



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE  
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Renato Ferreira Dutra

# Kinks e Lumps em Modelos de Campos Escalares

Cuité-PB

2014

Renato Ferreira Dutra

# Kinks e Lumps em Modelos de Campos Escalares

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Física, Unidade Acadêmica de Educação, Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande, como requisito para obtenção do título de Graduado em Licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas

Cuité-PB

2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE  
Responsabilidade Msc. Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

D978k      Dutra, Renato Ferreira.

Kinks e Lumps em modelos de campos escalares. /  
Renato Ferreira Dutra. – Cuité: CES, 2014.

62 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Física) – Centro de  
Educação e Saúde / UFCG, 2014.

Orientador: Joseclécio Dutra Dantas.

1. Kink. 2. Lump. 3. Estado BPS. 4. Estabilidade linear. I.  
Título.

CDU 53

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** em Física — Habilitação em Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela banca examinadora designada.

Aprovada em 18 de setembro de 2014.

---

Prof. Dr. Luis Alberto Terrazos Javier  
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas  
(Orientador - UFCG)

---

Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros  
(UFCG)

---

Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos  
Santos  
(UEPB)

*À minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e por me ter dado saúde e força para superar as dificuldades nessa jornada. Aos meus pais, *Maria de Lourdes Ferreira Dutra* e *Francisco Sales Dutra*, pois são as pessoas mais importantes na minha vida, que me ensinaram os valores morais e éticos para viver com dignidade, e sempre me ajudaram quando precisei. Ao meu irmão, *Renan Ferreira Dutra*, e aos demais familiares.

Agradeço ao meu orientador, *Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas*, pela paciência, disponibilidade e dedicação na elaboração deste trabalho. E também de servir como exemplo dentro e fora da vida profissional acadêmica.

Agradeço a todos os professores por compartilharem o conhecimento durante esse processo de formação profissional e pela dedicação aos seus alunos. Ao coordenador do curso, *Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros*, pelo incentivo e por compartilhar as suas experiências acadêmicas durante sua formação na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e pela disponibilidade na coordenação de Física.

Aos colegas de classe e aos colegas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), pela oportunidade e pelo privilégio que nos foram dados em compartilhar tamanha experiência ao frequentar este curso.

À Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campus Cuité, pelas condições proporcionadas, e à Capes, pelo tempo em que foi possível o apoio financeiro.

*“... O mundo não é um mar de rosas, é um lugar ruim e asqueroso.*

*E não importa quão durão você é,*

*ele te deixará de joelhos e manterá assim se permitir.*

*E nem você nem eu, nem ninguém baterá tao forte quanto a vida.*

*Mas isso não se trata de quão forte você pode bater,*

*se trata de quão forte você pode ser atingido e continuar em frente,*

*quanto pode continuar recebendo e continuar em frente.*

*É assim que a vitória é conquistada!*

*Agora se você sabe seu valor vá e conquiste!...”.*

*Rocky Balboa*

# ***Resumo***

Neste trabalho, investigamos a estrutura de defeitos em modelos descritos por um único campo escalar real, em  $(1+1)$  dimensões, no espaço-tempo, com potenciais que suportam defeitos dos tipos kink e lump. Analisaremos algumas de suas características mais importantes, como a presença ou não de carga topológica e sua densidade de energia. Encontraremos os estados BPS, a partir do método desenvolvido por Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield sem a necessidade de resolver as equações de movimento, no qual o potencial de um dado modelo é escrito em termos de um superpotencial, resultando na redução da equação diferencial de segunda ordem em duas equações diferenciais de primeira ordem. Com o objetivo de garantir que soluções topológicas sejam estáveis, realizaremos então o estudo da estabilidade linear nas soluções. Como exemplo de defeitos topológicos, mostraremos a formação de defeitos do tipo kink a partir do fenômeno de quebra espontânea de simetria, em cristais de Coulomb e no poliacetileno.

**Palavras-chave:** kink, lump, estados BPS e estabilidade linear.

# ***Abstract***

In this study we investigate defect structures in models described by a single real scalar field in  $(1 + 1)$  dimensions in space-time, with potentials which support kink-like and lump-like defects. We examine some of its most important features, such as the presence or absence of topological charge and its energy density. We find the so-called BPS states from the method developed by Bogomol'nyi, Prasad and Sommerfield without the need to solve the equations of motion, in which the potential of a given model is written in terms of a superpotential, resulting in reduced differential equation of second order in two first-order differential equations. With the objective of ensure that topological solutions are stable, then we perform the study of linear stability of the solutions. As an example of topological defects we show the formation of the kink-like defects, from the phenomenon of spontaneous symmetry breaking, in Coulomb crystals and polyacetylene.

**Keywords:** kink, lump, BPS states and linear stability.

# Sumário

<b>Introdução</b>	p.6
<b>1 Conceitos Fundamentais e Tensor Energia-Momento</b>	p.8
1.1 Quebra Espontânea de Simetria . . . . .	p. 8
1.2 Defeitos Topológicos . . . . .	p. 12
1.3 Princípio de Hamilton . . . . .	p. 13
1.4 Equação de Movimento de Lagrange a partir do Princípio de Hamilton para um Campo Escalar . . . . .	p. 15
1.5 Tensor Energia - Momento . . . . .	p. 16
<b>2 Modelos para um Campo Escalar Real</b>	p. 21
2.1 Modelos do tipo Kink . . . . .	p. 26
2.1.1 O modelo $\phi^4$ . . . . .	p. 26
2.1.2 O modelo seno-Gordon . . . . .	p. 30
2.1.3 Kinks em laboratório . . . . .	p. 32
2.1.3.1 Cristais de Coulomb . . . . .	p. 32
2.1.3.2 Poliacetileno . . . . .	p. 34
2.2 Modelos do tipo Lump . . . . .	p. 35
2.2.1 O modelo $\phi^3$ . . . . .	p. 35
2.2.2 O modelo $\phi^4$ invertido . . . . .	p. 38

<b>3 Soluções BPS e Estabilidade Linear</b>	p. 42
3.1 Soluções BPS . . . . .	p. 42
3.2 Estabilidade Linear . . . . .	p. 44
3.2.1 Estabilidade das Soluções BPS . . . . .	p. 47
<b>4 Considerações Finais</b>	p. 53
<b>Referências</b>	p. 55

# ***Introdução***

O estudo de estruturas de defeitos em modelos descritos por campos escalares reais é de grande interesse em diversos ramos da física, com aplicações na física de altas energias, na cosmologia e na matéria condensada (BAZEIA; MENEZES; MENEZES, 2005; BAZEIA et al., 2006, 2007). Em geral, as estruturas que denominamos defeitos podem ser classificadas como topológicas ou não topológicas, caracterizadas pela existência ou não de uma carga topológica, respectivamente. Os defeitos topológicos ocorrem a partir da quebra espontânea de simetria que levam a uma transição de fase do sistema, resultando em defeitos conhecidos como kinks, vórtices, paredes de domínio e etc. Na natureza, existem vários sistemas nos quais acontece a quebra espontânea de simetria, como por exemplos, em cadeia polimérica de poliacetileno (SU. W. SCHRIEFFER; HEEGER, 1979; VACHASPATI, 2006) e em cristais de Coulomb (KELLER et al., 2013). Em modelos descritos por um único campo escalar real em (1+1) dimensões do espaço-tempo, os defeitos são denominados de kinks para soluções topológicas e lumps para soluções não topológicas (BAZEIA, 2005). As estruturas de defeitos são descritas pelas soluções estáticas das equações de movimento.

No capítulo 1 revisaremos e discutiremos alguns conceitos físicos, e ainda obteremos as equações de Euler-Lagrange para um campo escalar real, partindo do princípio de mínima ação. Também encontraremos a forma do tensor energia-momento, no qual a componente  $T_{00}$  representa a densidade de energia associada ao campo. No capítulo 2 vamos estudar as estruturas de defeitos em modelos para um campo escalar real em (1+1) dimensões no espaço-tempo, com potenciais que geram defeitos dos tipos kink e lump, observando suas características principais, como a densidade de energia e presença ou não de carga topológica. Também mostraremos o surgimento de defeitos topológicos do tipo kink em sistema físicos a partir da quebra espontânea de simetria. No capítulo

3 utilizaremos o método alternativo de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield para obter as soluções de energia mínima, que são denominadas de estados BPS, sem precisar resolver explicitamente as equações de movimento. Os defeitos topológicos são estruturas estáveis e os não topológicos, instáveis (ANTONIO, 2009; SILVA, 2007; BAZEIA; MENEZES; MENEZES, 2005). Ainda no mesmo capítulo, para garantir que as soluções topológicas encontradas sejam estáveis, devemos estudar a estabilidade linear das soluções a partir de pequenas perturbações feitas em torno das soluções estáticas. O último capítulo deste trabalho é dedicado as considerações finais.

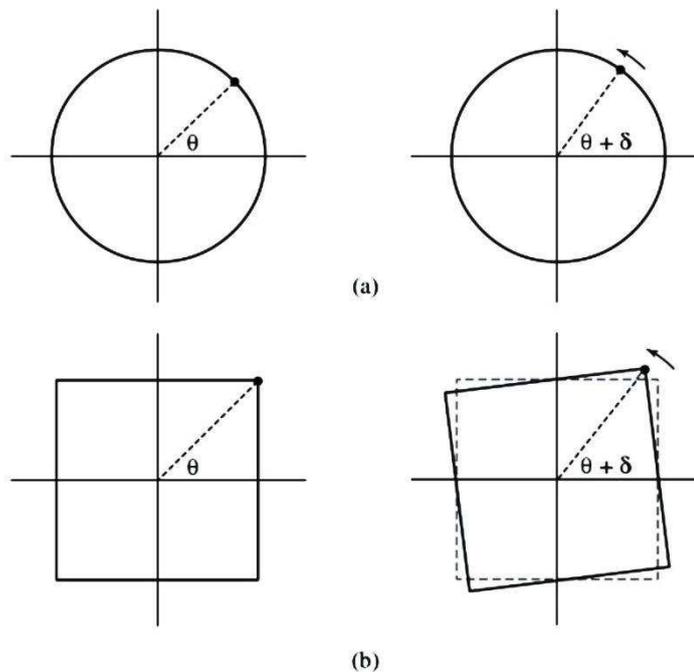
# ***1 Conceitos Fundamentais e Tensor Energia-Momento***

Neste capítulo trataremos de conceitos e princípios cujo entendimento se faz necessário para o desenvolvimento dos capítulos seguintes: O fenômeno da quebra espontânea de simetria e a definição de defeito topológico em teoria de campos escalares são de importância fundamental. Analisaremos o princípio de Hamilton, a partir do qual deduzimos a equação de movimento de Euler-Lagrange para um único campo escalar. Encerramos o capítulo com a dedução do tensor energia-momento como consequência do teorema de Noether.

## **1.1 Quebra Espontânea de Simetria**

A noção que temos de simetria está associada a observação de reflexos como o que acontece em um espelho pois, para dizermos que algo é ou não simétrico, devemos enxergar o mesmo em ambos os lados de algum centro ou eixo de simetria, sem nenhuma diferença. Também podemos dizer que a “transformação” de simetria é o ato de refletir um objeto, equivalente a reflexão obtida através do espelho. Esse é um exemplo de transformação conhecida como transformação de simetria discreta (BAGGOTTR, 2012). As transformações de simetria que abrangem o teorema de Noether (tema que trataremos em seguida) são diferentes das transformações discretas, pois possuem mudanças graduais contínuas. Por exemplo, ao girarmos um círculo por meio de um ângulo infinitamente pequeno a partir de um eixo central, o círculo não é alterado, como mostra a Fig. 1a. Dizemos então que o círculo é simétrico para transformações de rotação contínua. No caso de um quadrado, só

será simétrico para rotações discretas de  $90^\circ$ , como mostra a Fig. 1b (BAGGOTTR, 2012). A definição de simetria está ligada diretamente com a ideia de isometria<sup>1</sup>, assim como



**Figura 1:** (a) Quando giramos um círculo através de um ângulo extremamente pequeno  $\delta$ , notamos que o círculo permanece inalterado, portanto, podemos concluir que o círculo é simétrico para tais transformações. (b) Se giramos um quadrado por meio de um ângulo extremamente pequeno  $\delta$ , o mesmo não acontece como no círculo. O quadrado só será simétrico para transformações discretas com  $\delta = 90^\circ$ . Fonte: BAGGOTTR, 2012, p.25.

