Resumo

Neste trabalho usaremos a Teoria de Semigrupos para demonstrar resultados de existência e unicidade de solução para Equações Diferenciais Ordinárias, em espaços de Banach, da forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

onde A é um operador linear ilimitado e f é uma função fixada. Usando esta teoria resolvemos problemas de valor inicial, com relação a equação do calor e a equação da onda.

Abstract

In this work we use semigroup theory to prove some results of existence and unicity for a class Ordinary Differential Equation, on Banach spaces, of the following way.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

where A is unbounded linear operator and f is a fixed function. Using this tool, we show the existence of solutions for wave and heat equations.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais

por

Romero Alves de Melo[1]

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Dezembro/2006

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais

por

Romero Alves de Melo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2006

Agradecimentos

- "O Senhor é meu pastor, nada me faltará". Obrigado DEUS por tudo.

- Aos meus pais Adaiza (em memória) e Expedito que sempre lutaram pela minha educação. A minha esposa Sidnea e a meus irmãos pelo apoio e compreensão.

- Ao professor Claudianor que me acompanha desde a iniciação científica com tamanha sabedoria, eficiência, dedicação, cobrança, confiança e amizade. Um orientador com uma visão no futuro do seu orientando, dando-lhe muito trabalho com o suporte devido. Obrigado Claudianor por toda matemática que você me fez aprender e por compartilhar toda sua experiência.

- Aos professores Daniel Cordeiro e Fágner Dias Araruna pelas sugestões e disposição nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

- Aos professores Daniel Cordeiro, Claudianor, Aparecido, Arimatéia, Sérgio Mota, Vanio, Daniel Pellegrino, Rosana, Vandik, Miriam e Jaime por contribuírem na minha formação.

- Aos professores Marco Aurélio, Francisco Morais e Lindombergue pela disponibilidade e atenção sempre que solicitados.

- Aos colegas da Pos-Graduação em especial a Jamilson pela ajuda na minha defesa.

- Aos funcionários técnicos-administrativos do DME, que sem exceção, fizeram o possível para me ajudar.

- Ao professor Marcelo Moreira Cavalcanti e seu orientando Wellington José Corrêa do departamento de matemática da Universidade Estadual de Maringá, pela contribuição.

- À CAPES, pela ajuda financeira.

- Por fim, agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

A minha mãe (em memória), ao meu pai, a minha esposa e a meus irmãos.

SUMÁRIO

Notações

Para um operador $A : X \to Y$, temos as seguintes notações:

- $D(A)$ é o domínio do operador A, que é um subespaço de X.
- $\mathcal{R}(A)$ é a imagem do operador A, que é um subespaço de Y.
- $Ker(A)$ é o núcleo do operador A, que é um subespaço de $D(A)$.
- $G(A) = \big\{(u, Au) \in X \times Y;\ u \in D(A)\big\}$ gráfico do operador A.
- X^* espaço dual de X.
- Função Característica

$$\chi_{[t_0,\,t]}(s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad s \in [t_0,\, t] \\ 0, & \text{se} \quad s \notin [t_0,\, t], \end{cases}$$

quando $t_0 = 0$ denotamos $\chi_t(s)$.

Para uma função $f \in L^p(\Omega)$

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $1 \leq p < \infty$.

Outras notações que utilizaremos:

- $\mathfrak{D}(\Omega)$ espaço das funções testes.

Introdução

Uma Equação Diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas. O estudo das Equações Diferenciais começou com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, descoberto por Newton e Leitnitz, e elaborados no último quarto do século XVII para resolver problemas motivados por considerações físicas e geométricas, como por exemplo à mecânica das particulas. Nessas aplicações, o uso de leis físicas, como as três leis de Newton da Dinâmica e a lei da gravitação universal, possibilita obter Equações Diferenciais Ordinárias que representa os fenômenos em estudo. O sucesso em tratar esses problemas utilizando o Cálculo Diferencial, na sua evolução, conduziram gradualmente à consolidação das Equações Diferenciais como um novo ramo da matemática. Em meados do século XVIII foi um grande estímulo aos físicos e matemáticos da época procurar modelos para problema da Mecânica do Contínuo e de outras ciências experimentais que expressem os fenômenos em termos de Equações Diferenciais. O conceito daquilo que era considerado solução de uma Equação Diferencial foi mudando gradualmente com o avanço dos estudos, e perguntas pertinentes sobre existência, unicidade e regularidade surgiram motivando cada vez mais esta área da matemática.

Neste trabalho estudaremos as Equações Diferenciais Ordinárias da forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

onde A é um operador linear ilimitado, sobre um espaço de Banach X, e f é uma função fixada. A principal ferramenta que utilizaremos é a **Teoria de Semigrupo**, teoria esta que teve seu grande avanço no ano de 1948 com a demonstração do **Teorema de Hille-Yosida** que tem grande importância no estudo de solução para problemas de valor inicial, do tipo

$$(P) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{cases}$$

Com o Teorema de Hille-Yosida a solução de (P) se reduz ao estudo da existência de solução da equação

$$\lambda u - Au = v,$$

para algum $\lambda > 0$, aliada de uma estimativa adequada da mesma.

No **Capítulo 1**, estudamos a Teoria de Semigrupo de operadores lineares ilimitados, que foi a ferramenta utilizada para encontrar solução de Problema de Valor Inicial do tipo (P). Questões como unicidade e regularidade das soluções, também foram abordadas no capítulo. Um ponto importante que devemos fixar é que o dado inicial pertence ao domínio do operador.

No **Capítulo 2**, estudamos aplicações envolvendo a Teoria de Semigrupo. Utilizamos os resultados obtidos para Equações Diferenciais Ordinárias para resolver Equações Diferenciais Parciais. Iniciamos com a **equação do calor** homogênea, estudando a existência, unicidade e regularidade da solução. Depois estudamos a existência, unicidade e regularidade da solução da **equação da onda** homogênea e concluímos o capítulo estudando o **caso não-homogêneo**; primeiro quando a não homogenidade é linear

$$(*_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \\ u(0) = u_0 \in D(A), \end{cases}$$

estabelecendo três situações onde a **solução generalizada** é **solução clássica**, mostrando também alguns exemplos concretos em que a função f verifica as situações estudadas. Também vimos o caso em que a não homogenidade é não-linear do tipo

$$(*_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + Fu(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

estabelecendo duas situações onde garantimos a existência e unicidade de solução generalizada para o dado inicial em X, e quando o mesmo pertence a $D(A)$ mostramos que solução generalizada é solução clássica. Mostramos também alguns exemplos concretos em que a função f verifica as situações estudadas.

No **Capítulo 3**, no intuito de encontrar soluções clássicas para problemas de valor inicial com dados menos regulares, estudamos uma nova classe de semigrupos e algumas de suas propriedades, classe esta denominada **semigrupo analítico**. Com isto estudamos **potências fracionárias de operadores** e os **espaços de potências fracionárias** X^α, que verifica a seguinte inclusão $D(A) \subset X^\alpha$, para $\alpha \in [0,1]$. Portanto se o dado inicial pertencer a X^α, para $\alpha \in [0,1]$, não podemos usar o raciocínio utilizado no Capítulo 2. Neste capítulo, estudamos problemas lineares e problemas semilineares do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

com $u_0 \in X^\alpha$.

No **Apêndice A**, estudamos Cálculo Diferencial em espaços de Banach, primeiramente estudamos integrais em espaços de Banach, ou integral no sentido de Bochner, e algumas propriedade que foram usadas no decorrer desta dissertação. Depois, estudamos o Teorema devido a Cauchy, Lipschitz e Picard.

No **Apêndice B**, apresentamos alguns resultados dos espaços de funções $L^p(\Omega)$ e os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ que foram usadas no decorrer desta dissertação.

No **Apêndice C**, apresentamos alguns resultados gerais os quais foram usadas no decorrer desta dissertação.

Concluímos nosso trabalho com o **Apêndice D** que trata da **aplicação exponencial** para operadores lineares limitados, que é um caso particular de semigrupo.

CAPÍTULO 1

Introdução à Teoria de Semigrupos

A teoria de semigrupos de operadores lineares tem um papel importante no estudo de Equações Diferenciais Ordinárias em um espaço de Banach. Um dos ingredientes essenciais dessa teoria é a noção de operador linear ilimitado. A teoria de semigrupo, historicamente, teve seu grande avanço a partir de 1948 com a demonstração do famoso Teorema de Hille-Yosida, que é o principal resultado deste capítulo. Este capítulo tem como base o livro do Kesavan [21] e o livro do Pazy [22].

1.1 Operador Linear Ilimitado

No que segue X e Y são espaços de Banach sobre os reais (ou complexos), $A : D(A) \subset X \to Y$ é um operador linear.

Definição 1.1 *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to Y$ é dito* ***limitado*** *se existe $c > 0$, tal que*

$$\|Au\|_Y \leq c\|u\|_X \qquad \forall\, u \in D(A).$$

Caso contrário, A é dito um ***operador ilimitado****, isto é, se existe uma seqüência $\{u_n\} \subset D(A)$ tal que*

$$\frac{\|Au_n\|_Y}{\|u_n\|_X} \longrightarrow +\infty \qquad \text{quando } n \to +\infty.$$

O operador linear A é dito ***densamente definido*** *se $\overline{D(A)} = X$. O operador linear A é dito* ***fechado*** *se o gráfico de A, dado por*

$$G(A) = \{(u, Au) \in X \times Y; u \in D(A)\}$$

é um subespaço fechado de $X \times Y$

Observação 1.1 *Em geral um operador linear limitado $A : D(A) \subset X \to Y$ possui uma única extensão $\overline{A} : \overline{D(A)} \to Y$, a qual é um operador linear limitado. Vejamos, se $u \in \overline{D(A)}$ então existe $\{u_n\} \subset D(A)$ tal que $u_n \to u$. Note que,*

$$\|Au_n - Au_m\|_Y = \|A(u_n - u_m)\|_Y \leq c\|u_n - u_m\|_X.$$

Sendo $\{u_n\}$ convergente, tem-se $\{u_n\}$ de Cauchy em X, logo $\{Au_n\}$ é de Cauchy em Y. Segue que existe $w_0 \in Y$ tal que

$$Au_n \to w_0.$$

Defina

$$\begin{array}{rcl} \overline{A} : \overline{D(A)} & \longrightarrow & Y \\ u & \longmapsto & \overline{A}(u) = \lim\limits_{n\to\infty} Au_n = w_0. \end{array}$$

Note que,

(1) $\overline{A}$ ***está bem definido****, uma vez que $\overline{A}u$ independe da seqüência $\{u_n\}$ escolhida , de fato fixando outra seqüência $\{v_n\} \subset D(A)$ com $v_n \to u$, tem-se*

$$\|Au_n - Av_n\|_Y = \|A(u_n - v_n)\|_Y \leq c\|u_n - v_n\|_X \leq c(\|u_n - u\|_X + \|v_n - u\|_X).$$

Passando ao limite com $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = \lim_{n\to\infty} Av_n,$$

mostrando o desejado.
(2) $\overline{A}$ ***estende*** A*, isto é,*

$$\overline{A}(u) = A(u) \qquad \forall u \in D(A).$$

De fato, considerando a seqüência constante $u_n = u$ teremos $u_n \to u$ e

$$\overline{A}(u) = \lim_{n\to\infty} Au_n = \lim_{n\to\infty} Au = Au.$$

(3) ***Unicidade de*** $\overline{A}$***:***
Suponha que existe $\widetilde{A} : \overline{D(A)} \subset X \to Y$ com $\widetilde{A}$ linear contínuo e $\widetilde{A}(u) = A(u), \quad \forall u \in D(A)$. Para $u \in \overline{D(A)}$, existe $\{u_n\} \subset D(A)$ tal que $u_n \to u$. Sendo $\widetilde{A}$ contínuo, temos

$$\widetilde{A}u_n \longrightarrow \widetilde{A}u,$$

isto é,

$$\widetilde{A}u = \lim_{n\to\infty} \widetilde{A}u_n = \lim_{n\to\infty} Au_n = w_0 = \overline{A}u$$

de onde segue que $\widetilde{A} \equiv \overline{A}$, mostrando a unicidade.
(4) $\overline{A}$ ***é linear****, pela linearidade do limite e de A.*
(5) $\overline{A}$ ***é limitado****, pois*

$$\|\overline{A}u\| = \|\lim_{n\to\infty} Au_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Au_n\| \leq \lim_{n\to\infty} c\|u_n\| = c\|\lim_{n\to\infty} u_n\| = c\|u\|.$$

Observação 1.2 *Se A é um operdor linear fechado, com $D(A) = X$, então pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema C.5), A é contínuo.*

Observação 1.3 *Se A é um operador linear fechado, então $Ker(A)$ é um subespaço fechado de $D(A)$. Com efeito, seja $\{u_n\} \subset Ker(A)$ com $u_n \to u_0$ em X. Mostraremos que $u_0 \in Ker(A)$. Sendo $u_n \in Ker(A)$ temos*

$$A(u_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Claramente

$$(u_n, Au_n) \in G(A)$$

e mais

$$(u_n, Au_n) \longrightarrow (u_0, 0) \quad \text{em} \quad X \times Y.$$

Sendo $G(A)$ fechado, segue que $(u_0, 0) \in G(A)$, daí $Au_0 = 0$, isto é, $u_0 \in Ker(A)$. Mostrando que $Ker(A)$ é fechado.

Exemplo 1.1 *Seja $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ e $X = Y = L^2(\Omega)$. Considere*

$$\begin{array}{rcl} A \ : \ H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \longmapsto & Au = u', \end{array}$$

onde u' é a derivada no sentido fraco de u.
Afirmação: *A é um operador:*
(a) Densamente definido*;*
De fato, sabemos que $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, logo sendo $C_0^\infty(\Omega)$ denso em $L^2(\Omega)$, segue que $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$.
(b) Ilimitado*;*
Basta considerar a seqüência de funções dada por

$$u_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \sin(n\pi x), \qquad x \in \Omega, n \in \mathbb{N}.$$

Note inicialmente que $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$, logo u_n e u_n' (derivada clássica igual a derivada fraca) são contínuas, daí $|u_n|^2$ e $|u_n'|^2$ são contínuas, e como $\Omega = (0,1)$ segue que $u_n, u_n' \in L^2(\Omega)$. Portanto $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$. Temos também

$$u_n(0) = \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \sin(0) = 0$$

e

$$u_n(1) = \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \sin(n\pi) = 0.$$

Logo pelo Teorema B.8 segue que $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$. Note que, $u_n'(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x)$. Assim

$$\|Au_n\|_2 = \|u_n'\|_2 = \left(2\int_0^1 \cos^2(n\pi x)dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1. \tag{1.1}$$

Observando que

$$\|u_n\|_2 = \frac{1}{n\pi}, \tag{1.2}$$

temos de (1.1) e (1.2)

$$\frac{\|Au_n\|_2}{\|u_n\|_2} = n\pi \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

mostrando que A é ilimitado. ∎

Para o próximo exemplo considere o seguinte problema Elíptico de Autovalores:

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para um conjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira suave.

Teorema 1.2 *Associado ao problema* (P_λ) *existe uma base ortonormal* $\{\omega_n\}$ *de* $L^2(\Omega)$ *e uma sequência de números reais positivos* λ_n*, com* $\lambda_n \longrightarrow +\infty$*, quando* $n \to +\infty$*, tal que*

1. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$;
2. $\omega_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$;
3. $-\Delta\omega_n = \lambda_n\omega_n \quad em \quad \Omega.$

Demonstração: Ver Figueiredo [13] ■

Exemplo 1.2 *Neste exemplo mostraremos que o operador Laplaciano* Δ *de* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *em* $L^2(\Omega)$ *é ilimitado e densamente definido. Seja* Ω *um conjunto aberto limitado em* $\mathbb{R}^n$*, com fronteira suave, e* $X = Y = L^2(\Omega)$*. Defina*

$$\begin{array}{rcccl} A & : & H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & & u & \longmapsto & Au = \Delta u. \end{array}$$

Afirmação: *O operador* A *é:*
(a) ***densamente definido****;*
(b) ***ilimitado****.*
Prova de (a)*:*
Desde que $C_0^\infty(\Omega) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *e* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^2(\Omega)$*, temos* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *é denso em* $L^2(\Omega)$*.*
Prova de (b)*:*
Considere a sequência de autofunções $\{\omega_n\}$ *de* $-\Delta$ *mencionada no Teorema* 1.2*, claramente* $\omega_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *e pelo Teorema* 1.2*, temos*

$$-\Delta\omega_n = \lambda_n\omega_n, \ \ \|\omega_n\|_2 = 1, \ \ com \ \ \lambda_n \longrightarrow +\infty \ \ quando \ \ n \to +\infty.$$

Note que

$$\|A\omega_n\|_2 = \left(\int_\Omega |\Delta\omega_n|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |-\Delta\omega_n|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |\lambda_n\omega_n|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Daí

$$\|A\omega_n\|_2 = \lambda_n\|\omega_n\|_2 = \lambda_n.$$

Portanto

$$\frac{\|A\omega_n\|_2}{\|\omega_n\|_2} = \frac{\lambda_n}{1} = \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

mostrando que A *é ilimitado.* ■

No que segue, definiremos o operador Adjunto de A. Seja $A : D(A) \to Y$ um operador linear densamente definido. Definamos

$$D(A^*) = \big\{f \in Y^*; \text{existe } c > 0 \text{ verificando } |f(Au)| \leq c\|u\|_X, \text{ para cada } u \in D(A)\big\},$$

onde Y^* é o espaço dual de Y.
Facilmente, mostra-se que $D(A^*)$ é um subespaço de Y^*. Agora, dado $f \in D(A^*)$, definamos

$$\begin{array}{rcl} g \ : \ D(A) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & g(u) = f(Au). \end{array}$$

Note que g é um funcional linear contínuo em $D(A)$; a linearidade segue do fato de f e A serem lineares, e a continuidade segue do fato de $f \in D(A^*)$. Sendo $\overline{D(A)} = X$, segue da Observação 1.1 que existe uma única extensão linear e contínua de g em X, que denotaremos por A^*f. Deste modo

$$\begin{array}{rcl} A^* \ : \ D(A^*) \subset Y^* & \longrightarrow & X^* \\ f & \longmapsto & A^*f \end{array}$$

é um operador linear. De fato, dado $f_1, f_2 \in D(A^*)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $A^*(\alpha f_1 + f_2)$ a extensão (única) linear e contínua do funcional $\widetilde{g}$ dado por $\widetilde{g}(u) = (\alpha f_1 + f_2)(Au)$; mostraremos que $\alpha A^*f_1 + A^*f_2$ também é uma extensão linear e contínua de $\widetilde{g}$, onde A^*f_1 e A^*f_2 são as extensões lineares e contínuas de g_1 e g_2, respectivamente, dadas por

$$g_1(u) = f_1(Au) \quad \text{e} \quad g_2(u) = f_2(Au).$$

Com efeito, $\alpha A^*f_1 + A^*f_2$ é linear e contínua, pois é soma de transformações lineares e contínuas. Agora dado $u \in X$, temos

$$(\alpha A^*f_1 + A^*f_2)(u) = \alpha(A^*f_1)(u) + (A^*f_2)(u) = \alpha g_1(u) + g_2(u) = \alpha f_1(Au) + f_2(Au).$$

Logo

$$(\alpha A^*f_1 + A^*f_2)(u) = (\alpha f_1 + f_2)(Au) = \widetilde{g}(u),$$

mostrando que $\alpha A^*f_1 + A^*f_2$ é uma extensão linear e contínua de $\widetilde{g}$, logo por unicidade temos

$$A^*(\alpha f_1 + f_2) = \alpha A^*f_1 + A^*f_2,$$

donde segue a linearidade de A^*

Definição 1.3 *O operador A^* é chamado o* ***adjunto*** *de A e vale a seguinte relação entre A e A^**

$$(A^*f)(u) = f(Au) \qquad \forall f \in D(A^*) \ \text{ e } \ \forall u \in D(A).$$

Teorema 1.4 *Se $A : D(A) \subset X \to Y$ é um operador linear densamente definido, então $A^* : D(A^*) \subset Y^* \to X^*$ é sempre fechado.*

Demonstração: Precisamos mostrar que $G(A^*)$ é fechado em $Y^* \times X^*$. Seja $(f_n, A^* f_n) \subset G(A^*)$ com

$$(f_n, A^* f_n) \longrightarrow (f_0, g_0) \quad \text{em} \quad Y^* \times X^*,$$

isto é,

$$f_n \to f_0 \quad \text{em} \quad Y^* \quad \text{e} \quad A^* f_n \to g_0 \quad \text{em} \quad X^*.$$

Mostraremos que $f_0 \in D(A^*)$ e que $A^* f_0 = g_0$. Com efeito, se $u \in D(A)$ segue da Definição 1.3 que

$$(A^* f_n)(u) = f_n(Au).$$

Passando ao limite, com $n \to \infty$, na última igualdade obtemos

$$g_0(u) = f_0(Au).$$

Uma vez que g_0 é linear e contínua, temos

$$|f_0(Au)| = |g_0(u)| \leq c\|u\|_X \qquad \forall u \in D(A),$$

onde $c > 0$. Donde segue que $f_0 \in D(A^*)$.

Afirmação: $\quad g_0(u) = (A^* f_0)(u) \qquad \forall u \in X = \overline{D(A)}.$

De fato, seja $u \in \overline{D(A)}$. Se $u \in D(A)$, já vimos que

$$g_0(u) = f_0(Au)$$

e sendo $f_0 \in D(A^*)$, temos pela Definição 1.3 que

$$g_0(u) = f_0(Au) = (A^* f_0)(u).$$

Se $u \notin D(A)$, então existe uma seqüência $u_n \subset D(A)$ tal que

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Logo

$$g_0(u) = g_0\big(\lim_{n\to\infty} u_n\big) = \lim_{n\to\infty} g_0(u_n) = \lim_{n\to\infty} f_0(Au_n) = \lim_{n\to\infty} (A^* f_0)(u_n),$$

o que implica

$$g_0(u) = (A^* f_0)\big(\lim_{n\to\infty} u_n\big) = (A^* f_0)(u).$$

De qualquer forma

$$g_0(u) = (A^* f_0)(u) \qquad \forall u \in X = \overline{D(A)}.$$

Portanto $g_0 \equiv A^* f_0$. De onde concluímos que $G(A^*)$ é fechado em $Y^* \times X^*$. Conseqüentemente A^* é fechado. ■

Teorema 1.5 *Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear densamente definido e fechado. Se $D(A) = X$, então A é limitado e A^* também é limitado. Além disso, neste caso*

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Demonstração: Se $D(A) = X$, então pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema C.5), A é contínuo, logo limitado.
Seja $f \in Y^*$, então

$$|f(Au)| \leq \|f\|_{Y^*}\|Au\|_Y \leq \|f\|_{Y^*}\|A\|\|u\|_X$$

daí

$$|f(Au)| \leq c\|u\|_X,$$

logo $f \in D(A^*)$, mostrando que $Y^* \subset D(A^*)$ e, portanto, $D(A^*) = Y^*$. Pelo Teorema 1.4, temos que A^* é fechado. Portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema C.5), A^* é contínuo, conseqüentemente, A^* é limitado.
Agora para cada $u \in X = D(A)$ e para cada $f \in Y^* = D(A^*)$, temos pela Definição 1.3

$$f(Au) = (A^*f)(u),$$

portanto

$$|f(Au)| = |(A^*f)(u)| \leq \|A^*\|\|f\|_{Y^*}\|u\|_X, \qquad \forall f \in Y^*,$$

assim para todo $f \in Y^*$ com $\|f\|_{Y^*} \leq 1$ temos

$$|f(Au)| \leq \|A^*\|\|u\|_X,$$

logo $\|A^*\|\|u\|_X$ é cota superior para o conjunto

$$\{|f(Au)|; \quad f \in Y^* \quad \text{e} \quad \|f\|_{Y^*} \leq 1\},$$

conseqüentemente, pelo Teorema C.3,

$$\|Au\|_Y \leq \|A^*\|\|u\|_X,$$

o que implica

$$\|Au\|_Y \leq \|A^*\|, \qquad \forall u \in X \quad \text{com} \quad \|u\|_X \leq 1,$$

mostrando que $\|A^*\|$ é cota superior para o conjunto

$$\{\|Au\|_Y; \quad u \in X \quad \text{e} \quad \|u\|_X \leq 1\}.$$

Logo, por propriedade de supremo, segue que

$$\|A\| \leq \|A^*\|.$$

Com um raciocínio análogo, mostra-se que

$$\|A^*\| \leq \|A\|.$$

Donde segue a igualdade

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

■

Se $X = Y$ são espaços de Hilbert com produto interno dado por $\big(\cdot,\cdot\big)_X$, podemos, pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema C.11), identificar X^* com X da seguinte forma, dado $h \in X^*$ existe um único $u_0 \in X$ tal que

$$h(u) = \big(u_0, u\big)_X \qquad \forall\, u \in X.$$

O adjunto, deste modo, pode ser considerado como um operador linear definido em X, com

$$\big(A^* u_0, u\big)_X = \big(u_0, Au\big)_X.$$

Definição 1.6 *Seja X um espaço de Hilbert, com produto interno $\big(\cdot,\cdot\big)_X$, e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido. Dizemos que A é **simétrico** se para quaisquer $u, v \in D(A)$*

$$\big(Au, v\big)_X = \big(u, Av\big)_X.$$

*O operador A é dito **auto-adjunto** se $A^* = A$.*

Observação 1.4 *Quando $D(A) = X$ e A é linear limitado, não existe distinção entre operadores simétricos e auto-adjunto. Entretanto se A é um operador ilimitado densamente definido, para que A seja simétrico necessitamos que $D(A) \subset D(A^*)$ e que $A^*|_{D(A)} = A$. Porém se A é auto-adjunto, temos $D(A) = D(A^*)$ e $A^* = A$.*

Exemplo 1.3 *Neste exemplo mostraremos que o operador Laplaciano Δ é auto-adjunto. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado de classe C^2 e $X = L^2(\Omega)$. Considere A como sendo o operador do Exemplo 1.2. Sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert, temos como conseqüência do Teorema da Representação de Riesz (Teorema C.11) que*

$$D(A^*) = \Big\{ u \in L^2(\Omega); \exists\, c > 0 \;\; \textit{tal que} \;\; \Big|\int_\Omega u\Delta v\Big| \leq c\|v\|_2 \qquad \forall\, v \in D(A) \Big\}.$$

Mostraremos inicialmente que $D(A) \subset D(A^*)$ e que A é simetrico.
Para $u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $v \in D(A)$, temos pelo Lema B.3 que

$$\int_\Omega u\,\Delta v = \int_\Omega v\,\Delta u. \tag{1.3}$$

Portanto

$$\left|\int_\Omega u\,\Delta v\right| = \left|\int_\Omega v\,\Delta u\right| \leq \int_\Omega |v\,\Delta u|$$

segue da desigualdade de Hölder (Teorema B.5) que

$$\left|\int_\Omega u\,\Delta v\right| \leq \|\Delta u\|_2\,\|v\|_2$$

o que implica

$$\left|\int_\Omega u\,\Delta v\right| \leq c\|v\|_2.$$

Mostrando que $u \in D(A^*)$ e conseqüentemente

$$D(A) \subset D(A^*). \tag{1.4}$$

Por (1.3) *temos*

$$(u, Av)_2 = (u, \Delta v)_2 = \int_\Omega u\,\Delta v = \int_\Omega v\,\Delta u = \int_\Omega \Delta u\, v = (\Delta u, v)_2 = (Au, v)_2,$$

mostrando que $A = \Delta$ é um operador simétrico. Agora mostraremos que A é auto-adjunto. Para isto temos que mostrar a igualdade $D(A) = D(A^*)$. Por (1.4)*, resta mostrar que $D(A^*) \subset D(A)$. Considere o seguinte problema*

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja

$$\begin{array}{rccc} G: & L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & f & \longmapsto & G(f) = u, \end{array}$$

onde $u \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca do problema (P), então

$$\int_\Omega \nabla u\,\nabla\varphi + \int_\Omega u\,\varphi = \int_\Omega f\,\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Segue por resultados de regularidade para o problema de Dirichlet (Teorema B.2) que $u \in H^2(\Omega)$, logo $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = D(A)$ conseqüentemente $\mathcal{R}(I - A) = X$ e

$G = (I - A)^{-1}$, *onde* I *é o operador identidade em* X. *Note também que* G *é simétrico, pois para* f, $g \in L^2(\Omega)$, *existem* u, $v \in L^2(\Omega)$ *tais que* $G(f) = u$ *e* $G(g) = v$, *logo*

$$\int_\Omega f\,\varphi = \int_\Omega \nabla u\,\nabla\varphi + \int_\Omega u\,\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega g\,\psi = \int_\Omega \nabla v\,\nabla\psi + \int_\Omega v\,\psi \qquad \forall\psi \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$\int_\Omega f\,\varphi = \int_\Omega \nabla(G(f))\,\nabla\varphi + \int_\Omega G(f)\,\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega g\,\psi = \int_\Omega \nabla(G(g))\,\nabla\psi + \int_\Omega G(g)\,\psi \qquad \forall\psi \in H_0^1(\Omega),$$

em particular para $\varphi = G(g)$ *e* $\psi = G(f)$ *obtemos*

$$\int_\Omega f\,G(g) = \int_\Omega \nabla(G(f))\,\nabla(G(g)) + \int_\Omega G(f)\,G(g)$$

e

$$\int_\Omega g\,G(f) = \int_\Omega \nabla(G(g))\,\nabla(G(f)) + \int_\Omega G(g)\,G(f),$$

o que implica

$$\big(G(f), g\big)_2 = \int_\Omega G(f)\,g = \int_\Omega f\,G(g) = \big(f, G(g)\big)_2,$$

mostrando a simetria de G. *Sendo* $D(G) = X$ *e* G *limitado, segue da Observação 1.4 que* G *é um operador linear auto-adjunto. Agora fixado* $w \in X = L^2(\Omega)$, *seja* $v \in D(A)$ *tal que* $v = G(w)$, *logo* $G^{-1}(v) = w$, *isto é,* $(I - A)v = w$. *Seja* $u \in D(A^*)$ *e considere*

$$f = u - A^*u.$$

Assim

$$\int_\Omega f\,v = \int_\Omega (u - A^*u)\,v = \int_\Omega [uv - (A^*u)v] = \int_\Omega [u\,v - u\,Av] = \int_\Omega (v - Av)u$$

logo

$$\int_\Omega f\,v = \int_\Omega w\,u.$$

Deste modo

$$\int_\Omega G(f)\,w = \int_\Omega f\,G(w) = \int_\Omega f\,v = \int_\Omega u\,w, \qquad \forall u \in D(A^*).$$

Daí

$$\int_\Omega (G(f)-u)w = 0, \qquad \forall u \in D(A^*).$$

Pelo ***Lema de Du Bois Raymond*** *(Lema B.1), segue que*

$$G(f)-u=0 \qquad q.t.p. \quad em \quad \Omega.$$

Logo

$$G(f)=u \qquad q.t.p. \quad em \quad \Omega$$

o que implica $u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) = D(A)$*, mostrando que*

$$D(A^*) \subset D(A)$$

e que A *é auto-adjunto, isto é, o operador Laplaciano* Δ *é auto-adjunto.* ■

Definição 1.7 *Seja* X *um espaço de Hilbert, com produto interno dado por* $\big(\cdot,\cdot\big)_X$*. Um operador* $A : D(A) \subset X \to X$ *é dito ser* ***monótono*** *se*

$$\big(Au,u\big)_X \geq 0 \qquad \forall u \in D(A).$$

O operador A *é* ***maximal monótono*** *se for monótono e* $\mathcal{R}(I+A)=X$*.*

Observação 1.5 *Pelo Exemplo 1.3 temos* $\mathcal{R}(I-\Delta) = L^2(\Omega)$*. Temos também que dado* $u \in D(A)$

$$(Au,u)_2 = (-\Delta u,u)_2 = \int_\Omega -\Delta u\, u = -\int_\Omega \Delta u\, u = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 \geq 0.$$

Portanto $A=-\Delta$ *é maximal monótono.*

Adaptando o que foi feito no Exemplo 1.3 mostraremos, através do próximo teorema, que todo operador simétrico maximal monótono em um espaço de Hilbert X é auto-adjunto.

Teorema 1.8 *Seja* $A : D(A) \to X$ *um operador simétrico maximal monótono, onde* X *é um espaço de Hilbert. Então* A *é um operador auto-adjunto.*

Demonstração: Mostraremos que $D(A) = D(A^*)$. Note inicialmente que, sendo X um espaço de Hilbert segue do Teorema da Representação de Riesz (Teorema C.11) que

$$D(A^*) = \big\{u \in X; \exists\, c>0 \ \ t.q. \ \ |\big(u,Av\big)_X| \leq c\|v\|, \ \ \forall\, v \in D(A)\big\}.$$

Para $u \in D(A)$, sendo A simétrico temos

$$\big(Au,v\big)_X = \big(u,Av\big)_X\ , \qquad \forall\, v \in D(A).$$

Conseqüentemente

$$|\big(u, Av\big)_X| = |\big(Au, v\big)_X| \leq \|Au\|\|v\| \equiv c\|v\| \qquad \forall\, v \in D(A),$$

logo $u \in D(A^*)$, mostrando que $D(A) \subset D(A^*)$. Por outro lado, defina

$$\begin{array}{rccl} G: & X & \longrightarrow & D(A) \\ & f & \longmapsto & Gf = u, \end{array}$$

onde $u \in D(A)$ verifica $u + Au = f$. Note que

1. u existe, pois $\mathcal{R}(I + A) = X$;

2. G está bem definido, pois u é único. Supondo que existe $v \in D(A)$ com $v + Av = f$, temos
$$(u - v) + A(u - v) = 0$$
o que implica
$$\|u - v\|^2 + \big(A(u - v), (u - v)\big)_X = 0.$$
Sendo A maximal monótono, temos $\|u - v\| = 0$, isto é, $u = v$.

3. G é simétrico, pois dados $u, v \in X$ temos
$$u = Gu + AGu \qquad e \qquad v = Gv + AGv.$$
Assim
$$\big(Gu, v\big)_X = \big(Gu, Gv\big)_X + \big(Gu, AGv\big)_X = \big(Gu, Gv\big)_X + \big(AGu, Gv\big)_X = \big(u, Gv\big)_X \,.$$

Mostraremos à seguir que $D(A^*) \subset D(A)$. Dado $w \in X$, existe $v \in D(A)$ tal que $G(w) = v$. Seja $u \in D(A^*)$ e considere $f = u + A^*u$. Logo

$$\big(f, v\big)_X = \big(u + A^*u, v\big)_X = \big(u, v\big)_X + \big(A^*u, v\big)_X = \big(u, v\big)_X + \big(u, Av\big)_X = \big(u, v + Av\big)_X \,,$$

isto é,

$$\big(f, v\big)_X = \big(u, w\big)_X \,.$$

Assim

$$\big(Gf, w\big)_X = \big(f, Gw\big)_X = \big(f, v\big)_X = \big(u, w\big)_X.$$

Conseqüentemente $Gf = u$, o que implica $u \in D(A)$, mostrando que $D(A^*) \subset D(A)$. Portanto $D(A^*) = D(A)$. ■

Se A é um operador fechado podemos considerar $D(A)$ com a norma do gráfico $\|\cdot\|_{D(A)}$ dada por

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_Y.$$

Afirmação: $D(A)$ com a norma do gráfico é um espaço de Banach.
De fato, seja $\{u_n\}$ uma seqüência de Cauchy em $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$, então $\{u_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em X e $\{Au_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em Y. Sendo X e Y espaços de Banach, existem $u \in X$ e $w \in Y$ tais que

$$u_n \to u \quad \text{em } X$$

e

$$Au_n \to w \quad \text{em } Y.$$

Claramente $(u_n, Au_n) \in G(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$(u_n, Au_n) \to (u, w) \quad \text{em } X \times Y.$$

sendo $G(A)$ fechado temos $(u, w) \in G(A)$, logo $Au = w$. Conseqüentemente

$$u_n \to u \quad \text{em } \big(D(A), \|\cdot\|_{D(A)}\big),$$

pois

$$\|u_n - u\|_{D(A)} = \|u_n - u\|_X + \|Au_n - Au\|_Y \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando a afirmação.

No que segue quando nos referirmos a $D(A)$ estaremos sempre considerando sobre o mesmo a norma $\|\cdot\|_{D(A)}$. Se X é um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset X \to X$, então $D(A)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$(u, v)_{D(A)} = (u, v)_X + (Au, Av)_X.$$

1.2 C_0-Semigrupos

No Apêndice D é mostrado a existência e unicidade de solução da seguinte classe de problema de valor inicial

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

onde A é um operador linear limitado. Existem várias Equações Diferenciais Ordinárias do tipo apresentado em (1) mas com o operador A ilimitado. Iremos investigar quando tais problemas possuem soluções. Em particular desejamos estender o conceito da aplicação exponencial e^A, que é estudada no Apêndice D. Seja X um espaço de Banach, com norma $\|\cdot\|$ e seja $A : X \to X$ um operador linear limitado. Fixado $u_0 \in X$ é mostrado no Apêndice D, que a função dada por $u(t) = e^{tA}u_0$ é a única solução do problema de valor inicial (1). Vejamos agora algumas propriedades envolvendo a função $u(t) = e^{tA}u_0$.

Propriedade 1: Fixado $t \in [0, +\infty)$, a função

$$\begin{array}{rcll} f \ : \ X & \longrightarrow & X & \\ u_0 & \longmapsto & f(u_0) & = u(t) = e^{tA}u_0 \end{array}$$

é uma aplicação linear e limitada em X. De fato, a linearidade segue da linearidade de e^{tA}; a limitação segue da limitação de e^{tA}, mais ainda , note que

$$\|u(t)\| = \|e^{tA}u_0\| \leq \|e^{tA}\|\|u_0\| \leq e^{t\|A\|}\|u_0\|.$$

Propriedade 2: $u(t) \to u_0$ quando $t \downarrow 0$.
De fato,

$$\|u(t) - u_0\| = \|e^{tA}u_0 - u_0\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k u_0}{k!} \right\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1} A^{j+1} u_0}{(j+1)!} \right\|$$

logo

$$\|u(t) - u_0\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^{j+1}\|A\|^{j+1}\|u_0\|}{(j+1)!} \leq |t|\|A\|\|u_0\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j\|A\|^j}{j!},$$

isto é,

$$\|u(t) - u_0\| \leq |t|\|A\|\|u_0\| \, e^{\,\|tA\|}$$

daí quando $t \downarrow 0$ segue o desejado. Também temos que $u(0) = u_0$.

Propriedade 3: Para o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = Av(t) \quad t \geq 0 \\ v(0) = u(t_0) \in X. \end{cases}$$

temos que a única solução é dada por $v(t) = u(t + t_0)$.

Motivado por essas propriedades temos a seguinte definição:

Definição 1.9 *Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados é dita ser um C_0-**Semigrupo** se são satisfeitas as seguintes propriedades:*

1. *$S(0) = I$, onde I é o operador identidade em X;*

2. *$S(t + s) = S(t)S(s)$, para todo $t, s \geq 0$;*

3. *Para cada $u \in X$ temos*
$$S(t)u \to u \quad \text{quando} \;\; t \downarrow 0.$$

Observação 1.6 *Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados que verifica (1)-(3) acima, também é chamada **semigrupo fortemente contínuo** (Ver Pazy [22]).*

Exemplo 1.4 *Se A é um operador linear limitado em X, então pelo estudo feito no Apêndice D, temos que $S(t) = e^{tA}$ define um C_0-semigrupo. Com efeito,*

1. $S(0) = e^{0A} = I$;

2. $S(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = S(t)S(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$;

3. *Para cada* $u \in X$ $S(t)u = e^{tA}u$ *logo*

$$\|S(t)u - u\| = \|e^{tA}u - u\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k u}{k!} \right\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1} A^{j+1} u}{(j+1)!} \right\| \leq |t| \|A\| \|u\| \, e^{\|tA\|}$$

o que implica

$$\|S(t)u - u\| \to 0 \quad \text{quando} \;\; t \downarrow 0,$$

isto é,

$$S(t)u \to u \quad \text{quando} \;\; t \downarrow 0.$$

Exemplo 1.5 *Seja X o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to Y$ limitadas e uniformemente contínuas, onde Y é um espaço de Banach . Considerando em X a norma do supremo, segue que X é um espaço de Banach. Definindo*

$$S(t)f(s) = f(t+s),$$

afirmamos que a família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0-semigrupo em X. De fato, para cada $f \in X$

1. $S(0)f(s) = f(0+s) = f(s)$, *logo* $S(0) = I$;

2. $S(t_1 + t_2)f(s) = f(t_1 + t_2 + s)$ *e*
   $S(t_1)S(t_2)f(s) = S(t_1)f(t_2 + s) = f(t_1 + t_2 + s)$
   logo
   $$S(t_1 + t_2)f(s) = S(t_1)S(t_2)f(s)$$
   o que implica
   $$S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \;\; \text{para todo} \;\; t_1, t_2 \geq 0;$$

3. *Note que,*
   $$\|S(t)f(s) - f(s)\| = \|f(t+s) - f(s)\|,$$
   sendo $|t + s - s| = |t|$ e sabendo que f é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
   $$|t + s - s| = |t| < \delta \Rightarrow \|f(t+s) - f(s)\| < \epsilon,$$

ou seja,

$$|t| < \delta \Rightarrow \|S(t)f(s) - f(s)\| < \epsilon$$

conseqüentemente

$$S(t)f(s) \to f(s) \quad \textit{quando} \;\; t \downarrow 0.$$

Mostrando que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0*-semigrupo.*

Agora mostraremos algumas propriedades elementares de semigrupos.

Lema 1.1 *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo em* X*, onde* X *é um espaço de Banach. Então existem* $M \geq 1$ *e* $\delta > 0$ *tais que, para* $0 \leq t \leq \delta$*,*

$$\|S(t)\| \leq M.$$

Demonstração: Suponha, por absurdo, que dado $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ existe t_δ, com $0 \leq t_\delta \leq \delta$ tal que

$$\|S(t_\delta)\| > n.$$

Considerando $\delta = \dfrac{1}{n}$, temos a existência de uma seqüência $\{t_n\}$ com $t_n \to 0$ quando $n \to +\infty$ e

$$\|S(t_n)\| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \;\; n \to +\infty,$$

isto é, a seqüência

$$\{\|S(t_n)\|\} \quad \text{é ilimitada.} \tag{1.5}$$

Mas sendo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo, temos

$$S(t_n)u \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{para cada} \;\; u \in X$$

logo

$$\|S(t_n)u\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u\| \quad \text{para cada} \;\; u \in X$$

e portanto $\{\|S(t_n)u\|\}$ é uma seqüência limitada para cada $u \in X$. Usando o Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema C.1), concluímos que $\{\|S(t_n)\|\}$ é limitada, contradizendo o resultado encontrado em (1.5). Portanto, a tese do lema é válida. ■

Teorema 1.10 *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo em* X*, com* X *espaço de Banach. Então existem* $M \geq 1$ *e* $\omega \geq 0$ *tais que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad \text{para todo} \;\; t \geq 0.$$

Demonstração: Pelo Lema 1.1 existem $M \geq 1$ e $\delta > 0$ tais que, para $0 \leq t \leq \delta$,

$$\|S(t)\| \leq M.$$

Sendo a exponencial uma função crescente, temos que para todo $\omega \geq 0$

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall\, t \in [0, \delta]. \tag{1.6}$$

Para $t > \delta$, considere $\omega = \delta^{-1} \log M$. Note que $\omega \geq 0$, pois $M \geq 1$. Sendo $t > \delta$ pelo Algoritmo de Euclides existem $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \eta < \delta$ tal que $t = n\delta + \eta$. Daí

$$S(t) = S(n\delta + \eta) = S(n\delta)S(\eta) = (S(\delta))^n S(\eta)$$

logo

$$\|S(t)\| = \|(S(\delta))^n S(\eta)\| = \|S(\delta)\|^n \|S(\eta)\|$$

o que implica

$$\|S(t)\| \leq M^n M. \tag{1.7}$$

Note que, sendo $\omega = \delta^{-1} \log M$ temos $\omega\delta = \log M$, daí $n\omega\delta = n \log M = \log M^n$, logo

$$\omega t = \omega(n\delta + \eta) \geq n\omega\delta = \log M^n$$

o que implica

$$e^{\omega t} \geq M^n. \tag{1.8}$$

De (1.7) e (1.8) obtemos

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall\, t > \delta. \tag{1.9}$$

De (1.6) e (1.9) concluímos a demonstração do teorema. ∎

Corolário 1.11 *Para cada $u \in X$, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} f \;:\; [0, \infty) & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & f(t) \;= S(t)u \end{array}$$

é contínua. Mais precisamente, para cada $u \in X$

$$S(\cdot)u \in C([0, \infty); X).$$

Demonstração: Dado $t \geq 0$, seja $h \geq 0$ com $t \geq h$. Note que

$$\|f(t+h) - f(t)\| = \|S(t+h)u - S(t)u\| = \|S(t)S(h)u - S(t)u\| = \|S(t)\big(S(h)u - u\big)\|.$$

Sendo $S(t)$ limitado, e usando o Teorema 1.10 obtemos

$$\|f(t+h) - f(t)\| \leq Me^{\omega t}\|S(h)u - u\|.$$

Conseqüentemente pela Propriedade 3 da definição de C_0-semigrupo, segue que

$$\|f(t+h) - f(t)\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } h \downarrow 0,$$

portanto

$$\lim_{s \to t^+} f(s) = f(t). \tag{1.10}$$

Por outro lado

$$\|f(t)-f(t-h)\| = \|S(t)u-S(t-h)u\| = \|S(t-h+h)u-S(t-h)u\| = \|S(t-h)\big(S(h)u-u\big)\|$$

daí

$$\|f(t) - f(t-h)\| \leq Me^{\omega(t-h)}\|S(h)u - u\| \leq Me^{\omega t}\|S(h)u - u\|.$$

Donde segue

$$\|f(t) - f(t-h)\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } h \downarrow 0,$$

isto é,

$$\lim_{s \to t^-} f(s) = f(t). \tag{1.11}$$

De (1.10) e (1.11) segue que f é contínua, pois os limites laterais existem e são iguais. ■

Definição 1.12 *Um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dito* ***uniformemente limitado*** *se $\|S(t)\| \leq M$, e se $\|S(t)\| \leq 1$, dizemos que é um* ***semigrupo de contração****.*

Uma vez que a função $S(\cdot)u$ é contínua, a mesma é integrável no sentido de Bochner em cada intervalo da semireta não-negativa. Assim usando algumas propriedades desta integral (ver Apêndice A) temos o seguinte resultado.

