\mathbf{C_{10}})$ Se N é ímpar, não existe aplicação contínua $H : S^{N-1} \times [0,1] \to S^{N-1}$ verificando $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = -x$, $\forall x \in S^{N-1}$.

Demonstração:

Observe que $S^{N-1} = \partial B_1(0)$ em $\mathbb{R}^N$. Suponha que exista tal aplicação H.

Agora, considere $\overline{\Omega} = \overline{B}_1(0)$, $b = 0$, $\varphi(x) = x$ e $\psi(x) = -x$, $\forall x \in S^{N-1}$, onde $\varphi, \psi \in C(\overline{B}_1(0), R^N)$.

Por $(\mathbf{C_7})$ temos

$$d(I, B_1(0), 0) = d(-I, B_1(0), 0). \tag{1.23}$$

Mas, por $(\mathbf{C_1})$ temos que $d(I, B_1(0), 0) = 1$. Por outro lado, o grau topológico de Brouwer é dado por

$$d(-I, B_1(0), 0) = \sum_{\xi_i \in (-I)^{-1}(\{0\})} sgnJ_{-I}(\xi_i) = sgnJ_{-I}(0) = (-1)^N.$$

Sendo N é ímpar, concluímos que $d(-I, B_1(0), 0) = -1$, que contradiz (1.23).

Portanto não existe tal aplicação H. ■

$(\mathbf{C_{11}})$ Se N é ímpar, não existe aplicação contínua $\varphi : S^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ com $\varphi(x) \neq 0$ e $\langle \varphi(x), x \rangle = 0, \quad \forall x \in S^{N-1}$.

Demonstração:

Suponha que exista tal aplicação φ. Considere

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|} \text{ e } H(x,t) = x\cos(\pi t) + \psi(x)\sin(\pi t),$$

para $x \in S^{N-1}$ e $t \in [0,1]$.

Note que, $\psi(x) \in S^{N-1}$ e $H(x,t) \in S^{N-1}$, pois

$$|H(x,t) - 0|^2 = |H(x,t)|^2 = |x\cos(\pi t) + \psi(x)\sin(\pi t)|^2,$$

que implica

$$|H(x,t)|^2 = |x|^2\cos^2(\pi t) + \sin(2\pi t)\langle x, \psi(x)\rangle + |\psi(x)|^2\sin^2(\pi t).$$

Sendo $|x| = 1$, $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}$ e $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$ temos $|H(x,t)| = 1$. Então, $|H(x,t)| = 1, \forall x \in S^{N-1}$ e $t \in [0,1]$. Agora, observe que

$$H \in C(S^{N-1} \times [0,1], S^{N-1}),$$

$$H(x,0) = x \cdot \cos(\pi \cdot 0) + \psi(x) \cdot \sin(\pi \cdot 0) = x \cdot 1 + \psi(x) \cdot 0 = x$$

e

$$H(x,1) = x \cdot \cos(\pi \cdot 1) + \psi(x) \cdot \sin(\pi \cdot 1) = x \cdot (-1) + \psi(x) \cdot 0 = -x,$$

o que contadiz a propriedade $(\mathbf{C_{10}})$. Portanto, não existe a aplicação φ considerada no início da demonstração. ■

1.1.6 O Grau Topológico de Brouwer num Espaço Vetorial de Dimensão Finita

Considere V um espaço vetorial de dimensão finita e $\varphi \in C(\overline{\Omega}, V)$, onde Ω é um aberto limitado de V. O grau topológico de Brouwer pode ser estudado de maneira análoga ao que fizemos no $\mathbb{R}^N$.

Uma pergunta natural que surge é saber se mudando a base de V, o grau topológico de Brouwer é alterado. No que segue, seja β_1 uma outra base de V, $\varphi_1 = M^{-1} \circ \varphi \circ M$, onde $M(\Omega_1) = \Omega$, $M(b_1) = b$ e M é a matriz mudança de base. Veja que, se $\varphi(x) = b$ e $M(x_1) = x$ temos

$$\varphi_1(x_1) = (M^{-1} \circ \varphi \circ M)(x_1) = (M^{-1} \circ \varphi)(M(x_1)) = (M^{-1} \circ \varphi)(x) = M^{-1}(\varphi(x)) = M^{-1}(b) = b_1.$$

Uma resposta a tal pergunta é encontrada no lema que segue.

Lema 1.11 *O grau topológico de Brouwer é independente da base escolhida,isto é,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi_1, \Omega_1, b_1).$$

Demonstração: Vamos considerar apenas o caso regular, ou seja, $\varphi_1 \in C^1(\overline{\Omega}_1, V)$ e $b_1 \notin \varphi_1(\Omega_1) \cup \varphi_1(S)$. Sendo $\varphi_1 = M^{-1} \circ \varphi \circ M$ e usando a regra da cadêia temos $\varphi_1'(x_1) = M^{-1} \circ \varphi'(x) \circ M$, e portanto

$$det(\varphi_1'(x_1)) = det(M^{-1} \circ \varphi'(x) \circ M).$$

Usando uma propriedade dos determinantes tem-se

$$det(\varphi_1'(x_1)) = det(M^{-1}).det(\varphi'(x)).det(M).$$

Desde que, $det(M^{-1}).det(M) = 1$ segue-se que

$$det(\varphi_1'(x_1)) = det(\varphi'(x)).$$

Logo

$$J_{\varphi_1}(x_1) = J_{\varphi}(x)$$

e daí obtemos

$$sgn(J_{\varphi_1}(x_1)) = sgn(J_{\varphi}(x)).$$

Consequentemente

$$\sum_{x_1 \in \varphi_1^{-1}(\{b_1\})} sgn(J_{\varphi_1}(x_1)) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi(x)),$$

ou seja,

$$d(\varphi_1, \Omega_1, b_1) = d(\varphi, \Omega, b).$$

■

Vamos considerar a seguinte situação, onde a aplicação $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto com $m < N$. Com o objetivo de usar a teoria do grau topológico de Brouwer, podemos considerar a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ supondo que a mesma possui $N - m$ componentes(coordenadas) nulas, isto é,

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_m(x), 0, 0, ..., 0).$$

Lema 1.12 *Seja $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ com $m < N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $\Phi(x) = x - \varphi(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Se $b \in \mathbb{R}^m$ e $b \notin \Phi(\partial\Omega)$, então*

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b).$$

Demonstração: Observe que $b \notin \Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}(\partial_{\mathbb{R}^m}(\Omega \cap \mathbb{R}^m))$, pois $\partial_{\mathbb{R}^m}(\Omega \cap \mathbb{R}^m) \subset \partial\Omega$. Vamos considerar apenas o caso regular, isto é, $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ e $b \notin \Phi(S)$. Além disso, $\Phi^{-1}(\{b\}) \subset \mathbb{R}^m$, pois $b \in \mathbb{R}^m$. Temos que

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \Phi'_{|_{\Omega \cap \mathbb{R}^m}}(x) & A \\ 0 & I_{N-m} \end{pmatrix}$$

$\forall x \in \Omega \cap \mathbb{R}^m$. Assim,

$$det(\Phi'(x)) = det(\Phi'_{|_{\Omega \cap \mathbb{R}^m}}(x)), \ \forall x \in \Phi^{-1}(\{b\}).$$

Logo

$$J_\Phi(x) = J_{\Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}}(x), \ \forall x \in \Phi^{-1}(\{b\})$$

e com isso,

$$sgn(J_\Phi(x)) = sgn(J_{\Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap R^m}}}(x)).$$

Consequentemente

$$\sum_{x \in \Phi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\Phi(x)) = \sum_{x \in \Phi^{-1}{}_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}(\{b\})} sgn(J_{\Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}}(x)).$$

Portanto, segue da teoria do grau topológico de Brouwer, para o caso regular, que

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b).$$

■

1.2 O Grau Topológico de Leray & Schauder

No que segue-se vamos denotar por E um espaço de Banach real e $\Omega \subset E$ um aberto limitado. A função distância entre conjuntos associada a norma de E, será denotada por ρ, isto é, $\rho(A, B) = \inf\{\|a - b\|; a \in A, b \in B\}$ com $A, B \subset E$. Seja $T \in C(\overline{\Omega}, E)$ uma aplicação tal que $T(\overline{\Omega})$ está contido num subespaço de dimensão finita de E. A aplicação $\Phi = I - T$ é chamada de Pertubação de Dimensão Finita da Identidade.

Definição 1.13 *Seja $b \in E$ com $b \notin \Phi(\partial\Omega)$. Se F é um subespaço de E de dimensão finita contendo $T(\overline{\Omega})$ e b, definimos o* **grau de Leray & Schauder de Φ com relação a Ω no ponto b, como sendo o número inteiro**

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Vamos mostrar que esta definição é consistente, isto é, independe da escolha do subespaço F. De fato, sejam F_1 e F_2 dois subespaços de E de dimensão finita tais que

$$T(\overline{\Omega}) \subset F_1,\ T(\overline{\Omega}) \subset F_2 \ \ e \ \ b \in F_1 \cap F_2.$$

Sendo $F = F_1 \cap F_2$ um subespaço de F_1 e também de F_2, que contém $T(\overline{\Omega})$ e b, segue-se do Lema 1.12 que

$$d(\Phi_{|\overline{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega} \cap \overline{F}}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$d(\Phi_{|\overline{\Omega} \cap F_2}, \Omega \cap F_2, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega} \cap \overline{F}}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto,

$$d(\Phi_{|\overline{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\Phi_{|\overline{\Omega} \cap F_2}, \Omega \cap F_2, b),$$

e a definição do grau de Leray-Schauder é consistente.

Definição 1.14 *Diremos que uma aplicação* $T : \overline{\Omega} \to E$ *é compacta, se* T *é contínuo e* $T(\overline{\Omega})$ *é relativamente compacto em* E*, ou seja,* $\overline{T(\overline{\Omega})}$ *é um compacto em* E*.*

No que segue-se denotaremos por $Q(\overline{\Omega}, E)$ o espaço de Banach dos operadores compactos $T : \overline{\Omega} \to E$ munido da norma da convergência uniforme, isto é,

$$\|T\|_{\infty,\overline{\Omega}} = \|T\|_{\infty} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|T(x)\|, \text{ onde } \|\cdot\| \text{ é uma norma em } E.$$

Lema 1.15 *Seja* K *um compacto de* E*. Para todo* $\epsilon > 0$*, existe um subespaço de dimensão finita* $F_\epsilon \subset E$ *e uma aplicação* $g_\epsilon \in C(K, F_\epsilon)$ *verificando*

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \epsilon, \forall x \in K.$$

Demonstração: Sendo K um compacto, dado $\epsilon > 0$, existe uma quantidade finita de pontos $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p \in E$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_\epsilon(y_i).$$

Seja F_ϵ o subespaço gerado por $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p\}$ e defina a função

$$\begin{array}{rccl} b_i : & K & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & b_i(x), i = 1, 2, \ldots, p, \end{array}$$

onde

$$b_i(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - y_i\| & , se \quad x \in B_\epsilon(y_i) \\ 0 & , se \quad x \in (B_\epsilon(y_i))^c. \end{cases}$$

Observe que

$b_i(x) \geq 0, \forall x \in E$ e que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} b_i(x) > 0, \ \forall x \in K.$

Defina a função g_ϵ de K em F_ϵ por

$$g_\epsilon(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} b_i(x) y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} b_i(x)}.$$

Veja que a função g_ϵ está bem definida, isto é, $\forall x \in K$ temos $g_\epsilon(x) \in F_\epsilon$ pois, $g_\epsilon(x)$ é uma combinação linear dos y_i.

A aplicação g_ϵ é contínua em K, pois é um quociente de funções contínuas, onde

$\sum_{i=1}^{p} b_i(x) > 0$ e $g_\epsilon(x) \in F_\epsilon$, $\forall x \in K$.
Além disso, temos

$$\|x - g_\epsilon(x)\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^{p} b_i(x) \cdot x}{\sum_{i=1}^{p} b_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^{p} b_i(x) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{p} b_i(x)} \right\|,$$

que implica

$$\|x - g_\epsilon(x)\| \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} b_i(x)} \cdot \sum_{i=1}^{p} b_i(x) \cdot \|x - y_i\|.$$

Assim,

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} b_i(x)} \cdot \sum_{i=1}^{p} b_i(x) \cdot \epsilon,$$

e portanto,

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \epsilon, \forall x \in K.$$

■

Lema 1.16 *Seja* Φ *uma perturbação compacta da identidade, onde* $\Phi = I - T$, $T : \overline{\Omega} \to E$ *e* $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$. *Então:*
(I) Φ *é um operador fechado (isto é, a imagem por* Φ *de um fechado é um conjunto fechado.)*
(II) Φ *é própria (isto é, a imagem inversa por* Φ *de um compacto é um conjunto compacto.)*

Demonstração: (I) Φ é fechado.

Devemos mostrar que, se $G \subset \overline{\Omega}$ é um fechado em E, então $\Phi(G)$ é um fechado em E.

Seja $G \subset \overline{\Omega}$ um conjunto fechado e $\{u_n\} \subset G$ tal que $\Phi(u_n) \to z$ em E.

Nosso objetivo é mostrar que $z \in \Phi(G)$.

Usando a hipótese que T é um operador compacto, existe uma subsequência $\{u_{n_p}\} \subset \{u_n\}$ e $w \in E$ tal que $T(u_{n_p}) \to w$ em E. Sendo $\Phi = I - T$ temos

$$\Phi(u_{n_p}) = I(u_{n_p}) - T(u_{n_p})$$

implicando

$$u_{n_p} = \Phi(u_{n_p}) + T(u_{n_p}).$$

Desde que

$$\Phi(u_n) \to z \ em \ E \ e \ T(u_{n_p}) \to w \ em \ E$$

concluímos que

$$u_{n_p} \to z + w \ em \ E.$$

Agora, pela continuidade da Φ, obtemos

$$\Phi(u_{n_p}) \to \Phi(z + w) \ em \ E$$

e pela unicidade dos limites temos

$$\Phi(z + w) = z.$$

Como G é um conjunto fechado em E, $\{u_{n_p}\} \subset G$ e $u_{n_p} \to z + w$, devemos ter

$$z + w \in G.$$

Portanto, $z \in \Phi(G)$. Mostrando que $\Phi(G)$ é um conjunto fechado.
(II) Φ é própria.
Devemos mostrar que, se $K \subset E$ é um conjunto compacto, então $\Phi^{-1}(K)$ é um conjunto compacto.
Nosso objetivo é mostrar que toda sequência $\{u_n\} \subset \Phi^{-1}(K)$, possue uma subsequência convergente em E com limite em $\Phi^{-1}(K)$.
Seja $\{u_n\} \subset \Phi^{-1}(K)$. Logo existe, $\{v_n\} \subset K$ com $\Phi(u_n) = v_n$. Sendo K um compacto, existe uma subsequência

$$\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\} \ e \ v \in E$$

de maneira que $v_{n_j} \to v \ em \ E$. Usando a definição de Φ temos

$$\Phi(u_{n_j}) = I(u_{n_j}) - T(u_{n_j}),$$

e portanto,

$$u_{n_j} = v_{n_j} + T(u_{n_j}).$$

Segue da compacidade do operador T que existe uma subsequência

$$u_{n_{j_p}} \subset u_{n_j} \text{ e } z \in E \text{ tal que } T(u_{n_{j_p}}) \to z \ em \ E.$$

Assim,

$$u_{n_{j_p}} = \Phi(u_{n_{j_p}}) + T(u_{n_{j_p}}) \quad \text{e} \quad \text{com} \quad \text{isso} \quad u_{n_{j_p}} \to v + z \; em \; E.$$

Como Φ uma aplicação contínua, o conjunto $\Phi^{-1}(K)$ é um conjunto fechado em $\overline{\Omega}$, logo é um conjunto fechado em E e consequentemente $v + z \in \Phi^{-1}(K)$. Mostrando que $\Phi^{-1}(K)$ é um conjunto compacto. ■

Considere o operador $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$, $\Phi = I - T$, $\Phi \in C(\overline{\Omega}, E)$ e um ponto $b \notin \Phi(\partial\Omega)$. De acordo com o Lema 1.16 temos que $\Phi(\partial\Omega)$ é um conjunto fechado em E, logo $r = \rho\{b, \Phi(\partial\Omega)\} > 0$. Fixando $K = \overline{T(\overline{\Omega})}$, do Lema 1.15 encontramos um subespaço de dimensão finita $F_{\frac{r}{2}} \subset E$ e uma função contínua

$$\begin{aligned} g_{\frac{r}{2}} : \; K &\to F_{\frac{r}{2}} \\ x &\mapsto g_{\frac{r}{2}}(x), \end{aligned}$$

satisfazendo

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| < \frac{r}{2}, \; \forall x \in K,$$

onde $x = \lim\limits_{n\to\infty} T(y_n)$ com $y_n \in \overline{\Omega}$. Definindo

$$T_r(u) = g_{\frac{r}{2}}(T(u)), \; \forall u \in \overline{\Omega} \quad e \quad \Phi_r = (I - T_r)(u), \; \forall u \in \overline{\Omega}$$

observamos que Φ_r é uma perturbação de dimensão finita da identidade com $b \notin \Phi_r(\partial\Omega)$. De fato, para $x \in \partial\Omega$ temos

$$\|b - \Phi_r(x)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - \Phi_r(x)\|$$

e portanto,

$$\|b - \Phi_r(x)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - \Phi_r(x)\|. \tag{1.24}$$

Desde que,

$$\|b - \Phi(x)\| \geq r, \; \forall x \in \partial\Omega$$

sendo $\Phi(x) = x - T(x)$ e $\Phi_r(x) = x - T_r(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, temos

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|(x - T(x)) - (x - T_r(x))\|$$

implicando

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|T(x) - T_r(x)\|,$$

ou seja,

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|T(x) - g_{\frac{r}{2}}(T(x))\|.$$

Fazendo $T(x) = w \in K$ obtemos

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|w - g_{\frac{r}{2}}(w)\| < \frac{r}{2},$$

que implica

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \ \forall w \in K.$$

Portanto, da desigualdade (1.24) temos

$$\|b - \Phi_r(x)\| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

donde segue-se que

$$\|b - \Phi_r(x)\| > \frac{r}{2} > 0, \ \forall x \in \partial\Omega.$$

O conjunto $\{\|b-\Phi_r(x)\|; x \in \partial\Omega\}$ é limitado inferiormente e pelo postulado de Dedekind possue ínfimo. Assim,

$$\inf\{\|b - \Phi_r(x)\|; x \in \partial\Omega\} \geq \frac{r}{2}$$

implicando que $\rho\{b, \Phi_r(\partial\Omega)\} \geq \frac{r}{2} > 0$. Mostrando que $b \notin \Phi_r(\partial\Omega)$. Agora, já podemos calcular o grau de Φ_r, pois o mesmo está definido com relação a Ω no ponto b e será definido da seguinte maneira.

