Resumo

Neste trabalho, estudamos um devido a Kryszewi e Szulkin, o qual completa o bem conhecido resultado devido a Rabinowitz, no sentido que, é possivel considerar uma decomposição do tipo $X = Y \oplus Z$ com Y e Z tendo dimensão infinita. Usando o Teorema do Linking Generalizado acima, iremos provar a existência de solução não-trivial para dois sistemas de equações de Poisson acopladas com crescimento crítico em domínios não-limitados.

Abstract

In this work, we study a Generalized Linking Theorem due Kryszewi and Szulkin, which complets a well know result due Rabinowitz, in the sense that, it is possible to consider a decomposition of the type $X = Y \oplus Z$, with Y and Z have infinite dimensional. Using the above Generalized Linking Theorem, we prove the existence of nontrivial solutions to two systems of coupled Poisson equations with critical growth in unbounded domains.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sistemas de Equações de Poisson Acopladas com Crescimento Crítico em Domínios Não - Limitados: Uma Aplicação do Teorema de Kryszewki e Szulkin

por

Alânnio Barbosa Nóbrega

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Janeiro/2008

Sistemas de Equações de Poisson Acopladas com Crescimento Crítico em Domínios Não - Limitados: Uma Aplicação do Teorema de Kryszewki e Szulkin

por

Alânnio Barbosa Nóbrega

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ô

Prof. Dr. Membro da Banca

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Janeiro/2008

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço bla bla bla

Dedicatória

Aos meus pais e a Paula.

Introdução

No Teorema de Linking devido a Rabinowitz, consideramos o espaço de Banach $X = Y \oplus Z$ e supomos Y um subespaço de dimensão finita. No nosso trabalho nos propomos a demonstrar um Teorema do Linking Generalizado, neste Teorema consideramos o espaço X como descrito acima e teremos a grande vantagem dos espaços Y e Z poderem ter dimensão infinita.

Além disso, aplicaremos o Teorema do linking Generalizado no estudo da existência de solução para os seguintes sistemas de equações de Poisson acopladas com crescimento crítico em dominios não-limitados:

$$\begin{cases} -\Delta u & = |v|^{2^*-2}v, \\ -\Delta v & = |u|^{2^*-2}u, \\ & u, v \in D_0^{1,2}(\Omega_*), \end{cases} \tag{1}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u & = \gamma v + |v|^{2^*-2}v, \\ -\Delta v & = \lambda u + |u|^{2^*-2}u, \\ & u, v \in H_0^1(\Omega_{**}), \end{cases} \tag{2}$$

onde Ω_* e Ω_{**} são domínios do $\mathbb{R}^N$ não-limitados que serão descritos no capítulo 4.

Nosso trabalho está organizado do seguinte modo: No Capítulo 1, seguindo as referência [15], [12] e [5], demonstramos os principais Teoremas de Minimax, entre ele o Teorema do Linking devido a Rabinowitz.

No Capítulo 2, baseado em [15], estudaremos a existência de solução para duas EDP's Elípticas, na primeira, o termo não-linear apresenta crescimento sub-crítico. Já na segunda, que é um problema similar ao sistema (2), o termo não-linear apresenta crescimento crítico. Mostraremos também, usando a hipótese de Ω ser um domínio regular, limitado e estrelado com relação a origem, um resultado ideal quanto a existência de solução para o problema com crescimento crítico, veja o Teorema 2.6 e a Proposição 2.7.

No Capítulo 3 mostraremos, usando [15] e [8], o Teorema do Linking Generalizado devido a Kryszewki e Szulkin. Para tanto definiremos uma nova classe de funções, as funções admissíveis e construiremos uma Teoria do Grau para esta classe de funções.

Por fim, no Capítulo 4, seguindo [4] e usando o Corolário do Teorema do Linking Generalizado, demonstraremos os Teoremas de Existência de Solução para os problemas (1) e (2).

Capítulo 1

Teoremas de Minimax

Neste capítulo apresentaremos alguns Teoremas de Minimax, estes terão uma grande importância na demonstração de vários dos pricipais resultados desenvolvidos em nosso trabalho. Entre os teoremas que apresentaremos, destacamos o Teorema do Linking, para o qual faremos uma generalização no Capítulo 3. Nesse estudo usamos como principais referências [15], [5] e [12].

1.1 Lema de Deformação

Nessa seção apresentaremos uma versão quantitativa do Lema de Deformação para funções continuamente diferenciáveis definidas em espaços de Banach. Para tanto faremos o uso do conceito de Campo PseudoGradiente.

Definição 1.1 *Sejam M um espaço métrico, X um espaço de Banach e $h : M \longrightarrow X' \setminus \{0\}$ uma aplicação contínua. Um campo vetorial pseudogradiente para h em M é uma campo vetorial contínuo, localmente Lipschitz $g : M \longrightarrow X$ tal que, para todo $u \in M$*

$$\|g(u)\| \leq 2\|h(u)\|$$

e

$$\langle h(u), g(u)\rangle \geq \|h(u)\|^2.$$

Lema 1.1 *Sob as hipóteses da Definição anterior, existe um campo vetorial pseudo-gradiente para h em M.*

Demonstração. Por definição, para todo $v \in M$

$$\|h(v)\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle h(v), x\rangle|.$$

Por propriedades de supremo segue que, para cada $\epsilon > 0$ existe $x_0 \in X$ tal que

$$|\langle h(v), x_0\rangle| > \|h(v)\| - \epsilon.$$

Em particular, considerando $\epsilon = \frac{\|h(v)\|}{3}$, existe x_0 tal que

$$|\langle h(v), x_0\rangle| > \frac{2}{3}\|h(v)\|.$$

Defina

$$y = \frac{3}{2}\|h(v)\|x_0,$$

note que

$$\|y\| = \frac{3}{2}\|h(v)\|\|x_0\| = \frac{3}{2}\|h(v)\| < 2\|h(v)\|$$

e

$$\langle h(v), y\rangle = \frac{3}{2}\|h(v)\|\langle h(v), x_0\rangle > \frac{3}{2}\|h(v)\|\frac{2}{3}\|h(v)\| = \|h(v)\|^2.$$

Como h é contínua, existe uma vizinhança aberta N_v de v tal que

$$\|y\| \leq 2\|h(u)\| \text{ e } \langle h(u), y\rangle \geq \|h(u)\|^2, \ \forall u \in N_v. \tag{1.1}$$

A família

$$\mathcal{N} = \{N_v; \ v \in M\}$$

é uma cobertura aberta para M. Como M é um espaço métrico, o mesmo é paracompacto, veja [6], então existe uma cobertura aberta localmente finita

$$\mathcal{M} = \{M_i; \ i \in I\}$$

mais fina que $\mathcal{N}$. Desta forma, existe $y = y_i$ tal que (1.1) é satisfeita para todo $u \in M_i$.

Defina em M

$$\rho_i(u) = dist(u, X \setminus M_i)$$

e

$$g(u) = \sum_{i\in I} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j\in I}\rho_j(u)} y_i. \tag{1.2}$$

Como cada $u \in M$ só pertence a um número finito de $M_i's$, segue que as somas em (1.2) são finitas. Assim, $g(u)$ é uma combinação convexa dos y_i que verificam

$$\|y_i\| \leq 2\|h(u)\|, \ \forall u \in M_i$$

e

$$\langle h(u), y_i\rangle \geq \|h(u)\|^2, \ \forall u \in M_i.$$

Agora, provaremos que g é uma campo pseudogradiente para h em M. Ora, dado $u \in X$, temos

$$g(u) = \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(u)} y_1 + \cdots + \frac{\rho_N(u)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(u)} y_N,$$

daí

$$\|g(u)\| \leq \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(u)} \|y_1\| + \cdots + \frac{\rho_N(u)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(u)} \|y_N\|.$$

Logo,

$$\|g(u)\| \leq 2\|h(u)\| \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i(u)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(u)} = 2\|h(u)\|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle h(u), g(u)\rangle &= \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(u)} \langle h(u), y_1\rangle + \cdots + \frac{\rho_N(u)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(u)} \langle h(u), y_N\rangle \\ &\geq \|h(u)\|^2 \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i(u)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(u)} = \|h(u)\|^2.\end{aligned}$$

Claramente g é uma aplicação contínua, falta mostrarmos que g é localmente Lipschitz. Para mostramos este fato, basta provarmos que cada parcela de g é localmente Lipschitz. Para fixar idéias, concideremos $N = 2$ e analisemos a parcela

$$f(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)} y_1.$$

Note que,

$$f(u) - f(v) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)} y_1 - \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)} y_1,$$

desenvolvendo

$$f(u) - f(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_1(v) + \rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(u)\rho_1(v) - \rho_2(u)\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} y_1,$$

o que implica

$$f(u) - f(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_2(u)\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} y_1.$$

Somando e subtraindo $\rho_1(v)\rho_2(v)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= \frac{\rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(v)\rho_2(v) + \rho_1(v)\rho_2(v) - \rho_2(u)\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} y_1 \\ &= \left\{ \frac{[\rho_1(u) - \rho_1(v)]\rho_2(v) + \rho_1(v)[\rho_2(v) - \rho_2(u)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} \right\} y_1. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\| &= \left\{ \frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} |\rho_1(u) - \rho_1(v)| \right. \\ &+ \left. \frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} |\rho_2(v) - \rho_2(u)| \right\} \|y_1\|. \end{aligned}$$

Uma vez que, $|\rho_1(u) - \rho_1(v)| \leq \|u - v\|$, temos

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\| &= \left\{ \frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} \|u - v\| \right. \\ &+ \left. \frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} \|u - v\| \right\} \|y_1\|. \end{aligned}$$

Como $\rho_1(u) + \rho_2(u) > 0$, existem $a > 0$ e uma vizinhança V_u tal que

$$\rho_1(v) + \rho_2(v) > a, \ \forall v \in V_u.$$

Além disso,

$$\frac{\rho_2(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)}, \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)} \leq 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\| &= \frac{1}{a} \|y_1\| \|u - v\| \\ &\leq \frac{2}{a} \|h(u)\| \|u - v\|, \ \forall u, v \in V_u. \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação g é localmente lipschitziana.