Lema 1.2 *Para cada $u \in X$ e $h \geq 0$*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)u\mathrm{d}\tau = S(t)u.$$

Demonstração: Note que

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)u\mathrm{d}\tau - S(t)u \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \big(S(\tau)u - S(t)u\big)\mathrm{d}\tau \right\|$$

e, pelo Teorema A.6,

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\mathrm{d}\tau - S(t)u\right\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \big\|S(\tau)u - S(t)u\big\|\mathrm{d}\tau.$$

Sendo $S(\cdot)u$ contínua, segue que para todo $\epsilon > 0$ existe $h > 0$ tal que

$$\big\|S(\tau)u - S(t)u\big\| < \epsilon \qquad \text{para} \quad |\tau - t| < h.$$

Assim, para h suficientemente pequeno temos

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\mathrm{d}\tau - S(t)u\right\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \epsilon\,\mathrm{d}\tau \leq \frac{1}{h}\,\epsilon\,h = \epsilon,$$

donde concluímos a demonstração do Lema. ■

Agora introduziremos um importante conceito na teoria de semigrupos.

Definição 1.13 *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X. O* ***gerador infinitesimal*** *do semigrupo é um operador linear $A : D(A) \to X$ onde*

$$D(A) = \left\{u \in X;\ \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)u - u}{t} \quad \text{existe}\right\}$$

e

$$Au = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A).$$

Exemplo 1.6 *Seja X o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to Y$ limitadas e uniformemente contínuas com a norma do supremo e*

$$S(t)f(s) = f(t+s).$$

Mostramos no Exemplo 1.5 que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo em X. Agora pretendemos encontrar o seu gerador infinitesimal. Note que, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)f(s) - f(s)}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{f(t+s) - f(s)}{t} = D^+f(s)$$

onde D^+f é a derivada à direita de f, quando tal limite existe. Deste modo, para que $f \in D(A)$, devemos ter $D^+f \in X$, o que implica em D^+f ser limitada e uniformemente contínua. Note também que

$$f(x+t) - f(x) = D^+f(x)t + r(t), \qquad \text{com} \quad \frac{r(t)}{t} \xrightarrow{t\downarrow 0} 0.$$

Daí, para $s = x + t$, temos

$$f(s) - f(s-t) = D^+ f(s-t)t + r(t), \qquad \textit{com} \quad \frac{r(t)}{t} \xrightarrow{t\downarrow 0} 0$$

e, pela continuidade de $D^+ f$, obtemos

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(s) - f(s-t)}{t} = D^+ f(s)$$

o que implica que a derivada a esquerda $D^- f$ existe em todo ponto e mais

$$D^- f = D^+ f,$$

donde segue que f é derivável em todo ponto. Assim

$$D(A) = \left\{ f \in X \,;\, f' \ \text{ existe em todo ponto e } \ f' \in X \right\}$$

e

$$Af = f', \ \ f \in D(A).$$

Teorema 1.14 *Seja A o seu gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, e $u \in D(A)$. Então*

$$S(\cdot)u \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A))$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(S(t)u\right) = AS(t)u = S(t)Au.$$

Demonstração: Para cada $u \in D(A)$, segue da definição de gerador

$$\frac{S(h)u - u}{h} \longrightarrow Au \quad \text{quando} \ \ h \downarrow 0.$$

Conseqüentemente

$$\frac{S(h)S(t)u - S(t)u}{h} = \frac{S(t)S(h)u - S(t)u}{h} = S(t)\left(\frac{S(h)u - u}{h}\right) \xrightarrow{h\downarrow 0} S(t)Au.$$

Logo $S(t)u \in D(A)$ com

$$AS(t)u = S(t)Au. \tag{1.12}$$

Mas

$$AS(t)u = \lim_{h\downarrow 0} \frac{S(h)S(t)u - S(t)u}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{S(h+t)u - S(t)u}{h} = D^+ S(t)u. \tag{1.13}$$

Note que, para $h \in [0, t]$

$$S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right) = \frac{S(t-h)S(h)u - S(t-h)u}{h} = \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h},$$

portanto

$$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au = S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right) - S(t)Au.$$

Somando e subtraindo $S(t-h)Au$ obtemos

$$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au = S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right) + (S(t-h) - S(t))Au. \quad (1.14)$$

Mas

$$\left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right)\right\| \leq \|S(t-h)\|\left\|\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right\|$$

e desde que $S(t-h)$ é limitado e $u \in D(A)$, temos

$$\left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right)\right\| \xrightarrow{h\downarrow 0} 0. \quad (1.15)$$

Por outro lado, pela continuidade de $S(\cdot)u$

$$\|(S(t-h) - S(t))Au\| \xrightarrow{h\downarrow 0} 0. \quad (1.16)$$

De (1.14), (1.15) e (1.16) obtemos

$$\left\|\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au\right\| \xrightarrow{h\downarrow 0} 0,$$

isto é,

$$D^{-}S(t)u = S(t)Au. \quad (1.17)$$

De (1.12), (1.13) e (1.17) concluímos que

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = S(t)Au = AS(t)u.$$

Pelo Corolário 1.11

$$\frac{d}{dt}(S(\cdot)u) = S(\cdot)Au \in C([0,\infty); X),$$

daí

$$S(\cdot)u \in C^1([0,\infty); X). \quad (1.18)$$

Vimos que $S(\cdot)u \in D(A)$ quando $u \in D(A)$, assim considerando $D(A)$ com a norma do gráfico temos que

$$S(\cdot)u \in C([0,\infty); D(A)), \tag{1.19}$$

pois dado $t \in [0,\infty)$ e $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ com

$$t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t \qquad \text{em} \quad [0,\infty),$$

temos

$$\|S(t_n)u - S(t)u\|_{D(A)} = \|S(t_n)u - S(t)u\| + \|AS(t_n)u - AS(t)u\|.$$

Mas, pelo Corolário 1.11,

$$\|S(t_n)u - S(t)u\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e

$$\|AS(t_n)u - AS(t)u\| = \|S(t_n)Au - S(t)Au\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo

$$\|S(t_n)u - S(t)u\|_{D(A)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando (1.19). Portanto,

$$S(\cdot)u \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A))$$

■

Como conseqüência do Teorema 1.14, usando o próximo corolário, mostraremos a existência e unicidade de solução clássica para o seguinte problema de valor inicial

$$(P) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Definição 1.15 *Dizemos que uma função $u \in X$ é* ***solução clássica*** *de (P) quando $u \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A))$ e u verifica (P).*

Corolário 1.16 *Se A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então para todo $u_0 \in D(A)$*

$$u(t) = S(t)u_0$$

é a única solução do problema (P)

Demonstração: Segue do Teorema 1.14 que $u(t) = S(t)u_0$ é solução do problema (P).

Mostraremos que tal função é a única solução. De fato, suponha que $v(t)$ é solução do problema (P). Definindo $w(s) = S(t-s)v(s)$, mostraremos que

$$\frac{dw}{ds}(s) = -AS(t-s)v(s) + AS(t-s)v(s) = 0. \tag{1.20}$$

Logo w é constante. Note que

$$w(t) = S(t-t)v(t) = S(0)v(t) = v(t)$$

e

$$w(0) = S(t-0)v(0) = S(t)u_0,$$

pois v é solução do problema (P). Sendo w constante concluímos que

$$v(t) = S(t)u_0 = u(t).$$

Justificativa de (1.20): Note que

$$\frac{dw}{ds}(s) = \lim_{h\to 0} \frac{w(s+h) - w(s)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{S(t-s-h)v(s+h) - S(t-s)v(s)}{h}.$$

Assim

$$\frac{dw}{ds}(s) = \lim_{h\to 0} \frac{S(t-s-h)v(s+h) - S(t-s)v(s+h) + S(t-s)v(s+h) - S(t-s)v(s)}{h},$$

isto é,

$$\frac{dw}{ds}(s) = \lim_{h\to 0} \frac{\big[S(t-s-h) - S(t-s)\big]v(s+h) + S(t-s)\big[v(s+h) - v(s)\big]}{h}. \tag{1.21}$$

Afirmação 1: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{S(t-s)\big[v(s+h) - v(s)\big]}{h} = AS(t-s)v(s).$

De fato, note que

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(t-s)\big[v(s+h) - v(s)\big]}{h} = S(t-s)\left(\lim_{h\to 0} \frac{v(s+h) - v(s)}{h}\right) = S(t-s)\frac{dv}{ds}(s)$$

o que implica

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(t-s)\big[v(s+h) - v(s)\big]}{h} = AS(t-s)v(s).$$

Afirmação 2: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\big[S(t-s-h) - S(t-s)\big]v(s+h)}{h} = -AS(t-s)v(s).$

Com efeito,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big[S(t-s-h)-S(t-s)\big]v(s+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\big[S(t-s-h)-S(t-s-h+h)\big]v(s+h)}{h}$$

logo

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big[S(t-s-h)-S(t-s)\big]v(s+h)}{h}=-\lim_{h\to 0}S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)v(s+h) \tag{1.22}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)v(s+h)\ -AS(t-s)v(s)\right\| \\
&\qquad\leq \underbrace{\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)v(s+h)\ -S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)v(s)\right\|}_{I_1} \\
&\qquad+\underbrace{\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)v(s)-S(t-s-h)Av(s)\right\|}_{I_2} \\
&\qquad+\underbrace{\left\|S(t-s-h)Av(s)-S(t-s)Av(s)\right\|}_{I_3}
\end{aligned}$$

Afirmação 2.1: Quando $h\to 0$ temos:

1. $I_1\to 0$;
2. $I_2\to 0$;
3. $I_3\to 0$.

Prova de (1):

$$I_1=\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\big(v(s+h)-v(s)\big)\right\|\leq c_1\left\|\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\big(v(s+h)-v(s)\big)\right\|$$

logo somando e subtraindo $S(h)v'(s)$ e $v'(s)$ obtemos

$$\begin{aligned}
I_1\leq c_1\Bigg[&\left\|S(h)\left(\frac{v(s+h)-v(s)}{h}\right)-S(h)v'(s)\right\|+\big\|S(h)v'(s)-v'(s)\big\| \\
&+\left\|v'(s)-\frac{v(s+h)-v(s)}{h}\right\|\Bigg]
\end{aligned}$$

conseqüentemente

$$I_1 \leq c_2 \left\| v'(s) - \frac{v(s+h)-v(s)}{h} \right\| + c_1 \big\| S(h)v'(s) - v'(s) \big\| + c_1 \left\| v'(s) - \frac{v(s+h)-v(s)}{h} \right\|,$$

usando a continuidade de $S(\cdot)v'(s)$ e a diferenciabilidade de v fica estabelecido (1).
Prova de (2):

$$I_2 \leq c_1 \left\| \left(\frac{S(h)-I}{h} \right) v(s) - Av(s) \right\|$$

logo sendo $v(s) \in D(A)$ fica estabelecido (2).
Prova de (3): Segue pela continuidade da função $S(t-s-\ \cdot)Av(s)$.
De acordo com a Afirmação 2.1 temos

$$\left\| S(t-s-h) \left(\frac{S(h)-I}{h} \right) v(s+h)\ - AS(t-s)v(s) \right\| \stackrel{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{1.23}$$

De (1.22) e (1.23) segue a Afirmação 2.
Por (1.21) e pelas Afirmações 1 e 2 fica estabelecido (1.20). ■

Agora listaremos mais algumas propriedades do gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.

Teorema 1.17 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em X. Então para qualquer $u \in X$,*

$$\int_0^t S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau \in D(A)$$

e

$$A\left(\int_0^t S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau \right) = S(t)u - u.$$

Demonstração: Seja $h > 0$. Note que

$$\left(\frac{S(h)-I}{h} \right) \int_0^t S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{h} \left[S(h) \int_0^t S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau - \int_0^t S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau \right]$$

logo

$$\left(\frac{S(h)-I}{h} \right) \int_0^t S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{h} \left[\int_0^t S(h)S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau - \int_0^t S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau \right].$$

Por propriedade de semigrupo

$$\left(\frac{S(h)-I}{h} \right) \int_0^t S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau+h)u \, \mathrm{d}\tau - \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau,$$

isto é,

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $h < t$ e assim

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{h}\left[\int_h^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau + \int_t^{t+h} S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - \int_0^h S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - \int_h^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\right]$$

de onde concluímos

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau.$$

Portanto pelo Lema 1.2

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau = S(t)u - u,$$

mostrando que

$$\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau \in D(A)$$

com

$$A\left(\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\right) = S(t)u - u.$$

■

Corolário 1.18 *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em X, então A é fechado e densamente definido.*

Demonstração: Para cada $u \in X$, segue do Teorema 1.17 que, para cada $h > 0$

$$\int_0^h S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau \in D(A)$$

e, assim,

$$\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau \in D(A).$$

Do Lema 1.2

$$\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau \longrightarrow u \qquad \text{quando} \quad h \to 0,$$

donde segue que $D(A)$ é denso em X, mostrando que A é densamente definido. Agora, seja $\{u_n\} \subset D(A)$ com

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad X \quad \text{e} \quad Au_n \to v \quad \text{em} \quad X.$$

Mostraremos que $u \in D(A)$ e $Au = v$, o que implica $(u, v) \in G(A)$, e portanto $G(A)$ é fechado em $X \times X$, e assim A é fechado. Desde que $S(h)$ é linear e contínuo, temos

$$\frac{S(h)u - u}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{S(h)u_n - u_n}{h}. \tag{1.24}$$

Segue do Teorema 1.14

$$\int_0^h S(\tau)Au_n \, \mathrm{d}\tau = \int_0^h \frac{d}{dt}(S(\tau)u_n) \, \mathrm{d}\tau$$

e usando o Teorema A.8

$$\int_0^h S(\tau)Au_n \, \mathrm{d}\tau = S(h)u_n - S(0)u_n = S(h)u_n - u_n$$

conseqüentemente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Au_n \, \mathrm{d}\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{S(h)u_n - u_n}{h}. \tag{1.25}$$

De (1.24) e (1.25)

$$\frac{S(h)u - u}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Au_n \, \mathrm{d}\tau. \tag{1.26}$$

Note que,

$$\left\| \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Au_n \, \mathrm{d}\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)v \, \mathrm{d}\tau \right\| = \left\| \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)(Au_n - v) \, \mathrm{d}\tau \right\|.$$

Aplicando o Teorema A.6 e a limitação de $S(\tau)$ obtemos

$$\left\| \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Au_n \, \mathrm{d}\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)v \, \mathrm{d}\tau \right\| \leq \frac{1}{h}Me^{h\omega}\int_0^h \|Au_n - v\| \, \mathrm{d}\tau.$$

Como por hipótese $Au_n \to v$, segue da última desigualdade

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Au_n \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)v \, \mathrm{d}\tau. \tag{1.27}$$

De (1.26) e (1.27)

$$\frac{S(h)u - u}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)v \, \mathrm{d}\tau. \tag{1.28}$$

Por (1.28) e pelo Lema 1.2, concluímos que

$$\frac{S(h)u - u}{h} \longrightarrow v \qquad \text{quando} \quad h \to 0,$$

logo $u \in D(A)$ e $Au = v$, mostrando que $(u, v) \in G(A)$, conseqüentemente A é fechado. ■

Observação 1.7 *O Corolário* 1.18 *mostra que um operador ilimitado A gerador de um C_0-semigrupo é necessariamente fechado e densamente definido. Na próxima seção, mostraremos a recíproca deste resultado, isto é, se A é fechado e densamente definido então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.*

Teorema 1.19 *Sejam $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ dois C_0-semigrupos com o mesmo gerador infinitesimal A, então $\{S_1(t)\}$ e $\{S_2(t)\}$ são idênticos.*

Demonstração: Seja $F(s) = S_1(t-s)S_2(s)u$, para $u \in D(A)$. Então, usando um raciocínio análogo ao que foi feito para justificar (1.20) obtemos

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{d}{ds}\big(S_1(t-s)\big)\, S_2(s)u + S_1(t-s)\frac{d}{ds}\big(S_2(s)u\big).$$

Usando o Teorema 1.14 obtemos

$$\frac{dF}{ds}(s) = -AS_1(t-s)\, S_2(s)u + AS_1(t-s)\, S_2(s)u = 0$$

mostrando que F é constante. Observando que

$$F(t) = S_1(t-t)S_2(t)u = S_1(0)S_2(t)u = S_2(t)u$$

e

$$F(0) = S_1(t-0)S_2(0)u = S_1(t)S_2(0)u = S_1(t)u,$$

sendo F constante devemos ter

$$S_1(t)u = S_2(t)u \quad \forall\, u \in D(A)\ \forall\ t \geq 0,$$

ou seja, $\{S_1(t)\}$ e $\{S_2(t)\}$ são idênticos. ■

Corolário 1.20 *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo cujo gerador infinitesimal A é limitado, então*

$$S(t) = e^{tA}.$$

Demonstração: Conseqüência imediata do Exemplo 1.4 e do Teorema 1.19. ■

1.3 Teorema de Hille-Yosida

Na seção anterior mostramos que se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

sempre possui uma única solução, desde que $u_0 \in D(A)$. Além disso, mostramos que se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo então, necessariamente, A é fechado e densamente definido.

No que segue, assumiremos que A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, isto é, $\|S(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Seja $u \in X$ e $\lambda > 0$. Considere, para $s, t \in \mathbb{R}$, com $s < t$, a integral

$$\int_s^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau.$$

Esta integral está bem definida, pois a função dada por $f(t) = e^{-\lambda t}S(t)u$ é contínua, uma vez que a exponencial e a função $S(\cdot)u$ são funções contínuas, e $[s, t]$ é um intervalo fechado. Sendo $\|S(\tau)u\| \leq \|u\|$ para todo τ, segue que esta integral tende a zero (ao vetor nulo) quando $t, s \to \infty$, pois

$$\left\| \int_s^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau \right\| \leq \int_s^t \|e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \,\| \mathrm{d}\tau \leq \int_s^t e^{-\lambda\tau} \|S(\tau)u\| \mathrm{d}\tau$$

o que implica

$$\left\| \int_s^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau \right\| \leq \|u\| \int_s^t e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau.$$

Resolvendo a integral do lado direito obtemos

$$\left\| \int_s^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau \right\| \leq -\frac{1}{\lambda} \|u\| \left[e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s} \right] \tag{1.29}$$

daí, quando $t, s \to \infty$ encontramos o limite

$$\int_s^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau \longrightarrow 0. \tag{1.30}$$

Mostraremos agora que a integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau$$

existe. Para uma seqüência $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$, considere a seqüência em X dada por

$$v_n = \int_0^{t_n} e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau.$$

Afirmação 1: A seqüência $\{v_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em X.
De fato, sem perda de generalidade para $t_n < t_m$

$$\|v_n - v_m\| = \left\| \int_0^{t_n} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, \mathrm{d}\tau - \int_0^{t_m} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, \mathrm{d}\tau \right\| = \left\| \int_{t_n}^{t_m} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, \mathrm{d}\tau \right\|$$

e por (1.30) temos

$$\|v_n - v_m\| \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad n, m \to \infty$$

logo $\{v_n\}$ é de Cauchy.
Sendo X um espaço de Banach, temos que existe o limite da seqüência $\{v_n\}$ quando $n \to \infty$, donde segue que a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, \mathrm{d}\tau = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, \mathrm{d}\tau$$

está bem definida.
Definamos

$$\begin{array}{rcccl} R(\lambda) & : & X & \longrightarrow & X \\ & & u & \longmapsto & R(\lambda)u = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, \mathrm{d}\tau. \end{array}$$

Afirmação 2: O operador $R(\lambda)$ é linear e limitado.
Linearidade: Segue da linearidade de $S(\tau)$ e da linearidade da integral.
Limitação:

$$\|R(\lambda)u\| = \left\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, \mathrm{d}\tau \right\| = \left\| \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, \mathrm{d}\tau \right\| = \lim_{t\to\infty} \left\| \int_0^{t} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, \mathrm{d}\tau \right\|.$$

Usando um raciocínio análogo ao que foi feito para obtermos (1.29) encontramos

$$\|R(\lambda)u\| \leq \frac{1}{\lambda} \, \|u\|, \tag{1.31}$$

mostrando a limitação, e a demonstração da Afirmação 2.
Assim, faz sentido calcular a norma de $R(\lambda)$, que é dada por

$$\|R(\lambda)\| = \sup_{\substack{u\in X \\ \|u\|\leq 1}} \|R(\lambda)u\|.$$

Por (1.31),

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}\,, \qquad \forall \lambda > 0. \tag{1.32}$$

Observação 1.8 *O operador $R(\lambda)$ também é denotado por $R(\lambda : A)$ (ver Pazy [22]).*

Teorema 1.21 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então $(\lambda I - A)$ é invertível para todo $\lambda > 0$ e*

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda). \tag{1.33}$$

Ainda mais, por (1.32), *tem-se para cada $\lambda > 0$*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Para provar (1.33), precisamos mostrar que, dado $u \in X$

$$(\lambda I - A)R(\lambda)u = u \tag{1.34}$$

e para $u \in D(A)$

$$R(\lambda)(\lambda I - A)u = u. \tag{1.35}$$

Prova de (1.34): Mostraremos inicialmente que $R(\lambda)u \in D(A)$. De fato, para cada $h > 0$

$$\left(\frac{S(h) - I}{h}\right)R(\lambda)u = \frac{1}{h}\left[S(h)\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\right]$$

o que implica

$$\left(\frac{S(h) - I}{h}\right)R(\lambda)u = \frac{1}{h}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau + h)u\,\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\right].$$

Fazendo uma mudança de variável, temos

$$\left(\frac{S(h) - I}{h}\right)R(\lambda)u = \frac{1}{h}\left[\int_h^\infty e^{-\lambda\tau}e^{\lambda h}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\right].$$

Conseqüentemente

$$\left(\frac{S(h) - I}{h}\right)R(\lambda)u = \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\right].$$

Agrupando os termos à direita da última igualdade, ficamos com

$$\left(\frac{S(h) - I}{h}\right)R(\lambda)u = \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\right)\underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau}_{R(\lambda)u} - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.36}$$

Afirmação 1: Quando $h \downarrow 0$, temos

1. $\dfrac{e^{\lambda h}-1}{h} \longrightarrow \lambda$

2. $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, \mathrm{d}\tau \longrightarrow u$

Tendo em vista que (1) é um limite bastante conhecido, mostraremos apenas (2).
Prova de (2):

$$\left\|\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - u\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - u\right\|$$

o que implica

$$\left\|\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - u\right\| \leq \left\|\frac{1}{h}\int_0^h (e^{-\lambda\tau}-1)S(\tau)u\mathrm{d}\tau\right\| + \left\|\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - u\right\|$$

usando propriedades de integral, o fato que o semigrupo é de contração e o Lema 1.2 obtemos

$$\left\|\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - u\right\| \leq \|u\|\,\frac{1}{h}\int_0^h \left|e^{-\lambda\tau}-1\right|\mathrm{d}\tau + o(h). \tag{1.37}$$

Usando o Lema C.1

$$\frac{1}{h}\int_0^h \left|e^{-\lambda\tau}-1\right|\mathrm{d}\tau \longrightarrow \left|e^{-\lambda 0}-1\right| = 0,$$

quando $h \downarrow 0$. Portanto passando ao limite em (1.37) com $h \downarrow 0$ segue (2).
Por (1.36) e pela Afirmação 1

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)R(\lambda)u \xrightarrow{h\downarrow 0} \lambda R(\lambda)u - u$$

logo $R(\lambda)u \in D(A)$ com

$$AR(\lambda)u = \lambda R(\lambda)u - u,$$

conseqüentemente

$$(\lambda I - A)R(\lambda)u = u$$

mostrando (1.34).
Prova de (1.35): Dado $u \in D(A)$, temos

$$R(\lambda)Au = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)Au\,\mathrm{d}\tau$$

e pelo Teorema 1.14

$$R(\lambda)Au = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}(S(\tau)u)'\,\mathrm{d}\tau,$$

isto é,

$$R(\lambda)Au = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\lambda\tau}(S(\tau)u)'\,\mathrm{d}\tau,$$

onde $(S(\tau)u)'$ é a derivada de $S(\cdot)u$ no ponto τ. Integrando por partes

$$R(\lambda)Au = \lim_{t\to\infty}\left[e^{-\lambda t}S(t)u - u + \lambda\int_0^t e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\right]$$

o que implica

$$R(\lambda)Au = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau - u.$$

Logo

$$R(\lambda)Au = \lambda R(\lambda)u - u,$$

ou seja,

$$R(\lambda)(\lambda I - A)u = u$$

mostrando (1.35).
De (1.34) e (1.35) segue (1.33). ∎

Observação 1.9 *Recordemos que se A é um operador linear, não necessariamente limitado em X, o* ***conjunto resolvente****, $\rho(A)$, de A é o conjunto de todos os números reais (ou complexos) λ tais que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe. O operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é chamado de* ***operador resolvente*** *de A associado a λ. O conjunto complementar do resolvente, $\sigma(A) = \mathbb{R}\backslash\rho(A)$ (ou $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$) é chamado de* ***espectro*** *de A.*

Deste modo, o gerador infinitesimal A de um semigrupo de contração verifica as seguintes condições

1. A é fechado
2. A é densamente definido
3. O operador $(\lambda I - A)^{-1}$ existe é linear e limitado para cada $\lambda > 0$, com

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}\,.$$

Observação 1.10 *Na verdade o fechamento de A está implicito na condição (3), pois para $\lambda = 1$ temos que o operador $I - A$ é inversível e com isso mostraremos que A é fechado. De fato, seja $\{u_n\} \subset D(A)$ com $u_n \to u$ e $Au_n \to v$. Então se $R = (I - A)^{-1}$, temos $RAu_n \to Rv$, uma vez que R é contínua. Mas*

$$RAu_n = Ru_n - u_n, \tag{1.38}$$

pois

$$u_n = R(I - A)u_n = R(u_n - Au_n) = Ru_n - RAu_n.$$

Passando ao limite em (1.38) obtemos $Rv = Ru - u$ o que implica

$$u = Ru - Rv = R(u - v) \in D(A).$$

Por outro lado

$$u = R(I - A)u = R(u - Au) = Ru - RAu,$$

logo $RAu = Ru - u$. Donde segue que $Rv = RAu$, sendo R injetiva concluímos que $v = Au$. Mostrando que A é fechado.

Mostraremos agora que as condições (1)-(3) são suficientes para que A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração. No que segue assumiremos que A satisfaz as condições (1)-(3) e $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Lema 1.3 *Seja A descrito acima. Então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda)u = u$$

para cada $u \in X$.

Demonstração: Faremos inicialmente para $u \in D(A)$. Se $u \in D(A)$, por (1.34) temos

$$\lambda R(\lambda)u - u = AR(\lambda)u. \tag{1.39}$$

Por (1.35)

$$R(\lambda)\lambda u - u = R(\lambda)Au. \tag{1.40}$$

Sendo $R(\lambda)$ linear temos

$$\lambda R(\lambda)u = R(\lambda)\lambda u. \tag{1.41}$$

De (1.39)-(1.41) obtemos

$$AR(\lambda)u = R(\lambda)Au. \tag{1.42}$$

Assim

$$\|\lambda R(\lambda)u - u\| = \|AR(\lambda)u\| = \|R(\lambda)Au\| \leq \frac{1}{\lambda}\,\|Au\|.$$

Sendo $\|Au\|$ constante e fazendo $\lambda \to \infty$ obtemos

$$\lambda R(\lambda)u \longrightarrow u, \qquad \text{para cada} \quad u \in D(A).$$

Para cada $u \in X$, considere $v \in D(A)$ suficientemente próximo de u. Então

$$\|\lambda R(\lambda)u - u\| = \|\lambda R(\lambda)u - \lambda R(\lambda)v + \lambda R(\lambda)v - v + v - u\|.$$

Usando a desigualdade triangular, a linearidade e a limitação de $R(\lambda)$ temos

$$\|\lambda R(\lambda)u - u\| \leq \|\lambda R(\lambda)\| \, \|u - v\| + \|\lambda R(\lambda)v - v\| + \|v - u\|.$$

Por (1.32)

$$\|\lambda R(\lambda)u - u\| \leq \|u - v\| + \|\lambda R(\lambda)v - v\| + \|v - u\| = 2\|u - v\| + \|\lambda R(\lambda)v - v\|$$

o que implica

$$\lambda R(\lambda)u \longrightarrow u, \qquad \text{para cada} \quad u \in X.$$

■

Agora introduziremos uma importante classe de operadores lineares limitados os quais se "aproxima"de A em um sentido a ser definido. Para $\lambda > 0$, considere

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda).$$

Sabemos, por (1.39) e (1.40), que

$$AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I = R(\lambda)A \qquad \text{em} \;\; D(A),$$

daí

$$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda) - \lambda I. \tag{1.43}$$

Mostramos que, $R(\lambda)u \in D(A)$, para $u \in X$, daí A_λ está definido para todo $u \in X$. Além disso, por (1.43) temos que A_λ é um operador linear e limitado, pois $R(\lambda)$ e I são lineares e limitados. A classe de operadores $\{A_\lambda\}$, para $\lambda > 0$, é conhecida na literatura como **a aproximação Yosida de A** e terá um papel importante no nosso estudo.

Lema 1.4 *Seja $u \in D(A)$. Então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda u = Au.$$

Demonstração: Note que

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda u = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda A R(\lambda)u = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda) A u.$$

Logo pelo Lema 1.3

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda u = Au.$$

■

Desde que A_λ é um operador linear limitado, temos que A_λ gera o semigrupo de contração $\left\{e^{tA_\lambda}\right\}_{t\geq 0}$. Note que

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| = \left\|e^{t(\lambda^2 R(\lambda)-\lambda I)}\right\|$$

pelo Lema D.2

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| = \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}e^{-t\lambda I}\right\|. \tag{1.44}$$

Afirmação 1: $\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}e^{-t\lambda I}\right\| = e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}\right\|$.
De fato, para cada $u \in X$,

$$e^{-t\lambda I}u = e^{-t\lambda}u.$$

Assim,

$$e^{t\lambda^2 R(\lambda)}e^{-t\lambda I}u = e^{t\lambda^2 R(\lambda)}e^{-t\lambda}u = e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2 R(\lambda)}u$$

para todo $u \in X$, logo

$$\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}e^{-t\lambda I}u\right\| = \left\|e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2 R(\lambda)}u\right\| = e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}u\right\|$$

conseqüentemente

$$\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}e^{-t\lambda I}\right\| = \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|\leq 1}} \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}e^{-t\lambda I}u\right\| = \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|\leq 1}} e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}u\right\| = e^{-t\lambda}\sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|\leq 1}} \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}u\right\|,$$

mostrando que

$$\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}e^{-t\lambda I}\right\| = e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}\right\|,$$

concluindo a demonstração da Afirmação 1.
Segue de (1.44) e da Afirmação 1 que

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| = e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}\right\| \leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\|R(\lambda)\|}$$

por (1.32)

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| \leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\frac{1}{\lambda}} = e^{-t\lambda}e^{t\lambda}$$

daí

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| \leq 1. \tag{1.45}$$

Portanto $\left\{e^{tA_\lambda}\right\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contração para cada $\lambda > 0$.

Observação 1.11 *Usando a linearidade dos operadores A_λ e o fato que $\lambda I - A$ e $\mu I - A$ comutam, mostra-se facilmente que para $\lambda, \mu > 0$, A_λ e A_μ comutam.*

Usando a Observação 1.11, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 1.22 *Seja A um operador densamente definido tal que para cada $\lambda > 0$, o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é linear e limitado,com*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração.
Demonstração: Dividiremos nossa demonstração em três etapas.
Primeira Etapa: Primeiramente encontraremos uma desigualdade que nos ajudará na segunda etapa. Seja $u \in X$. Para $\lambda, \mu > 0$, t fixo, note que

$$\begin{aligned} e^{t(s+h)A_\lambda} e^{t(1-(s+h))A_\mu} u - e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u &= e^{t(s+h)A_\lambda}\Big(e^{t(1-(s+h))A_\mu} u - e^{t(1-s)A_\mu} u\Big) \\ &+ \Big(e^{t(s+h)A_\lambda} - e^{tsA_\lambda}\Big) e^{t(1-s)A_\mu} u. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{e^{t(s+h)A_\lambda} e^{t(1-(s+h))A_\mu} u - e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u}{h} &= e^{t(s+h)A_\lambda}\left(\frac{e^{t(1-(s+h))A_\mu} - e^{t(1-s)A_\mu}}{h}\, u\right) \\ &+ e^{tsA_\lambda}\left(\frac{e^{thA_\lambda} - I}{h}\, e^{t(1-s)A_\mu} u\right). \end{aligned}$$

Passando ao limite com $h \to 0$, obtemos

$$\frac{d}{ds}\big(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u\big) = -e^{tsA_\lambda} tA_\mu e^{t(1-s)A_\mu} u + e^{tsA_\lambda} tA_\lambda e^{0tA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u$$

daí

$$\frac{d}{ds}\big(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u\big) = t\big[-e^{tsA_\lambda} A_\mu e^{t(1-s)A_\mu} u + e^{tsA_\lambda} A_\lambda e^{t(1-s)A_\mu} u\big].$$

Sabendo que A_λ e A_μ comutam,

$$\frac{d}{ds}\big(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u\big) = t\big[-e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} A_\mu u + e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} A_\lambda u\big],$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}\big(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u\big) = te^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}\big(-A_\mu u + A_\lambda u\big). \tag{1.46}$$

Por outro lado, pelo Teorema A.8

$$\int_0^1 \frac{d}{ds}\big(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u\big) ds = e^{tA_\lambda} e^{0A_\mu} u - e^{0A_\lambda} e^{tA_\mu} u = e^{tA_\lambda} u - e^{tA_\mu} u$$

logo

$$\big\|e^{tA_\lambda} u - e^{tA_\mu} u\big\| = \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}\big(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u\big) ds\right\| \le \int_0^1 \left\|\frac{d}{ds}\big(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u\big)\right\| ds$$

por (1.46)

$$\big\|e^{tA_\lambda} u - e^{tA_\mu} u\big\| \le \int_0^1 \big\|te^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}\big(-A_\mu u + A_\lambda u\big)\big\| ds$$

o que implica

$$\left\|e^{tA_\lambda}u - e^{tA_\mu}u\right\| \leq \int_0^1 t\left\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\right\|\left\|A_\mu u - A_\lambda u\right\|ds.$$

Usando (1.45) concluímos que

$$\left\|e^{tA_\lambda}u - e^{tA_\mu}u\right\| \leq t\left\|A_\lambda u - A_\mu u\right\|. \tag{1.47}$$

Segunda Etapa: Agora encontraremos um semigrupo de contração, que na terceira etapa mostraremos que é gerado por A. Para $u \in D(A)$, por (1.47) temos

$$\left\|e^{tA_\lambda}u - e^{tA_\mu}u\right\| \leq t\left\|A_\lambda u - A_\mu u\right\| \leq t\left\|A_\lambda u - Au\right\| + t\left\|A_\mu u - Au\right\|. \tag{1.48}$$

Pelo Lema 1.4 temos

$$\left\|A_\lambda u - Au\right\| \stackrel{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e

$$\left\|A_\mu u - Au\right\| \stackrel{\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daí, sendo X um espaço de Banach, para cada $u \in D(A)$ o limite

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}u$$

existe. Além disso, por (1.48) concluímos que esta convergência é uniforme em intervalos limitados com relação a t. Para $v \in X$, sendo $D(A)$ denso em X, existe $u \in D(A)$ tal que $\|v - u\|$ é suficientemente pequeno. Logo para $\lambda\,, \mu > 0$

$$\left\|e^{tA_\lambda}v - e^{tA_\mu}v\right\| \leq \left\|e^{tA_\lambda}v - e^{tA_\lambda}u\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}u - e^{tA_\mu}u\right\| + \left\|e^{tA_\mu}u - e^{tA_\mu}v\right\|$$

usando a linearidade de e^{tA_λ} e a limitação dada em (1.45), para todo λ, obtemos

$$\left\|e^{tA_\lambda}v - e^{tA_\mu}v\right\| \leq 2\|v - u\| + \left\|e^{tA_\lambda}u - e^{tA_\mu}u\right\|$$

o que implica na existência do limite

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}u,$$

para todo $u \in X$, sendo esta convergência uniforme em intervalos limitados com relação a t. Definamos, para cada $u \in X$

$$S(t)u = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}u.$$

Mostraremos que $\{S(t)\}$ é um semigrupo de contração. Com efeito, note inicialmente que $S(t)$ é linear, pois e^{tA_λ} e o limite são lineares. Além disso, $S(t)$ é limitado, pois

$$\left\|S(t)u\right\| = \left\|\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}u\right\| = \lim_{\lambda\to\infty}\left\|e^{tA_\lambda}u\right\| \leq \lim_{\lambda\to\infty}\left\|e^{tA_\lambda}\right\|\|u\| \leq \lim_{\lambda\to\infty} 1\|u\| = \|u\|$$

o que implica $\left\|S(t)\right\| \leq 1$. Agora mostraremos as propriedades de semigrupo.

1. Para todo $u \in X$
$$S(0)u = \lim_{\lambda\to\infty} e^{0A_\lambda}u = \lim_{\lambda\to\infty} Iu = u,$$
logo $S(0) = I$;

2. Note que
$$S(t+s)u = \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)A_\lambda}u = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}u. \tag{1.49}$$
Por outro lado,
$$S(t)S(s)u = S(t)\lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}u = \lim_{\lambda\to\infty} S(t)e^{sA_\lambda}u = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}u\right)$$
logo
$$S(t)S(s)u = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}u. \tag{1.50}$$
De (1.49) e (1.50) segue que
$$S(t+s)u = S(t)S(s)u \qquad \forall\, u \in X,$$
isto é,
$$S(t+s) = S(t)S(s);$$

3. Segue da definição que para cada $t \geq 0$ existe λ_1 tal que
$$\|e^{tA_\lambda}u - S(t)u\| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para} \quad \lambda \geq \lambda_1$$
logo para $\lambda = \lambda_1$ temos
$$\|e^{tA_{\lambda_1}}u - S(t)u\| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall t \geq 0.$$
Sendo A_{λ_1} um operador linear limitado temos que $\{e^{tA_{\lambda_1}}\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, logo para t próximo de zero, pela direita,
$$\|e^{tA_{\lambda_1}}u - u\| < \frac{\epsilon}{2}.$$
Conseqüentemente, para t próximo de zero, pela direita,
$$\|S(t)u - u\| \leq \|e^{tA_{\lambda_1}}u - S(t)u\| + \|e^{tA_{\lambda_1}}u - u\| < \epsilon,$$
isto é,
$$S(t)u \xrightarrow{t\downarrow 0} u.$$

Terceira Etapa: Mostraremos que A é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}$. Seja F o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}$, mostraremos que $A = F$. Seja $u \in D(A)$, então

$$S(t)u - u = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}u - u = \lim_{\lambda\to\infty} \big(e^{tA_\lambda}u - u\big). \tag{1.51}$$

Sabemos que A_λ gera o C_0-semigrupo $\{e^{tA_\lambda}\}$, daí pelo Teorema 1.14 temos

$$\frac{d}{dt}(e^{tA_\lambda}u) = e^{tA_\lambda}A_\lambda u$$

logo integrando sobre $(0,t)$ e aplicando o Teorema A.8 obtemos

$$e^{tA_\lambda}u - u = \int_0^t e^{\tau A_\lambda}A_\lambda u \,\mathrm{d}\tau. \tag{1.52}$$

De (1.51) e (1.52)

$$S(t)u - u = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{\tau A_\lambda}A_\lambda u\,\mathrm{d}\tau = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\int_0^t e^{\tau A_\lambda}\big(A_\lambda u - Au\big)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t e^{\tau A_\lambda}Au\,\mathrm{d}\tau\right]. \tag{1.53}$$

Afirmação: Quando $\lambda \to \infty$, temos:

1. $\displaystyle\int_0^t e^{\tau A_\lambda}\big(A_\lambda u - Au\big)\,\mathrm{d}\tau \longrightarrow 0;$

2. $\displaystyle\int_0^t e^{\tau A_\lambda}Au\,\mathrm{d}\tau \longrightarrow \int_0^t S(\tau)Au\,\mathrm{d}\tau.$

Justificativa de (1): Note que,

$$\left\|\int_0^t e^{\tau A_\lambda}\big(A_\lambda u - Au\big)\,\mathrm{d}\tau\right\| \le \int_0^t \big\|e^{\tau A_\lambda}\big\|\big\|A_\lambda u - Au\big\|\,\mathrm{d}\tau \le \int_0^t \big\|A_\lambda u - Au\big\|\,\mathrm{d}\tau$$

daí

$$\left\|\int_0^t e^{\tau A_\lambda}\big(A_\lambda u - Au\big)\,\mathrm{d}\tau\right\| \le t\big\|A_\lambda u - Au\big\|.$$

Fazendo $\lambda \to \infty$, temos $A_\lambda u \to Au$, donde segue o desejado.
Justificativa de (2): Note que,

$$\left\|\int_0^t e^{\tau A_\lambda}Au\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t S(\tau)Au\,\mathrm{d}\tau\right\| \le \int_0^t \big\|e^{\tau A_\lambda}Au - S(\tau)Au\big\|\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.54}$$

Considerando a família de funções dada por $H_\lambda(\tau) = \big\|e^{\tau A_\lambda}Au - S(\tau)Au\big\|$ temos,

- $H_\lambda(\tau) \longrightarrow 0$ quando $\lambda \to \infty$ (pela definição do semigrupo $\{S(t)\}$);
- $0 \leq H_\lambda(\tau) \leq 2\|Au\| \in L^1([0,t])$.