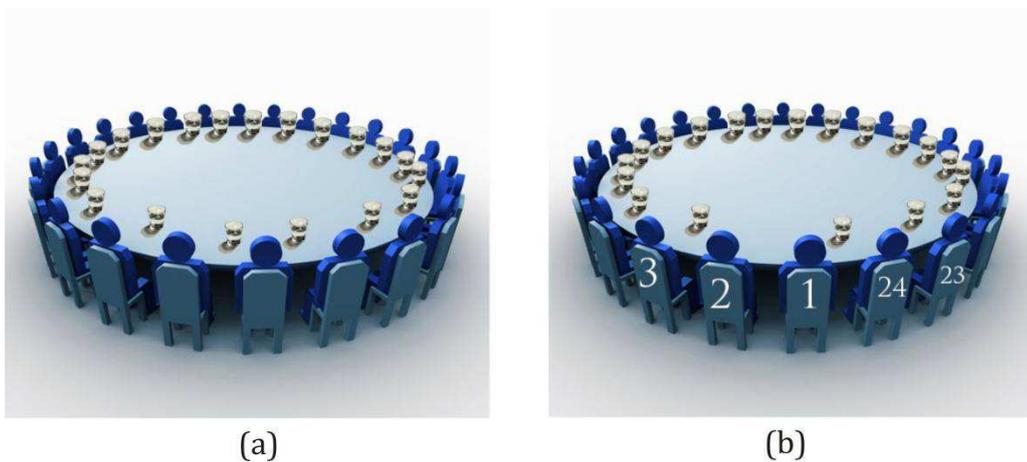
suas operações geométricas associadas a reflexão, rotação e translação (SOUZA et al., 2012). Um sistema é simétrico se suas características e propriedades não forem alteradas frente a alterações dos parâmetros que o descrevem. Esse princípio tem aplicações em sistemas físicos, biológicos, em descrições matemáticas por meio da teoria de grupos e na geometria. Na física, a aplicação mais importante do conceito de simetria está relacionada ao teorema de Noether, o fundamento matemático que realiza a conexão entre propriedades de simetria e leis de conservação de um sistema físico (SOUZA et al., 2012). Este teorema foi desenvolvido pela matemática alemã Amalie Emmy Noether, em 1918, no qual estabelece que para cada simetria contínua em um sistema físico existe uma correspondente lei de conservação (este teorema não é aplicado para transformações de simetrias discretas).

<sup>1</sup>É uma transformação que, ao ser utilizada em uma figura geométrica, preserva as distâncias entre pontos e a amplitude dos ângulos, ou seja, os segmentos da figura transformada são geometricamente iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido (COSTA; RODRIGUES, 2012).

Noether descobriu que as leis que regem a energia são invariantes a mudanças contínuas ou translações no tempo, ou seja, essas leis que descrevem a dinâmica da energia num sistema físico não mudam com a variação de um tempo infinitamente pequeno. Portanto, a energia deve ser conservada (BAGGOTTR, 2012). Para o momento linear, Noether mostrou que a conservação está associada à simetria de translação contínua ou paridade do sistema (SOUZA et al., 2012; BAGGOTTR, 2012). No caso do momento angular, as leis são invariantes perante transformações de simetria rotacional contínua, como no exemplo de círculo na Fig. 1a (BAGGOTTR, 2012). O teorema de Noether foi formulado para teorias que admitem uma formulação lagrangeana, o que confere validade a uma variedade de teorias. A ligação entre simetria e quantidade conservada é formalmente realizada pelo teorema de Noether.

A quebra espontânea de simetria foi possivelmente colocada em discussão pela primeira vez no caso de um ferromagneto pelo físico teórico alemão Werner Heisenberg, em 1927 (Prêmio Nobel de 1932): Em um material ferromagnético aquecido, os spins têm suas direções posicionadas aleatoriamente, pois cada spin tem a liberdade de escolha, para apontar para qualquer direção possível. Quando esse material é resfriado, temos a quebra dessa liberdade de orientação, que agora será influenciada pelo spin vizinho (PLEITEZ, 2008; MARTINS, 2012). Podemos entender melhor o fenômeno da quebra espontânea de simetria com o seguinte exemplo ilustrativo: Em uma mesa redonda, os convidados têm os copos distribuídos à esquerda e à direita. Os convidados têm a liberdade de escolher o copo da direita ou da esquerda, como podemos observar na Fig. 2a. Mas quando a pessoa 1 decide pegar o copo da esquerda, todos os convidados serão obrigados a pegar o copo da esquerda também; temos então a quebra espontânea de simetria, como podemos ver na Fig. 2b. Fazendo uma analogia com o contexto de campos escalares, as pessoas representam o campo e os copos da esquerda e da direita representam os mínimos do potencial, também chamados de vácuos.

Um sistema tem sua simetria quebrada quando as alterações feitas neste modificam



**Figura 2:** Exemplo ilustrativo de quebra espontânea de simetria: (a) Uma mesa redonda, com copos distribuídos à esquerda e à direita dos convidados. (b) Quando o convidado 1 escolhe pegar o copo da esquerda, todos os convidados restantes serão forçados a pegar o copo da esquerda também, resultando na quebra de simetria. Fonte: <http://goo.gl/nDVcD3>.

suas características e propriedades. A quebra de simetria é responsável pelo surgimento de defeitos topológicos, que levam a transição de fase do sistema, e podem ser vórtices, kinks, paredes de domínio e etc. A simetria é restaurada quando é possível eliminar o defeito sem alterar as propriedades e características topológicas do sistema físico (SOUZA et al., 2012; MARTINS, 2012). Estes tipos de fenômenos ocorrem em mecanismos de transição de fase em sistemas de matéria condensada, como em cadeias poliméricas de poliacetileno (SU. W. SCHRIEFFER; HEEGER, 1979). Na teoria de campos, o fenômeno de quebra de simetria de grande relevância é aquele que gera massa para o campo. Dizemos que uma teoria descrita por uma densidade lagrangeana  $L(\varphi)$ , onde  $\varphi$  representa um campo escalar real, é simétrica se esta torna-se invariante frente a transformação  $L(\varphi) \rightarrow L(-\varphi)$ , o estado de vácuo é degenerado e os estados possíveis transformam-se um no outro em decorrência dessa simetria (SOUZA et al., 2012; OLIVEIRA, 2009). O campo é uma entidade física que envolve todo o espaço; portanto não possui massa. Mas com o surgimento de dois estados de vácuo e a consequente quebra de simetria, gera-se massa para o campo, estando este localizado nos mínimos do potencial (SOUZA et al., 2012).

## 1.2 Defeitos Topológicos

Matematicamente defeitos topológicos são soluções clássicas de equações diferenciais não lineares de segunda ordem, que aparece em modelos que sofrem quebra espontânea de simetria (OLIVEIRA, 2009). Para que a energia seja finita devemos impor que o potencial que descreve a teoria estudada tenha mais de um mínimo e seja limitada inferiormente. Para os físicos, um defeito topológico é a região de transição entre fases distintas de um sistema, no qual essa região muda suas características e propriedades (SOUZA et al., 2012). A quebra de simetria dá origem a um conjunto não trivial de estados degenerados, como os dipolos magnéticos nos domínios de um material ferromagnético (WEISS, 1907). No regime de baixas temperaturas, a quantização do fluxo magnético em supercondutores, como o hélio superfluido gera o aparecimento de defeitos, denominados vórtices (ZUREK, 1996). Em modelos cosmológicos a quebra de simetria é responsável pelo aparecimento de defeitos topológicos no universo primordial, que seriam cordas cósmicas ou monopolos magnéticos (GUÉRON, 1996; SOUZA et al., 2012). Skyrme apresentou em 1961 o primeiro defeito topológico tridimensional devido a teoria de campo não linear. Já Nambu foi um dos primeiros a antecipar interpretações e aplicações de soluções topológicas em teoria quântica de campos e Rether, fazendo estudos de excitações em partículas elementares, notou a existência de defeitos quânticos (VILENKIN; SHELLARD, 1994).

Em teoria de campos, um defeito topológico é representado por um campo solução das equações de movimento; e esta solução está associada a uma corrente topológica. É importante ressaltar, porém, que esta corrente contínua e conservada, presente na topologia do sistema, não é a corrente de Noether, no qual a forma depende da dimensão espaço-tempo do modelo físico (OLIVEIRA, 2009).

### 1.3 Princípio de Hamilton

O princípio de mínima ação ou princípio variacional é baseado na observação de que os fenômenos naturais sempre minimizam certas quantidades de grandezas físicas. Podemos mostrar essa minimização através da comparação da variação do valor dessa quantidade, quando os percursos vizinhos são comparados (MOREIRA, 1999). Essa ideia de que a natureza tem um *princípio de mínimo* é bastante antiga e teve origem no campo da óptica. Heron de Alexandria encontrou uma explicação para a igualdade entre o ângulo de reflexão e o ângulo de incidência, sugerindo que um raio de luz, vai de um ponto a outro após ser refletido por um espelho, através do caminho mais curto possível (MOREIRA, 1999). Outros cientistas deram destaque especial aos princípios variacionais com um desejo de unificar as teorias físicas, como Fermat, Leibniz, Maupertuis, Euler, Helmholtz, Poincaré, Planck e Feynman (MOREIRA, 1999; SILVA; MARTINS, 2007).

O princípio de mínima ação do filósofo francês Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), em 1744, dizia basicamente que *a quantidade de ação necessária para que qualquer mudança seja feita pela natureza é sempre a menor possível* (SILVA; MARTINS, 2007). Maupertuis atribuiu sua ideia como sendo de caráter divino (a ação é minimizada através da “vontade de Deus”). O matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813), em 1788, forneceu fundamentos da mecânica, conhecidos hoje como mecânica analítica, que representam uma formulação mais geral do que a mecânica newtoniana; e sua base fundamental é o princípio de mínima ação (SILVA; MARTINS, 2007; MONERAT et al., 2007). O astrônomo e matemático William Rowan Hamilton (1805-1865), inspirado pelo trabalho de Maupertuis, introduziu a função lagrangeana  $L = T - V$  ao cálculo variacional, onde  $T$  é a energia cinética e  $V$  é o potencial (MACEDO, 2004). O princípio de Hamilton diz:

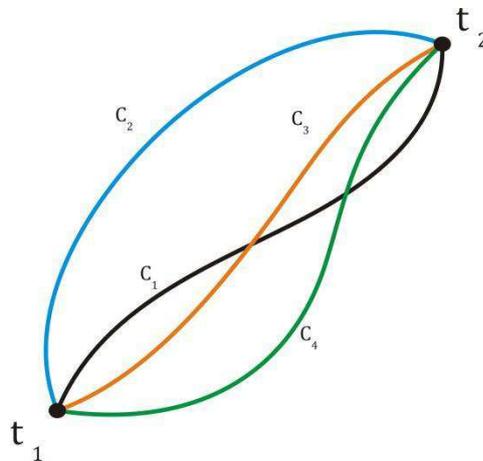
*“De todos os possíveis caminhos que um sistema dinâmico pode se mover entre dois pontos dentro de um intervalo de tempo especificado, o caminho*

*seguido será aquele que minimiza a integral, no tempo, da diferença entre a energia cinética e potencial”*

Definimos a ação como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt, \quad (1.1)$$

expressa em função das coordenadas  $q$  do sistema e suas derivadas em relação ao tempo. Entre as infinitas trajetórias que o sistema poderia escolher para ir da posição no instante  $t_1$  para a posição no instante  $t_2$ , a escolha será aquela na qual o valor da integral de ação é estacionária. O termo *valor estacionário* para uma integral de linha significa que a integral ao longo de uma dada trajetória terá o mesmo valor, conforme a Fig. 3 (MONERAT et al., 2007). O conceito de valor estacionário para uma integral de linha corresponde na teoria das funções ordinárias a uma derivada primeira nula (MONERAT et al., 2007; MACEDO, 2004).



**Figura 3:** Ilustração do princípio de mínima ação: A curva  $C_1$  é a trajetória que otimiza o sistema, enquanto as outras curvas  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  seriam pequenas variações desta trajetória. O cálculo variacional procura determinar a curva (aqui representada por  $C_1$ ) que minimiza ou maximiza o valor de  $S$ . Fonte: MONERAT et al., 2007, p.11.

Podemos resumir o princípio de Hamilton dizendo que o movimento é tal que a variação da integral de linha  $S$  entre dois instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$  fixos é nula. Ou seja, de acordo com o princípio de mínima ação, supondo que sejam dados o estado inicial e o final do sistema, a trajetória real percorrida pelo sistema é aquela para a qual o valor de

$S$  é mínimo (SILVA; MARTINS, 2007). Essa condição é escrita como

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (1.2)$$

O princípio de Hamilton, equação (1.2), é condição necessária e suficiente para obtermos as equações de movimento de Lagrange (SILVA; MARTINS, 2007; MONERAT et al., 2007). A formulação em termos de um princípio variacional é a base fundamental que geralmente é seguida quando tentamos descrever aparentemente os sistemas não mecânicos em uma roupagem matemática condizente com a mecânica clássica, como ocorre com a teoria de campos.

## 1.4 Equação de Movimento de Lagrange a partir do Princípio de Hamilton para um Campo Escalar

Nesta seção deduziremos a equação de movimento de Lagrange partindo do princípio de mínima ação, para um campo escalar  $\varphi$ . Seja uma ação dada por

$$S = \int dt \int dx dy dz L = \int d^4x L(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (1.3)$$

Se o campo  $\varphi$  sofre uma pequena variação ( $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ ), então a variação correspondente na ação é

$$\delta S = \delta \int d^4x L(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \int d^4x \delta L, \quad (1.4)$$

onde  $\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$ . Desenvolvendo  $\delta L$ , chegamos na equação (1.5):

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi + \partial_\mu \cdot \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi - \partial_\mu \cdot \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \\ &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi - \partial_\mu \cdot \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi + \partial^\mu \cdot \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \end{aligned} \quad (1.5)$$

em seguida substituindo na equação (1.4), obtemos

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \right] \delta \varphi + \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi. \quad (1.6)$$

O último termo da equação (1.6) é nulo, pois podemos transformar este termo em uma integral de superfície nos limites do volume quadri-dimensional (RUBAKOV, 2002).