■

No que segue consideraremos os seguintes conjuntos

$$\varphi^d = \{u \in X; \ \varphi(u) \leq d\}$$

e

$$S_\lambda = \{u \in X, dist(u, S) \leq \lambda\}.$$

Lema 1.2 (Lema de Deformação) *Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ tais que,*

$$\|\varphi'(u)\| \geq \frac{8\epsilon}{\delta}, \ \forall u \in \varphi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}. \tag{1.3}$$

Então, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(i) *$\eta(t,u) = u$, sempre que $t = 0$ ou se $u \notin \varphi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$;*

(ii) *$\eta(1, \varphi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\epsilon}$;*

(iii) *$\eta(t,\cdot)$ é um homeomorfismo;*

(iv) *$\|\eta(t,u) - u\| \leq \delta, \ \forall u \in X$ e $\forall t \in [0,1]$;*

(v) *$\varphi(\eta(cdot, u))$ é não-crescente, $\forall u \in X$;*

(vi) *$\varphi(\eta(t,u)) < c, \ \forall u \in \varphi^c \cap S_\delta, \ \forall t \in [0,1]$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.1 existe um campo vetorial pseudogradiente g para φ' em $M = \{u \in X; \ \varphi'(u) \neq 0\}$. Denotemos por A e B os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \varphi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta} \\ B &= \varphi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap S_\delta \end{aligned}$$

e definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \psi(u) = \frac{dist(u, X \setminus A)}{dist(u, X \setminus A) + dist(u, B)}. \end{aligned}$$

Observe que, ψ é uma aplicação contínua, localmente lipschitziana , com $\psi \equiv 1$ em B e $\psi \equiv 0$ em $X \setminus A$. Considere,

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto f(u) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad u \in X \setminus A \\ -\psi(u)\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2}, & \text{se} \quad u \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

Afirmação 1.2 *A aplicação f é localmente lipschitziana.*

De fato, para demonstramos nossa afirmação estudemos os seguintes casos:

1) Se $u, v \in X \setminus A$, temos

$$\|f(u) - f(v)\| = 0 \leq \|u - v\|.$$

2) Se $u \in X \setminus A$ e $v \in A$, temos

$$\|f(u) - f(v)\| = \|\psi(v)\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\|.$$

Uma vez que, $\psi(u) = 0$, podemos escrever

$$\|f(u) - f(v)\| = \|\psi(u)\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2} - \psi(v)\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\| = \frac{1}{\|g(v)\|}\|\psi(u) - \psi(v)\|.$$

Como $u \in A$, $\|g(u)\| \geq \frac{8\epsilon}{\delta}$ e sendo ψ localmente lipschitziana, existe uma vizinhança V_v de v tal que

$$\|\psi(u) - \psi(v)\| \leq \|u - v\|, \ \forall u \in V_v.$$

Logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \frac{\delta}{8\epsilon}c\|u - v\|, \ \forall u \in V_v.$$

3) Por fim, se $u, v \in A$, temos

$$\|f(u) - f(v)\| = \| - \psi(u)\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2} + \psi(v)\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\|,$$

o que implica,

$$\begin{aligned}\|f(u) - f(v)\| &= \| - \psi(u)\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2} + \psi(v)\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2} - \psi(v)\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2} + \psi(v)\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\| \\ &\leq \frac{1}{\|g(u)\|}\|\psi(u) - \psi(v)\| + \|\psi(v)\|\|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2} - \frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\|.\end{aligned}$$

Como ψ é localmente lipschitziana, já vimos que para existe uma vizinhança V_v tal que

$$\frac{1}{\|g(u)\|}\|\psi(u) - \psi(v)\| \leq \frac{\delta}{8\epsilon}c\|u - v\|, \ \forall u \in V_v.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|\psi(u)\|\|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2} - \frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\| &\leq \|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2} - \frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\| \\ &\leq \|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2} - \frac{g(u)}{\|g(v)\|^2} + \frac{g(u)}{\|g(v)\|^2} - \frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\|.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade Triangular, obtemos

$$\|\psi(u)\|\|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2}-\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\| \leq \|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2}-\frac{g(u)}{\|g(v)\|^2}\| + \|\frac{g(u)}{\|g(v)\|^2}-\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\|,$$

desenvolvendo,

$$\begin{aligned}\|\psi(u)\|\|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2}-\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\| &\leq \frac{\|g(u)\|}{\|g(u)\|^2\|g(v)\|^2}|\ \|g(v)\|^2-\|g(u)\|^2| \\ &+ \frac{1}{\|g(v)\|^2}\|g(u)-g(v)\|.\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\|\psi(u)\|\|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2}-\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\| &\leq \frac{\|g(u)\|}{\|g(u)\|^2\|g(v)\|^2}|\ \|g(v)\|^2-\|g(u)\|\|g(v)\|+ \\ &+ \|g(u)\|\|g(v)\|\|\|-\|g(u)\|^2| \\ &+ \frac{1}{\|g(v)\|^2}\|g(u)-g(v)\|,\end{aligned}$$

então, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned}\|\psi(u)\|\|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2}-\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\| &\leq \frac{1}{\|g(v)\|^2}\|g(u)-g(v)\| \\ &+ \frac{1}{\|g(u)\|\|g(v)\|}\|g(u)-g(v)\| \\ &+ \frac{1}{\|g(v)\|^2}\|g(u)-g(v)\|.\end{aligned}$$

Como g é localmente lipschitziana e $\|g(w)\| \geq \frac{8\epsilon}{\delta}$, $\forall w \in A$. Então, pela últma desigualdade existe uma vizinhança V_v tal que

$$\|\psi(u)\|\|\frac{g(u)}{\|g(u)\|^2}-\frac{g(v)}{\|g(v)\|^2}\| \leq C_2\|u-v\|,\ \forall u \in V_v.$$

Desta forma concluímos que f é uma aplicação localmente Lipschitz.

Considere o problema de Cauchy,

$$(P.C)\begin{cases}\frac{d}{dt}\sigma(t,u) &= f(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u) &= u.\end{cases}$$

Como f é contínua, localmente Lipschitziana com $\|f(u)\| \leq \frac{\delta}{8\epsilon}$ em X. Então para cada $u \in X$ o problema $(P.C)$ tem uma única solução $\sigma(\cdot,u)$ definida em $\mathbb{R}$. Além disso, σ é continua em $\mathbb{R} \times X$. Veja o Teorema C.5.

Definamos

$$\begin{array}{rcl} \eta : [0,1] \times X & \longrightarrow & X \\ (t,u) & \mapsto & \eta(t,u) = \sigma(8\epsilon, u). \end{array}$$

Para $t \geq 0$ temos

$$\|\sigma(t,u) - u\| = \|\sigma(t,u) - \sigma(0,u)\|.$$

Do Teorema fundamental do Cálculo, segue que

$$\|\sigma(t,u) - u\| = \|\int_0^t \frac{d}{d\tau}\sigma(\tau,u)d\tau\|.$$

Como $\sigma(\tau,u)$ é solução do problema $(P.C)$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} \|\sigma(t,u) - u\| & = & \|\displaystyle\int_0^t f(\sigma(\tau,u))d\tau\| \\ & \leq & \displaystyle\int_0^t \|f(\sigma(\tau,u))\|d\tau \\ & \leq & \displaystyle\int_0^t \frac{\delta}{8\epsilon}d\tau. \end{array}$$

Portanto,

$$\|\sigma(t,u) - u\| \leq \frac{\delta}{8\epsilon}t. \tag{1.4}$$

Temos também, pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dt}(\sigma(t,u)) = \langle \varphi'(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u)\rangle.$$

Como $\sigma(t,u)$ é solução do problema $(P.C)$, segue que

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) & = & \langle \varphi'(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u))\rangle \\ & = & \langle \varphi'(\sigma(t,u)), -\psi(\sigma(t,u))\dfrac{g(\sigma(t,u))}{\|g(\sigma(t,u))\|^2}\rangle \\ & = & \dfrac{-\psi(\sigma(t,u))}{\|g(\sigma(t,u))\|^2}\langle \varphi'(\sigma(t,u)), g(\sigma(t,u))\rangle. \end{array}$$

Da definição de campo vetorial pseudogradiente, obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) \leq \frac{-\psi(\sigma(t,u))}{4\|\varphi'(\sigma(t,u))\|^2}\|\varphi'(\sigma(t,u))\|^2 = \frac{-\psi(\sigma(t,u))}{4}. \tag{1.5}$$

Verificação de (i): Dado $u \in x \setminus A$, defina

$$\hat{\sigma}(t,u) = u, \ \forall t \in [0,1].$$

Observe que,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\sigma}(t,u) &= 0 = f(\hat{\sigma}(t,u)) \\ \hat{\sigma}(0,u) &= u \end{cases}$$

Uma vez que o problema $(P.C)$ tem uma única solução, concluímos que

$$\sigma(t,u) = \hat{\sigma}(t,u) = u, \ \forall u \in X \setminus A.$$

Portanto,

$$\eta(t,u) = \sigma(8\epsilon t, u) = u, \text{ se } t = 0 \text{ ou se } u \in X \setminus A.$$

Verificação de (iv): De (1.4) segue que

$$\|\eta(t,u) - u\| = \|\sigma(8\epsilon t, u) - u\| \leq \frac{\delta}{8\epsilon} 8\epsilon t = \delta t \leq \delta.$$

Verificação de (v): De (1.5),concluímos que $\varphi(\sigma(\cdot,u))$ é não-crescente, para todo $u \in X$.

Verificação de (ii): Dado $u \in \varphi^{c+\epsilon} \cap S$. Se existir $t \in [0, 8\epsilon]$ tal que

$$\varphi(\sigma(t,u)) < c - \epsilon.$$

Então,do item (v), temos

$$\varphi(\eta(1,u)) = \varphi(\sigma(8\epsilon, u)) \leq q\varphi(\sigma(t,u)) < c - \epsilon.$$

Por outro lado, se

$$\sigma(t,u) \in \varphi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]), \ \forall t \in [0, 8\epsilon],$$

então, $\sigma(t,u) \in B$, pois por (1.4)

$$\|\sigma(t,u) - u\| < \frac{\delta}{8\epsilon} t < \delta,$$

ou seja, $\sigma(t,u) \in S_\delta$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\varphi(\sigma(8\epsilon, u)) - \varphi(\sigma(0,u)) = \int_0^{8\epsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u))dt.$$

Por (1.5), segue que

$$\varphi(\sigma(8\epsilon, u)) \leq \varphi(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\epsilon} \psi(\sigma(t,u))dt,$$

daí e pela definição de ψ, obtemos

$$\varphi(\sigma(8\epsilon, u)) \leq \varphi(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\epsilon} dt,$$

logo

$$\varphi(\sigma(8\epsilon, u)) \leq c + \epsilon - 2\epsilon = c - \epsilon = c - \epsilon.$$

Portanto,

$$\varphi(\eta(1, u)) \leq c - \epsilon.$$

Verificação de (iii): Primeiro, observemos que

$$\sigma(t, \sigma(s, u)) = \sigma(t + s, u).$$

Ora, tanto $\sigma(t, \sigma(s, u))$, quanto $\sigma(t + s, u)$ são soluções do problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t, u) &= f(\sigma(t, u)) \\ \sigma(0, u) &= \sigma(s, u). \end{cases}$$

Então, pela unicidade da solução, segue que

$$\sigma(t, \sigma(s, u)) = \sigma(t + s, u).$$

Agora, defina

$$\begin{aligned} \xi : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto \xi(u) = \sigma(8\epsilon t, u). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto \gamma(u) = \sigma(-8\epsilon t, u). \end{aligned}$$

Note que,

$$(\xi \circ \gamma)(u) = \xi(\sigma(-8\epsilon t, u)) = \sigma(8\epsilon t, \sigma(-8\epsilon t, u)),$$

Como $\sigma(t, \sigma(s, u)) = \sigma(t + s, u)$, temos

$$(\xi \circ \gamma)(u) = \xi(\sigma(-8\epsilon t, u)) = \sigma(8\epsilon - 8\epsilon, u) = \sigma(0, u) = u.$$

Analogamente,

$$(\gamma \circ \xi)(u) = u.$$

Como ξ e γ são funções contínuas, concluímos que $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo, para todo $t \in [0, 1]$.