Portanto pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.6), segue que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t H_\lambda(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0,$$

isto é,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t \left\| e^{\tau A_\lambda} Au - S(\tau)Au \right\| \mathrm{d}\tau = 0. \tag{1.55}$$

De (1.54) e (1.55), segue o desejado.
Da afirmação anterior e de (1.53) obtemos

$$S(t)u - u = \int_0^t S(\tau)Au\, \mathrm{d}\tau$$

daí

$$\frac{S(t)u - u}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)Au\, \mathrm{d}\tau$$

fazendo $t \downarrow 0$, temos pelo Lema 1.2 que

$$\frac{S(t)u - u}{t} \longrightarrow S(0)Au = Au,$$

donde segue que $u \in D(F)$ e $Fu = Au$. Deste modo $D(A) \subset D(F)$ e $F|_{D(A)} = A$. Seja $u \in D(F)$. Considerando $v = R(1)(I - F)u$, temos $v \in D(A)$ e

$$(I - A)v = (I - A)(I - A)^{-1}(I - F)u = (I - F)u$$

o que implica

$$v - Av = u - Fu \Longrightarrow v - Fv = u - Fu \Longrightarrow (I - F)(v - u) = 0.$$

Sendo $(I - F)$ injetivo segue que $v = u$. Logo $u \in D(A)$. Portanto $D(F) \subset D(A)$. De onde concluímos que $D(F) = D(A)$, o que implica $F \equiv A$. ∎

Agora estamos aptos a enunciar o teorema mais importante deste capítulo devido aos matemáticos Hille[1] e Yosida[2], o qual é uma conseqüência dos Teoremas 1.21 e 1.22.

[1]**Einar Hille** (1894-1980): matemático Americano que trabalhou na área de equações integrantes, equações diferenciais, funções especiais, séries de Dirichlet e série de Fourier, depois se interessou por Análise Funcional.

[2]**Kôsaku Yosida** (1909-1990): matemático Japones que trabalhou na área de Análise Funcional.

Teorema 1.23 ***(Hille-Yosida)*** *Um operador linear ilimitado A em um espaço de Banach X é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração se, e somente se,*

1. *A é fechado;*
2. *A é densamente definido;*
3. *Para cada $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado com*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}\,.$$

O Teorema de Hille-Yosida tem grande importância no estudo de solução para problemas de valor inicial, do tipo

$$(P) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in D(A), \end{cases}$$

pois com o Teorema de Hille-Yosida, a solução de (P) se reduz ao estudo da existência de solução da equação

$$\lambda u - Au = v$$

aliada de uma estimativa adequada da mesma.

Neste momento faremos um estudo, que será utilizado na demonstração do próximo teorema. Seja $\{S(t)\}$ um C_0-semigrupo gerado por A, tal que

$$\|S(t)\| \leq e^{\omega t},$$

para algum $\omega \geq 0$ e para todo $t \geq 0$. Então $S_1(t) = e^{-\omega t}S(t)$, é um semigrupo de contração, pois

$$\|S_1(t)\| = \|e^{-\omega t}S(t)\| = e^{-\omega t}\|S(t)\| \leq e^{-\omega t}e^{\omega t} = 1,$$

e $A - \omega I$ é o gerador de $\{S_1(t)\}$.
De fato, note que

$$\frac{S_1(t)u - u}{t} = \frac{e^{-\omega t}S(t)u - u}{t} = \frac{e^{-\omega t}S(t)u - e^{-\omega t}u + e^{-\omega t}u - u}{t}$$

o que implica

$$\frac{S_1(t)u - u}{t} = e^{-\omega t}\frac{S(t)u - u}{t} + \frac{e^{-\omega t} - 1}{t}\,u.$$

Passando ao limite com $t \downarrow 0$ obtemos

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{S_1(t)u - u}{t} = Au - \omega u = (A - \omega I)u.$$

Logo $A - \omega I$ é o gerador de $\{S_1(t)\}$.

Agora se B é o gerador infinitesimal de $\{S_1(t)\}$ temos que $B+\omega I$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}$, pois

$$\frac{S(t)u-u}{t} = \frac{S(t)u - e^{-\omega t}S(t)u + e^{-\omega t}S(t)u - u}{t} = \frac{e^{-\omega t}S(t)u-u}{t} - \frac{e^{-\omega t}S(t)u - S(t)u}{t}.$$

Logo

$$\frac{S(t)u-u}{t} = \frac{e^{-\omega t}S(t)u-u}{t} - \frac{e^{-\omega t}-1}{t}\,S(t)u.$$

Passando ao limite com $t \downarrow 0$ obtemos

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)u-u}{t} = Bu - (-\omega)S(0)u = Bu + \omega u = (B+\omega I)u,$$

mostrando que $B + \omega I$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}$.

Teorema 1.24 *O operador A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}$, com*

$$\|S(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad \omega \geq 0, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{1.56}$$

se, e somente se, é fechado, densamente definido e para cada $\lambda > \omega$, a inversa $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq (\lambda - \omega)^{-1}. \tag{1.57}$$

Demonstração: Suponha que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo com a propriedade (1.56), então pelo Corolário 1.18 temos que A é fechado e densamente definido . Falta mostrar que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe, para $\lambda > \omega$, e que vale (1.57). Note que

$$\lambda I - A = \lambda I - \omega I + \omega I - A = (\lambda - \omega)I - (A - \omega I).$$

Pelo estudo feito anteriormente $A - \omega I$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração, logo $(\alpha I - (A - \omega I))^{-1}$ existe para cada $\alpha > 0$ e

$$\|(\alpha I - (A - \omega I))^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}\,.$$

Para $\alpha = \lambda - \omega$ temos que $((\lambda - \omega)I - (A - \omega I))^{-1}$ existe e

$$\|((\lambda - \omega)I - (A - \omega I))^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}\,,$$

isto é, $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}\,.$$

Por outro lado, suponha que A é fechado densamente definido e que para cada $\lambda > \omega$, a inversa $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e vale (1.57). Considerando $\alpha = \lambda - \omega$, temos $\alpha > 0$, $\lambda = \alpha + \omega$, e por (1.57)

$$\|((\alpha+\omega)I - A)^{-1}\| \leq \alpha^{-1},$$

isto é,

$$\|(\alpha I - (A + \omega I))^{-1}\| \leq \alpha^{-1}. \tag{1.58}$$

Fazendo $B = A - \omega I$, temos que B é fechado densamente definido e por (1.58)

$$\|(\alpha I - B)^{-1}\| \leq \alpha^{-1}.$$

Portanto pelo Teorema 1.22 segue que B gera um semigrupo de contração $\{S_1(t)\}$. Considerando $S(t) = e^{\omega t}S_1(t)$, temos que $\{S(t)\}$ é um C_0-semigrupo satisfazendo (1.56), e pelo estudo feito anteriormente $A = B + \omega I$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}$, de onde concluímos a demonstração. ■

Na demonstração do Teorema de Hille-Yosida expressamos o semigrupo gerado por A em termos da exponencial e^{tA_λ} quando $\lambda \to \infty$. Agora deduziremos uma outra definição para $S(t)$ em termos do próprio A. Estudaremos o caso em que $\{S(t)\}$ é um semigrupo de contração, o caso mais geral, onde $\{S(t)\}$ é um C_0-semigrupo pode ser encontrado em Pazy [14].

Lema 1.5 *Seja $A : X \to X$ um operador linear limitado com $\|A\| \leq 1$. Então, para qualquer inteiro positivo n e qualquer $u \in X$,*

$$\left\|e^{n(A-I)}u - A^n u\right\| \leq \sqrt{n}\|Au - u\|.$$

Demonstração: A demonstração será dividida em etapas.

Primeira Etapa: Sejam k, n números inteiros não negativos. Se $k \geq n$, temos

$$\|A^k u - A^n u\| = \|A^k u - A^{k-1}u + A^{k-1}u - A^{k-2}u + A^{k-2}u - \ldots + A^{n+1}u - A^n u\|.$$

Usando a linearidade de A

$$\|A^k u - A^n u\| = \left\|\sum_{j=n}^{k-1} A^j(Au - u)\right\| \leq \sum_{j=n}^{k-1}\|A^j\|\|Au - u\| \leq \|Au - u\|\sum_{j=n}^{k-1}\|A^j\|.$$

Sendo $\|A\| \leq 1$, segue que $\|A^j\| \leq 1$. Daí

$$\|A^k u - A^n u\| \leq (k - n)\|Au - u\|.$$

Assim para quaisquer dois números não negativos k, n temos

$$\|A^k u - A^n u\| \leq |k-n| \|Au - u\|.$$

Segunda Etapa: Agora para $t > 0$,

$$\left\| \ e^{t(A-I)} u - A^n u \right\| = \left\| \ e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \ A^k u - A^n u \right\| = \left\| \ e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \ A^k u - \ e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \ A^n u \right\|.$$

Logo

$$\left\| \ e^{t(A-I)} u - A^n u \right\| = \left\| \ e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A^k u - A^n u) \right\| \leq e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|A^k u - A^n u\|$$

e, pela primeira etapa,

$$\left\| \ e^{t(A-I)} u - A^n u \right\| \leq e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} |k-n| \|Au - u\| \leq e^{-t} \|Au - u\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} |k-n|. \tag{1.59}$$

Estudaremos à seguir a convergência da série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} |k-n|.$$

Considere as seguintes seqüências

$$x_k = \left(\frac{t^k}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{e} \qquad y_k = \left(\frac{t^k}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} |k-n|.$$

Mostraremos que $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ $\subset l^2$. Note que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t < \infty,$$

logo $\{x_k\}$ $\subset l^2$. Com relação a $\{y_k\}$ temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \ (k-n)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \ (k^2 - 2kn + n^2).$$

Afirmações:

1. $n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} < \infty$;

2. $2n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, k < \infty$;

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, k^2 < \infty$.

Justificativa de (1):

$$n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = n^2 e^t < \infty.$$

Justificativa de (2):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{(j+1)}}{j\,!} = t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j\,!} = te^t.$$

Daí

$$2n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, k = 2nte^t < \infty.$$

Justificativa de (3):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k-1)!}\, k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{(j+1)}}{j\,!}\, (j+1).$$

Usando as idéias de (2) encontramos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, k^2 = t^2 e^t + te^t < \infty.$$

Mostrando as afirmações. Segue das afirmações (1)-(3) que

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2 = t^2 e^t + te^t - 2nte^t + n^2 e^t = (t^2 - (2n-1)t + n^2)e^t < \infty. \tag{1.60}$$

Logo $\{y_k\} \subset l^2$. Sendo l^2 um espaço de Hilbert e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} |k-n| = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, y_k,$$

segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}|k-n| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(k-n)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.61}$$

De (1.60) e (1.61) temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}|k-n| \leq (e^t)^{\frac{1}{2}} \left[(t^2-(2n-1)t+n^2)e^t\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}|k-n| \leq \left[(t^2-(2n-1)t+n^2)\right]^{\frac{1}{2}} e^t. \tag{1.62}$$

De (1.59) e (1.62) temos

$$\left\| \, e^{t(A-I)}u - A^n u\right\| \leq e^{-t}\|Au-u\| \left[(t^2-(2n-1)t+n^2)\right]^{\frac{1}{2}} e^t$$

e, portanto,

$$\left\| \, e^{t(A-I)}u - A^n u\right\| \leq \|Au-u\| \left[(t^2-(2n-1)t+n^2)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.63}$$

Fazendo $t=n$ em (1.63) concluímos

$$\left\| \, e^{n(A-I)}u - A^n u\right\| \leq \sqrt{n}\,\|Au-u\|.$$

■

Teorema 1.25 *Seja $\{S(t)\}$ um semigrupo de contração com gerador infinitesimal A. Então, para qualquer $u \in X$,*

$$S(t)u = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}\,A\right)^{-n} u = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t}\,R\left(\frac{n}{t}\right)\right)^{n} u.$$

Demonstração: Note que, para todo $u \in D(A)$, temos

$$\left(I - \frac{t}{n}\,A\right)u = u - A\Big(\frac{t}{n}\,u\Big) = \frac{n}{t}\,v - Av,$$

para $v = \frac{t}{n}\,u$. Portanto

$$\left(I - \frac{t}{n}\,A\right)u = \left(\frac{n}{t}\,I - A\right)v,$$

o que implica

$$\left(I - \frac{t}{n}\,A\right)u = \frac{t}{n}\left(\frac{n}{t}\,I - A\right)u,$$

donde segue

$$I - \frac{t}{n}\,A = \frac{t}{n}\left(\frac{n}{t}\,I - A\right).$$

Pelo Teorema de Hille-Yosida, temos que $\left(\frac{n}{t}\,I - A\right)^{-1}$ existe, para todo $t > 0$, e sabendo que

$$\left(\frac{t}{n}\left(\frac{n}{t}\,I - A\right)\right)^{-1} = \frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}\,I - A\right)^{-1}$$

temos que $\left(I - \frac{t}{n}\,A\right)^{-1}$ existe para todo $t > 0$, e

$$\left(I - \frac{t}{n}\,A\right)^{-1} = \frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}\,I - A\right)^{-1}$$

implicando na igualdade

$$\frac{n}{t}\,R\left(\frac{n}{t}\right) = \frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}\,I - A\right)^{-1} = \left(I - \frac{t}{n}\,A\right)^{-1}. \tag{1.64}$$

Sabemos que

$$S(t)u = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}u.$$

Considerando $\lambda = \frac{n}{t}$ podemos escrever

$$S(t)u = \lim_{n\to\infty} e^{tA_{\frac{n}{t}}}u.$$

Mas

$$tA_{\frac{n}{t}} = t\left[\frac{n^2}{t^2}\,R\left(\frac{n}{t}\right) - \frac{n}{t}I\right] = \frac{n^2}{t}\,R\left(\frac{n}{t}\right) - nI = n\left(\frac{n}{t}\,R\left(\frac{n}{t}\right) - I\right). \tag{1.65}$$

Agora

$$\left\|\frac{n}{t}\,R\left(\frac{n}{t}\right)\right\| = \left\|\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}\,I - A\right)^{-1}\right\| = \frac{n}{t}\left\|\left(\frac{n}{t}\,I - A\right)^{-1}\right\|$$

e pelo Teorema 1.21,

$$\left\|\frac{n}{t}\,R\left(\frac{n}{t}\right)\right\| \leq \frac{n}{t}\,\frac{1}{\frac{n}{t}}.$$

Logo
$$\left\| \frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right\| \leq 1.$$

Assim, aplicando o Lema 1.5, para o operador $\widetilde{A} = \dfrac{n}{t}\, R\Big(\dfrac{n}{t}\Big)$ obtemos
$$\left\| \left[\exp\left\{ n\left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) - I \right) \right\} \right] u - \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n u \right\| \leq \sqrt{n} \left\| \frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) u - u \right\|. \tag{1.66}$$

Na demonstração do Lema 1.3 vimos que se $u \in D(A)$, então para todo $\lambda > 0$
$$\|\lambda R(\lambda)u - u\| \leq \frac{1}{\lambda}\, \|Au\|.$$

Daí para $\lambda = \frac{n}{t}$
$$\left\| \frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) u - u \right\| \leq \frac{t}{n}\, \|Au\|. \tag{1.67}$$

Combinando os resultados encontrados em (1.65)-(1.67) temos
$$\left\| e^{tA_{\frac{n}{t}}} u - \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n u \right\| \leq \frac{t}{\sqrt{n}}\, \|Au\|, \qquad \text{para} \quad u \in D(A). \tag{1.68}$$

Passando ao limite em (1.68), com $n \to \infty$
$$S(t)u = \lim_{n\to\infty} e^{tA_{\frac{n}{t}}} u = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n u, \qquad \text{para todo} \quad u \in D(A). \tag{1.69}$$

Agora para $v \in X$, existe $u \in D(A)$, tal que $\|v - u\|$ é suficientemente pequeno. Note que
$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_{\frac{n}{t}}} v - \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n v \right\| &\leq \|e^{tA_{\frac{n}{t}}} v - e^{tA_{\frac{n}{t}}} u\| + \left\| e^{tA_{\frac{n}{t}}} u - \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n u \right\| \\ &\quad + \left\| \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n v - \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n u \right\|. \end{aligned}$$

Sabendo que $e^{tA_{\frac{n}{t}}}$, $\left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n$ são operadores lineares limitados
$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_{\frac{n}{t}}} v - \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n v \right\| &\leq e^{tA_{\frac{n}{t}}} \|v - u\| + \left\| e^{tA_{\frac{n}{t}}} u - \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n u \right\| \\ &\quad + \left(\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t}\right) \right)^n \|v - u\|. \end{aligned}$$

Por (1.69) e sabendo que u está suficientemente próximo de v, concluímos que

$$S(t)v = \lim_{n\to\infty} e^{tA_{\frac{n}{t}}} v = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n v, \qquad \text{para todo} \quad v \in X. \tag{1.70}$$

De (1.64) e (1.70)

$$S(t)v = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} v = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n v, \qquad \text{para todo} \quad v \in X. \tag{1.71}$$

■

A fórmula encontrada em (1.71) é conhecida na literatura como a **Fórmula Exponencial para** $S(t)$.

1.4 Regularidade para Semigrupos de Contração

Nesta seção estudaremos alguns resultados de regularidade para semigrupos de contração. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, definimos

$$D(A^2) = \big\{u \in D(A);\ Au \in D(A)\big\}$$

e de forma geral, para $k \geq 2$

$$D(A^k) = \big\{u \in D(A^{k-1});\ Au \in D(A^{k-1})\big\}.$$

Lema 1.6 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $\{S(t)\}$. Então $D(A^2)$ é denso em $D(A)$, com relação a norma do gráfico.*
Demonstração: Seja $u \in D(A)$. Definamos, para $\lambda > 0$

$$u_\lambda = \lambda R(\lambda)u.$$

Já vimos que se $u \in X$ então $R(\lambda)u \in D(A)$, em particular, sendo $u \in D(A)$ temos $\lambda R(\lambda)u \in D(A)$, isto é, $u_\lambda \in D(A)$. Do Lema 1.3, $u_\lambda \to u$ em X, quando $\lambda \to \infty$. Agora por definição de $R(\lambda)$, temos $u = \frac{1}{\lambda}(\lambda I - A)u_\lambda$, o que implica $Au_\lambda = \lambda u_\lambda - \lambda u \in D(A)$, conseqüentemente $u_\lambda \in D(A^2)$. Porém

$$Au_\lambda = \lambda u_\lambda - \lambda u = \lambda(\lambda R(\lambda)u) - \lambda u = \lambda^2 R(\lambda)u - \lambda u = (\lambda^2 R(\lambda) - \lambda)u = A_\lambda u. \tag{1.72}$$

Pelo Lema 1.4 e por (1.72) temos $Au_\lambda \to Au$, para todo $u \in D(A)$, quando $\lambda \to \infty$. Assim

$$u_\lambda \to u \qquad \text{e} \qquad Au_\lambda \to Au, \qquad \text{para todo} \quad u \in D(A), \quad \text{quando} \quad \lambda \to \infty,$$

mostrando que $u_\lambda \to u$ na norma do gráfico, quando $\lambda \to \infty$, conseqüentemente, $D(A^2)$ é denso em $D(A)$ na norma do gráfico. ■

Teorema 1.26 *Seja $u_0 \in D(A^2)$, onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $\{S(t)\}$. Então a solução $u(t) = S(t)u_0$ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

satisfaz

$$u \in C^2([0,\infty); X) \cap C^1([0,\infty); D(A)) \cap C([0,\infty); D(A^2)).$$

De forma geral, se $u_0 \in D(A^k)$, $k \geq 2$, então u é tal que

$$u \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0,\infty); D(A^j)),$$

onde $A^0 = I$.

Demonstração: Seja $u_0 \in D(A^2)$, então $Au_0 \in D(A)$. Conseqüentemente a função dada por $v(t) = S(t)Au_0$ é diferenciável e verifica o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = Av(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = Au_0, \end{cases}$$

com $v(t) = S(t)Au_0 \in D(A)$ para todo $t \geq 0$. Mas

$$v(t) = S(t)Au_0 = AS(t)u_0 = Au(t) = \frac{du}{dt}(t),$$

logo $Au \in D(A)$, daí $u \in D(A^2)$. Note que, sendo $Au_0 \in D(A)$ temos pelo Teorema 1.14 que

$$v = S(\cdot)Au_0 \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A)),$$

isto é,

$$\frac{du}{dt} \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A))$$

de onde podemos concluir que

$$u \in C^2([0,\infty); X) \cap C^1([0,\infty); D(A)). \tag{1.73}$$

Afirmação: Sendo $v = Au$, temos

$$u = S(\cdot)u_0 \in C([0,\infty); D(A^2)).$$

De fato, uma vez que $u \in C([0,\infty); D(A))$, se $t \to t_0$, devemos ter

$$u(t) \to u(t_0) \qquad \text{e} \qquad Au(t) \to Au(t_0).$$

Precisamos mostrar que

$$A^2u(t) \to A^2u(t_0).$$

Sendo $v \in C([0,\infty); D(A))$, se $t \to t_0$ temos

$$v(t) \to v(t_0) \qquad \text{e} \qquad Av(t) \to Av(t_0),$$

mas $v = Au$. Logo

$$A(Au(t)) \to A(Au(t_0)),$$

isto é,

$$A^2u(t) \to A^2u(t_0).$$

Daí

$$u(t) \to u(t_0) \qquad \text{e} \qquad A^2u(t) \to A^2u(t_0),$$

o que implica

$$u \in C([0,\infty); D(A^2)). \tag{1.74}$$

De (1.73) e (1.74) obtemos

$$u \in C^2([0,\infty); X) \cap C^1([0,\infty); D(A)) \cap C([0,\infty); D(A^2)).$$

Para o caso geral, $k \geq 2$, faremos por indução em k. Já vimos que o resultado é válido para $k = 2$. Suponha que o resultado seja válido para $k-1$. Mostraremos , com isso, que o resultado vale para k. Seja $u_0 \in D(A^k)$, então $Au_0 \in D(A^{k-1})$, logo pela hipótese de indução

$$v = S(\cdot)Au_0 \in \bigcap_{j=0}^{k-1} C^{k-1-j}([0,\infty); D(A^j)), \tag{1.75}$$

mas $v(t) = \frac{du}{dt}(t)$, daí

$$u \in \bigcap_{j=0}^{k-1} C^{k-j}([0,\infty); D(A^j)). \tag{1.76}$$

Fazendo $j = k-1$ em (1.75), temos $v \in C([0,\infty); D(A^{k-1}))$. Sendo $v = Au$, repetindo um raciocínio análogo ao caso $k = 2$ encontramos

$$u \in C([0,\infty); D(A^k)). \tag{1.77}$$

De (1.76) e (1.77) concluímos que

$$u \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0,\infty); D(A^j)).$$

■

Corolário 1.27 *Seja $u_0 \in D(A)$, onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $\{S(t)\}$. Então se $u(t) = S(t)u_0$, temos*

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq \|Au_0\|.$$

Demonstração: Se $u_0 \in D(A^2)$, então $v(t) = S(t)Au_0$, verifica $\frac{du}{dt}(t) = v(t)$, daí

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|v(t)\| = \|S(t)Au_0\| \leq \|S(t)\|\|Au_0\| \leq \|Au_0\|.$$

Se $u_0 \in D(A)$, então pelo Lema 1.6, existe $\{u_0^n\} \subset D(A^2)$ tal que

$$u_0^n \to u_0 \qquad \text{e} \qquad Au_0^n \to Au_0.$$

Considerando $u^n(t) = S(t)u_0^n \in X$, temos

$$\left\|u^n(t) - u^m(t)\right\| = \left\|S(t)u_0^n - S(t)u_0^m\right\| = \left\|S(t)(u_0^n - u_0^m)\right\| \leq \left\|u_0^n - u_0^m\right\| \tag{1.78}$$

e

$$\left\| \frac{du^n}{dt}(t) - \frac{du^m}{dt}(t) \right\| = \left\| \frac{d}{dt}(S(t)u_0^n) - \frac{d}{dt}(S(t)u_0^m) \right\| = \left\|S(t)Au_0^n - S(t)Au_0^m\right\|.$$

Logo

$$\left\| \frac{du^n}{dt}(t) - \frac{du^m}{dt}(t) \right\| = \left\|S(t)\big(Au_0^n - Au_0^m\big)\right\| \leq \left\|Au_0^n - Au_0^m\right\|. \tag{1.79}$$

Sendo $\{u_0^n\}$ e $\{Au_0^n\}$ seqüências de Cauchy, temos que as seqüências $\{u^n(t)\}$ e $\{\frac{du^n}{dt}(t)\}$ são seqüências de Cauchy para todo $t \geq 0$. Uma vez que X é um espaço de Banach segue que $\{u^n\}$ e $\{\frac{du^n}{dt}\}$ são uniformemente convergente, pois as estimativas encontradas em (1.78) e (1.79) não depende de t. Mais ainda

$$u^n \longrightarrow u \qquad \text{e} \qquad \frac{du^n}{dt} \longrightarrow \frac{du}{dt}, \tag{1.80}$$

pois

$$u^n(t) = S(t)u_0^n \to S(t)u_0 = u(t)$$

e

$$\frac{du^n}{dt}(t) = S(t)Au_0^n \to S(t)Au_0 = v(t) = \frac{du}{dt}(t).$$

Recordando que limite uniforme implica em limite pontual, temos pela unicidade do limite que (1.80) é válido. Note que

$$\left\|\frac{du^n}{dt}(t)\right\| = \left\|S(t)Au_0^n\right\| \leq \|Au_0^n\|,$$

e sendo $\|\cdot\|$ uma função contínua encontramos por passagem ao limite, com $n \to \infty$, a desigualdade

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| \leq \|Au_0\|.$$

■

Teorema 1.28 *Seja $u_0 \in D(A^2)$. Se $u_\lambda(t)$ é a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) = A_\lambda u_\lambda(t) \\ u(0) = Au_0, \end{cases}$$

onde A_λ é à aproximação de Yosida de A, tem-se

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) \longrightarrow \frac{du}{dt}(t), \qquad \text{quando} \quad \lambda \to \infty$$

uniformemente em cada intervalo limitado com respeito a t, onde $u(t) = S(t)u_0$.

Demonstração: Para cada $\lambda > 0$, seja $v_\lambda(t) = \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) = S(t)A_\lambda u_\lambda(t)$. Então, v_λ é solução do seguinte problema

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{dv_\lambda}{dt}(t) = A_\lambda v_\lambda(t) \\ v_\lambda(0) = A_\lambda u_0. \end{cases}$$

De fato, primeiramente note que $v_\lambda(0) = S(0)A_\lambda u_0 = A_\lambda u_0$. Por outro lado,

$$\frac{v_\lambda(t+h) - v_\lambda(t)}{h} = \frac{A_\lambda u_\lambda(t+h) - A_\lambda u_\lambda(t)}{h} = A_\lambda\left(\frac{u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)}{h}\right).$$

Sendo A_λ contínuo, passando ao limite com $h \to 0$ obtemos

$$\frac{dv_\lambda}{dt}(t) = A_\lambda \frac{du_\lambda}{dt}(t) = A_\lambda v_\lambda(t).$$

Mas pelo Apêndice D, sendo A_λ limitado a única solução do problema $(*)$ é dada por

$$v_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}A_\lambda u_0,$$

desta forma usando um raciocínio análogo ao que foi feito na primeira etapa da demonstração do Teorema 1.22, tem-se

$$\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\| = \left\|e^{tA_\lambda}A_\lambda u_0 - e^{tA_\mu}A_\mu u_0\right\| \leq t\left\|A_\lambda^2 u_0 - A_\mu^2 u_0\right\|. \tag{1.81}$$

Agora, desde que $u_0 \in D(A^2) \subset D(A)$, temos

$$A_\lambda u_0 = \lambda A R(\lambda) u_0$$

pelo Lema C.2 temos que A comuta com $R(\lambda)$, daí

$$A_\lambda u_0 = \lambda R(\lambda) A u_0$$

o que implica

$$A_\lambda^2 u_0 = (\lambda R(\lambda))^2 A^2 u_0.$$

Considerando $\overline{u}_\lambda = \lambda R(\lambda) A^2 u_0$, temos

$$\left\|A_\lambda^2 u_0 - A^2 u_0\right\| \leq \left\|\lambda R(\lambda)\overline{u}_\lambda - \overline{u}_\lambda\right\| + \left\|\lambda R(\lambda) A^2 u_0 - A^2 u_0\right\|. \tag{1.82}$$

Observe que

$$\left\|\lambda R(\lambda)\overline{u}_\lambda - \overline{u}_\lambda\right\| = \left\|\lambda R(\lambda)\big(\lambda R(\lambda) A^2 u_0\big) - \lambda R(\lambda) A^2 u_0\right\| = \left\|\lambda R(\lambda)\big(\lambda R(\lambda) A^2 u_0 - A^2 u_0\big)\right\|$$

o que implica

$$\left\|\lambda R(\lambda)\overline{u}_\lambda - \overline{u}_\lambda\right\| \leq \left\|\lambda R(\lambda)\right\|\left\|\lambda R(\lambda) A^2 u_0 - A^2 u_0\right\| = \lambda\left\|R(\lambda)\right\|\left\|\lambda R(\lambda) A^2 u_0 - A^2 u_0\right\|$$

sabendo que $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ concluímos que

$$\left\|\lambda R(\lambda)\overline{u}_\lambda - \overline{u}_\lambda\right\| \leq \left\|\lambda R(\lambda) A^2 u_0 - A^2 u_0\right\|. \tag{1.83}$$

De (1.82) e (1.83)

$$\left\|A_\lambda^2 u_0 - A^2 u_0\right\| \leq 2\left\|\lambda R(\lambda) A^2 u_0 - A^2 u_0\right\|.$$

Aplicando o Lema 1.3, obtemos

$$A_\lambda^2 u_0 \longrightarrow A^2 u_0 \qquad \text{quando} \quad \lambda \to \infty.$$

Sendo

$$\left\|A_\lambda^2 u_0 - A_\mu^2 u_0\right\| \leq \left\|A_\lambda^2 u_0 - A^2 u_0\right\| + \left\|A_\mu^2 u_0 - A^2 u_0\right\|$$

obtemos

$$\left\|A_\lambda^2 u_0 - A_\mu^2 u_0\right\| \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad \lambda\,, \mu \to \infty. \tag{1.84}$$

Portanto de (1.81) e (1.84), concluímos que para cada $t > 0$ a seqüência $\{v_\lambda(t)\}$ é de Cauchy em X, logo é convergente, mais ainda, em intervalos limitados com relação a t, esta convergência é uniforme. Note que

$$v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt} = A_\lambda u_\lambda = (\lambda A R(\lambda))u_\lambda = A((\lambda R(\lambda))u_\lambda.$$

Agora observe que

$$\big\|\lambda R(\lambda)u_\lambda - u\big\| \leq \big\|\lambda R(\lambda)u_\lambda - \lambda R(\lambda)u\big\| + \big\|\lambda R(\lambda)u - u\big\|$$

o que implica

$$\big\|\lambda R(\lambda)u_\lambda - u\big\| \leq \|u_\lambda - u\| + \big\|\lambda R(\lambda)u - u\big\|.$$

Desde que

$$u_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}u_0 \longrightarrow S(t)u_0 = u(t)$$

e

$$\lambda R(\lambda)u \longrightarrow u$$

quando $\lambda \to \infty$, obtemos

$$\lambda R(\lambda)u_\lambda \longrightarrow u \tag{1.85}$$

quando $\lambda \to \infty$.

Afirmação: $v_\lambda(t) = \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) \longrightarrow Au(t) = \dfrac{du}{dt}(t)$.

De fato, por (1.85) e sabendo que $v_\lambda = A(\lambda R(\lambda))u_\lambda$ converge para um certo $\widetilde{v}$, temos que a seqüência $\{(\lambda R(\lambda)u_\lambda, A(\lambda R(\lambda))u_\lambda)\}$ é convergente em $G(A)$, sendo A fechado segue que $(u, \widetilde{v}) \in G(A)$, logo $\widetilde{v} = Au = \frac{du}{dt}$. Portanto

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) \longrightarrow \frac{du}{dt}(t), \qquad \text{quando} \quad \lambda \to \infty$$

uniformemente em cada intervalo limitado com repeito a t. ■

1.5 Semigrupos de Contração em Espaços de Hilbert

Nesta seção vamos considerar X um espaço de Hilbert com produto interno denotado por $(\cdot,\cdot)_X$. Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $u \in D(A)$. Então,

$$\big(S(t)u - u, u\big)_X \leq 0, \tag{1.86}$$

pois sendo X um espaço de Hilbert temos para quaisquer dois vetores v_1, $v_2 \in X$

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + 2\big(v_1, v_2\big)_X + \|v_2\|^2.$$

Daí para $v_1 = S(t)u - u$ e $v_2 = u$ tem-se

$$\|S(t)u\|^2 = \|S(t)u - u\|^2 + 2\big(S(t)u - u, u\big)_X + \|u\|^2,$$

logo

$$2\big(S(t)u - u, u\big)_X = \|S(t)u\|^2 - \|S(t)u - u\|^2 - \|u\|^2.$$

Sendo $\|S(t)u\| \leq \|u\|$ segue que $\|S(t)u\|^2 \leq \|u\|^2$ daí

$$2\big(S(t)u - u, u\big)_X \leq \|S(t)u\|^2 - \|S(t)u - u\|^2 - \|S(t)u\|^2 \leq -\|S(t)u - u\|^2$$

mostrando que

$$\big(S(t)u - u, u\big)_X \leq 0.$$

Dividindo (1.86) por $t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$ concluímos que

$$\big(Au, u\big)_X \leq 0 \qquad \forall u \in D(A). \tag{1.87}$$

Definição 1.29 *Dizemos que F é um* ***operador dissipativo*** *quando $-F$ é monótono, isto é, $\big(-Fu, u\big)_X$, para todo $u \in D(F)$; e que F é* ***maximal dissipativo*** *quando $-F$ for maximal monótono, isto é, se F for dissipativo e $\mathcal{R}(I - F) = X$.*

Por (1.87) temos

$$\big(-Au, u\big)_X \geq 0 \qquad \forall u \in D(A),$$

daí $-A$ é monótono, logo A é dissipativo, mais ainda, pelo Teorema de Hille-Yosida $(I - A)$ é invertível, logo $\mathcal{R}(I - A) = X$, conseqüentemente, $-A$ é maximal monótono, logo A é maximal dissipativo.

A palavra "maximal"que aparece na definição anterior tem o seguinte sentido: Sendo A dissipativo e $\mathcal{R}(I - A) = X$, ele é maximal no sentido que não existe um operador linear F com as mesmas propriedades de A, com F sendo uma extensão de A. De fato, se F for uma extensão de A (isto é, $D(A) \subset D(F)$ e $F|_{D(A)} = A$) com as mesmas propriedades de A (F é dissipativo e $\mathcal{R}(I - F) = X$) mostraremos que $F = A$. Para isso, mostraremos que $D(F) = D(A)$. Seja $u \in D(F)$, e $v = (I - A)^{-1}(I - F)u$, então $(I - A)v = (I - F)u$. Sendo $Av = Fv$, uma vez que $v \in D(A)$ e $F|_{D(A)} = A$, obtemos $(I - F)(v - u) = 0$, o que implica $v - u - F(v - u) = 0$, logo

$$\big(v - u - F(v - u), v - u\big)_X = \big(0, v - u\big)_X = 0$$

o que implica

$$\big(v - u, v - u\big)_X - \big(F(v - u), v - u\big)_X = 0$$

ou simplesmente

$$\|v - u\|^2 = \big(F(v - u), v - u\big)_X.$$

Sendo F dissipativo concluímos que $\|v - u\| = 0$, isto é, $v = u$, conseqüentemente $u \in D(A)$. Mostrando que $D(F) \subset D(A)$, donde concluímos que $F = A$.

Mostraremos agora que somente os geradores de semigrupos de contração em um espaço de Hilbert são operadores maximais dissipativos.

Teorema 1.30 *Seja $A : D(A) \to X$ um operador maximal dissipativo. Então A é fechado, densamente definido e para cada $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ é inversível com*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}\,.$$

Demonstração: A demonstração será dividida em quatro etapas.
Primeira Etapa: Seja $f \in X'$ verificando

$$f(u) = 0 \qquad \forall u \in D(A), \tag{1.88}$$

mostraremos que $f \equiv 0$, de onde podemos afirmar, pelo Teorema C.4, que $\overline{D(A)} = X$. Suponha por absurdo que existe $f \in X^*$, com $f \neq 0$, tal que (1.88) ocorre. Pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema C.11), existe um único $v \in X$ tal que

$$f(u) = \big(v, u\big)_X \qquad \forall u \in X \tag{1.89}$$

em particular para $u \in D(A)$, temos por (1.88) e (1.89) que

$$\big(v, u\big)_X = 0 \qquad \forall u \in D(A). \tag{1.90}$$

Sendo A maximal dissipativo, temos $\mathcal{R}(I - A) = X$, logo existe $w \in D(A)$ tal que $(I - A)w = w - Aw = v$, daí $\big(w - Aw, w\big)_X = \big(v, w\big)_X$, implicando $\|w\|^2 - \big(Aw, w\big)_X = 0$, e sendo A dissipativo $w = 0$, conseqüentemente $v = w - Aw = 0 - A0 = 0$, isto é, $v = 0$. Logo por (1.89) temos

$$f(u) = \big(v, u\big)_X = \big(0, u\big)_X = 0 \qquad \forall u \in X$$

o que implica $f \equiv 0$. Portanto $\overline{D(A)} = X$, isto é, A é densamente definido.
Segunda Etapa: Seja $v \in X$, logo existe $u \in D(A)$ tal que $u - Au = v$, pois $\mathcal{R}(I - A) = X$. Afirmamos que u é único, pois supondo que existe $\widetilde{u} \in D(A)$ tal que $\widetilde{u} - A\widetilde{u} = v$, tem-se $u - Au = \widetilde{u} - A\widetilde{u}$, daí $(u - \widetilde{u}) - A(u - \widetilde{u}) = 0$, considerando $\widehat{u} = u - \widetilde{u}$, temos $\widehat{u} - A\widehat{u} = 0$, conseqüentemente

$$\big(\widehat{u} - A\widehat{u}, \widehat{u}\big)_X = \big(0, \widehat{u}\big)_X$$

o que implica

$$\|\widehat{u}\|^2 - \big(A\widehat{u}, \widehat{u}\big)_X = 0$$

sendo A dissipativo obtemos $\widehat{u} = 0$, isto é, $u = \widetilde{u}$. Note que

$$\|u\|^2 \leq \|u\|^2 - \big(Au, u\big) = \big(v, u\big)_X = \big|\big(v, u\big)_X\big|$$

logo pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\|u\|^2 \leq \|v\|\|u\|$$

o que implica

$$\|u\| \leq \|v\|. \tag{1.91}$$

Assim a aplicação $F : X \to D(A)$, dada por $F(v) = u$, está bem definida, é linear e limitada. De fato, uma vez mostrada a linearidade, a limitação segue por (1.91). Mostremos a linearidade. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v_1,\ v_2 \in X$, então existem $u_1,\ u_2 \in D(A)$ tais que $u_1 - Au_1 = v_1$ e $u_2 - Au_2 = v_2$, logo $F(v_1) = u_1$ e $F(v_2) = u_2$. Sendo $\alpha v_1 + v_2 \in X$ existe $\widetilde{u} \in D(A)$ tal que

$$\widetilde{u} - A\widetilde{u} = \alpha v_1 + v_2. \tag{1.92}$$

Precisamos mostrar que

$$\widetilde{u} = \alpha u_1 + u_2, \tag{1.93}$$

pois se (1.93) vale temos

$$F(\alpha v_1 + v_2) = \widetilde{u} = \alpha u_1 + u_2 = \alpha F(v_1) + F(v_2),$$

mostrando a linearidade. Para justificar (1.93), mostraremos que $\alpha u_1 + u_2$ verifica (1.92), daí pela unicidade de $\widetilde{u}$ segue $\widetilde{u} = \alpha u_1 + u_2$. Vejamos

$$\alpha u_1 + u_2 - A(\alpha u_1 + u_2) = \alpha u_1 + u_2 - \alpha A u_1 + Au_2 = \alpha(u_1 - Au_1) + u_2 - Au_2 = \alpha v_1 + v_2.$$

Portanto $\alpha u_1 + u_2$ verifica (1.92), logo (1.93) é verdadeiro, donde segue a linearidade. Note também que por (1.91)

$$\|F\| \leq 1. \tag{1.94}$$

Afirmação 1:$(I - A)^{-1} = F$.
Se $v \in X$, então

$$(I - A)Fv = (I - A)u = u - Au = v.$$

Se $u \in D(A)$, então

$$F(I - A)u = F(u - Au) = u.$$

Donde segue a Afirmação 1.
Por (1.94) e pela Afirmação 1

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq 1.$$

Terceira Etapa: Mostraremos que A é fechado. Seja $\{u_n\} \subset D(A)$, tal que

$$u_n \longrightarrow u \qquad \text{e} \qquad Au_n \longrightarrow v.$$

Precisamos mostrar que $v = Au$. Note que

$$u_n - Au_n \longrightarrow u - v \tag{1.95}$$

e

$$u_n = (I - A)^{-1}(u_n - Au_n). \tag{1.96}$$

Sabendo que $(I - A)^{-1} = F$ é contínuo, passando ao limite em (1.96), e usando (1.95), obtemos

$$u = (I - A)^{-1}(u - v) \tag{1.97}$$

e desde que $\mathcal{R}((I-A)^{-1}) = \mathcal{R}(F) \subset D(A)$, temos $u \in D(A)$. Logo por (1.97) $u - Au = u - v$, daí $Au = v$, mostrando que A é fechado.

Quarta Etapa: Assuma que $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$. Considere para $v \in X$ a equação $\lambda u - Au = v$, que podemos escrever da forma

$$\lambda_0 u - Au = (\lambda_0 - \lambda)u + v$$

ou seja,

$$u = (\lambda_0 I - A)^{-1}[v + (\lambda_0 - \lambda)u]. \tag{1.98}$$

Por um argumento idêntico ao da segunda etapa, podemos mostrar que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ existe e

$$\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}\,. \tag{1.99}$$

Por (1.98) temos que u é um ponto fixo para a aplicação $\widetilde{F} : X \rightarrow D(A)$ dada por $\widetilde{F}(u) = (\lambda_0 I - A)^{-1}[v + (\lambda_0 - \lambda)u]$, ou seja, $\widetilde{F}u = u$. Se $u_1, u_2 \in X$, então

$$\big\|\widetilde{F}u_1 - \widetilde{F}u_2\big\| = \big\|(\lambda_0 I - A)^{-1}[v + (\lambda_0 - \lambda)u_1] - (\lambda_0 I - A)^{-1}[v + (\lambda_0 - \lambda)u_2]\big\|$$

por (1.99)

$$\big\|\widetilde{F}u_1 - \widetilde{F}u_2\big\| \leq \frac{1}{\lambda_0}\,\|(\lambda_0 - \lambda)(u_1 - u_2)\| = \frac{1}{\lambda_0}\,|\lambda_0 - \lambda|\|u_1 - u_2\|.$$

Logo $\widetilde{F}$ é uma contração, se $|\lambda_0 - \lambda| < \lambda_0$, ou $0 < \lambda < 2\lambda_0$. Daí pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema C.9), a aplicação $\widetilde{F}$ possui um único ponto fixo. Assim, para cada $v \in X$, existe um único $u \in D(A)$ tal que

$$\lambda u - Au = v \qquad \forall\, \lambda \in (0, 2\lambda_0).$$

Usando um raciocínio análogo ao da segunda etapa, mostra-se que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e verifica

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall\, \lambda \in (0, 2\lambda_0).$$

Agora considerando $\lambda_1 = 2\lambda_0 - \epsilon$, para $\epsilon \approx 0$, mostra-se usando os mesmos argumentos que foi usado para λ_0, que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e verifica

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall\, \lambda \in (0, 2\lambda_1) = (0, 4\lambda_0 - 2\epsilon).$$

Seguindo com este raciocínio, temos que dado $\lambda > 0$, existe λ_i, com $i = 0, 1, 2, \ldots$, tal que $\lambda \in (0, 2\lambda_i)$, $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e verifica

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}\,.$$

Portanto $(\lambda I - A)^{-1}$ existe para todo $\lambda > 0$ e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}\,.$$

■

De acordo com o Teorema 1.30 e Teorema de Hille-Yosida, observamos que todo operador maximal dissipativo é o gerador de um semigrupo de contração e a regularidade para as soluções dos problemas de valor inicial resulta do Teorema 1.26. As vantagens do Teorema 1.30 são as seguintes, para verificar que A gera um C_0-semigrupo basta mostrar que: (i)A é dissipativo, (ii) $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$. O primeiro geralmente é "fácil". O segundo, resulta em encontrar solução para uma equação do tipo $\lambda u - Au = v$. Normalmente envolverá um teorema de existência e um teorema de regularidade como veremos na próxima seção. Concluiremos esta seção com estudo de alguns resultados importantes envolvendo operadores maximais dissipativo.