Definição 1.17 *Seja Φ uma perturbação compacta da identidade, isto é, $\Phi = I - T$, onde $T : \overline{\Omega} \to E$ com $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$. Definimos o* **grau de Leray & Schauder de Φ com relação a Ω no ponto** b, *como sendo*

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_r, \Omega, b),$$

onde Φ_r é uma perturbação de dimensão finita da identidade satisfazendo

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Vamos mostrar que a definição é consistente, isto é, não depende da escolha do Φ_r. Sejam Φ_1 e Φ_2 duas perturbações de dimensão finita da identidade, denotadas por $\Phi_1 = I - T_1$ e $\Phi_2 = I - T_2$ com

$$\|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| \leq \frac{r}{2} \quad e \quad \|\Phi(x) - \Phi_2(x)\| \leq \frac{r}{2}, \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Considere também F_1 e F_2 subespaços de E de dimensão finita, que contêm $T_1(\overline{\Omega})$ e $T_2(\overline{\Omega})$, respectivamente e, também o vetor $b \in E$. Fixe F um subespaço de E de dimensão finita que contém $F_1 + F_2$ e b. Assim, $T_1(\overline{\Omega}) \subset F$, $T_2(\overline{\Omega}) \subset F$ e $b \in F$. Consequentemente, pela definição do grau de uma perturbação finita da identidade, temos

$$d(\Phi_1, \Omega, b) = d(\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$d(\Phi_2, \Omega, b) = d(\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Defina a seguinte homotopia

$$\begin{array}{llll} H: & \overline{\Theta} \times [0,1] & \rightarrow & F \\ & (x,t) & \mapsto & H(x,t) = t \cdot \Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) + (1-t) \cdot \Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) \;\; com\; \Theta = \overline{\Omega} \cap F. \end{array}$$

Temos que $b \notin H(\partial\Theta \times [0,1])$. De fato, usando a invariânçia do grau de Brouwer, por homotopia segue-se que

$$d(H(\cdot, 0), \Theta, b) = d(H(\cdot, 1), \Theta, b).$$

Desde que $H(\cdot, 0) = \Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}$, $H(\cdot, 1) = \Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}$ e $\Theta = \overline{\Omega} \cap F$ concluimos que

$$d(\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto, $d(\Phi_2, \Omega, b) = d(\Phi_1, \Omega, b)$. Mostrando que a definição do grau de Leray & Schauder de Φ com relação a Ω no ponto b é consistente.

1.2.1 Propriedades Fundamentais do Grau de Leray & Schauder

No que segue, vamos usar sempre $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$ e $\Phi = I - T$.

($\mathbf{P_1}$) Continuidade em relação ao operador T

Existe uma vizinhança U de T em $Q(\overline{\Omega}, E)$ tal que $\forall\, S \in U$ temos que:

(i) $b \notin (I - S)(\partial\Omega)$,

(ii) $d(I - S, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b)$.

Demonstração:

Fixe $r = \rho\{b, \Phi(\partial\Omega)\} > 0$, $U = \{S \in Q(\overline{\Omega}, E); \|S - T\|_\infty < \dfrac{r}{2}\}$ e $S \in U$. Definindo

$\Psi = I - S$ temos que $\rho\{b, \Psi(\partial\Omega)\} \geq \dfrac{r}{2}$ e $b \notin \Psi(\partial\Omega)$. De fato, para $x \in \partial\Omega$ temos

$$\|b - \Psi(x)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - \Psi(x)\|$$

implicando

$$\|b - \Psi(x)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - \Psi(x)\|. \tag{1.25}$$

Uma vez que

$$\|\Phi(x) - \Psi(x)\| \leq \|T - S\|_\infty < \frac{r}{2},\ \forall x \in \overline{\Omega} \quad e \quad \|b - \Phi(x)\| \geq r$$

temos

$$\|b - \Psi(x)\| \geq \frac{r}{2} > 0.$$

Sendo o conjunto $\{\|b - \Psi(x)\|; x \in \partial\Omega\}$ limitado inferiormente, pelo postulado de Dedekind o mesmo possui ínfimo. Logo
$\inf\{\|b - \Psi(x)\|;\ x \in \partial\Omega\} \geq \dfrac{r}{2}$ e assim $\rho\{b, \Psi(\partial\Omega)\} \geq \dfrac{r}{2} > 0.$
Observando que $\{b\}$ é um compacto e $\Psi(\partial\Omega)$ um fechado, concluímos que $b \notin \Psi(\partial\Omega)$.
Considere Φ_1 e Φ_2 duas perturbações de dimensão finita da identidade, verificando $\|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| \leq \dfrac{r}{4}$ e $\|\Psi(x) - \Phi_2(x)\| \leq \dfrac{r}{4}$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$. Logo, pela definição do grau de Leray & Schauder temos

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_1, \Omega, b) = d(\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$d(\Psi, \Omega, b) = d(\Phi_2, \Omega, b) = d(\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b),$$

onde F é um subespaço de dimensão finita contendo $T_1(\overline{\Omega})$, $S_1(\overline{\Omega})$ e o ponto b, com $\Phi_1 = I - T_1$ e $\Phi_2 = I - S_1$. Defina a seguinte homotopia

$$\begin{array}{rlll} H: & \overline{\Theta} \times [0,1] & \to & F \\ & (x,t) & \mapsto & H(x,t) = t\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x) + (1-t)\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x), \ \text{com } \Theta = \overline{\Omega} \cap F. \end{array}$$

Temos que $b \notin H(\partial\Theta \times [0,1])$, pois

$$\|H(x,t) - \Phi(x)\| = \|t\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x) + (1-t)\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x) - t\Phi(x) - (1-t)\Phi(x)\|.$$

Donde obtemos

$$\|H(x,t) - \Phi(x)\| \leq |t|\|\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x) - \Phi(x)\| + |1-t|\|\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x) - \Phi(x)\|.$$

Desde que

$$\|\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x) - \Phi(x)\| \leq \frac{r}{4} \quad \text{e} \quad \|\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}(x) - \Phi(x)\| \leq \frac{r}{4},$$

com $\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}} = I - T_1$ e $\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}} = I - T_2$ temos

$$\|H(x,t) - \Phi(x)\| \leq t \cdot \frac{r}{4} + (1-t) \cdot \frac{r}{4} = \frac{r}{4} > 0.$$

Portanto, $\|H(x,t) - \Phi(x)\| \leq \frac{r}{4}$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Sendo $\partial\Theta = \partial(\Omega \cap F) = \partial\Omega \cap F$, segue-se que

$$\rho\{b, H(\partial\Theta \times [0,1])\} \geq \frac{r}{2},$$

pois, para cada $x \in \partial(\Omega \cap F)$

$$\|b - H(x,t)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - H(x,t)\|$$

e assim,

$$\|b - H(x,t)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - H(x,t)\|.$$

Daí, segue-se que

$$\|b - H(x,t)\| \geq \frac{r}{2}, \ \forall x \in \partial(\Omega \cap F).$$

Sendo o conjunto

$$\{\|b - H(x,t)\|; x \in \partial(\Omega \cap F), t \in [0,1]\}$$

limitado inferiormente, pelo postulado de Dedekind possui ínfimo, logo

$$\inf\{\|b - H(x,t)\|;\ x \in \partial(\Omega \cap F), t \in [0,1]\} \geq \frac{r}{2}$$

e consequentemente $\rho\{b, H(\partial(\Omega \cap F))\} \geq \frac{r}{2} > 0$. Logo, $b \notin H(\partial\Theta \times [0,1])$. Usando a invariância do grau de Brouwer por homotopia segue-se que

$$d(H(\cdot,0), \Theta, b) = d(H(\cdot,1), \Theta, b).$$

Desde que, $H(\cdot,0) = \Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}$, $H(\cdot,1) = \Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}$, e $\Theta = \overline{\Omega} \cap F$ temos que

$$d(\Phi_{2|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_{1|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto, $d(\Psi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b)$. ■

($\mathbf{P_2}$) Invariância do Grau por Homotopia

Seja H uma aplicação tal que $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$, definida por $H(x,t) = x - S(x,t)$, onde $S \in Q(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, então o grau $d(H(\cdot,t),\Omega,b)$ é constante em $[0,1]$.

Demonstração:

Considerando $r = \rho\{b, H(\partial\Omega \times [0,1])\}$, vamos mostrar que $r > 0$. Para este fim defina a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rlcl} \widehat{H}: & \overline{\Omega} \times [0,1] & \rightarrow & E \times \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \widehat{H}(x,t) = (x,t) - (S(x,t),t), \end{array}$$

isto é,

$$\widehat{H}(x,t) = (x - S(x,t), 0).$$

Neste caso, temos que $\widehat{H} = I - \widehat{S}$ com $\widehat{S} : \overline{\Omega} \times [0,1] \rightarrow E \times \mathbb{R}$ dada por $\widehat{S}(x,t) = (S(x,t),t)$ uma perturbação compacta da identidade, no espaço de Banach $E \times \mathbb{R}$, pois S é um operador compacto.

Afirmação: O operador $\widehat{S}$ é um operador compacto.

De fato, devemos mostrar que

(i) $\widehat{S}$ é contínuo,

(ii) Sendo U limitado, então $\overline{\widehat{S}(U)}$ é compacto.

Prova de (i).

Desde que, S é um operador compacto tem-se que S é contínuo, e portanto $\widehat{S}$ é contínuo.

Prova de (ii).

Seja $R_n = (x_n, t_n)$ uma sequência em $\overline{\Omega} \times [0,1]$. Segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass que existe uma subsequência $(t_{n_j}) \subset (t_n)$ tal que $t_{n_j} \rightarrow t_0$. Desde que S é compacto temos que existe uma subsequência

$$R_{n_{j_k}} = (x_{n_j}, t_{n_j}) \text{ tal que } (x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) \rightarrow y_0 \text{ em } E \text{ com } (t_{n_{j_k}}) \subset (t_{n_j}).$$

Logo

$$(S(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}), t_{n_{j_k}}) \rightarrow (y_0, t_0) \text{ em } E \times \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\widehat{S}(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) = (S(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}), t_{n_{j_k}}) \rightarrow (y_0, t_0) \; em \; E \times \mathbb{R}.$$

Portanto, $\widehat{S}$ é um operador compacto.

Pelo Lema 1.16 $\widehat{H}(\partial\Omega \times [0,1])$ é um fechado, isto é, $H(\partial\Omega \times [0,1], 0)$ é um fechado em

$E \times \mathbb{R}$ o que implica $H(\partial\Omega \times [0,1])$ é um fechado E. Desde que, $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$ podemos concluir que $r > 0$.

Fixe $K = \overline{S(\overline{\Omega} \times [0,1])} \subset E$. Pelo Lema 1.15 existe um subespaço de dimensão finita $F_{\frac{r}{2}} \subset E$ e uma aplicação $g_{\frac{r}{2}} \in C(K, F_{\frac{r}{2}})$ verificando

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| < \frac{r}{2}, \forall x \in K.$$

Definindo

$$H_1(x,t) = x - g_{\frac{r}{2}}(S(x,t)),\ \forall\, x\, \in \overline{\Omega},\ \forall\, t\, \in [0,1]$$

encontramos

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| < \frac{r}{2},\ \forall\, x\, \in \overline{\Omega},\ \forall\, t\, \in [0,1].$$

De fato,

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| = \|(x - S(x,t)) - (x - g_{\frac{r}{2}}(S(x,t)))\|$$

implicando

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| = \|S(x,t) - g_{\frac{r}{2}}(S(x,t))\|.$$

Considerando $w = S(x,t) \in K$, temos $\|H(x,t) - H_1(x,t)\| = \|w - g_{\frac{r}{2}}(w)\|$ e portanto

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| < \frac{r}{2},\ \forall\, x\, \in \overline{\Omega},\ \forall\, t\, \in [0,1].$$

Desde que,

$$\{\|H(x,t) - H_1(x,t)\|;\ x\, \in \overline{\Omega},\ t \in [0,1]\}$$

é limitado superiormente, pelo postulado de Dedekind

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|H(x,t) - H_1(x,t)\| < \frac{r}{2}\ \ com\ \ t \in [0,1]$$

e com isso,

$$\|H(\cdot,t) - H_1(\cdot,t)\| < \frac{r}{2},\ \forall\, t\, \in [0,1].$$

Então, pela propriedade (P_1)

$$d(H(\cdot,t),\Omega,b) = d(H_1(\cdot,t),\Omega,b),\ \forall\, t\, \in [0,1].$$

Usando a invariância do grau por homotopia temos

$$d(H_1(\cdot,t)_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega \cap F, b) \equiv \text{constante},$$

onde F é um subespaço de dimensão finita que contém $\overline{g_{\frac{r}{2}}(S(\overline{\Omega} \times [0,1]))}$ e b. Aplicando a definição do grau de Leray & Schauder para H_1 temos

$$d(H_1(\cdot,t),\Omega,b) = d(H_1(\cdot,t)_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b), \forall t \in [0,1].$$

Portanto,

$$d(H(\cdot,t),\Omega,b) \equiv constante.$$

■

Antes de enunciarmos a próxima propriedade, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.18 *Se* $b \notin \Phi(\partial\Omega)$, *então* $d(\Phi,\Omega,b) = d(\Phi - b,\Omega,0)$.

Demonstração: Seja $F \subset E$ um subespaço de dimensão finita que contém b e $T_r(\overline{\Omega})$. Então,

$$d(\Phi,\Omega,b) = d(\Phi_r,\Omega,b) = d(\Phi_{r|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b).$$

Segue do grau topológico de Brouwer que

$$d(\Phi_{r|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b) = d(\Phi_{r|\overline{\Omega}\cap F} - b,\Omega\cap F,0).$$

Note que

$$\Phi_{r|\overline{\Omega}\cap F} - b = (\Phi_r - b)_{|\overline{\Omega}\cap F}$$

e assim

$$d(\Phi,\Omega,b) = d((\Phi_r - b)_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,0).$$

Por outro lado, da definição do grau de Leray & Schauder segue-se que

$$d(\Phi_r - b,\Omega,0) = d((\Phi_r - b)_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,0).$$

Sendo, $\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$ e tendo em vista que

$$\|(\Phi - b) - (\Phi_r - b)\| = \|\Phi - \Phi_r\| \leq \frac{r}{2}$$

obtemos

$$d(\Phi - b,\Omega,0) = d(\Phi_r - b,\Omega,0).$$

Portanto,

$$d(\Phi,\Omega,b) = d(\Phi - b,\Omega,0).$$

■

($\mathbf{P_3}$) O Grau é Constante em Componentes Conexas de $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$

Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$, então

$$d(\Phi,\Omega,b_1)=d(\Phi,\Omega,b_2).$$

Demonstração: Sejam b_1 e b_2 pontos de $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$ que pertencem à mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$. Desde que a componente conexa que contém b_1 e b_2 é um aberto em $\mathbb{R}^N$, pois $\mathbb{R}^N\backslash\Phi(\partial\Omega)$ é um aberto, esta componente conexa é conexa por caminhos. Assim, existe um caminho

$$\begin{array}{rccl} q: & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & t & \mapsto & f(t)\in C_{b_1,b_2} \;\; com \;\; b_1=q(0) \;\; e \;\; b_2=q(1), \end{array}$$

onde C_{b_1,b_2} é a componente conexa que contém o caminho que liga b_1 à b_2. Note que, $q([0,1])\subset C_{b_1,b_2}$ é um compacto em $\mathbb{R}^N$. Assim, existem $\epsilon>0$ e $\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_s\}$ tais que

$$f([0,1])\subset\bigcup_{i=1}^{s}B_\epsilon(x_i) \quad com \quad B_\epsilon(x_i)\cap B_\epsilon(x_{i+1})\neq\emptyset,$$

onde $i=1,2,3,\ldots,s-1$. Vamos fixar atenção na bola $B_\epsilon(x_1)$ e, considere $b_1=x_1$ e $b_2=x_s$.

Seja $x\in B_\epsilon(x_1)$ de modo que $x\notin\Phi(\partial\Omega)$. Logo $d(\Phi,\Omega,b)$ e

$$d(\Phi,\Omega,b_1)=d(\Phi,\Omega,x),$$

pois

$$\|(\Phi-b_1)-(\Phi-x)\|_\infty=\|b_1-x\|_\infty=\|b_1-x\|<\epsilon.$$

Portanto, para $\epsilon>0$ suficientemente pequeno,

$$d(\Phi-b_1,\Omega,0)=d(\Phi-x,\Omega,0)$$

o que implica

$$d(\Phi,\Omega,b_1)=d(\Phi,\Omega,x),\ \forall\, x\in B_\epsilon(b_1).$$

Seguindo este raciocínio deduzimos

$$d(\Phi,\Omega,x_i)=d(\Phi,\Omega,y),\ \forall\, y\in B_\epsilon(x_i) \;\; com \;\; i=1,2,3,\ldots,s.$$

Desde que, $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$, com $i = 1, 2, 3, \ldots, s-1$, podemos concluir que

$$d(\Phi, \Omega, b_1) = d(\Phi, \Omega, b_2).$$

■

($\mathbf{P_4}$) Aditividade

Sejam $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e Ω_1, Ω_2 abertos, disjuntos e limitados em E com $b \notin \Phi(\partial\Omega_1) \cup \Phi(\partial\Omega_2)$. Então, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega_1, b) + d(\Phi, \Omega_2, b)$.