Fazemos  $\delta \varphi = 0$  neste limite. Assim temos

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \right] \delta \varphi. \quad (1.7)$$

Pelo **princípio de mínima ação**, devemos ter  $\delta S = 0$ . Logo, impondo esta condição à equação (1.7), obtemos

$$\int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \right] \delta \varphi = 0. \quad (1.8)$$

A igualdade é verdadeira desde que os termos entre colchetes resultem em zero. Dessa forma obtemos as equações de **Euler-Lagrange**:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0. \quad (1.9)$$

Estas representam as equações de movimento para o campo escalar  $\varphi$ .

## 1.5 Tensor Energia - Momento

Seja a seguinte ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (1.10)$$

Analisemos a resposta da ação com respeito a variações infinitesimais nas coordenadas, da forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu. \quad (1.11)$$

A variação consequente na ação é

$$\delta S = \delta \int d^4x L = \int \Sigma \delta(d^4x)L + d^4x \delta L \Sigma. \quad (1.12)$$

O termo  $\delta(d^4x)$  é dado pela **fórmula de Jacobi** (RAMOND, 1997):

$$\delta(d^4x) = d^4x \partial_\mu \delta x^\mu. \quad (1.13)$$

Usando este resultado em (1.12), obtemos

$$\delta S = \int d^4x [L \partial_\mu \delta x^\mu + \delta L]. \quad (1.14)$$

Consideremos uma função arbitrária  $f$  das coordenadas. Em um dado sistema de referência inercial, localizamos um ponto  $P$  em  $x^\mu$ . Neste ponto, a função é  $f(x^\mu)$ . O mesmo ponto tem coordenada  $x'^\mu$  em outro sistema, e a função neste ponto é  $f'(x'^\mu)$ , pois a função em geral depende do sistema (RAMOND, 1997). Assim, uma variação infinitesimal na função é escrita como segue:

$$\begin{aligned} \delta f &= f'(x'^\mu) - f(x^\mu) \\ &= f'(x^\mu + \delta x^\mu) - f(x^\mu) \\ &\quad \overbrace{\text{Expandindo}}^{\text{Expandindo}} \\ &= f'(x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu f' + O[(\delta x^\mu)^2] \dots - f(x^\mu). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Considerando a expansão até primeira ordem em  $\delta x^\mu$  e substituindo  $\partial_\mu f'$  por  $\partial_\mu f$ , obtemos

$$\delta f = f'(x^\mu) - f(x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu f. \quad (1.16)$$

Identificamos a mudança funcional no mesmo  $x^\mu$  como

$$\delta_0 f = f'(x^\mu) - f(x^\mu). \quad (1.17)$$

Assim,

$$\delta f = \delta_0 f + \delta x^\mu \partial_\mu f. \quad (1.18)$$

Podemos portanto escrever esta variação como uma equação de operador

$$\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu. \quad (1.19)$$

Aplicando este resultado à variação da densidade lagrangeana, obtemos

$$\delta L = \delta x^\mu \partial_\mu L + \left[ \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta_0 \varphi + \partial_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta_0 \varphi. \quad (1.20)$$

O termo entre colchetes são as equações de Euler-Lagrange. Dessa forma, a equação (1.20) é simplificada:

$$\delta L = \delta x^\mu \partial_\mu L + \partial_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta_0 \varphi. \quad (1.21)$$

Substituindo a equação (1.21) na equação (1.14), obtemos

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu L \delta x^\mu + \int \partial_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta_0 \varphi. \quad (1.22)$$

Usando a equação (1.19) novamente, podemos escrever para  $\varphi$

$$\delta_0 \varphi = \delta \varphi - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi. \quad (1.23)$$

Substituindo a equação (1.23) na equação (1.22), obtemos

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu L g^\mu_\rho - \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\rho \varphi \delta x^\rho + \int \partial_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta \varphi, \quad (1.24)$$

onde  $g^\mu_\rho$  é o tensor métrico. Considere que o sistema é submetido apenas a uma translação infinitesimal  $\delta x^\mu$ , de forma que  $\delta \varphi = 0$ . Assim,

$$\delta S = \int_{\Sigma} d^4x \partial_{\mu} \left( L g^{\mu}_{\rho} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)} \partial_{\rho}\varphi \right) \delta x^{\rho}. \quad (1.25)$$

Desde que a ação é invariante sob translações nas coordenadas, devemos ter (RAMOND, 1997)

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)} \partial^{\mu}\varphi - g^{\mu}_{\rho} L \right) = 0. \quad (1.26)$$

Isto significa que existe uma densidade de corrente conservada, ou seja,

$$\partial_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0, \quad (1.27)$$

onde

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)} \partial_{\nu}\varphi - g^{\mu}_{\nu} L, \quad (1.28)$$

é denominado **tensor energia-momento**.

A equação de conservação (1.27) é consequência do teorema de Noether. Neste caso, a grandeza conservada é o tensor energia-momento, como resposta à invariância da ação sob translações infinitesimais nas coordenadas  $x^{\mu}$ .

Utilizando as regras de tensores para subir e baixar índices, podemos reescrever (1.28) da forma:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\varphi)} \partial_{\nu}\varphi - g_{\mu\nu} L. \quad (1.29)$$

Considerando a densidade lagrangeana que descreve uma dinâmica padrão,

$$L = \frac{1}{2} \partial_{\mu}\varphi \partial^{\mu}\varphi - V(\varphi), \quad (1.30)$$

temos que

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi)} = \partial_\mu \varphi. \quad (1.31)$$

Com este resultado, podemos reescrever a equação (1.29) de maneira mais simplificada

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathbf{L}. \quad (1.32)$$

As componentes do tensor energia-momento, são portanto,

$$T_{00} = E = \dot{\varphi}^2 - \mathbf{L} \quad (1.33)$$

$$T_{01} = T_{10} = \varphi^j \dot{\varphi} \quad (1.34)$$

$$T_{11} = p = \varphi^j{}^2 + \mathbf{L}, \quad (1.35)$$

onde foi utilizando a assinatura (+, -, -, -) para a métrica. Os termos  $E = T_{00}$  e  $p = T_{11} = T_{22} = T_{33}$ , representam a densidade de energia e a pressão, respectivamente. Os símbolos ( $^j$ ) e ( $\dot{\phantom{x}}$ ) representam as derivadas em relação à coordenada espacial e em relação ao tempo, respectivamente. É importante conhecer a densidade de energia associada ao campo solução. Para solução estática, por exemplo, a densidade de energia é

$$E = -\mathbf{L}, \quad (1.36)$$

de forma que, em uma dimensão espacial  $\varphi = \varphi(x)$ , a energia total associada é a integral da densidade de energia em todo o espaço:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx E \quad (1.37)$$

## 2 Modelos para um Campo Escalar Real

Na teoria de campos, os defeitos são representados pelas suas soluções estáticas das equações de movimento. Utilizaremos o formalismo Lagrangeano para obter tais equações de movimento, e em seguida suas soluções. O nosso interesse é em defeitos em (1+1) dimensões. Estudaremos modelos com potenciais que suportam defeitos dos tipos kink e lump, conforme a existência ou não de setores topológicos.

A densidade lagrangeana mais simples, cuja forma é conhecida como padrão, para descrever a dinâmica de um campo escalar real  $\varphi(x, t)$  é dada por (MANTON; SUTCLIFFE, 2004)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi). \quad (2.1)$$

A função  $V(\varphi)$  é o potencial que depende do sistema físico analisado, e  $\partial_\mu \varphi$  representa a derivada do campo  $\varphi$  com respeito à coordenada de índice  $\mu$ ; este pode assumir os valores 0, 1, 2 e 3, sendo 0 para coordenada temporal e os demais para coordenadas espaciais. Note que o  $V(\varphi)$  é uma função do campo  $\varphi$ ; não é função explícita das coordenadas  $x$ .

As equações de movimento para este caso podem ser obtidas através da equação de Euler-Lagrange (1.9), deduzida no capítulo anterior. Substituindo a equação (2.1) na

equação (1.9), com um pouco de manipulação matemática, obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \cdot \frac{1}{2} \partial_a \varphi \partial^a \varphi - V(\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi} \cdot \frac{1}{2} \partial_a \varphi \partial^a \varphi - V(\varphi) &= 0 \\
\frac{1}{2} \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \cdot \frac{1}{2} \partial_a \varphi \partial^a \varphi + \frac{dV}{d\varphi} &= 0 \\
\frac{1}{2} \partial_\mu \frac{\partial(\partial_\mu\varphi)}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \partial^\mu \varphi + \partial^\mu \varphi \frac{\partial(\partial_\mu\varphi)}{\partial(\partial_\mu\varphi)} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial\varphi} \partial^\mu \varphi + \frac{dV}{d\varphi} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Esta é a equação de movimento para o campo escalar  $\varphi$ . Escrita no espaço de Minkowski em  $(1 + 1)$  dimensões, ou seja,  $\varphi = \varphi(x, t)$  e utilizando a assinatura  $(+, -)$  para a métrica, a equação (2.2) toma a forma:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} = 0, \tag{2.3}$$

que é uma equação diferencial parcial de 2ª ordem. Dependendo do potencial a equação (2.3) pode ser não-linear.

Podemos notar que para um campo  $\varphi$  constante temos,  $dV/d\varphi = 0$ . Se o campo for estático, ou seja, não depender do tempo, então a equação (2.3) se reduz a

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = - \frac{dV}{d\varphi}. \tag{2.4}$$

As soluções de interesse físico são aquelas com energia finita. A energia é definida como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\dot{\varphi}^2 - \mathbf{L}). \tag{2.5}$$

onde  $E$  é componente  $T_{00}$  do tensor energia-momento que representa a densidade de energia, conforme mostramos na seção 1.5. Explicitando os termos da equação (2.1) para o caso em consideração, ou seja,  $\varphi = \varphi(x, t)$ , podemos escrever:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - V(\varphi). \tag{2.6}$$

Substituindo a equação (2.6) na equação (2.5), obtemos a expressão da energia associada ao campo:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + V(\varphi) \right]. \quad (2.7)$$

O termo entre colchetes, a densidade de energia, é a soma de três termos que são, respectivamente, a parcela cinética, a parcela gradiente e o potencial que caracteriza cada modelo considerado. Para um campo  $\varphi$  constante, a energia é

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx V(\varphi), \quad (2.8)$$

e para um campo  $\varphi$  estático, temos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + V(\varphi) \right], \quad (2.9)$$

caso em que são importantes apenas a **porção gradiente** e a **porção potencial**, respectivamente. Entendemos que a energia potencial é a soma da contribuição gradiente com o potencial.

A solução constante trivial é representada por  $\bar{\varphi}$ . Tal solução obedece a  $V'(\bar{\varphi}) = 0$ . Podemos impor que  $V(\bar{\varphi}) = 0$ ; para este caso a energia será nula. As soluções da equação de movimento (2.4) devem obedecer a duas condições de contorno: A primeira imposta ao campo  $\varphi$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \rightarrow \bar{\varphi}, \quad (2.10)$$

e a segunda imposta às derivadas do campo  $\varphi$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d\varphi}{dx} \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

As duas condições juntas garantem que a energia do sistema seja finita e a densidade de energia seja localizada. Se o potencial  $V(\varphi)$  tem um único mínimo em  $\varphi = \bar{\varphi}$ , então a solução estática deve satisfazer  $\varphi(x) \rightarrow \bar{\varphi}$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$  (RAJARAMAN, 1982). No entanto, se o potencial tem vários mínimos degenerados, então a solução estática deve tender a um dos mínimos quando  $x \rightarrow -\infty$ , e deve tender ao mesmo mínimo ou a outro

qualquer quando  $x \rightarrow +\infty$  (RAJARAMAN, 1982). A segunda condição faz com que a contribuição gradiente não leve a integral (2.9) a divergir. A primeira condição estabelece que os extremos do campo  $\varphi$  representem zeros do potencial, que sejam uma solução trivial  $[\varphi(x \rightarrow \pm\infty) = \bar{\varphi}]$ , ou que o comportamento assintótico das soluções possuam comportamentos distintos nos extremos opostos  $[\varphi(x \rightarrow -\infty) = \bar{\varphi}$  e  $\varphi(x \rightarrow +\infty) = \bar{\varphi}]$ . Este tipo de comportamento pode ser verificado através da equação do movimento. Para isso vamos reescrever a equação (2.4) utilizando o método da quadratura, de modo que obtemos duas equações de 1<sup>o</sup> ordem:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sqrt{\quad}}{\mp} 2(V+C). \quad (2.12)$$

As condições de contorno anteriores exigem que, quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $V(\varphi) \rightarrow 0$  pois  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$  e  $V(\bar{\varphi}) = 0$ , e  $\frac{d\varphi}{dx} \rightarrow 0$ . Assim, devemos ter  $C = 0$ . Dessa forma, a equação (2.12) toma a forma:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sqrt{\quad}}{\mp} 2V. \quad (2.13)$$

Notamos que as soluções reais exigem que o potencial  $V(\varphi)$  não pode ser negativo para um campo estático.