Até o momento resolvemos problemas de valor inicial com $t \in [0, \infty)$ quando o dado inicial $u_0 \in D(A)$, e não para o caso geral $u_0 \in X$; mostraremos que se A é auto-adjunto então podemos resolver o problema para o caso geral com $u_0 \in X$. Mas para isto perderemos a diferenciabilidade em $t = 0$.

Teorema 1.31 *Seja A um operador maximal dissipativo auto-adjunto. Se $u_0 \in X$, então existe um único u tal que*

$$u \in C([0, \infty); X) \cap C^1((0, \infty); X) \cap C((0, \infty); D(A))$$

e

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) & t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Além disso

$$(2) \qquad \begin{cases} \|u(t)\| \leq \|u_0\| & t \geq 0 \\ \left\|\dfrac{du}{dt}(t)\right\| = \left\|Au(t)\right\| \leq \dfrac{1}{t}\,\|u_0\| & t > 0. \end{cases}$$

Demonstração: A demonstração será dividida em etapas.

Primeira Etapa: **(Unicidade)** Sejam u_1 e u_2 duas soluções de (1). Considere $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|^2$, isto é,

$$\varphi(t) = \big(u_1(t) - u_2(t), u_1(t) - u_2(t)\big)_X \,.$$

Segue da definição de φ

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = 2\left(\left[\frac{du_1}{dt}(t) - \frac{du_2}{dt}(t)\right], (u_1(t) - u_2(t))\right)_X = 2\big(Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t)\big)_X$$

o que implica

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = 2\big(A(u_1(t) - u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\big)_X$$

sendo A dissipatido concluímos que $\frac{d\varphi}{dt}(t) \leq 0$, logo φ é decrescente em $(0,\infty)$.

Por outro lado, temos que φ é não-negativa e contínua, pois é composição de funções contínuas, além disso

$$\varphi(0) = \|u_1(0) - u_2(0)\|^2 = \|u_0 - u_0\|^2 = 0.$$

Portanto $\varphi \equiv 0$. Daí $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in (0,\infty)$, isto é, $u_1 \equiv u_2$, mostrando a unicidade.

Segunda Etapa: Suponha inicialmente que $u_0 \in D(A^2)$, então sendo A maximal dissipativo, segue pelo Teorema 1.30 e do Teorema de Hille-Yosida, que existe uma única u verificando (1). Seja $\{S(t)\}$ é o semigrupo de contração gerado por A, então $u(t) = S(t)u_0$, logo

$$\|u(t)\| \leq \|S(t)u_0\| \leq \|u_0\| \qquad \text{para} \quad t \geq 0$$

e

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \left\|Au(t)\right\|.$$

Se $u_\lambda(t)$ é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) = A_\lambda u_\lambda(t) & t \leq 0 \\ u_\lambda(0) = u_0, \end{cases}$$

temos $u_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}u_0$ e pelo Teorema 1.28

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) \longrightarrow \frac{du}{dt}(t), \qquad \text{quando} \quad \lambda \to \infty$$

uniformemente em cada intervalo limitado com respeito a t.
Além disso, sendo A auto-adjunto, temos que A_λ é auto-adjunto, pois fixados $u_1, u_2 \in X$, sendo A maximal dissipativo temos $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$, e portanto existem $v_1, v_2 \in D(A)$ verificando

$$(\lambda I - A)v_1 = u_1 \qquad \text{e} \qquad (\lambda I - A)v_2 = u_2.$$

Assim

$$\big(R(\lambda)u_1, u_2\big)_X = \big((\lambda I - A)^{-1}u_1, u_2\big)_X = \big(v_1, u_2\big)_X = \big(v_1, \lambda v_2 - Av_2\big)_X$$

usando propriedade de semigrupo e o fato que A é auto-adjunto (em particular é simétrico) obtemos

$$\big(R(\lambda)u_1, u_2\big)_X = \big(\lambda v_1 - Av_1, v_2\big)_X \ ,$$

isto é,

$$\big(R(\lambda)u_1, u_2\big)_X = \big(u_1, (\lambda I - A)^{-1}u_2\big)_X = \big(u_1, R(\lambda)u_2\big)_X.$$

Conseqüentemente $R(\lambda)$ é simétrico. Logo

$$\big(A_\lambda u_1, u_2\big)_X = \big(\lambda AR(\lambda)u_1, u_2\big)_X = \lambda\big(AR(\lambda)u_1, u_2\big)_X \ ,$$

sendo A e $R(\lambda)$ simétricos obtemos

$$\big(A_\lambda u_1, u_2\big)_X = \lambda\big(u_1, R(\lambda)Au_2\big)_X$$

sabendo que A e $R(\lambda)$ comutam (Lema C.2) temos

$$\big(A_\lambda u_1, u_2\big)_X = \big(u_1, \lambda AR(\lambda)u_2\big)_X \ ,$$

isto é,

$$\big(A_\lambda u_1, u_2\big)_X = \big(u_1, A_\lambda u_2\big)_X$$

donde segue que A_λ é simétrico, sendo $D(A_\lambda) = X$ e A_λ limitado, temos pela Observação 1.4, que A_λ é auto-adjunto. Também temos que $-A_\lambda$ é monótono, com efeito dado $u \in X$ existe $v \in D(A)$ tal que $v = \lambda R(\lambda)u$. Note que

$$\big(- A_\lambda u, u\big)_X = \big(- \lambda AR(\lambda)u, u\big)_X = \big(- A\lambda R(\lambda)u, u\big)_X$$

daí

$$\big(- A_\lambda u, u\big)_X = \big(- A\lambda R(\lambda)u, \lambda R(\lambda)u - \underbrace{\lambda R(\lambda)u + u}_{-\frac{1}{\lambda}A_\lambda u}\big)_X$$

o que implica

$$\big(- A_\lambda u, u\big)_X = \big(- A\lambda R(\lambda)u, \lambda R(\lambda)u\big)_X + \big(A\lambda R(\lambda)u, \frac{1}{\lambda}A_\lambda u\big)_X$$

e portanto

$$\big(- A_\lambda u, u\big)_X = \big(- Av, v\big)_X + \big(\lambda AR(\lambda)u, \frac{1}{\lambda}A_\lambda u\big)_X = \big(- Av, v\big)_X + \frac{1}{\lambda}\big(A_\lambda u, A_\lambda u\big)_X$$

logo

$$\big(- A_\lambda u, u\big)_X = \big(- Av, v\big)_X + \frac{1}{\lambda}\|A_\lambda\|$$

sendo A dissipativo concluímos que

$$\big(- A_\lambda u, u\big)_X \geq 0 \qquad \forall\ u \in V,$$

mostrando que $-A_\lambda$ é monótono. Portanto temos que $A_\lambda : X \to X$ é linear, limitado e auto-adjunto e $-A_\lambda$ é monótono com $u_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}u_0$; aplicando o Teorema D.1, para A_λ, obtemos

$$\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\| \leq \frac{1}{t}\|u_0\|, \qquad t > 0.$$

Passando ao limite com $\lambda \to \infty$, e usando o Teorema 1.28, obtemos

$$\Big\|\frac{du}{dt}(t)\Big\| \leq \frac{1}{t}\|u_0\|, \qquad t > 0,$$

quando $u_0 \in D(A^2)$.

Terceira Etapa: Sabemos que $D(A^2)$ é denso em $D(A)$, e $D(A)$ é denso em X, logo $D(A^2)$ é denso em X. Assim para $u_0 \in X$, existe $\{u_0^n\} \subset D(A^2)$ tal que $u_0^n \to u_0$, quando $n \to \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $u^n(t)$ a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0^n, \end{cases}$$

isto é, $u^n(t) = S(t)u_0^n$, portanto u^n tem uma certa regularidade de acordo com o Teorema 1.26. Usando um raciocínio análogo ao que foi feito na demonstração do Corolário 1.27, temos

$$\|u^n(t) - u^m(t)\| \leq \|u_0^n - u_0^m\|$$

para $t \geq 0$, e note que

$$\Big\|\frac{du^n}{dt}(t) - \frac{du^m}{dt}(t)\Big\| = \Big\|\frac{d}{dt}(u^n(t) - u^m(t))\Big\|$$

daí pela segunda etapa

$$\left\| \frac{du^n}{dt}(t) - \frac{du^m}{dt}(t) \right\| \leq \frac{1}{t}\|u_0^n - u_0^m\|,$$

para $t > 0$. De onde concluímos que $\{u^n(t)\}$ converge uniformemente em $[0,\infty)$ e $\{\frac{du^n}{dt}(t)\}$ converge uniformemente em $[\delta,\infty)$, para qualquer $\delta > 0$. Seja

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u^n(t).$$

Então

$$\frac{du^n}{dt}(t) \longrightarrow \frac{du}{dt}(t)$$

uniformemente em $[\delta,\infty)$, para qualquer $\delta > 0$. Uma vez que os limites são uniformes, e pela regularidade das u^n, obtemos

$$u \in C([0,\infty);X) \cap C^1((0,\infty);X).$$

Quarta Etapa: Agora mostraremos que $u(t)$ é solução de (1). Note que

$$u(0) = \lim_{n\to\infty} u^n(0) = \lim_{n\to\infty} u_0^n = u_0.$$

Além disso, sabemos que as seqüências $\{u^n(t)\}$ e $\{Au^n(t)\} = \{\frac{du^n}{dt}(t)\}$ são convergentes, $u^n(t) \in D(A)$ e que A é fechado, logo $u(t) \in D(A)$ e

$$Au(t) = \lim_{n\to\infty} Au^n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{du^n}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t),$$

isto é,

$$Au(t) = \frac{du}{dt}(t).$$

Uma vez que $\{u^n(t)\}$ e $\{Au^n(t)\}$ convergem uniformemente em $[\delta,\infty)$, para todo $\delta > 0$, temos que $u \in C([\delta,\infty);D(A))$, para todo $\delta > 0$. Assim $u \in C((0,\infty);D(A))$, pois dado $t \in (0,\infty)$, existe $\delta > 0$ tal que $t \in [\delta,\infty)$ e sendo $u \in C([\delta,\infty);D(A))$ segue que u é contínua em t, como t é qualquer tem-se $u \in C((0,\infty);D(A))$.

Quinta Etapa: Sabemos que $u(t)$ verifica (1), temos

$$\frac{d}{dt}(\|u(t)\|^2) = \frac{d}{dt}\big(u(t),u(t)\big)_X = 2\big(\frac{du}{dt}(t),u(t)\big)_X = 2\big(Au(t),u(t)\big)_X$$

sendo A dissipativo, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\|u(t)\|^2) \leq 0 \qquad \forall\ t > 0.$$

Logo a função $\|u(\cdot)\|^2$ é não-crescente, em $(0,\infty)$, implicando que a função $\|u(\cdot)\|$ é não-crescente.
Afirmação:$\|u(t)\| \leq \|u_0\|$ para todo $t \in (0,\infty)$.
Com efeito, dado $t \in (0,\infty)$, considere $\{t_n\} \in (0,\infty)$ tal que $t_n \to 0$, quando $n \to \infty$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \geq t_n$ e assim

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_n)\| \qquad \forall\ n \geq n_0,$$

sendo $\|u(\cdot)\|$ contínua, temos ao passarmos ao limite com $n \to \infty$, que

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\| = \|u_0\| \qquad \forall\ t > 0,$$

mostrando a afirmação.
Além disso, pela segunda etapa, temos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|\frac{du^n}{dt}(t)\right\| \leq \frac{1}{t}\|u_0^n\| \qquad \forall\ t > 0,$$

logo passando ao limite com $n \to \infty$, obtemos

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \|Au(t)\| \leq \frac{1}{t}\|u_0\| \qquad \forall\ t > 0,$$

para $u_0 \in X$. ∎

Concluiremos o caso auto-adjunto com um resultado de regularidade.

Teorema 1.32 *Seja A um operador maximal dissipativo auto-adjunto em X. Seja u a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

com $u_0 \in X$. Então

$$u \in C^k((0,\infty); D(A^l)) \tag{1.100}$$

para quaisquer inteiros não-negativos k e l.
Demonstração: Para mostrar (1.100) é suficiente mostrar que

$$u \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}((0,\infty); D(A^j)) \tag{1.101}$$

para qualquer inteiro $k \geq 1$. Tal fato segue por indução em k. Para $k = 1$, temos que (1.101) é satisfeito, pois pelo Teorema 1.31, uma vez que estamos sobre as suas hipóteses, temos

$$u \in C([0,\infty);X) \cap C^1((0,\infty);X) \cap C((0,\infty);D(A)),$$

em particular

$$u \in C^1((0,\infty);X) \cap C((0,\infty);D(A)),$$

isto é,

$$u \in \bigcap_{j=0}^{1} C^{1-j}((0,\infty);D(A^j)).$$

Agora suponha que (1.101) é satisfeito para $k-1$, com $k \geq 2$, isto é,

$$u \in \bigcap_{j=0}^{k-1} C^{k-1-j}((0,\infty);D(A^j)), \tag{1.102}$$

em particular, para $j = k-1$ temos

$$u \in C((0,\infty);D(A^{k-1})), \qquad \text{com} \quad k \geq 2, \tag{1.103}$$

com isto mostraremos que

$$u \in C((0,\infty);D(A^k)), \qquad \text{com} \quad k \geq 2. \tag{1.104}$$

Uma vez provado (1.104), consideramos $v(t)$ a solução do problema

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = Av(t) \quad t \geq 0 \\ v(0) = u(\epsilon), \end{cases}$$

para algum $\epsilon > 0$. Sendo $u(t) = S(t)u_0$, temos

$$u(t+\epsilon) = S(t+\epsilon)u_0 = S(t)S(\epsilon)u_0.$$

Por (1.103), temos para $k = 2$, que $u \in C((0,\infty);D(A))$ daí $u(\epsilon) \in D(A)$, para $\epsilon > 0$, isto é, $S(\epsilon)u_0 \in D(A)$. Assim pelo Teorema 1.14, temos

$$\frac{du}{dt}(t+\epsilon) = \frac{d}{dt}(S(t)S(\epsilon)u_0) = AS(t)S(\epsilon)u_0 = AS(t+\epsilon)u_0 = Au(t+\epsilon).$$

Note também que $u(0+\epsilon) = u(\epsilon)$. Portanto $u(\cdot+\epsilon)$ é solução do problema $(*)$, logo por unicidade de solução temos $v(t) = u(t+\epsilon)$. Utilizando (1.104) temos que o dado inicial $v(0) = u(\epsilon) \in D(A^k)$, logo pelo Teorema 1.26 temos

$$v \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0,\infty);D(A^j))$$

daí

$$u \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([\epsilon,\infty);D(A^j))$$

sendo $\epsilon > 0$ qualquer, obtemos

$$u \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}((0,\infty);D(A^j)),$$

mostrando (1.101), conseqüentemente (1.100) é verdadeiro.
Para provar (1.104), assumiremos (1.103) e vamos trabalhar com o espaço $H = D(A^{k-1})$, que é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\big(u\,,v\big)_H = \sum_{j=0}^{k-1} \big(A^j u\,, A^j v\big)_X.$$

Em H considere $\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \subset H \to H$ definido por

$$D(\widetilde{A}) = D(A^k) \qquad \text{e} \qquad \widetilde{A}u = Au \quad \forall u \in D(\widetilde{A}).$$

Claramente, quando A é simétrico e dissipativo temos que $\widetilde{A}$ é simétrico e dissipativo. Também temos que $\widetilde{A}$ é maximal dissipativo, pois se $v \in D(A^{k-1})$, então existe $u \in D(A)$ tal que $u - Au = v$ (isto ocorre, pois $\mathcal{R}(I - A) = X$), logo $Au = u - v \in D(A)$, daí $u \in D(A^2)$, assim $Au = u - v \in D(A^2)$, logo $u \in D(A^3)$, donde $Au = u - v \in D(A^3)$, conseqüentemente $u \in D(A^4)$, seguindo este raciocínio obtemos $Au \in D(A^{k-1})$ ou $u \in D(A^k)$. Então $Au = \widetilde{A}u$, e assim $v = u - \widetilde{A}u$, com $u \in D(\widetilde{A})$. Sendo $v \in D(A^{k-1}) = H$ qualquer, tem-se $\mathcal{R}(I - \widetilde{A}) = H$ e com isto $\widetilde{A}$ é maximal dissipativo. Assim aplicando o Teorema 1.31, para o operador $\widetilde{A}$, existe uma única $\widetilde{v}$ tal que

$$\widetilde{v} \in C([0,\infty);H) \cap C^1((0,\infty);H) \cap C((0,\infty);D(\widetilde{A}))$$

com

$$(*_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\widetilde{v}}{dt}(t) = \widetilde{A}\widetilde{v}(t) \quad t > 0 \\ \widetilde{v}(0) = \widetilde{v}_0, \end{cases}$$

para todo $\widetilde{v}_0 \in H$. Considerando $\widetilde{v}_0 = u(\epsilon)$, observamos que $v(t) = u(t + \epsilon)$ é solução do Problema $(*_1)$, logo

$$v \in C([0,\infty);H) \cap C^1((0,\infty);H) \cap C((0,\infty);D(\widetilde{A})),$$

em particular $v \in C((0,\infty);D(A^k))$, daí $u \in C([\epsilon,\infty);D(A^k))$ para todo $\epsilon > 0$, donde segue que $u \in C((0,\infty);D(A^k))$, mostrando (1.104) e conseqüentemente (1.100), o que conclui a demonstração do teorema. ∎

Um outro importante caso é quando ambos A e $-A$ são operadores maximais dissipativo. Neste caso é claro que $\big(Au\,,u\big)_X = 0$ para todo $u \in D(A)$.

Teorema 1.33 *Sejam X um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset X \to X$, com A e $-A$ sendo operadores maximais dissipativo. Então A e $-A$ juntos, geram um grupo de isometria.*

Demonstração: Seja $u_0 \in D(A)$ e seja $u(t)$ a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) & t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Então

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\big(u(t), u(t)\big)_X = 2\left(\frac{du}{dt}(t), u(t)\right)_X = \big(Au(t), u(t)\big)_X = 0$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\| = 0, \qquad \forall\, t \geq 0$$

conseqüentemente a função $\|u(\cdot)\|$ é constante em $[0, \infty)$. Deste modo

$$\|u(t)\| = \|u_0\| \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Note que, se $\{S^+(t)\}$ é o semigrupo de contração gerado por A então $u(t) = S^+(t)u_0$, o que implica $\|S^+(t)u_0\| = \|u_0\|$, para todo $t \geq 0$, sendo $u_0 \in D(A)$, qualquer tem-se $\|S^+(t)u\| = \|u\|$, para todo $t \geq 0$ e para todo $u \in D(A)$. Mas $D(A)$ é denso em X, logo $\|S^+(t)u\| = \|u\|$, para todo $t \geq 0$ e para todo $u \in X$, donde segue que $S^+(t)$ é uma isometria. De maneira análoga, se $\{S^-(t)\}$ é o semigrupo de contração gerado por $-A$ então $S^-(t)$ é também uma isometria para todo $t \geq 0$. Se definimos

$$S(t) = \begin{cases} S^+(t), & t \geq 0 \\ S^-(-t), & t \leq 0, \end{cases}$$

temos que $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é gerado por A e $-A$, mais ainda $S(t)$ é uma isometria, para todo $t \in \mathbb{R}$. Faltando mostrar que $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo. Claramente vale a associatividade em $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ e existe o elemento neutro em $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, que é o operador identidade. Assim basta mostrar que todo elemento de $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é inversível. Dado $u_0 \in D(A)$, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = Av(t) & t > 0 \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

cuja solução é dada por $v(t) = S^+(t)u_0$. Fixe $t_0 > 0$, para $t \in [0, t_0]$. Seja $\widetilde{v}(t) = v(t_0 - t)$, então em $[0, t_0]$

$$\frac{d\widetilde{v}}{dt}(t) = -\frac{dv}{dt}(t_0 - t) = -Av(t_0 - t) = -A\widetilde{v}(t)$$

e $\widetilde{v}(0) = v(t_0) = S^+(t_0)u_0$. Assim $\widetilde{v}(t)$ é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{v}}{dt}(t) = -A\widetilde{v}(t) \quad & t > 0 \\ \widetilde{v}(0) = S^+(t_0)u_0, \end{cases}$$

daí $\widetilde{v}(t) = S^-(t)S^+(t_0)u_0$ para todo $t \in [0, t_0]$, em particular $\widetilde{v}(t_0) = S^-(t_0)S^+(t_0)u_0$. Mas $\widetilde{v}(t_0) = v(0) = u_0$. Deste modo, para cada $u_0 \in D(A)$ $S^-(t_0)S^+(t_0)u_0 = u_0$. Sendo $D(A)$ denso em X, temos

$$S^-(t_0)S^+(t_0)u_0 = u_0 \qquad \forall\ u_0 \in X.$$

Seguindo um raciocínio análogo, obtemos

$$S^+(t_0)S^-(t_0)u_0 = u_0 \qquad \forall\ u_0 \in X.$$

Sendo $t_0 > 0$ qualquer, temos

$$S^-(t_0)S^+(t_0)u_0 = u_0 \qquad \forall\ u_0 \in X,\ \ \forall\ t \geq 0,$$

e

$$S^+(t_0)S^-(t_0)u_0 = u_0 \qquad \forall\ u_0 \in X,\ \ \forall\ t \geq 0.$$

Desta forma, se $t \geq 0$, então

$$(S(t))^{-1} = (S^+(t))^{-1} = S^-(t) = S(-t),$$

se $t \leq 0$, então

$$(S(t))^{-1} = (S^-(-t))^{-1} = S^+(-t) = S(-t).$$

Portanto $(S(t))^{-1} = S(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De onde concluímos que $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo de isometria. ■

CAPÍTULO 2

Aplicações Envolvendo à Teoria de Semigrupos

Neste Capítulo utilizaremos a teoria estudada no Capítulo 1, para resolver problemas de valor inicial. Iniciaremos com problemas homogêneos, estudando a equação do calor e a equação da onda, com condição de froteira de Dirichlet. Depois estudaremos problemas não-homogêneos, começando com o caso linear apresentaremos três situações onde solução generalizada será solução clássica. Para o caso não-linear estudaremos duas situações onde solução generalizada será solução clássica. Um ponto importante que devemos observar é que para obter soluções clássicas, com a teoria estudada até o momento, precisamos que o dado inicial do problema pertença ao domínio do operador relacionado ao problema.

2.1 O Caso Homogêneo

2.1.1 A equação do Calor

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto com fronteira, $\partial\Omega = \Gamma$, suave. A **equação do calor** é a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times [0, \infty), \tag{2.1}$$

com uma condição inicial e uma condição de fronteira, onde $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ designa o Laplaciano com relação a variável espacial x e t é a variável tempo. Esta equação, ou variações dela, ocorre em vários fenômenos físicos que envolvem difusão, sendo o exemplo mais simples de uma equação diferencial parcial parabólica. No caso da equação do calor, u representa a temperatura em Ω, sendo uma função da variável espacial $x \in \Omega$ e do tempo $t > 0$. As condições de fronteira dependerão da situação física envolvida; se mantivermos a fronteira Γ uma temperatura fixada, temos uma condição de fronteira de Dirichlet em Γ; se o corpo é termicamente isolado, isto é, não há troca de calor com o meio ambiente, temos uma condição de fronteira de Neumann; no caso do sistema receber calor de uma fonte externa então a equação (2.1) terá uma não-homogenidade no lado direito. Estudaremos a equação (2.1) com uma condição de Dirichlet. Para simplificar assumiremos que Ω é suficientemente suave (isto para obtermos resultados de regularidade) e que em Γ temos $u = 0$. Resolver a equação (2.1) com certas condições iniciais e de fronteira é achar uma função u definida em $[0, \infty)$ com valores em um espaço de funções X que só depende de x, que neste caso será o $L^2(\Omega)$. Sendo $u(t)$ um elemento de X, usaremos a seguinte notação $x \mapsto u(t)x = u(x, t)$. Deste modo temos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & \text{em} \quad \Omega \times [0, \infty) \\ u(x,t) = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times [0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Estudaremos este problema usando a teoria de semigrupos.

Teorema 2.1 *Seja $u_0 \in L^2(\Omega)$. Então existe uma única solução u de (P_1) tal que*

$$u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C((0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \tag{2.2}$$

Além disso,

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (0, \infty)). \tag{2.3}$$

Demonstração: Considere $X = L^2(\Omega)$ e $A : D(A) \subset X \to X$ com

$$\left.\begin{aligned} &D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ &Au = \Delta u, \quad u \in D(A). \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Pela Observação 1.5, para cada $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, temos

$$(-Au, u)_2 = (-\Delta u, u)_2 = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 \geq 0.$$

Logo A é dissipativo, isto é, o operador Laplaciano Δ é dissipativo. Além disso como foi mostrado no Exemplo 1.3 A é maximal dissipativo, isto é, $\mathcal{R}(I-A) = X$, e A é auto-adjunto. Assim pelo Teorema 1.31, existe uma única u que é solução do problema (P_1) verificando

$$u \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

mostrando (2.2), e pelo Teorema 1.32

$$u \in C^k((0,\infty); D(A^l)) \tag{2.5}$$

para quaisquer inteiros não-negativos k e l. Note que, sendo $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, temos por regularidade do domínio Ω que

$$D(A^k) = \big\{u \in H^{2k}(\Omega);\ u = \Delta u = \ldots = \Delta^{k-1} u = 0 \ \text{ em } \ \Gamma\big\}.$$

Por (2.5) temos, em particular que

$$u \in C^k((0,\infty); D(A^k)), \qquad \forall\ k \geq 0.$$

Pelas imersões de Sobolev (Teorema B.4), sabemos que $H^{2k}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$, para todo $k > \frac{N}{2}$, logo $D(A^k) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, para todo $k > \frac{N}{2}$, o que implica $u((0,\infty)) \subset C^k(\overline{\Omega})$. Logo

$$u \in C^k\big((0,\infty); C^k(\overline{\Omega})\big), \qquad \forall\ k > \frac{N}{2},$$

e portanto

$$u \in C^k\big(\overline{\Omega} \times (0,\infty)\big), \qquad \forall\ k > \frac{N}{2},$$

conseqüentemente

$$u \in C^\infty\big(\overline{\Omega} \times (0,\infty)\big),$$

mostrando (2.3). ■

Observação 2.1 *Um ponto importante para mencionar é que apesar do dado inicial não ter uma regularidade "boa", $u_0 \in L^2(\Omega)$, temos que a solução $u(x,t)$ é "bastante"suave, $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$. Isso é conhecido na literatura como* ***efeito de regularização forte do operador calor****.*

2.1.2 A equação da Onda

A equação da Onda é o exemplo mais simples de uma equação diferencial parcial hiperbólica de segunda ordem. Se $x \in \mathbb{R}^n$ representa a variável espaço e t a variável tempo, a mesma pode modelar ondas em transporte ou vibração de cordas quando $n = 1$, ondas na superficie de água quando $n = 2$, e ondas em optica ou acústica quando $n = 3$. O problema de valor inicial para a equação da onda é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

onde Δ e o operador Laplaciano apenas na variável espacial e u_0 e v_0 são o deslocamento inicial e a velocidade inicial respectivamente. No caso em que $x \in \Omega$, com $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$, podemos considerar condições de fronteira. Na literatura o operador $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ as vezes é denotado por $\Box$, sendo conhecido como operador D'Alembertiano.

Teorema 2.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado de classe C^∞. Seja $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Então o problema*

$$(P_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & \text{em } \Omega \times [0,\infty) \\ u = 0, & \text{em } \Gamma \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

possui uma única solução u que verifica

$$u \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); L^2(\Omega)). \tag{2.6}$$

Além disso

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_2^2 + \left\| \nabla u(t) \right\|_2^2 = \left\| v_0 \right\|_2^2 + \left\| \nabla u_0 \right\|_2^2, \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{2.7}$$

Suponha que os dados iniciais verificam $u_0, v_0 \in H^k(\Omega)$, para todo inteiro não-negativo k e em Γ

$$u_0 = \Delta u_0 = \ldots = \Delta^j u_0 = \ldots = 0$$

e

$$v_0 = \Delta v_0 = \ldots = \Delta^j v_0 = \ldots = 0$$

para todo inteiro não-negativo j. Então

$$u \in C^\infty\big(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\big). \tag{2.8}$$

Demonstração: Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado, temos pela desigualdade de Poincaré, que

$$\big(u, v\big)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

é um produto interno em $H_0^1(\Omega)$. Considere $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, claramente

$$\big(\mathbf{u}, \mathbf{v}\big)_X = \int_\Omega \nabla u_1 \ \nabla v_1 + \int_\Omega u_2 \ v_2,$$

é um produto interno em X, onde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in X$. Escrevendo a equação da onda na forma de um sistema de primeira ordem temos

$$(\widetilde{P_2}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0, & \text{em } \ \Omega \times (0, \infty) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0, & \text{em } \ \Omega \times (0, \infty). \end{cases}$$

Definindo o operador $A : D(A) \subset X \to X$ por

$$\begin{cases} D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \\ A\mathbf{u} = (v, \Delta u), \qquad \text{com } \ \mathbf{u} = (u, v) \in D(A), \end{cases}$$

mostraremos que A é maximal dissipativo. Note que, para $\mathbf{u} = (u, v) \in D(A)$ temos

$$\big(A\mathbf{u}, \mathbf{u}\big)_X = \int_\Omega \nabla v \ \nabla u + \int_\Omega \Delta u \ v,$$

logo pelo Lema B.3

$$\big(A\mathbf{u}, \mathbf{u}\big)_X = 0. \tag{2.9}$$

Para $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in X$, considere a equação $(I - A)\mathbf{u} = \mathbf{h}$, onde $\mathbf{u} = (u, v)$, ou seja,

$$(u, v) - (v, \Delta u) = (h_1, h_2)$$

daí

$$\underbrace{u - v = h_1}_{(*_1)} \qquad \text{e} \qquad \underbrace{v - \Delta u = h_2}_{(*_2)}.$$

Somando $(*_1)$ com $(*_2)$ obtemos

$$u - \Delta u = h_1 + h_2. \tag{2.10}$$

Sendo $h_1 + h_2 \in L^2(\Omega)$, e sabendo que o operador Laplaciano é maximal dissipativo, existe $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que u verifica (2.10). Assim considerando $v = u - h_1$ temos $v \in H_0^1(\Omega)$

e verifica $(*_1)$, de onde concluímos que dado $\mathbf{h} \in X$ existe $\mathbf{u} = (u, v) \in D(A)$ tal que $(I - A)\mathbf{u} = \mathbf{h}$, isto é,

$$\mathcal{R}(I - A) = X. \tag{2.11}$$

De (2.9) e (2.11) segue que A é maximal dissipativo.
Portanto para $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0) \in D(A)$, existe uma única solução $\mathbf{u} = (u, v) \in X$ para o problema

$$(\widehat{P_2}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A\mathbf{u}, & t \geq 0 \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

com

$$\mathbf{u} \in C^1([0, \infty); X) \cap C([0, \infty); D(A)). \tag{2.12}$$

Interpretação de $(\widehat{P_2})$ e (2.12): Considerando u' a derivada de u com relação ao tempo; temos $\mathbf{u} = (u, v)$, $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{dt} = (u', v')$ e $A\mathbf{u} = (v, \Delta u)$, assim

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A\mathbf{u} \Leftrightarrow (u', v') = (v, \Delta u)$$

o que implica

$$u' = v \qquad \text{e} \qquad v' = \Delta u$$

logo

$$u'' = \Delta u,$$

donde segue que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \qquad \text{em} \ \ \Omega \times [0, \infty).$$

Para $(x, t) \in \Gamma \times [0, \infty)$ temos

$$u(x, t) = u(t)x = 0 \qquad \forall\, x \in \Gamma \quad \text{e} \quad \forall\, t \in [0, \infty),$$

pois $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, para todo $t \in [0, \infty)$, logo $u(t)x = 0$, para todo $x \in \Gamma$, o que implica

$$u = 0 \qquad \text{em} \ \ \Gamma \times [0, \infty).$$

Sendo $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$, temos

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = (u(0)x, v(0)x) = (u_0(x), v_0(x)),$$

isto é,

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad \text{em} \ \ \Omega$$

e
$$v(x,0)=v_0(x) \qquad \text{em} \;\; \Omega,$$
ou seja,
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0(x) \qquad \text{em} \;\; \Omega.$$
Portando u verifica (P_2).

Prova de (2.6): Por (2.12) temos
$$\mathbf{u}\in C^1([0,\infty);H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))\cap C([0,\infty);(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times H_0^1(\Omega))$$
o que implica
$$u\in C^1([0,\infty);H_0^1(\Omega))\cap C([0,\infty);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \tag{2.13}$$
e
$$v\in C^1([0,\infty);L^2(\Omega))\cap C([0,\infty);H_0^1(\Omega)). \tag{2.14}$$
Mas por $(\widetilde{P_2})$, $v=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, daí por (2.14)
$$u\in C^2([0,\infty);L^2(\Omega))\cap C^1([0,\infty);H_0^1(\Omega)). \tag{2.15}$$
De (2.13) e (2.15) obtemos
$$u\in C([0,\infty);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,\infty);H_0^1(\Omega))\cap C^2([0,\infty);L^2(\Omega)),$$
mostrando (2.6).

Prova de (2.7): Por simplicidade faremos uso novamente da seguinte notação, u':= derivada de u com relação a t. Multiplicando a equação da onda por u', obtemos
$$u'u''-u'\Delta u=0$$
integrando sobre Ω
$$\int_\Omega u'u''-\int_\Omega u'\Delta u=0,$$
isto é,
$$\big(u',u''\big)_2-\big(u',\Delta u\big)_2=0. \tag{2.16}$$
Note que
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u'\right\|_2^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(u',u'\big)_2=\frac{1}{2}\,2\big(u',u''\big)_2=\big(u',u''\big)_2 \tag{2.17}$$
e
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|_2^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\nabla u,\nabla u\big)_2=\frac{1}{2}\,2\left(\nabla u,\frac{\partial}{\partial t}\nabla u\right)_2=-\big(u',\Delta u\big)_2. \tag{2.18}$$

Substituindo os resultados encontrados em (2.17) e (2.18) na expressão (2.16), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|u'\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2\right)=0,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2}_{E(t):=\text{Energia Total do Sistema}}\right)=0,$$

a função $E(t)$ é constante com relação ao tempo t, o que implica $E(t)=E(0)$ para todo $t\geq 0$, ou seja,

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2=\frac{1}{2}\left\|v_0\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla u_0\right\|_2^2 \qquad \forall\, t\geq 0,$$

mostrando (2.7).

Prova de (2.8): Uma vez que, $D(A)=(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times H_0^1(\Omega)$, temos por resultados de regularidade (Ver Teorema B.2) que

$$D(A^k)=\left\{\mathbf{u}=(u,v);\left|\begin{array}{l} u\in H^{k+1}(\Omega),\ v\in H^k(\Omega) \qquad \text{e em } \Gamma \\ \Delta^j u=0,\quad 0\leq j\leq\left[\dfrac{k}{2}\right],\ \ \Delta^j v=0,\quad 0\leq j\leq\left[\dfrac{k+1}{2}\right]-1\end{array}\right.\right\},$$

onde $[b]:=$ é o maior inteiro menor do que ou igual a b. Assumindo as novas hipótese sobre os dados iniciais temos que $\mathbf{u}_0=(u_0,v_0)\in D(A^k)$, para todo inteiro não-negativo k, logo pelo Teorema 1.26

$$\mathbf{u}\in\bigcap_{j=0}^{k}C^{k-j}([0,\infty);D(A^j))$$

daí

$$\mathbf{u}\in C^k([0,\infty);D(A^l))$$

para quaisquer k e l inteiros não-negativos. Em particular

$$\mathbf{u}\in C^k([0,\infty);D(A^{2k-1}))$$

logo

$$u\in C^k([0,\infty);H^{2k}(\Omega))$$

e pelas imersões de Sobolev (Teorema B.4) obtemos

$$u\in C^k([0,\infty);C^k(\overline{\Omega})) \qquad \forall\, k>\frac{N}{2}$$

donde segue que

$$u \in C^k(\overline{\Omega} \times [0, \infty)) \qquad \forall\, k > \frac{N}{2}$$

o que implica

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, \infty)),$$

mostrando (2.8) e com isto concluímos a demonstração do teorema. ■

Observação 2.2 *Fisicamente* (2.7) *significa que o sistema é conservativo, isto é, a energia total do sistema permanece a mesma com o decorrer do tempo; o que já era de se esperar, pois o sistema é homogêneo, uma vez que não há forças externas atuando.*

2.2 O Caso Não-Homogêneo

No que segue, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em um espaço de Banach X.

2.2.1 A Equação Linear

Estudaremos agora a existência de soluções para o problema de valor inicial

$$(P_3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t), & 0 < t < T \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde $f : [0, T] \to X$ é uma função fixada.

Definição 2.3 *Uma função $u : [0, T] \to X$ é dita **solução clássica** do problema (P_3) se u é contínua em $[0, T]$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e u satisfaz (P_3) em $(0, T)$.*

Se u é uma solução clássica de (P_3), considerando a função $w(s) = S(t-s)u(s)$, com $0 \leq s \leq T$, encontramos

$$\frac{dw}{ds}(s) = \lim_{h\to 0} \frac{w(s+h) - w(s)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{S(t-(s+h))u(s+h) - S(t-s)u(s)}{h}$$

daí

$$\frac{dw}{ds}(s) = \lim_{h\to 0} \left[S(t-(s+h)) \left(\frac{u(s+h) - u(s)}{h} + \frac{I - S(h)}{h}\, u(s) \right) \right]$$

o que implica

$$\frac{dw}{ds}(s) = S(t-s) \left(\frac{du}{dt}(s) - Au(s) \right).$$

Sendo u solução de (P_3),

$$\frac{dw}{ds}(s) = S(t-s)f(s). \tag{2.19}$$

Note que, se $f \in L^1([0,T];X)$ então, $S(t-s)f(s)$ é integravél em $[0,T]$, pois

$$\int_0^T \|S(t-s)f(s)\|_X \,\mathrm{d}s \leq \widetilde{M} \int_0^T \|f(s)\|_X \,\mathrm{d}s < \infty.$$

Integrando (2.19) de 0 a t, com $t \in [0,T]$, e usando o Teorema A.8, obtemos

$$w(t) - w(0) = \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

o que implica

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.20}$$

Deste modo uma solução clássica do problema (P_3), com $f \in L^1([0,T];X)$, tem a forma dada em (2.20) e conseqüentemente é única.

Definição 2.4 *Seja $u_0 \in X$ e $f \in L^1([0,T];X)$. Dizemos que a função $u \in C([0,T];X)$ dada por* (2.20) *é a* ***solução generalizada*** *do problema* (P_3).

Neste caso, para $f \in L^1([0,T];X)$ a solução generalizada sempre existe. Como vimos, solução clássica sempre é uma solução generalizada, quando $f \in L^1([0,T];X)$. Mas a recíproca não é verdadeira. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1 *Seja $x \in X$ tal que $S(t)x \notin D(A)$ para algum $t \geq 0$. Seja $f(t) = S(t)x$, então f é contínua, conseqüentemente $f \in L^1([0,T];X)$, assim a solução clássica do problema (P_3) com $u_0 = 0 \in D(A)$ caso exista, é dada por*

$$u(t) = S(t)0 + \int_0^t S(t-s)S(s)x\,\mathrm{d}s = \int_0^t S(t)x\,\mathrm{d}s = tS(t)x,$$

isto é,

$$u(t) = tS(t)x.$$

Note que,

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - S(h)S(t)x = \frac{(t+h)S(t+h)x - tS(t)x - hS(h)S(t)x}{h}$$

logo

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - S(h)S(t)x = t\frac{S(h)-I}{h}\,S(t)x. \tag{2.21}$$

Sabemos que $S(h)S(t)x \to S(t)x$ *quando* $h \downarrow 0$. *Portanto* $u(t) = tS(t)x$ *não é diferenciável, pois do contrário, por* (2.21) *existiria o seguinte limite*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h) - I}{h}\, S(t)x$$

o que implicaria em $S(t)x \in D(A)$, *o que não ocorre, logo* $u(t) = tS(t)x$ *não é diferenciável. Conseqüentemente* u *não é solução clássica, pois* u *não verifica o problema.*

Agora examinaremos situações onde soluções generalizadas são clássicas.

Teorema 2.5 *Seja* $f : [0, T] \to X$ *contínua e*

$$v(t) = \int_0^t S(t - s) f(s)\, \mathrm{d}s, \qquad\qquad 0 \leq t \leq T.$$

Se o problema (P_3) *possui uma (única) solução clássica para* $u_0 \in D(A)$, *então* v *possui as seguintes propriedades:*

(i) $v(t)$ *é continuamente diferenciável em* $(0, T)$*;*

(ii) $v(t) \in D(A)$ *para todo* $t \in (0, T)$ *e* $Av(t)$ *é contínua em* $(0, T)$.

Demonstração: Seja u a solução clássica do problema (P_3), então por definição u é contínua em $[0, T]$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e u satisfaz (P_3) em $(0, T)$. Sendo f contínua tem-se $f \in L^1([0, T]; X)$, conseqüentemente u tem a forma dada em (2.20), o que implica

$$u(t) = S(t)u_0 + v(t).$$

Sendo $u_0 \in D(A)$ temos $S(t)u_0 \in D(A)$, daí

$$v(t) = u(t) - S(t)u_0 \ \in D(A) \qquad\qquad \text{para} \quad 0 < t < T.$$

Além disso,

$$Av(t) = A(u(t) - S(t)u_0) = Au(t) - AS(t)u_0 = \frac{du}{dt}(t) - f(t) - \frac{d}{dt}(S(t)u_0).$$

Logo $Av(t)$ é contínua em $(0, T)$, pois é soma de funções contínuas em $(0, T)$. Deste modo fica estabelecido (ii). Note que, $S(t)u_0$ é solução para o problema homogêneo, isto é, o problema (P_3) com $f \equiv 0$, logo $S(t)u_0 \in C^1([0, \infty); X) \cap C([0, \infty); D(A))$, conseqüentemente $v(t)$ é continuamente diferenciável em $(0, T)$, pois é soma de funções continuamente diferenciáveis, mostrando (i). ∎

Observação 2.3 *As condições (i) e (ii), do Teorema 2.5, são equivalentes.*
De fato, suponha que (i) ocorre. Note que para $h > 0$

$$\frac{S(h)-I}{h}\,v(t) = \frac{1}{h}\,S(h)v(t) - \frac{1}{h}\,v(t) = \frac{1}{h}\left[S(h)\int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

Logo pelas propriedades de semigrupo obtemos

$$\frac{S(h)-I}{h}\,v(t) = \frac{1}{h}\left[\int_0^t S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s\right]$$

daí

$$\frac{S(h)-I}{h}\,v(t) = \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s\right] - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

isto é,

$$\frac{S(h)-I}{h}\,v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.22}$$

Afirmação: $\displaystyle\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow f(t)$ *quando* $h \downarrow 0$.
Note que,

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)f(t+h-\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

daí

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)[f(t+h-\tau)-f(t)]\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)f(t)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.23}$$

Pelo Lema 1.2 temos que a segunda parcela do lado direito de (2.23) *converge para* $f(t)$, *quando* $h \to 0$, *pela continuidade da função* f *e a limitação do semigrupo a primeira parcela do lado direito de* (2.23) *converge para zero. Logo, passando ao limite em* (2.23) *com* $h \downarrow 0$, *concluímos a demonstração da afirmação. Conseqüentemente passando ao limite em* (2.22) *temos que* $v(t) \in D(A)$ *com*

$$Av(t) = D^+v(t) - f(t). \tag{2.24}$$

Sendo $v(t)$ *diferenciável, temos*

$$Av(t) = \frac{dv}{dt}(t) - f(t)$$

donde segue que $Av(t)$ *é contínua em* $(0,T)$, *pois é soma de funções contínuas, mostrando (ii). Agora suponha que (ii) ocorre, por* (2.24)

$$D^+v(t) = Av(t) + f(t),$$

logo D^+v é contínua, pois é soma de função contínua. Pelo Teorema A.12, segue que $v(t)$ é diferenciável e conseqüentemente

$$\frac{dv}{dt}(t) = Av(t) + f(t)$$

donde segue que $v(t)$ é continuamente diferenciável, mostrando (i).