Demonstração: Sendo Φ uma perturbação compacta da identidade, o grau de Leray & Schauder de Φ é dado por $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_r, \Omega, b)$, onde Φ_r é uma pertubação de dimensão finita da identidade, que satisfaz

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \forall x \in \overline{\Omega} \text{ com } \Phi = I - T \text{ e } \Phi_r = I - T_r.$$

Assim, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_{r|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b)$ onde, F é um subespaço de dimensão finita que contém $T_r(\overline{\Omega})$ e b. Por hipótese, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Logo,

$$\Omega \cap F = (\Omega_1 \cap F) \cup (\Omega_2 \cap F).$$

Usando a aditividade do grau de Brouwer temos

$$d(\Phi_{r|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_{r|_{\overline{\Omega_1} \cap F}}, \Omega_1 \cap F, b) + d(\Phi_{r|_{\overline{\Omega_2} \cap F}}, \Omega_2 \cap F, b).$$

Portanto, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega_1, b) + d(\Phi, \Omega_2, b)$. ■

1.2.2 Consequências das Principais Propriedades do Grau de Leray & Schauder

($\mathbf{C_1}$)(Normalização) Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em E, isto é, $I(x) = x$, então

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & se \quad b \in \Omega \\ 0, & se \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Demonstração: Considerando $F = \langle b \rangle$, o espaço gerado por b, que é um espaço de dimensão finita, então $d(I, \Omega, b) = d(I_{|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b)$. Usando a propriedade ($\mathbf{C_1}$) do grau topológico de Brouwer temos

$$d(I_{|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b) = \begin{cases} 1, & se \quad b \in \Omega \cap F \\ 0, & se \quad b \notin \overline{\Omega} \cap F, \end{cases}$$

donde segue o resultado. ■

$(\mathbf{C_2})$ Se $b \notin \Phi(\overline{\Omega})$, então, $d(\Phi, \Omega, b) = 0$.

Demonstração: Sendo $\Phi = I - T$ uma perturbação compacta da identidade, pelo Lema 1.16 temos que Φ é fechado. Logo $\alpha = \rho\{b, \Phi(\overline{\Omega})\} > 0$. Por outro lado, $\alpha \leq r = \rho\{b, \Phi(\partial\Omega)\} > 0$ e pelo Lema 1.15 existe uma perturbação de dimensão finita da identidade $\Phi_\alpha \in C(\overline{\Omega}, E)$ tal que

$$\|\Phi(x) \ - \ \Phi_\alpha(x)\| < \frac{\alpha}{2}, \ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Afirmação: $b \notin \Phi_\alpha(\overline{\Omega})$.

De fato, para $x \in \overline{\Omega}$ temos

$$\|b - \Phi_\alpha(x)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - \Phi_\alpha(x)\|$$

implicando

$$\|b - \Phi_\alpha(x)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - \Phi_\alpha(x)\|$$

e consequentemente

$$\|b - \Phi_\alpha(x)\| \geq \frac{\alpha}{2}.$$

O conjunto $\{\|b - \Phi_\alpha(x)\|;\ x \in \overline{\Omega}\}$ é limitado inferiormente e pelo postulado de Dedekind possui ínfimo. Logo

$$\inf\{\|b - \Phi_\alpha(x)\|;\ x \in \overline{\Omega}\} \geq \frac{\alpha}{2}$$

o que implica $\rho\{b, \Phi_\alpha(\overline{\Omega})\} \geq \dfrac{\alpha}{2} > 0$. Desde que, $\{b\}$ é um compacto e $\Phi_\alpha(\overline{\Omega})$ é um fechado, tem-se $\rho\{b, \Phi_\alpha(\partial\Omega)\} > 0$, mostrando que $b \notin \Phi_\alpha(\overline{\Omega})$. Por definição

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_\alpha, \Omega, b) = d(\Phi_{\alpha|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b),$$

onde F é o subespaço de dimensão finita de E que contém b e $T(\overline{\Omega})$. Observando que $b \notin \Phi_{\alpha|_{\overline{\Omega}\cap F}}(\overline{\Omega} \cap F)$, pela propriedade $(\mathbf{C_3})$ do grau topológico de Brouwer, concluímos que $d(\Phi, \Omega, b) = 0$. ■

$(\mathbf{C_3})$ **(Existência de Solução)** Se $d(\Phi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

Demonstração: Pela propriedade $(\mathbf{C_2})$ temos que, se $b \notin \Phi(\overline{\Omega})$, então $d(\Phi, \Omega, b) = 0$.

Fazendo a negação da propriedade $(\mathbf{C_2})$ temos que, se $d(\Phi,\Omega,b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Phi(x_0) = b$. Mostrando a propriedade $(\mathbf{C_3})$. ∎

$(\mathbf{C_4})$ Se $\Phi(\Omega)$ está contido em um subespaço próprio de E, então $d(\Phi,\Omega,b) = 0$.

Demonstração: Considere V um subespaço próprio de E tal que $\Phi(\Omega) \subset V$. Se $d(\Phi,\Omega,b) \neq 0$, então pela propriedade $(\mathbf{C_3})$, $\Phi(\Omega)$ é uma vizinhança de b, ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(b) \subset \Phi(\Omega) \subset V$ e portanto $V = E$, o que é um absurdo, pois V é um subespaço próprio de E. Portanto, $d(\Phi,\Omega,b) = 0$. ∎

$(\mathbf{C_5})$ **(Excisão)** Seja K um fechado contido em $\overline{\Omega}$ com $b \in \Phi(K)$. Então, $d(\Phi,\Omega,b) = d(\Phi,\Omega\backslash K,b)$.

Demonstração: Usando a definição do grau de Leray & Schauder temos que

$$d(\Phi,\Omega,b) = d(\Phi_{|_{\overline{\Omega}\cap F}},\Omega\cap F,b),$$

onde F é um subespaço de dimensão finita que contém $T(\overline{\Omega})$ e b com $b \in E$ e $b \notin \Phi(\partial\Omega)$. Aplicando a propriedade $(\mathbf{C_5})$ do grau topológico de Brouwer, segue o resultado. ∎

$(\mathbf{C_6})$ Seja $\{\Omega_i\}_{i\in\Gamma}$ uma família de abertos, dois a dois disjuntos, contidos em Ω com

$$\Phi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{i\in\Gamma}\Omega_i.$$

Então, o grau $d(\Phi,\Omega,b) = 0$, a menos de um número finito de índices $i \in \Gamma$. Além disso,

$$d(\Phi,\Omega,b) = \sum_{i\in\Gamma} d(\Phi,\Omega_i,b).$$

Demonstração: Uma vez que $b \notin \Phi(\partial\Omega_i)$ pelo Lema 1.16 $\Phi^{-1}(\{b\})$ é um compacto, pois estamos usando o fato que Φ é própria. Pelo Teorema $A.4$, existe um número finito de abertos $\Omega_i \subset \Omega$ que cobrem $\Phi^{-1}(\{b\})$, isto é, existe um conjunto finito Γ_0 de índices tal que $\Phi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup\limits_{i\in\Gamma_0}\Omega_i$ com $\Omega_i \subset \Omega$. Portanto, $\forall\, i \in \Gamma\backslash\Gamma_0$ temos que $b \notin \Phi(\Omega_i)$ e pela propriedade (C_2) temos $d(\Phi,\Omega_i,b) = 0$.

Considerando que $K = \overline{\Omega}\backslash \bigcup\limits_{i\in\Gamma_0}\Omega_i$ é um compacto, pois

$$K = \overline{\Omega}\backslash \bigcup_{i\in\Gamma_0}\Omega_i = \overline{\Omega}\cap(\bigcup_{i\in\Gamma_0}\Omega_i)^c = \overline{\Omega}\cap(\bigcap_{i\in\Gamma_0}\Omega_i{}^c),$$

temos que K é fechado e como $K \subset \overline{\Omega}$ temos que K é limitado e consequentemente K é compacto. Temos que $b \notin \Phi(K)$, pois $\Phi(b) \in \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i$. Pela propriedade da excisão (C_5), segue-se que

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega \backslash K, b) = d(\Phi, \Omega \backslash (\overline{\Omega} \backslash \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i), b)$$

e com isso, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i, b)$. Pela propriedade aditiva $(\mathbf{P_4})$ temos

$$d(\Phi, \Omega, b) = \sum_{i \in \Gamma_0} d(\Phi, \Omega_i, b).$$

Portanto,

$$d(\Phi, \Omega, b) = \sum_{i \in \Gamma} d(\Phi, \Omega_i, b).$$

$\blacksquare$

$(\mathbf{C_7})$ Seja $\Psi = I - \Phi$, onde $S \in Q(\Omega, E)$ tal que $\Psi(x) = \Phi(x), \forall x \in \partial\Omega$. Se $b \notin \Phi(\partial\Omega) = \Psi(\partial\Omega)$, então, $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Considere a seguinte homotopia

$$H(x,t) = t\Phi(x) + (1-t)\Psi(x),\ \forall\, x \in \overline{\Omega}\ \ e\ \ \forall\, t \in [0,1].$$

Para todo $t \in [0,1]$, $H(\cdot, t)$ é uma perturbação compacta da identidade, onde $H(x,t) = x - G(x,t)$ com $G(x,t) = tT(x) + (1-t)S(x)$. Desde que, $\Phi_{|\partial\Omega} = \Psi_{|\partial\Omega}$ temos que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. De fato, caso contrário existiria $x_0 \in \partial\Omega$ e $t_0 \in [0,1]$ tal que $b = H(x_0, t_0)$ implicando que $H(x_0, t_0) = \Phi(x_0) = \Psi(x_0) = b$ o que é um absurdo, pois $b \notin \Phi(\partial\Omega) = \Psi(\partial\Omega)$. Mostrando que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$.

Sendo o grau constante por homotopia compacta temos

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, b) = d(H(\cdot, 1), \Omega, b),$$

com $H(\cdot, 0) = \Psi$ e $H(\cdot, 1) = \Phi$ e assim concluímos que $d(\Psi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b)$. $\blacksquare$

$(\mathbf{C_8})$ Não existe operador $\Phi \in C(\overline{B}_1(0)), \partial B_1(0))$ da forma $\Phi = I - T$, onde $T \in Q(\overline{B}_1(0), E)$, verificando $\Phi_{\partial B_1(0)} \equiv I_{\partial B_1(0)}$.

Demonstração: Se tal aplicação existisse, então

$$d(\Phi, B_1(0), 0) = d(I, B_1(0), 0) = 1$$

e pela propriedade $(\mathbf{C_3})$ existiria $x_0 \in B_1(0)$ tal que $\Phi(x_0) = 0$ o que é uma contradição, pelo fato de que $\forall\, x \in \overline{B_1(0)}$ tem-se que $\|\Phi(x)\| = 1$. $\blacksquare$

Capítulo 2

Existência de Solução para uma Classe de Equações Semilineares Elípticas de 2ª Ordem

Pretendemos neste capítulo fazer uma aplicação da Teoria do Grau Topológico desenvolvida por Leray & Schauder, demonstrando o **Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer** e mostrando um método de obtenção de solução para uma classe de Problemas Semilineares de 2ª Ordem.

2.1 Preliminares Sobre Espaços de Schauder

Nesta seção iremos apresentar os principais resultados envolvendo os espaços de Schauder, que podem ser encontrados no livro do Adams [2]. No que segue Ω denota um domínio (um aberto e conexo) limitado do $\mathbb{R}^N$.

Definição 2.1 *Espaço* $C(\overline{\Omega})$.
O espaço $C(\overline{\Omega})$ *é o espaço das funções contínuas* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, *munido da norma*

$$\|u\|_0 = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Definição 2.2 *Espaço* $C^k(\overline{\Omega})$.
O espaço $C^k(\overline{\Omega})$, *para* $k \in \mathbb{N}$, *é o espaço das funções* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *que juntamente com todas as derivadas de ordem inferior ou igual a* k *são uniformementes contínuas sobre* $\overline{\Omega}$.

Observação 2.1 *O espaço* $C^k(\overline{\Omega})$ *munido da norma*

$$\|u\|_k = \sum_{0\leq|\sigma|\leq k} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |D^\sigma u(x)|$$

torna-se um espaço de Banach, onde:

$$(\sigma) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_N), \ \ com \ \ \sigma_i \in \mathbb{N}, \ \ |\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_N$$

e

$$D^\sigma u(x) = \frac{\partial^{|\sigma|} u(x)}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \partial x_3^{\sigma_3} \ldots \partial x_N^{\sigma_N}}.$$

Definição 2.3 *Espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.*
O espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $\alpha \in (0,1)$, é o subespaço de $C^k(\overline{\Omega})$ constituído pelas funções com k-ésimas derivadas sendo Holderianas com expoente α, isto é, que verificam

$$H_{k,\alpha}(u) = \max_{|\sigma|=k} \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|D^\sigma u(x) - D^\sigma u(y)|}{|x-y|^\alpha} \ < \ \infty, \ com \ x \neq y.$$

De forma abreviada temos

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}); H_{k,\alpha}(u) < \infty\}.$$

Em todo nosso trabalho vamos considerar a seguinte norma no espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{k,\alpha} = \|u\|_k + H_{k,\alpha}(u),$$

a qual torna $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ um espaço de Banach.

No que segue-se usaremos as seguinte notações:

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega}) \ \ com \ \ \alpha \in (0,1) \ \ e \ \ \|\cdot\|_{0,\alpha} = \|\cdot\|_\alpha.$$

2.2 Alguns Resultados Clássicos

Nesta seção iremos apresentar alguns resultados clássicos para o problema de Dirichlet no caso linear demonstrado por Schauder e também demonstrar um resultado de unicidade para tal classe de problema.

Em todo este capítulo vamos sempre considerar um operador diferencial L da seguinte forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} + c(x) u, \ \ com \ \ x \in \overline{\Omega} \ \ e \ \ u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Definição 2.4 (Operador Uniformemente Elíptico)
O operador L é dito uniformemente elíptico em $\overline{\Omega}$, quando existe $\nu > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

onde $|\cdot|$ é a norma usual em $\mathbb{R}^N$.

Ao longo desta seção iremos sempre supor que $\alpha \in (0,1)$, Ω é um domínio limitado com fronteira suave e L é uniformemente elíptico com $a_{ij},$, b_i, $c \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.5 (ESTIMATIVA DE SCHAUDER)*(Ver [9])*

Seja $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu &= f, \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_1}$$

Então,

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq k(\|f\|_{\alpha} + \|u\|_0),$$

onde k é uma constante que depende de α, Ω, ν, N e das normas dos coeficientes de L em $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

O próximo resultado conhecido como **Princípio do Máximo Clássico** é um resultado de fundamental importância para estudar o sinal de funções de classe $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e estabelecer um importante resultado de unicidade para o problema (P_1).

2.2.1 Princípio do Máximo Clássico

Considere o operador linear diferenciável da forma

$$Lu = a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu + c(x)u, \quad com \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{2.2}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \Omega$ um domínio de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$. Assumiremos que $u \in C^2(\Omega)$.

Teorema 2.6 (Princípio do Máximo Fraco)
Seja L uniformemente elíptico num domínio limitado Ω. Suponha que

$$Lu \geq 0 \ (\leq 0) \ \ em \ \ \Omega, \ \ c = 0 \ \ em \ \ \Omega,$$

com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então, o máximo (mínimo) de u em $\overline{\Omega}$ é obtido sobre $\partial\Omega$, isto é,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \ \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right). \tag{2.3}$$

Demonstração: É claro que, se $Lu>0$ *em* Ω, então o princípio do máximo forte é conservado, isto é, o máximo de u não é obtido em Ω. Pois se em $x_0 \in \Omega$ a função u

atinge o valor máximo em $\overline{\Omega}$, devemos ter $Du(x_0) = 0$ e a matriz $D^2u(x_0) = [D_{ij}u(x_0)]$ é não positiva. Mas, a matriz $[a_{ij}]$ é positiva, desde que L seja uniformemente elíptico. Consequentemente,

$$Lu(x_0) = a_{ij}u(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0, \quad (ver\ \ [10]\ \ página\ \ 328)$$

contrariando o fato que $Lu>0$. Note que, neste argumento é necessário apenas as propriedades da matriz $[a_{ij}]$. Para o operador L temos uma importante limitação com respeito aos termos b_i que é $\dfrac{|b_i|}{\nu} \leq b_0 = constante$. De fato, desde que $a_{11} \geq \nu$, existe uma constante suficientemente grande γ para a qual

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1)e^{\gamma x_1} \geq \nu(\gamma^2 - \gamma b_0)e^{\gamma x_1} > 0.$$

Assim, para qualquer $\epsilon > 0$, temos que $L(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) > 0$ em Ω e também temos que

$$\sup_{\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}).$$

Veja que para $\epsilon \to 0$ temos $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$, demonstrando o Teorema. ■

Supondo de um modo mais geral $c \leq 0$ em Ω e considerando o subconjunto $\Omega^+ \subset \Omega$, definido por $\Omega^+ = \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$ como $Lu \geq 0$ em Ω temos que

$$L_0u = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu \geq -cu \ \ em \ \ \Omega^+$$

e como o máximo de u em $\overline{\Omega}^+$ deve ser atingido em $\partial\overline{\Omega}^+$, consequentemente também será atingido sobre $\partial\Omega$. Então, escrevendo $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \min(u, 0)$ obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.7 *Seja L uniformemente elíptico num domínio limitado Ω. Suponhamos que em Ω*

$$Lu \geq 0 (\leq 0) \ \ com \ \ c \leq 0 \tag{2.4}$$

e $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Então,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \ \left(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-\right).$$

Se $Lu = 0$ em Ω, então

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Um fato importante que segue do princípio do máximo é uma melhora na estimativa de $\|u\|_{2,\alpha}$, mencionada na Estimativa de Schauder. Neste caso temos

$$\|u\|_0 \leq k^{'}\|f\|_0 \ \ (ver \ \ [7]), \tag{2.5}$$

onde $k^{'}$ é uma constante que depende de α, Ω, ν, N e das normas dos coeficientes de L em $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.8 (Unicidade de Solução)
O problema de Dirichlet (P_1) tem uma única solução.

Demonstração: Se $u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ são soluções de (P_1), temos

$$\begin{cases} Lu = Lv, & \Omega \\ u = v, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Considere $w = u - v$. Assim

$$\begin{cases} Lw = Lu - Lv = 0, & \Omega \\ w = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue do princípio de máximo que w atinge máximo e mínimo na fronteira, implicando que $w \equiv 0$, ou seja, $u = v$. ■

Teorema 2.9 (Teorema de Schauder)*(Ver [9])*
Se $c(x) \leq 0$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$, com as hipóteses anteriores sobre Ω e L, e assumindo que para cada $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, existe uma, e somente uma solução u do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{P_1}$$

então, existe uma constante k_1 independente de f tal que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq k_1\|f\|_{\alpha}. \tag{2.6}$$

2.3 Um Princípio de Resolução para uma Classe de Problemas Semilineares.

Nesta seção estamos interessados em obter uma solução para uma classe de problemas do tipo

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = F(x,u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_2}$$

No que segue, iremos assumir que Ω é um domínio limitado com fronteira suave. Os coeficientes a_{ij}, b_i, c e F são de classe C^1 sobre $\overline{\Omega}$ e $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, respectivamente, $c(x) \leq 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ e o operador L dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

sendo uniformemente elíptico.