Vamos introduzir a topologia no sistema, utilizando o pseudo-tensor de Levi-Civita totalmente anti-simétrico, que tem o número de índices igual ao número de dimensões do espaço estudado. No caso de  $(1+1)$  dimensões, os componentes do tensor  $s^{\mu\nu}$  são os seguintes:  $s^{00} = s^{11} = 0$  e  $s^{01} = -s^{10} = 1$ . A topologia aparece no sistema através da presença de uma corrente conservada, que pode ser escrita como

$$J^\mu_\tau = \frac{1}{2} s^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi. \quad (2.14)$$

Esta corrente obedece à lei de conservação  $\partial_\mu J^\mu_\tau = 0$ , mas não é uma consequência do teorema de Noether. Ela nos leva a uma **carga topológica**  $Q_\tau$  dada por

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} J_T^0 dx. \quad (2.15)$$

Desenvolvendo o componente  $J_T^0$  para um campo estático  $\varphi$  em (1+1) dimensões, temos:

$$J_T^0 = \frac{1}{2} s^{00} \partial_0 \varphi + \frac{1}{2} s^{01} \partial_1 \varphi$$

$$J_T^0 = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.16)$$

Substituindo o resultado (2.16) na equação (2.15), obtemos a carga topológica para soluções estáticas

$$Q_T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{1}{2} \varphi(x \rightarrow +\infty) - \frac{1}{2} \varphi(x \rightarrow -\infty). \quad (2.17)$$

Podemos notar que esta é uma grandeza conservada, isto é,

$$\frac{dQ_T}{dt} = 0. \quad (2.18)$$

A carga topológica  $Q_T$  só depende das propriedades assintóticas do campo  $\varphi$ . Dessa forma, podemos especificar dois tipos distintos de soluções: as soluções topológicas, com  $Q_T \neq 0$  quando  $\varphi(x \rightarrow \infty) \neq \varphi(x \rightarrow -\infty)$ , o que significa que tais soluções conectam mínimos distintos do potencial; e as soluções não-topológicas, com  $Q_T = 0$  quando  $\varphi(x \rightarrow \infty) = \varphi(x \rightarrow -\infty)$ , que ligam um mínimo a ele mesmo. As soluções topológicas são configurações do campo que mudam de valor de um extremo a outro, seja por um decréscimo ou crescimento de  $\varphi$ . Já as soluções não topológicas possuem o mesmo valor do campo em ambos os extremos. A solução do tipo topológica é chamada de **kink** e a do tipo não-topológica, de **lump**. As soluções do tipo kink representam defeitos topológicos que surgem na interface de fases distintas, ou seja, na interface de domínios de configurações distintas. Por isso, quando imersos em duas ou mais dimensões, tais defeitos também são chamados de defeitos do tipo parede ou paredes de domínio.

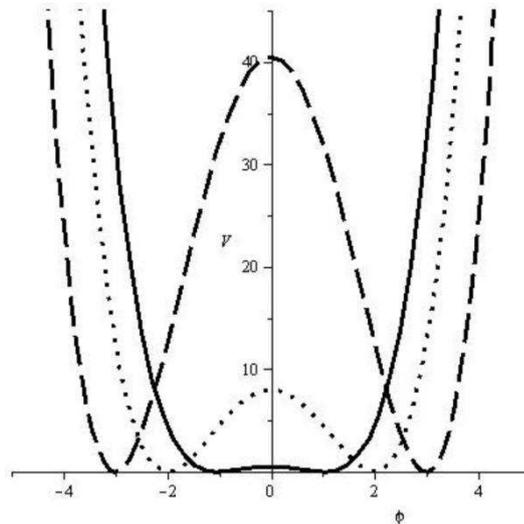
## 2.1 Modelos do tipo Kink

### 2.1.1 O modelo $\varphi^4$

O exemplo mais simples de defeito do tipo kink pode ser visto no modelo conhecido como  $\varphi^4$ . O potencial que caracteriza o modelo tem a forma:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\lambda^2(a^2 - \varphi^2)^2. \quad (2.19)$$

O gráfico do potencial em função do campo está na Fig. 4 com  $\lambda = 1$  e  $a = 1, 2$  e  $3$ . Podemos notar que o modelo apresenta o fenômeno da quebra espontânea de simetria. O



**Figura 4:** As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam o potencial do modelo  $\varphi^4$  com  $\lambda = 1$  e  $a = 1, 2$  e  $3$ , respectivamente.

potencial (2.19) possui dois mínimos globais degenerados em  $\varphi = \pm a$  e um máximo em  $\varphi = 0$ . A quebra espontânea de simetria acontece justamente quando o campo  $\varphi$  assume um dos mínimos equiparáveis. Derivando o potencial (2.19) em relação a  $\varphi$  e substituindo na equação geral de movimento (2.3), obtemos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\lambda \varphi(\varphi^2 - a^2) = 0, \quad (2.20)$$

que é a equação de movimento para este modelo. Para um campo  $\varphi$  estático, temos

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2\lambda \varphi(\varphi^2 - a^2). \quad (2.21)$$

A equação (2.21) tem dois tipos de soluções: as triviais, quando  $\varphi_{\pm} = \pm a$ , que têm energia nula e onde se localizam os vácuos clássicos do modelo; e as outras são as soluções estáticas, que podem ser obtidas resolvendo a equação (2.21).

Usando a equação (2.13) podemos obter duas equações de 1ª ordem cujas soluções são também soluções da equação (2.21). Assim, temos

$$\frac{d\varphi}{dx} = \mp \lambda(\varphi^2 - a^2). \quad (2.22)$$

As soluções são obtidas integrando (2.22), ou seja,

$$\int \frac{d\varphi}{\mp(\varphi^2 - a^2)} = \int \lambda dx$$

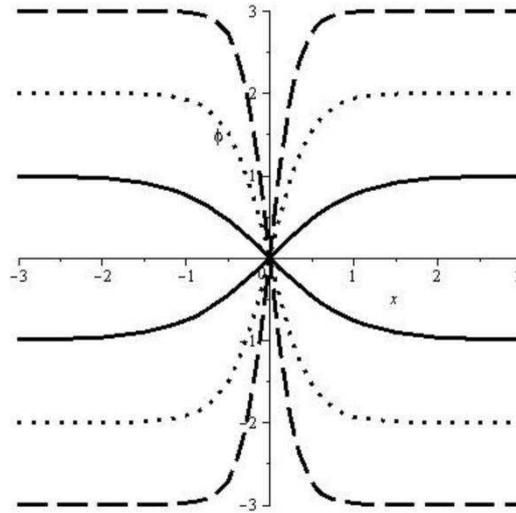
$$\varphi = \pm a \tanh[a\lambda(x - x_0)]. \quad (2.23)$$

Em (2.23),  $x_0$  localiza o centro do kink e como o modelo tem simetria translacional, a localização do centro é arbitrária. As soluções positivas são chamados de kinks e as negativas de anti-kinks, o gráfico das soluções para este modelo é representado pela Fig. 5. As soluções kink e anti-kink (2.23) do modelo  $\varphi^4$  com  $\lambda = 1$  e  $a = 1, 2$  e  $3$ , ambas centradas na origem conecta os distintos mínimos do potencial em  $x \rightarrow \pm \infty$ , como mostra a Fig. 5.

A energia total para um campo estático é dada pela integral da densidade de energia desde menos infinito a mais infinito, ou seja,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx E(x). \quad (2.24)$$

Vimos na seção 1.5 que, para campo estático, a densidade de energia é dada por  $E(x) =$



**Figura 5:** As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam as soluções kink e anti-kink do modelo  $\varphi^4$  com  $\lambda = 1$  e  $a = 1, 2$  e  $3$ , respectivamente, ambos centrados na origem.

(-L). Para este caso, podemos escrever:

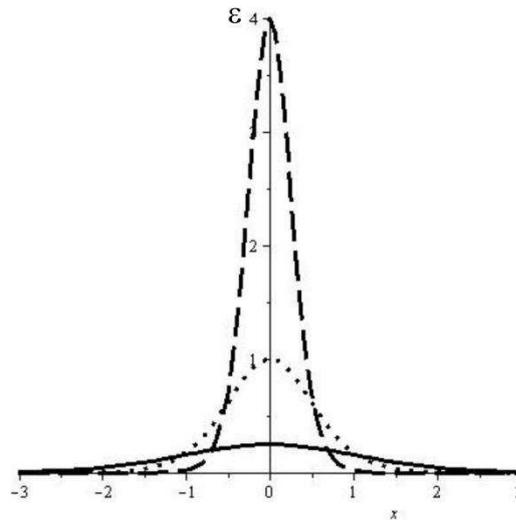
$$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \Sigma_2 + V(\varphi). \quad (2.25)$$

Podemos notar que, para uma solução trivial  $\bar{\varphi}$ , o que satisfaz  $V(\bar{\varphi}) = 0$ , a energia é igual a zero. Já no caso de  $\varphi$  ser uma solução estática, do tipo kink ou anti-kink, a densidade de energia toma a forma:

$$E(x) = \lambda^2 a^4 \operatorname{sech}^4[a\lambda(x - x_0)]. \quad (2.26)$$

Os gráficos da densidade de energia (2.26) estão presentes na Fig. 6 para  $a = 1$  e  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ , onde fizemos  $x_0 = 0$ . A densidade é finita e distribuída de forma simétrica em torno da origem ( $x_0 = 0$ ).

A densidade de energia máxima é  $E(x) = \lambda^2 a^4$ , quando  $x = x_0$ . Substituindo a equação (2.26) na equação (2.24), temos que a energia associada tanto ao kink ou anti-kink é



**Figura 6:** As linhas cont nua, pontilhada e tracejada representam a densidade de energia do modelo  $\varphi^4$  com  $a = 1$  e  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ , respectivamente.

$$E = \frac{4}{3}\lambda a^3. \quad (2.27)$$

Podemos observar que o valor da energia   independente da localiza o do centro do kink ou anti-kink, ou seja, as transla es do sistema n o interferem no valor da energia. A **energia gradiente** e a **energia potencial** s o dadas por

$$E_g = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2, \quad (2.28)$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} dx V(\varphi), \quad (2.29)$$

respectivamente. Para solu es triviais  $\varphi_{\pm} = \pm a$  temos que  $E_g = E_p = 0$ . Para solu es est ticas do tipo kink, as densidades de energia gradiente e potencial s o iguais:

$$E_g = E_p = \frac{1}{2} \lambda a^4 \operatorname{sech}^4 [\lambda a(x - x_0)]. \quad (2.30)$$

Como consequ ncia, as energias gradiente e potencial totais t m s o iguais, ou seja,

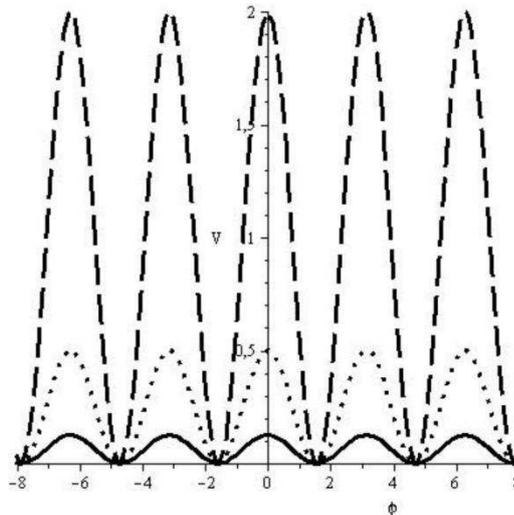
$$E_g = E_p. \quad (2.31)$$

### 2.1.2 O modelo seno-Gordon

O modelo  $\varphi^4$  não é um sistema interessante de se estudar múltiplos sólitons, já que não existem setores topológicos que descrevam multi-kinks, exceto quando acrescentamos também o anti-kink (MANTON; SUTCLIFFE, 2004). Em situações como essas, pode ser mais interessante o uso do modelo seno-Gordon, descrito pelo seguinte potencial:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \lambda^2 \cos^2(a\varphi). \quad (2.32)$$

O potencial (2.32) tem um número infinito de mínimos que correspondem a  $\varphi = k\pi/a$ , onde  $k$  é um número inteiro. O número infinito de mínimos corresponde a ter um número infinito de setores topológicos que estão conectados pelas suas soluções. Os gráficos do potencial acima estão representados na Fig. 7 com  $a = 1$  e  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ .



**Figura 7:** As linhas cont´mua, pontilhada e tracejada representam o potencial do modelo seno-Gordon com  $a = 1$  e  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ , respectivamente.