Teorema 2.6 *Se a condição (i) (ou, equivalentemente (ii)) do Teorema 2.5 é verificada a solução generalizada do problema (P_3) é solução clássica, para $u_0 \in D(A)$.*
Demonstração: Neste caso temos $v(t) \in D(A)$. Sendo $u_0 \in D(A)$ temos $S(t)u_0 \in D(A)$. Assim

$$u(t) = S(t)u_0 + v(t) \in D(A).$$

Sendo $v(t)$ e $S(t)u_0$ continuamente diferenciáveis em $(0,T)$, segue que $u(t)$ é continuamente diferenciável em $(0,T)$. Note que

$$Au(t) = A(S(t)u_0 + v(t)) = AS(t)u_0 + Av(t) = \frac{d}{dt}(S(t)u_0) + \frac{dv}{dt}(t) - f(t),$$

logo

$$Au(t) = \frac{d}{dt}(S(t)u_0 + v(t)) - f(t) = \frac{du}{dt}(t) - f(t)$$

o que implica

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t).$$

Note também que

$$u(0) = S(0)u_0 + v(0) = u_0.$$

Mostraremos agora que u é contínua em $[0,T]$. Com efeito, para $t_n \to t$ em $[0,T]$, temos

$$\|u(t_n) - u(t)\| = \|S(t_n)u_0 + v(t_n) - S(t)u_0 - v(t)\| \leq \|S(t_n)u_0 - S(t)u_0\| + \|v(t_n) - v(t)\|. \quad (2.25)$$

Pelo Corolário 1.11

$$\|S(t_n)u_0 - S(t)u_0\| \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad n \to \infty. \quad (2.26)$$

Por hipótese, temos que $v(t)$ é continuamente diferenciável em $(0,T)$, logo é contínua em $(0,T)$. O mesmo vale para as extremidade, isto é, v é contínua em 0 e em T. De fato, suponha que $t \downarrow 0$. Note que

$$\|v(t)\| = \left\| \int_0^t S(t-s)f(s)\mathrm{d}s \right\| \leq \int_0^t \|S(t-s)\| \|f(s)\| \mathrm{d}s.$$

Sendo f contínua, temos que sobre o compacto $[0,T]$, $\|f\|$ é limitada por uma constante $C \geq 0$. Temos também, pelo Teorema 1.10, uma limitação para $S(t-s)$, o que implica

$$\|v(t)\| \leq CM \int_0^t e^{\omega(t-s)} \mathrm{d}s \leq CMe^{\omega t} \int_0^t e^{-\omega s} \mathrm{d}s,$$

donde

$$\|v(t)\| \leq CMe^{\omega t}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{e^{-\omega t}}{\omega}\right).$$

Fazendo $t \downarrow 0$, obtemos

$$\|v(t)\| \longrightarrow 0,$$

daí

$$\|v(t) - v(0)\| = \|v(t)\| \longrightarrow 0, \qquad \text{quando} \quad t \downarrow 0,$$

mostrando que v é contínuo em 0. Agora mostraremos a continuidade em $t = T$. Note que

$$v(t) = \int_0^t S(t-s) f(s) \, \mathrm{d}s = \int_0^t S(s) f(t-s) \, \mathrm{d}s.$$

Daí

$$\|v(t) - v(T)\| = \left\| \int_0^t S(s) f(t-s) \, \mathrm{d}s - \int_0^T S(s) f(T-s) \, \mathrm{d}s \right\|$$

logo

$$\|v(t) - v(T)\| \leq \left\| \int_0^t S(s) \big[f(t-s) - f(T-s) \big] \, \mathrm{d}s \right\| + \left\| \int_t^T S(s) f(T-s) \, \mathrm{d}s \right\|$$

o que implica

$$\|v(t) - v(T)\| \leq \int_0^t \|S(s)\| \|f(t-s) - f(T-s)\| \, \mathrm{d}s + \int_t^T \|S(s)\| \|f(T-s)\| \, \mathrm{d}s$$

donde segue que

$$\|v(t) - v(T)\| \leq Me^{\omega T} \int_0^t \|f(t-s) - f(T-s)\| \, \mathrm{d}s + CMe^{\omega T}(T-t).$$

Sendo f contínua, sobre o compacto $[0,T]$ f é uniformemente contínua. Passando ao limite de $t \uparrow T$, obtemos

$$\|v(t) - v(T)\| \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad t \uparrow T,$$

mostrando que v é contínua em T. Portanto v é contínua em $[0,T]$. Conseqüentemente, se $t_n \to t$ em $[0,T]$ temos

$$\|v(t_n) - v(t)\| \longrightarrow 0. \tag{2.27}$$

De (2.25)-(2.27), concluímos que u é contínua em $[0,T]$. Donde segue o teorema. ■

Corolário 2.7 *Se $f \in C^1([0,T];X)$, o problema (P_3) possui uma única solução clássica, para todo $u_0 \in D(A)$.*

Demonstração: Seja

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t S(s)f(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

Observe que

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{\displaystyle\int_0^{t+h} S(s)f(t+h-s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t S(s)f(t-s)\,\mathrm{d}s}{h}$$

o que implica

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \int_0^t S(s)\left(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right)\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)\,\mathrm{d}s.$$

Afirmação 1: Quando $h \to 0$ temos

(a) $\displaystyle\int_0^t S(s)\left(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right)\mathrm{d}s \longrightarrow \int_0^t S(s)f'(t-s)\,\mathrm{d}s;$

(b) $\displaystyle\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow S(t)f(0).$

***Prova de* (a)**: Note que

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t S(s)\left(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right)\mathrm{d}s - \int_0^t S(s)f'(t-s)\,\mathrm{d}s\right\| \\
&\qquad\leq \int_0^t \|S(s)\|\left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s)\right\|\mathrm{d}s \\
&\qquad\leq Me^{\omega T}\int_0^t \left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s)\right\|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Considerando, para cada t fixado, a função

$$g_h(s) = \left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s)\right\|,$$

note que

- $g_h(s) \longrightarrow 0$ quando $h \to 0$, pois f é diferenciável.

- $\big|g_h(s)\big| \leq c_1$, para todo $s \in [0,T]$, pois

$$\big|g_h(s)\big| \leq \left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right\| + \big\|f'(t-s)\big\|,$$

e sendo $f \in C^1([0,T];X)$, existe uma constante $c_1 \geq 0$ tal que $\big|g_h(t)\big| \leq c_1$, para todo $s \in [0,T]$.
Portanto pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.6) temos

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t g_h(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

isto é,

$$\int_0^t \left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s)\right\|\mathrm{d}s \longrightarrow 0, \qquad \text{quando} \quad h\to 0.$$

Portanto

$$\left\|\int_0^t S(s)\left(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right)\mathrm{d}s - \int_0^t S(s)f'(t-s)\,\mathrm{d}s\right\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \ \ h\to 0.$$

***Prova de* (b)**: Note que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)\big[f(t+h-s)-f(0)\big]\,\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(0)\,\mathrm{d}s. \tag{2.28}$$

Pelo Lema 1.2 temos que a segunda parcela do lado direito de (2.28) converge para $S(t)f(0)$, quando $h \to 0$, segue da continuidade da função f e da limitação do semigrupo que a primeira parcela do lado direito de (2.28) converge para zero, o que resulta na veracidade de (b). Mostrando a Afirmação 1.
Da Afirmação 1 temos

$$D^+v(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(s)f'(t-s)\,\mathrm{d}s,$$

ou seja,

$$D^+v(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)f'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Afirmação 2: A função dada por

$$\widetilde{v}(t) = \int_0^t S(t-s)f'(s)\,\mathrm{d}s$$

é contínua em $(0,T)$.
De fato, seja $t\to t_0$ em $(0,T)$, mostraremos que $\widetilde{v}(t)\to\widetilde{v}(t_0)$. Suponha que $0\leq t_0\leq t$, note que

$$\|\widetilde{v}(t)-\widetilde{v}(t_0)\| = \left\|\int_0^t S(t-s)f'(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^{t_0} S(t_0-s)f'(s)\,\mathrm{d}s\right\|,$$

logo

$$\|\widetilde{v}(t)-\widetilde{v}(t_0)\| = \left\| \int_0^{t_0} \big[S(t-s)-S(t_0-s)\big] f'(s)\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} S(t-s)f'(s)\,\mathrm{d}s \right\|$$

o que implica

$$\|\widetilde{v}(t)-\widetilde{v}(t_0)\| \leq \int_0^{t_0} \big\|\big[S(t-s)-S(t_0-s)\big] f'(s)\big\|\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \big\|S(t-s)\big\|\|f'(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Daí

$$\|\widetilde{v}(t)-\widetilde{v}(t_0)\| \leq \int_0^{t_0} \big\|\big[S(t-s)-S(t_0-s)\big] f'(s)\big\|\,\mathrm{d}s + Me^{\omega(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f'(s)\|\,\mathrm{d}s. \tag{2.29}$$

Considerando

$$\widetilde{g}_t(s) = \big\|\big[S(t-s)-S(t_0-s)\big] f'(s)\big\|,$$

note que

$$\widetilde{g}_t(s) \to 0 \qquad \text{quando} \quad t \to t_0,$$

pois a função $S(\cdot - s)f'(s)$ é contínua. Observe agora que

$$\widetilde{g}_t(s) \leq \big\|S(t-s)-S(t_0-s)\big\|\|f'(s)\| \leq \big[\underbrace{\big\|S(t-s)\big\| + \big\|S(t_0-s)\big\|}_{\leq\, c:=constante}\big]\|f'(s)\|,$$

implicando que a função $\widetilde{g}_t$ é limitada por uma função que pertence a $L^1([0,T])$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.6) temos

$$\lim_{t\to t_0} \int_0^{t_0} \widetilde{g}_t(s)\mathrm{d}s = 0,$$

isto é,

$$\lim_{t\to t_0} \int_0^{t_0} \big\|\big[S(t-s)-S(t_0-s)\big] f'(s)\big\|\mathrm{d}s = 0. \tag{2.30}$$

Temos também que

$$Me^{\omega(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f'(s)\|\,\mathrm{d}s = Me^{\omega(t-t_0)} \int_{t_0}^{T} \chi_{[t_0,\,t]}(s)\|f'(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Considerando

$$\widehat{g}_t(s) = \chi_{[t_0,\,t]}(s)\|f'(s)\|,$$

temos

- $\widehat{g}_t(s) \to 0$ quando $t \to t_0$;

- $|\widehat{g}_t(s)| \leq \|f'(s)\| \in L^1([0,T])$.

Portanto pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.6)

$$\lim_{t\to t_0} \int_{t_0}^{t} \widehat{g}_t(s)\mathrm{d}s = 0,$$

isto é,

$$\lim_{t\to t_0} \int_{t_0}^{t} \chi_{[t_0,\,t]}(s)\|f'(s)\|\mathrm{d}s = 0.$$

Sabendo que a exponencial é uma função contínua obtemos

$$\lim_{t\to t_0} \left(Me^{\omega(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f'(s)\|\, \mathrm{d}s \right) = \lim_{t\to t_0} \left(Me^{\omega(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \chi_{[t_0,\,t]}(s)\|f'(s)\|\, \mathrm{d}s \right) = 0. \tag{2.31}$$

De (2.29)-(2.31)

$$\lim_{t\to t_0} \|\widetilde{v}(t) - \widetilde{v}(t_0)\| = 0$$

mostrando a continuidade à direita de $\widetilde{v}$. A continuidade à esquerda é feito de maneira semelhante. Logo $\widetilde{v}$ é contínua em $(0,T)$.
Pela Afirmação 2 e sabendo que a função $S(\cdot)f(0)$ é contínua, segue que D^+v é contínua, de maneira análoga mostra-se que a função v é contínua, logo pelo Teorema A.12 temos que v é continuamente diferenciável. Portanto pelo Teorema 2.6 temos que a solução generalizada é solução clássica. De onde concluímos que o problema (P_3) possui uma única solução clássica, para cada $u_0 \in D(A)$. ■

Corolário 2.8 *Seja $f \in C([0,T];D(A))$, com $D(A)$ munido com a norma do gráfico. Então o problema (P_3) possui uma única solução clássica, para todo $u_0 \in D(A)$.*
Demonstração: Sendo $f \in C([0,T];D(A))$, com $D(A)$ munido com a norma do gráfico, temos que

- $f \in C([0,T];X)$;
- $Af \in C([0,T];X)$.

Note que, para $h > 0$

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

logo

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_0^{t} \big(S(t-s)S(h) - S(t-s)\big)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

o que implica

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t S(t-s)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right) f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.32}$$

Afirmação 1: Quando $h \downarrow 0$ temos

(a) $\displaystyle \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow f(t);$

(b) $\displaystyle \int_0^t S(t-s)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right) f(s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow \int_0^t S(t-s)Af(s)\,\mathrm{d}s;$

***Prova de* (a)**: [Ver justificativa da Observação 2.3]
***Prova de* (b)**: Note que

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t S(t-s)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right) f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t S(t-s)Af(s)\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\qquad \leq \int_0^t \left\|S(t-s)\right\| \left\| \frac{S(h)f(s)-f(s)}{h} - Af(s)\right\| \mathrm{d}s \\
&\qquad \leq Me^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s} \left\| \frac{S(h)f(s)-f(s)}{h} - Af(s)\right\| \mathrm{d}s \\
&\qquad \leq Me^{\omega T}\int_0^t \left\| \frac{S(h)f(s)-f(s)}{h} - Af(s)\right\| \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Considerando a função

$$g_h(s) = \left\| \frac{S(h)f(s)-f(s)}{h} - Af(s)\right\|,$$

note que

- $g_h(s) \longrightarrow 0 \quad$ quando $h \to 0$, pois $f(s) \in D(A)$ para todo $s \in [0,T]$;
- Existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\left|g_h(s)\right| \leq c \qquad \forall\ s \in [0,T]. \tag{2.33}$$

***Justificativa* de** (2.33): Sabemos que $E = (D(A); \|\cdot\|_{D(A)})$ e X são espaços de Banach. Definamos $G_h : E \to X$ por

$$G_h(u) = \frac{S(h)u-u}{h}.$$

Claramente

$$\lim_{h\to 0} G_h(u) = A(u).$$

Portanto para cada $u \in D(A)$, existe uma constante $c_1 \geq 0$ tal que $\|G_h(u)\| \leq c_1$. Daí pelo Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema C.1) , existe uma constante $\widetilde{c} > 0$ tal que

$$\|G_h(u)\| \leq \widetilde{c}\,\|u\|_{D(A)} \qquad \forall\; u \in E \;\text{ e }\; \forall\; h > 0,$$

conseqüentemente

$$\|G_h f(s)\| \leq \widetilde{c}\,\|f(s)\|_{D(A)}, \qquad \forall\; s \in [0,T] \;\text{ e }\; \forall\; h > 0. \tag{2.34}$$

Note que

$$\big|g_h(s)\big| = g_h(s) = \big\|G_h f(s) - Af(s)\big\| \leq \big\|G_h f(s)\big\| + \big\|Af(s)\big\|$$

por (2.34)

$$\big|g_h(s)\big| \leq \widetilde{c}\,\|f(s)\|_{D(A)} + \big\|Af(s)\big\|. \tag{2.35}$$

Sendo $f \in C([0,T]; D(A))$ e $Af \in C([0,T]; X)$ existe constantes $c_2, c_3 > 0$ tais que

$$\|f(s)\|_{D(A)} \leq c_2 \quad \text{e} \quad \big\|Af(s)\big\| \leq c_3 \qquad \forall\; s \in [0,T]. \tag{2.36}$$

Combinando (2.35) e (2.36) obtemos (2.33).
Desta forma, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.6) temos

$$\lim_{h \to 0} \int_0^t g_h(s) ds = 0,$$

isto é,

$$\lim_{h \to 0} \int_0^t \left\| \frac{S(h)f(s) - f(s)}{h} - Af(s) \right\| ds = 0.$$

Uma vez que $Me^{\omega T}$ é constante, segue do limite acima a prova de (b) e conseqüentemente a Afirmação 1. Portanto passando ao limite em (2.32), com $h \downarrow 0$, obtemos

$$D^+ v(t) = f(t) + \int_0^t S(t-s)Af(s)\,\mathrm{d}s,$$

mostrando que $D^+ v$ é contínuo e, portanto, pelo Teorema A.12 temos que $v(t)$ é continuamente diferenciável. Logo, pelo Teorema 2.6, a solução generalizada do problema (P_3) é solução clássica. ■

Corolário 2.9 *Sejam X um espaço de Banach Reflexivo, A o gerador de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ e $f : [0,T] \to X$ uma função Lipschitziana, isto é, existe uma constante $L \geq 0$, chamada de constante de Lipschitz, tal que*

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq L\,|t_1 - t_2| \qquad \text{para quaisquer} \quad t_1, t_2 \in [0,T].$$

Então para cada $u_0 \in D(A)$ o problema (P_3) possui uma única solução clássica.

Demonstração: Inicialmente observamos que sendo f Lipschitziana, segue por resultados de Cálculo Avançado (Ver Brézis [7]) que f é diferenciável quase sempre e $f' \in L^1([0,T];X)$. Seguiremos um raciocínio análogo ao que foi feito no Corolário 2.7 calculando D^+v. Observe que

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \int_0^t S(s)\left(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right)\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)\,\mathrm{d}s.$$

Afirmação 1: Quando $h \downarrow 0$ temos

(a) $\displaystyle\int_0^t S(s)\left(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right)\mathrm{d}s \longrightarrow \int_0^t S(s)f'(t-s)\,\mathrm{d}s;$

(b) $\displaystyle\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow S(t)f(0).$

***Prova de* (a)**: Note que

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t S(s)\left(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right)\mathrm{d}s - \int_0^t S(s)f'(t-s)\,\mathrm{d}s\right\| \\ \leq Me^{\omega T}\int_0^t \left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s)\right\|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Considerando, para t fixo, a função

$$g_h(s) = \left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s)\right\|,$$

temos

- $g_h(s) \longrightarrow 0$ quase sempre, quando $h \to 0$, pois f é diferenciável quase sempre.

Agora observe que

$$\big|g_h(s)\big| \leq \left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right\| + \big\|f'(t-s)\big\|,$$

sendo f Lipschitziana, obtemos

$$\big|g_h(s)\big| \leq L + \big\|f'(t-s)\big\|,$$

uma vez que $f' \in L^1([0,T];X)$ segue que g_h é limitada por uma função que pertence ao espaço $L^1([0,T])$, logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.6) temos

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t g_h(s)\mathrm{d}s = 0,$$

isto é,

$$\int_0^t \left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s)\right\|\mathrm{d}s \longrightarrow 0, \qquad \text{quando} \quad h\to 0.$$

Portanto

$$\left\|\int_0^t S(s)\left(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right)\mathrm{d}s - \int_0^t S(s)f'(t-s)\,\mathrm{d}s\right\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \ \ h\to 0.$$

***Prova de* (b)**: Note que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)\big[f(t+h-s)-f(0)\big]\,\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(0)\,\mathrm{d}s. \tag{2.37}$$

Pelo Lema 1.2 temos que a segunda parcela do lado direito de (2.37) converge para $S(t)f(0)$, quando $h\downarrow 0$, pela continuidade quase sempre da função f e a limitação do semigrupo segue que a primeira parcela do lado direito de (2.37) converge para zero, o que resulta na veracidade de (b). Mostrando a Afirmação 1.
Da Afirmação 1 temos

$$D^+v(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(s)f'(t-s)\,\mathrm{d}s,$$

usando um raciocínio análogo ao que foi feito no corário 2.7 temos que v é contínuamente diferenciável. Portanto pelo Teorema 2.6 temos que a solução generalizada é solução clássica. De onde concluímos que o problema (P_3) possui uma única solução clássica, para cada $u_0\in D(A)$. ∎

Aplicações:

Com os resultados demonstrados nesta seção, temos condições de resolver as seguintes classes de E.D.P.:

1. **A equação do calor não-homogênea**, isto é, o sistema está recebendo calor de uma fonte externa.

$$(\star_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(t), & \text{em} \quad \Omega\times[0,\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \Gamma\times[0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x\in\Omega. \end{cases}$$

Onde a função f verifica uma das condições abaixo:

- $f \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$.

  Um exemplo desta situação é a seguinte: fixe $\varphi \in L^2(\Omega)$ e $x \in \Omega$ considerando a função $f(t) = h(t)\varphi(x)$, com $h \in C^1([0,\infty);\mathbb{R})$, obtemos $f \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$. De fato, se $t_n \to t_0$ temos

$$\|f(t_n) - f(t_0)\|_2 = \|h(t_n)\varphi(\cdot) - h(t_0)\varphi(\cdot)\|_2 = \|(h(t_n) - h(t_0))\varphi(\cdot)\|_2$$

  logo

$$\|f(t_n) - f(t_0)\|_2 = |h(t_n) - h(t_0)|\, \|\varphi(\cdot)\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

  pois h é contínua, conseqüentemente f é contínua em $L^2(\Omega)$; temos também que $f'(t) = h'(t)\varphi(x)$ e de maneira análoga mostra-se que f' é contínua em $L^2(\Omega)$. Portanto $f \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$.

- $f \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

  Um exemplo desta situação é a seguinte: fixe $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) = D(\Delta)$ e $x \in \Omega$ considerando a função $f(t) = h(t)\varphi(x)$, com $h \in C([0,\infty);\mathbb{R})$, temos $f \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)))$. De fato, seja $t_n \to t_0$, note que

$$\|f(t_n) - f(t_0)\|_{D(\Delta)} = \|f(t_n) - f(t_0)\|_2 + \|\Delta f(t_n) - \Delta f(t_0)\|_2$$

  isto é,

$$\|f(t_n) - f(t_0)\|_{D(\Delta)} = \|h(t_n)\varphi(\cdot) - h(t_0)\varphi(\cdot)\|_2 + \|\Delta(h(t_n)\varphi(\cdot)) - \Delta(h(t_0)\varphi(\cdot))\|_2$$

  o que implica

$$\|f(t_n) - f(t_0)\|_{D(\Delta)} = \|(h(t_n) - h(t_0))\varphi(\cdot)\|_2 + \|(h(t_n) - h(t_0))\Delta\varphi(\cdot))\|_2 \ ,$$

  ou seja,

$$\|f(t_n) - f(t_0)\|_{D(\Delta)} = |h(t_n) - h(t_0)|\, \|\varphi(\cdot)\|_2 + |h(t_n) - h(t_0)|\, \|\Delta\varphi(\cdot))\|_2 \ ,$$

  ou ainda

$$\|f(t_n) - f(t_0)\|_{D(\Delta)} = |h(t_n) - h(t_0)|\, \|\varphi(\cdot)\|_{D(\Delta)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

  pois h é contínua, conseqüentemente f é contínua em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

- $f : [0,\infty) \to L^2(\Omega)$ Lipschitziana, pois neste caso $X = L^2(\Omega)$ é um espaço de Banach Reflexivo.

Um exemplo desta situação é a seguite: fixe $\varphi \in L^2(\Omega)$ e $x \in \Omega$ considerando a função $f(t) = h(t)\varphi(x)$, com h Lipschitziana, temos $f : [0, \infty) \to X$ Lipschitziana. De fato, note que dados t_1 , $t_2 \in [0, \infty)$ temos

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_2 = \|h(t_n)\varphi(\cdot) - h(t_0)\varphi(\cdot)\|_2 = |h(t_n) - h(t_0)| \, \|\varphi(\cdot)\|_2$$

o que implica

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_2 \leq \underbrace{L \, \|\varphi(\cdot)\|_2}_{\widetilde{L}} \, |t_1 - t_2| = \widetilde{L} \, |t_1 - t_2|.$$

Assim se $u_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ temos pelos Corolários 2.7, 2.8 ou 2.9, dependendo da condição sobre a f, temos que o problema $(\star_1)$, possui uma única solução clássica.

2. **A equação da onda não-homogênea**.

$$(\star_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(t), & \text{em} \quad \Omega \times [0, \infty) \\ u = 0, & \text{em} \quad \Gamma \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Onde a função f verifica uma das condições abaixo:

- $f \in C^1([0, \infty); L^2(\Omega))$;
- $f \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$;
- $f : [0, \infty) \to L^2(\Omega)$ Lipschitziana.

Basta considerar os seguintes elementos

(a) $X = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$;

(b) $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, logo $\dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u(t) = f(t)$;

(c) $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times H^1_0(\Omega)$, com

$$AU = (v, \Delta u), \qquad \text{onde } \; U = (u, v) \in D(A);$$

(d) $F(t) = (0, f(t))$.

Pois teremos o seguinte problema

$$(\star_3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(t) - AU(t) = F(t) \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Note que

- Se $f \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$, então
$$F(\cdot) = (0, f(\cdot)) \in C^1([0,\infty); X).$$
De fato, para todo $t \in [0,\infty)$ temos
$$\frac{F(t+s) - F(t)}{s} = \left(0, \frac{f(t+s) - f(t)}{s}\right).$$
Fazendo $s \to 0$ obtemos $F'(t) = \big(0, f'(t)\big)$, sendo $f \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$ concluímos que $F \in C^1([0,\infty); X)$.
- Se $f \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, então
$$F(\cdot) = (0, f(\cdot)) \in C([0,\infty); D(A)).$$
De fato, seja $t_n \to t_0$ em $[0,\infty)$. Note que
$$\|F(t_n) - F(t_0)\|_{D(A)} = \|F(t_n) - F(t_0)\|_X + \|AF(t_n) - AF(t_0)\|_X$$
o que implica
$$\|F(t_n) - F(t_0)\|_{D(A)} = \|f(t_n) - f(t_0)\|_2 + \|f(t_n) - f(t_0)\|_{H_0^1(\Omega)}$$
logo
$$\|F(t_n) - F(t_0)\|_{D(A)} \le \|f(t_n) - f(t_0)\|_2 + \|\Delta f(t_n) - \Delta f(t_0)\|_2 + \|f(t_n) - f(t_0)\|_{H_0^1(\Omega)},$$
isto é,
$$\|F(t_n) - F(t_0)\|_{D(A)} \le \|f(t_n) - f(t_0)\|_{D(\Delta)} + \|f(t_n) - f(t_0)\|_{H_0^1(\Omega)},$$
e como conseqüência do Teorema C.12, existe $c \ge 0$ verificando
$$\|F(t_n) - F(t_0)\|_{D(A)} \le c\|f(t_n) - f(t_0)\|_{D(\Delta)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
uma vez que f é contínua em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = D(\Delta)$.
- Se $f : [0,\infty) \to L^2(\Omega)$ é Lipschitziana, então $F : [0,\infty) \to X$ é Lipschitziana, pois
$$\|F(t_1) - F(t_2)\|_X = \|(0, f(t_1)) - (0, f(t_2))\|_X = \|f(t_1) - f(t_2)\|_2 \le L|t_1 - t_2| \ .$$

Daí se $U(0) = (u_0(x), v_0(x)) = U_0 \in D(A)$, segue pelos Corolários 2.7, 2.8 ou 2.9, dependendo da condição sobre a f, que o problema $(\star_3)$, possui uma única solução clássica U, isto é, U verifica $(\star_3)$ em $(0,\infty)$ e
$$U \in C^1((0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A)),$$
o que implica
$$u \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2((0,\infty); L^2(\Omega))$$
mostrando que u é solução clássica do problema $(\star_2)$.

2.2.2 A Equação Não-Linear

Seja $F : X \to X$ uma função fixada. Estudaremos agora a seguinte classe de ploblemas

$$(P_4) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + Fu(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Definição 2.10 *Uma função $u : [0, \infty) \to X$ é dita ser uma* ***solução clássica*** *do problema (P_4) se u é contínua em $[0, \infty)$, continuamente diferenciável em $(0, \infty)$, $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e u satisfaz (P_4) em $(0, \infty)$.*

Definição 2.11 *Seja $u_0 \in X$ e $F : X \to X$. A função $u \in C([0, \infty); X)$ dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)Fu(s)\, \mathrm{d}s$$

é a ***solução generalizada*** *do problema (P_4).*

Com relação ao problema (P_4) temos o seguinte teorema.

Teorema 2.12 *Seja X um espaço de Banach Reflexivo e seja $F : X \to X$ uma função Lipschitziana, com constante de Lipschitz $L \geq 0$. Então para todo $u_0 \in X$ existe uma única $u \in C([0, \infty); X)$ que é solução generalizada do problema (P_4). Se $u_0 \in D(A)$ então a solução generalizada é solução clássica.*

Demonstração: ***Unicidade:*** Suponha que u_1 e u_2 sejam soluções generalizadas do problema (P_4), então

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| = \left\| S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)Fu_1(s)\, \mathrm{d}s - S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)Fu_2(s)\, \mathrm{d}s \right\|$$

logo

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| = \left\| \int_0^t S(t-s)\big[Fu_1(s) - Fu_2(s)\big]\, \mathrm{d}s \right\|$$

o que implica

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq Me^{\omega T} L \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|\, \mathrm{d}s$$

para $t \in [0, T]$, com T qualquer, logo pela Desigualdade de Gronwall na forma integral (Teorema C.7), concluímos que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [0, T]$, sendo T qualquer temos, $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \geq 0$, isto é, $u_1 \equiv u_2$.

Existência: Para um constante $k \geq 0$, que será escolhida convenientemente, defina o seguinte conjunto

$$Y = \left\{ u \in C([0, \infty); X);\ \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|u(t)\| < \infty \right\}.$$

Com relação ao conjunto Y sabemos que o mesmo é um espaço de Banach munido com a seguinte norma

$$\|u\|_Y = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\|. \qquad \text{(Ver Apêndice A)}$$

Considerando a função

$$\begin{array}{rcl} \Phi : Y & \longrightarrow & X \\ u & \longmapsto & \Phi u : [0,\infty) \longrightarrow X \\ & & \qquad t \longmapsto \Phi u(t) = S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s, \end{array}$$

podemos afirmar que:

Afirmação 1: $\Phi(Y) \subset Y$.

Continuidade: Mostraremos que para cada $u \in Y$ a função Φu é contínua. Sabemos que a função $S(\cdot)u_0$ é contínua (ver Corolário 1.11), resta mostrar que a função dada por

$$g(t) = \int_0^t S(t-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t S(s)Fu(t-s)\,\mathrm{d}s$$

é contínua em $[0,\infty)$. Considere $t \downarrow t_0$ em $[0,\infty)$, e observe que vale a seguinte igualdade

$$\|g(t) - g(t_0)\| = \left\| \int_0^t S(s)Fu(t-s)\,\mathrm{d}s - \int_0^{t_0} S(s)Fu(t_0-s)\,\mathrm{d}s \right\|$$

conseqüentemente

$$\|g(t) - g(t_0)\| = \left\| \int_0^{t_0} S(s)\big[Fu(t-s) - Fu(t_0-s)\big]\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^t S(s)Fu(t-s)\,\mathrm{d}s \right\|.$$

Usando a desigualdade triangular, limitação do semigrupo e o fato de F ser Lipschitziana, obtemos

$$\|g(t) - g(t_0)\| \leq MLe^{\omega T}\int_0^{t_0} \big\|u(t-s) - u(t_0-s)\big\|\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t Me^{\omega s}\big\|Fu(t-s)\big\|\,\mathrm{d}s.$$

Considerando T de tal forma que $t_0, t \in (0,T)$ temos

$$\|g(t) - g(t_0)\| \leq MLe^{\omega t_0}\int_0^{t_0} \big\|u(t-s) - u(t_0-s)\big\|\,\mathrm{d}s + Me^{\omega T}\int_{t_0}^T \chi_{[t_0,t]}(s)\big\|Fu(t-s)\big\|\,\mathrm{d}s. \tag{2.38}$$

Sabendo que as funções u, $F \circ u$ são contínuas mostra-se usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.6) que o lado direito de (2.38) converge para zero quando $t \downarrow t_0$, o que implica que g é contínua à direita em $[0,T]$, sendo T qualquer, segue a continuidade à direita em $[0,\infty)$, e conseqüentemente a continuidade à direita de Φu em $[0,\infty)$. De maneira análoga mostra-se a continuidade à esquerda de Φu em $(0,\infty)$. Portanto $\Phi u \in C([0,\infty);X)$.

Existência do supremo: Para cada $t \geq 0$, temos

$$\big\|\Phi u(t)\big\| = \left\|S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s\right\| \leq \big\|S(t)u_0\big\| + \int_0^t \big\|S(t-s)\big\|\big\|Fu(s)\big\|\,\mathrm{d}s$$

o que implica

$$\|\Phi u(t)\| \leq Me^{\omega t}\|u_0\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\big\|Fu(s)\big\|\,\mathrm{d}s$$

logo

$$\|\Phi u(t)\| \leq Me^{\omega t}\|u_0\| + Me^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\big\|Fu(s) - F0(s)\big\|\,\mathrm{d}s + Me^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\|F0(s)\|\,\mathrm{d}s$$

daí

$$\|\Phi u(t)\| \leq Me^{\omega t}\|u_0\| + LMe^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\|u(s)\|\,\mathrm{d}s + Me^{\omega t}\|F0\|\int_0^t e^{-\omega s}\,\mathrm{d}s.$$

Sendo $u \in Y$,

$$\|\Phi u(t)\| \leq Me^{\omega t}\|u_0\| + L_1Me^{\omega t}\int_0^t e^{(k-\omega)s}\,\mathrm{d}s + Me^{\omega t}\|F0\|\int_0^t e^{-\omega s}\,\mathrm{d}s,$$

logo resolvendo as integrais

$$\|\Phi u(t)\| \leq Me^{\omega t}\|u_0\| + L_1Me^{\omega t}\bigg(\frac{e^{(k-\omega)t}}{k-\omega} - \frac{1}{k-\omega}\bigg) + Me^{\omega t}\|F0\|\bigg(-\frac{e^{-\omega t}}{\omega} + \frac{1}{\omega}\bigg)$$

o que implica

$$e^{-kt}\|\Phi u(t)\| \leq Me^{(\omega-k)t}\|u_0\| + L_1Me^{(\omega-k)t}\bigg(\frac{e^{(k-\omega)t}}{k-\omega} - \frac{1}{k-\omega}\bigg) + Me^{(\omega-k)t}\|F(0)\|\bigg(-\frac{e^{-\omega t}}{\omega} + \frac{1}{\omega}\bigg)$$

conseqüentemente

$$e^{-kt}\|\Phi u(t)\| \leq Me^{(\omega-k)t}\|u_0\| + \frac{L_1M}{k-\omega} + \frac{M}{\omega}\; e^{(\omega-k)t}\|F(0)\|.$$

Escolhendo $k > \omega$, encontramos

$$e^{-kt}\|\Phi u(t)\| \leq M\|u_0\| + \frac{L_1M}{k-\omega} + \frac{M}{\omega}\;\|F(0)\| \qquad \forall\, t \in [0, +\infty)$$

portanto

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|\Phi u(t)\| < \infty,$$

mostrando a afirmação.

Assim, para $k > \omega$, podemos redefinir a função Φ da seguinte forma

$$\begin{array}{rcccccl} \Phi & : & Y & \longrightarrow & Y & & \\ & & u & \longmapsto & \Phi u & : & [0,\infty) \longrightarrow X \\ & & & & & & t \quad \longmapsto \quad \Phi u(t) = S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s. \end{array}$$

Mostraremos agora que, para certos valores de k a função $\Phi : Y \to Y$ é uma contração. Com efeito, sejam $u, v \in Y$, então $u - v \in Y$ e

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{kt}\|u - v\|_Y, \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{2.39}$$

Note que

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| = \left\| \int_0^t S(t-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t S(t-s)Fv(s)\,\mathrm{d}s \right\|$$

de onde segue

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq \int_0^t \big\|S(t-s)\big\|\big\|Fu(s) - Fv(s)\big\|\,\mathrm{d}s$$

logo

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq Le^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\big\|u(s) - v(s)\big\|\,\mathrm{d}s$$

e por (2.39)

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq Le^{\omega t}\|u - v\|_Y \int_0^t e^{(k-\omega)s}\mathrm{d}s$$

mostrando que

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq Le^{\omega t}\|u - v\|_Y \left(\frac{e^{(k-\omega)t}}{k-\omega} - \frac{1}{k-\omega}\right) \leq Le^{\omega t}\|u - v\|_Y \frac{e^{(k-\omega)t}}{k-\omega}$$

daí

$$e^{-kt}\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq \frac{L}{k-\omega}\|u - v\|_Y \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Por definição de supremo temos

$$\big\|\Phi u - \Phi v\big\|_Y \leq \frac{L}{k-\omega}\|u - v\|_Y.$$

Assim, fixando $k > L + \omega > \omega$, temos que $\Phi : Y \to Y$ é uma contração. Portanto aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema C.9), existe $u \in C([0,\infty); X)$ tal que $u = \Phi u$, isto é,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s$$

Donde segue que u é solução generalizada para o problema (P_4).
Agora se $u_0 \in D(A)$, mostraremos que u é Lipschitziana. Fixado $h > 0$, considere para todo $t > 0$, $\widetilde{u}(t) = u(t+h)$. Note que $\widetilde{u}$ é solução generalizada para o problema (P_4), com dado inicial $u(h)$, pois

$$\widetilde{u}(t) = S(t)u(h) + \int_0^t S(t-s)F\widetilde{u}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Usando a definição de $\widetilde{u}$, temos

$$\widetilde{u}(t) = S(t)S(h)u_0 + S(t)\int_0^h S(h-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t S(t-s)Fu(s+h)\,\mathrm{d}s,$$

isto é,

$$\widetilde{u}(t) = S(t+h)u_0 + \int_0^h S(t+h-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t S(t-s)Fu(s+h)\,\mathrm{d}s$$

fazendo uma mudança de variável, ficamos com a igualdade

$$\widetilde{u}(t) = S(t+h)u_0 + \int_0^h S(t+h-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s + \int_h^{t+h} S(t+h-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s,$$

ou seja,

$$\widetilde{u}(t) = S(t+h)u_0 + \int_0^{t+h} S(t+h-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s,$$

ou ainda,

$$u(t+h) = S(t+h)u_0 + \int_0^{t+h} S(t+h-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s.$$

Assim

$$\|\widetilde{u}(t)-u(t)\| = \left\|S(t)u(h) + \int_0^t S(t-s)F\widetilde{u}(s)\,\mathrm{d}s - S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s\right\|$$

o que implica

$$\|\widetilde{u}(t)-u(t)\| \leq \big\|S(t)\big\|\,\big\|u(h)-u_0\big\| + \int_0^t \big\|S(t-s)\big\|\,\big\|F\widetilde{u}(s)-Fu(s)\big\|\,\mathrm{d}s$$

e portanto

$$\|\widetilde{u}(t)-u(t)\| \leq Me^{\omega t}\big\|u(h)-u_0\big\| + LMe^{\omega t}\int_0^t \big\|\widetilde{u}(s)-u(s)\big\|\,\mathrm{d}s.$$

Fixando $T>0$ e $t\in[0,T]$

$$\|\widetilde{u}(t)-u(t)\| \leq Me^{\omega T}\big\|u(h)-u_0\big\| + LMe^{\omega T}\int_0^t \big\|\widetilde{u}(s)-u(s)\big\|\,\mathrm{d}s.$$

Pela Desigualdade de Gronwall forma integral (Teorema C.7), obtemos

$$\|\widetilde{u}(t)-u(t)\| \leq \underbrace{Me^{\omega T}\left(1+LMe^{\omega T}e^{LMe^{\omega T}T}\right)}_{c_1\equiv constante}\big\|u(h)-u_0\big\|,$$

ou seja,

$$\|u(t+h)-u(t)\| \leq c_1 \big\|u(h)-u_0\big\|. \tag{2.40}$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.17 segue que $\int_0^h S(s)u_0 \mathrm{d}s \in D(A)$ com

$$A\bigg(\int_0^h S(s)u_0 \ \mathrm{d}s\bigg) = S(h)u_0 - u_0$$

logo

$$\big\|S(h)u_0 - u_0\big\| = \bigg\|A\bigg(\int_0^h S(s)u_0 \ \mathrm{d}s\bigg)\bigg\| \overbrace{=}^{Teor.A.7} \bigg\|\int_0^h AS(s)u_0 \ \mathrm{d}s\bigg\| = \bigg\|\int_0^h S(s)Au_0 \ \mathrm{d}s\bigg\|$$

de onde segue

$$\big\|S(h)u_0 - u_0\big\| \leq M\|Au_0\| \int_0^h e^{\omega s}\mathrm{d}s \leq M\|Au_0\|e^{\omega h}\, h. \tag{2.41}$$

Recordando que vale a seguinte igualdade

$$\big\|u(h)-u_0\big\| = \bigg\|S(h)u_0 - u_0 + \int_0^h S(h-s)Fu(s)\mathrm{d}s\bigg\|$$

temos

$$\big\|u(h)-u_0\big\| \leq \big\|S(h)u_0-u_0\big\| + \int_0^h \big\|S(h-s)\big\|\,\big\|Fu(s)-Fu_0\big\|\mathrm{d}s + \int_0^h \big\|S(h-s)\big\|\,\big\|Fu_0\big\|\mathrm{d}s.$$

Usando (2.41), a limitação do semigrupo e o fato de F ser Lipschitziana

$$\big\|u(h)-u_0\big\| \leq M\|Au_0\|e^{\omega h}\, h + LMe^{\omega h}\int_0^h \big\|u(s)-u_0\big\|\mathrm{d}s + M\big\|Fu_0\big\|e^{\omega h}\ h$$

daí

$$\big\|u(h)-u_0\big\| \leq \big(\underbrace{M\|Au_0\|e^{\omega h} + M\big\|Fu_0\big\|e^{\omega h}}_{c_2 \equiv constante}\big)\, h + \underbrace{LMe^{\omega h}}_{c_3 \equiv constante}\int_0^h \big\|u(s)-u_0\big\|\mathrm{d}s.$$

Pela desigualdade de Gronwall forma integral (Teorema C.7), concluímos que

$$\big\|u(h)-u_0\big\| \leq \underbrace{c_2\big(1+c_3Te^{c_3T}\big)}_{c_4 \equiv constante}\, h. \tag{2.42}$$

De (2.40) e (2.42)

$$\|u(t+h)-u(t)\| \leq c_5\ h, \qquad \forall\ t \in [0,T]. \tag{2.43}$$

Note que, para $t_1,\, t_2 \in [0,T]$, considerando $t_2 > t_1$, existe $h \in [0,T]$ tal que $t_2 = t_1 + h$, daí

$$\big\|u(t_1)-u(t_2)\big\| = \big\|u(t_1)-u(t_1+h)\big\| \overbrace{\leq}^{(2.43)} c_5\ h = c_5\ (t_2-t_1).$$

Portanto para todo t_1, $t_2 \in [0,T]$ temos

$$\big\|u(t_1) - u(t_2)\big\| \leq c_5\,|t_1 - t_2|,$$

mostando que u é Lipschitziana em $[0,T]$.
Conseqüentemente a função $Fu(\cdot)$ é Lipschitziana em $[0,T]$ logo pelo Corolário 2.9 a solução generalizada de (P_4) é solução clássica em $[0,T]$, sendo T qualquer, temos uma solução clássica em $[0,\infty)$. ■

Aplicações: Com este teorema podemos resolver os seguintes problemas:

Primeira Aplicação

$$(\star) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \arctan u & \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \Gamma \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

para

- $X = L^2(\Omega)$;
- $A = \Delta$, com $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$;
- $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, dada por $Fu = \arctan u$.

Mostraremos que F é Lipschitziana. Com efeito, note inicialmente que considerando a função dada por $f(t) = \arctan t$ temos

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} \Longrightarrow |f'(t)| < 1 \qquad \forall\ t \in [0,\infty)$$

e pelo Teorema do Valor Médio para quaisquer $t_1, t_2 \in [0,\infty)$, existe $t_0 \in (t_1,t_2)$ tal que

$$|f(t_1) - f(t_2)| = |f'(t_0)|\,|t_1 - t_2| \leq\ |t_1 - t_2|.$$

Assim para quaisquer $u, v \in L^2(\Omega)$, considerando $t_1 = u(x)$ e $t_2 = v(x)$ obtemos

$$\|F(u) - F(v)\|_2^2 = \int_\Omega |\arctan u(x) - \arctan v(x)|^2\,d\,x \leq \int_\Omega |u(x) - v(x)|^2\,d\,x = \|u - v\|_2^2$$

o que implica

$$\|F(u) - F(v)\|_2 \leq \|u - v\|_2$$

mostrando que F é Lipschitiziana. Portando pelo Teorema 2.12 o problema $(\star)$ possui solução generalizada quando $u_0 \in L^2(\Omega)$ e solução clássica se $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Segunda Aplicação

$$
(\star\star) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) - \Delta u(t) = \arctan u, & \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty) \\ u = 0, & \text{em} \quad \Gamma \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}
$$

seguindo o mesmo raciocínio do caso linear com $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e $v_0 \in H^1_0(\Omega)$.