O método utilizado para obter soluções para o problema (P_2) consiste em reduzir o mesmo a uma aplicação do **Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer.**

O método consiste em linearizar o problema (P_2). Para isto, fixamos uma função u no problema (P_2), na parte não linear $F(\cdot, u(\cdot))$, obtendo assim uma equação linear elíptica de segunda ordem, onde os resultados clássicos apresentados na última seção podem ser usados. Mais precisamente, o **Teorema de Schauder.**

Os resultados da teoria linear do problema de Dirichlet, enunciados na Seção 2.2 permitem construir um operador T que a cada função u faz corresponder uma solução $v = Tu$, ou seja,

$$\begin{array}{rccc} T: & C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) & \rightarrow & C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ & u & \mapsto & Tu = v \end{array}$$

do problema linear associado. Desta forma uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução do problema (P_2) se, e somente se, u é um ponto fixo de T.

No que segue, $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e para cada $u \in E$ consideramos a equação elíptica linear de segunda ordem em v.

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)v_{x_i} + c(x)v & = & F(x, u(x)), & \forall x \in \Omega \\ v & = & 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \qquad (P_2)_u$$

Os próximos resultados tem por objetivo mostrar algumas propriedades do operador T.

Definição 2.10 *Um domínio Ω satisfaz a propriedade da poligonal, quando existe $\gamma > 0$ tal que dois pontos quaisquer x e y de $\overline{\Omega}$ podem ser ligados por uma poligonal em Ω de comprimento l verificando $l \leq \gamma|x - y|$.*

Observação 2.2 *Um domínio com fronteira suave verifica a propriedade da poligonal (ver* [11]*).*

Lema 2.11 *Seja* Ω *um domínio que satisfaz a propriedade da poligonal. Se* $A \in C^1(\overline{\Omega})$*, então* A *é Lipschitziana em* $\overline{\Omega}$*. Além disso, existe uma constante* $K(\overline{\Omega})$*, que depende do domínio, tal que*

$$H_{0,1}(A) \leq K(\overline{\Omega})\|A\|_1. \tag{2.7}$$

Demonstração: Vamos mostrar primeiramente que A é Lipschitziana em $\overline{\Omega}$.

Considere $x_1, x_N \in \Omega$ de tal forma que $[x_1, x_N] \subseteq \Omega$. Como Ω é um aberto e conexo limitado do $\mathbb{R}^N$, que satisfaz a propriedade da poligonal, existe $\gamma > 0$ tal que quaisquer dois pontos $x_1, x_N \in \Omega$ podem ser ligados por uma poligonal em Ω de comprimento l verificando $l \leq \gamma|x_N - x_1|$.

Sendo $A \in C^1(\overline{\Omega})$ podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, e desde que Ω satisfaz a propriedade da poligonal, quaisquer dois pontos distintos de Ω podem ser ligados por uma poligonal em Ω, onde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N \in \overline{\Omega}$ são os seus vértices e a poligonal é dada por

$$\bigcup_{k=2}^{N}[x_{k-1}, x_k] \subset \overline{\Omega}. \tag{2.8}$$

Assim,

$$|A(x_N) - A(x_1)| = \Big|\sum_{k=2}^{N} \nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_{k-1})(x_k - x_{k-1})\Big|$$

e desde que, o somatório possui uma quantidade finita de termos, segue da desigualdade triangular

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \sum_{k=2}^{N} |\nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_{k-1})(x_k - x_{k-1})|.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz encontramos

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \sum_{k=2}^{N} |\nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_{k-1})|\,|x_k - x_{k-1}|. \tag{2.9}$$

Uma vez que

$$|\nabla A(x + (y - x)\theta)| \leq \|A\|_1, \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{2.10}$$

temos

$$|\nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_k)| \leq \|A\|_1, \;\; \forall\, k = 2, 3, 4, \ldots, N, \;\; \theta_k \in (0, 1)$$

e portanto por (2.9)

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \|A\|_1 \sum_{k=2}^{N} |x_k - x_{k-1}|.$$

Sendo

$$\sum_{k=2}^{N} |x_k - x_{k-1}| = l$$

temos

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \|A\|_1 l,$$

e portanto,

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \|A\|_1 \gamma |x_N - x_1|.$$

Considerando $\|A\|_1 \gamma = M > 0$, deduzimos que

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq M |x_N - x_1|,$$

mostrando que A é Lipschitziana em $\overline{\Omega}$.

Vamos mostrar agora que

$$H_{0,1}(A) \leq K(\overline{\Omega}) \|A\|_1.$$

Pela primeira parte da demonstração temos

$$|A(x) - A(y)| \leq \|A\|_1 \gamma |x - y|, \ \forall\, x, y \in \overline{\Omega}. \tag{2.11}$$

Fazendo $\gamma = K(\overline{\Omega}) > 0$ e substituindo em (2.11) encontramos

$$\frac{|A(x) - A(y)|}{|x - y|} \leq K(\overline{\Omega}) \|A\|_1,$$

e com isso onde podemos concluir que $K(\overline{\Omega})\|A\|_1$ é uma cota superior para o conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{|A(x) - A(y)|}{|x - y|};\ x, y \in \overline{\Omega} \right\}.$$

Logo, $\mathcal{C}$ é limitado superiormente e pelo postulado de Dedekind possui supremo, a saber,

$$\sup_{x,y \in \overline{\Omega}} \frac{|A(x) - A(y)|}{|x - y|} \quad \leq \quad K(\overline{\Omega}) \|A\|_1, \ com\ x \neq y.$$

Segue da última desigualdade e da definição de $H_{0,1}(A)$ a desigualdade,

$$H_{0,1}(A) \leq K(\overline{\Omega}) \|A\|_1.$$

■

Recordando que estamos supondo a_{ij}, b_i, c, F funções de classe C^1, segue do Lema 2.11 que a_{ij}, b_i, c, $F \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Logo pelo Teorema de Schauder, existe para cada $u \in E$ uma e somente uma solução do problema $(P_2)_u$ que denotaremos por $v = Tu$ com $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde:

$$(P_2)_u \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)(Tu)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)(Tu)_{x_i} + c(x)(Tu) & = & F(x, u(x)), \quad \forall x \in \Omega \\ Tu & = & 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Com o objetivo de usar um teorema de ponto fixo para o operador T, iremos mostrar que o mesmo é **compacto.** Para tanto, enunciaremos sem demonstrar o seguinte resultado que pode ser encontrado no livro do Adams [2].

Lema 2.12 *A imersão de $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é compacta.*

O próximo Lema é fundamental para a aplicação do método utilizado neste trabalho.

Lema 2.13 *O operador $T : E \to E$ é compacto.*

Demonstração: O Lema 2.13 fica demonstrado se T verifica:
(**i**) $T(B)$ é relativamente compacto em $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, ou seja, $\overline{T(B)}$ é compacto em $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
(**ii**) T é contínuo em $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Se B um conjunto limitado de $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então, existe $M > 0$ tal que

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq M, \ \ \forall\, u \in B.$$

Usando a Estimativa de Schauder, quando $c \leq 0$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq k_1 \|F(\cdot, u(\cdot))\|_{\alpha}.$$

Sendo a aplicação F de classe C^1 sobre $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, segue do Lema 2.11 que a mesma é Lipschitziana sobre $\overline{\Omega} \times [-M, M]$, uma vez que o domínio $\overline{\Omega} \times [-M, M]$ tem a propriedade da poligonal.

Afirmação: Existe $M_5 > 0$ tal que

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_{\alpha} \leq M_5, \ \ \forall\, u \in B.$$

Para mostrar a afirmação, observamos que para cada $u \in B$ temos $\|u\|_{1,\alpha} \leq M$, o que implica

$$\|u\|_{\alpha} \leq M.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.11 temos

$$H_{0,1}(u) \leq K(\overline{\Omega})\|u\|_1, \tag{2.12}$$

e assim, obtemos

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \leq K(\overline{\Omega})\|u\|_1, \ com\ x \neq y.$$

Consequentemente,

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \leq K(\overline{\Omega})\|u\|_1,$$

ou seja,

$$|u(x)-u(y)| \leq \|u\|_1 K(\overline{\Omega})|x-y|, \ \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Assim,

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \|u\|_1 K(\overline{\Omega})|x-y|^{1-\alpha}, \ \forall x, y \in \overline{\Omega}\ com\ x \neq y.$$

Usando o fato que,

$$|x-y| \leq diam(\overline{\Omega})$$

tem-se

$$|x-y|^{1-\alpha} \leq (diam(\overline{\Omega}))^{1-\alpha}, \forall x, y \in \overline{\Omega}$$

o que implica

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq MK(\overline{\Omega})diam(\overline{\Omega})^{1-\alpha}, \ \forall u \in B.$$

Daí,

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq M_1, \ \forall\, u \in B,$$

e com isso concluimos,

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \ \leq \ M_1, \forall u \in B, \ com\ x \neq y.$$

Portanto,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq M_1, \ \forall u \in B. \tag{2.13}$$

Sendo F Lipschitziana sobre $\overline{\Omega} \times [-M, M]$, existe uma constante $C > 0$ e observando que

$$(x, u(x)) \in \overline{\Omega} \times [-M, M], \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

temos

$$|F(x, u(x)) - F(y, u(y))| \leq C(|x - y| + |u(x) - u(y)|), \ \forall u \in B,$$

para alguma constante $C > 0$. Usando (2.13)

$$|F(x, u(x)) - F(y, u(y))| \leq C(|x - y| + M|x - y|^{\alpha}), \ \forall u \in B$$

e assim

$$\frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^{\alpha}} \leq C(|x - y|^{1-\alpha} + M),$$

ou equivalentemente,

$$\frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^{\alpha}} \leq C(diam(\overline{\Omega})^{1-\alpha} + M), \ \forall u \in B.$$

Mostrando assim, que existe $M_3 > 0$ satisfazendo

$$\frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^{\alpha}} \leq M_3, \ \forall u \in B.$$

Desta última desigualdade

$$\sup_{x,y \in \overline{\Omega}} \frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^{\alpha}} \ \ \leq \ \ M_3, \ \forall u \in B, \ com \ x \neq y,$$

isto é,

$$H_{0,\alpha}(F(\cdot, u(\cdot))) \leq M_3, \ \forall u \in B.$$

Agora, observe que existe $M_4 > 0$ tal que

$$|F(\cdot, u(\cdot))|_0 = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |F(x, u(x))| \leq M_4, \ \forall u \in B$$

como $\overline{\Omega} \times [-M, M]$ é um compacto temos que $|F(x, \xi)| \leq K$, $\forall x \in \overline{\Omega}$
e $\forall \xi \in [-M, M]$. Usando o fato que $u(x) \in [-M, M]$ podemos afirmar que

$$|F(x, u(x))| \leq M_4, \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ \forall u \in B,$$

o que implica

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |F(x, u(x))| \ \ \leq M_4, \ \ \forall u \in B,$$

ou seja,

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_0 \leq M_4, \;\; \forall u \in B.$$

Assim,

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_4 + M_3, \;\; \forall u \in B.$$

Consequentemente,

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_5, \;\; \forall u \in B,$$

mostrando a afirmação.

Desde que,

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq K_1 \|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha$$

chegamos a seguinte desigualdade

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq K_1 M_5$$

e, fazendo $K_1 M_5 = K$ encontramos

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq K, \;\; \forall u \in B.$$

Portanto, de acordo com o Lema 2.11, $T(B)$ é relativamente compacto em $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ mostrando o item (i).

Nosso trabalho agora é mostrar o item (ii), isto é, que o operador T é contínuo. Mais precisamente, devemos mostrar que

$$u_n \;\longrightarrow\; u \;\; em \;\; E \;\Longrightarrow\; v_n = Tu_n \;\longrightarrow\; Tu \; = \; v \;\; em \;\; E.$$

Para todo n, existe $v_n \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)(v_n)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)(v_n)_{x_i} + c(x)(v_n) & = & F(x, u_n(x)), & \Omega \\ v_n & = & 0, & \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Sendo $\{u_n\}$ limitada, $\{v_n\}$ é limitada e usando o fato que a imersão

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$$

é compacta, podemos extrair uma subsequência $\{v_{n_k}\}$ convergente na norma $C^2(\overline{\Omega})$ para uma função $v \in C^2(\overline{\Omega})$.

Por definição a norma $C^2(\overline{\Omega})$ é dada por

$$\|v_{n_k} - v\|_{C^2} = \|v_{n_k} - v\|_0 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v_{n_k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0 + \sum_{i,j=1}^{N} \left\| \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_i} \right\|_0 \quad (2.14)$$

e segue-se da convegência, no sentido $C^2(\overline{\Omega})$, que

$$\|v_{n_k} - v\|_0 \to 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v_{n_k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0 \to 0$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left\| \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_i} \right\|_0 \to \ 0.$$

Sendo assim, podemos concluir que a função v verifica o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) v_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) v_{x_i}(x) + c(x) v(x) & = & F(x, u(x)), & \Omega \\ v & = & 0, & \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Portanto, podemos deduzir que $v = Tu$, pois a solução do problema de Dirichlet é única, e desta forma

$$Tu_{n_k} \ \to \ Tu \ em \ C^2(\overline{\Omega}).$$

Para concluir a demonstração, devemos mostrar que

$$v_n = Tu_n \ \to \ v = Tu \ em \ C^2(\overline{\Omega}).$$

Suponhamos por contradição que o limite acima não ocorra. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ e $\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\}$ tal que

$$\|v_{n_j} - v\|_2 \geq \epsilon_0, \ \forall \ n_j. \tag{2.15}$$

Usando $\{v_{n_j}\}$ no lugar $\{v_n\}$ na primeira parte desta demonstração, existe $\{v_{n_{j_k}}\} \subset \{v_{n_j}\}$ tal que

$$v_{n_{j_k}} \ \to \ v = Tu \ em \ C^2(\overline{\Omega}).$$

Assim, existe $n_{j_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_{n_{j_k}} - v\|_2 < \frac{\epsilon_0}{2}, \ \forall \ n_{j_k} \geq n_{j_0}, \tag{2.16}$$

o que contradiz (2.15). Portanto, devemos ter

$$v_n \ \to \ v = Tu \ em \ C^2(\overline{\Omega}),$$

mostrando a continuidade do operador T. ∎

Agora, vamos introduzir um parâmetro $\sigma \in [0,1]$ no problema (P_2) obtendo o seguinte problema:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) & = & \sigma F(x,u), & \Omega \\ u & = & 0, & \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_3)_\sigma$$

ou seja,

$$\begin{cases} Lu & = & \sigma F(x,u), & \Omega \\ u & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_3)_\sigma$$

Observe que o problema (P_2) é obtido fazendo $\sigma = 1$ no problema $(P_3)_\sigma$. No que segue, definimos

$$\begin{array}{rccl} T & : & [0,1]\times E & \rightarrow & E \\ & & (\sigma,u) & \mapsto & T(\sigma,u) \end{array}$$

o operador que associa a cada par $(\sigma,u) \in [0,1]\times E$ a função $v = T(\sigma,u)$, que é a única solução do problema linear

$$\begin{cases} Lv & = & \sigma F(x,u), & \Omega \\ v & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_3)_{u,\sigma}$$

Usando o mesmo tipo de argumento utilizado na demonstração do Lema 2.13, podemos concluir que $T : [0,1]\times E \rightarrow E$ é um operador compacto. Além disso, da definição do operador T, temos que u_σ é uma solução do problema $(P_3)_{u,\sigma}$ se, e somente se, u_σ é um ponto fixo do operador $T(\sigma,u)$. Note também que o operador T verifica a propriedade $T(0,u) = 0,\ \forall\ u \in E$, pois considerando $\sigma = 0$ no problema $(P_3)_{u,\sigma}$ obtemos

$$\begin{cases} Lv & = & 0, & \Omega \\ v & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_v)$$

como a solução do problema (P_v) é unica e $v = 0$ é uma solução do problema acima devemos ter $T(0,u) = 0,\ \forall\ u \in E$.

No que segue, provaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer.

Teorema 2.14 (Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer.) *Seja S um operador compacto de $[0,1]\times E$ sobre E, ou seja,*

$$\begin{array}{rccl} S & : & [0,1]\times E & \rightarrow & E \\ & & (\sigma,u) & \mapsto & S(\sigma,u) \end{array}$$

com $S(0,u) = 0\ \forall u \in E$*. Se existe* $r > 0$ *tal que a igualdade* $u = S(\sigma, u)$ *com* $u \in E$ *e* $\sigma \in [0,1]$ *implica que* $\|u\| < r$*, então* $\forall\sigma \in [0,1]$ *o operador* $S(\sigma, \cdot)$ *admite um ponto fixo em* $B_r(0)$*.*

Demonstração:

Considere a seguinte homotopia

$$H(\sigma, u) = u - S(\sigma, u),\ \ \forall\sigma \in [0,1]\ \ e\ \ \forall u \in \overline{B_r(0)}.$$

Afirmação:

$$0 \notin H([0,1] \times \partial B_r(0)).$$

A afirmação é equivalente a mostrar

$$u - S(\sigma, u) \neq 0\ \ \forall u \in \partial B_r(0)\ e\ \forall\sigma \in [0,1].$$

Suponhamos por absurdo que

$$0 \in H([0,1] \times \partial B_r(0)).$$

Logo, existe $u_0 \in \partial B_r(0)$ e $\sigma_0 \in [0,1]$ tal que $H(\sigma_0, u_0) = 0$, ou equivalentemente,

$$0 = H(\sigma_0, u_0) = u_0 - S(\sigma_0, u_0)$$

implicando

$$u_0 = S(\sigma_0, u_0).$$

Desta forma, temos um absurdo, pois sendo $u_0 = S(\sigma_0, u_0)$ com $u_0 \in E$ e $\sigma_0 \in [0,1]$ temos que $\|u_0\| < r$, ou seja, $u_0 \in B_r(0)$ e assim concluimos que

$$u_0 \notin \partial B_r(0).$$

Assim

$$0 \notin H([0,1] \times \partial B_r(0)).$$

Sendo o grau de Leray & Schauder invariante por homotopia, devemos ter $d(H(\sigma, \cdot), B_r(0), 0)$ constante. Logo

$$d(H(0, \cdot), B_r(0), 0) = d(H(\sigma, \cdot), B_r(0), 0),\ \forall\,\sigma \in [0,1].$$

Sendo

$$H(0,u) = u - S(0,u) \text{ temos } H(0,u) = u - 0 \text{ isto } \quad \text{é } H(0,u) = u.$$

Assim,

$$H(0,\cdot) = I$$

e, sendo

$$H(\sigma,\cdot) = I - S(\sigma,\cdot)$$

temos

$$d(I, B_r(0), 0) = d(I - S(\sigma,\cdot), B_r(0), 0).$$

Recordando que

$$d(I, B_r(0), 0) = 1,$$

concluimos que

$$d(I - S(\sigma,\cdot), B_r(0), 0) = 1 \neq 0,$$

implicando que existe $u_\sigma \in B_r(0)$ tal que $(I - S(\sigma,\cdot))(u_\sigma) = 0$ e assim

$$I(u_\sigma) - S(\sigma, u_\sigma) = 0,$$

e consequentemente,

$$u_\sigma = S(\sigma, u_\sigma).$$

Portanto, $u_\sigma \in B_r(0)$ é um ponto fixo do operador $S(\sigma,\cdot)$. ■

Usando as propriedades do operador T juntamente com o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer , temos o seguinte resultado

Teorema 2.15 *Se existe um número $r > 0$ tal que $\forall\, \sigma \in [0,1]$ e para toda solução u do problema $(P_3)_\sigma$ temos a majoração à priori*

$$\|u\|_{1,\alpha} < r,$$

então para todo $\sigma \in [0,1]$, existe efetivamente uma solução $u_\sigma \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ do problema $(P_3)_\sigma$.