A equação do movimento para este modelo pode ser encontrada substituindo a derivada do potencial (2.32) em relação a  $\varphi$  na equação (2.3). Assim, temos:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a\lambda \sin(a\varphi) \cos(a\varphi) = 0. \quad (2.33)$$

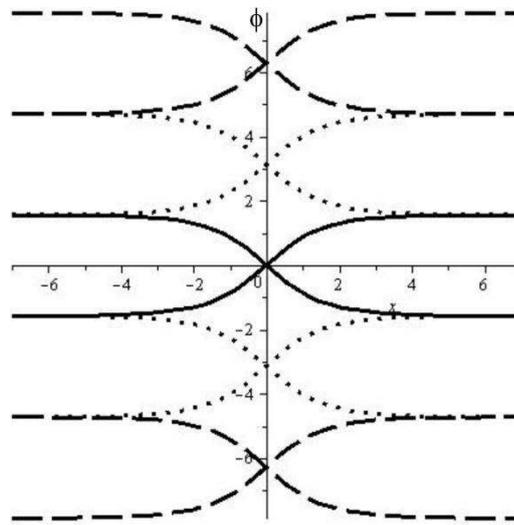
Para um campo  $\varphi$  estático, temos

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -a\lambda^2 \operatorname{sen}(a\varphi) \cos(a\varphi). \quad (2.34)$$

As soluções da equação acima são dadas por

$$\varphi(x) = \pm \frac{1}{a} \operatorname{arcsen}[\tanh(\lambda ax)] + k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (2.35)$$

A Fig. 8 representa o gráfico das soluções do modelo seno-Gordon com  $\lambda = 1$ ,  $a = 1$  e



**Figura 8:** As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam as soluções do tipo kink e anti-kink do modelo seno-Gordon com  $\lambda = 1$ ,  $a = 1$  e para  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ , respectivamente.

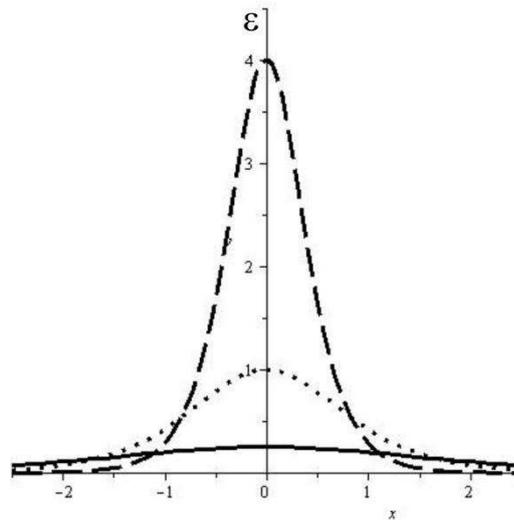
para  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ .

A densidade de energia para um campo estático é dada pela equação (2.25). Essa densidade de energia está associada a cada setor topológico. Assim, para cada solução, temos

$$E(x) = \lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda ax). \quad (2.36)$$

Também podemos notar para este modelo que a densidade de energia gradiente e potencial são iguais. O gráfico que representa a densidade de energia para este modelo está plotado na Fig. 9.

A energia total para cada solução é dada integrando a densidade de energia (2.36) em



**Figura 9:** As linhas cont´ınua, pontilhada e tracejada representam a densidade de energia do modelo Seno-Gordon com  $a = 1$  e  $\lambda = 0.5, 1, 2$ , respectivamente

todo o espaço. Assim, temos

$$E = 2 \cdot \frac{\lambda}{a}. \quad (2.37)$$

Novamente, a energia não depende da localização do centro do kink.

### 2.1.3 Kinks em laboratório

A seguir, mostramos alguns exemplos do surgimento de defeitos do tipo kink em sistemas físicos. Não é objetivo da secção mostrar detalhes matemáticos e sim citar situações reais em que tais defeitos estão presentes.

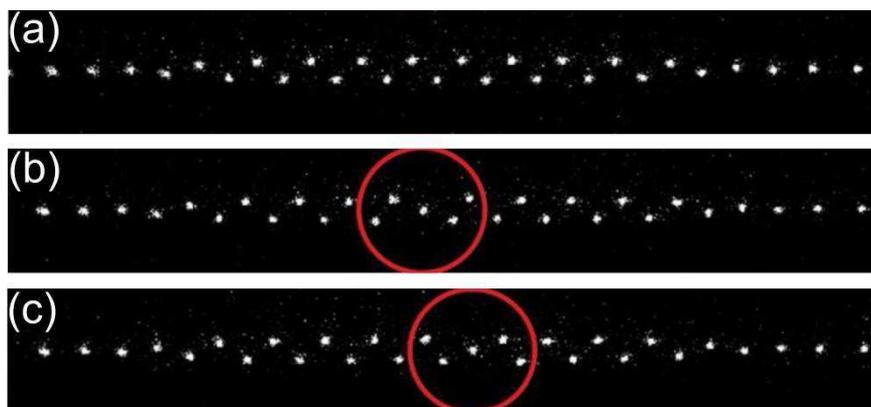
#### 2.1.3.1 Cristais de Coulomb

Íons aprisionados oferecem um campo promissor para o estudo da formação e estrutura de defeitos topológicos. Quando se aplica resfriamento a laser a íons aprisionados, eles sofrem uma transição de uma fase caótica para uma fase ordenada denominada **crystal de Coulomb**. O estudo de correntes de íons podem revelar efeitos quânticos interessantes (CHOU et al., 2010; SCHINDLER et al., 2011; HOME et al., 2009). As realizações experimentais de defeitos estruturais (kinks) em cristais de íons de Coulomb têm despertado interesse da física não linear. Têm sido propostos como uma ferramenta para armazenamento quântico

(KELLER et al., 2013).

Alterando-se adiabaticamente os parâmetros de aprisionamento é possível gerar transições de fase de cristal unidimensional (estrutura linear) a bidimensional (estrutura de “zigzag”) e tridimensionais (SCHIFFER, 1993; PIACENTE et al., 2004; FISHMAN et al., 2008). Os cristais resultam da combinação entre a força repulsiva de Coulomb e a força restauradora de um potencial externo.

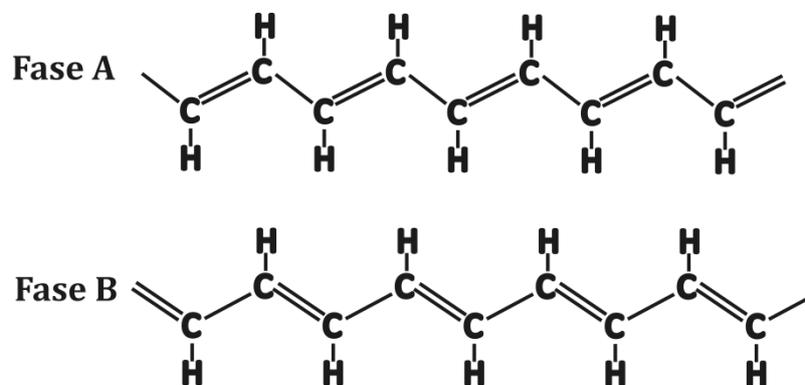
Defeitos topológicos são criados experimentalmente em cristais de íons, quando temos uma transição de fase com quebra de simetria, de maneira não adiabática, durante o processo de cristalização a partir do resfriamento a laser (SCHNEIDER; PORRAS; SCHAETZ, 2012). Exemplo disso é a transição de fase de segunda ordem a partir de uma configuração linear para uma configuração de “zigzag” em cristais de íons de Coulomb (KELLER et al., 2013; PARTNER et al., 2013). Alguns trabalhos, porém, sugerem que tais defeitos também podem ser criados a partir do enfraquecimento, de maneira não adiabática do potencial de confinamento (CAMPO et al., 2010; LANDA et al., 2010; MIELENZ et al., 2013). Na Fig. 10, podemos observar a formação da estrutura de defeitos topológicos, em cristais de Coulomb, criados a partir do enfraquecimento do potencial de confinamento, onde temos, uma configuração de “zigzag” puro e a formação de kinks.



**Figura 10:** Estrutura de defeitos: O kink representa essa região de transição entre as duas fases. (a) Configuração de “zigzag” puro. (b) Formação de kink (circulado de vermelho). (c) Formação de anti-kink (circulado de vermelho). Fonte: KELLER et al., 2013.

### 2.1.3.2 Poliacetileno

O poliacetileno é um polímero orgânico que é condutor. A sua estrutura consiste de uma cadeia linear de CH (FAEZ et al., 2000). Uma sequência de  $x$  unidades é representada por  $(CH)_x$  (VACHASPATI, 2006). Uma propriedade característica é que, na conjugação, as ligações entre os átomos de carbono podem alternar entre ligações simples e duplas. Este tipo de conjugação permite que seja criado um fluxo de elétrons em condições específicas. Cada ligação dupla contém uma ligação “sigma” ( $\sigma$ ) que forma uma ligação química forte. Mas cada ligação dupla também possui uma ligação “pi” ( $\pi$ ) menos fortemente localizada, e por isso mais fraca (ABREU, 2010). O elétron pode então deslocar-se ao longo da sequência de átomos de carbono, ou seja, ao longo da molécula, ajudando a condução de corrente elétrica. Não basta que o polímero tenha ligações duplas conjugadas. O polímero vai se tornar condutor elétrico quando é perturbado, por meio da remoção dos seus elétrons (oxidação) ou por meio da inserção de elétrons (redução); este processo é chamado de dopagem (ABREU, 2010).

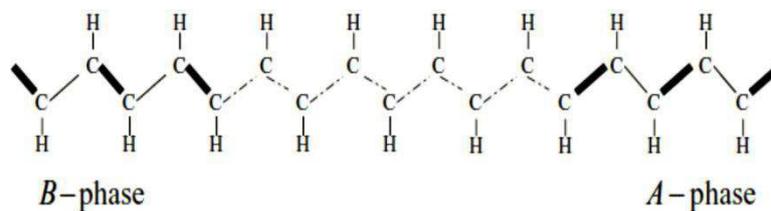


**Figura 11:** Estrutura dos dois estados fundamentais degenerados do trans-poliacetileno. A estrutura superior é representada por A e a inferior por B. Fonte: VACHASPATI, 2006, p.148.

Existem duas sequências possíveis de ligações (VACHASPATI, 2006). A primeira, quando a ligação dupla ( $\pi$  e  $\sigma$ ) do carbono é a da direita e a ligação simples é a da esquerda. A segunda, quando a ligação dupla é a da esquerda e a ligação simples é a da direita. Estes dois tipos de sequência são ilustrados na Fig. 11, na configuração *trans* do

poliacetileno <sup>1</sup>.

Os elétrons  $\pi$  podem escolher para formar ligação dupla tanto para a esquerda ou para a direita, ou seja, existe uma simetria que pode ser quebrada (VACHASPATI, 2006). Se o estado **B** ocorre no lado esquerdo da cadeia e o **A**, à direita, no meio existe um defeito do tipo kink, onde a estrutura alternada não pode ser mantida (VACHASPATI, 2006). Esta configuração está presente na Fig. 12 .



**Figura 12:** O estado B a esquerda e o estado A a direita. O kink é a região onde não existem as ligações alternadas simples-dupla. As ligações duplas são representadas por linhas grossas. Fonte: VACHASPATI, 2006, p.148.

## 2.2 Modelos do tipo Lump

Como foi visto antes, as soluções não-topológicas, cuja carga topológica é nula, são denominadas de **lump**. Esse tipo de defeito aparece na física de matéria condensada para descrever, por exemplo, transporte de carga em correntes diatômicas (PNEVMATIKOS, 1988; XU; HUANG, 1995; XU; ZHOU, 1996; BAZEIA; NASCIMENTO; TOLEDO, 1997; BAZEIA et al., 2001), em comunicação óptica. Já na física de altas energias, estão ligadas ao estudo de formação de estrutura e propriedades da matéria escura nas galáxias (FUCHS; MIELKE, 2004; SCHUNCK; FUCHS; MIELKE, 2006).

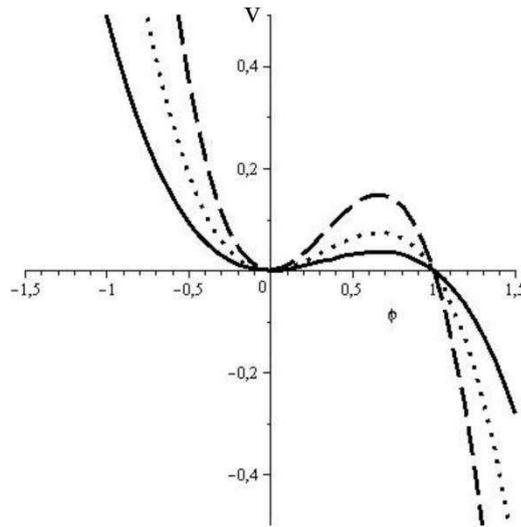
### 2.2.1 O modelo $\varphi^3$

O modelo  $\varphi^3$  é descrito pelo potencial

<sup>1</sup>Na configuração *trans*, os átomos de H são ligados aos átomos de C alternadamente, em lados opostos da cadeia. Já na forma *cis*, os átomos de H ligados a carbonos vizinhos com ligações duplas estão no mesmo lado da cadeia.