Verificação de (vi): Dado $u \in \varphi^c \cap S_\delta$, temos

$$\varphi(\eta(0,u)) = \varphi(u) \leq c.$$

Se $\varphi(u) < c$, segue do fato de $\varphi(\eta(\cdot,u))$ ser não-crescente que

$$\varphi(\eta(t,u)) < c, \ \forall t \in [0,1].$$

Por outro lado, se $\varphi(u) = c$,uma vez que estamos supondo $u \in S_\delta$, temos $u \in B$. Por (1.5) e da definição de ψ, temos

$$\frac{d}{dt}\varphi(u) \leq \frac{-\psi(u)}{4} = \frac{-1}{4} < 0.$$

Como $\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(\cdot,u))$ é contínua, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(\tau,u)) < 0, \ \forall \tau \in (0,\epsilon_0).$$

Então

$$\varphi(\sigma(\tau,u)) < \varphi(\sigma(0,u)) = \varphi(u) = c.$$

Uma vez que, $\varphi(\sigma(\cdot,u))$ é não-crescente para todo $t \in [0,1]$, obtemos

$$\varphi(\sigma(t,u)) \leq \varphi(\sigma(\tau,u)) < c, \ \forall t \in [\epsilon_0, 1].$$

Portanto,

$$\varphi(\sigma(t,u)) < c, \ \forall t \in (0,1].$$

■

1.2 Teoremas de Minimax

Nesta seção estudaremos o principio geral de Minimax e faremos algumas aplicações, entre elas demonstraremos os Teoremas do Passo da Montanha do Linking.

Teorema 1.3 *Sejam X um espaço de Banach, M_0 um subespaço fechado de um espaço métrico M e $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Defina*

$$\Gamma = \{\gamma \in C(M,X); \ \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Se $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfaz*

$$+\infty > c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u)) \tag{1.6}$$

então, para todo $\epsilon \in (0, (c-a)/2), \delta > 0$ *e* $\gamma \in \Gamma$ *tal que*

$$\sup_M (\varphi \circ \gamma) \leq c + \epsilon, \tag{1.7}$$

existe $u \in X$ *tal que*

a) $c - 2\epsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\epsilon$

b) $dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$

c) $\|\varphi'(u)\| \leq \frac{8\epsilon}{\delta}$.

Demonstração. Suponhamos que a tese é falsa. Assim as hipótese do Lema 1.2 são satisfeitas para $S = \gamma(M)$. Por hipótese, temos

$$\epsilon \in (0, (c-a)/2),$$

então

$$c - 2\epsilon > a. \tag{1.8}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \beta : M &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto \beta(u) = \eta(1, \gamma(u)). \end{aligned}$$

Para todo $u \in M_0$, e para cada $\gamma_0 \in \Gamma_0$, temos por (1.6) que

$$\varphi(\gamma_0(u)) < a$$

da desigualdade (1.8), segue que

$$\gamma_0(u) \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}.$$

Pelo item (i) do Lema de Deformação, temos

$$\beta(u) = \eta(1, \gamma_0(u)) = \gamma_0(u),$$

logo $\beta \in \Gamma$. Segue de (1.7) que

$$\gamma(u) \in \varphi^{c+\epsilon}, \ \forall u \in M.$$

Pelo item (ii) do Lema de Deformação, temos

$$\varphi(\beta(u)) = \varphi(\eta(1, \gamma(u))) \leq c - \epsilon, \ \forall u \in M,$$

logo

$$\sup_{u \in M} \varphi(\beta(u)) \leq c - \epsilon,$$

o que contradiz a definição de c.

■

Teorema 1.4 *Sob as hipóteses do último Teorema, existe uma seqüência $(u_n) \subset X$ satisfazendo*

$$\varphi(u_n) \to c, \ \varphi'(u_n) \to 0.$$

Em particular, se satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico de φ.

Demonstração. Pelo Teorema anterior, para cada $\epsilon \in (0, (c-a)/2)$ existe $u \in X$ tal que

$$c - 2\epsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\epsilon$$

e

$$\|\varphi'(u)\| \leq 8\epsilon/\delta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $\epsilon = (c-a)/2n$. Então, existe $u_n \in X$ tal que

$$c - (c-a)/n \leq \varphi(u_n) \leq c + (c-a)/n$$

e

$$\|\varphi'(u_n)\| \leq 8(c-a)/n\delta.$$

Assim, quando $n \to +\infty$, temos

$$c \leq \lim_{n \to +\infty} \varphi(u_n) \leq c$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} \|\varphi'(u_n)\| \leq 0.$$

Portanto,

$$\varphi(u_n) \to c \text{ e } \varphi'(u_n) \to 0.$$

■

Teorema 1.5 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$, $e \in X$ e $r > 0$ são tais que $\|e\| > r$ e*

$$b := \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e).$$

Se φ satisfaz a condição $(PS)_c$ com

$$\begin{aligned} c &:= \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)), \\ \Gamma &:= \{\gamma \in C([0,1],X);\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}, \end{aligned}$$

então c é um valor crítico de φ.

Demonstração. È suficiente aplicarmos o Teorema anterior com $M = [0,1]$, $M_0 = \{0,1\}$, $\Gamma_0 = \{\gamma_0\}$, $\gamma_0(0) = 0$ e $\gamma_0(1) = e$.

■

Teorema 1.6 (Teorma do Ponto de Sela) *Seja $X = Y \oplus Z$ um espaço de Banach com $dim Y < +\infty$. Defina, para $\rho > 0$,*

$$\begin{aligned} M &= \{u \in Y;\ \|u\| \leq \rho\} \\ M_0 &= \{u \in Y;\ \|u\| = \rho\}. \end{aligned}$$

Seja $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ tal que

$$b := \inf_Z \varphi > a := \max_{M_0} \varphi.$$

Se φ satisfaz a condição $(PS)_c$, com

$$\begin{aligned} c &:= \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in M} \varphi(\gamma(u)) \\ \Gamma &:= \{\gamma \in C(M,X);\ \gamma|_{M_0} = id\}, \end{aligned}$$

então c é um valor crítico de φ.

Demonstração. Para aplicarmos o Teorema 1.4 devemos verificar que $c \geq b$. Para tanto, mostraremos que para cada $\gamma \in \Gamma$,

$$\gamma(M) \cap Z \neq \emptyset.$$

Logo, existe $u \in \gamma(M) \cap Z$, tal que

$$\max_M(\varphi \circ \gamma) \geq \varphi(\gamma(v)) = \gamma(u) \geq \inf_Z \varphi, \ \forall \gamma \in \Gamma.$$

Portanto,

$$c \geq b.$$

Denotemos por P a projeção de X sobre Y tal que $P_Z = \{0\}$. Se $\gamma(M) \cap Z = \emptyset$, então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} R : M & \longrightarrow & M_0 \\ u & \longmapsto & R(u) = \rho \dfrac{P\gamma(u)}{\|P\gamma(u)\|}, \end{array}$$

é uma retração de M sobre M_0.

De fato, como $\gamma(u) \notin Z$, temos $P\gamma(u) \neq 0$, $\forall u \in M$ e portanto, a aplicação R está bem definida. Além disso, para $u \in M_0$ segue que

$$\begin{aligned} R(u) &= \rho \frac{P\gamma(u)}{\|P\gamma(u)\|} \\ &= \rho \frac{P(u)}{\|P(u)\|} \\ &= \rho \frac{u}{\|u\|} = u. \end{aligned}$$

Pelo Propriedade da não-contração da bola unitária (Propriedade (C_{10}) do Apêndice A) segue que R não pode ser uma retração de M em M_0. Portanto,

$$\gamma(M) \cap Z \neq \emptyset.$$

■

Agora, demonstraremos o Teorema do Linking, para tanto consideramos $X = Y \oplus Z$, com $dim Y < +\infty$. No Capítulo 3 mostraremos uma generalização desse Teorema, onde não faremos restrições a dimensão de Y.

Definição 1.7 *Seja S um subconjunto fechado de um espaço de Banach, Q uma subvariedade de V com froteira ∂Q. Dizemos que exite um linking entre S e ∂Q quando*

1) $S \cap \partial Q = \emptyset$

2) *Para qualquer* $h \in C(V, V)$ *tal que* $h|_{\partial Q} = id$, *temos* $h(Q) \cap S \neq \emptyset$.

Teorema 1.8 *Seja* $X = Y \oplus Z$ *um espaço de Banach com* $dim Y < +\infty$. *Sejam* $\rho > r > 0$ *e* $z \in Z$ *tal que* $\|z\| = 1$. *Defina*

$$\begin{aligned}
M &:= \{u = y + \lambda z;\ \|u\| \leq \rho,\ \lambda \geq 0,\ y \in Y\} \\
M_0 &:= \{u = y + \lambda z;\ y \in Y, \|u\| = \rho \ e\ \lambda \geq 0 \ ou\ \|u\| \leq \rho \ e\ \lambda = 0\} \\
N &:= \{u \in Z;\ \|u\| = r\}.
\end{aligned}$$

Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *tal que*

$$b := \inf_N \varphi > a := \max_{M_0} \varphi.$$

Se φ *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *com*

$$\begin{aligned}
c &:= \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) \\
\Gamma &:= \{\gamma \in C(M, X);\ \gamma|_{M_0} = id\},
\end{aligned}$$

então c *é um valor crítico para* φ.

Demonstração. Para aplicarmos o Teorema 1.4 devemos provar que $c \geq b$. Denotemos por P a projeção de X sobre Y. Note que, para $\gamma \in \Gamma$,

$$\gamma(M) \cap N \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists u \in M \text{ tal que } P\gamma(u) = 0 \text{ e } \|(id - P)\gamma(u)\| = r. \tag{1.9}$$

Defina

$$\begin{aligned}
\phi : [0, \rho] \times \overline{B}_\rho \cap Y &\longrightarrow Y \oplus \mathbb{R}z \\
(\lambda, y) &\mapsto \phi(\lambda, y) = P\gamma(y + \lambda z) + \|(id - P)\gamma(y + \lambda z)\| z.
\end{aligned}$$

Por hipótese, $\gamma|_{M_0} = id$. Então, se $u = y + \lambda z \in M_0$, temos

$$(id - P)\gamma(y + \lambda z) = (id - P)(y + \lambda z) = \lambda z.$$

Assim,

$$\phi(\lambda, y) = y + \lambda z,$$

ou seja, $\phi|_{M_0} = id$.

Em particular, $rz \notin \phi(M_0)$, pois $rz \in int(M)$. Desta forma faz sentido falarmos no grau de Brouwer para a aplicação ϕ em rz cor relação a M. Das propriedades (C_8) e (C_1) do Apêndice A, temos

$$d(\phi, M, rz) = d(id, M, rz) = 1.$$

Da propriedade (C_2), existe $u \in M$ tal que

$$\phi(u) = rz.$$

Desta forma, mostramos que existe $u \in M$ tal que

$$\begin{aligned} P\gamma(u) &= 0 \\ \|(id - P)\gamma(u)\| &= r, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\gamma(M) \cap N \neq \emptyset.$$

Então, existe $v \in N$ tal que

$$\max_M(\varphi \circ \gamma) \geq \varphi(\gamma(v)) = \varphi(u) \geq \inf_N \varphi,$$

portanto

$$c \geq b.$$

■

Capítulo 2

O Caso Escalar

Neste Capítulo estudaremos dois problemas de Dirichlet, o primeiro com o termo não-linear apresentando crescimento subcrítico e o segundo com o termo não-linear apresentando crescimento crítico. Este esgundo problema corresponde ao caso escalar do problema $(**)$ que estudaremos no Capítulo 4. Nossa referência principal para o desenvolvimento desse capítulo foi [15]

2.1 Funções Diferenciáveis

Nesta seção recordaremos algumas noções de Diferenciabilidade.