Demonstração: Usando a definição do operador T, segue da hipótese que existe $r > 0$ tal que $u = T(\sigma, u)$ e devemos ter $\|u\|_{1,\alpha} < r$. Uma vez que, $T(0,u) = 0,\ \forall\ u \in E$ segue-se do Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer que, para cada $\sigma \in [0,1]$ existe $u_\sigma \in E$ tal que

$$u_\sigma = T(\sigma, u_\sigma).$$

Sendo $T(\sigma, u_\sigma)$ solução do problema $(P_3)_{u,\sigma}$ temos

$$\begin{cases} L(T(\sigma, u_\sigma)) &= \sigma F(x, u_\sigma(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ T(\sigma, u_\sigma) &= \quad 0, \qquad\qquad \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} L(u_\sigma) &= \sigma F(x, u_\sigma(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u_\sigma &= \quad 0, \qquad\qquad \partial\Omega. \end{cases}$$

■

Observação 2.3 *Em particular, para $\sigma = 1$ o problema semilinear (P_2), ou seja,*

$$(P_2)\begin{cases} Lu &= F(x, u(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u &= \quad 0, \qquad\qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

admite solução.

No que segue vamos considerar $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função limitada.

Considere a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} Lu &= \sigma F(x, u(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u &= \quad 0, \qquad\qquad \partial\Omega, \end{cases} \tag{Υ}_\sigma$$

onde $\sigma \in [0, 1]$ e $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ é uma função limitada em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que esta classe de problemas verifica as condições do Teorema 2.15.

Teorema 2.16 (Estimativa a Priori) *Sendo $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função limitada em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, existe $r > 0$ tal que qualquer solução u de $(\Upsilon)_\sigma$ verifica*

$$\|u\|_{1,\alpha} < r.$$

Demonstração:

Suponhamos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ seja uma solução de $(\Upsilon)_\sigma$. Uma primeira majoração é obtida usando o Princípio de Máximo ver (2.5)

$$\|u\|_0 \leq K \|\sigma F(\cdot, u(\cdot))\|_0, \tag{2.17}$$

e a segunda estimativa segue da Estimativa de Schauder

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq K_1 \|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha. \tag{2.18}$$

Uma vez que

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha = \|F(\cdot, u(\cdot))\|_0 + H_{0,\alpha}(F(\cdot, u(\cdot))) \tag{2.19}$$

segue da limitação da F que, existe $M_1 > 0$ tal que

$$|F(x,t)| \leq M_1, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}, \ \forall \ t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$|F(x, u(x))| \leq M_1, \ \forall \ x \in \overline{\Omega},$$

e assim obtemos

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_0 \leq M_1.$$

Usando a estimativa (2.17) e a última desigualdade encontramos

$$\|u\|_0 \leq K|\sigma|M_1$$

e fazendo $K|\sigma|M_1 = M$, concluimos que

$$\|u\|_0 \leq M, \ \forall \ u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}). \tag{2.20}$$

De acordo com a desigualdade (2.19) temos que

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_1 + H_{0,\alpha}[F(\cdot, u(\cdot))]. \tag{2.21}$$

Como a aplicação F é de classe C^1 sobre $\overline{\Omega} \times [-M, M]$, segue do Lema 2.11 que F é Lipschitziana em $\overline{\Omega} \times [-M, M]$ e segue-se que existe $C > 0$ tal que

$$|F(x, \eta) - F(y, \xi)| \leq C(|x - y| + |\eta - \xi|).$$

Visto que $u(x) \in [-M, M] \ \forall \ x \in \overline{\Omega}$, pois $\|u\|_0 \leq M$, obtemos

$$|F(x, u(x)) - F(y, u(y))| \leq C(|x - y| + |u(x) - u(y)|). \tag{2.22}$$

Agora, usando a definição de $H_{0,\alpha}(u)$ temos

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \quad H_{0,\alpha}(u) \ \ com \ \ x \neq y.$$

Fixando

$$\delta = diam(\overline{\Omega}) = sup\{|x - y|; x, y \in \overline{\Omega}\} < \infty,$$

segue-se que

$$\frac{|F(x,u(x)) - F(y,u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(|x-y|^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)),$$

portanto,

$$\frac{|F(x,u(x)) - F(y,u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u))$$

e assim obtemos

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|F(x,u(x)) - F(y,u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)), \ \ com \ \ x \neq y,$$

mostrando que

$$H_{0,\alpha}(F(\cdot,u(\cdot))) \leq C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)). \tag{2.23}$$

Substituindo (2.23) em (2.21) encontramos

$$\|F(\cdot,u(\cdot))\|_{\alpha} \leq M_1 + C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)). \tag{2.24}$$

Agora usando (2.24) em (2.18) obtemos

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq K_1(M_1 + C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)))$$

implicando

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq K_1 \cdot M_1 + K_1 C\delta^{1-\alpha} + K_1 C H_{0,\alpha}(u).$$

Se $M_2 = K_1 M_1 + K_1 C\delta^{1-\alpha}$ e $M_3 = K_1 C$, ficamos com

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq M_2 + M_3 H_{0,\alpha}(u). \tag{2.25}$$

Afirmação: Para todo $\epsilon > 0$, existe $\Psi(\epsilon) \in \mathbb{R}$ tal que,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq \epsilon\|u\|_1 + \Psi(\epsilon)\|u\|_0, \ \forall \ u \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{2.26}$$

Assumindo por um momento a afirmação acima, segue de (2.25) que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq M_2 + M_3(\epsilon\|u\|_1 + \Psi(\epsilon)\|u\|_0),$$

que implica

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq M_2 + M_3\epsilon \cdot \|u\|_1 + M_3\Psi(\epsilon) \cdot \|u\|_0. \tag{2.27}$$

Desde que, $\|u\|_0 \leq M$ fazendo $\epsilon = \dfrac{1}{2M_3}$, obtemos

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq M_2 + \frac{1}{2}\|u\|_1 + M_3\Psi(\epsilon)M.$$

Assim,

$$2 \cdot \|u\|_{2,\alpha} \leq 2M_2 + \|u\|_1 + 2M_3\Psi(\epsilon)M. \tag{2.28}$$

Usando a definição da norma $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, segue-se que

$$2\|u\|_{2,\alpha} \geq \|u\|_2 + \|u\|_1 + H_{2,\alpha}(u),$$

implicando

$$2\|u\|_{2,\alpha} \geq \|u\|_{2,\alpha} + \|u\|_1.$$

Substituindo a última desigualdade em (2.28) encontramos

$$\|u\|_{2,\alpha} + \|u\|_1 \leq 2M_2 + \|u\|_1 + 2M_3\Psi(\epsilon)M,$$

e com isso concluimos que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq 2(M_2 + M_3\Psi(\epsilon)M).$$

Considerando $c = 2(M_2 + M_3\Psi(\epsilon)M)$ temos que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c,$$

para toda u solução do problema $(\Upsilon)_\sigma$. Agora, usando o fato que a imersão

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

é contínua existe $k > 0$ tal que

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq k\|u\|_{2,\alpha},$$

implicando que

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq kc.$$

Considerando $r = ck + 1$ temos,

$$\|u\|_{1,\alpha} < r, \ \forall \ u \in E.$$

Demonstração de (2.26)

Por um cálculo direto temos que

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq (H_{0,1}(u))^\alpha (2\|u\|_0)^{1-\alpha},$$

que implica

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq (H_{0,1}(u))^{\alpha}(2\cdot\|u\|_0)^{1-\alpha} \;\; com \;\; x\neq y.$$

Portanto,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq (H_{0,1}(u))^{\alpha}(2\|u\|_0)^{1-\alpha}.$$

De acordo com o Lema 2.11

$$H_{0,1}(u) \leq K(\overline{\Omega})\|u\|_1$$

e com isso,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq (K(\overline{\Omega})\|u\|_1)^{\alpha}(2\|u\|_0)^{1-\alpha}.$$

Assim,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq 2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}\|u\|_1^{\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha}. \tag{2.29}$$

Considerando $a=(\epsilon_1\|u\|_1)^{\alpha}$, $b=(\epsilon_1)^{-\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha}$ (com $\epsilon_1>0$), $p=\dfrac{1}{\alpha}$ temos que $q=\dfrac{1}{1-\alpha}$, pois $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ e segue-se da desigualdade de Young (Ver [2]) que

$$a\cdot b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{a^q}{q}.$$

Logo,

$$ab=(\epsilon_1)^{\alpha}\|u\|_1^{\alpha}(\epsilon_1)^{-\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha}=\|u\|_1^{\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha}$$

e portanto

$$\|u\|_1^{\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha} \leq \frac{((\epsilon_1\|u\|_1)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha}}+\frac{((\epsilon_1)^{-\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Daí,

$$\|u\|_1^{\alpha}\|u\|_0^{1-\alpha} \leq \alpha\epsilon_1\|u\|_1+(1-\alpha)\epsilon_1^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\|u\|_0$$

e obtemos

$$H_{0,\alpha}(u) \leq 2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}(\;\alpha\epsilon_1\|u\|_1+(1-\alpha)(\epsilon_1)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\|u\|_0\;). \tag{2.30}$$

Fixando

$$\epsilon_1=\frac{\epsilon}{2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}\alpha},$$

temos que

$$H_{0,\alpha}(u) \leq \epsilon\|u\|_1+\Psi(\epsilon)\|u\|_0,\;\forall u\in C^1(\overline{\Omega})\;\; e\;\; \forall\epsilon>0, \tag{2.31}$$

onde

$$\Psi(\epsilon) = (1-\alpha)2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}\Big(\frac{\epsilon}{2^{1-\alpha}(K(\overline{\Omega}))^{\alpha}\alpha}\Big)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}.$$

mostrando a desigualdade (2.26). ∎

Usando o Teorema 2.15, para cada $\sigma \in [0,1]$ existe u_σ solução do problema $(\Upsilon)_\sigma$, ou seja,

$$\begin{cases} L(u_\sigma) &= \sigma F(x, u_\sigma(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u_\sigma &= 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

e desta forma podemos afirmar que vale o seguinte teorema:

Teorema 2.17 *Seja $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função limitada sobre $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, então a equação*

$$\begin{cases} Lu &= F(x, u(x)), \quad \forall\, x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

admite uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Observação 2.4 *A hipótese que F é limitada sobre $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ é essencial, pois no caso unidimensional, considerando $\Omega = (0, 2\pi)$, e $F(x,u) = -u + x$ o problema*

$$\begin{cases} u'' &= -u + x \\ u(0) &= u(2\pi) \quad = 0, \end{cases} \tag{P_4}$$

não admite solução.
De fato, temos que a solução geral para a equação $u'' = -u + x$ é dada por

$$y(x) = c_1 cosx + c_2 senx + x.$$

Impondo a condição $y(0) = y(2\pi) = 0$ chegamos a uma contradição. Logo o problema (P_4) não tem solução.

Capítulo 3

O Método de Galerkin e Aplicações

Neste capítulo pretendemos mostrar a existência de solução para a seguinte classe de problemas singulares

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u &> 0, & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 2$ e $0 < \gamma < 1$. O método que utilizaremos é conhecido como o **Método de Galerkin.**

3.1 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em.

Nesta seção demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema 3.1 *Seja $f : \bar{B}_r(x) \to \bar{B}_r(x)$ com $\bar{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ uma função contínua. Então, existe $z \in \bar{B}_r(x)$ tal que $f(z) = z$, isto é, f tem um ponto fixo z em $\bar{B}_r(x)$.*

Demonstração: Vamos mostrar primeiro, o caso em que o centro x da bola é a origem. Neste caso temos $f : \bar{B}_r(0) \to \bar{B}_r(0)$. Defina a aplicação $\varphi : \bar{B}_r(0) \to \mathbb{R}^N$, dada por $\varphi(y) = y - f(y)$ que é contínua, pois é uma diferença de funções contínuas.
Vamos supor que

$$y - f(y) \neq 0, \ \forall y \in \partial B_r(0),$$

ou equivalentemente,

$$\varphi(y) \neq 0, \ \forall y \in \partial B_r(0),$$

pois, caso contrário o teorema já estaria demonstrado.

Agora, defina a seguinte homotopia

$$\begin{array}{rcll} H: & \bar{B}_r(0)\times[0,1] & \to & \mathbb{R}^N \\ & (y,t) & \mapsto & H(y,t)=y-tf(y). \end{array}$$

Vamos mostrar que

$$0\notin H(\partial B_r(0)\times[0,1]),$$

isto é,

$$H(y_0,t_0)\neq 0,\ \ \forall\ y_0\ \in\ \partial B_r(0)\ \ e\ \ \forall\ \ t_0\in[0,1].$$

Se $t=1$ temos

$$H(y,1)=y-f(y)=\varphi(y)\neq 0,\ \ \forall\ y\in\partial B_r(0)$$

mostrando que

$$0\ \notin\ H(\partial B_r(0)\times\{1\}).$$

Agora, vamos analisar o caso em que $t\ \in\ [0,1)$ e $y\ \in\ \partial B_r(0)$. Assim,

$$|tf(y)|=t|f(y)|\ \ \leqslant\ \ t.r<r=|y|$$

e com isso,

$$|tf(y)|\ \ <\ \ |y|.$$

Consequentemente,

$$tf(y)\ \ \neq\ \ y$$

donde segue-se que

$$y-tf(y)\ \ \neq\ \ 0\ \ \ ,\ \ \forall y\in\partial B_r(0)\ \ \ e\ \ \ \forall t\in[0,1),$$

isto é,

$$H(y,t)\ \ \neq\ \ 0\ \ \ ,\ \ \forall y\in\partial B_r(0)\ \ \ e\ \ \ \forall t\in[0,1),$$

ou seja,

$$0\notin H(\partial B_r(0)\times[0,1)).$$

Portanto,

$$0\notin H(\partial B_r(0)\times[0,1]).$$

Usando a propriedade que o grau topológico de Brouwer é invariante por homotopia temos

$$d(H(.,t),B_r(0),0)\ \ =\ \ \text{constante},\ \ \forall t\in[0,1]$$

e portanto,

$$d(H(.,0), B_r(0), 0) \quad = \quad d(H(.,1), B_r(0), 0).$$

Daí, segue-se que

$$d(I, B_r(0), 0) \quad = \quad d(\varphi, B_r(0), 0).$$

Uma vez que

$$d(I, B_r(0), 0) = 1$$

temos que

$$d(\varphi, B_r(0), 0) = 1 \ \neq 0.$$

Agora, usando a propriedade (P_2) do grau topológico de Brouwer, existe $y_0 \in B_r(0)$ tal que $\varphi(y_0) = 0$, que implica

$$y_0 - f(y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \text{com} \quad \text{isso} \quad y_0 = f(y_0).$$

Portanto, a aplicação f tem um ponto fixo y_0 em $\bar{B}_r(0)$.

Vamos agora provar o caso geral, onde o centro da bola $\bar{B}_r$ é um ponto qualquer $x \in \mathbb{R}^N$.

Considere a aplicação $\varphi : \bar{B}_r(0) \ \rightarrow \ \bar{B}_r(0)$, dada por $\varphi(y) = f(x+y) - x$.

A aplicação φ é contínua e $\varphi(\bar{B}_r(0)) \subset \bar{B}_r(0)$, pois

$$|\varphi(y)| = \ |f(x+y) - x| \ \leq \ r, \ \text{isto} \quad \text{é}, \ \varphi(y) \ \in \ \bar{B}_r(0).$$

Assim, φ tem um ponto fixo $z \in \bar{B}_r(0)$, ou seja,

$$\varphi(z) = z \ \Leftrightarrow \ f(x+z) - x = z \ \Leftrightarrow \ f(x+z) = x + z.$$

Denotando,

$$w = x + z \ \in \ \bar{B}_r(x)$$

concluímos que $f(w) = w$. Mostrando que f tem um ponto fixo em $\bar{B}_r(x)$. ∎

3.2 Lema Fundamental

Lema 3.2 *Seja* $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ *uma função contínua com* $\langle f(x), x \rangle \geq 0$, *para todo* x *verificando* $|x| = R > 0$. *Então, existe* $z_0 \in \bar{B}_r(0)$ *tal que* $f(z_0) = 0$.