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{2} \varphi^2 \left( 1 - \frac{\varphi}{a} \right) \quad (2.38)$$

Este potencial tem um mínimo local em  $\varphi = 0$  e possui um máximo em  $\varphi = 2a/3$ . O gráfico deste potencial está representado na Fig. 13 com  $a = 1$  e  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ .



**Figura 13:** As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam o potencial do modelo  $\varphi$  com  $a = 1$  e  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ , respectivamente.

Determinamos a equação de movimento para este modelo, derivando o potencial (2.38) em relação ao campo  $\varphi$  e depois substituindo o resultado na equação (2.3). Obtemos, então

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda \varphi \left( 1 - \frac{3\varphi}{2a} \right) = 0. \quad (2.39)$$

Para o caso em que o campo  $\varphi$  é estático, temos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \lambda \varphi \left( 1 - \frac{3\varphi}{2a} \right). \quad (2.40)$$

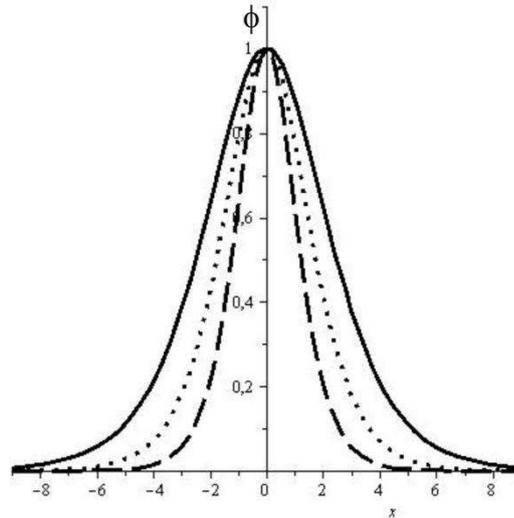
Para obter as soluções estáticas para este modelo utilizamos a equação (2.13). Substituindo o potencial para esta configuração na equação (2.13), obtemos duas equações de primeira ordem:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \mp \varphi \sqrt{\lambda \left( 1 - \frac{\varphi}{a} \right)}. \quad (2.41)$$

Integrando a equação (2.41), obtemos as soluções

$$\varphi = \pm a \operatorname{sech}^2 \frac{\lambda}{2}(x - x_0) \quad (2.42)$$

que também são soluções da equação (2.40). Os gráficos das soluções estão presentes na Fig. 14 com  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ , onde fizemos  $x_0 = 0$ . Podemos perceber que os



**Figura 14:** As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam as soluções do tipo lump do modelo  $\varphi$  com  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ , respectivamente.

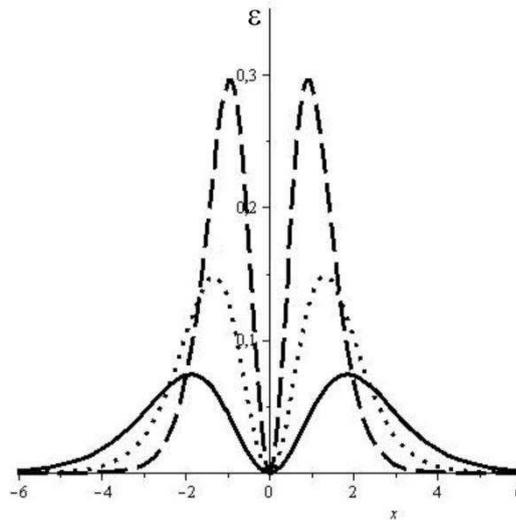
valores assintóticos do campo  $\varphi(+\infty)$  e  $\varphi(-\infty)$  são iguais, diferente do que ocorre com as soluções do tipo kink que descrevem um setor topológico. Nas soluções tipo lump percebemos a ausência desse setor topológico, ou seja, não existe uma carga topológica; por isso a denominação **não-topológica**.

A densidade de energia para este modelo é

$$E(x) = \lambda a^2 \operatorname{sech}^4 \frac{\lambda}{2}(x - x_0) \tanh^2 \frac{\lambda}{2}(x - x_0) \quad (2.43)$$

Observando o gráfico da densidade de energia representado pela Fig. 15 com  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.5, 1$ , e  $2$ . É notável a diferença entre as distribuições de energia do kink e do lump. O kink tem energia mais concentrada no centro do defeito. A energia do lump está concentrada em dois pontos simétricos em relação ao ponto de referência  $x_0$ .

A energia total associada a este modelo é



**Figura 15:** As linhas cont´ınua, pontilhada e tracejada representam a densidade de energia do modelo  $\varphi^4$  com  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ , 1, e 2, respectivamente.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) dx = \frac{8}{15} a^2 \sqrt{\lambda}. \quad (2.44)$$

Percebemos que a energia para soluções do tipo lump também não depende da localização do centro do defeito.

### 2.2.2 O modelo $\varphi^4$ invertido

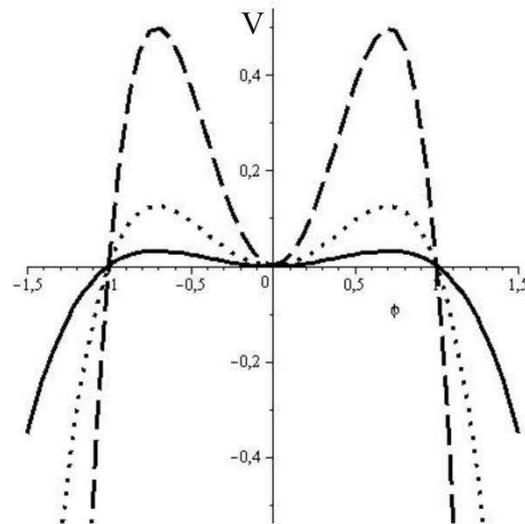
Um outro exemplo de defeito não-topológico bem conhecido  o  $\varphi^4$  invertido, descrito pelo potencial

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \lambda^2 \varphi^2 (a^2 - \varphi^2). \quad (2.45)$$

Este potencial tem um mínimo local em  $\varphi = 0$  e possui máximos em  $\varphi = \pm \frac{\sqrt{a^2 - 2}}{2}$ . Os gráficos do potencial acima estão presentes na Fig. 16 com  $a = 1$  e  $\lambda = 0.5$ , 1 e 2.

Para encontrar a equação de movimento derivamos o potencial (2.45) em relação a  $\varphi$  e depois substituímos o resultado na equação (2.3). Obtemos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda \varphi (a^2 - 2\varphi^2) = 0. \quad (2.46)$$



**Figura 16:** As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam o potencial do modelo  $\phi$  invertido com  $a = 1$  e  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ , respectivamente.

Para o caso em que o campo  $\phi$  é estático, temos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda \phi (a^2 - 2\phi^2). \quad (2.47)$$

Obtemos as soluções estáticas substituindo o potencial (2.45) na equação (2.13). Assim, temos duas equações de primeira ordem:

$$\frac{d\phi}{dx} = \mp \lambda \phi \sqrt{a^2 - \phi^2}. \quad (2.48)$$

As soluções das equações de primeira ordem acima também são soluções da equação (2.47).

Resolvendo (2.48), obtemos

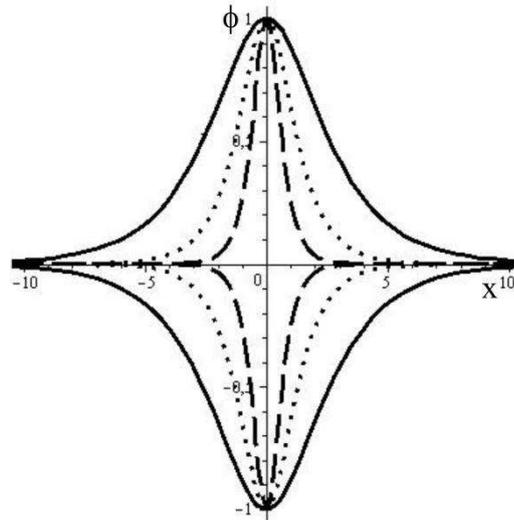
$$\phi = \pm a \operatorname{sech}(\lambda ax). \quad (2.49)$$

Estas são soluções não-topológicas; representam lumps. A amplitude é dada por  $a$  e a largura é inversamente proporcional a  $\lambda a$ . Os gráficos destas soluções estão representados na Fig. 17 com  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.5, 1$  e  $2$ .

A densidade de energia para esta configuração é

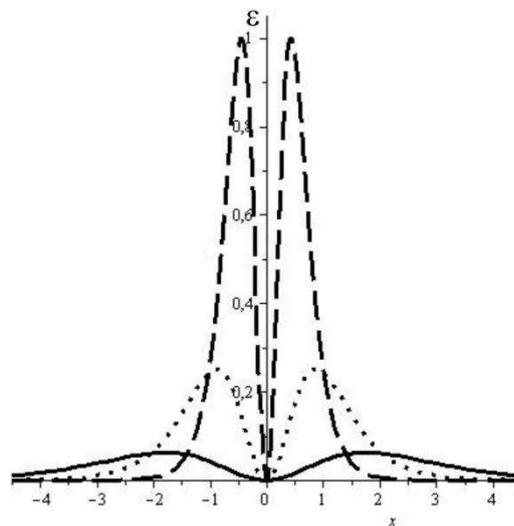
$$E(x) = a^4 \lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda ax) \tanh^2(\lambda ax). \quad (2.50)$$

O gráfico da densidade de energia, que está presente na Fig. 18 com  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.5, 1$ , e



**Figura 17:** As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam as soluções do modelo  $\phi_1$  invertido com  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ , 1 e 2, respectivamente.

2. Observamos que a densidade de energia que está associada à solução do tipo lump se anula no centro do defeito e tem máximos degenerados simétricos em relação ao centro. Essa forma de distribuição da densidade sugere que os defeitos do tipo lump possuam uma estrutura interna.



**Figura 18:** As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam a densidade de energia do modelo  $\phi_1$  invertido com  $a = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ , 1, e 2, respectivamente.

A energia total  $E$  associada ao lump é dada pela integração da densidade de energia

(2.50) em todo espaço. Assim, temos que

$$E = \frac{2a^3\lambda}{3}. \quad (2.51)$$

Novamente podemos perceber que a energia total associada não depende da localização do centro do defeito.

## 3 Soluções BPS e Estabilidade Linear

### 3.1 Soluções BPS

Identificar soluções BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) é um método alternativo para investigar a presença de defeitos topológicos em campos escalares, reduzindo de segunda para primeira a ordem das equações de campo, através da minimização da energia (MANTON; SUTCLIFFE, 2004). Desenvolvido por E. B. Bogomol'nyi em 1976, para que o método funcione temos que ter potenciais não-negativos, cujos zeros são mínimos globais. Podemos escrever o potencial como

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} W_{\varphi}^2 \quad (3.1)$$

onde  $W = W(\varphi)$  é conhecido como superpotencial,  $W_{\varphi} = \frac{dW}{d\varphi}$  e ambos são funções contínuas. A equação de movimento para um campo estático (2.4), neste contexto, toma a forma:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = W_{\varphi}W_{\varphi\varphi}. \quad (3.2)$$

Substituindo o potencial (3.1) na equação (2.13) encontramos, mais uma vez, duas equações de primeira ordem cujas soluções são também soluções da equação de segunda ordem (3.2):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \mp W_{\varphi}. \quad (3.3)$$

As equações acima são conhecidas como **Equações de Bogomol'nyi**. A energia em termos do superpotencial  $W(\varphi)$  é

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]^2 + W_\varphi^2. \quad (3.4)$$

Usando a técnica comum de completar quadrado em (3.4), obtemos

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{d\varphi}{dx} \mp W_\varphi \right]^2 \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx}. \quad (3.5)$$

Rescrevendo (3.5), temos

$$E = E_{BPS} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{d\varphi}{dx} \mp W_\varphi \right]^2. \quad (3.6)$$

Podemos notar que o segundo termo da equação (3.6) não pode ser negativo. O termo

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx}, \quad (3.7)$$

representa a energia dos estados BPS e depende apenas dos valores assintóticos dos campos e não, da forma explícita das soluções:

$$E_{BPS} = \|W[\varphi(x \rightarrow +\infty)] - W[\varphi(x \rightarrow -\infty)]\| = \|\Delta W\|. \quad (3.8)$$

Chamamos de setores BPS os setores topológicos que tem  $E_{BPS} \neq 0$ . As soluções associadas a tais setores são chamadas de soluções BPS. Já os setores topológicos em que  $E_{BPS} = 0$  são setores não BPS, com soluções não BPS. Fisicamente as soluções de interesse são aquelas de energia finita. O menor valor de energia é exatamente  $E_{BPS}$ , que corresponde a ter o segundo termo da equação (3.6) nulo. As vantagens de utilizar o método BPS é que podemos encontrar as soluções para o campo estático a partir de duas equações de primeira ordem em vez de uma equação de segunda ordem e ainda podemos determinar o valor das energias através do superpotencial  $W(\varphi)$  aplicado nos valores assintóticos do campo. Conhecidos a função  $W(\varphi)$  e o setor topológico, é possível obter a energia da solução sem necessariamente determinar explicitamente a solução. Isto também é uma das vantagens desse método. Também podemos ressaltar que as energias

gradiente e potencial são iguais:

$$E_g = E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} dx W(\varphi)^2 = \frac{E_{BPS}}{2}. \quad (3.9)$$

Como exemplo, vamos aplicar o método de Bogomol'nyi ao modelo  $\varphi^4$  que tem o potencial dado por (2.19). Em termos de um superpotencial, e sabendo que  $W_\varphi = \sqrt{2V(\varphi)}$ , o modelo  $\varphi^4$  toma a forma:

$$W(\varphi) = \lambda \left( a^2 \varphi - \frac{1}{3} \varphi^3 \right). \quad (3.10)$$

Derivando a equação (3.10) em relação ao campo e substituindo na equação (3.3), temos

$$\frac{d\varphi}{dx} = \mp W_\varphi = \mp \lambda (a^2 - \varphi^2). \quad (3.11)$$

Estas são exatamente as mesmas equações de primeira ordem (2.22) que já foram solucionadas. A energia do setor topológico é dada pela equação (3.8). Assim a energia para o modelo  $\varphi^4$ , onde  $+a$  e  $-a$  são os valores assintóticos do campo é

$$E = \frac{4}{3} \lambda a^3. \quad (3.12)$$

Podemos notar que o valor de energia encontrado coincide com o valor obtido em (2.27). Isto só confirma que a energia associada ao setor topológico é, na verdade, um mínimo de energia. A energia da solução foi obtida sem a necessidade de se determinar a solução, ou seja, sem a necessidade de resolver as equações de primeira ordem (3.11).