Teorema 2.13 *Seja $F : X \to X$ verificando a seguinte condição*

$$
(H) \quad \begin{bmatrix} \text{Para todo} \;\; K > 0 \;\; \text{existe} \;\; L = L(K) \;\; \text{tal que} \\ \|u\| \leq K \quad \text{e} \quad \|v\| \leq K \quad \text{implica} \\ \|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\|. \end{bmatrix}
$$

Então, para todo $u_0 \in X$ o problema (P_4) possui uma única solução generalizada. Se $u_0 \in D(A)$ a solução é clássica.

Demonstração: Considere o seguinte conjunto

$$
Y = \big\{ u \in C([0,T];X)\,;\; \|u(t)\| \leq R, \;\; \forall\, t \in [0,T] \big\},
$$

onde T e R serão escolhidos convenientemente. Note que Y é um conjunto fechado, pois é uma bola fechada em $C([0,T];X)$, e sendo $C([0,T];X)$ um espaço de Banach com a norma do supremo, segue que Y munido desta norma é um espaço métrico completo. Considere

$$
\begin{array}{rcl} \Phi \; : \; Y & \longrightarrow & X \\ u & \longmapsto & \Phi u \; : \; [0,T] \longrightarrow X \\ & & \qquad\qquad t \;\; \longmapsto \;\; \Phi u(t) = S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s. \end{array}
$$

Já vimos que Φu é contínua, pois $S(\cdot)u_0$ e Fu são contínuas. Mostraremos à seguir que $\Phi(Y) \subset Y$. Fixe

$$
R = \max\{2M\|u_0\| + 1, \; \|u_0\| + 1\}
$$

e observe que

$$
\|\Phi u(t)\| \leq \big\|S(t)\big\|\|u_0\| + \int_0^t \big\|S(t-s)\big\| \, \big\|Fu(s)\big\|\mathrm{d}s
$$

o que implica

$$
\|\Phi u(t)\| \leq Me^{\omega T}\|u_0\| + Me^{\omega T}\int_0^t \big\|Fu(s) - F0(s)\big\|\mathrm{d}s + Me^{\omega T}\big\|F0(s)\big\|T.
$$

Usando a hipótese (H), existe $L = L(R)$ tal que

$$\|\Phi u(t)\| \leq Me^{\omega T}\|u_0\| + LMe^{\omega T}\int_0^t \big\|u(s)\big\|\mathrm{d}s + Me^{\omega T}\big\|F0(s)\big\|T$$

e sendo $u \in Y$

$$\|\Phi u(t)\| \leq Me^{\omega T}\|u_0\| + LMe^{\omega T}R\;T + Me^{\omega T}\big\|F0(s)\big\|\,T.$$

Considerando T de tal forma que o lado direito da desigualdade acima seja menor do que $2M\|u_0\| + 1$, temos

$$\|\Phi u(t)\| \leq 2M\|u_0\| + 1 \leq R$$

logo $\Phi u \in Y$, daí $\Phi(Y) \subset Y$.
Afirmação: $\Phi : Y \to Y$ é uma contração, para um T apropriado.
De fato, sejam $u,\, v \in Y$ e $s \in [0, T]$. Note que

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq \int_0^t \big\|S(t-s)\big\|\big\|Fu(s) - Fv(s)\big\|\mathrm{d}s \leq MLe^{\omega T}\int_0^t \big\|u(s) - v(s)\big\|\mathrm{d}s.$$

Assim

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq MLe^{\omega T}\int_0^t \big\|u - v\big\|\mathrm{d}s \leq \underbrace{M\,T\,L\,e^{\omega T}}_{c_1}\big\|u - v\big\|,$$

considerando T de tal forma que $c_1 < 1$ e que $\Phi(Y) \subset Y$ temos que $\Phi : Y \to Y$ é uma contração.
Portanto pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema C.9), existe $u \in C([0, T]; X)$ tal que $\Phi u = u$, isto é,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)Fu(s)\,\mathrm{d}s$$

mostrando que u é solução generalizada do problema (1).
Agora seja $u_0 \in D(A)$. Sendo u um ponto fixo de $\Phi : Y \to Y$, temos que

$$\|u(t)\| \leq R \qquad \forall\; t \in [0, T]$$

o que implica $\|u\| \leq R$. Assim, usando a hipótese (H), mostra-se de maneira análoga ao que foi feito no Teorema 2.12, que Fu é Lipschitziana portanto pelo Corolário 2.9 a solução generalizada é clássica. ∎

CAPÍTULO 3

Semigrupo Analítico e Aplicações

No capítulo 2 achamos soluções clássicas (e generalizadas) de problemas de valores iniciais não-homogêneos com dados iniciais no domínio do operador em questão, no intuito de resolver os mesmos tipos de problemas agora com dados iniciais menos regulares, estudaremos uma outra classe de semigrupos e algumas das suas propriedades. Estudaremos também os Espaços de Potências Fracionárias X^α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, os quais são menos regulares do que o domínio do operador em questão. Mostraremos que se o operador $-A$ for um gerador de um semigrupo analítico e verificar algumas estimativas para o operador resolvende de A o problema em questão terá solução clássica com o dado inicial em X^α. Este capítulo tem com base Friedman [16], Pazy [22], [8, 9, 10] e [24]. No que segue X é um espaço de Banach, sobre os complexos, com norma $\| \cdot \|$.

3.1 Semigrupo Analítico

No que segue $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo gerado por A em X. Seja $\phi \in \mathbb{R}$ um número satisfazendo $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ e seja M uma constante positiva.

Definição 3.1 *Um operador A é dito ser do tipo (ϕ, M) se:*

- *O operador A é fechado densamente definido;*
- *O resolvente de A, $\rho(A)$, existe e contém o setor*

$$S_\phi = \Big\{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \neq 0,\ \frac{\pi}{2} - \phi < \arg\lambda < \frac{3\pi}{2} + \phi\Big\},$$

e vale a seguinte estimativa para o operador resolvente

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \qquad se \quad \lambda \in S_\phi. \tag{3.1}$$

Um resultado muito importante, com relação a classe de operadores do tipo (ϕ, M), é dado à seguir cuja demonstração pode ser encontrada em Friedman [16].

Teorema 3.2 *Se A é do tipo (ϕ, M), então $-A$ gera um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, com as seguintes propriedades adicionais:*

1. *$S(\cdot)$ tem um prolongamento analítico no setor*

$$\Delta_\phi = \big\{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \neq 0,\ |\arg\lambda| < \phi\big\},$$

isto é, $S(\cdot)$ é estendida para o setor Δ_ϕ e $\lambda \mapsto S(\lambda)$ é analítica em Δ_ϕ;

2. *$AS(\lambda)$, $\dfrac{dS}{d\lambda}(\lambda)$ são operadores limitados para cada $\lambda \in \Delta_\phi$ e para todo $x \in X$ temos*

$$S(\lambda)x \in D(A)$$

com

$$\frac{dS}{d\lambda}(\lambda)x = -AS(\lambda)x \qquad \forall\ x \in X;$$

3. *Para qualquer $0 < \epsilon < \phi$ existe uma constante $c = c(\epsilon)$ tal que*

$$\|S(\lambda)\| \leq c \qquad e \qquad \|AS(\lambda)\| \leq \frac{c}{|\lambda|} \qquad se \quad \lambda \in \Delta_{\phi-\epsilon}\ ; \tag{3.2}$$

4. *Para qualquer $x \in X$, $0 < \epsilon < \phi$,*

$$S(\lambda)x \longrightarrow x \qquad se \quad \lambda \to 0,\ \ \lambda \in \Delta_{\phi-\epsilon}\ .$$

Definição 3.3 *Um C_0-semigrupo que possui as propriedades adicionais (1)-(3) do Teorema 3.2 é chamado um **semigrupo analítico**.*

Deste modo, se A é do tipo (ϕ, M), então $-A$ gera um semigrupo analítico.

Observação 3.1 *Conforme Pazy [22], se $0 \in \rho(A)$ e $-A$ gera um semigrupo analítico, então para $t > 0$ temos as seguintes estimativas*

$$\|S(t)\| \leq c\, e^{-\delta t}$$

e

$$\|AS(t)\| \leq c\, t^{-1}\, e^{-\delta t},$$

onde c e δ são constantes positivas.

Teorema 3.4 *Seja A do tipo (ϕ, M). Para qualquer inteiro $m \geq 1$, $S(t)x \in D(A^m)$ para qualquer $x \in X$, $t > 0$, e*

$$\|A^m S(t)\| \leq Ct^{-m} \qquad (t > 0),$$

onde C é uma constante que depende apenas de A e m, e $\{S(t)\}$ é o semigrupo gerado por $-A$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.2, para todo $x \in X$, temos $S(t)x \in D(A)$, logo $S(t)x \in D(A^m)$ para qualquer inteiro $m \geq 1$, pois se $S(t)x \in D(A)$ então faz sentido $AS(t)x$ e mais

$$AS(t)x = A\left(S\left(\frac{t}{2}\right)S\left(\frac{t}{2}\right)x\right) = AS\left(\frac{t}{2}\right)\left(\underbrace{S\left(\frac{t}{2}\right)x}_{\in D(A)}\right)$$

sabendo que A e $S(\frac{t}{2})$ comutam, temos

$$AS(t)x = S\left(\frac{t}{2}\right)AS\left(\frac{t}{2}\right)x$$

conseqüentemente $AS(t)x \in D(A)$, o que implica $S(t)x \in D(A^2)$, logo faz sentido $A^2S(t)x$ e mais

$$A^2S(t)x = A \circ A\left(S\left(\frac{t}{3}\right)S\left(\frac{t}{3}\right)S\left(\frac{t}{3}\right)x\right) = S\left(\frac{t}{3}\right)AS\left(\frac{t}{3}\right)AS\left(\frac{t}{3}\right)x$$

logo $A^2S(t)x \in D(A)$ o que implica $S(t)x \in D(A^3)$, seguindo este raciocínio obtemos $S(t)x \in D(A^m)$. Note também que

$$\underbrace{AS\left(\frac{t}{m}\right) \circ \ldots \circ AS\left(\frac{t}{m}\right)}_{m-vezes} = \underbrace{A \circ \ldots \circ A}_{m-vezes}\left(\underbrace{S\left(\frac{t}{m}\right) \cdot \ldots \cdot S\left(\frac{t}{m}\right)}_{m-vezes}\right) = A^m S\left(\frac{m\,t}{m}\right)$$

o que implica

$$\left(AS\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m x = A^m S(t)\, x. \tag{3.3}$$

Assim por (3.3) e pelo Teorema 3.2

$$\|A^m S(t)\, x\| = \left\|\left(AS\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m x\right\| \leq \left\|AS\left(\frac{t}{m}\right)\right\|^m \|x\| \leq \left(\frac{c}{\frac{t}{m}}\right)^m \|x\|$$

daí

$$\|A^m S(t)\, x\| \leq \left(\frac{c\, m}{t}\right)^m \|x\| = C\, t^{-m} \|x\|.$$

donde

$$\|A^m S(t)\| \leq C t^{-m} \qquad \text{para} \quad t > 0.$$

■

3.2 Potências Fracionárias de Operadores

Nesta seção definiremos potências fracionárias de certos operadores lineares ilimitado e estudaremos algumas de suas propriedades. No que segue, seja A um operador fechado densamente definido em X, tal que $-A$ gera um semigrupo analítico $\{S(t)\}$ e $0 \in \rho(A)$. Pela Observação 3.1 existe $\delta > 0$ tal que

$$\|S(t)\| \leq c\, e^{-\delta\, t} \qquad \text{e} \qquad \|AS(t)\| \leq c\, t^{-1} e^{-\delta\, t}. \qquad \forall\, t > 0. \tag{3.4}$$

Lema 3.1 *Com os elementos descritos anteriormente, temos para cada $m \in \mathbb{N}$,*

$$\|A^m S(t)\| \leq C\, t^{-m} e^{-\delta\, t}. \tag{3.5}$$

Com efeito, na demonstração do Teorema 3.4 *vimos que*

$$\|A^m S(t)\, x\| \leq \left\|AS\left(\frac{t}{m}\right)\right\|^m \|x\|$$

o que implica

$$\|A^m S(t)\| \leq \left\|AS\left(\frac{t}{m}\right)\right\|^m$$

por (3.4) *temos*

$$\|A^m S(t)\| \leq \left(\frac{c\, m}{t}\, e^{-\frac{\delta\, t}{m}}\right)^m = C\, t^{-m} e^{-\delta\, t}.$$

Para qualquer $\alpha > 0$ definimos a potência fracionária $A^{-\alpha}$ por

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} S(s)\, \mathrm{d}s, \tag{3.6}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, a qual é dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x \qquad (\alpha > 0).$$

Observação 3.2 *Uma vez que $0 \in \rho(A)$ faz sentido falar na inversa de A. Para $\alpha = 1$, A^{-1} definido em (3.6) é de fato a inversa do operador A. Com efeito, denotando por B a inversa de A temos pelo Teorema 1.21*

$$B = (0\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty S(s)\, \mathrm{d}s.$$

Por outro lado, para $\alpha = 1$ temos

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \mathrm{d}x = 1$$

logo

$$A^{-1} = \int_0^\infty S(s) \mathrm{d}s.$$

Donde segue que $B = A^{-1}$.

Observação 3.3 *Ao longo deste trabalho definimos $A^{-0} = I$.*

Teorema 3.5 *O operador $A^{-\alpha}$ é linear limitado.*

Demonstração: Desde que a linearidade é imediata, vamos mostrar apenas a limitação. Note que

$$\|A^{-\alpha} x\| = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} S(s) x \mathrm{d}s \right\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} \|S(s)\|\, \|x\| \mathrm{d}s.$$

Por (3.4)

$$\|A^{-\alpha} x\| \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \|x\| \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-\delta s} \mathrm{d}s = \frac{c\, \delta^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} \|x\| \int_0^\infty r^{\alpha-1} e^{-r} \mathrm{d}r = \frac{c\, \delta^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} \|x\|\, \Gamma(\alpha).$$

conseqüentemente

$$\|A^{-\alpha} x\| \leq \widetilde{c}\, \|x\|,$$

mostrando a limitação de $A^{-\alpha}$. ∎

Teorema 3.6 *Para* α, $\beta \geq 0$ *temos*

$$A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} \circ A^{-\beta}.$$

Demonstração: Note que

$$(A^{-\alpha} \circ A^{-\beta})(x) = A^{-\alpha}(A^{-\beta}x) = A^{-\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s^{\beta-1} S(s)\, x \,\mathrm{d}s\right)$$

logo

$$(A^{-\alpha} \circ A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} S(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s^{\beta-1} S(s)\, x \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t,$$

o que implica

$$(A^{-\alpha} \circ A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1}\left(\int_0^\infty s^{\beta-1} S(t+s)\, x \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t.$$

Fazendo a mudança de variável $r = t + s$ obtemos

$$(A^{-\alpha} \circ A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_t^\infty t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1} S(r)\, x \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t$$

mudando a ordem de integração

$$(A^{-\alpha} \circ A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1} S(r)\, x \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}r,$$

isto é,

$$(A^{-\alpha} \circ A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1} \,\mathrm{d}t\right) S(r)\, x \,\mathrm{d}r. \tag{3.7}$$

Note que pelo Teorema C.8 temos

$$\int_0^r t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1} \,\mathrm{d}t = r^{\alpha+\beta-1}\, \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{3.8}$$

Por (3.7) e (3.8) obtemos

$$(A^{-\alpha} \circ A^{-\beta})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^\infty r^{\alpha+\beta-1} S(r)\, x \,\mathrm{d}r$$

de onde concluímos

$$(A^{-\alpha} \circ A^{-\beta})(x) = A^{-(\alpha+\beta)}(x) \qquad \forall\, x \in X,$$

isto é,

$$A^{-\alpha} \circ A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

∎

Teorema 3.7 *O operador $A^{-\alpha}$ definido em* (3.6) *é injetivo.*

Demonstração: Claramente A^{-1} é injetivo, e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $A^{-n} = (A^{-1})^n$ é injetivo. Seja $x \in X$ tal que $A^{-\alpha}x = 0$. Fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \alpha$, então

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha-\alpha}x = A^{-n+\alpha}(A^{-\alpha}x) = A^{-n+\alpha}0 = 0$$

sendo A^{-n} injetivo segue que $x = 0$, o que implica $A^{-\alpha}$ é injetivo. ∎

Pelo Teorema 3.7 temos que $A^{-\alpha}$ é bijetivo sobre a sua imagem, logo faz sentido falar na inversa do operador $A^{-\alpha}$. Portanto podemos definir

$$A^{\alpha} = \left(A^{-\alpha}\right)^{-1}.$$

Note que $D(A^{\alpha}) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$ e para $\alpha = 0$, temos $A^0 = I$. O operador A^{α} é chamado **operador potência fracionária** associado a A.

Teorema 3.8 *Seja A^{α} o operador potência fracionária associado a A, então*

1. *A^{α} é um operador fechado densamente definido, para cada $\alpha \geq 0$;*

2. *Se $\alpha \geq \beta > 0$, então $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$;*

3. *Se α, $\beta \in \mathbb{R}$, então*
$$A^{\alpha+\beta}x = (A^{\alpha} \circ A^{\beta})x$$
para cada $x \in D(A^{\gamma})$, onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

Demonstração: (Ver Pazy [22]) ∎

Teorema 3.9 *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{S(t)\}$. Se $0 \in \rho(A)$, então*

1. *Para cada $x \in X$, $S(t)x \in D(A^{\alpha})$, para qualquer $t > 0$ e $\alpha \geq 0$;*

2. *Para cada $x \in D(A^{\alpha})$ temos*
$$S(t)A^{\alpha}x = A^{\alpha}S(t)x\,;$$

3. *Para cada $t > 0$ o operador $A^{\alpha}S(t)$ é limitado e existem M_{α}, $\delta > 0$ tais que*
$$\|A^{\alpha}S(t)\| \leq M_{\alpha}t^{-\alpha}e^{-\delta t}\,;$$

4. Seja $0 < \alpha \leq 1$ *e* $x \in D(A^\alpha)$ *então*

$$\|S(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Demonstração: Dado $\alpha \geq 0$, considere $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq \alpha$, logo pelo Teorema 3.8 $D(A^m) \subset D(A^\alpha)$. Por outro lado, pelo Teorema 3.4, para qualquer $t > 0$ e $x \in X$ tem-se $S(t)x \in D(A^m)$. Portanto $S(t)x \in D(A^\alpha)$ mostrando (1). Seja $x \in D(A^\alpha)$, uma vez que, A^α é inversível existe $y \in X$ tal que $x = A^{-\alpha}y$, logo $y = A^\alpha x$. Daí

$$S(t)x = S(t)A^{-\alpha}y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty S(t)\, s^{\alpha-1}S(s)y\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}S(s)\,S(t)y\,\mathrm{d}s,$$

logo

$$S(t)x = A^{-\alpha}S(t)y = A^{-\alpha}S(t)A^\alpha x$$

o que implica

$$A^\alpha S(t)x = S(t)A^\alpha x \qquad \forall\ xD(A^\alpha),$$

mostrando (2). Sendo A^α fechado, temos que $A^\alpha S(t)$ é fechado, pois considerando $\{u_n\} \subset X$ com $u_n \to u_0$ e $A^\alpha S(t)u_n \to v_0$, precisamos mostrar que $A^\alpha S(t)u_0 = v_0$, e isto segue facilmente, uma vez que $S(t)$ é contínuo temos $S(t)u_n \to S(t)u_0$, logo sendo A^α fechado segue que $A^\alpha S(t)u_0 = v_0$. Pelo item (1) $D(A^\alpha S(t)) = X$, logo pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema C.5) segue que $A^\alpha S(t)$ é contínuo, conseqüentemente limitado. Agora considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \alpha \leq n$. Note que

$$A^\alpha S(t) = A^{\alpha-n+n}S(t) = A^{\alpha-n}A^nS(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}A^nS(t+s)\mathrm{d}s.$$

Assim

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\|A^nS(t+s)\|\mathrm{d}s$$

por (3.5) obtemos

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq \frac{C\,e^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}e^{-\delta s}\mathrm{d}s \leq \frac{C\,e^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\left[t\left(1+\frac{s}{t}\right)\right]^{-n}\mathrm{d}s$$

fazendo a mudança de fariável $r = \frac{s}{t}$ obtemos

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq \frac{C\,e^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)\,t^\alpha}\int_0^\infty r^{n-\alpha-1}(1+r)^{-n}\mathrm{d}r$$

o que implica

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq \frac{C\, e^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)\, t^\alpha} \int_0^\infty (1+r)^{-n} \mathrm{d}r = \underbrace{\frac{C}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)}}_{M_\alpha}\; t^{-\alpha} e^{-\delta t}$$

logo

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq M_\alpha\, t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

Por último, para $x \in D(A^\alpha)$ temos pelo Teorema 1.17 que

$$\|S(t)x - x\| = \left\| A\Big(\int_0^t S(s)x \mathrm{d}s \Big) \right\|$$

sendo $S(\cdot)x : [0,t] \to D(A)$ contínua e $A : D(A) \to X$ linear e contínua, visto com relação a norma do gráfico, temos pelo Teorema A.7, que

$$\|S(t)x - x\| = \left\| \int_0^t AS(s)x \mathrm{d}s \right\| = \left\| \int_0^t A^{1-\alpha} S(s) A^\alpha x \mathrm{d}s \right\| \leq \int_0^t \|A^{1-\alpha} S(s)\|\, \|A^\alpha x\| \mathrm{d}s$$

pelo item (3) obtemos

$$\|S(t)x - x\| \leq \|A^\alpha x\|\, M_\alpha \int_0^t s^{\alpha-1} \mathrm{d}s = \underbrace{\frac{M_\alpha}{\alpha}}_{C_\alpha}\; t^\alpha\, \|A^\alpha x\|$$

logo

$$\|S(t)x - x\| \leq C_\alpha\; t^\alpha\, \|A^\alpha x\|.$$

■

3.3 Espaços de Potências Fracionárias

Se A um operador linear, tal que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em X e $0 \in \rho(A)$, segue da seção 3.2 que podemos falar em potências fracionárias do operador A. Vimos que, se $0 \leq \alpha \leq 1$ então A^α é um operador linear, fechado, inversível e densamente definido. O fechamento de A^α implica que $D(A^\alpha)$ munido com a norma do gráfico de A^α, isto é, $\|u\|_{D(A^\alpha)} = \|u\| + \|A^\alpha u\|$ é um espaço de Banach. De fato, seja $\{u_n\} \subset D(A^\alpha)$ uma seqüência de Cauchy, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{D(A^\alpha)} < \epsilon \qquad \text{para} \;\; n, m \geq n_0$$

o que implica

$$\|u_n - u_m\| < \epsilon \qquad \text{e} \qquad \|A^\alpha u_n - A^\alpha u_m\| < \epsilon \qquad \text{para} \;\; n, m \geq n_0$$

logo $\{u_n\}$ e $\{A^\alpha u_n\}$ são seqüências de Cauchy em X. Sendo X um espaço de Banach existem $u, v \in X$ tais que

$$u_n \to u \qquad \text{em} \;\; X \qquad \text{e} \qquad A^\alpha u_n \to v \qquad \text{em} \;\; X.$$

Sendo A^α fechado, temos que $(u, v) \in G(A^\alpha)$ e $A^\alpha u = v$. O que implica

$$u_n \to u \qquad \text{em} \;\; D(A^\alpha),$$

pois

$$\|u_n - u\|_{D(A^\alpha)} = \|u_n - u\| + \|A^\alpha u_n - A^\alpha u\|.$$

Portanto $\big(D(A^\alpha); \|\cdot\|_{D(A^\alpha)}\big)$ é um espaço de Banach. Em $D(A^\alpha)$ podemos definir uma outra norma, que denotaremos por $\|\cdot\|_\alpha$, que é equivalente a norma do gráfico, tal norma é dada por

$$\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\| \qquad \text{com} \;\; u \in D(A^\alpha).$$

O próximo lema trata das afirmações acima .

Lema 3.2 *A função $\|\cdot\|_\alpha$ é uma norma em $D(A^\alpha)$, que é equivalente a norma do gráfico.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente que a função $\|\cdot\|_\alpha$ é uma norma em $D(A^\alpha)$. Vejamos

1. $\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\| \geq 0$, pois $\|\cdot\|$ é uma norma em X. Temos também que

$$\|u\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \|A^\alpha u\| = 0 \Leftrightarrow A^\alpha u = 0 \Leftrightarrow u = 0;$$

2. $\|au\|_\alpha = \|aA^\alpha u\| = |a|\|A^\alpha u\| = |a|\|u\|_\alpha$, para todo $a \in \mathbb{R}$;

3. $\|u+v\|_\alpha = \|A^\alpha(u+v)\| = \|A^\alpha u + A^\alpha v\| \leq \|A^\alpha u\| + \|A^\alpha v\| = \|u\|_\alpha + \|v\|_\alpha$.

Conseqüentemente, $\|\cdot\|_\alpha$ é uma norma em $D(A^\alpha)$. Agora mostraremos a equivalência. Claramente

$$\|u\|_\alpha \leq \|u\|_{D(A^\alpha)}. \tag{3.9}$$

Sendo $A^{-\alpha}$ limitado temos

$$\|A^{-\alpha} v\| \leq c\|v\| \qquad \forall\, v \in D(A^{-\alpha}),$$

logo para $v = A^\alpha u$ com $u \in D(A^\alpha)$, obtemos

$$\|u\| \leq c\|A^\alpha u\| \qquad \forall\, u \in D(A^\alpha).$$

Assim

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} = \|u\| + \|A^\alpha u\| \leq c\|A^\alpha u\| + \|A^\alpha u\| = (c+1)\|A^\alpha u\|,$$

isto é,

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} \leq (c+1)\|u\|_\alpha. \tag{3.10}$$

De (3.9) e (3.10) segue a equivalência das normas. ■

No que segue, denotaremos por X^α a seguinte estrutura

$$X^\alpha = \big(D(A^\alpha); \|\cdot\|_\alpha\big).$$

Quando $\alpha = 0$, definimos $X^0 = X$. Usando a equivalência das norma, mostrada no Lema 3.2, temos que X^α é um espaço de Banach. Para concluir esta seção, enuciaremos sem demonstrar, o seguinte teorema de imersão envolvendo o espaço X^α. Indicamos o livro do Pazy [22] para maiores detalhes.

Teorema 3.10 *Para $\alpha \geq \beta \geq 0$, temos $X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$ continuamente.*

3.3.1 Operador Laplaciano

Nesta seção justificaremos que o operador Laplaciano gera um semigrupo analítico e que faz sentido falar em potências fracionárias para o operador Laplaciano.

No que segue $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, com fronteira suave. Considere um operador diferenciável da forma

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

com coeficiente $a_\alpha(x)$ suficientemente suaves, definido em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $2m$ é conhecido como a ordem de A.

Definição 3.11 *Dizemos que A é um **operador elíptico** (ou do tipo elíptico) no ponto $x_0 \in \Omega$ se*

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \neq 0 \qquad \forall\ \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

*Se os coeficientes a_α são reais, então m é necessariamente um inteiro. O operador A é **fortemente elíptico** em x_0 se*

$$(-1)^m\, Re\bigg(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha\bigg) > 0 \qquad \forall\ \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Exemplo 3.1 *O operador Laplaciano, $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, é um operador elíptico. E o operador $-\Delta$ é fortemente elíptico.*

Definição 3.12 *Seja $A = A(x, D)$, um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ em um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e seja $1 < p < \infty$. Definimos*

$$D(A_p) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$$

e

$$A_p u = A(x, D)u \qquad \text{para} \quad u \in D(A_p).$$

Teorema 3.13 *Seja $A(x, D)$ um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ em um domínio limitado Ω com fronteira suave $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^N$ e seja $1 < p < \infty$. Se A_p é o operador associado com A pela definição anterior, então $-A_p$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em $L^p(\Omega)$.*
Demonstração: (Ver Pazy [22])

Teorema 3.14 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e seja A_p o operador definido no Apêndice C. Se $0 \leq \alpha \leq 1$ então temos as seguinte imersões contínuas*

1. $X^\alpha \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$ para $k - \frac{N}{q} < 2m\alpha - \frac{n}{p}$, $q \geq p$, com $k \in \mathbb{N}$;
2. $X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\overline{\Omega})$ para $0 \leq \nu < 2m\alpha - \frac{n}{p}$;
3. $X^\alpha \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $r \leq \frac{Np}{N-2\alpha p}$, $0 \leq \alpha < \frac{N}{2p}$.

Observação 3.4 *Pelo Teorema 3.13 e sabendo que o operador $A = -\Delta$ é fortemente elíptico, segue que o operador Laplaciano Δ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Portanto para falar em potências fracionárias para o operador $A = -\Delta$*

3.4 Aplicações

Nesta seção temos como objetivo encontrar solução clássica para alguns problemas de valores iniciais semilineares com dados iniciais no espaço de potência fracionária com relação ao operador $-A$ que é gerador de um semigrupo analítico, tal espaço é menos regular do que o domínio do operador, isto é, $D(A)$ está contido no espaço em questão. Portanto, para mostrar a existência de solução para problemas em que o dado inicial pertence a um conjunto mais amplo, exigiremos mais do nosso operador A, que é o fato de $-A$ gerar um semigrupo analítico. Iniciaremos resolvendo o problema linear, que será usado na demonstração do resultado principal.

3.4.1 O Caso Linear

Como foi visto no Capítulo 2, uma função u é solução clássica do problema linear

$$(P_3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = -Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

se $u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1((0,\infty); X)$, $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$, e u verifica o problema (P_3) para $t > 0$. Sabemos que o problema (P_3) possui solução generalizada, desde que $S(t-\cdot)f(\cdot)$ seja integrável, nosso objetivo é mostrar que a mesma é uma solução clássica. No Capítulo 2 vimos algumas situações onde isso ocorre, mas naquele momento consideramos o dado inicial

$u_0 \in D(A)$, neste momento pediremos menos regularidade para o dado inicial e portanto os resultados do Capítulo 2 não podem ser repetidos. Com relação ao problema (P_3) temos o seguinte teorema.

Teorema 3.15 *Seja $-A$ o gerador de um semigrupo analítico $\{S(t)\}$, com $0 \in \rho(A)$. Sejam $u_0 \in X$ e $f : [0, \infty) \to X$ uma função localmente Hölder contínua , isto é,*

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq k(t_1 - t_2)^{\alpha}, \qquad 0 \leq t_2 \leq t_1 \leq T,$$

onde k e α são constante, com k dependendo de T e $0 < \alpha \leq 1$. Então o problema (P_3) possui uma única solução clássica.

Demonstração: Na demonstração usaremos o Teorema 2.6, para isto mostraremos que a função dada por

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0$$

pertence a $D(A)$ e que $Av(t)$ é contínua em $(0, \infty)$. Note que

$$v(t) = \underbrace{\int_0^t S(t-s)\big(f(s) - f(t)\big)\,\mathrm{d}s}_{v_1(t)} + \underbrace{\int_0^t S(t-s)f(t)\,\mathrm{d}s}_{v_2(t)}.$$

Mostraremos que

(i) $v_1(t) \in D(A)$ e $Av_1(t)$ é contínua em $(0, \infty)$;

(ii) $v_2(t) \in D(A)$ e $Av_2(t)$ é contínua em $(0, \infty)$.

***Prova de* (ii):** Fazendo a mudança de variável $r = t - s$, obtemos

$$v_2(t) = \int_0^t S(r)f(t)\mathrm{d}r,$$

logo pelo Teorema 1.17 temos que $v_2(t) \in D(A)$, para todo $t \in (0, T)$, com

$$A(v_2(t)) = S(t)f(t) - f(t)$$

daí pela continuidade de f e de $S(t)$ segue que $A(v_2(t))$ é contínua em $(0, T)$, sendo T qualquer temos, $v_2(t) \in D(A)$ para todo $(0, \infty)$ e $A(v_2(t))$ é contínua em $(0, \infty)$.

***Prova de* (i):** Para provar que (i) ocorre, precisamos mostrar que o limite

$$\lim_{h \downarrow 0} \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) v_1(t)$$

existe, de onde podemos concluir

$$A(v_1(t)) = \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)v_1(t).$$

Note inicialmente que sendo $\{S(t)\}$ um semigrupo analítico, temos que $S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big) \in D(A)$. Mostraremos que

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)v_1(t) \longrightarrow \int_0^t AS(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,\mathrm{d}s,$$

isto é,

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,\mathrm{d}s \longrightarrow \int_0^t AS(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,\mathrm{d}s. \tag{3.11}$$

Claramente o operador

$$\frac{S(h)-I}{h} : X \longrightarrow X$$

é linear contínua. Temos também, que a função dada por $s \mapsto S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)$ é contínua, logo pelo Teorema A.7 temos

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \left(\frac{S(h)-I}{h}\right)S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,\mathrm{d}s$$

Assim, (3.11) segue se

$$\left\|\int_0^t \left(\frac{S(h)-I}{h}-A\right)S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,\mathrm{d}s\right\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h\downarrow 0.$$

Note que

$$\left\|\int_0^t \Big(\frac{S(h)-I}{h}-A\Big)S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\mathrm{d}s\right\| \le \int_0^t \left\|\Big(\frac{S(h)-I}{h}-A\Big)S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\right\|\mathrm{d}s.$$

Claramente o operador linear $A : D(A) \to X$ é contínuo visto com relação a norma do gráfico. Temos também que, para cada $h>0$, o operador $B_h \equiv \dfrac{S(h)-I}{h} : D(A) \longrightarrow X$ é linear contínuo com relação a norma do gráfico. Desta forma o operador

$$\begin{aligned} F_h \;:\; D(A) &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto F_h\,u = \left(\frac{S(h)-I}{h}-A\right)u \end{aligned}$$

é linear contínuo com relação a norma do gráfico. Logo, para cada $h>0$, existe uma constante $\widetilde{c}_h > 0$ tal que

$$\|F_h\,u\| \le \widetilde{c}_h \|u\|_{D(A)}. \tag{3.12}$$

Assim $\{F_h\}_{h>0}$ é uma família de operadores lineares e contínuos de $D(A)$ em X que verifica (3.12). Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema C.1), existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|F_h\| \leq c \qquad \forall\; h > 0.$$

Definindo

$$\begin{array}{rccl} g_h \; : & [0,t] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & g_h(s) = \left\| \left(\dfrac{S(h)-I}{h} - A \right) S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big) \right\|, \end{array}$$

note que

$$g_h(s) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h \downarrow 0,$$

pois para cada s fixado $S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big) \in D(A)$. Além disso

$$|g_h(s)| \leq c\big\|S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\big\|_{D(A)} \leq c\Big(\big\|S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\big\| + \big\|AS(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\big\|\Big)$$

o que implica

$$|g_h(s)| \leq c\big\|S(t-s)\big\|\big\|f(s)-f(t)\big\| + c\big\|AS(t-s)\big\|\big\|f(s)-f(t)\big\|$$

logo

$$|g_h(s)| \leq c\,k\,M\,e^{\omega T}(T-t)^{\alpha} + c\,M_{\alpha}k|t-s|^{\alpha-1} \equiv g(s) \in L^1([0,T]).$$

Portanto pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.6) temos

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t g_h(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

isto é,

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t \left\| \left(\frac{S(h)-I}{h} - A \right) S(t-s)\big(f(s)-f(t)\big) \right\| \mathrm{d}s = 0$$

implicando que (3.11) ocorre, donde segue que $v_1(t) \in D(A)$ com

$$Av_1(t) = \int_0^t AS(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,\mathrm{d}s.$$

Agora mostraremos que $Av_1(t)$ é contínuo em $(0,T)$. Seja $t_n \to t$ em $(0,T)$ e suponha $t_n > t$. Note que

$$\big\|Av_1(t_n) - Av_1(t)\big\| = \left\| \int_0^{t_n} AS(t_n-s)\big(f(s)-f(t_n)\big)\,\mathrm{d}s - \int_0^t AS(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,\mathrm{d}s \right\|$$

o que implica

$$\big\|Av_1(t_n) - Av_1(t)\big\| \leq \int_0^T \big\|\chi_{t_n}(s)AS(t_n - s)\big(f(s) - f(t_n)\big) - \chi_t(s)AS(t-s)\big(f(s) - f(t)\big)\big\|\mathrm{d}s.$$

Considerando

$$\widetilde{f}_n(s) = \big\|\chi_{t_n}(s)AS(t_n - s)\big(f(s) - f(t_n)\big) - \chi_t(s)AS(t-s)\big(f(s) - f(t)\big)\big\|$$

temos

$$\widetilde{f}_n(s) \longrightarrow 0 \qquad \text{q. t. p.} \quad \text{em} \quad (0,T),$$

pois

$$\chi_{t_n}(s) \longrightarrow \chi_t(s) \qquad \text{q. t. p.} \quad \text{em} \quad (0,T)$$

e

$$AS(t_n - s)\big(f(s) - f(t_n)\big) \longrightarrow AS(t-s)\big(f(s) - f(t)\big).$$

Temos também que

$$|\widetilde{f}_n(s)| \leq \big\|\chi_{t_n}(s)AS(t_n - s)\big(f(s) - f(t_n)\big)\big\| + \big\|\chi_t(s)AS(t-s)\big(f(s) - f(t)\big)\big\|$$

o que implica

$$|\widetilde{f}_n(s)| \leq \frac{k_1\,\chi_{t_n}(s)}{|t_n - s|^{1-\alpha}} + \frac{k_1\,\chi_t(s)}{|t-s|^{1-\alpha}} \equiv \widetilde{g}_n(s).$$

Claramente

- $\widetilde{g}_n(s) \longrightarrow \dfrac{2k_1\chi_t(s)}{|t-s|^{1-\alpha}} \equiv \widetilde{g}_0(s) \in L^1([0,T]);$
- $\displaystyle\int_0^t \widetilde{g}_n(s)\mathrm{d}s = \frac{2k_1\,t_n^\alpha}{\alpha} \longrightarrow \frac{2k_1\,t^\alpha}{\alpha} = \int_0^t \widetilde{g}_0(s)\mathrm{d}s.$

Assim aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado (Teorema B.7) temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \widetilde{f}_n(s)\mathrm{d}s = 0,$$

de onde segue a continuidade de $Av_1(t)$ em $(0,T)$, sendo T qualquer temos que $v(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e $Av_1(t)$ é contínua em $(0,\infty)$.
De onde concluímos que

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \in D(A) \qquad \text{para} \ \ \text{todo} \ \ t > 0$$

e

$$Av(t) = Av_1(t) + Av_2(t)$$

é contínua em $(0,\infty)$. Portanto pelo Teorema 2.6 temos que a solução generalizada do problema (P_3) é solução clássica. ■

Observação 3.5 *Note que na demostração do Teorema 3.15, todo o raciocínio foi feito estimando t por um T fixo, assim temos uma versão do Teorema 3.15 para a função f definida em intervalo limitado da semireta não-negativa.*

Aplicação: Considere os seguintes problemas de valor inicial:

Equação do Calor

$$(\star)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t) & \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \Gamma \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $f(t) = \varphi(x)\sin t$ com $\varphi \in L^2(\Omega)$ fixado e $x \in \Omega$. Mostraremos que f verifica as hipóteses do Teorema 3.15. Vejamos, dados t_1, $t_2 \in [0,\infty)$ tenmos

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_2 = \big\|\varphi(\cdot)\big(\sin t_1 - \sin t_2\big)\big\|_2 = \|\varphi(\cdot)\|_2\ |\sin t_1 - \sin t_2|$$

usando o Teorema do Valor Médio

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_2 = \underbrace{\|\varphi(\cdot)\|_2}_{constante}\ \underbrace{|\cos t_0|}_{\leq 1}\ |t_1 - t_2|$$

para algum $t_0 \in (t_1,\, t_2)$, logo

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_2 \leq k\,|t_1 - t_2|,$$

mostrando o desejado. Portando o problema acima tem uma solução clássica.

Equação da Onda

$$(\star\star)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) - \Delta u(t) = f(t), & \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty) \\ u = 0, & \text{em} \quad \Gamma \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $f(t) = \varphi(x)\sin t$ com $\varphi \in L^2(\Omega)$ fixado e $x \in \Omega$, com $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $v_0 \in H_0^1(\Omega)$.

3.4.2 O Caso Semilinear

Nesta seção, temos como objetivo garantir a existência e unicidade de solução (clássica) para a seguinte classe de problemas de evolução semilineares

$$(P_5) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = -Au(t) + f(t, u(t)), & t > 0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

onde o operador $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{S(t)\}$ sobre um espaço de Banach X. Por conveniência assumiremos que $\|S(t)\| \leq M$, $M > 0$, para todo $t \geq 0$, e que $0 \in \rho(A)$, isto é, A é inversível. Assim faz sentido falar no operador de potência fracionária A^α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, o qual é um operador linear, fechado, inversível cujo domínio $D(A^\alpha)$ é denso em X. Temos também que $X^\alpha = (D(A^\alpha); \|\cdot\|_\alpha)$ é um espaço de Banach e que para $0 \leq \alpha \leq \beta$ temos $X^\beta \hookrightarrow X^\alpha$ continuamente.

Com relação a função f do Problema (P_5), assumiremos a seguinte hipótese.

Hipótese (F): Seja U um subconjunto aberto de $[0, \infty) \times X^\alpha$. A função $f : U \to X$ satisfaz a hipótese (F) se para cada $(t, x) \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$, e constantes $L \geq 0$ e $0 < \theta \leq 1$ tais que

$$\big\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\big\| \leq L\big(|t_1 - t_2|^\theta + \|x_1 - x_2\|_\alpha\big), \qquad \forall (t_i, x_i) \in V.$$

Teorema 3.16 *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{S(t)\}$ satisfazendo $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$, e suponha que $0 \in \rho(A)$. Se $f : U \to X$ satisfaz a hipótese (F), então para cada dado inicial $(t_0, u_0) \in U$ o problema de valor inicial (P_5) possui uma única solução clássica local (pois é em V)*

$$u \in C([t_0, t_1); X) \cap C^1((t_0, t_1); X)$$

onde $t_1 = t_1(t_0, u_0) > t_0$.