Definição 2.1 *Seja $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. O funcional φ tem uma derivada a Gateaux $f \in X'$ em $u \in U$ quando, para todo $h \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + th) - \varphi(u) - \langle f, th \rangle] = 0.$$

A derivada a Gateaux em u é denotada por $\varphi'(u)$.

Proposição 2.2 *Se φ tem uma derivada a Gateaux contínua em U, então $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Dado $h \in X$ segue do Teorema do Valor Médio que existe $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$\varphi(u + h) - \varphi(u) = \langle \varphi'(u + \theta h), h \rangle.$$

Definindo,

$$r(h) = \varphi(u+h) - \varphi(u) - \langle \varphi'(u), h\rangle.$$

Então

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \langle \varphi'(u-\theta h) - \varphi'(u), \frac{h}{\|h\|}\rangle.$$

Ora,

$$\left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| \leq \|\varphi'(u-\theta h) - \varphi'(u)\| \left\| \frac{h}{\|h\|} \right\| \leq \|\varphi'(u-\theta h) - \varphi'(u)\|.$$

Assim, a continuidade da derivada a Gateaux implica $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$, logo φ é diferenciável em U e como suas derivadas são contínuas, temos $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.

■

Proposição 2.3 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja $2 < p < +\infty$. O funcional*

$$\phi(u) = \int_\Omega |u|^p$$

é de classe $C^2(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle \phi'(u), h\rangle = p\int_\Omega |u|^{p-2}uh.$$

Demonstração. Existência da Derivada de Gateaux. Sejam $u, h \in L^p(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$ e definindo

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto G(s) = |s|^p. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$|G(u(x)+th(x)) - G(x)| = |G'(u(x)+\lambda th(x))||(u(x)+th(x)) - u(x)|,$$

ou seja,

$$||u(x)+th(x)|^p - |u(x)|^p|/|t| = p|u(x)+\lambda th(x)|^{p-1}|h(x)|,$$

ou ainda,

$$||u(x)+th(x)|^p - |u(x)|^p|/|t| \leq p[|u(x)| + |h(x)|]^{p-1}|h(x)|.$$

A Desigualdade de Hölder implica que

$$[|u(x)| + |h(x)|]^{p-1}|h(x)| \in L^1(\Omega).$$

Além disso,

$$[|u(x)+th(x)|^p-|u(x)|^p]/|t| \to p|u(x)|^{p-2}u(x)h(x), \text{ quando } t \to 0.$$

Logo, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\langle \phi'(u),h\rangle = p\int_\Omega |u|^{p-2}uh\,dx.$$

Continuidade da Derivada a Gateaux. Definamos $f(u)=p|u|^{p-2}u$. Suponha que $u_n \to u$ em L^p. O Teorema C.1 ou C.3 implica que $f(u_n)\to f(u)$ em L^q, onde $q=p/(p-1)$. Nós obtemos, pela desigualdade de Hölder,

$$|\langle \phi'(u_n)-\phi'(u),h\rangle| \le \|f(u_n)-f(u)\|_q\|h\|_p,$$

e então

$$\|\phi'(u_n)-\phi'(u)\| \le \|f(u_n)-f(u)\|_q \to 0, \text{ quando } n\to\infty.$$

Existência da Segunda Derivada a Gateaux. Sejam $u,h,v \in L^p(\Omega)$. Dados $x\in\Omega$ e $0<|t|<1$ e definindo

$$\begin{aligned} H:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto H(s)=f(s)|v(x)|. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda\in(0,1)$ tal que

$$|H(u(x)+th(x))-H(u(x))| = |H'(u(x)+\lambda th(x))||(u(x)+th(x))-u(x)|,$$

ou seja,

$$|[f(u(x)+th(x))-f(u(x))]v(x)|/|t| = p(p-1)|u(x)+\lambda th(x)|^{p-2}|h(x)||v(x)|,$$

ou ainda

$$|[f(u(x)+th(x))-f(u(x))]v(x)|/|t| \le p(p-1)[|u(x)|+|h(x)|]^{p-2}|h(x)||v(x)|.$$

Note que

$$[|u(x)|+|h(x)|]^{p-2}|h(x)||v(x)| = \frac{[|u(x)|+|h(x)|]^{p-1}}{[|u(x)|+|h(x)|]}|h(x)||v(x)|,$$

como $[|u(x)|+|h(x)|]\ge|h(x)|$, temos

$$[|u(x)|+|h(x)|]^{p-2}|h(x)||v(x)| \le [|u(x)|+|h(x)|]^{p-1}|v(x)| \in L^1(\Omega).$$

Além disso,

$$[f(u(x)+th(x))-f(u(x))]v(x)/|t| \to p.(p-1)|u(x)|^{p-2}h(x)v(x), \text{ quando } t \to 0.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\langle \phi"(u)h, v\rangle = p(p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}hvdx.$$

Continuidade da Segunda Derivada a Gateaux. Definamos $g(u) = p(p-1)|u|^{p-2}$. Suponha que $u_n \to u$ em L^p. O Teorema C.1 ou C.3 implicam que $g(u_n) \to g(u)$ em L^r, onde $r = p/(p-2)$. Da Desigualdade de Hölder, obtemos

$$|\langle(\phi"(u_n)-\phi"(u))h, v\rangle| \leq \|g(u_n)-g(u)\|_r\|h\|_p\|v\|_p,$$

portanto,

$$\|\phi"(u_n)-\phi"(u)\| \leq \|g(u_n)-g(u)\|_r \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

■

Corolário 2.4 *Seja* $2 < p < +\infty$ *se* $N = 1, 2$ *e* $2 < p \leq 2^*$ *se* $N \geq 3$. *O funcional* $\phi \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. Este resultado segue imediatamente da Imersão de Sobolev,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \begin{cases} 2 < p < +\infty \text{ se } N = 1, 2 \\ 2 < p \leq 2^* \text{ se } N \geq 3. \end{cases}$$

■

2.2 Problema de Dirichlet Semilinear

Nesta seção consideraremos o problema

$$(P_1) \begin{cases} - & \Delta u + \lambda u + |u|^{p-2}u, \\ u & \geq 0, \ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio de $\mathbb{R}^N$. Nosso resultado principal é o seguinte:

Teorema 2.5 *Suponha que* $|\Omega| < +\infty$ *e* $2 < p < 2^*$. *Então o problema* (P_1) *tem uma solução não-trivial se, e somente se,* $\lambda > \lambda_1(\Omega)$.

Observação 2.1 *Uma solução não-trivial de* (P_1) *é uma função* $u \in H_0^1(\Omega)$*, com* $u \geq 0$ *e*

$$-\int_\Omega \Delta uvdx = \int_\Omega [u^{p-1} - \lambda u]vdx, \ \forall v \in H_0^1.$$

Observação 2.2 *A constante* $\lambda_1(\Omega)$ *é o primeiro auto-valor de* $-\Delta$ *em* $H_0^1(\Omega)$*.*

Demonstração. Suponha que u é uma solução não-trivial de (P_1). Seja e_1 uma auto-função positiva de $-\Delta$ associada a $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$. Então

$$\lambda \int_\Omega ue_1 dx = \int_\Omega (u^{p-1} + \Delta u)e_1 dx \geq \int_\Omega \Delta ue_1 dx = -\lambda_1 \int_\Omega ue_1 dx.$$

Portanto,

$$\lambda > -\lambda_1.$$

Reciprocamente, suponha que $\lambda > -\lambda_1$. Considere $c_1 := 1 + \min\{0, \lambda/\lambda_1\} > 0$, então pela Desigualdade de Poicaré

$$\|\nabla u\|_2^2 + \lambda\|u\|_2^2 \geq c_1\|\nabla u\|_2^2. \tag{2.1}$$

Em $H_0^1(\Omega)$, consideremos a norma

$$\|u\| := \sqrt{\|\nabla u\|_2^2 + \lambda\|u\|_2^2}.$$

De (2.1) segue que esta norma é equivalente a norma usual de $H_0^1(\Omega)$.

Pelo Coroláro 2.4, o funcional

$$\varphi(u) = \int_\Omega [\frac{|u|^2}{2} + \lambda\frac{u^2}{2} - \frac{(u^+)^p}{p}]dx$$

é de classe $C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. No que segue verificaremos que as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha são satisfeitas . A condição $(PS)_c$ seguirá do próximo lema. Pelo Teorema de Imersão de Sobolev, existe $c_2 > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq c_2\|u\|,$$

então,

$$\varphi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\|u\|_p^p \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{c_2^p}{p}\|u\|^p.$$

e portanto, existe $r > 0$ tal que

$$b := \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > 0 = \varphi(0).$$

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u > 0$ em Ω. Nós temos, para $t \geq 0$,

$$\varphi(tu) = \frac{t^2}{2}(\|\nabla u\|_2^2 + \lambda\|u\|_2^2) - \frac{t^p}{p}\|u\|_p^p.$$

Como $p > 2$, existe $t_0 > 0$ tal que $e = tu$, $\|e\| > r$ e $\varphi(e) \leq 0$.

Desta forma, segue do Teorema do Passo da Motanha que φ tem um valor crítico, e portanto o problema

$$\begin{aligned} - & \quad \Delta u + \lambda u = (u^+)^{p-1} \\ u & \quad \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

tem uma solução não-trivial. Multiplicando a equação por u^- e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx + \lambda \int_\Omega |u^-|^2 dx = 0,$$

isto é,

$$\|u^-\|^2 = 0.$$

Portanto,

$$u^- = 0.$$

Assim, concluímos que u é solução de (P_1).

■

Lema 2.1 *Seja $2 < p < 2^*$, se $\lambda > -\lambda_1$ qualquer seqüência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$d := \sup_n \varphi(u_n) < +\infty, \ \ \varphi'(u_n) \to 0$$

contém uma subseqüência convergente.

Demonstração. Para n grande, temos

$$\|\varphi'(u_n)\| < 2\epsilon.$$

Note que,

$$\|\varphi'(u_n)\| = \sup_{\|v\|=1} |\langle \varphi'(u_n), v\rangle| \geq \frac{|\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle|}{\|u_n\|},$$

logo,

$$|\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle| < 2\epsilon\|u_n\|.$$

Então,

$$\begin{aligned} d+\frac{2\epsilon}{p}\|u_n\| &\geq \varphi(u_n)+\frac{1}{p}|\langle\varphi'(u_n),u_n\rangle| \\ &\geq \varphi(u_n)-\frac{1}{p}\langle\varphi'(u_n),u_n\rangle \\ &\geq (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(\|\nabla u_n\|_2^2+\lambda\|u_n\|_2^2) \\ &\geq (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Daí, segue que $\|u_n\|$ é limitado.

Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, passando a uma subseqüência se necessário, temos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Devido a imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $2<p<2^*$, temos

$$u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Pelo Teorema C.3 temos

$$|u_n|^{p-1} \to |u|^{p-1} \text{ em } L^q(\Omega),$$

onde $q=\frac{p}{p-1}$.

Observe que

$$\|u_n-u\|^2=\langle\varphi'(u_n)-\varphi'(u),u_n-u\rangle+\int_\Omega[|u_n|^{p-1}-|u|^{p-1}](u_n-v_n)dx$$

Como

$$\langle\varphi'(u_n)-\varphi'(u),u_n-u\rangle\to 0,$$

pois

$$\langle\varphi'(u_n)-\varphi'(u),u_n-u\rangle=\langle\varphi'(u_n),u_n\rangle-\langle\varphi'(u_n),u\rangle-\langle\varphi'(u),u_n\rangle+\langle\varphi'(u),u\rangle.$$

Por hipótese, temos

$$\langle\varphi'(u_n),u_n\rangle,\langle\varphi'(u_n),u\rangle\to 0$$

e como

$$u_n \rightharpoonup u,$$

obtemos

$$\langle\varphi'(u),u_n\rangle\to\langle\varphi'(u),u\rangle.$$

Por outro lado, temos pela Desigualdade de Hölder que

$$|\int_\Omega [|u_n|^{p-1} - |u|^{p-1}](u_n - v_n)dx| \leq \||u_n|^{p-1} - |u|^{p-1}\|_q \|u_n - v_n\|_p \to 0.$$

Desta forma, concluímos que

$$\|u_n - u\| \to 0.$$

■

2.3 Não-Linearidade Crítica

Esta seção será devotada ao estuod do problema

$$(P_2) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u \\ u \geq 0, \ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $\lambda \geq -\lambda_1$. Do Corolário 2.4, segue que o funcional

$$\varphi(u) := \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{\lambda u^2}{2} - \frac{(u^+)^{2^*}}{2^*} \right] dx$$

é de classe $C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso, consideraremos em $H_0^1(\Omega)$ a norma definida por

$$\|u\| = \sqrt{\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2}.$$

No que segue consideremos

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}.$$

Lema 2.2 *Qualquer seqüência* $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$d := \sup_n \varphi(u_n) < c^* = \frac{S^{N/2}}{N}, \ \varphi'(u_n) \to 0,$$

contém uma subseqüência convergente.

Demonstração. Como já vimos na demonstração do Lema 2.1, $(\|u_n\|)$ é limitada. Passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

$$u_n \to u, \text{ em } L^2(\Omega)$$

$$u_n(x) \to u(x) \ q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Devido a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, temos (u_n) limitada em $L^{2^*}(\Omega)$, e sendo

$$\int_\Omega [|(u_n^+)^{2^*-1}|]^{2N/N+2} dx = \int_\Omega |u_n|^{2^*},$$

concluímos que $((u_n^+)^{2^*-1})$ é limitada em $L^{2N/N+2}(\Omega)$, então, a menos de uma subseqüência temos

$$(u_n^+)^{2^*-1} \rightharpoonup (u^+)^{2^*-1} \text{ em } L^{2N/N+2}(\Omega).$$

Observe que,

$$\langle \varphi'(u_n), v\rangle = \int_\Omega [\nabla u_n \nabla v + \lambda u_n v - (u_n^+)^{2^*-1} v] dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

segue do Teorema da Representação de Riesz que,

$$(u_n, v) \to (u, v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Isto é,

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla v dx. \tag{2.3}$$

Note que,

$$\int_\Omega u_n v dx \to \int_\Omega u v dx \tag{2.4}$$

pois,

$$|\int_\Omega u_n v dx - \int_\Omega u v dx| \le \int_\Omega |u_n - u||v| dx$$

pelo desigualdade de Hölder, temos

$$|\int_\Omega u_n v dx - \int_\Omega u v dx| \le \|u_n - u\|_2 \|v\|_2 \to 0.$$

Além disso, segue da definição de convergência fraca que

$$\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v dx \to \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v dx. \tag{2.5}$$

Uma vez que, supomos $\varphi'(u_n) \to 0$, segue de (2.2)-(2.5) que

$$\int_\Omega [\nabla u \nabla v + \lambda u v] dx = \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, se considerarmos $v = u$, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (u^+)^{2^*-1}udx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*}dx \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})\|u^+\|_{2^*}^{2^*} \geq 0 \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Agora, escrevamos

$$v_n = u_n - u,$$

como (u_n) é limitada em $L^{2^*}(\Omega)$ e $u_n(x) \to u(x)$ $q.t.p$ em Ω, temos pelo Teorema de Brézis-Lieb (Teorema C.4)

$$\frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}dx = \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*}dx + \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n^+)^{2^*}dx + o(1).$$

passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor $\varphi(u_n) \to c \leq d$. Veja que,

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &+ \frac{\|v_n\|^2}{2} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}dx = \\
&= \varphi(u) + \frac{1}{2}(\|u_n\|^2 - \|u\|^2 - o(1)) + \frac{1}{2^*}[-\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}dx + \int_\Omega (u^+)^{2^*}dx] + o(1) \\
&= \varphi(u_n) + \frac{o(1)}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(u) + \frac{\|v_n\|^2}{2} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}dx \to c \qquad (2.7)$$

Como $\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v_n\|^2 &- \int_\Omega (v_n^+)^{2^*}dx \\
&= \|u_n\|^2 - \|u\|^2 - o(1) - \int_\Omega (u_n^+)^{2^*}dx + \int_\Omega (u^+)^{2^*}dx + 2^*o(1) \\
&= \langle \varphi'(u_n), u_n\rangle - \langle \varphi'(u), u\rangle - (2^* - 1)o(1).
\end{aligned}$$

Então,

$$\|v_n\|^2 - \int_\Omega (v_n^+)^{2^*}dx \to \langle -\varphi'(u), u\rangle = 0$$

Portanto, podemos supor

$$\|v_n\|^2 \to b \text{ e } \int_\Omega (v_n^+)^{2^*}dx \to b.$$

Uma vez que, $v_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$, segue que

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \to b.$$

Da definição de S, temos

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \geq S\|v_n\|_{2^*}^2$$

e então,

$$b \geq Sb^{2/2^*},$$

logo, $b = 0$ ou $b \geq S^{N/2}$. Se b=0, acabou. Suponhamos então, $b \geq S^{N/2}$. De (2.6) e (2.7), obtemos

$$\frac{\|v_n\|^2}{2} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n^+)^{2^*}dx \leq \varphi(u) + \frac{\|v_n\|^2}{2} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n^+)^{2^*}dx.$$

Passando ao limite com $n \to +\infty$, temos

$$\frac{b}{2} - \frac{b}{2^*} \leq c.$$

Logo,

$$c^* = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})S^{N/2} \leq (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})b \leq c \leq d < c^*,$$

o que é absurdo. Portanto,

$$\|v_n\|^2 \to 0,$$

implicando que, a menos de uma subseqüência (u_n) é converge para u em $H_0^1(\Omega)$.

■

Teorema 2.6 (Brézis-Niremberg) *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 4$. Se $-\lambda_1 < \lambda < 0$, então o problema (P_2) tem uma solução não-trivial.*

Demonstração. É sulficiente aplicarmos o Teorema do Passo da Montanha para um valor $c < c^*$. Segue do próximo lema que existe $v \in H_0^1(\Omega)$, não-negativo e tal que

$$\|v\|^2/\|v\|_{2^*}^2 < S.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} 0 < \max_{t\geq 0}\varphi(tv) &= \max_{t\geq 0}\left(\frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega v^{2^*}dx\right) \\ &= \left(\|v\|^2/\|v\|_{2^*}^2\right)^{N/2}/N \\ &< S^{N/2}/N = c^*. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sendo,

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{1}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*}\\ &\leq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{1}{2^* S^{2^*/2}}\|\nabla u\|_2^{2^*}.\end{aligned}$$

considerando c_1 como no Teorema 2.5, temos

$$\varphi(u) \geq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{1}{c_1^{2^*} S^{2^*/2}}\|u\|^{2^*}.$$

Logo, existe $r > 0$ tal que

$$b := \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > 0 = \varphi(0).$$

Também, existe $t_0 > 0$ tal que $\|t_0 v\| > r$ e $\varphi(t_0 v) < 0$. Segue de (2.8) que

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(tt_0 v) < c^*.$$

Então, segue do Lema 2.2 e do Teorema do Passo da Montanha que φ tem um valor crítico $c \in [b, c^*)$. Logo, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = (u^+)^{2^*-1} \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

tem uma solução não-trivial u. Multiplicando a equação por u^- e integrando obtemos

$$u^- = 0,$$

portanto u é solução de (P_2).

■

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto U(x) = \frac{[N(N-2)]^{(N-2)/4}}{[1+|x|^2]^{(N-2)/2}} \end{aligned}$$

Está aplicação é tal que

$$\frac{\|\nabla U\|_2^2}{\|U\|_{2^*}^2} = S,$$

uma demonstração para isto pode ser vista em [15]. Note que, para $\lambda < 0$, temos

$$\frac{\|U\|^2}{\|U\|_{2^*}^2} = \frac{\|\nabla U\|_2^2 + \lambda\|U\|_2^2}{\|U\|_{2^*}^2} < \frac{\|\nabla U\|_2^2}{\|U\|_{2^*}^2} = S.$$

Mas, $U \notin H_0^1(\Omega)$, então é necessário "concentrar"U próximo de um ponto de Ω e depois mutiplicar pela função truncamento.

Lema 2.3 *Sob as hipóteses do Teorema 2.6, existe uma aplicação não-negativa* $v \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\|v\|^2/\|v\|_{2^*}^2 < S.$$

Demonstração. Suponhamos que $0 \in \Omega$. Considere $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função não-negativa tal que

$$\psi \equiv 1 \text{ em } B(0,\rho),$$

com $\rho > 0$.