Demonstração: A demonstração do Lema Fundamental será feita por contradição. Considere $f(x) \neq 0,\ \forall\, x \in \bar{B}_R(0)$, e defina a função $g:\ \bar{B}_R(0)\ \rightarrow\ \bar{B}_R(0)$ dada por

$$g(x) = \frac{-R}{|f(x)|} f(x).$$

Observe que g verifica $g(\bar{B}_R(0)) \subset \bar{B}_R(0)$, pois

$$|g(x)| = \left|\frac{-R}{|f(x)|} f(x)\right| = \frac{R}{|f(x)|}|f(x)| = R \ \text{ e } \quad \text{com} \quad \text{isso } \ g(x) \in \bar{B}_R(0).$$

Além disso, g é contínua, pois f é contínua por hipótese. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a função g tem um ponto fixo em $\bar{B}_R(0)$. Seja x_0 tal ponto fixo de g, isto é, $x_0 = g(x_0)$. Desta forma,

$$|x_0| = |g(x_0)| = R > 0.$$

Por outro lado,

$$R^2 = |x_0|^2 = \langle x_0, x_0\rangle = \langle x_0, g(x_0)\rangle = \langle x_0, \frac{-R}{|f(x_0)|} f(x_0)\rangle = \frac{-R}{|f(x_0)|}\langle x_0, f(x_0)\rangle.$$

Desde que, por hipótese,

$$\langle x_0, f(x_0)\rangle \geq 0,$$

temos que

$$0 < R^2 = \frac{-R}{|f(x_0)|}\langle x_0, f(x_0)\rangle \leq 0,$$

que é um absurdo. Portanto, existe $z_0 \in \bar{B}_R(0)$ tal que $f(z_0) = 0$. ∎

3.3 Teorema Envolvendo Sub-Solução e Super-Solução.

Nesta seção definiremos sub-solução e super-solução para (3.1) e demonstraremos um **Teorema envolvendo Sub-Solução e Super-Solução.** Devido a Ambrosetti, Brézis & Cerami (ver [5]), o qual é crucial para mostrar a existência e unicidade do Problema Singular apresentado neste capítulo.

Definição 3.3 *Considere o problema*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v & = & f(v), & \Omega \\ v & > & 0, & \Omega \\ v & = & 0, & \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Dizemos que uma solução $v_1 \in C^2(\overline{\Omega})$ *é uma sub-solução para o problema* (3.1), *se* v_1 *satisfaz:*

$$\begin{cases} -\Delta v_1 & \leq & f(v_1), & x \in \Omega \\ v_1 & > & 0, & x \in \Omega \\ v_1 & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Da mesma forma dizemos que uma solução $v_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ *é uma super-solução para o problema* (3.1), *se* v_2 *satisfaz:*

$$\begin{cases} -\Delta v_2 & \geq & f(v_2), & x \in \Omega \\ v_2 & > & 0, & x \in \Omega \\ v_2 & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Teorema 3.4 *Considere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e assuma que* $f(t)$ *é uma função tal que* $t^{-1}f(t)$ *é decrescente para* $t > 0$*. Sejam* v_1 *e* v_2 *satisfazendo* (3.2) *e* (3.3)*. Então,* $v_2 \geq v_1$ *em* Ω*.*

Demonstração:

Multiplicando (3.2) por $-v_2$ e (3.3) por v_1, obtemos

$$v_2 \Delta v_1 \geq -v_2 f(v_1) \tag{3.4}$$

e

$$-v_1 \Delta v_2 \geq v_1 f(v_2). \tag{3.5}$$

Somando-se as desigualdades (3.4) e (3.5) encontramos

$$-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1 \geq v_1 f(v_2) - v_2 f(v_1), \tag{3.6}$$

donde segue-se que

$$-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1 \geq \Big[v_1 v_2 \Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \Big) \Big]. \tag{3.7}$$

Seja $\theta(t)$ uma função suave não decrescente tal que

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t \geq 1 \\ 0, & se \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Definindo para cada $\epsilon > 0$, a função

$$\theta_\epsilon(t) = \theta\Big(\frac{t}{\epsilon}\Big),$$

temos que

$$\theta_\epsilon(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato:

$$\theta_\epsilon(t) = \theta\Big(\frac{t}{\epsilon}\Big) = \begin{cases} 1, & se \quad \frac{t}{\epsilon} \geq 1 \\ 0, & se \quad \frac{t}{\epsilon} \leq 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\theta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t \geq \epsilon \\ 0, & se \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Sendo $\theta(t)$ uma função suave não decrescente segue-se que $\theta_\epsilon(t) \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$. Multiplicando a desigualdade (3.7) por $\theta_\epsilon(v_1 - v_2)$ e integrando em Ω, encontramos

$$\int_\Omega [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1]\theta_\epsilon(v_1 - v_2)dx \geq \int_\Omega \Big[v_1 v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]\theta_\epsilon(v_1 - v_2)dx. \quad (3.8)$$

Trabalhando com o lado esquerdo da desigualdade (3.8), ou seja, com o termo

$$\int_\Omega [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1]\theta_\epsilon(v_1 - v_2)dx, \quad (3.9)$$

deduzimos que,

$$\int_\Omega [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1]\theta_\epsilon(v_1 - v_2)dx = -\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx. \quad (3.10)$$

Usando a primeira identidade de Green na primeira parcela do segundo membro da igualdade (3.10) obtemos

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = -\Big[-\int_\Omega \nabla v_2 \nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]dx + \int_{\partial\Omega} [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\frac{\partial v_2}{\partial \eta}ds\Big] \quad (3.11)$$

e sendo $v_1 = 0$ em $\partial\Omega$ temos que

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = \int_\Omega \nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\nabla v_2 dx. \tag{3.12}$$

Calculando $\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]$ e substituindo em (3.12) encontramos

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = \int_\Omega [\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]v_1 + \theta_\epsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1]\nabla v_2 dx. \tag{3.13}$$

Pela linearidade da integral

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)\nabla(v_1 - v_2)]v_1 \nabla v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx$$

e consequentemente

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx = \int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx. \tag{3.14}$$

Agora, usando a primeira identidade de Green na segunda parcela do segundo membro de (3.10) obtemos

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]dx + \int_{\partial\Omega} [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\frac{\partial v_1}{\partial \eta} ds.$$

Sendo $v_2 = 0$ em $\partial\Omega$, temos que

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]dx. \tag{3.15}$$

Calculando $\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]$ e substituindo em (3.15) encontramos

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega [\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]v_2 + [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_2]\nabla v_1 dx.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)]\nabla(v_1 - v_2)v_2 \nabla v_1 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx.$$

Usando a linearidade do gradiente obtemos

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx = -\int_\Omega [\theta_\epsilon'(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2 \nabla v_1 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx. \tag{3.16}$$

Somando as igualdades (3.14) e (3.16) ficamos com

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)\cdot v_2]\Delta v_1 dx$$

$$= \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx$$
$$- \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2 \nabla v_1 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx.$$

Portanto,

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 dx + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 dx$$
$$= \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_2 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2 \nabla v_1 dx. \quad (3.17)$$

Usando novamente a linearidade da integral no lado esquerdo da igualdade (3.17) e somando e subtraindo

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_1 dx$$

no lado direito da mesma encontramos

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2 \Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx =$$
$$= \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_2 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_1 dx \quad (3.18)$$
$$+ \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_1 dx - \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2 \nabla v_1 dx.$$

Daí, segue-se que

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2 \Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx$$
$$= \int_\Omega v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)(\nabla v_2 - \nabla v_1)dx + \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx. \quad (3.19)$$

Logo

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2 \Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx$$
$$= -\int_\Omega v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\|\nabla v_1 - \nabla v_2\|^2 dx + \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx. \quad (3.20)$$

Observe que

$$-\int_\Omega v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]|\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 dx \leq 0.$$

Assim, somando a ambos os membros da desigualdade acima a expressão

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx$$

obtemos

$$-\int_\Omega v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]|\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 dx + \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx$$

$$\leq \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx.$$

Usando a desigualdade acima em (3.20) concluimos que

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx.$$

Uma vez que

$$(v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2) = \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)], \ \ onde \ \ \gamma_\epsilon(t) = \int_0^t s\theta_\epsilon^{'}(s)ds \quad (3.21)$$

encontramos

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_\Omega \nabla v_1\nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx. \quad (3.22)$$

Usando novamente a primeira identidade de Green no lado direito da desigualdade (3.22) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_1\nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx = -\int_\Omega \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)\Delta v_1 dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)\cdot\frac{\partial v_1}{\partial\eta}ds$$

e sendo $v_1 - v_2 = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega$, segue-se que $\gamma_\epsilon(v_1 - v_2) = \gamma_\epsilon(0) = 0$. Logo,

$$\int_\Omega \nabla v_1\nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx = \int_\Omega \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)(-\Delta v_1)dx.$$

Desde que,

$$-\Delta v_1 \leq f(v_1), \forall x \in \Omega$$

pela desigualdade (3.2) concluimos que

$$\int_\Omega \nabla v_1\nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_\Omega \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)f(v_1)dx. \quad (3.23)$$

Usando o fato que, $0 \leq \gamma_\epsilon \ \leq \ \epsilon$, segue-se de (3.23)

$$\int_\Omega \nabla v_1\nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_\Omega \epsilon f(v_1)dx.$$

Pela desigualdade (3.22) obtemos

$$\int_{\Omega}[-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_{\Omega}\epsilon f(v_1)dx$$

e consequentemente

$$\int_{\Omega}[-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon \int_{\Omega} f(v_1)dx.$$

Fixando $\displaystyle\int_{\Omega} f(v_1)dx = M$ temos que

$$\int_{\Omega}[-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon M.$$

Pela desigualdade (3.8) encontramos

$$\int_{\Omega}\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon M, \tag{3.24}$$

ou equivalentemente,

$$\int_{[v_1\leq v_2]}\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx + \int_{[v_1> v_2]}\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon M. \tag{3.25}$$

Observe que, em $[v_1 \leq v_2]$ temos que $\theta_\epsilon(v_1 - v_2) \equiv 0$. Desta forma,

$$\int_{[v_1\leq v_2]}\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \equiv 0.$$

Então,

$$\int_{[v_1> v_2]}\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon M.$$

No conjunto $[v_1 > v_2]$ temos

$$\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]\,[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \geq 0$$

e quando $\epsilon \ \rightarrow\ 0$ obtemos o limite

$$\Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]\,[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \rightarrow \Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big].$$

Definindo

$$f_\epsilon(x) = \Big[v_1v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]\,[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)](x) \geq 0 \ \ com\ \ \Omega = [v_1 > v_2]$$

e

$$f(x) = \Big[v_1 v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big](x),$$

concluimos pelo **Lema de Fatou** (ver Teorema $B.2$) em (3.25) que

$$0 \geq \liminf_{\epsilon\to 0} \int_{[v_1>v_2]} f_\epsilon(x)dx \geq \int_{[v_1>v_2]} f(x)dx,$$

ou seja,

$$\int_{[v_1>v_2]} \Big[v_1 v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]dx \leq \liminf_{\epsilon\to 0}\int_{[v_1>v_2]} \Big[v_1 v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]\,[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq 0.$$

Assim

$$\int_{[v_1>v_2]} \Big[v_1 v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big]dx = 0.$$

Desde que,

$$\Big[v_1 v_2\Big(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\Big)\Big] > 0 \ \ em \ \ [v_1 > v_2]$$

concluimos que

$$med.[v_1 > v_2] = 0$$

(ver o Teorema $B.21$). Portanto,

$$v_1 \leq v_2 \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega.$$

Sendo v_1 e v_2 funções contínuas em $\overline{\Omega}$, temos que $v_1(x) \leq v_2(x), \ \forall\, x \in \overline{\Omega}$.

3.4 Um Problema Auxiliar

Para cada $\epsilon > 0$ fixado, considere o seguinte problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \dfrac{1}{(\epsilon + |u|)^\gamma}, & \Omega \\ u & = & 0, & \partial\Omega. \end{array}\right. \qquad (P)_\epsilon$$

Um importante fato que temos a destacar é que cada solução clássica u_ϵ do problema $(P)_\epsilon$ é estritamente positiva em Ω, isto é,

$$u_\epsilon(x) > 0, \ \forall x \in \Omega.$$

De fato, sendo u_ϵ solução do problema $(P)_\epsilon$, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon &= \dfrac{1}{(\epsilon + |u_\epsilon|)^\gamma}, & \Omega \\ u_\epsilon &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$\Delta u_\epsilon(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Consequentemente, a função u_ϵ é super-harmônica1 e pelo Princípio do Máximo temos

$$u_\epsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

pois,

$$u_\epsilon(x) \geq \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u = 0$$

e portanto,

$$u_\epsilon(x) \geq 0 \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Afirmação:

$$u_\epsilon(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

De fato, pois caso contrário, existiria

$$x_0 \in \Omega \quad tal \quad que \quad u_\epsilon(x_0) = 0.$$

Por outro lado,

$$u_\epsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Portanto, pelo Teorema 2.6 o mínimo é atingido em $\partial\Omega$ e com isso

$$u_\epsilon(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \ .$$

Recordamos que u_ϵ é uma solução fraca de $(P)_\epsilon$ se $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ e satisfaz a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{(\epsilon + u_\epsilon)^\gamma} dx, \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Vamos agora fixar algumas notações:

No que segue-se, vamos denotar por $\beta = \{e_1, e_2, e_3, ...e_n, ...\}$ uma base Hilbertiana para $H_0^1(\Omega)$ e fixar a notação $\|.\| : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ para a norma usual de $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ vamos fixar

$$V_m = [e_1, e_2, e_3, ..., e_m],$$

o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelos vetores $e_1, e_2, e_3, ..., e_m$. Veja que, se $v \in V_m$ temos que

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \ \ com \ \ \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Note que V_m é isomorfo ao $\mathbb{R}^m$, pois basta considerar a transformação linear $F : V_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $F(v) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m)$, onde $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$.

Observe que

$$\|v\| = |\alpha| \ \text{ com } \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m).$$

Considere agora a função $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $f(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), ..., f_m(\alpha))$, onde

$$f_j(\alpha) = \int_\Omega \nabla v \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx.$$

Aqui estamos identificando o vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m)$ com a função $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$.

Afirmação:

$(I) f$ é contínua,

(II)existe $R > 0$ tal que $\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0$, para $|\alpha| = R > 0$.

Análise de (I):

Devemos mostrar que

$$\alpha_n \longrightarrow \alpha_0 \ \text{ em } \mathbb{R}^m \text{ implica que} f(\alpha_n) \longrightarrow f(\alpha_0) \ \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Para α_n e α_0 vamos usar as funções $v_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n_i} e_i$ e $v_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{0_i} e_i$, onde $\alpha_n = (\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \alpha_{n_3}, \ldots, \alpha_{n_m})$ e $\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2}, \alpha_{0_3}, \ldots, \alpha_{0_m})$.

Observe que $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ implica que $\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha_{0_k}$ para cada k fixado e $v_n \rightarrow v_0$ em $H_0^1(\Omega)$.

De acordo com a definição de f_j temos que

$$f_j(\alpha_n) = \int_\Omega \nabla v_n \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_n|)^\gamma} dx$$

e

$$f_j(\alpha_0) = \int_\Omega \nabla v_0 \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_0|)^\gamma} dx.$$

Desde que,

$$v_n \to v_0 \;\; em \;\; H_0^1(\Omega) \tag{3.26}$$

por propriedade de produto interno

$$\langle v_n, e_j\rangle \to \langle v_0, e_j\rangle.$$

Logo

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla e_j dx \to \int_\Omega \nabla v_0 \nabla e_j dx \; em \; \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

Agora, vamos mostrar que

$$\int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_n|)^\gamma} dx \to \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_0|)^\gamma} dx.$$

Segue de (3.26) e do fato da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ser contínua que

$$v_n \;\; \longrightarrow \;\; v_0 \;\; em \;\; L^2(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema $B.7$, existe uma subsequência $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ tal que $\{v_{n_k}\} \subset L^2(\Omega)$ que satisfaz

$I)$ $v_{n_k}(x) \to v_0(x)$ q.t.p. em Ω,

$II)$ $|v_{n_k}(x)| \leq h(x), \; \forall \; k \; q.t.p.$ em Ω com $h \in L^2(\Omega)$.

Sendo $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ temos que $h \in L^1(\Omega)$.

Definindo as funções

$$f_{n_k}(x) = \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^\gamma} \;\; e \;\; f(x) = \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_0(x)|)^\gamma}$$

e usando o fato que $v_{n_k}(x) \to v_0(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega$ obtemos

$$\frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^\gamma} \;\; \to \;\; \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_0(x)|)^\gamma} \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega,$$

ou seja,

$$f_{n_k}(x) \;\; \to \;\; f(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega.$$

Veja que, sendo

$$\frac{|e_j(x)|}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^\gamma} \leq \frac{|e_j(x)|}{\epsilon^\gamma}.$$

Por outro lado,

$$\Big|\frac{e_j(x)}{(\epsilon+|v_{n_k}(x)|)^\gamma}\Big| = \frac{|e_j(x)|}{(\epsilon+|v_{n_k}(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|e_j(x)| = h(x), \ \forall \ k.$$

Assim,

$$|f_{n_k}(x)| \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|e_j(x)| = h(x), \ \forall \ k.$$

Logo,

$$\frac{1}{\epsilon^\gamma}|e_j| = h \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$\int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon+|v_{n_k}|)^\gamma}dx \to \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon+|v_0|)^\gamma}dx. \tag{3.28}$$

Desde que a convergência em (3.27) é valida para toda sequência $\{v_n\}$, a mesma também se verifica para a subsequência $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$. Logo, de (3.27) e (3.28) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_{n_k}\nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon+|v_{n_k}|)^\gamma}dx \to \int_\Omega \nabla v_0 \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon+|v_0|)^\gamma}dx,$$

isto é,

$$f_j(\alpha_{n_k}) \to f_j(\alpha_0), \forall j = 1,2,3,\ldots,m$$

e desta forma

$$f(\alpha_{n_k}) \to f(\alpha_0) \ \ em \ \ \mathbb{R}^m.$$

Para concluírmos a demonstração do item (I), devemos mostrar que

$$f(\alpha_n) \to f(\alpha_0) \ \ em \ \ \mathbb{R}^m. \tag{3.29}$$

Suponhamos por contradição que o limite em (3.29) não ocorre, então existe $\epsilon_0 > 0$ e $\{f(\alpha_{n_j})\} \subset \{f(\alpha_n)\}$ tal que

$$|f(\alpha_{n_j}) - f(\alpha_n)|_{\mathbb{R}^m} \geq \epsilon_0, \ \forall \ n_j. \tag{3.30}$$

Usando $\{f(\alpha_{n_j})\}$ no lugar de $\{f(\alpha_n)\}$, na primeira parte da demonstração, existe $\{f(\alpha_{n_{j_p}})\} \subset \{f(\alpha_{n_j})\}$ tal que

$$f(\alpha_{n_{j_p}}) \to f(\alpha_0) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^m.$$

Assim, existe $n_{j_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(\alpha_{n_{j_p}}) - f(\alpha_0)| < \frac{\epsilon_0}{2}, \ \forall \ n_{j_p} \geq n_{j_0},$$

que é um absurdo com (3.30). Portanto, devemos ter

$$f(\alpha_n) \to f(\alpha_0) \ \ em \ \ \mathbb{R}^m.$$

Mostrando assim, a continuidade da função f em $\mathbb{R}^m$.