Demonstração: Pelas hipóteses sobre o operador A, tem-se pelo Teorema 3.9 que, para $t > 0$, o operador $A^\alpha S(t)$ é limitado e

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \qquad \forall\, t > 0,$$

logo

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} \qquad \forall\, t > 0. \tag{3.13}$$

No que segue, suponha $(t_0, u_0) \in U$, $t_1' > t_0$ e $\delta > 0$. Considere a seguinte vizinhança de (t_0, u_0)

$$V = \big\{(t, u);\ t_0 \leq t \leq t_1',\ \|u - u_0\|_\alpha \leq \delta\big\}.$$

Note que a função $\widetilde{f} : [t_0, t_1'] \to X$, dada por $\widetilde{f}(t) = f(t, u_0)$ é contínua, daí a função $\widehat{f} : [t_0, t_1'] \to \mathbb{R}$, dada por $\widehat{f}(t) = \|\widetilde{f}(t)\| = \|f(t, u_0)\|$ é uma função contínua sobre o compacto $[t_0, t_1']$, o que implica na existência de

$$B = \max_{t_0 \le t \le t_1'} \|f(t, u_0)\|.$$

Sendo $\{S(t)\}$ um semigrupo, temos que

$$S(t - t_0)A^\alpha u_0 \longrightarrow A^\alpha u_0 \qquad \text{quando} \quad t \to t_0,$$

isto é,

$$\big\|S(t - t_0)A^\alpha u_0 - A^\alpha u_0\big\| \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad t \to t_0.$$

Portanto existe $t_1 \in (t_0, \infty)$ tal que

$$\big\|S(t - t_0)A^\alpha u_0 - A^\alpha u_0\big\| < \frac{\delta}{2} \qquad \text{para} \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{3.14}$$

e

$$0 < t_1 - t_0 < \min\left\{t_1' - t_0,\ \left[\frac{\delta}{2}(1-\alpha)M_\alpha^{-1}(B + \delta L)^{-1}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}. \tag{3.15}$$

Seja Y o espaço de Banach $C([t_0, t_1]; X)$ munido com a norma do supremo, denotada por $\|\cdot\|_Y$. Defina a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} F : Y & \to & X \\ y & \mapsto & Fy : [t_0, t_1] \to X \\ & & \quad t \mapsto Fy(t) = S(t - t_0)A^\alpha u_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t - s) f(s, A^{-\alpha} y(s))\,\mathrm{d}s. \end{array}$$

Mostraremos que $F(Y) \subset Y$. Já sabemos que $S(\cdot - t_0)A^\alpha u_0$ é contínua, assim basta mostrar que a função dada por

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t - s) f(s, A^{-\alpha} y(s))\,\mathrm{d}s$$

é contínua em $[t_0, t_1]$. Note inicialmente que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t - s) f(s, A^{-\alpha} y(s))\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \chi_t(s) A^\alpha S(t - s) f(s, A^{-\alpha} y(s))\,\mathrm{d}s,$$

o que implica para $t_n \in [t_0, t_1]$ e $t_n \to t_0$

$$\|g(t_n) - g(t)\| \le \int_{t_0}^{t_1} \Big\|\chi_{t_n}(s) A^\alpha S(t_n - s) f(s, A^{-\alpha} y(s)) - \chi_t(s) A^\alpha S(t - s) f(s, A^{-\alpha} y(s))\Big\|\,\mathrm{d}s.$$

Considerando

$$h_n(s) = \big\|\chi_{t_n}(s)A^{\alpha}S(t_n - s)f(s, A^{-\alpha}y(s)) - \chi_t(s)A^{\alpha}S(t-s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\big\|,$$

quando $n \to \infty$, temos

$$h_n(s) \longrightarrow 0 \qquad \text{q.t.p. em } [t_0, t_1],$$

pois

$$A^{\alpha}S(t_n - s)f(s, A^{-\alpha}y(s)) \longrightarrow A^{\alpha}S(t-s)f(s, A^{-\alpha}y(s))$$

e

$$\chi_{t_n}(s) \longrightarrow \chi_t(s) \qquad \text{q.t.p. em } [t_0, t_1].$$

Também temos

$$|h_n(s)| \leq \big\|\chi_{t_n}(s)A^{\alpha}S(t_n - s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\big\| + \big\|\chi_t(s)A^{\alpha}S(t-s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\big\|. \tag{3.16}$$

Usando (3.13) temos

$$\big\|\chi_t(s)A^{\alpha}S(t-s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\big\| \leq \chi_t(s)M_{\alpha}(t-s)^{-\alpha}\big\|f(s, A^{-\alpha}y(s))\big\|$$

desde que a função $s \mapsto \|f(s, A^{-\alpha}y(s))\|$ é contínua sobre o compacto $[t_0, t_1]$ temos que a mesma é limitada e portanto

$$\big\|\chi_t(s)A^{\alpha}S(t-s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\big\| \leq C_{\alpha}\,\frac{\chi_t(s)}{(t-s)^{\alpha}} \qquad \forall\ t \in [t_0, t_1]. \tag{3.17}$$

De (3.16) e (3.17)

$$|h_n(s)| \leq C_{\alpha}\,\frac{\chi_{t_n}(s)}{(t_n - s)^{\alpha}} + C_{\alpha}\,\frac{\chi_t(s)}{(t-s)^{\alpha}} \equiv \widetilde{g}_n(s).$$

Claramente

- $\widetilde{g}_n(s) \longrightarrow 2C_{\alpha}\,\dfrac{\chi_t(s)}{(t-s)^{\alpha}} \equiv \widetilde{g}_0(s) \in L^1([0,T]);$
- $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \widetilde{g}_n(s)\mathrm{d}s \longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{g}_0(s)\mathrm{d}s.$

Também temos que $\widetilde{g}_0 \in L^1([t_0, t_1])$, pois

$$\int_{t_0}^{t_1} |\,\widetilde{g}_0(s)|\,\mathrm{d}s = C_{\alpha}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\chi_t(s)}{|t-s|^{\alpha}}\,\mathrm{d}s = C_{\alpha}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{|t-s|^{\alpha}}\,\mathrm{d}s = C_{\alpha}\frac{(t-t_0)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} < \infty.$$

Assim aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado (Teorema B.7), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} h_n(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

o que implica
$$\|g(t_n) - g(t)\| \longrightarrow 0,$$
mostando a continuidade de g em $[t_0, t_1]$ e conseqüentemente a inclusão $F(Y) \subset Y$. Claramente para cada $y \in Y$, temos $Fy(t_0) = A^\alpha u_0$. Considerando o subconjunto de Y dada por
$$Z = \big\{y \in Y;\ y(t_0) = A^\alpha u_0,\ \|y(t) - A^\alpha u_0\| \leq \delta\big\},$$
note que

(i) $Z \neq \emptyset$, pois $\widetilde{y}(t) = S(t - t_0)A^\alpha u_0 \in Z$;

(ii) Z é limitado;

(iii) Z é fechado.

***Justificativa de* (ii):** Dado $y \in Z$ temos
$$\|y(t) - A^\alpha u_0\| \leq \delta \qquad \forall\ t \in [t_0, t_1]$$
logo
$$\|y(t)\| \leq \delta + \|A^\alpha u_0\| \equiv K \qquad \forall\ t \in [t_0, t_1]$$
daí K é cota superior para o conjunto $\{\|y(t)\|;\ t \in [t_0, t_1]\}$, conseqüentemente por definição de supremo temos
$$\|y\|_Y \leq K \qquad \forall\ y \in Z$$
mostrando a limitação de Z.
***Justificativa de* (iii):** Seja $\{y_n\} \subset Z$, tal que $y_n \to y$ em Y. Devemos mostrar que $y \in Z$. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$
$$y_n(t_0) = A^\alpha u_0 \tag{3.18}$$
e
$$\|y_n(t) - A^\alpha u_0\| \leq \delta. \tag{3.19}$$
Assim $y_n \to y$ em Y implica que para cada $t \in [t_0, t_1]$, $y_n(t) \to y(t)$ em X, em particular $y_n(t_0) \to y(t_0)$. Daí passando ao limite em (3.18), obtemos $y(t_0) = A^\alpha u_0$, e passando ao limite em (3.19) obtemos $\|y(t) - A^\alpha u_0\| \leq \delta$. Donde segue que $y \in Z$, logo Z é fechado.
Assim Z com a norma $\|\cdot\|_Y$ é um espaço métrico completo.
Agora, mostraremos que $F(Z) \subset Z$. De fato, para $y \in Z$ temos
$$\big\|Fy(t) - A^\alpha u_0\big\| = \left\|S(t - t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t - s) f(s, A^{-\alpha} y(s))\,\mathrm{d}s - A^\alpha u_0\right\|$$

o que implica

$$\begin{aligned}\big\|Fy(t)-A^\alpha u_0\big\| \;\le\; & \underbrace{\big\|S(t-t_0)A^\alpha u_0-A^\alpha u_0\big\|}_{I_1} \\ & +\underbrace{\int_{t_0}^{t}\big\|A^\alpha S(t-s)\big\|\;\big\|f(s,A^{-\alpha}y(s))-f(s,u_0)\big\|\,\mathrm{d}s}_{I_2} \\ & +\underbrace{\int_{t_0}^{t}\big\|A^\alpha S(t-s)\big\|\;\big\|f(s,u_0)\big\|\,\mathrm{d}s}_{I_3}.\end{aligned}$$

Estimativa para (I_1)**:** Por (3.14) temos que

$$I_1 \le \frac{\delta}{2}\,.$$

Estimativa para (I_2)**:** Por (3.13) e sabendo que f verifica a hipótese (F), temos

$$I_2 \le M_\alpha L\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\big\|A^{-\alpha}y(s)-u_0\big\|_\alpha\,\mathrm{d}s = M_\alpha L\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\big\|y(s)-A^\alpha u_0\big\|\,\mathrm{d}s$$

e sendo $y\in Z$ obtemos

$$I_2 \le M_\alpha\delta\,L\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s = M_\alpha\delta\,L\,(1-\alpha)^{-1}(t-t_0)^{1-\alpha}.$$

Estimativa para (I_3)**:** Por (3.13) e sabendo que $\big\|f(s,u_0)\big\|\le B$ temos

$$I_3 \le B\,M_\alpha\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s = B\,M_\alpha\,(1-\alpha)^{-1}(t-t_0)^{1-\alpha}.$$

Assim

$$\big\|Fy(t)-A^\alpha u_0\big\| \le \frac{\delta}{2}+M_\alpha(1-\alpha)^{-1}(t-t_0)^{1-\alpha}\,(\delta L+B)$$

logo

$$\big\|Fy(t)-A^\alpha u_0\big\| \le \frac{\delta}{2}+M_\alpha(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}\,(\delta L+B)$$

e por (3.15)

$$\big\|Fy(t)-A^\alpha u_0\big\| \le \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.$$

Conseqüentemente $Fy\in Z$, sendo $y\in Z$ qualquer concluímos $F(Z)\subset Z$. Desta forma faz sentido trabalhar com o operador $F:Z\to Z$ e mostrar que o mesmo é uma contração. Dados $y_1,\, y_2\in Z$ temos

$$\big\|Fy_1(t)-Fy_2(t)\big\| = \left\|\int_{t_0}^{t}A^\alpha S(t-s)\big[f(s,A^{-\alpha}y_1(s))-f(s,A^{-\alpha}y_2(s))\big]\,\mathrm{d}s\right\|$$

logo

$$\big\|Fy_1(t) - Fy_2(t)\big\| \leq \int_{t_0}^{t} \big\|A^\alpha S(t-s)\big\|\big\|f(s, A^{-\alpha}y_1(s)) - f(s, A^{-\alpha}y_2(s))\big\|\, \mathrm{d}s$$

usando (3.13) e a hipótese (F) obtemos

$$\big\|Fy_1(t) - Fy_2(t)\big\| \leq M_\alpha L \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\big\|A^{-\alpha}y_1(s) - A^{-\alpha}y_2(s)\big\|_\alpha \mathrm{d}s$$

o que implica

$$\big\|Fy_1(t) - Fy_2(t)\big\| \leq M_\alpha L \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\big\|y_1(s) - y_2(s)\big\|\, \mathrm{d}s \leq M_\alpha L\, \|y_1 - y_2\|_Y \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s$$

logo

$$\big\|Fy_1(t) - Fy_2(t)\big\| \leq \underbrace{M_\alpha L\,(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}}_{\leq \frac{1}{2}} \|y_1 - y_2\|_Y$$

e por (3.15)

$$\big\|Fy_1(t) - Fy_2(t)\big\| \leq \frac{1}{2}\, \|y_1 - y_2\|_Y \qquad \forall\, t \in [t_0, t_1],$$

o que implica

$$\big\|Fy_1 - Fy_2\big\|_Y \leq \frac{1}{2}\, \|y_1 - y_2\|_Y \qquad \forall\, y_1,\, y_2 \in Z,$$

mostrando que $F : Z \to Z$ é uma contração. Portanto pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, (Teorema C.9), F possui um único ponto fixo $y \in Z$, isto é, $y = Fy$, o que implica

$$y(t) = S(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t-s) f(s, A^{-\alpha}y(s))\, \mathrm{d}s$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Sabendo que f satisfaz a hipótese (F) e que y é contínua segue que a função dada por $\phi(t) = f(t, A^{-\alpha}y(t))$ é contínua em $[t_0, t_1]$, logo é limitada, o que implica na existência de $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\phi(t)\| = \|f(t, A^{-\alpha}y(t))\| \leq N \qquad \forall\, t \in [t_0, t_1]. \tag{3.20}$$

Neste momento, mostraremos que o problema de valor inical

$$(\widetilde{P_5}) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = -Au(t) + \phi(t), & t > 0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

possui uma única solução clássica, para isto usaremos o Teorema 3.15 (Observação 3.5), precisamos mostrar apenas que ϕ é uma função localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$.

Pelo Teorema 3.9 para cada β satisfazendo $0 < \beta < 1 - \alpha$ e para cada $0 < h < 1$ temos

$$\big\|\big(S(h) - I\big)A^\alpha S(t-s)\big\| = \big\|S(h)A^\alpha S(t-s) - A^\alpha S(t-s)\big\| \leq C_\beta\, h^\beta \big\|A^\beta A^\alpha S(t-s)\big\|$$

logo

$$\big\|\big(S(h)-I\big)A^{\alpha}S(t-s)\big\| \le C_{\beta}\; h^{\beta}\big\|A^{\beta+\alpha}S(t-s)\big\|$$

o que implica

$$\big\|\big(S(h)-I\big)A^{\alpha}S(t-s)\big\| \le \widetilde{C}\; h^{\beta}\,(t-s)^{-(\alpha+\beta)}. \tag{3.21}$$

Note que se $t_0 < t < t+h \le t_1$

$$\begin{aligned}\|y(t+h)-y(t)\| \;\le\; & \underbrace{\big\|\big(S(h)-I\big)A^{\alpha}S(t-t_0)u_0\big\|}_{I_4}\\ & + \underbrace{\int_{t_0}^{t}\big\|\big(S(h)-I\big)A^{\alpha}S(t-s)f(s,A^{-\alpha}y(s))\big\|\,\mathrm{d}s}_{I_5}\\ & + \underbrace{\int_{t}^{t+h}\big\|A^{\alpha}S(t+h-s)\,f(s,A^{-\alpha}y(s))\big\|\,\mathrm{d}s}_{I_6}.\end{aligned}$$

Estimativa para (I_4)**:**

$$I_4 \le \big\|\big(S(h)-I\big)A^{\alpha}S(t-t_0)\big\|\|u_0\| \overbrace{\le}^{(3.21)} \underbrace{\widetilde{C}\,(t-t_0)^{-(\alpha+\beta)}\|u_0\|}_{M_1=M_1(t)}\, h^{\beta}$$

logo

$$I_4 \le M_1\, h^{\beta}.$$

Note que se $t \to t_0$ então $M_1 \to +\infty$. Logo considerando $t_0 < t_0' \le t \le t_1$, temos $M_1 < \infty$.

Estimativa para (I_5)**:**

$$I_5 \le \int_{t_0}^{t}\big\|\big(S(h)-I\big)A^{\alpha}S(t-s)\big\|\,\big\|f(s,A^{-\alpha}y(s))\big\|\,\mathrm{d}s \overbrace{\le}^{(3.20)\text{ e }(3.21)} \widetilde{C}N\,h^{\beta}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-(\alpha+\beta)}\mathrm{d}s$$

resolvendo a integral obtemos

$$I_5 \le \widetilde{C}N\,h^{\beta}\,(1-(\alpha+\beta))^{-1}(t-t_0)^{1-(\alpha+\beta)}$$

sendo $\alpha+\beta<1$ temos

$$I_5 \le \underbrace{\widetilde{C}N\,(1-(\alpha+\beta))^{-1}(t_1-t_0)^{1-(\alpha+\beta)}}_{M_2}\,h^{\beta}$$

logo

$$I_5 \le M_2 h^{\beta}$$

com M_2 independente de t.
Estimativa para (I_6)**:**

$$I_6 \leq \int_t^{t+h} \big\|A^\alpha S(t+h-s)\big\| \, \big\|f(s, A^{-\alpha}y(s))\big\| \, \mathrm{d}s$$

pelo Teorema 3.9 e por (3.20) temos

$$I_6 \leq M_\alpha N \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha} \, \mathrm{d}s$$

resolvendo a integral obtemos

$$I_6 \leq \underbrace{\frac{M_\alpha N}{1-\alpha}}_{M_3} \, h^{1-\alpha}$$

sendo $0 < h < 1$ e $\beta < 1-\alpha$ concluímos

$$I_6 \leq M_3 \, h^\beta,$$

com M_3 independente de t.
Fazendo uso destas estimativas temos

$$\big\|y(t+h) - y(t)\big\| \leq \underbrace{(M_1 + M_2 + M_3)}_{\widehat{C}} \, h^\beta. \tag{3.22}$$

Daí fazendo $s = t+h$ em (3.22) com $t_0 < t_0' \leq t$, $s \leq t_1$, obtemos

$$\big\|y(s) - y(t)\big\| \leq \widehat{C}|s-t|^\beta,$$

mostrando que a função y é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$. Conseqüentemente

$$\big\|\phi(s) - \phi(t)\big\| = \big\|f(s, A^{-\alpha}y(s)) - f(t, A^{-\alpha}y(t))\big\| \leq L\big(|s-t|^\theta + \|y(s) - y(t)\|\big)$$

logo

$$\big\|\phi(s) - \phi(t)\big\| \leq \widehat{L}\big(|s-t|^\theta + |s-t|^\beta\big)$$

considerando $\gamma = \min\{\theta, \beta\}$ obtemos

$$\big\|\phi(s) - \phi(t)\big\| \leq \widetilde{L} \, |s-t|^\gamma,$$

mostrando que ϕ é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$. Portanto o problema $(\widetilde{P_5})$ possui uma única solução clássica, isto é, existe $u \in C((t_0, t_1]; D(A)) \cap C^1((t_0, t_1); X)$ tal que

$u(t) \in D(A)$, para $t \in (t_0, t_1]$, u verifica o problema $(\widetilde{P_5})$, para $t \in (t_0, t_1]$, mais ainda u é dado por

$$u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\,\mathrm{d}s. \tag{3.23}$$

Sendo $u(t) \in D(A)$ temos que $u(t) \in D(A^\alpha)$, pois $D(A) \hookrightarrow D(A^\alpha)$. Daí aplicando A^α em (3.23) obtemos

$$A^\alpha u(t) = A^\alpha S(t - t_0)u_0 + A^\alpha \bigg(\int_{t_0}^{t} S(t - s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\,\mathrm{d}s \bigg). \tag{3.24}$$

Sabendo que $S(t - s)f(s, A^{-\alpha}y(s)) \in D(A)$ e que $D(A) \hookrightarrow D(A^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, obtemos $S(t - s)f(s, A^{-\alpha}y(s)) \in D(A^\alpha)$. Usando a continuidade da função $f(\cdot, A^{-\alpha}y(\cdot))$ e sabendo que $A^\alpha S(\cdot)$ é linear contínuo mostra-se facilmente que a função de $[t_0, t]$ em X^α dada por $s \longmapsto S(t-s)f(s, A^{-\alpha}y(s))$ é contínua. Temos também que $A^\alpha : X^\alpha \to X$ é linear contínua, pois

$$\|A^\alpha u\| = \|u\|_\alpha \qquad \forall\, u \in X^\alpha.$$

Assim pelo Teorema A.7 temos que

$$A^\alpha \bigg(\int_{t_0}^{t} S(t - s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\,\mathrm{d}s \bigg) = \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t - s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\,\mathrm{d}s. \tag{3.25}$$

De (3.24) e (3.25)

$$A^\alpha u(t) = S(t - t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t - s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\,\mathrm{d}s,$$

isto é,

$$A^\alpha u(t) = y(t)$$

logo

$$u(t) = A^{-\alpha}y(t)$$

de onde concluímos que

$$u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)f(s, u(s))\,\mathrm{d}s$$

é solução clássica para o problema (P_5). ∎

No intuito de demonstrarmos um resultado de solução global, iremos demonstrar o próximo lema.

Lema 3.3 *Seja $\varphi(t,s) \geq 0$ contínua em $0 \leq s < t \leq T$. Se existe constantes positivas A, B, α tais que*

$$\varphi(t,s) \leq A + B\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\varphi(\sigma,s)\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{para} \quad 0 \leq s < t \leq T. \tag{3.26}$$

Então, existe uma constante C tal que

$$\varphi(t,s) \leq C \qquad \text{para} \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

Demonstração: Assumindo (3.26), mostraremos inicialmente que

$$\varphi(t,s) \leq C_1 + C_2\int_s^t \varphi(\sigma,s)\mathrm{d}\sigma. \tag{3.27}$$

Se $\alpha = 1$, por (3.26)

$$\varphi(t,s) \leq A + B\int_s^t \varphi(\sigma,s)\,\mathrm{d}\sigma$$

mostrando o desejado. Se $\alpha > 1$ então por (3.26)

$$\varphi(t,s) \leq A + B\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\varphi(\sigma,s)\,\mathrm{d}\sigma \leq A + BT^{\alpha-1}\int_s^t \varphi(\sigma,s)\,\mathrm{d}\sigma$$

mostrando o desejado. Agora de $\alpha < 1$ temos

$$\varphi(t,s) \leq A + B\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\left[A + B\int_s^\sigma (\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\sigma$$

logo

$$\varphi(t,s) \leq A + AB\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\mathrm{d}\sigma + B^2\int_s^t\int_s^\sigma (t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\sigma$$

o que implica

$$\varphi(t,s) \leq A + AB\int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1}\mathrm{d}\sigma + B^2\int_s^t\int_\xi^t (t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\xi$$

daí

$$\varphi(t,s) \leq A + AB\,\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha} + B^2\int_s^t \left[\int_\xi^t (t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-\xi)^{\alpha-1}\mathrm{d}\sigma\right]\varphi(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi$$

pelo Teorema C.8 obtemos

$$\varphi(t,s) \leq A + AB\,\frac{T^\alpha}{\alpha} + \frac{B^2\,\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\int_s^t (t-\xi)^{2\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi.$$

Se $2\alpha - 1 > 0$ então

$$\varphi(t,s) \leq \underbrace{A + AB\,\frac{T^\alpha}{\alpha}}_{=C_1} + \underbrace{\frac{B^2\,\Gamma^2(\alpha)\,T^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}}_{=C_2}\int_s^t \varphi(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi$$

mostrando o desejado. Se $2\alpha - 1 < 0$ então

$$\varphi(t,s) \leq A + B\Big[A\,\frac{T^\alpha}{\alpha} + \frac{B\,\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\int_s^t (t-\xi)^{2\alpha-1}\varphi(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi.\Big]$$

Fazendo o mesmo tipo raciocínio para as constantes $A_1 = \frac{A\,T^\alpha}{\alpha}$, $B_1 = \frac{B\,\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}$ e $\alpha_1 = 2\alpha$ obtemos

$$\varphi(t,s) \leq A + B\Big[A_1 + \frac{A_1 B_1\,T^{\alpha_1}}{\alpha_1} + \frac{B_1^2\,\Gamma^2(\alpha_1)}{\Gamma(2\alpha_1)}\int_s^t (t-\xi)^{2\alpha_1-1}\varphi(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\Big].$$

Se $2\alpha_1 = 4\alpha - 1 > 0$ segue o desejado, do contrário usa o mesmo tipo de raciocínio. De qualquer forma (3.27) é obtido. Portanto pela desigualdade de Gronwall (Teorema C.7) obtemos

$$\varphi(t,s) \leq C_1\big(1 + C_2(t-s)e^{C_2(t-s)}\big) \leq C_1 + C_2 T\,e^{C_2 T} \equiv C.$$

Uma vez que C_1 e C_2 não depende de s a estimativa encontrada vale para $0 \leq s < t \leq T$, de onde concluímos o lema. ■

Teorema 3.17 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{S(t)\}$ satisfazendo $\|S(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$, e suponha que $0 \in \rho(A)$. Seja $f : [t_0,\infty) \times X_\alpha \to X$ satisfazendo a hipótese (F). Se existe uma função a valores reais contínua não-decrescente $k(t)$ tal que*

$$\|f(t,u)\| \leq k(t)\big(1 + \|u\|_\alpha\big) \qquad \text{para} \quad t \geq t_0, \quad u \in X_\alpha. \tag{3.28}$$

Então para cada $u_0 \in X_\alpha$ o problema de valor inicial (P_5) possui uma única solução global u, que existe para $t \geq t_0$.

Demonstração: Aplicando o Teorema 3.16, existe uma única solução clássica local do problema (P_5), para cada $(t_0,u_0) \in U$. Com a condição (3.28) mostraremos que tal solução é global, para isto, é suficiente mostrar que esta solução é limitada em X_α quando $t \to T_{max}$, pois pelo Teorema C.10 se $T_{max} < \infty$, temos $\|u(t)\| \to \infty$ quando $t \to T_{max}$. Pelo Teorema 3.16

$$A^\alpha u(t) = S(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha S(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s,$$

o que implica

$$\|u(t)\|_\alpha \leq \|S(t-t_0)A^\alpha u_0\| + \int_{t_0}^t \|A^\alpha S(t-s)\|\;\|f(s,u(s))\|\,\mathrm{d}s,$$

logo

$$\|u(t)\|_\alpha \leq M\,\|A^\alpha u_0\| + M_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} k(s)\big(1 + \|u(s)\|_\alpha\big)\,\mathrm{d}s$$

daí

$$\|u(t)\|_\alpha \leq \underbrace{M\,\|A^\alpha u_0\| + M_\alpha\; k(T)\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s}_{\leq\, c_1} + \underbrace{M_\alpha k(T)}_{=c_2}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\|u(s)\|_\alpha\,\mathrm{d}s.$$

Considerando $\beta < 1$ de tal forma que $\beta - 1 = -\alpha$, temos

$$\|u(t)\|_\alpha \leq c_1 + c_2 \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\beta-1}\|u(s)\|_\alpha\,\mathrm{d}s$$

daí aplicando o Lema 3.3 para a função $\|u(\cdot)\|_\alpha$, existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\|u(t)\|_\alpha \leq c \qquad \text{em} \;\; [0,T].$$

Portanto a solução local é uma solução global. ■

3.4.3 Aplicações

Nosso objetivo neste momento é usar os Teoremas 3.16 e 3.17, para resolve problemas do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t,u) & \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \Gamma \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

Iniciaremos com o seguinte problema

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^3 & \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \Gamma \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

Neste caso, $X = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $p = q = 2$, $f(u) = u^3$, para fixar as idéias considere $N = 3$. Note que temos

$$f(u) \in L^2(\Omega) \iff u^6 \in L^1(\Omega).$$

Pretendemos usar o Teorema 3.16, daí precisamos mostrar que a função $f(u) = u^3$ satisfaz a hipótese (F). Note que f não depende explicitamente de t, logo a hipótese (F) é equivalente a mostrar que $f : X^\alpha \to L^2(\Omega)$ é localmente Lipschitziana, isto é,

$$\|f(u) - f(v)\|_2 \leq L\|u - v\|_\alpha \qquad \forall\, u, v \in B_r(u_0) \tag{3.29}$$

Para mostrar (3.29) precisamos garantir a existência de algum $\alpha \in [0,1]$ tal que X^α esteja imerso até $L^6(\Omega)$, neste caso o expoente crítico é 6. Podemos usar diretamente o item 3 do Teorema 3.14, o qual nos garante que

$$X^\alpha \hookrightarrow L^6(\Omega) \qquad \text{para} \ \ \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{4}.$$

Portanto existe $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ tal que $X^\alpha \hookrightarrow L^6(\Omega)$ continuamente. Também podemos usar o item 1 do Teorema 3.14 e os teoremas clássicos de imersões dos Espaços de Sobolev (Teorema B.3). Vejamos, pelo item 1 do Teorema 3.14 temos

$$X^\alpha \hookrightarrow H^k(\Omega) \qquad \text{para} \ \ k - \frac{3}{2} < 2\alpha - \frac{3}{2}, \ \ \text{ou seja} \ \ k < 2\alpha.$$

Por outro lado, pelo Teorema B.3, temos

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad \forall\, q \in [2,6] \quad \text{com} \ \ \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{k}{3} \ \ \text{ou seja} \ \ k = 1.$$

Portanto para $k = 1$ temos

$$X^\alpha \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \qquad \text{para} \ \ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1,$$

conseqüentemente existe $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ tal que $X^\alpha \hookrightarrow L^6(\Omega)$.
Com a imersão estabelecida anteriormente, mostraremos (3.29) localmente. Fixado $u_0 \in X^\alpha$, considere $u, v \in X^\alpha$ com $u, v \in B_r(x_0)$, para algum $r > 0$. Note que

$$\|f(u) - f(v)\|_2^2 = \|u^3 - v^3\|_2^2 = \int_\Omega |u^3(x) - v^3(x)|^2 dx. \tag{3.30}$$

Observe que se $g(t) = t^3$, pelo Teorema do Valor Médio

$$g'(c)(b-a) = g(b) - g(a) \qquad \text{para algum} \ \ c \in (a,b).$$

Supondo sem perda de generalidade, $u(x) \leq v(x)$ e considerando $a = u(x)$, $b = v(x)$, encontramos $c = w(x) \in (u(x), v(x))$ tal que

$$g'(w(x))(v(x) - u(x)) = g(v(x)) - g(u(x)),$$

ou seja,

$$3w^2(x)(v(x) - u(x)) = v^3(x) - u^3(x)$$

o que implica

$$v^3(x) - u^3(x) \leq 3v^2(x)(v(x) - u(x)) \leq 3(v^2(x) + u^2(x))(v(x) - u(x))$$

conseqüentemente

$$|v^3(x) - u^3(x)|^2 \leq 9|v^2(x) + u^2(x)|^2 |u(x) - v(x)|^2$$

logo
$$|v^3(x) - u^3(x)|^2 \leq 9\big(|v^2(x)| + |u^2(x)|\big)^2 |u(x) - v(x)|^2. \tag{3.31}$$
De (3.30) e (3.31)
$$\|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq 9\int_\Omega \big(|v^2(x)| + |u^2(x)|\big)^2 |u(x) - v(x)|^2 dx. \tag{3.32}$$

Afirmações:

1. $|u(x) - v(x)|^2 \in L^3(\Omega)$;
2. $\big(|v^2(x)| + |u^2(x)|\big)^2 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$.

Justificativa de (1):
$$\int_\Omega \big(|u(x) - v(x)|^2\big)^3 dx = \int_\Omega |u(x) - v(x)|^6 dx < \infty,$$
pois u, $v \in X^\alpha \subset L^6(\Omega)$.
Justificativa de (2):
$$\int_\Omega \Big[\big(|u^2(x)| + |v^2(x)|\big)^2\Big]^{\frac{3}{2}} dx = \int_\Omega \big(|u^2(x)| + |v^2(x)|\big)^3 dx \leq 8\int_\Omega \big(|u(x)|^6 + |v(x)|^6\big) dx < \infty,$$
pois u, $v \in X^\alpha \subset L^6(\Omega)$, de onde concluímos afirmação.

Usando a Desigualdade de Hölder (Teorema B.5) em (3.32), temos
$$\|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq c\big\|\big(|u^2| + |v^2|\big)^2\big\|_{\frac{3}{2}} \big\||u - v|^2\big\|_3 = c\big\|\big(|u^2| + |v^2|\big)^2\big\|_{\frac{3}{2}} \|u - v\|_6^2$$
logo por imersão
$$\|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq c_1\big\|\big(|u^2| + |v^2|\big)^2\big\|_{\frac{3}{2}} \|u - v\|_\alpha^2 = c_1\big\||u^2| + |v^2|\big\|_3^2 \|u - v\|_\alpha^2$$
o que implica
$$\|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq c_1\big(\|u\|_6^2 + \|v\|_6^2\big)^2 \|u - v\|_\alpha^2 \overbrace{\leq}^{imersão} c_2\big(\|u\|_\alpha^2 + \|v\|_\alpha^2\big)^2 \|u - v\|_\alpha^2$$
logo
$$\|f(u) - f(v)\|_2 \leq c_3\|u - v\|_\alpha,$$
onde c_3 é uma constante que depende de r e $\|u_0\|_\alpha$. Mostrando que f é localmente Lipschitziana. Portanto pelo Teorema 3.16 o problema $(*)$ possui uma única solução clássica local.

De forma mais geral, seguindo um raciocínio análogo ao que foi feito para a função $f(u) = u^3$, resolve-se o seguinte problema de valor inicial

$$(**) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u(t)|^{p-1}u(t) & \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \Gamma \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

APÊNDICE A

Cálculo em Espaços de Banach

Neste apêndice estudaremos de forma introdutória, o conceito de integrais em espaços de Banach, algumas de suas propriedades, e o teorema de existência e unicidade para um problema de valor inicial, dévido a Cauchy, Lipschitz e Picard. Para maiores detalhes ver, por exemplo Lang [10,11], Adams [1], [23] para a parte de integrais, e Brezis [3] para o P.V.I.. No que segue, X é um espaço de Banach cuja norma denotamos por $\|\cdot\|$.

A.1 Integral em Espaços de Banach

Considere E o espaço das funções limitadas de $[a,b]$ em X com norma dada por

$$\|f\|_E = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|.$$

Sejam a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, e $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$, com

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b.$$

Definição A.1 *Seja $f : [a,b] \to X$ uma função. Dizemos que f é uma* ***função escada*** *se existem elementos $w_1, w_2, \ldots, w_n \in X$ tais que*

$$f(t) = w_i \qquad se \quad a_{i-1} < t < a_i, \quad com \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Observação A.1 *Pela Definição A.1, f tem valor constante em cada intervalo aberto determinado pela partição.*

Definição A.2 *Seja f uma função escada com respeito a partição P. O valor da integral de f é dado por*

$$\mathcal{I}_P(f) = (a_1 - a_0)w_1 + \ldots + (a_n - a_{n-1})w_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})w_i.$$

Proposição A.3 *Suponha que f é uma função escada com respeito a outra partição Q de $[a,b]$, então $\mathcal{I}_P(f) = \mathcal{I}_Q(f)$.*

Demonstração: Primeiro vamos considerar uma partição P_c obtida de P, inserindo um novo ponto entre os pontos de P, assim $P_c = \{a_0, \ldots, a_k, c, a_{k+1} \ldots, a_n\}$ com $a_0 \le \ldots \le a_k \le c \le a_{k+1} \le \ldots \le a_n$. Note que f possui valor constante w_{k+1} em cada intervalo $a_k < t < c$ e $c < t < a_{k+1}$. Conseqüentemente, a integral de f com respeito a P_c é dada por

$$\mathcal{I}_{P_c}(f) = (a_1 - a_0)w_1 + \ldots + (c - a_k)w_{k+1} + (a_{k+1} - c)w_{k+1} + \ldots + (a_n - a_{n-1})w_n.$$

Mas

$$(c - a_k)w_{k+1} + (a_{k+1} - c)w_{k+1} = (a_{k+1} - a_k)w_{k+1}$$

daí

$$\mathcal{I}_{P_c}(f) = \mathcal{I}_P(f).$$

Lembrete: Uma partição R refina a partição P, se cada ponto da partição P é ponto de R. Assim, inserindo um número finito de pontos e usando indução, concluímos que se R é um refinamento de P, então

$$\mathcal{I}_R(f) = \mathcal{I}_P(f). \tag{A.1}$$

Afirmação: Se Q é uma outra partição, então P e Q tem em comum um refinamento. De fato, se $Q = \{b_0, \ldots, b_m\}$, então basta considerar

$$R = \{\underbrace{a_0}_{=b_0}, a_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{=b_m}, b_1, \ldots, b_{m-1}\}$$

logo R refina P e Q, mostrando a afirmação.
Daí, por (A.1) temos

$$\mathcal{I}_P(f) = \mathcal{I}_R(f) = \mathcal{I}_Q(f).$$

■

Observação A.2 *A proposição A.3 mostra que a integral não depende da partição. Portanto vamos denotar a integral de f por $\mathcal{I}(f)$.*

Observação A.3 *Claramente f é limitada, pois tem um número finito de valores e a norma de f é dada por*

$$\|f\|_E = \max\{\|w_1\|;\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Assim,

$$\|\mathcal{I}(f)\| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i-1}|\|w_i\| \le \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\|f\|_E.$$

Daí

$$\|\mathcal{I}(f)\| \leq (b-a)\|f\|_E.$$

Agora, vamos enunciar alguns resultados sem demonstrar e apartir destes, definir a integral em espaço de Banach, que também é conhecida como **integral no sentido de Bochner**.

Lema A.1 *O conjunto das funções escadas $f : [a,b] \to X$ é um subespaço do espaço de todas as funções limitadas de $[a,b]$ em X, que denotaremos por $S_t([a,b],X)$. A função $\mathcal{I} : S_t([a,b],X) \to X$ é linear e limitada, isto é, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|\mathcal{I}(f)\| \leq C\|f\|_E.$$

Teorema A.4 *Toda função contínua de $[a,b]$ em X pode ser aproximada uniformemente por funções escadas. Além disso,*

$$C([a,b];X) \subset \overline{S_t([a,b],X)}.$$

Teorema A.5 ***(Extensão Linear)*** *Seja Y um espaço vetorial normado, e Z um subespaço de Y. Seja $F : Z \to X$ uma função linear contínua. Então, F tem uma única extensão linear contínua $\overline{F} : \overline{Z} \to X$.*

Agora, considere a seguinte notação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} \ : \ S_t([a,b],X) & \longrightarrow & X \\ f & \longmapsto & \mathcal{I}(f) := \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$

pelo Lema A.1, temos $\mathcal{I}$ linear e contínua.

Identificando $Z = S_t([a,b],X)$ e $F = \mathcal{I}$, podemos aplicar o Teorema de Extensão Linear, o que resulta na existência de uma (única) extensão linear contínua que também denotaremos por $\mathcal{I}$, com

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} \ : \ \overline{S_t([a,b],X)} & \longrightarrow & X \\ f & \longmapsto & \mathcal{I}(f) := \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$

daí identificando $\mathcal{I}|_{C([a,b];X)}$ também por $\mathcal{I}$, definimos a integral de uma função contínua por

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} \ : \ C([a,b];X) & \longrightarrow & X \\ f & \longmapsto & \mathcal{I}(f) := \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

a qual é linear e contínua.

Observação A.4 *Pelo Teorema A.4, dado $f \in C([a,b];X)$ existe $\{f_n\} \subset S_t([a,b],X)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente, daí sendo $\mathcal{I}$ contínua temos*

$$\mathcal{I}(f_n) \longrightarrow \mathcal{I}(f) \qquad \text{em} \quad X,$$

isto é,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Teorema A.6 *Seja $f : [a,b] \to X$ contínua. Então*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Demonstração: (Ver [23])

Teorema A.7 *Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $f : [a,b] \to X$ contínua e $F : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Então*

$$F\bigg(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \bigg) = \int_a^b F(f(t))\mathrm{d}t.$$

Demonstração: Sendo f contínua, pelo Teorema A.4 existe uma seqüência $\{f_n\} \subset S_t([a,b],X)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente e

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sendo F é linear e contínua,

$$F\bigg(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \bigg) = \lim_{n\to\infty} F\bigg(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \bigg). \tag{A.2}$$

Por outro lado, note que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1}) w_n^i,$$

onde $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ é uma partição do intervalo $[a,b]$, com $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_m = b$, e $f_n(t) = w_n^i$ se $a_{i-1} < t < a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Assim

$$F\bigg(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \bigg) = F\bigg(\sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1}) w_n^i \bigg),$$

sendo F linear

$$F\bigg(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \bigg) = \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1}) F(w_n^i). \tag{A.3}$$

Note que, $F \circ f_n$ é uma função escada de $[a,b]$ em X, pois $F(f_n(t)) = F(w_i)$ para $a_{i-1} < t < a_i$, com $i = 1, 2, \ldots, m$. Conseqüentemente

$$\mathcal{I}(F \circ f_n) = \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1}) F(w_n^i),$$

isto é,

$$\int_a^b F(f_n(t))\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{m}(a_i - a_{i-1})F(w_n^i). \tag{A.4}$$

De (A.3) e (A.4)

$$F\bigg(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\bigg) = \int_a^b F(f_n(t))\,\mathrm{d}t$$

o que implica

$$\lim_{n\to\infty} F\bigg(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\bigg) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b F(f_n(t))\,\mathrm{d}t. \tag{A.5}$$

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b F(f_n(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b F(f(t))\,\mathrm{d}t. \tag{A.6}$$

Justifiacativa de (A.6): Note que

$$\bigg\|\int_a^b F(f_n(t))\,\mathrm{d}t - \int_a^b F(f(t))\,\mathrm{d}t\bigg\| \le \int_a^b \big\|F(f_n(t)) - F(f(t))\big\|\,\mathrm{d}t$$

sendo F linear e contínuo, implica

$$\bigg\|\int_a^b F(f_n(t))\,\mathrm{d}t - \int_a^b F(f(t))\,\mathrm{d}t\bigg\| \le \|F\|\int_a^b \big\|f_n(t) - f(t)\big\|\,\mathrm{d}t$$

e pela convergência uniforme de $\{f_n\}$ para f, segue que a integral a direita na última desigualdade converge para zero, mostrando que (A.6) ocorre.
De (A.2), (A.5) e (A.6) concluímos

$$F\bigg(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\bigg) = \int_a^b F(f(t))\mathrm{d}t.$$

■

Os teoremas abaixo seguem das propriedades mencionadas até o momento e maiores detalhes podem ser encontros no livro do Lang [19]

Teorema A.8 *Sejam $f : [a,b] \to X$ contínua e $F : [a,b] \to X$ diferenciável em $[a,b]$ com $F' = f$. Então*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Corolário A.9 *Se $f : [a,b] \to X$ é contínua e*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

então $F'(x) = f(x)$.

Definição A.10 *Para* $f : [0, \infty] \to X$*, definimos*

$$\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{d}\tau = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

quando tal limite existe.

Teorema A.11 *Se* a*,* b*,* $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, com* $a < b < c$ *e se* $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *existe, temos*

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

No intuito de demonstrar um teorema devido a Dini, que foi fundamental no Capítulo 2 na busca de soluções clássicas para o problema de valor inicial não-homogêneo, mostraremos os seguinte Lemas.

Lema A.2 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua com* $f(a) = f(b)$*. Se* f *tem derivada lateral à direita contínua em* (a, b)*, então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'_+(c) = 0$*.*

Demonstração: Se f é constante em $[a, b]$, então $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$. Caso contrário, sendo f contínua e $[a, b]$ compacto, f atingirá seu mínimo m ou seu máximo M em um ponto interior $c \in (a, b)$, pois se ambos fossem atingidos nas extremidades, teríamos $m = M$ e f seria constante. Sem perda de generalidade, suponha que

$$f(c) = \max_{t\in[a,b]} f(t).$$

Assim

$$f'_+(c) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(c + t) - f(c)}{t} \le 0.$$

Afirmação: $f'_+(c) = 0$.

Com efeito, do contrário, $f'_+(c) < 0$ e sendo f'_+ contínuo, existiria $\epsilon > 0$ tal que, $f'_+(t) < 0$ para todo $t \in I_\epsilon = (c-\epsilon, c+\epsilon)$, logo f é decrescente em I_ϵ, implicando que existe $d \in (c-\epsilon, c)$ tal que $f(d) > f(c)$, o que é um absurdo, pois c é ponto de máximo. Portanto a afirmação é verdadeira e o lema fica demonstrado. ∎

Lema A.3 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Se* f *possui derivada lateral à direita contínua em* (a, b)*, então existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'_+(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .$$

Demonstração: Seja $g(t)$ o polinômio de grau menor do que ou igual a 1, tal que $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$. Então $g'(t)$ é constante com

$$g'(t) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

Definamos a função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, por $\varphi(t) = f(t) - g(t)$. Note que φ é contínua, pois é soma de funções contínuas e φ é derivável à direita com

$$\varphi'_+(t) = f'_+(t) - g'(t)$$

sendo também contínua em (a, b). Observe que $\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0$ e $\varphi(b) = f(b) - g(b) = 0$, logo $\varphi(a) = \varphi(b)$. Daí, pelo Lema A.2 existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'_+(c) = 0$, isto é, $f'_+(c) = g'(c)$, ou ainda,

$$f'_+(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .$$

■

Lema A.4 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua com derivada lateral à direita contínua em (a, b). Se $f'_+(t) = 0$, para todo $t \in (a, b)$. Então f é constante.*
Demonstração: Para todo $x \in (a, b]$, pelo Lema A.3, existe $c \in (a, x)$ tal que

$$f'_+(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\ .$$

Sendo $f'_+(c) = 0$ obtemos

$$f(x) = f(a) \qquad \forall\, x \in (a, b],$$

portanto f é constante em $[a, b]$. ■

Agora estamos aptos a demonstrar o Teorema devido a Dini.

Teorema A.12 *Sejam X um espaço de Banach e $f : [a, b] \to X$ uma função contínua com derivada lateral à direita contínua em (a, b). Então f é diferenciável.*
Demonstração: Considere $F : [a, b] \to X$, dada por

$$F(t) = f(a) + \int_a^t f'_+(s)\, \mathrm{d}s.$$

Sendo $f'_+(\cdot)$ contínua, segue que F é contínua e pelo Corolário A.9

- F é diferenciável em (a, b);

- $F'(t) = f'_+(t)$ para todo $t \in (a, b)$.