## 3.2 Estabilidade Linear

Defeitos do tipo parede (kink) são topologicamente estáveis: podem mudar de tamanho ou mover, mas não podem ser destruídos por nenhum processo local, porque apresentam energia confinada. Pode, no entanto, um defeito topológico do tipo parede ser

destruído por um anti-defeito topológico do tipo parede, que também é uma configuração estável (ANTONIO, 2009). Defeitos do tipo lump, do contrário, são estruturas instáveis, no sentido de que podem ser destruídos facilmente, por isso não são caracterizados como defeitos topológicos. Neste ponto, é interessante analisarmos quais fatores influenciam na estabilidade de tais defeitos. Como os defeitos topológicos são estruturas estáveis, devemos garantir que suas soluções reproduzam essa característica. Portanto, devemos fazer o estudo da estabilidade linear das soluções (ANTONIO, 2009). Para estudar a estabilidade de uma solução estática devemos considerar pequenas perturbações em torno da mesma. O nosso propósito é linearizar as equações de movimento e determinar um potencial de estabilidade e os autovalores associados (RAJARAMAN, 1982).

Seja  $\varphi = \varphi(x)$  uma solução estática e  $\eta(x, t)$  uma pequena flutuação em torno de  $\varphi(x)$ . Podemos escrever a solução  $\varphi(x, t)$  como

$$\varphi(x, t) = \varphi(x) + \eta(x, t). \quad (3.13)$$

Substituindo a equação (3.13) na equação de movimento (2.3), obtemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{d\bar{V}}{d\varphi} = 0. \quad (3.14)$$

Temos agora um potencial  $\bar{V} = V(\varphi + \eta)$ . Expandimos  $\frac{d\bar{V}}{d\varphi}$  até termos de primeira ordem em  $\eta$ , daí se chamar estabilidade linear. Feito isso, temos

$$\frac{d\bar{V}}{d\varphi} = \frac{dV}{d\varphi} + \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \eta \Big|_{\varphi(x)}. \quad (3.15)$$

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.14) e utilizando ainda a equação (2.4), obtemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \eta \Big|_{\varphi(x)} = 0. \quad (3.16)$$

Podemos escrever ainda a equação (3.16) como

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \eta = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) é uma diferencial parcial de segunda ordem. Para resolvê-la, vamos utilizar o método de separação de variáveis. Fazendo  $\eta(x, t) = \zeta(x)T(t)$  e substituindo em (3.17), obtemos

$$\frac{1}{\zeta(x)} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right] \zeta(x) = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (3.18)$$

Igualando cada termo a uma constante  $w^2$ , temos

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right] \zeta(x) = \zeta(x)w^2 \quad (3.19)$$

e

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -T(t)w^2. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) é do tipo oscilador harmônico simples, cuja solução tem a forma

$$T_n(t) = T_0 \cos(wnt) \quad (3.21)$$

ou

$$T_n(t) = T_0 e^{iwn t}. \quad (3.22)$$

Se  $w^2 < 0$  as soluções (3.22) deixam de ser exponenciais complexas, e passam a ter exponenciais reais, que não são mais limitadas e diverge com  $t$  tendendo ao infinito. Assim teríamos soluções instáveis. Vamos estudar agora o comportamento de  $w_n$  a partir da equação (3.19). Fazendo

$$U(x) = \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi(x)}, \quad (3.23)$$

obtemos

$$-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \zeta(x) = \zeta(x) w^2. \quad (3.24)$$

Chamando

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x), \quad (3.25)$$

a equação (3.24) fica da forma:

$$\hat{H}\zeta_n(x) = w^2 \zeta_n(x). \quad (3.26)$$

A equação (3.26) é do tipo Schrödinger, onde  $\hat{H}$  representa um operador Hamiltoniano,  $\zeta_n$  representa o conjunto de auto-funções e  $w^2$  são seus autovalores. Procuramos soluções estáveis. Para que esta estabilidade seja garantida, devemos ter um Hamiltoniano não-negativo, ou seja, cujos autovalores sejam positivos. Caso contrário, os autovalores na equação (3.21) fariam as soluções divergirem. Para saber se  $\hat{H}$  é não-negativo basta verificar se o mesmo pode ser fatorado num produto de dois operadores adjuntos  $\hat{H}_\pm = S_\pm^\dagger S_\pm$  (JUNKER, 1996).

### 3.2.1 Estabilidade das Soluções BPS

Para dar início ao estudo da estabilidade das soluções BPS, lembremos que reescrevemos o potencial em termos da função  $W(\varphi)$  da forma da equação (3.1). Comparando a equação de movimento para um campo estático, que é dada por (3.2), com  $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{dV}{d\varphi}$ , temos

$$\frac{dV}{d\varphi} = W_{\varphi\varphi}W_{\varphi}. \quad (3.27)$$

Derivando a equação (3.27) em relação a  $\varphi$ , obtemos

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = W_{\varphi\varphi\varphi} + W_{\varphi}W_{\varphi\varphi\varphi}. \quad (3.28)$$

Igualando agora a equação (3.28) com a equação (3.23), obtemos

$$U(x) = W_{\varphi\varphi}^2 + W_{\varphi}W_{\varphi\varphi\varphi}. \quad (3.29)$$

Vamos agora substituir a equação (3.29) em (3.25), de forma a obter

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\varphi\varphi}^2 + W_{\varphi}W_{\varphi\varphi\varphi}. \quad (3.30)$$

Este operador  $\hat{H}$  pode ser fatorado como um produto de dois operadores na forma  $H_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger}S_{\pm}$  que são definidos como

$$S_{\pm}^{\dagger} = -\frac{d}{dx} \pm W_{\varphi\varphi}. \quad (3.31)$$

e

$$S_{\pm} = \frac{d}{dx} \pm W_{\varphi\varphi}. \quad (3.32)$$

onde  $S_{\pm}^{\dagger}$  é o adjunto de  $S_{\pm}$ . Se  $\hat{H}$  é um produto de dois operadores que são mutuamente adjuntos, então garantimos sua positividade. Para verificar começemos substituindo  $\hat{H}_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger}S_{\pm}$  em (3.26), de forma a obter

$$S_{\pm}^{\dagger}S_{\pm}\xi_n(x) = w^2\xi_n(x). \quad (3.33)$$

Na Mecânica Quântica os autovalores são o valores esperados do hamiltoniano  $\hat{H}$ ,

tomado entre dois estados ortogonais. Temos ainda, por definição que

$$\delta_{nm} = (\zeta_n | \zeta_m), \quad (3.34)$$

onde  $\delta_{nm}$  é o delta de Kronecker e definimos também o operador identidade como

$$\hat{I} = \sum_n |\zeta_n\rangle \langle \zeta_n|. \quad (3.35)$$

Vamos calcular os valores esperados do operador  $\hat{H} = S_{\pm}^\dagger S_{\pm}$  aplicado ao estado  $\zeta_n(x)$ , a partir da equação (3.33):

$$\langle \zeta_n | \hat{H} | \zeta_n \rangle = \langle \zeta_n | w_n^2 | \zeta_n \rangle. \quad (3.36)$$

Substituindo o operador identidade em (3.36), temos

$$\delta_{nn} w_n^2 = \langle \zeta_n | S_{\pm}^\dagger \hat{I} S_{\pm} | \zeta_n \rangle. \quad (3.37)$$

Desenvolvendo, obtemos

$$w_n^2 = \sum_m |(\zeta_n | S_{\pm} | \zeta_m)|^2 \geq 0. \quad (3.38)$$

Podemos então concluir que, para qualquer auto-estado  $\zeta_n$  do operador  $\hat{H}$ , o valor de  $w^2$  será sempre maior ou igual a zero. Assim as nossas soluções BPS são linearmente estáveis.

Podemos ainda calcular o modo zero  $\zeta_0$ , que corresponde ao autovalor  $w_0 = 0$ . Assim

$$S_{\pm} \zeta_0(x) = 0 \Rightarrow \frac{d\zeta_0}{dx} = \pm W_{\phi\phi} \zeta_0. \quad (3.39)$$

Integrando a equação (3.39), temos que

$$\zeta_0(x) = A e^{\pm \int dx W_{\phi\phi}}, \quad (3.40)$$

onde  $A$  é uma constante de normalização.

Vamos estudar a estabilidade linear das soluções, utilizando o modelo  $\varphi^4$  como exemplo, que é descrito pelo potencial (2.19) e suas soluções são dadas pela equação (2.23). Vamos considerar o kink com o centro na origem. Utilizando a equação (3.23) para calcular o potencial de estabilidade, obtemos

$$U(x) = \lambda^2 a^2 [4 - 6 \operatorname{sech}^2(a\lambda x)]. \quad (3.41)$$

A equação (3.41) é chamada de potencial de Pöschl-Teller modificado (MORSE; FESHBACH, 1953), representado graficamente pela Fig. 19 com  $a = \lambda = 1$ . O potencial da mecânica quântica de Pöschl-Teller modificado, tem a forma geral: (SILVA, 2007)

$$U(x) = [W - B \operatorname{sech}^2(x)]. \quad (3.42)$$

Os autovalores do espectro discreto de energia são (SILVA, 2007)

$$E_n = W - C_n^2 \quad (3.43)$$

com

$$C_n = \sqrt{B + \frac{1}{4} - n - \frac{1}{2}}, \quad (3.44)$$

onde

$$0 \leq n < \sqrt{B + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}. \quad (3.45)$$

Se  $\sqrt{W} < \sqrt{B + 1/4 - 1/2}$ , existem autovalores de energia negativos (SILVA, 2007; MORSE; FESHBACH, 1953).

Os parâmetros do potencial de estabilidade (3.41) para o potencial que descreve o modelo  $\varphi^4$  (2.19), com  $\lambda = a = 1$ , são  $W = 4$  e  $B = 6$ . Os autovalores discretos para este modelo, são determinados a partir das equações (3.43) e (3.44), de forma a obter

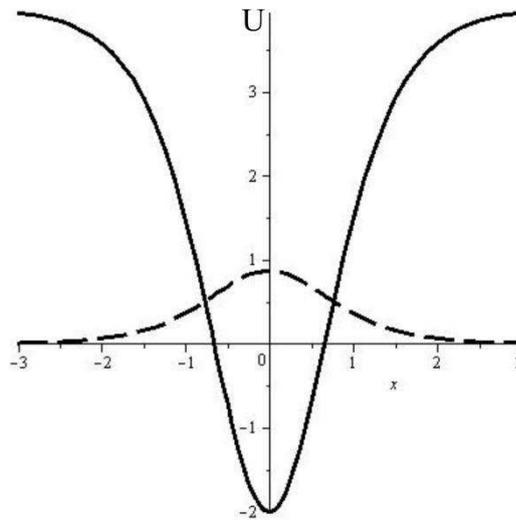
$$E_n = n(4 - n). \quad (3.46)$$

O valor de energia para modo zero ( $n = 0$ ) é nulo e o primeiro estado excitado de energia ( $n = 1$ ) é  $E_1 = 3$ . Sabendo que a condição de normalização é

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_0(x)|^2 dx = 1 \quad (3.47)$$

e utilizando a equação (3.40) obtemos o auto-estado normalizado para  $n = 0$ . Este é

$$\xi_0(x) = \frac{\sqrt{3\lambda a}}{4} \operatorname{sech}^2(a\lambda x). \quad (3.48)$$



**Figura 19:** A linha contínua representa o potencial de estabilidade e a tracejada, o seu modo zero para o modelo  $\varphi^4$  com  $a = \lambda = 1$ .