Análise de (II)**:**

Observe que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = f_1(\alpha)\alpha_1 + f_2(\alpha)\alpha_2 + f_3(\alpha)\alpha_3 + \ldots + f_m(\alpha)\alpha_m,$$

ou seja,

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i(\alpha)\alpha_i.$$

Portanto

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big[\int_\Omega \nabla v \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \Big]$$

implicando

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{j=1}^{m} \Big[\alpha_j \int_\Omega \nabla v \nabla e_j dx - \alpha_j \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \Big]$$

com isso,

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \|v\|^2 - \int_\Omega \frac{v}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx.$$

Sendo

$$- \int_\Omega \frac{|v|}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \geq -\frac{1}{\epsilon^\gamma} \int_\Omega |v| dx,$$

temos

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq \|v\|^2 - \frac{1}{\epsilon^\gamma} \int_\Omega |v| dx$$

mostrando que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq \|v\|^2 - \frac{1}{\epsilon^\gamma} \|v\|_{L^1(\Omega)}. \tag{3.31}$$

Usando o fato que a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ é contínua, temos que

$$|v|_{L^1(\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.32}$$

Fazendo a substituição de (3.32) em (3.31), temos que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq \|v\|^2 - \frac{c_1}{\epsilon^\gamma} \|v\|. \tag{3.33}$$

Temos por (3.33) que $\|v\| = |\alpha|$, logo

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq |\alpha|^2 - c_\epsilon |\alpha|, \ \text{onde} \ \ c_\epsilon = \frac{c_1}{\epsilon^\gamma}.$$

Fixando $R > 0$ tal que

$$R^2 - c_\epsilon R > 0$$

concluímos que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0, \quad \text{para } |\alpha| = R.$$

Provando desta forma o item (II).

Portanto, pelo Lema Fundamental, existe $z_m \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(z_m) = 0$ e $|z_m| \leq R$. Logo,

$$f_j(z_m) = 0, \;\; \forall j = 1, 2, 3, \ldots m,$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla e_j dx - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} dx = 0, \forall j = 1, 2, 3, \ldots, m, \;\; \forall e_j \in V_m, \tag{3.34}$$

$$\text{com } \; z_m = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_m), \;\; v_m = \sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i \;\; e \;\; \|v_m\| = |z_m| \leq R.$$

É imediato observar que de (3.34) temos a igualdade

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi dx - \int_\Omega \frac{\psi}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} dx = 0, \;\; \forall \;\; \psi \in V_m, \;\; \|v_m\| \leq R.$$

Fixando

$$\Phi \in H_0^1(\Omega) \;\; \text{temos que} \;\; \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i,$$

com

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty.$$

Desde que

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

temos que

$$\Phi = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i.$$

Considerando

$$\Psi_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \in V_m,$$

concluimos que

$$\Phi = \lim_{m \to \infty} \Psi_m \;\; \text{em} \;\; H_0^1(\Omega).$$

Observe que $V_m \subseteq V_k$, para $m \leq k$. No que segue, vamos fixar m e considerar $k > m$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla v_k \nabla \Psi_m dx - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} dx = 0, \ \ \forall k > m, \ \text{ pois } \ \Psi_m \in V_k. \tag{3.35}$$

Passando ao limite quando $k \to \infty$ na igualdade (3.35) e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla v_k \nabla \Psi_m dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx \tag{3.36}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} dx \to \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx, \tag{3.37}$$

obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx = 0, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.38}$$

Vamos provar a convergência (3.36).

Temos que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, pois é um espaço de Hilbert, toda sequência limitada $\{v_k\} \subseteq H_0^1(\Omega)$ admite uma subsequência $\{v_{k_j}\} \subseteq \{v_k\}$ que converge fraco v em $H_0^1(\Omega)$. Em símbolos,

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \ \ em \ \ H_0^1(\Omega).$$

Considerando a aplicação

$$\begin{array}{rcl} F \ : \ H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ w & \mapsto & F(w) = \displaystyle\int_\Omega \nabla w \nabla \Psi_m dx \end{array}$$

temos que, $F \in (H_0^1(\Omega))'$. De acordo com a definição de convergência fraca temos

$$F(v_{k_j}) \ \to \ F(v) \ \ em \ \ \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v_{k_j} \nabla \Psi_m dx \ \ \to \ \ \int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx \ \ em \ \ \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

Vamos provar a convergência (3.37).

Defina as seguintes aplicações

$$f_{k_j}(x) = \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v_{k_j}(x)|)^\gamma} \ \ e \ \ f(x) = \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma}.$$

Sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo e $\{v_k\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$, existem uma subsequência $\{v_{k_j}\} \subset \{v_k\}$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \;\; em \;\; H_0^1(\Omega).$$

Desde que, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta temos que

$$v_{k_j} \;\; \to \;\; v \;\; em \;\; L^2(\Omega).$$

Assim, existe uma subsequência $\{v_{k_{j_p}}\} \subset L^2(\Omega)$ tal que $\{v_{k_{j_p}}\} \subset \{v_k\}$ e satisfaz:

$I)$ $v_{k_{j_p}}(x) \;\; \to \;\; v(x)$ q.t.p. em Ω,

$II)$ $|v_{k_{j_p}}(x)| \leq h(x)$, q.t.p. em Ω com $h \in L^2(\Omega)$.

Sendo Ω um domínio limitado tem-se $h \in L^1(\Omega)$.

Logo,

$$\frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma} \;\; \to \;\; \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \;\text{ q.t.p. em } \Omega,$$

ou seja,

$$f_{k_{j_p}}(x) \;\; \to \;\; f(x) \;\; q.t.p. \;\text{ em } \Omega.$$

Veja que

$$|f_{k_{j_p}}(x)| = \Big|\frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma}\Big| = \frac{|\Psi_m(x)|}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma}.$$

Sendo

$$\frac{|\Psi_m(x)|}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|\Psi_m(x)|,$$

encontramos

$$|f_{k_{j_p}}(x)| \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|\Psi_m(x)| = g(x).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema $B.1$) concluimos que

$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}|)^\gamma}dx \to \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx. \tag{3.40}$$

Desde que, a igualdade (3.37) é válida para toda sequência $\{v_k\}$, em particular vale para a subsequência $\{v_{k_{j_p}}\} \subset \{v_{k_j}\}$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v_{k_{j_p}} \nabla \Psi_m dx - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}|)^\gamma}dx = 0. \tag{3.41}$$

Portanto, passando ao limite quando $k_{j_p} \to \infty$ na igualdade (3.41) e, usando os limites (3.39) e (3.40) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx = 0, \;\; \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.42}$$

Isto mostra, a igualdade (3.38).

Agora, passando ao limite quando $m \to \infty$ na igualdade (3.42) e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla \Phi dx \tag{3.43}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \to \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx, \tag{3.44}$$

obtemos a igualdade

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Phi dx - \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx = 0, \forall \Phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.45}$$

Prova da convergência (3.43).

Temos que $\Psi_m \to \Phi$ em $H_0^1(\Omega)$, que implica

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla \Phi dx.$$

Prova da convergência (3.44).

Desde que

$$\Psi_m \to \Phi \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

então

$$\Psi_m \to \Phi \text{ em } L^2(\Omega).$$

Em consequência disso, existe uma subsequência $\{\Psi_{m_j}\} \subset L^2(\Omega)$ tal que $\{\Psi_{m_j}\} \subset \{\Psi_m\}$ e verifica:

$(I)\Psi_{m_j}(x) \to \Phi(x)$ q.t.p. em Ω,

$(II)|\Psi_{m_j}(x)| \leq h(x), \forall j$ q.t.p. em Ω com $h \in L^2(\Omega)$.

Sendo $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, *então* $h \in L^1(\Omega)$. Definindo

$$f_{m_j}(x) = \frac{\Psi_{m_j}(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \quad e \quad f(x) = \frac{\Phi(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma}$$

e tendo em vista que

$$\Psi_{m_j}(x) \to \Phi(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

temos que

$$\frac{\Psi_{m_j}(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \to \frac{\Phi(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

isto é,

$$f_{m_j}(x) \to f(x) \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega.$$

Desde que

$$|\Psi_{m_j}(x)| \leq h(x) \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega \;\forall m_j \in \mathbb{N},$$

temos que

$$\frac{|\Psi_{m_j}(x)|}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}|\Psi_{m_j}(x)| \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma}h(x), \quad \forall m_j.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluimos que

$$\lim_{m_j \to \infty} \int_\Omega f_{m_j}(x)dx = \int_\Omega f(x)dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \frac{\Psi_{m_j}}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx \to \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx. \tag{3.46}$$

Visto que a igualdade (3.43) é válida para toda sequência $\{\Psi_m\}$, também é verdadeira para uma subsequência $\{\Psi_{m_j}\} \subset \{\Psi_m\}$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_{m_j} dx - \int_\Omega \frac{\Psi_{m_j}}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx = 0, \;\; \forall m_j \in \mathbb{N}. \tag{3.47}$$

Passando ao limite quando $m_j \to \infty$ em (3.47) e usando os limites (3.43) e (3.46) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Phi dx - \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma}dx = 0, \;\; \forall \Phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.48}$$

Portanto, a função v é uma solução fraca do problema $(P)_\epsilon$, isto é,

$$(P)_\epsilon \begin{cases} -\Delta v &= \dfrac{1}{(\epsilon + |v|)^\gamma}, \quad \Omega \\ \quad v &> \quad 0, \qquad \Omega \\ \quad v &= \quad 0, \qquad \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostramos assim, que dado $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(P)_\epsilon \begin{cases} -\Delta u_\epsilon &= \dfrac{1}{(\epsilon + u_\epsilon)^\gamma}, \quad \Omega \\ \quad u_\epsilon &> \quad 0, \qquad \Omega \\ \quad u_\epsilon &= \quad 0, \qquad \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue-se, vamos considerar $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$, $u_{\epsilon_n} = u_n$ e trabalhar com o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \dfrac{1}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma}, & \Omega \\ u_n > 0, & \Omega \\ u_n = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela teoria da regularidade ver ([1]) é possível mostrar que

$$u_n \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega).$$

Segue da definição de solução fraca que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \Phi dx = \int_\Omega \frac{\Phi}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma} dx, \quad \forall \Phi \in H_0^1(\Omega).$$

Escolhendo $\Phi = u_n$ deduzimos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n dx = \int_\Omega \frac{u_n}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma} dx,$$

e portanto,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \int_\Omega \frac{u_n}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma} dx.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega u_n^{1-\gamma} dx \tag{3.49}$$

e assim,

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq |\Omega|^\gamma \|u_n\|^{1-\gamma}_{L^1(\Omega)}. \tag{3.50}$$

Usando o fato que a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ é contínua, existe $c > 0$ tal que

$$\|u_n\|^2 \leq c\|u_n\|^{1-\gamma}.$$

Disso concluimos que existe um $k > 0$ satisfazendo $\|u_n\| \leq k$, mostrando que u_n é limitada.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, existe uma subsequência $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Denotando $u_{n_j} = v_j$, segue-se que

$$\begin{cases} -\Delta v_j &= \dfrac{1}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma}, & \Omega \\ v_j &> 0, & \Omega \\ v_j &= 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

e portanto,

$$\begin{cases} -\Delta(v_j + \frac{1}{n_j}) &= \dfrac{1}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma}, & \Omega \\ v_j &> 0, & \Omega \\ v_j &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Definindo

$$\Psi_j = v_j + \frac{1}{n_j}$$

tem-se que

$$\begin{cases} -\Delta \Psi_j &= \dfrac{1}{\Psi_j^\gamma}, & \Omega \\ \Psi_j &> 0, & \Omega \\ \Psi_j &> 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o Teorema 3.4,

$$\Psi_j(x) \geq \varphi_1(x), \forall x \in \overline{\Omega}, \ \ \forall j \in \mathbb{N}, \tag{3.51}$$

onde φ_1 é uma autofunção positiva de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ associada ao primeiro autovalor λ_1.

De acordo com a desigualdade (3.51) temos que

$$v_j(x) + \frac{1}{n_j} \geq \varphi_1(x), \forall x \in \overline{\Omega}, \ \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.52}$$

Logo, passando ao limite quando $j \ \to \ \infty$, na desigualdade (3.52), obtemos

$$\lim_{j\to\infty} \left(v_j(x) + \frac{1}{n_j} \right) \geq \lim_{n_j\to\infty} \varphi_1(x)$$

ou seja,

$$\lim_{j\to\infty} v_j(x) + \lim_{n_j\to\infty} \frac{1}{n_j} \geq \varphi_1(x).$$

Assim,

$$u(x) \geq \varphi_1(x) > 0 \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega. \tag{3.53}$$

Portanto, $\quad med(\{x \in \Omega; u(x) = 0\}) = 0.$

Segue da definição de solução fraca que

$$\int_\Omega \nabla v_j \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{(\frac{1}{n} + v_j)^\gamma} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.54}$$

Logo passando ao limite quando $j \to \infty$, na igualdade (3.54), e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla v_j \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \tag{3.55}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx \to \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx \tag{3.56}$$

obtemos a igualdade,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.57}$$

Prova da convergência (3.55).

Desde que

$$v_j \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

pela análise feita anteriormente temos que

$$\int_\Omega \nabla v_j \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Prova da convergência (3.56).

Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave e sendo $K \subset \Omega$ o suporte de φ temos a igualdade

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx = \int_K \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx.$$

Desde que,

$$\Psi_j(x) = v_j(x) + \frac{1}{n_j} \geq \varphi_1(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

vale a desigualdade,

$$\left| \frac{\varphi}{(v_j + \frac{1}{n_j})^\gamma} \right| = \frac{|\varphi|}{(v_j + \frac{1}{n_j})^\gamma} \leq \frac{|\varphi|}{\varphi_1^\gamma}, \quad \forall j.$$

Sendo φ_1 uma autofunção positiva associada a λ_1 temos que $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega})$ (*ver* [8]). Assim, existe $z \in K$ tal que

$$m_0 \quad = \quad \varphi_1(z) \quad = \quad \min_{x \in K} \varphi_1(x).$$

Logo, por definição de mínimo temos que

$$\varphi_1(x) \geq m_0, \quad \forall x \in K.$$

Portanto,

$$\Big|\frac{\varphi}{(v_j + \frac{1}{n_j})^\gamma}\Big| \leq \frac{|\varphi|}{{m_0}^\gamma} = h \, \in \, L^1(K).$$

Além disso,

$$\frac{\varphi(x)}{(v_j(x) + \frac{1}{n_j})^\gamma} \to \frac{\varphi(x)}{u(x)^\gamma}, \quad q.t.p. \text{ em } K.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluimos que

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx = \int_K \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx \to \int_K \frac{\varphi}{u^\gamma} dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx,$$

justificando assim a igualdade (3.57), ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.58}$$

Desde que,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\|_{H^1(\Omega)}},$$

dada $\Psi \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|\varphi_n - \Psi\|_{H^1(\Omega)} \;\; \to \;\; 0, \text{ quando n } \;\to\;\; \infty.$$

Afirmação: Dada $\Psi \in H_0^1(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Psi dx = \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx, \tag{3.59}$$

isto é, u é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u &> 0, & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

De fato, fixado $\Psi \in H_0^1(\Omega)$ considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ com

$$\|\varphi_n - \Psi\|_{H^1(\Omega)} \;\; \to \;\; 0, \text{ quando n } \;\to\;\; \infty.$$

Segue da igualdade (3.58)

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_n dx = \int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx, \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.60}$$

Passando ao limite quando $n \ \to \ \infty$ na igualdade (3.60) e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_n dx \ \to \ \int_\Omega \nabla u \nabla \Psi dx \tag{3.61}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx \ \to \ \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx \tag{3.62}$$

encontramos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Psi dx = \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx, \forall \ \Psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.63}$$

Vamos provar (3.62).

Veja que,

$$\Big| \int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} \Big| = \Big| \int_\Omega \frac{\varphi_n - \Psi}{u^\gamma} dx \Big| \leq \int_\Omega \frac{|\varphi_n - \Psi|}{u^\gamma} dx.$$

Sendo

$$u(x) \geq \varphi_1(x) > 0, \ \ \forall \ x \in \overline{\Omega},$$

conforme (3.53) encontramos

$$\Big| \int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} \Big| \leq \int_\Omega \frac{|\varphi_n - \Psi|}{{\varphi_1}^\gamma} dx. \tag{3.64}$$

Tendo em vista que, $|\varphi_n - \Psi| \in H_0^1(\Omega)$, segue da desigualdade de **Hardy-Sobolev** (ver Teorema $B.6$) que existe um $c > 0$ tal que

$$\Big| \int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} \Big| \leq c \| \ |\varphi_n - \Psi| \ \| = c \|\varphi_n - \Psi\| \ \to \ 0 \tag{3.65}$$

e portanto,

$$\int_\Omega \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx \ \to \ \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx. \tag{3.66}$$

Provando desta forma, a afirmação, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Psi dx = \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx, \ \ \forall \ \Psi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.67}$$

e mostrando a existência de solução fraca para o **problema singular (P).**

3.4.1 Unicidade de Solução para o Problema Singular

Suponha que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u & = & \dfrac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u & > & 0, & \Omega \\ u & = & 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

tenha duas soluções u_1 e u_2. Vamos mostrar que $u_1 \equiv u_2$ em Ω. Por hipótese temos que u_1 e u_2 são soluções do problema (P), assim u_1 e u_2 satisfazem

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \int_\Omega \frac{\varphi}{{u_1}^\gamma} dx, \ \ \forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.68}$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla \Psi dx = \int_\Omega \frac{\Psi}{{u_2}^\gamma} dx, \ \ \forall \ \Psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.69}$$

Fixando

$$\varphi = \Psi = u_1 - u_2$$

obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{{u_1}^\gamma} dx \tag{3.70}$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{{u_2}^\gamma} dx. \tag{3.71}$$

Portanto

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) dx - \int_\Omega \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{{u_1}^\gamma} dx - \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{{u_2}^\gamma} dx, \tag{3.72}$$

e com isso,

$$\int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^2 dx = \int_\Omega \Big[\frac{1}{{u_1}^\gamma} - \frac{1}{{u_2}^\gamma}\Big](u_1 - u_2) dx. \tag{3.73}$$

Desde que,

$$\int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^2 dx = \|u_1 - u_2\|^2$$

segue-se da igualdade (3.73)

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \int_\Omega \Big[\frac{1}{{u_1}^\gamma} - \frac{1}{{u_2}^\gamma}\Big](u_1 - u_2) dx. \tag{3.74}$$

Observando agora que vale a desigualdade

$$\Big[\frac{1}{{u_1}^\gamma} - \frac{1}{{u_2}^\gamma}\Big](u_1 - u_2) \leq 0, \ \ \forall \ x \in \Omega, \tag{3.75}$$

segue-se de (3.74) que

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0.$$

Portanto,

$$u_1 \equiv u_2.$$

3.4.2 Regularidade da Solução.

Considerando a função

$$\begin{array}{rccc} f: & (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t) = \dfrac{1}{t^\gamma}, \end{array}$$

observamos que, para cada $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto,

$$0 < f(u(x)) = \frac{1}{(u(x))^\gamma} \leq \frac{1}{(\varphi_1(x))^\gamma} \leq \frac{1}{(m_0)^\gamma} = c_k, \text{ q.t.p. em } K,$$

pois

$$u(x) \geq \varphi_1(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } m_0 = \min_{x \in K} \varphi_1(x).$$

Usando o Teorema da Regularidade (ver Teorema $B.20$), temos que $u \in C^2(\Omega)$ e

$$\begin{cases} -\Delta u & = & \dfrac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u & > & 0, & \Omega. \end{cases}$$

Apêndice A

Resultados de Análise em $\mathbb{R}^N$.