Dado $\epsilon > 0$, defina

$$U_\epsilon(x) = \epsilon^{(2-N)/2} U(x/\epsilon)$$

e

$$u_\epsilon(x) = \psi(x) U_\epsilon(x).$$

Após alguns cálculos, obtemos

$$-\Delta U_\epsilon = (U_\epsilon)^{2^*-1},$$

Logo,

$$\|\nabla U_\epsilon\|_2^2 = \|U_\epsilon\|_{2^*}^{2^*}. \tag{2.9}$$

Por outro lado,

$$\frac{\|\nabla U_\epsilon\|_2^2}{\|U_\epsilon\|_{2^*}^2} = \frac{\epsilon^{2-N}\|\nabla U\|_2^2}{\epsilon^{2-N}\|U\|_{2^*}^2} = S. \tag{2.10}$$

De (2.9) e (2.10), obtemos

$$S^{N/2} = \|\nabla U_\epsilon\|_2^2 = \|U_\epsilon\|_{2^*}^{2^*}.$$

Para $\epsilon \to 0^+$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\epsilon|^2 dx + O(\epsilon^{N-2}) = S^{N/2} + O(\epsilon^{N-2}) \\
\int_\Omega |u_\epsilon|^{2^*} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\epsilon|^{2^*} dx + O(\epsilon^{N}) = S^{N/2} + O(\epsilon^{N}) \\
\int_\Omega |u_\epsilon|^2 dx &= \int_{B(0,\rho)} |U_\epsilon|^2 dx + O(\epsilon^{N-2}) \\
&\geq \int_{B(0,\epsilon)} \frac{[N(N-2)\epsilon^2]^{N-2/2}}{[2\epsilon^2]^{N-2}} dx \int_{\epsilon<|x|<\rho} \frac{[N(N-2)\epsilon^2]^{N-2/2}}{[2|x|^2]^{N-2}} dx + O(\epsilon^{N-2}) \\
&\geq \begin{cases} d\epsilon^2 |ln\epsilon| + O(\epsilon^2, \text{ se } N = 4) \\ d\epsilon^2 + O(\epsilon^{N-2}), \text{ se } N \geq 5, \end{cases}
\end{aligned}$$

onde d é uma constante positiva. se N=4, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\|u_\epsilon\|^2}{\|u_\epsilon\|_{2^*}^2} &\leq \frac{S^2+\lambda d\epsilon^2|ln\epsilon|+O(\epsilon^2)}{(S^2+O(\epsilon?))^{1/2}}\\ &< \frac{S^2+\lambda d\epsilon^2|ln\epsilon|+O(\epsilon^2)}{S}\\ &\leq S+\lambda d\epsilon^2|ln\epsilon|S^{-1}+O(\epsilon^2)<S,\end{aligned}$$

para ϵ suficientemente pequeno.

Analogamente, se $N \geq 5$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\|u_\epsilon\|^2}{\|u_\epsilon\|_{2^*}^2} &\leq \frac{S^{N/2}+\lambda d\epsilon^2+O(\epsilon^{N-2})}{(S^{N/2}+O(\epsilon^N))^{2/2^*}}\\ &\leq S+\lambda d\epsilon^2 S^{(2-N)/2}+O(\epsilon^{N-2})<S,\end{aligned}$$

para ϵ suficientemente pequeno.

■

Proposição 2.7 *Suponha que o problema* (P_2) *tem uma solução não-trivial, então* $\lambda > -\lambda_1$. *Além disso, se* Ω *é um domínio regular, limitado e estrelado, temos* $\lambda < 0$.

Demonstração. A primeira parte é análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 2.5. Agora, sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$, como na hipótese e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta u = au,$$

com $a = u^{2^*-2} - \lambda$. Observe que, $a \in L^{N/2}(\Omega)$, pois

$$\int_\Omega |a|^{N/2}dx = \int_\Omega |u^{2^*-2}-\lambda|^{N/2}dx \leq \ c\left(\int_\Omega |u|^{2^*} + \int_\Omega \lambda^{N/2}dx\right) < +\infty.$$

Pelo Teorema de Brézis-Kato (Teorema C.7), temos

$$u \in L^p(\Omega), \ \forall\, p \in [1,+\infty).$$

Logo,

$$au \in L^q(\Omega),$$

com $q = \frac{p}{2^*-1}$, onde $p > 2^*-1$. Do Teorema C.8 temos

$$u \in W^{2,q}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

e pela regularização Bootstrap, veja [1], obetmos

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Da Identidade de Pohozaev (Teorema B.1) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2(\sigma.\nu)d\sigma &= \int_\Omega [N(\frac{u^{2^*}}{2^*} - \frac{\lambda u^2}{2}) - \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2]dx \\
&= \int_\Omega [N(\frac{u^{2^*}}{2^*} - \frac{\lambda u^2}{2}) - \frac{N-2}{2}(u^{2^*} - \lambda u^2)]dx \\
&= -\lambda \int_\Omega u^2 dx.
\end{aligned}$$

Como Ω é estrelado sobre a origem, temos $\sigma.\nu > 0$ em $\partial\Omega$. Daí, segue que $\lambda \leq 0.$, Se $\lambda = 0$, então $\nabla u = 0$ em $\partial\Omega$ e obtemos pelo problema (P_2)

$$0 = -\int_\Omega \Delta u dx = \int_\Omega u^{2^*-1} dx,$$

e portanto $u = 0$.

■

Capítulo 3

Teorema de Linking Generalizado

Neste capítulo iremos generalizar o Teorema do Linking visto no Capítulo 1, aqui consideraremos $X = Y \oplus Z$, mas não faremos restrição alguma quanto a dimensão do espaço Y. Para realizarmos esta demonstração precisaremos fazer uso da Teoria do grau de Kryszewski e Szulkin, que estudaremos na próxima seção. A teoria desenvolvida neste capítulo tem por referência basicamente [8] e [15].

3.1 Teoria do Grau de Kryszewki e Szulkin

Seja $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência ortonormal total do espaço de Hilbert separável E e considere a aplicação $|||\cdot||| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$|||u||| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}|(u, e_k)|, \tag{3.1}$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno do espaço E. Note que,

$$|||u||| \leq ||u||, \forall u \in E. \tag{3.2}$$

Com efeito, pela Desigualdade de Schwarz temos

$$|(u, e_k)| \leq \|u\|\|e_k\| = \|u\|.1 = \|u\|.$$

Então,

$$|||u||| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}|(u, e_k)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\|u\|,$$

ou seja,

$$|||u||| \leq \|u\| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Como a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ converge para 1, concluímos que

$$|||u||| \leq \|u\|.$$

Desta desigualdade segue que, a aplicação $|||\,\cdot\,|||$ está bem definida. Pode-se provar também que a aplicação $|||\,\cdot\,|||$ define uma norma do espaço E.

No que segue, denotaremos a topologia gerada pela norma $|||\,\cdot\,|||$ pela letra grega σ e todas as referências a esta topologia serão feitas usando este símbolo.

Proposição 3.1 *Se (u_n) é uma seqüência limitada em E, então*

$$u_n \rightharpoonup u \Longleftrightarrow u_n \xrightarrow{\sigma} u.$$

Demonstração. Supondo que,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E,$$

temos

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle, \quad \forall f \in E'.$$

O Teorema da Representação de Riesz nos permite identificar E' com E, desta forma

$$(v, u_n) \to (v, u), \forall v \in E.$$

Em particular,

$$(u_n - u, e_k) \to 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Defina,

$$\begin{array}{rcl} f_k : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & f_k(n) = \dfrac{1}{2^k}|(u_n - u, e_k)|. \end{array}$$

Como,

$$u_n \rightharpoonup u,$$

existe $C > 0$ tal que

$$|||u_n - u||| < C.$$

Então,

$$|f_k(n)| = |\frac{1}{2^k}|(u_n - u, e_k)||,$$

daí,

$$|f_k(n)| \leq \frac{1}{2^k}\|u_n - u\|\|e_k\|,$$

e portanto,

$$|f_k(n)| \leq \frac{C}{2^k}.$$

Por sua vez,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C}{2^k} = C < +\infty.$$

Assim, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ é normalmente convergente. Então, pelo Teste de Weierstrass (C.10) e pelo Teorema C.11 , temos

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}|(u_n - u, e_k)| = 0,$$

pois, $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ converge uniformemente,e, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} f_k(n) = \lim_{n\to+\infty} |(u_n - u, e_k)| = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que $u_n \overset{\sigma}{\to} u$. Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em um espaço reflexivo E, existe uma subseqüência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup v \text{ em } E.$$

Pela primeira parte da demonstração, segue que

$$u_{n_j} \overset{\sigma}{\to} v$$

Ora, por hipótese $u_n \overset{\sigma}{\to} u$, então toda subseqüência de $\{u_n\}$ converge para u pela topologia σ. Em particular,

$$u_{n_j} \overset{\sigma}{\to} u.$$

Uma vez que, (E,σ) é um espaço de Hausdorff, concluímos que

$$u = v.$$

Como, para cada subseqüência $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$ podemos obter uma sub-subseqüência $\{u_{n_{j_k}}\}$ tal que

$$u_{n_{j_k}} \rightharpoonup u,$$

daí,

$$\langle f, u_{n_{j_k}}\rangle \to \langle f, u\rangle;\ \forall f \in E',$$

concluímos pela Proposição C.12, que

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle;\ \forall f \in E'$$

isto é,

$$u_n \rightharpoonup u.$$

■

Definição 3.2 *Seja U um conjunto aberto e limitado de E tal que $\overline{U}$ é σ-fechado. Dizemos que uma aplicação*

$$f : \overline{U} \longrightarrow E$$

é admssível quando:

a) $0 \notin f(\partial U)$;

b) *f é $\sigma -$ contínua;*

c) *cada ponto $u \in U$ tem uma $\sigma -$ vizinhança N_u tal que $(id - f)(N_u \cap U)$ está contido em um subespaço de dimensão finita do espaço E.*

Na demonstração do Teorema (3.5) mostraremos que para cada $v \in U$ fixado a aplicação

$$id - v : \overline{U} \longrightarrow E,$$

é admissível.

Agora, definiremos o grau para uma aplicação admissível.

Seja f uma aplicação admissível. Como $\{0\}$ é um conjunto σ-fechdo de E e f é σ-contínua, segue que, $f^{-1}(0)$ é um conjunto σ-fechado de $\overline{U}$. Dada uma seqüência

$(u_n) \subset f^{-1}(0) \subset \overline{U}$. Note que, (u_n) limitada, pois U é um conjunto limitado. Sendo E um espaço de Banach reflexivo, existe uma subseqüência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } E.$$

Da Proposição 3.1 temos,

$$u_{n_j} \xrightarrow{\sigma} u \text{ em } E.$$

Como $f^{-1}(0)$ é σ-fechado, obtemos

$$u \in f^{-1}(0).$$

Assim, temos $f^{-1}(0)$ σ-compacto em E.

Para cada $u \in f^{-1}(0)$, considere a σ-vizinhança de u,N_u, tal que $(id - f)(N_u \cap U)$ está contido em um subespaço de dimensão finita de E. Note que,

$$\bigcup_{u \in f^{-1}(0)} (N_u \cap U)$$

é uma cobertura $\sigma-$aberta para $f^{-1}(0)$. Da $\sigma-$compacidade de $f^{-1}(0)$ segue que, existem $u_1,\ u_2,\ ...,\ u_n \in f^{-1}(0)$ tais que

$$f^{-1}(0) \subset V = \bigcup_{m=1}^{n} (N_{u_m} \cap U).$$

O conjunto V é $\sigma-$aberto e exite um subespaço de dimensão finita F de E tal que

$$(id - f)(V) \subset F.$$

Observação 3.1 $F = (id - f)(N_{u_1} \cap U) \oplus (id - f)(N_{u_2} \cap U) \oplus ... \oplus (id - f)(N_{u_n} \cap U)$.

Definimos o grau da aplicação admissível f em 0 com relação a U por

$$deg(f, U, 0) = deg_B(f|_{V \cap F}, V \cap F, 0); \tag{3.3}$$

onde deg_B denota o grau de Brouwer.