Definindo a função $G : [a, b] \to X$ por $G(t) = F(t) - f(t)$, note que

- G é contínua, pois é soma de funções contínuas;
- $G(a) = 0$;
- G possui derivada à direita contínua em (a, b), com

$$G'_+(t) = 0 \qquad \forall\, t \in (a, b). \tag{A.7}$$

Para cada $\varphi \in X'$ considere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \varphi(G(t))$. Note que

- g é contínua, pois é composição de funções contínuas;
- $g(a) = \varphi(G(a)) = \varphi(0) = 0$;
- g possui derivada à direita contínua em (a, b), com $\quad g'_+(t) = \varphi(G'_+(t))$,

pois

$$g'_+(t) = \lim_{t \to t_0^+} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0^+} \frac{\varphi(G(t)) - \varphi(G(t_0))}{t - t_0}$$

sendo φ linear e contínua, obtemos

$$g'_+(t) = \varphi\left(\lim_{t \to t_0^+} \frac{G(t) - G(t_0)}{t - t_0} \right) = \varphi(G'_+(t)). \tag{A.8}$$

De (A.7) e (A.8)

$$g'_+(t) = 0 \qquad \forall\, t \in (a, b).$$

Logo pelo Lema A.4, temos g constante em $[a, b]$. Portanto $g(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$, isto é, $\varphi(G(t)) = 0$, para todo $t \in [a, b]$. Sendo $\varphi \in X'$ qualquer, temos por resultados de Análise Funcional, que $G(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$, donde segue que $f(t) = F(t)$, para todo $t \in [a, b]$, ou seja, $f \equiv F$. Uma vez que F é diferenciável segue que f é diferenciável. ∎

A.2 Equações Diferenciais em Espaços de Banach

Nesta seção, estudaremos o seguinte problema de valor inicial, ou problema de Cauchy

$$(P_A) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = F(u(t)) \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

com $F : X \to X$.

Definição A.13 *Uma função $u \in X$ é dita ser **solução** do problema (P_A) se $u \in C^1([0,\infty);X)$ everifica (P_A).*

Para uma constate $k \geq 0$, que será fixada mais adiante, defina o seguinte conjunto

$$Y = \left\{ u \in C([0,\infty);X);\ \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty \right\}.$$

Note que $Y \neq \varnothing$, pois a função identicamente nula pertence a Y; note também que se $u \in Y$, o conjunto $\{e^{-kt}\|u(t)\|;\ t \geq 0\}$ é limitado, isto é, se $u \in Y$ existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|u(t)\| \leq c\,e^{kt}$ para todo $t \geq 0$.

Lema A.5 *O conjunto Y é um subespaço vetorial de $C([0,\infty);X)$.*
Demonstração: Como já foi mencionado temos $u \equiv 0 \in Y$. Agora dados $u, v \in Y$ temos

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty \qquad \text{e} \qquad \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|v(t)\| < \infty.$$

Note que, para cada $c \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|(cu+v)(t)\| \leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}(|c|\|u(t)\| + \|v(t)\|) \leq |c| \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|v(t)\|$$

o que implica

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|(cu+v)(t)\| < \infty$$

logo $cu + v \in Y$, mostrando que Y é um espaço vetorial de $C([0,\infty);X)$. ■

Lema A.6 *A função*

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_Y : & Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \|u\|_Y = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\|, \end{array}$$

é uma norma em Y.
Demonstração: Segue de forma imediata, usando propriedades de supremo e propriedades da norma de X. ■

Observação A.5 *Note que, se* $u \in Y$ *então* $\|u(t)\| \leq e^{kt}\|u\|_Y$*, para todo* $t \geq 0$.

Lema A.7 *O par* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *é um espaço de Banach.*
Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset Y$ uma seqüência de Cauchy em Y, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_Y < \epsilon, \qquad \text{para} \quad n, m \geq n_0,$$

ou seja,

$$\sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u_n(t) - u_m(t)\| < \epsilon \qquad \text{para} \quad n, m \geq n_0,$$

logo para cada $t \geq 0$, fixado

$$e^{-kt}\|u_n(t) - u_m(t)\| < \epsilon \qquad \text{para} \quad n, m \geq n_0, \tag{A.9}$$

de onde concluímos que $\{u_n(t)\}$ é uma seqüência de Cauchy em X, sendo X um espaço de Banach, existe $u \in X$, tal que $u_n(t) \to u(t)$ em X. Passando ao limite em (A.9), com $m \to \infty$, obtemos para todo $t \geq 0$, fixado

$$e^{-kt}\|u_n(t) - u(t)\| < \epsilon \qquad \text{para} \quad n \geq n_0, \tag{A.10}$$

logo por propriedade de supremo

$$\sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u_n(t) - u(t)\| < \epsilon \qquad \text{para} \quad n \geq n_0. \tag{A.11}$$

Afirmações:

1. $u \in Y$;

2. $u_n \to u$ em Y, quando $n \to \infty$.

Justificativa de (1): Por (A.10) temos, para todo $t \geq 0$

$$e^{-kt}\big(\|u(t)\| - \|u_n(t)\|\big) \leq e^{-kt}\|u_n(t) - u(t)\| < \epsilon \qquad \text{para} \quad n \geq n_0$$

o que implica

$$e^{-kt}\|u(t)\| < \epsilon + e^{-kt}\|u_{n_0}(t)\| \qquad \forall\, t \geq 0$$

logo

$$\sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty.$$

Também temos que u é contínua, pois para cada $T \geq 0$, temos que $u_n \to u$ uniformemente em $[0, T]$, logo u é limite uniforme de uma seqüência de funções contínuas logo é contínua.

Portanto $u \in Y$.
Justificativa de (2): Por (A.11) segue que

$$\|u_n - u\|_Y \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

isto é, $u_n \to u$ em Y, quando $n \to \infty$.
Sendo a seqüência $\{u_n\}$ qualquer temos que Y é um espaço de Banach. ■

Teorema A.14 ***(Cauchy, Lipschitz, Picard)*** *Seja X um espaço de Banach e seja $F : X \to X$ uma aplicação Lipschitziana, com constante de Lipschitz igual a $L \geq 0$, isto é,*

$$\big\|Fu - Fv\big\| \leq L\|u - v\| \qquad \forall\ u, v \in X.$$

Então para todo $u_0 \in X$, o problema (P_A) possui uma única solução.
Demonstração: ***Existência:*** Encontrar solução para o problema (P_A) é equivalente a encontrar uma função $u \in C([0,\infty); X)$ tal que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

Defina a seguinte função

$$\begin{array}{rcccccl} \Phi : Y & \longrightarrow & X & & & & \\ u & \longmapsto & \Phi u & : & [0,\infty) & \longrightarrow & X \\ & & & & t & \longmapsto & \Phi u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t F(u(s))\,\mathrm{d}s. \end{array}$$

Afirmação: Para todo $u \in Y$ temos $\Phi u \in Y$.
Continuidade: Precisamos mostrar que a função dada por

$$g(t) = \int_0^t F(u(s))\,\mathrm{d}s$$

é contínua em $[0,\infty)$. Para $t_1 < t_2$, temos

$$\|g(t_1) - g(t_2)\| = \left\| \int_0^{t_1} F(u(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^{t_2} F(u(s))\,\mathrm{d}s \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} F(u(s))\,\mathrm{d}s \right\|$$

daí

$$\|g(t_1) - g(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \big\|F(u(s))\big\|\,\mathrm{d}s$$

Sendo F Lipschitziana e $u \in C([0,\infty); X)$, segue que $F \circ u$ é contínua, logo sobre o compacto $[t_1, t_2]$ é limitada por uma constante $K \geq 0$. O que implica

$$\|g(t_1) - g(t_2)\| \leq K|t_1 - t_2|$$

logo g é Lipschitziana e conseqüentemente contínua. Portanto $\Phi u \in C([0,\infty);X)$.
Existência do supremo: Para cada $t \geq 0$, fixado, temos

$$\|\Phi u(t)\| = \left\| u_0 + \int_0^t F(u(s))\,\mathrm{d}s \right\| = \left\| u_0 + \int_0^t \big[F(u(s)) - F(0(s))\big]\,\mathrm{d}s + \int_0^t F(0(s))\,\mathrm{d}s \right\|$$

o que implica

$$\|\Phi u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s)) - F(0(s))\|\,\mathrm{d}s + \int_0^t \|F(0(s))\|\,\mathrm{d}s$$

logo

$$\|\Phi u(t)\| \leq \|u_0\| + L\int_0^t \|u(s)\|\,\mathrm{d}s + t\|F(0)\|$$

sendo $u \in Y$ temos

$$\|\Phi u(t)\| \leq \|u_0\| + L_1\int_0^t e^{ks}\,\mathrm{d}s + t\|F(0)\|$$

conseqüentemente

$$e^{-kt}\|\Phi u(t)\| \leq e^{-kt}\|u_0\| + e^{-kt}L_1\int_0^t e^{ks}\,\mathrm{d}s + t\,e^{-kt}\|F(0)\|$$

o que implica

$$e^{-kt}\|\Phi u(t)\| \leq e^{-kt}\|u_0\| + e^{-kt}L_1\left(\frac{e^{kt}}{k} - \frac{1}{k}\right) + \underbrace{t\,e^{-kt}}_{\to 0}\|F(0)\|$$

daí

$$e^{-kt}\|\Phi u(t)\| \leq e^{-kt}\|u_0\| + \frac{L_1}{k} + c_1\|F(0)\| < \infty$$

sendo t qualquer temos, por definição de supremo

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|\Phi u(t)\| < \infty.$$

Mostrando a afirmação.
Assim podemos redefinir a função Φ da seguinte forma

$$\begin{array}{rcccccl} \Phi & : & Y & \longrightarrow & Y & & \\ & & u & \longmapsto & \Phi u & : & [0,\infty) \longrightarrow X \\ & & & & & & t \longmapsto \Phi u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t F(u(s))\,\mathrm{d}s. \end{array}$$

Mostraremos agora que, para certos valores de k a função $\Phi : Y \to Y$ é uma contração. Com efeito, sejam $u, v \in Y$, então $u - v \in Y$ e pela Observação A.5, temos

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{kt}\|u - v\|_Y, \qquad \forall\ t \geq 0. \tag{A.12}$$

Note que

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| = \left\| \int_0^t F(u(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t F(v(s))\,\mathrm{d}s \right\| = \left\| \int_0^t \big[F(u(s)) - F(v(s))\big]\,\mathrm{d}s \right\|$$

o que implica

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq \int_0^t \big\|F(u(s)) - F(v(s))\big\|\,\mathrm{d}s \leq L \int_0^t \big\|u(s) - v(s)\big\|\,\mathrm{d}s$$

por (A.12)

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq L\|u - v\|_Y \int_0^t e^{ks}\mathrm{d}s$$

o que implica

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq L\|u - v\|_Y \left(\frac{e^{kt}}{k} - \frac{1}{k}\right)$$

logo

$$\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_Y \; e^{kt}$$

daí

$$e^{-kt}\big\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\big\| \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_Y \qquad \forall\; t \geq 0.$$

Por definição de supremo temos

$$\big\|\Phi u - \Phi v\big\|_Y \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_Y.$$

Assim fixando $k > L$ temos que $\phi : Y \to Y$ é uma contração. Portanto aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema C.9), existe $u \in C([0,\infty); X)$ tal que $u = \phi u$, isto é,

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\mathrm{d}s.$$

Donde segue que u é solução para o problema (P_A).

Unicidade: Suponha que u_1 e u_2 sejam soluções do problema (P_A), então

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| = \left\| \int_0^t F(u_1(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t F(u_2(s))\,\mathrm{d}s \right\|$$

o que implica

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq L \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|\,\mathrm{d}s$$

lodo pela Desigualdade de Gronwall (Teorema C.7) concluímos que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \geq 0$, isto é, $u_1 \equiv u_2$.

■

APÊNDICE B

Resultados envolvendo os espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$

Neste capítulo, enunciaremos alguns resultados clássicos envolvendo os espaços de funções $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$.

Problema de Dirichlet Homogêneo

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição B.1 *Uma* ***solução clássica*** *de (P) é uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifica (P). Uma* ***solução fraca*** *de (P) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v \qquad \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Com relação ao problema (P) temos o seguinte resultado de regularidade.

Teorema B.2 ***(Teorema de Regularidade)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto de classe C^2 com fronteira limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v \qquad \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_2,$$

onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$ então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)};$$

em particular, se $m > \frac{N}{2}$ *então* $u \in C^2(\overline{\Omega})$. *Por último, se* Ω *é de classe* C^∞ *e se* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *então* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: (Ver Brézis [6])

Lema B.1 ***(Lema de Du Bois Raymond)*** *Seja* u *uma função localmente somável em* Ω. *Então*

$$\int_\Omega u\,v = 0 \qquad \forall\, v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

se, e somente se, $u = 0$ *q.t.p. em* Ω.

Teorema B.3 ***(Imersões de Sobolev)*** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *de classe* C^1 *com fronteira limitada. Seja* $m \geq 0$ *um inteiro e* $1 \leq p < \infty$. *Então, para qualquer* $j \geq 0$, *temos as seguintes imersões contínuas:*

1. *Se* $m < \frac{N}{p}$, *então*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad \forall\, q \in [p, q^*], \quad \text{onde } \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N};$$
2. $m = \frac{N}{p}$, *então*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad \forall\, q \in [p, \infty);$$
3. *Se* $\frac{N}{p} < m$, *então*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega).$$

Demonstração: (Ver Figueiredo [14])

Teorema B.4 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitado de classe* C^1. *Seja* $m \geq 1$ *um inteiro e* $1 \leq p < \infty$. *Então, para qualquer* $j \geq 0$, *temos as seguintes imersões compactas:*

1. *Se* $m < \frac{N}{p}$, *então*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, q^*), \quad \text{onde } \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N};$$
2. $m = \frac{N}{p}$, *então*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, \infty);$$
3. *Se* $\frac{N}{p} < m$, *então*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}),$$

Demonstração: (Ver Figueiredo [14])

Lema B.2 *Suponha que*

$$f_n \to f \qquad em \quad L^p(\Omega)$$

Seja $g \in L^q(\Omega)$, com p e q expoentes conjugados. Então

$$\int_\Omega f_n g \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f\, g \,\mathrm{d}x.$$

Demonstração: Note que

$$\left| \int_\Omega f_n g \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f\, g \,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_\Omega (f_n - f)\, g \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_\Omega |f_n - f|\, |g| \,\mathrm{d}x.$$

Daí pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\left| \int_\Omega f_n g \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f\, g \,\mathrm{d}x \right| \leq \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

Donde segue o desejado. ∎

Lema B.3 *Sejam $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega v\, \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\, \Delta v \,\mathrm{d}x \tag{B.1}$$

e

$$\int_\Omega \nabla u\ \nabla v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u\ v \,\mathrm{d}x. \tag{B.2}$$

Demonstração: Note inicialmente que sendo $u, v \in H^2(\Omega)$ faz sentido os símbolos

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

e

$$\Delta v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}.$$

Sendo $u \in H_0^1(\Omega)$, existe $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to +\infty$$

o que implica

$$\|\varphi_n - u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to +\infty$$

e

$$\Big\|\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to +\infty \quad i = 1, 2, 3, \dots ,$$

ou seja,

$$\varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{em } L^2(\Omega) \tag{B.3}$$

e

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \text{em } L^2(\Omega) \quad i = 1, 2, 3, \dots . \tag{B.4}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_\Omega \varphi_n \Delta v \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \varphi_n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \,\mathrm{d}x. \tag{B.5}$$

Sendo $v \in H^2(\Omega)$, segue que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$ representa uma distribuição da forma $T_{\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}}$, daí

$$\Big\langle \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}, \varphi_n \Big\rangle = \int_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\, \varphi_n \,\mathrm{d}x,$$

também temos que $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ é uma distribuição e por definição de derivada de uma distribuição tem-se

$$\Big\langle \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}, \varphi_n \Big\rangle = (-1)\Big\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \Big\rangle = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x$$

o que implica

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\, \varphi_n \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \tag{B.6}$$

Substituindo (B.6) em (B.5) obtemos

$$\int_\Omega \varphi_n \Delta v \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{B.7}$$

Passando ao limite em (B.7), com $n \to +\infty$, sabendo que $\Delta v, \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ e por (B.3) e (B.4), temos pelo Lema B.2 que

$$\int_\Omega u\, \Delta v \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x\,. \tag{B.8}$$

Por outro lado, sendo $v \in H_0^1(\Omega)$ existe $\{\psi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|\psi_n - v\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Daí seguindo um raciocínio análogo ao anterior, sendo $u \in H^2(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega v\,\Delta u\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\,. \tag{B.9}$$

De (B.8) e (B.9) concluímos que

$$\int_\Omega v\,\Delta u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\,\Delta v\,\mathrm{d}x,$$

mostrando (B.1). A justificativa de (B.2) segue de (B.9). ■

Teorema B.5 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $p, q \in [1, +\infty]$ com p e q conjugados, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então*

$$f\,g \in L^1(\Omega)$$

e

$$\|f\,g\|_1 = \int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_p\,\|g\|_q.$$

Teorema B.6 ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis com*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p. \quad \text{em } \mathbb{R}$$

onde g é uma função integrável e

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad q.t.p. \quad \text{em } \mathbb{R}$$

Então

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Existe uma versão mais geral para o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que é a seguinte:

Teorema B.7 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado)* *Seja* (f_n) *uma sequência de funções mensuráveis com*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad q.t.p. \quad em\ \mathbb{R}$$

Suponha que existe uma sequência de funções integráveis (g_n) *verificando*

$$|f_n| \leq g_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad e \quad q.t.p \quad em\ \mathbb{R}.$$
$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x) \quad q.t.p \quad em\ \mathbb{R}.$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n(x)\,dx = \int g(x)\,dx < +\infty.$$

Então, f *é integrável e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Teorema B.8 *Seja* $u \in W^{1,p}([a,b])$*, então* $u \in W_0^{1,p}([a,b])$ *se, e somente se,*

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Demonstração: (Ver Brézis [6])

Lema B.4 *Seja* $1 < p \leq \infty$ *e* $u \in L^p(\Omega)$*, com* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto. Se existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq c\|\phi\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\Omega) \text{ e } 1 \leq i \leq n$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*; temos* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*.*

Demonstração: Sabemos que a derivada de u no sentido das distribuições é dada por

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por hipótese

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \leq c\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim a função

$$\begin{array}{rccl} \left\langle \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \cdot \right\rangle : & C_0^\infty(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \left\langle \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \end{array}$$

é linear contínua e sendo $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L^q(\Omega)$, existe um prolongamento

$$\widetilde{f} : L^q \longrightarrow \mathbb{R}$$

de $\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \cdot \right\rangle$ tal que

$$\widetilde{f}\big|_{C_0^\infty(\Omega)} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \cdot \right\rangle.$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz, para os espaços $L^p(\Omega)$, temos

$$\widetilde{f}(v) = \int_\Omega gv, \quad \forall v \in L^q(\Omega),$$

para um único $g \in L^p(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Assim

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \widetilde{f}(\varphi) = \int_\Omega g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

ou seja

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \int_\Omega g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

donde segue

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g \in L^p(\Omega),$$

mostrando que $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, o que implica

$$u \in W^{1,p}(\Omega).$$

■

APÊNDICE C

Resultado Complementares

Teorema C.1 ***(Banach-Steinhaus)*** *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ uma família de operadores lineares limitados de E em F. Suponha que*

$$\sup_{\lambda\in\Gamma}\|T_\lambda x\| < +\infty \qquad \forall x \in E.$$

Então

$$\sup_{\lambda\in\Gamma}\|T_\lambda\| < +\infty.$$

Demonstração: (Ver Brézis [6]).

Teorema C.2 ***(Teorema do Valor Médio para Integrais)*** *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a).$$

Lema C.1 *Seja $f : [0,h] \to \mathbb{R}$ contínua, então*

$$\frac{1}{h}\int_0^h f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow{h\downarrow 0} f(0).$$

Demonstração: Sendo f contínua, temos pelo Teorema do Valor Médio para Integral, que existe $c \in (0,h)$ tal que

$$\int_0^h f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(c)\,h$$

daí

$$\frac{1}{h}\int_0^h f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(c)$$

assim fazendo $h \downarrow 0$, tem-se $c \downarrow 0$ e sendo f contínua obtemos $f(c) \to f(0)$, conseqüentemente

$$\frac{1}{h}\int_0^h f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow{h\downarrow 0} f(0).$$

∎

Lema C.2 *Se* $u_0 \in D(A^2) \subset D(A)$. *Então*

$$AR(\lambda)u_0 = R(\lambda)Au_0.$$

Demonstração: Sabemos que $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$. Uma vez que $(\lambda I - A)^{-1}$ está bem definido, temos que existe $v \in V$ tal que

$$(\lambda I - A)^{-1}u_0 = v \tag{C.1}$$

logo

$$A(\lambda I - A)^{-1}u_0 = Av,$$

isto é,

$$AR(\lambda)u_0 = Av. \tag{C.2}$$

Note que por (C.1)

$$u_0 = \lambda v - Av$$

o que implica

$$Au_0 = \lambda Av - A(Av). \tag{C.3}$$

Mostraremos, agora que $R(\lambda)Au_0 = Av$. Vejamos, analogamente existe $\widetilde{v} \in V$ tal que

$$(\lambda I - A)^{-1}Au_0 = R(\lambda)Au_0 = \widetilde{v} \tag{C.4}$$

logo

$$\lambda\widetilde{v} - A\widetilde{v} = Au_0$$

por (C.3) tem-se

$$\lambda\widetilde{v} - A\widetilde{v} = \lambda Av - A(Av)$$

o que implica

$$(\lambda I - A)\widetilde{v} = (\lambda I - A)(Av)$$

por injetividade de $(\lambda I - A)$ segue que $\widetilde{v} = Av$. De (C.2) e (C.4) concluímos que

$$AR(\lambda)u_0 = R(\lambda)Au_0.$$

Teorema C.3 *Para todo $x \in X$ temos*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |f(x)|.$$

Demonstração: (Ver Brézis [6])

Teorema C.4 *Seja $Y \subset X$ um subespaço vetorial tal que $\overline{Y} \neq X$. Então existe $f \in X^*$, $f \neq 0$ tal que*

$$f(u) = 0 \qquad \forall u \in Y.$$

Demonstração: (Ver Brézis [6])

Teorema C.5 ***(Teorema do Gráfico Fechado)*** *Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja $T : X \to Y$ um operador linear. Suponha que o gráfico de T, $G(T)$, é fechado em $X \times Y$. Então T é contínuo.*

A seguir mostraremos a desigualdade de Gronwall, a qual foi utilizada no decorrer desta dissertação, pórem existe versões com menos regularidades das funções envolvidas, ver por exemplo o livro do Evans [12].

Teorema C.6 ***(Desigualdade de Gronwall -Forma Diferenciável)***
Seja $\eta(\cdot)$ uma função de classe $C^1([0,T])$ não-negativa satisfazendo para quase todo t a desigualdade

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\ \eta(t) + \psi(t), \tag{C.5}$$

onde $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ são funções integráveis, não-negativas em $[0,T]$. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Em particular, se

$$\eta' \leq \phi\eta \quad \text{em} \ \ [0,T] \quad \text{e} \quad \eta(0) = 0,$$

então

$$\eta \equiv 0 \quad \text{em} \ \ [0,T].$$

Demonstração: Multiplicando (C.5) por $e^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r}$, obtemos

$$\eta'(s)\ e^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r} - \phi(s)\ \eta(s)\ e^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r} \leq e^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r}\ \psi(s),$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}\left(\eta(s)\ e^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r}\right) \leq e^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r}\,\psi(s) \qquad \text{q. t. p.} \quad \text{em} \quad [0,T].$$

Integrando em $[0,t]$, com $0 \leq t \leq T$, obtemos pelo Teorema Fundamental do Calculo,

$$\left(\eta(s)\ e^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r}\right)\Big|_0^t \leq \int_0^t \underbrace{e^{-\int_0^s \phi(r)\mathrm{d}r}}_{\leq 1}\,\psi(s)\mathrm{d}s$$

o que implica

$$\eta(t)\ e^{-\int_0^t \phi(r)\mathrm{d}r} - \eta(0) \leq \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s$$

donde

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(r)\mathrm{d}r}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\right]$$

demonstrando a primeira parte da desigualdade de Gronwall. Agora, se

$$\eta' \leq \phi\eta \qquad \text{em} \quad [0,T] \quad \text{e} \quad \eta(0) = 0,$$

temos

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(r)\mathrm{d}r}\ \eta(0) = 0$$

logo

$$\eta \equiv 0 \qquad \text{em} \quad [0,T].$$

■

Teorema C.7 ***(Desigualdade de Gronwall -Forma Integrável)*** *Seja $\xi(t)$ uma função contínua, não-negativa em $[0,T]$ satisfazendo para quase todo t a desigualdade integral*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s\ + C_2 \tag{C.6}$$

para constantes C_1, $C_2 \geq 0$. Então

$$\xi(t) \leq C_2\big(1 + C_1 t e^{C_1 t}\big)$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$. Em particular, se

$$\xi(t) = C_1 \int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$, então

$$\xi(t) = 0 \qquad \text{q. t. p.} \quad \text{em} \quad [0,T].$$

Demonstração: Defina
$$\eta(t)=\int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s.$$
Note que $\eta(\cdot)$ é não-negativa, é de classe C^1 e pelo Teorema Fundamental do Cálculo
$$\eta'(t)=\xi(t)\leq C_1\int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s\ +C_2=C_1\,\eta(t)+C_2,$$
isto é,
$$\eta'(t)\leq C_1\eta(t)+C_2 \qquad \text{q. t. p.} \quad \text{em} \quad [0,T].$$
Logo pela Desigualdade de Gronwall (forma diferenciável) obtemos
$$\int_0^t \xi(s)\mathrm{d}s\leq C_2\,t\,e^{C_1 t}$$
multiplicando por C_1 e somando com C_2 a última desigualdade e usando (C.6) concluímos que
$$\xi(t)\leq C_2\big(1+C_1\,t\,e^{C_1\,t}\big) \qquad \text{q. t. p.} \quad \text{em} \quad [0,T].$$
A segunda parte é imediata. ■

Função Beta: Com relação a função beta, a qual é dada por
$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$
temos o seguinte resultado:

Teorema C.8 *Para* $0\leq s<t\leq T$*, fixos, temos*
$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\tau=(t-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\alpha)}. \tag{C.7}$$

Demonstração: A idéia é gerar uma função Beta no lado direito de (C.7). Vejamos, considere a seguinte função
$$\begin{array}{rcl} g\ :\ (s,t) & \longrightarrow & (0,1) \\ \tau & \longmapsto & g(\tau)=\frac{\tau-s}{t-s}\equiv r. \end{array}$$
Note que
$$\tau=r(t-s)+s \qquad \text{e} \qquad d\tau=(t-s)dr$$

logo

$$t-\tau=(t-s)(1-r) \qquad \text{e} \qquad \tau-s=r(t-s).$$

Daí

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\tau=\int_0^1 [(t-s)(1-r)]^{\alpha-1}[r(t-s)]^{\beta-1}(t-s)\,\mathrm{d}r$$

o que implica

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\tau=(t-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}\,r^{\beta-1}\mathrm{d}r=(t-s)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha)$$

conseqüentemente

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\tau=(t-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\alpha)}.$$

■

Teorema C.9 ***(Teorema do Ponto Fixo de Banach)*** *Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $F:X\to X$ uma contração, isto é,*

$$d(F(x),F(y))\leq k\,d(x,y) \qquad 0\leq k<1.$$

Então existe um único ponto fixo p, por F, isto é,

$$F(p)=p.$$

Demonstração: (Ver Sotomayor [25])

Para o próximo resultado assumiremos que f satisfaz uma condição de Lipschitz local em u e uniformemente em t em intervalos limitados, isto é, para cada $t'\geq 0$ e $c\geq 0$ existe uma constante $L=L(c,t')$ tal que

$$\|f(t,u)-f(t,v)\|\leq L\|u-v|$$

para quaisquer $u,v\in X$ com $\|u\|\leq c$, $\|v\|\leq c$ e $t\in[0,t']$.

Teorema C.10 *Seja $f:[0,\infty)\times X\to X$ uma função contínua em t para $t\geq 0$ e que verifica a condição mensionada anteriormente. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}$ em X, então para cada $u_0\in X$ existe um $T_{max}\leq\infty$ tal que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)), & t \geq 0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

possui uma única solução generalizada u *em* $[0, T_{max})$. *Além disso, se* $T_{max} < \infty$ *então*

$$\lim_{t \uparrow T_{max}} \|u(t)\| = \infty.$$

Demonstração: (Ver Pazy [22]).

Teorema C.11 ***(Teorema da Representação de Riesz)*** *Todo funcional linear contínuo* f *sobre um espaço de Hilbert* H, *pode ser representado em termo do produto interno, isto é,*

$$f(x) = \langle z, x \rangle,$$

onde z *é unicamente determinado e verifica*

$$\|z\|_H = \|f\|_{H^*}.$$

Teorema C.12 *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach e* $F : X \to Y$ *um operador linear contínuo e bijetivo. Então* $F^{-1} : Y \to X$ *é contínuo.*
Demonstração: (Ver Brézis [6])

APÊNDICE D

A Aplicação Exponencial

No que segue, X é um espaço de Banach com norma denotada por $\|\cdot\|$. Seja $A : X \to X$ um operador linear limitado, então para quaisquer u, $v \in X$ temos

$$\|Au - Av\| = \|A(u-v)\| \leq \|A\| \; \|u - v\|.$$

Logo A é uma função Lipschitziana. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases}$$

Pelo Teorema A.14 dévido a Cauchy, Lipschitz e Picard existe uma única solução $u \in X$ do problema (1).
Objetivo: Daremos a forma explicita da solução do problema (1).
Note que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty,$$

uma vez que A é limitado. Note, também, que considerando

$$s_n = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{A^k}{k!},$$

onde I é o operador identidade, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, s_n é um operador linear limitado, e $\{s_n\}$ é uma seqüência convergente, logo existe o limite de $\{s_n\}$, que denotaremos por

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = e^A \quad \text{em} \quad X.$$

Portanto e^A define um operador linear e limitado

$$e^A = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Denotando $A^0 = I$ temos

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Mostraremos que a solução de (1) é da forma

$$u(t) = e^{tA} u_0. \tag{D.1}$$

Inicialmente, observe que

$$u(0) = e^{0A} u_0 = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k A^k u_0}{k!} = u_0.$$

Agora, para $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{e^{tA} u_0 - u_0}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k u_0}{k!}.$$

o que implica

$$\frac{e^{tA} u_0 - u_0}{t} = A u_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k u_0}{k!}.$$

Note que

$$\left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k u_0}{k!} \right\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1} A^{j+2} u_0}{(j+2)!} \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^{j+1} \|A\|^{j+2} \|u_0\|}{(j+2)!}$$

logo

$$\left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k u_0}{k!} \right\| \leq |t| \|A\|^2 \|u_0\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j \|A\|^j}{j!} = |t| \|A\|^2 \|u_0\| e^{|t|\|A\|}$$

conseqüentemente

$$\left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k u_0}{k!} \right\| \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad t \to 0.$$

Portanto

$$\frac{e^{tA} u_0 - u_0}{t} \longrightarrow A u_0 \qquad \text{quando} \quad t \to 0. \tag{D.2}$$

Agora observe que

$$\frac{du}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(t+h)A} u_0 - e^{tA} u_0}{h}.$$

Lema D.1 *Para $t, s \in \mathbb{R}$, temos*
$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}.$$

Portanto pelo Lema D.1, temos

$$\frac{du}{dt}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{(e^{tA}e^{hA})u_0 - e^{tA}u_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{tA}(e^{hA}u_0 - u_0)}{h} = \lim_{h\to 0} e^{tA}\left(\frac{e^{hA}u_0 - u_0}{h}\right).$$

Pela continuidade de e^{tA} e por (D.2) obtemos

$$\frac{du}{dt}(t) = e^{tA}Au_0 = Au_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^kA^k(Au_0)}{k!}$$

o que implica

$$\frac{du}{dt}(t) = Au_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^kA(A^ku_0)}{k!} = Au_0 + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^kA(A^ku_0)}{k!}.$$

Pela linearidade e continuidade de A tem-se

$$\frac{du}{dt}(t) = Au_0 + A\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^kA^ku_0}{k!}\right) = A\left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(tA)^ku_0}{k!}\right)$$

donde segue
$$\frac{du}{dt}(t) = Ae^{tA}u_0.$$

Daí
$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t).$$

Pelo estudo feito temos que a solução do problema (1) tem a forma explicita dada em (D.1).

Lema D.2 *Sejam A_1 e A_2 operadores lineares limitados, que verificam $A_1A_2 = A_2A_1$. Então*

$$e^{tA_1}e^{tA_2} = e^{t(A_1+A_2)}.$$

Demonstração: Considere o seguinte problema

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = (A_1 + A_2)x(t) \\ x(0) = u_0\,. \end{cases}$$

Note que $A_1 + A_2$ é limitado, logo gera o C_0-semigrupo $\{e^{t(A_1+A_2)}\}$ e

$$y(t) = e^{t(A_1+A_2)}u_0$$

é a única solução do problema $(*)$.
Mostraremos que $\widetilde{y}(t) = e^{tA_1}e^{tA_2}u_0$ é solução de $(*)$.
De fato,

$$\widetilde{y}(0) = e^{0A_1}e^{0A_2}u_0 = u_0.$$

Agora

$$\frac{\widetilde{y}(t+h) - \widetilde{y}(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)A_1}(e^{(t+h)A_2}u_0) - e^{tA_1}e^{tA_2}u_0}{h}$$

daí

$$\frac{\widetilde{y}(t+h) - \widetilde{y}(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)A_1}(e^{(t+h)A_2}u_0) - e^{(t+h)A_1}(e^{tA_2}u_0) + e^{(t+h)A_1}(e^{tA_2}u_0) - e^{tA_1}e^{tA_2}u_0}{h}$$

o que implica

$$\frac{\widetilde{y}(t+h) - \widetilde{y}(t)}{h} = e^{(t+h)A_1}\left(\frac{e^{(t+h)A_2} - e^{tA_2}}{h}\, u_0\right) + e^{tA_1}\left(\frac{e^{hA_1} - I}{h}\, e^{tA_2}u_0\right).$$

Fazendo $h \to 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\,\widetilde{y}(t) = e^{tA_1}A_2e^{tA_2}u_0 + e^{tA_1}A_1e^{0A_1}e^{tA_2}u_0$$

logo

$$\frac{d}{dt}\,\widetilde{y}(t) = e^{tA_1}A_2e^{tA_2}u_0 + e^{tA_1}A_1e^{tA_2}u_0$$

sabendo que A_1 e A_2 comutam obtemos

$$\frac{d}{dt}\,\widetilde{y}(t) = (A_1 + A_2)e^{tA_1}e^{tA_2}u_0,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\,\widetilde{y}(t) = (A_1 + A_2)\widetilde{y}(t).$$

Portanto $\widetilde{y}(t) = e^{tA_1}e^{tA_2}u_0$ é solução do problema $(*)$. Pela unicidade da solução concluímos

$$e^{tA_1}e^{tA_2} = e^{t(A_1+A_2)}.$$

Para concluir esta seção, encontraremos uma estimativa para $\dfrac{du}{dt}(t)$ quando $t > 0$, X um espaço de Hilbert e $A : X \to X$ um operador linear limitado, auto-adjunto e monótono.

Teorema D.1 *Seja X um espaço de Hilbert, com produto interno $(\cdot,\cdot)_X$. Suponha que $A : X \to X$ é um operador linear limitado, auto-adjunto, com $-A$ monótono. Se*

$$u(t) = e^{tA}u_0,$$

então

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \le \frac{1}{t}\, \|u_0\| \qquad \forall\ t \in (0,\infty).$$

Demonstração: A demonstração será dividida em duas etapas, na primeira etapa encontraremos algumas identidades que será usada na segunda etapa. Nesta demonstração denotaremos por $u'(\tau)$ a derivada clássica de u, com relação a t, no ponto τ.
Primeira Etapa: Sendo $u(t) = e^{tA}u_0$ solução para o problema (1) temos

$$u'(t) = Au(t) \tag{D.3}$$

e

$$u(0) = u_0. \tag{D.4}$$

Conseqüentemente

$$\big(u'(t), u(t)\big)_X = \big(Au(t), u(t)\big)_X.$$

Note que

$$\frac{d}{dt}\big(u(t), u(t)\big)_X = \big(u'(t), u(t)\big)_X + \big(u(t), u'(t)\big)_X$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}\big(u(t), u(t)\big)_X = 2\big(u'(t), u(t)\big)_X = 2\big(Au(t), u(t)\big)_X\ , \tag{D.5}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2\big(Au(t), u(t)\big)_X\ . \tag{D.6}$$

Sendo $-A$ monótono

$$\big(-Au(t), u(t)\big)_X \ge 0$$

logo

$$\big(Au(t), u(t)\big)_X \le 0. \tag{D.7}$$

De (D.6) e (D.7) tem-se

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \le 0$$

donde segue que $\|u(t)\|^2$ é decrescente, implicando que $\|u(t)\|$ é decrescente.
Por (D.5) tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(u(t), u(t)\big)_X = \big(u'(t), u(t)\big)_X.$$

Integrando sobre $[0,t]$ obtemos

$$\int_0^t \big(u'(\tau),u(\tau)\big)_X \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\big(u(\tau),u(\tau)\big)_X \mathrm{d}\tau.$$

Pelo Teorema A.8 obtemos

$$\int_0^t \big(u'(\tau),u(\tau)\big)_X \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\Big[\big(u(t),u(t)\big)_X - \big(u(0),u(0)\big)_X\Big]$$

logo

$$\int_0^t \big(u'(\tau),u(\tau)\big)_X \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|^2. \tag{D.8}$$

De (D.3) e (D.8) tem-se

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|^2 = \int_0^t \big(Au(\tau),u(\tau)\big)_X \mathrm{d}\tau. \tag{D.9}$$

Por outro lado,

$$\big(u'(t),t\,u'(t)\big)_X = \big(Au(t),t\,u'(t)\big)_X,$$

logo

$$t\big\|u'(t)\big\|^2 = t\big(Au(t),u'(t)\big)_X.$$

Integrando sobre $[0,t]$, temos

$$\int_0^t \tau\big\|u'(\tau)\big\|^2 \mathrm{d}\tau = \int_0^t \tau\big(Au(\tau),u'(\tau)\big)_X \,\mathrm{d}\tau. \tag{D.10}$$

Note também que

$$\frac{d}{dt}\big(Au(t),u(t)\big)_X = \Big(\frac{d}{dt}(Au(t)),u(t)\Big)_X + \big(Au(t),u'(t)\big)_X.$$

Mas pela linearidade e continuidade de A temos

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) = A\big(u'(t)\big).$$

Daí

$$\frac{d}{dt}\big(Au(t),u(t)\big)_X = \big(A\big(u'(t)\big),u(t)\big)_X + \big(Au(t),u'(t)\big)_X.$$

Sendo A um operador auto-adjunto, obtemos

$$\frac{d}{dt}\big(Au(t),u(t)\big)_X = 2\big(Au(t),u'(t)\big)_X.$$

Deste modo

$$\int_0^t \tau\big(Au(\tau),u'(\tau)\big)_X \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \tau\frac{d}{dt}\big(Au(\tau),u(\tau)\big)_X \mathrm{d}\tau.$$

Integrando por parte, obtemos

$$\int_0^t \tau\big(Au(\tau),u'(\tau)\big)_X \mathrm{d}\tau = \frac{t}{2}\big(Au(t),u(t)\big)_X - \frac{1}{2}\int_0^t \big(Au(\tau),u(\tau)\big)_X \mathrm{d}\tau. \tag{D.11}$$

De (D.9),(D.10) e (D.11) obtemos

$$2\int_0^t \tau\big\|u'(\tau)\big\|^2 \mathrm{d}\tau = t\big(Au(t),u(t)\big)_X - \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|^2,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + 2\int_0^t \tau\big\|u'(\tau)\big\|^2 \mathrm{d}\tau - t\big(Au(t),u(t)\big)_X = \frac{1}{2}\|u_0\|^2. \tag{D.12}$$

Segunda Etapa: Por (D.9) e sabendo que $-A$ é monotono, isto é, $\big(-Au,u\big)_X \geq 0$ para todo $u \in X$, obtemos

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \qquad \text{para todo } \ t \geq 0.$$

Claramente $v(t) = u'(t)$ verifica o seguinte problema de valor inicial

$$v'(t) = Av(t)$$

com

$$v(0) = Au_0.$$

Daí seguindo um raciocínio análogo ao anterior, obtemos

- $\|v(t)\| \leq \|Au_0\|$;
- $\|v(t)\|$ é uma função decrescente de t.

Desta forma

$$\int_0^t \tau\|v(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau \geq \|v(t)\|^2 \int_0^t \tau \mathrm{d}\tau,$$

o que implica

$$\int_0^t \tau\big\|u'(\tau)\big\|^2 \mathrm{d}\tau \geq \big\|u'(t)\big\|^2 \frac{t^2}{2},$$

logo

$$2\int_0^t \tau\big\|u'(\tau)\big\|^2 \mathrm{d}\tau \geq \big\|u'(t)\big\|^2 t^2. \tag{D.13}$$

Sendo $-A$ monótono temos

$$-t\left(Au(t),u(t)\right)_X \geq 0 \qquad \text{para } \ t \geq 0. \tag{D.14}$$

De (D.12),(D.13) e (D.14), obtemos

$$\frac{1}{2}\|u_0\|^2 \geq \left\|u'(t)\right\|^2 t^2$$

o que implica

$$\left\|u'(t)\right\| \leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|u_0\|$$

conseqüentemente

$$\left\|u'(t)\right\| \leq \frac{1}{t}\|u_0\|,$$

isto é,

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| \leq \frac{1}{t}\|u_0\|.$$

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abramowitz, M., Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions.*, New York, Dover Pub 1970.

[2] Adams, R. A. *Sobolev spaces.*, Academic Press, New York, 1975.

[3] Bahaj, M., Sidki, Omar *Almost periodic solutions of semilinear equations with analytic semigroups in Banach spaces*, Electron. J. Diff. Eqns., Vol. 2002(2002), No. 98, pp. 1 11.

[4] Bahuguna, D. *Integrodifferential equations with analytic semigroups.*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 16:2 (2003), 177-189.

[5] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.*, Wiley, New York, 1995.

[6] Brézis, Haim, *Analyse fonctionelle.*, 2a ed. Masson, 1987.

[7] Brézis, Haim, *Operateurs maximaux monotones.*, North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1973.

[8] Carvalho, A. N., *Equações Parabólicas Semilineares*, ICMC-USP, notas de aula, 26 de junho de 2001.

[9] Carvalho, ALexandre. N., Arrieta, José M., *Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to navier-stokes and heat equations.* Transactions of the American Mathematical Society, v. 352, n. 01, p. 285-310, 2000.

[10] Carvalho, ALexandre. N., Rodriguez-Bernal, Anibal, Arrieta, José M. *Parabolic Problems With Nonlinear Boundary Conditions And Critical Nonlinearities.* Journal Of Differential Equations, USA, v. 156, n. 2, p. 376-406, 1999.

[11] Corrêa, W., J. *Existência e dacaimento exponencial para equação da onda semilinear com dissipação localmente distribuída.* Dissertação de Mestrado. CCE-UEM, 2005 .

[12] Evans, L. C., *Partial Differential Equations.* Vol. 19, American Mathematical Society, U.S.A., 1949.

[13] Figueiredo, D. G., *Positive solutions of semilinear elliptc problems*, Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais, São Paulo, Junho de 1981.

[14] Figueiredo, D. G., *Equações elípticas não lineares.* 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, julho de 1977.

[15] Figueiredo, D. G., *Análise de fourier e equações diferenciais parciais.* Projeto Euclides, 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[16] Friedman, Avner, *Partial differential equations*, Robert E. Kriger Publishing Company, Inc, 1969.

[17] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications.*, John Wiley, New York, 1989.

[18] Lang, Serg, *Analysis I*, Addison-Wesley, 1969.

[19] Lang, Serg, *Analysis II*, Addison-Wesley, 1969.

[20] Lima, Elon Lages, *Espaços métricos*, Projeto Euclides, 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

[21] Kesavan, S., *Topics in functional analysis and applications*, Johw Wiley e Sons. 1989.

[22] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

[23] dos Santos, M. D., *Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos variacionais.* Dissertação de Mestrado. CCT-UFCG, 2005.

[24] Showalter,R. E., *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Electron. J. Diff. Eqns., Monograph 01, chapter IV, 1994.

[25] Sotomayor, Jorge, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides IMPA, 1979.

ÍNDICE REMISSIVO