Neste apêndice vamos recordar algumas definições e enunciar os principais resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$ que foram utilizados nesta dissertação.

Teorema A.1 *(Teorema da Mudança de Variáveis)*(Ver[19]) *Sejam $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $U, V \in \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ um compacto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))|deth'(x)|dx.$$

Teorema A.2 *(Teorema da Aplicação Inversa)*(Ver[19]) *Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k $(k \geq 1)$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(a, \delta) \subset U$ tal que a restrição $f_{|B}$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(a)$.*

Teorema A.3 *(Teorema de Weirstrass)*(Ver[19]) *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^N$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema A.4 *(Teorema de Borel-Lebesgue)*(Ver[19]) *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto(isto é, limitado e fechado). Toda cobertura aberta de $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ admite uma subcobertura finita $K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \ldots \cup A_{\lambda_i}$.*

Teorema A.5 (Ver[19]) *Se $K \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto compacto e $F \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto fechado, então existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $d(K, F) = |x_0 - y_0|$. Em particular, se $K \cap F = \emptyset$, então $d(K, F) > 0$.*

Teorema A.6 (Ver[17]) *Seja $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}^N$ um caminho com derivada integrável. Então,*

$$f(a + h) - f(a) = \int_a^{a+h} f'(t)dt = h \int_0^1 f'(a + th)dt.$$

Teorema A.7 *(Teorema do Valor Médio)*$(Ver[19])$ *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}^N$ *um caminho contínuo, diferenciável no intervalo aberto* (a,b). *Se* $|f'(t)|\leq M$ *para todo* $t\in(a,b)$, *então*

$$|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|.$$

Teorema A.8 *(Desigualdade do Valor Médio)*$(Ver[19])$ *Dado* $U\subset\mathbb{R}^m$ *um aberto, seja* $f:U\to\mathbb{R}^N$ *diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto (a,a+v) e tal que sua restrição ao segmento fechado* $[a,a+v]\subset U$ *seja contínua. Se* $|f'(x)|\leq M$ *para todo* $x\in(a,a+v)$ *então,* $|f(a+v)-f(a)|\leq M|v|$.

Teorema A.9 $(Ver[19])$ *Toda aplicação contínua* $f:K\to\mathbb{R}^N$, *definida num compacto* $K\subset\mathbb{R}^m$ *é uniformemente contínua.*

Teorema A.10 $(Ver[19])$ *Seja* $f:X\times K\to\mathbb{R}^N$ *contínua, onde* K *é compacto. Fixemos* $x_0\in X$. *Para todo* $\epsilon{>}0$, *existe* $\delta{>}0$ *tal que*
$x\in X,\ |x-x_0|<\delta\Rightarrow\ |f(x,\alpha)-f(x_0,\alpha)|<\epsilon$, *seja qual for* $\alpha\in K$.

Teorema A.11 *(Teorema de Aproximação de Weierstrass)*$(Ver[18])$ *Dada uma função contínua* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, *existe uma sequência de polinômios* p_n *tais que* $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=f$ *uniformemente em* $[a,b]$.

Teorema A.12 *(Teorema de Extensão de Tietze)*$(Ver[18])$ *Dada uma função real contínua* $f:X\to\mathbb{R}$, *definida num subconjunto fechado de* $X\subset\mathbb{R}^m$, *existe uma função* $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ *contínua tal que* $F_{|X}=f$.

Teorema A.13 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)* $(Ver[19])$ *Para quaisquer* $x,y\in\mathbb{R}^N$ *tem-se* $|\langle x,y\rangle|\leq|x||y|$. *Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores* x,y *é um múltiplo escalar do outro.*

Lema A.14 (Teorema da Divergência.)$(Ver[13])$ *Sejam* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ *um domínio cuja fronteira* $(\partial\Omega)$ *é uma união finita de curvas suaves. Seja* $F:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^2$ *um campo vetorial de classe* C^1 *em* $\overline{\Omega}$. *Então,*

$$\int_{\overline{\Omega}}\nabla.Fdxdy=\int_{\partial\Omega}F.\eta dS,$$

onde η *é a normal externa unitária à* $\partial\Omega$.

Teorema A.15 *(As Identidades de Green)*$(Ver[13])$ *Seja* $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ *um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam* $u,v\in C^2(\overline{\Omega})$. *Então valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\overline{\Omega}}(v\Delta u+\nabla v\nabla u)dxdy=\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\eta}ds, \tag{A.1}$$

e

$$\int_{\overline{\Omega}}(v\Delta u-u\nabla v)dxdy=\int_{\partial\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial v}{\partial\eta})ds, \tag{A.2}$$

onde $\frac{\partial}{\partial\eta}$ *é a derivada direcional na direção da normal unitária externa* $\widehat{n}$.

Teorema A.16 $(Ver[16])$ *Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$. Então,*

$$x_n \to x \Leftrightarrow \text{ dada } (x_{n_j}) \subset (x_n),\ \exists\, (x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j}) \text{ com } x_{n_{j_k}} \to x.$$

Lema A.17 $(Ver[5])$ *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : B_2(0) \to X$, dada por $\Phi(x) = x + \Psi(x)$, onde Ψ é $\alpha-$ uma contração $(0 \leq \alpha < 1)$ e verifica $\Psi(0) = 0$. Então,*
(i) $\Phi(B_r(0)) \supset B_{r(1-\alpha)}(0)$.
(ii) Φ é injetiva.

Lema A.18 $(Ver[5])$ *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ e $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com suporte compacto. Se $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $suptv \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$, então existe $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $suptu \subset \Omega$ e $divu(x) = J_\varphi(x)div(v(\varphi(x)))$.*

Lema A.19 $(Ver[5])$ *Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com suporte K compacto e seja $\gamma \in C([0,1], \mathbb{R}^N)$. Se $\overline{convK} - \gamma(t) \subset \Theta$, $\forall\, t \in [0,1]$, onde Θ é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ fixado, tem-se que $f(x+\gamma(0)) - f(x+\gamma(1)) = divv(x)$, onde $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $suptv \subset \Theta$.*

Apêndice B

Resultados sobre os Espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração

Neste apêndice vamos apresentar alguns resultados dos Espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração que foram utilizados nesta dissertação.

Teorema B.1 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*(Ver[6]) *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções integráveis, as quais convergem em quase toda parte para uma função mensurável* f *a valores reais. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g \ \forall \ n$*, então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema B.2 *(Lema de Fatou)*(Ver[6]) *Seja* $(f_n) \subset M^+(X, \chi)$*, então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Definição B.3 (Ver[6]) *Se* m^* *é a medida exterior definida para todos os subconjuntos de* $\mathbb{R}^N$ *, então a* $\sigma-$*álgebra* $\mathfrak{L}$ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}^N$ *que satisfaz a condição de Carathéodory, isto é,*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \ \forall \ A \subseteq \mathbb{R}^N$$

é chamada a $\sigma-$*álgebra de Lebesgue de* $\mathbb{R}^N$*. A restrição* m*, de* m^* *ao conjunto* $\mathfrak{L}$ *é chamada medida de Lebesgue em* $\mathbb{R}^N$*.*

Teorema B.4 *(Desigualdade de Hölder)*(Ver[6]) *Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, onde* $p \geq 1$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e* $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Teorema B.5 *(Desigualdade de Young)*(Ver[6]) *Considere* p *e* q *satisfazendo* $1 < p < \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* a, b *são números reais não negativos, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{B.1}$$

a igualdade só ocorre se, e somente se, $a^p = b^q$.

Teorema B.6 *(Desigualdade de Hardy-Sobolev)*(Ver[10] *pág* 55) *Se* $u \in H_0^1(\Omega)$, *então* $\dfrac{u}{\varphi_1^\tau} \in L^q(\Omega)$, *onde* $q^{-1} = 2^{-1} - (1-\tau)N^{-1}$ *com* $0 \leq \tau \leq 1$, *e existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$\left\| \frac{u}{\varphi_1^\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq c \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \ \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega),$$

onde φ_1 *é uma autofunção positiva de* $-\Delta$ *em* $H_0^1(\Omega)$ *associada ao primeiro autovalor* λ_1.

Teorema B.7 (Ver[8]) *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *tais que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Então, existe uma subsequência* $\{f_{n_k}\}$ *tal que*
(I) $f_{n_k} \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω
(II) $|f_{n_k}| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω, $\forall\, k$, *com* $h \in L^p$.

Definição B.8 (Ver[8])*(Convergência Forte) Seja* X *um espaço vetorial normado e* $\{x_n\} \subset X$. *Dizemos que* x_n *converge forte em* X *se existe* $x \in X$ *com* $\|x_n - x\| \to 0$, *quando* $n \to \infty$. *Neste caso,* x *é o limite de* x_n *em* X.

Definição B.9 (Ver[8])*(Convergência Fraca) Seja* X *um espaço vetorial normado e* $x_n \in X$. *Dizemos que* x_n *converge fraco em* X, *se existe* $x \in X$ *verificando:*

$$\forall \ f \in X'; \ f(x_n) \to f(x) \ \text{em } \mathbb{R}.$$

Neste caso, x *é chamado o limite fraco de* x_n *em* X, *e denotamos por* $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema B.10 (Ver[8]) *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência fracamente convergente num espaço vetorial normado, isto é, existe* $x \in X$ *tal que*

$$x_n \rightharpoonup x \ \text{em } X.$$

Então;
a) O limite fraco x *de* $\{x_n\}$ *é único,*
b) Toda subsequência $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ *converge para* x,
c) A sequência $\{x_n\}$ *é limitada.*

Teorema B.11 $(Ver[8])$ *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada. Então, existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ que converge fracamente em X, isto é, existe $x \in X$ tal que*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \ em \ X.$$

Definição B.12 $(Ver[8])$*(Convergência Fraca - $\star$) Dizemos que $\{f_n\} \subset X'$ converge fraco - $\star$, se existir $f \in X'$ tal que*

$$\forall x \in X; \ f_n(x) \ \rightarrow \ f(x) \ \ em \ \mathbb{R}.$$

Notação: $\quad f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X'.

Teorema B.13 $(Ver[8])$ *Seja $\{f_n\} \subset X'$. Então;*

i) $f_n \rightarrow f$ *em* $X' \ \Rightarrow \ f_n \rightharpoonup f$ *em* X'

ii) $f_n \rightharpoonup f$ *em* $X' \ \Rightarrow \ f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* X'.

iii) $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* X', *então* $\|f_n\|$ *limitada e* $\|f\| \leq \liminf_{n\rightarrow\infty} \|f_n\|$.

iv) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *e* $x_n \rightarrow x$, *então* $f_n(x) \rightarrow f(x)$ *em* $\mathbb{R}$.

Definição B.14 *(Imersão Contínua)*$(Ver[2])$ *Dizemos que o espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso continuamente no espaço $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*
i)X for subespaço vetorial de Y,
ii) A aplicação identidade

$$\begin{array}{rcccl} i & : & X & \rightarrow & Y \\ & & x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \ \forall \ x \in X$.

Teorema B.15 *(Imersões de Sobolev)*$(Ver[2])$ *As seguintes imersões são contínuas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{lcccc} L^s(\Omega) & ; & 1 \leq s \leq 2^* = \frac{2N}{N-2} & para & N \geq 3 \\ L^s(\Omega) & ; & 1 \leq s < \infty & para & N = 1 \quad ou \quad N = 2. \end{array} \right.$$

Definição B.16 *(Operador Linear Compacto)*$(Ver[16])$ *Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é dito compacto, se toda sequência limitada $\{x_n\} \subset X$ é levada em uma sequência $(y_n = T(x_n))$ que admite uma subsequência convergente em Y.*

Definição B.17 *(Imersão Compacta)*$(Ver[2])$ *Dizemos que o espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso compactamente no espaço $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

$$\begin{array}{rcccl} i & : & X & \rightarrow & Y \\ & & x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é um operador linear compacto.

Teorema B.18 *(Teorema da Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov)*(Ver[2]) *Sendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*, as seguintes imersões são compactas:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) & ; \quad 1 \leq s < 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad para \quad N \geq 3 \\ L^s(\Omega) & ; \quad 1 \leq s < \infty \quad para \quad N = 1 \quad ou \quad N = 2. \end{cases}$$

Teorema B.19 *(Desigualdade de Poincaré)*(Ver[2]) *Seja* Ω *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^N$*. Então existe uma constante* $C = C(\Omega, p)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot \Big(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}, \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ com \ 1 \leq p < \infty.$$

Teorema B.20 *(Teorema de Regularidade* $(Ver[1])$*) Seja* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *uma função de classe* $C^\infty((0, \infty), (0, \infty))$*. Se* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é uma função positiva q.t.p. em* Ω*, que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f(u) \cdot \varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

e para cada $K \subset\subset \Omega$*, existe* $c_k > 0$ *tal que*

$$|f(u(x))| \leq c_k \ q.t.p. \ em \ K$$

então,

$$u \ \in \ C^2(\Omega).$$

Teorema B.21 (Ver[6]) *Se* $f \geq 0$ *e* $\displaystyle\int_\Omega f d\mu = 0$ *para* $f \neq 0$*, então* $med(\Omega) = 0$.

Definição B.22 (Ver[9]).**(Domínio de Classe $C^{m,\alpha}$)**
O conjunto Ω *é dito um domínio de classe* $C^{m,\alpha}$ *quando existir uma cobertura aberta* $\{U_j\}_j^q$ *de* $\partial\Omega$ *e funções bijetivas* $\phi_j : \overline{U_j} \to \overline{B}$ *onde* $B = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| < 1\}$*, tais que:*
(i) para cada j*,* $\phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$*,*
(ii) $\|\phi_j\|_{m,\alpha}$*,* $\|\phi_j^{-1}\|_{m,\alpha} \leq M$*,* $\forall J$*.*

Teorema B.23 (Ver[9]) *Suponha que* Ω *satisfaça a propriedade da poligonal, isto é, existe* $\delta > 0$ *tal que quaisquer dois pontos* x *e* y *de* Ω *podem ser ligados por uma poligonal em* Ω *de comprimento* $L \leq \delta\|x - y\|$*. Então, para* $0 \leq s < r$*, a imersão* $C^r(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^s(\overline{\Omega})$*. é compacta*

Teorema B.24 (Ver[9]) *Todo domínio de classe* $C^{m,\alpha}$*,* $m > 0$*, satisfaz a propriedade da poligonal.*

Bibliografia

[1] Agmon S., *The L^p Approach to the Dirichlet Problem, Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa 13, 405-408, (1959).*

[2] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[3] Alves C.O. and de Figueiredo D.G., *Nonvariational elliptic systems via Galerkin Methods, Function Spaces, Differential Operator and Nonlinear Analysis.*, The Hans Triebel Anniversary volume, Birkhouser (2003), 47-57.

[4] Alves C.O. , Francisco J.S.A. Corrêa, José V.A. Gonçalves, *Existence of Solutions for some Classes of Singular Hamiltonian Systems.*, University of Texas at San Antonio, USA, Advanced Nonlinear Studies, volume 5, Number 2, May 2005.

[5] A. Ambrosetti, H. Brézis e G. Cerami,*Combined Effects of Concave and Convex Nonlinear in Some Elliptic Problems*, Journal of Functional Analysis, 122, 519-543, (1994).

[6] Bartle, Robert G.,*The Elements of Integration and Lebesgue Measuare*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[7] Berestycki, *Methodes Topologiques et Problemes Aux limites non lineares (Tese de Doutorado de Berestycki), Soutenue*, These de Docteur, França, 1975.

[8] Brézis, Haïm, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[9] Bers, Jonh, Schechter, *Partial Differential Equations, Lectures on Applied Math*, vol.III(Intercience).

[10] Evans, Laurence C., *Partial Differential Equations Vol. 19*, American Mathematical Society, U.S.A., 1949.

[11] de Figueiredo, Djairo G., *Equações Elípticas Não Lineares, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA*, Rio de Janeiro, 1977.

[12] de Figueiredo, Djairo G., *Positive Solution of Semilinear Elliptic Problems, Programa Brasil-México, IME-Universidade de São Paulo*, São Paulo, 29/06/81 à 17/07/81.

[13] Gilbarg, David e Trundinger Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Classics in Mathematics, Springer, 3ª Edição*, New York, 2001.

[14] Holanda, Ângelo Roncalli Furtado, *Existência de Soluções Positivas Para uma Classe de Equações Elípticas*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2000.

[15] Iório Jr., Rafael José Iório, Valéria Iório,*Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução, CNPq-IMPA*, Rio de Janeiro, 1988.

[16] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1989.

[17] Kesavan, S., *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*, Narosa Publishing House,1999.

[18] Lima, Elon L., *Curso de Análise Vol. 1 (10ª Edição), Projeto Euclides, IMPA*, Rio de Janeiro, 2002.

[19] Lima, Elon L., *Análise Real Vol. 2 Coleção Matemática Universitária, IMPA*, Rio de Janeiro, 2004 .

[20] Lima, Elon L., *Espaços Métricos, Projeto Euclides, IMPA, CNPq* . Rio de Janeiro, 1977.