Observação 3.2 *Denotando,*

$$\begin{aligned} d_1(u, v) &= \|u - v\| \\ e & \\ d_2(u, v) &= |||u - v|||. \end{aligned}$$

Da desigaldade (3.2) segue que d_1 refina d_2, pois

$$id : (E, d_1) \longrightarrow (E, d_2)$$

é contiínua. Logo todo conjunto $\sigma-$aberto (resp. $\sigma-$fechado) é aberto pela topologia usual(resp. fechado). Veja [11].

Proposição 3.3 *A definição do grau para uma aplicação admissível é consintente.*

Demonstração.

a) Primeiramente, mostraremos que o grau de brouwer da aplicação $f|_{V\cap F}$ em 0 está bem definido.

Defina,

$$\tilde{f} = f|_{V\cap F}.$$

Observe que,

$$\tilde{f}^{-1}(0) = f^{-1}(0) \subset V \cap F.$$

Já sabemos que $f^{-1}(0) \subset V$, falta mostrar que $f^{-1}(0) \subset F$. Ora, dado $u \in f^{-1}(0)$, então $u \in V$. Assim,

$$(id - f)(u) \in F$$

ou seja,

$$u - f(u) \in F.$$

Como $f(u) = 0$, concluímos que $u \in F$. Uma vez que, $f^{-1}(0)$ é compacto em F e $V \cap F$ é aberto em F, então

$$f^{-1}(0) \subset V \cap F = int_F(V \cap F)$$

o que implica

$$0 \notin f(\partial_F(V \cap F)).$$

Além disso, $\tilde{f}$ é contínua, pois sendo F um subespaço de dimensão finita, segue que a norma $|||\cdot|||$ é equivalente a norma usual. Logo,

$$u_n \to u \Rightarrow u_n \xrightarrow{\sigma} u \Rightarrow \tilde{f}(u_n) \xrightarrow{\sigma} \tilde{f}(u) \Rightarrow \tilde{f}(u_n) \to \tilde{f}(u).$$

Portanto, faz sentido falarmos em,

$$deg_B(f|_{V\cap F}, V \cap F, 0).$$

b) Agora nós mostraremos que a definição do grau para uma aplicação admissível independe da escolha do subespaço de dimensão finita. De fato, dado $G \subset E$ um subespaço de dimensão finita tal que

$$(id - f)(V) \subset G.$$

Definamos,

$$G_1 = F \oplus G.$$

Pela Propriedade da Contração (Teorema A.3)

$$deg_B(f|_{G_1 \cap V}, G_1 \cap V, 0) = deg_B(f|_{G \cap V}, G \cap V, 0). \tag{3.4}$$

Aplicando outra vez a Propriedade da contração

$$deg_B(f|_{G_1 \cap V}, G_1 \cap V, 0) = deg_B(f|_{F \cap V}, F \cap V, 0). \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5), segue que

$$deg_B(f|_{F \cap V}, F \cap V, 0) = deg_B(|f_{G \cap V}, G \cap V, 0),$$

ou seja, o grau independe da escolha do subespaço de dimensão finita.

c) Por fim mostraremos que a definição do grau para uma aplicação admissível independe da escolha da vizinhança $\sigma-$aberta. Com efeito, seja W uma outra vizinhança aberta contendo $f^{-1}(0)$ e tal que

$$(id - f)(W) \subset F.$$

Definindo

$$W_1 = W \cup V.$$

Pelo Teorema da Excisão (Propriedade (C_6) Apêndice A)

$$deg_B(f_{F \cap W_1}, F \cap W_1, 0) = deg_B(f_{F \cap W}, F \cap W, 0). \tag{3.6}$$

Ainda pelo Teorema da excisão

$$deg_B(f_{F \cap W_1}, F \cap W_1, 0) = deg_B(f_{F \cap V}, F \cap V, 0). \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7), segue que

$$deg_B(f_{F\cap W}, F\cap W, 0) = deg_B(f_{F\cap V}, F\cap V, 0).$$

Assim, concluímos que a definição do grau de uma aplicação admissível independe da escolha da vizinhança $\sigma-$aberta .

■

Definição 3.4 *Uma aplicação $h : [0,1]\times\overline{U} \longrightarrow E$ é uma homotopia admissível quando:*

a) $0 \notin h([0,1]\times \partial U)$;

b) *h é $\sigma -$ contínua;*

c) *a cada ponto $(t,u) \in [0,1]\times U$ está associado uma $\sigma-$vizinhança aberta $N_{(t,u)}$ e um subespaço $W \subset E$ tal que $dim W < \infty$ e*

$$\{v - h(s,v);\ (s,v) \in N_{(t,u)} \cap ([0,1]\times U)\} \subset W.$$

Teorema 3.5

a) *(Normalização) Se $v \in U$, então $deg(id - v, U, 0) = 1$.*

b) *(Existência) Se f é admissível e $deg(f, U, 0) \neq 0$ então $0 \in f(U)$.*

c) *(Invariância por Homotopia) Se h é uma homotopia admissível então $deg(h(t,\cdot), U, 0)$ é constante para todo $t \in [0,1]$.*

Demonstração.

a) Primeiramente devemos provar que dado $v \in U$, então a aplicação $id - v : \overline{U} \longrightarrow E$ é admissível. Vejamos

(i) Uma vez que,

$$(id - v)(u) = 0 \Longleftrightarrow u - v = 0 \Longleftrightarrow u = v,$$

e $v \in U$, concluímos que $0 \notin (id - v)(\partial U)$.

(ii) Dada uma seqüência $(u_n) \subset U$ tal que

$$u_n \xrightarrow{\sigma} u \text{ em } U,$$

então,

$$(id - v)(u_n) = u_n - v \xrightarrow{\sigma} u - v = (id - v)(u).$$

Portanto, f é $\sigma-$contínua.

(iii) Por fim, para cada ponto $u \in U$,

$$(id - (id - v))(u) = v.$$

Assim, para qualquer vizinhança N_u de u, temos

$$(id - (id - v))(N_u \cap U) = \{v\}.$$

Visto isso, podemos falar em $deg(id - v, U, 0)$, que por definição

$$deg(id - v, U, 0) = deg_B((id - v)|_{V \cap F}, V \cap F, 0).$$

Por propriedade do grau de Brouwer, temos

$$deg(id - v, U, 0) = deg_B(id|_{V \cap F}, V \cap F, v) = 1,$$

pois $v \in V \cap F$.

b) Por definição,

$$0 \neq deg(f, U, 0) = deg_B(f|_{V \cap F}, V \cap F, 0).$$

Da Propriedade da Existência para o grau de Brouwer segue que,

$$0 \in f(V \cap F) \subset f(U).$$

c) Uma vez que, $h(t, \cdot)^{-1}(0)$ é $\sigma-$compacto, a projeção K de $h(t, \cdot)^{-1}(0)$ em U também é $\sigma-$compacto. Então existe um subconjunto aberto W de $[0, 1] \times U$ tal que

$$[0, 1] \times K \subset W$$

e $\{u - h(t, u),\ (t, u) \in W\}$ está contido em um subespaço de dimensão finita F. Como K é compacto existe um subconjunto aberto $V \subset U$ tal que

$$[0, 1] \times K \subset [0, 1] \times V \subset W.$$

Daí, segue que

$$0 \notin h([0,1] \times \partial(V \cap F)).$$

Logo, $h|_{[0,1]\times(V\cap F)}$ é uma homotopia contínua. Por definição

$$deg(h(t,\cdot),U,0) = deg_B(h(t,\cdot)|_{V\cap F}, V\cap F, 0).$$

Portanto, a invariância por homotopia do grau de Brouwer implica

$$deg(h(t,\cdot),U,0) \equiv const., \forall\ t \in [0,1].$$

■

3.2 Campo Pseudogradiente

Sejam Y um subespaço separável de um espaço de Hilbert X e $Z = Y^{\perp}$. Denotaremos por $P_Y : X \longrightarrow Y$ e $P_Z : X \longrightarrow Z$ as projeções ortogonais de X em Y e em Z, respectivamente. Em X definimos a norma

$$|||u|||_0 = max(\|P_Z u\|, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}|(P_Y u, e_k)|); \tag{3.8}$$

onde (e_k) é uma seqüência ortonormal total em Y. A topologia gerada por $|||\cdot|||_0$ será denotada por τ e todas as referências feitas a esta topologia serão acompanhadas deste símbolo.

Note que,

$$\|P_Z u\| \le |||u|||_0 \le \|u\|.$$

A primeira destas desigualdades é evidente. Agora, pelo que mostramos na Seção 3.1

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}|(P_Y u, e_k)|) \le \|P_Y u\|.$$

Logo,

$$|||u|||_0 \le max(\|P_Z u\|, \|P_Y u\|) \le \|u\|.$$

Proposição 3.6 *Se $(u_n) \subset X$ é limitada, temos*

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \Longleftrightarrow P_Y u_n \rightharpoonup P_Y u \text{ e } P_Z u_n \to P_Z u. \tag{3.9}$$

Demonstração. A demonstração segue da Proposição 3.1.

Nossa hipótese básica é:

(A) $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é $\tau-$semicontínua superiormente $\nabla\varphi$ é fracamente sequencialmente contínua e existem $\alpha < \beta$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\|\varphi'(u)\| > \varepsilon, \ \forall u \in \varphi^{-1}([\alpha, \beta]). \tag{3.10}$$

Lema 3.1 *Sob a hipótese (A), existem uma $\tau-$vizinhança aberta V de φ^β e um campo vetorial $f : V \longrightarrow X$ satisfazendo:*

a) *f é localmente lipschitziana e $\tau-$localmente $\tau-$lipschitziana;*

b) *cada ponto $u \in V$ tem uma $\tau-$vizinhança V_u tal que $f(V_u)$ está contido em um subespaço de dimensão finita do espaço X;*

c) $m := \sup\limits_{u \in V} \|f(u)\| < +\infty$ *e* $(\nabla\varphi(u), f(u)) \geq 0, \ \forall u \in V$;

d) $(\nabla\varphi(u), f(u)) \geq 1, \ \forall u \in \varphi^{-1}([\alpha, \beta])$.