O potencial de Pöschl-Teller modificado possui modo zero e seus autovalores são positivos, o que nos garante a estabilidade das soluções estáticas do modelo  $\varphi^4$ . O resultado já era previsto, pois este modelo é positivo e possui um superpotencial associado dado por (3.10).

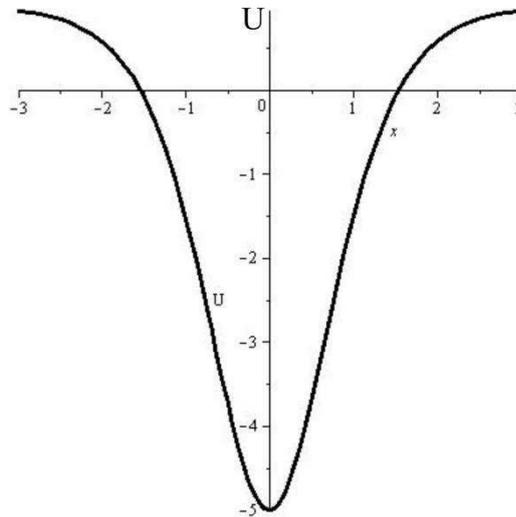
Analisamos agora o modelo  $\varphi^4$  invertido, descrito pelo potencial (2.45) e suas soluções dadas pela equação (2.49). Determinamos o potencial de estabilidade a partir da equação (3.23), de forma a obter

$$U(x) = \lambda^2 a^2 [1 - 6 \operatorname{sech}^2(ax)], \quad (3.49)$$

que também é do tipo Pöschl-Teller modificado, representado graficamente na Fig.20 com  $a = \lambda = 1$ . Os parâmetros do potencial de Pöschl-Teller (3.49) para o potencial que descreve o modelo  $\varphi^4$  invertido (2.45), com  $\lambda = a = 1$ , são  $W = 1$  e  $B = 6$ . Os autovalores discretos para este modelo são determinados a partir das equações (3.43) e (3.44), de forma a obter

$$E_n = n(4 - n) - 3, \quad (3.50)$$

que resulta em  $E_0 = -3$  e  $E_1 = 0$  para  $n = 0$  e  $n = 1$ , respectivamente. O autovalor zero representa o modo zero e o autovalor negativo está associado a instabilidade das soluções tipo lump. O resultado já era esperado, pois o potencial do modelo  $\varphi^4$  invertido não é positivo definido para  $|\varphi| > a$ , ou seja, não podemos escrever em termos de um superpotencial.



**Figura 20:** O potencial de estabilidade para o modelo  $\varphi^4$  invertido com  $a = \lambda = 1$ .

## 4 *Considerações Finais*

Neste trabalho, vimos que as estruturas de defeitos em campos escalares são dadas pelas soluções estáticas das equações de movimento. Esses defeitos podem ser classificados como topológicos ou não topológicos. Os defeitos topológicos são caracterizados pela presença de uma carga topológica  $Q_T$  não nula, quando  $\varphi(x \rightarrow \infty) \neq \varphi(x \rightarrow -\infty)$ , ou seja, são soluções que possuem valores distintos de um extremo a outro. Este tipo de defeito ocorre a partir da quebra espontânea de simetria que leva o sistema a uma transição de fase. Já os defeitos não topológicos não possuem uma carga topológica, ou seja,  $Q_T = 0$ . Assim temos,  $\varphi(x \rightarrow \infty) = \varphi(x \rightarrow -\infty)$ , que significa que o valor do campo é o mesmo em ambos os extremos. Os modelos descritos por um campo escalar apenas, são chamados de kinks e lumps, para soluções topológicas e não topológicas, respectivamente. Identificamos algumas características dos kinks e lumps, através de modelos gerados a partir de potenciais que suportam esses dois tipos de defeitos.

Os defeitos do tipo kink possuem soluções que conectam os mínimos distintos do potencial. As soluções positivas e negativas são chamadas de kink e anti-kink, respectivamente. Podemos notar que a densidade de energia associada está concentrada no centro do defeito. A energia total associada ao kink ou anti-kink é independente da localização do centro do defeito, pois as translações do sistema não interferem no valor da energia.

Já os defeitos do tipo lump possuem soluções que ligam um mínimo a ele mesmo, resultando em  $Q_T = 0$ . A densidade de energia associada a este defeito se anula no centro e tem máximos degenerados simétricos em relação ao centro. A energia total para soluções

do tipo lump também não depende da localização do centro do defeito.

Revisamos o método de Bogomol'nyi para investigar a presença de defeitos topológicos, no qual um dado potencial não-negativo é escrito em termos de um superpotencial  $W(\varphi)$ , resultando na redução da equação de segunda ordem em duas equações de primeira ordem, através da minimização da energia. As soluções de mínima energia associadas a tais setores são chamadas de soluções BPS. Vimos que o valor da energia pode ser obtido sem a necessidade de determinar explicitamente a solução do campo. Para isto, precisamos conhecer a função  $W(\varphi)$  e o setor topológico. Estudamos também a estabilidade linear e verificamos que para as soluções serem estáveis o potencial de Pöschl-Teller modificado deve possuir modo zero e autovalores positivos.

Como já falamos, os defeitos topológicos e não topológicos em teoria de campos escalares é de grande interesse em diversas áreas da física, com aplicações na física de altas energias, na matéria condensada e na cosmologia. Como perspectiva, podemos investigar com mais detalhes a formação de defeitos topológicos em cristais de Coulomb e em cadeias de poliacetileno. Também podemos estudar efeitos não-lineares em arranjos de nanopartículas metálicas não-lineares opticamente conduzidas; situações em que um arranjo de nanopartículas metálicas não-lineares interagentes pode suportar um tipo estranho de modos localizados não-lineares, kinks plasmônicos, que descrevem ondas comutantes conectando dois estados diferentes de polarização das partículas metálicas (NOSKOV; BELOV; KIVSHAR, 2012).

## Referências

- ABREU, M. M. S. P. de. Polímeros condutores: Fundamentos e aplicações. Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de Lorena (EEL). 2010.
- ANTONIO, F. J. *Estudo de Defeitos Topológicos em Cristais Líquidos do Ponto de Vista Cosmológico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, 2009.
- BAGGOTTR, J. *Higgs: The invention and discovery of the ‘God Particle’*. Oxford: Oxford University Press, 2012.
- BAZEIA, D. Defect structures in field theory. 2005.
- BAZEIA, D. et al. Soliton model for proton conductivity in langmuir films. *Chemical Physics Letters*, v. 340, p. 205 – 210, 2001.
- BAZEIA, D. et al. Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions. *Phys.Rev.*, D73, p. 105008, 2006.
- BAZEIA, D. et al. Generalized Global Defect Solutions. *Eur.Phys.J.*, C51, p. 953–962, 2007.
- BAZEIA, D.; MENEZES, J.; MENEZES, R. Global defects in field theory with applications to condensed matter. *Mod.Phys.Lett.*, B19, p. 801–819, 2005.
- BAZEIA, D.; NASCIMENTO, J.; TOLEDO, D. Alternate route to soliton solutions in hydrogen-bonded chains. *Physics Letters A*, v. 228, p. 357 – 362, 1997.
- CAMPO, A. del et al. Structural defects in ion chains by quenching the external potential: The inhomogeneous kibble-zurek mechanism. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 105, p. 075701, Aug 2010.
- CHOU, C. W. et al. Frequency comparison of two high-accuracy  $Al^+$  optical clocks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 104, p. 070802, 2010.
- COSTA, B.; RODRIGUES, E. *Novo Espaço - Matemática - 8.º Ano*. Porto, Portugal: Porto Editora, 2012.
- FAEZ, R. et al. Polímeros condutores. *Química Nova Escola*, v. 11, 2000.
- FISHMAN, S. et al. Structural phase transitions in low-dimensional ion crystals. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 77, p. 064111, Feb 2008.
- FUCHS, B.; MIELKE, E. W. Scaling behaviour of a scalar field model of dark matter haloes. *MNRAS*, v. 350, p. 707, 2004.

- GUÉRON, E. *Defeitos Topológicos: Texturas*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP, 1996.
- HOME, J. P. et al. Complete methods set for scalable ion trap quantum information processing. *Science*, v. 325, p. 1227–1230, 2009.
- JUNKER, G. *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- KELLER, J. et al. Symmetry breaking and topological defect formation in ion coulomb crystals. *Nature*, 2013.
- LANDA, H. et al. Quantum coherence of discrete kink solitons in ion traps. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 104, p. 043004, Jan 2010.
- MACEDO, D. L. *Aplicações do Cálculo Variacional: Braquistócrona e o Princípio de Fermat*. 33 p. Monografia (Especialização) — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, São Paulo, 2004.
- MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological Solitons*. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 9780521838368. Disponível em: <<http://isbnplus.org/9780521838368>>.
- MARTINS, G. V. *Localização de férmions em um Anel imerso em (3,1) dimensões*. Dissertação (Mestrado) — Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Maranhão(UFMA), 2012.
- MIELENZ, M. et al. Trapping of topological-structural defects in coulomb crystals. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 133004, Mar 2013.
- MONERAT, G. A. et al. O formalismo variacional de lagrange e hamilton no ensino de mecânica básica na graduação em engenharia. *Revista de Ensino de Engenharia*, v. 26, p. 9–17, 2007.
- MOREIRA, I. de C. Maupertuis (1698-1759) e o princípio da mínima ação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 21, p. 172–186, 1999.
- MORSE, P.; FESHBACH, H. *Methods of Mathematical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- NOSKOV, R. E.; BELOV, P. A.; KIVSHAR, Y. S. Subwavelength plasmonic kinks in arrays of metallic nanoparticles. *Optics Express*, v. 20, p. 2733, jan. 2012.
- OLIVEIRA, S. V. de. *Uma Abordagem sobre a Teoria do Campo Escalar Real*. Dissertação (Mestrado) — Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba(UFPB), 2009.
- PARTNER, H. L. et al. Dynamics of topological defects in ion coulomb crystals. *New Journal of Physics*, v. 15, n. 10, p. 103013, 2013.
- PIACENTE, G. et al. Generic properties of a quasi-one-dimensional classical wigner crystal. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 69, p. 045324, Jan 2004.

- PLEITEZ, V. A física de partículas elementares e o prêmio nobel de física 2008. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 30, p. 4301, 2008.
- PNEVMATIKOS, S. Soliton dynamics of hydrogen-bonded networks: A mechanism for proton conductivity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 60, p. 1534, 1988.
- RAJARAMAN, R. *Solitons and Instantons*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982. (North-Holland Personal Library).
- RAMOND, P. *Field Theory: A Modern Primer*. Gainesville, Florida, USA: Westview Press, 1997.
- RUBAKOV, V. *Classical Theory of Gauge Fields*. [S.l.]: Princeton University Press, 2002.
- SCHIFFER, J. P. Phase transitions in anisotropically confined ionic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 70, p. 818–821, Feb 1993.
- SCHINDLER, P. et al. Experimental repetitive quantum error correction. *Science*, v. 332, p. 1059–1061, 2011.
- SCHNEIDER, C.; PORRAS, D.; SCHAETZ, T. Experimental quantum simulations of many-body physics with trapped ions. *Reports on Progress in Physics*, v. 75, n. 2, p. 024401, 2012.
- SCHUNCK, F. E.; FUCHS, B.; MIELKE, E. W. Scalar field haloes as gravitational lenses. *MNRAS*, v. 369, p. 485, 2006.
- SILVA, A. P. B. da; MARTINS, R. de A. Maupertuis e o princípio mecânico de ação mínima: uma análise crítica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, p. 625–633, 2007.
- SILVA, R. M. da. *Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba (UFPB), 2007.
- SOUZA, M. A. M. et al. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. *Latin-American Journal of Physics Education*, v. 06, p. 47–54, 2012.
- SU, W. SCHRIEFFER, J.; HEEGER, A. Solitons in polyacetylene. *Phys. Rev. Lett.*, v. 42, p. 1698–1701, 1979.
- VACHASPATI, T. *Kinks and Domain Walls*. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2006.
- VILENKIN, A.; SHELLARD, E. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1994. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- WEISS, P. L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J. de Phys.*, v. 6, p. 661–690, 1907.
- XU, J.-Z.; HUANG, J.-N. Bell-shape soliton pair in a hydrogen-bonded chain with asymmetric double-well potential. *Phys. Rev. Lett. A*, v. 197, p. 127, 1995.

XU, J.-Z.; ZHOU, B. Kink and bell-shape solitons in hydrogen-bonded chains. *Physics Letters A*, v. 210, p. 307 – 312, 1996.

ZUREK, W. Cosmological experiments in condensed matter systems. *Phys. Rep.*, v. 276, p. 177–221, 1996.