Demonstração. Inicialmente, definamos

$$\begin{aligned} g : \varphi^{-1}([\alpha, \beta]) &\longrightarrow X \\ v &\longmapsto g(v) = \frac{2 \ \nabla\varphi(v)}{\|\nabla\varphi(v)\|^2}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\nabla\varphi$ é fracamente sequencialmente contínuo, existe uma $\tau-$vizinhança aberta N_v de v tal que

$$(\nabla\varphi(u), g(v)) > 1, \ \forall u \in N_v. \tag{3.11}$$

Com efeito, definindo a função

$$\begin{aligned} \xi : N_v &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \xi(u) = (\nabla\varphi(u), g(v)). \end{aligned}$$

Observe que, ξ é $\tau-$contínua, pois dada uma seqüência $(u_n) \subset N_v$ tal que

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \Rightarrow P_Y u_n \rightharpoonup P_Y u \text{ e } P_Z u_n \to P_Z u,$$

ou seja,

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \Rightarrow u_n \rightharpoonup u.$$

Como $\nabla\varphi$ é fracamente sequencialmente contínua, concluímos que,

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \Rightarrow (\nabla\varphi(u), h) \to (\nabla\varphi(u), h),\ \forall h \in X.$$

Em particular,

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \Rightarrow \xi(u_n) \to \xi(u).$$

Uma vez que,

$$\xi(v) = (\nabla\varphi(v), g(v)) = \frac{2\ (\nabla\varphi(v), \nabla\varphi(v))}{\|\nabla\varphi(v)\|^2} = 2 > 1.$$

Segue da $\tau-$continuidade de ξ, que existe uma $\tau-$vizinhança aberta N_v de v tal que

$$(\nabla\varphi(u), g(v)) > 1,\ \forall u \in N_v.$$

Como, por hipótese, φ é $\tau-$semicontínua superiormente, segue que $\tilde{N} = \varphi^{-1}((-\infty, \alpha))$ é $\tau-$aberto. Então a família,

$$\mathcal{N}\ =\ \{N_v,\ \alpha \leq \varphi(v) \leq \beta\} \cup \{\tilde{N}\}$$

é uma cobertura $\tau-$aberta para φ^β. Sendo (φ^β, τ) um espaço métrico, o mesmo é paracompacto,veja [6], e portanto, existe uma cobertura $\tau-$aberta $\tau-$localmente finita

$$\mathcal{M} = \{M_i,\ i \in I\}$$

de φ^β que refina $\mathcal{N}$. Definimos então a $\tau-$vizinhança aberta de φ^β

$$V = \bigcup_{i \in I} M_i.$$

Considere $\{\lambda_i,\ i \in I\}$ uma partição da unidade $\tau-$lipschitziana em (φ^β, τ) subordinada a $\mathcal{M}$ e defina

$$\begin{array}{rcl} f : V & \longrightarrow & X \\ u & \longmapsto & f(u) = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i(u) w_i, \end{array}$$

onde w_i é definido da seguinte forma, se $M_i \subset N_{v_i}$, para algum $v_i \in \varphi^{-1}([\alpha, \beta])$ definimos $w_i = g(v_i)$, caso contrário $w_i = 0$.

Observação 3.3 *A existência desta partição da unidade para (φ^β, τ) é garantida pelo Teorema (C.13).*

Verificação de a): Como as funções $\lambda_i : V \longrightarrow \mathbb{R}$ são $\tau-$lipschitzianas para todo $i \in I$. Então, para cada $i \in I$ existe $L_i > 0$ tal que

$$|\lambda_i(u_1) - \lambda_i(u_2)| \leq L_i|||u_1 - u_2||| \leq L_i\|u_1 - u_2\|, \text{ com } u_1, u_2 \in V.$$

Da definição de partição da unidade segue que, para cada $u \in X$ fixado, existem uma $\tau-$vizinhança e uma quantidade finita de índices $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ tais que

$$V_u \cap supp(\lambda_i) \neq \emptyset \Longleftrightarrow i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}.$$

Logo, dados $u_1, u_2 \in V_u$, temos

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| = \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}(u_1)w_{i_k} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}(u_2)w_{i_k}\|,$$

ou ainda,

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| = \|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_{i_k}(u_1) - \lambda_{i_k}(u_2))w_{i_k}\|,$$

daí,

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_{i_k}(u_1) - \lambda_{i_k}(u_2))| \; \|w_{i_k}\|,$$

de onde,

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq \sum_{k=1}^{n} L_{i_k}|||u_1 - u_2||| \; \|w_{i_k}\|.$$

Portanto

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq C|||u_1 - u_2||| \leq C\|u_1 - u_2\|.$$

Isto é, f é $\tau-$localmente $\tau-$lipschitziana. Como V_u é uma $\tau-$vizinhança aberta, segue da Observação 3.2 que V_u é uma vizinhança aberta e portanto, f é localmente lipschitziana.

Verificação de b): Para cada $u \in V$ existe uma $\tau-$vizinhança V_u tal que o conjunto

$$I_u := \{i \in I; \; V_u \cap M_i \neq \emptyset\}$$

é finito, digamos $I_u = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$. Portanto, $f(V_u)$ é um subespaço de X gerado por no máximo n vetores.

Verificação de c): Note que,

$$\|w_{i_k}\| \leq \frac{2}{\epsilon}, \tag{3.12}$$

pois, se $M_{i_k} \subset N_{v_k}$, temos $v_k \in \varphi^{-1}([\alpha, \beta])$, logo

$$\|\nabla\varphi(v_k)\| \geq \varepsilon,$$

e portanto

$$\|w_{i_k}\| = \|g(v_k)\| = \frac{2}{\|\nabla\varphi(v_k)\|} \leq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Caso contrario,

$$\|w_{i_k}\| = 0$$

Então,

$$\|f(u)\| = \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}(u) w_{i_k}\|.$$

Assim,

$$\|f(u)\| \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}(u) \|w_{i_k}\|,$$

da equação (3.12) obtemos

$$\|f(u)\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\varepsilon} \lambda_{i_k}(u),$$

ou ainda,

$$\|f(u)\| \leq \frac{2}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}(u) = \frac{2}{\varepsilon}.$$

Portanto,

$$m := \sup_{u \in V} \|f(u)\| < +\infty.$$

Além disso, para todo $u \in V$, temos

$$(\nabla\varphi(u), f(u)) = (\nabla\varphi(u), \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}(u) w_{i_k}),$$

de onde segue,

$$(\nabla\varphi(u), f(u)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}(u) (\nabla\varphi(u), w_{i_k}).$$

Pela definição de w_{i_k} temos,

$$(\nabla\varphi(u), W_{i_k}) = \begin{cases} (\nabla\varphi(u), 0) = 0, & \text{se} \quad M_{i_k} \subset \tilde{N} \\ (\nabla\varphi(u), g(v_k)) \geq 0, & \text{se} \quad M_{i_k} \subset N_{v_k} \end{cases}$$

Portanto,

$$(\nabla\varphi(u), f(u)) \geq 0.$$

Verificação de d): Dado $u \in \varphi^{-1}([\alpha,\beta])$, como $\{\lambda_i, i \in I\}$ é uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{M}$, temos para cada $i \in I$

$$supp(\lambda_i) \subset M_i.$$

Da definição de partição da unidade segue que existe uma coleção finita de índices $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ tais que

$$u \in supp(\lambda_i) \Longleftrightarrow i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}.$$

Assim,

$$u \in supp(\lambda_{i_k}) \subset M_{i_k},\ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Além disso, para cada i_k deve existir um $v_k \in \varphi^{-1}([\alpha,\beta])$ tal que

$$M_{i_k} \subset N_{v_k}.$$

Caso contrário teriamos

$$M_{i_k} \subset \tilde{N}$$

e portanto,

$$u \notin M_{i_k},$$

o que é absurdo.

Desta forma,

$$u \in N_{v_k},\ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Daí segue que,

$$(\nabla\varphi(u), g(v_k)) > 1,\ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Logo,

$$(\nabla\varphi(u), f(u)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}(u)(\nabla\varphi(u), g(v_k)) > \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}(u) = 1.$$

$\blacksquare$

Lema 3.2 (Desigualdade de Gronwall) *Se $a, b \geq 0$ e $f \in C([0,T], \mathbb{R}^+)$ satifaz*

$$f(t) \leq a \ + \ b\int_0^t f(s)ds;\ \forall t \in [0,T].$$

Então,

$$f(t) \leq ae^{bt},\ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Se $b = 0$ o resultado é óbvio. Suponhamos $b > 0$, então

$$\frac{d}{dt}(e^{-bt}\int_0^t f(s)ds) = -be^{-bt}\int_0^t f(s)ds \ + \ e^{-bt}f(t),$$

pela hipótese, segue que

$$\frac{d}{dt}(e^{-bt}\int_0^t f(s)ds) \leq -be^{-bt}\int_0^t f(s)ds \ + \ e^{-bt}(a \ + \ b\int_0^t f(s)ds),$$

daí

$$\frac{d}{dt}(e^{-bt}\int_0^t f(s)ds) \leq ae^{-bt}.$$

Assim,

$$e^{-bt}\int_0^t f(s)ds \leq \int_0^t ae^{-bs}ds,$$

logo

$$e^{-bt}\int_0^t f(s)ds \leq -\frac{a}{b}(e^{-bt} - 1) = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) \tag{3.13}$$

Pela hipótese e pela desigualdade (3.13) obtemos,

$$f(t) \leq \ a \ + \ b(\frac{a}{b}(e^{bt} - 1)) = ae^{bt}.$$

■

Agora, consideremos o problema de Cauchy

$$(P.C) : \begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t,u) & = & -f(\eta(t,u)) \\ \eta(0,u) & = & u \in \varphi^{\beta}. \end{cases}$$

Lema 3.3 *sob a hipótese (A), o campo vetorial η está bem definido em $\mathbb{R}^+ \times \varphi^{\beta}$ e satisfaz as seguintes propriedades:*

a) *existe $T > 0$ tal que*

$$\eta(t, \varphi^{\beta}) \subset \varphi^{\alpha};$$

b) *cada ponto $(t,u) \in [0,T] \times \varphi^{\beta}$ tem uma $\tau-$vizinhança $N_{(t,u)}$ tal que*

$$\{v - \eta(s,v); (s,v) \in N_(t,u) \cap ([0,T] \times \varphi^{\beta})\}$$

está contido em um subespaço de dimensão finita de X;

c) *η é $\tau-$contínuo.*

Demonstração. Pelo Lema (3.1) segue que f é localmente lipschitziana e limitada em V, então para cada $u \in \varphi^\beta$ o problema $(P.C)$ admite uma única solução contínua $\eta(\cdot, u)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, veja o Teorema C.5. No que segue consideraremos as soluções com $t \in \mathbb{R}^+$.

Observe que,

$$\frac{d}{dt}\varphi(\eta(t,u)) = (\nabla\varphi(\eta(t,u)), \frac{d}{dt}\eta(t,u)),$$

como $\eta(t,u)$ é solução de $(P.C)$, temos

$$\frac{d}{dt}\varphi(\eta(t,u)) = (\nabla\varphi(\eta(t,u)), -f(\eta(t,u))),$$

daí e pelo item c) do Lema (3.1), segue que

$$\frac{d}{dt}\varphi(\eta(t,u)) = -(\nabla\varphi(\eta(t,u)), f(\eta(t,u))) \leq 0.$$

Portanto, $\varphi(\eta(\cdot,u))$ é não crescente.

a) Dado $u \in \varphi^\beta$ e escolhendo $T = (\beta - \alpha)$. Se existir $t \in [0.T]$ tal que $\varphi(\eta(t,u)) < \alpha$, então, segue do fato de $\varphi(\eta(\cdot,u))$ ser não-crescente que

$$\varphi(\eta(T,u)) < \alpha.$$

Por outro lado, se $\eta(t,u) \in \varphi^{-1}([\alpha,\beta])$, $\forall t \in [0,T]$, temos

$$\varphi(\eta(T,u)) = \varphi(u) \ + \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(\eta(t,u))dt,$$

pela regra da cadeia

$$\varphi(\eta(T,u)) = \varphi(u) \ + \int_0^T (\nabla\varphi(\eta(t,u)), f(\eta(t,u)))dt.$$

Pelo item d) do Lema (3.1), temos

$$(\nabla\varphi(\eta(t,u)), f(\eta(t,u))) > 1.$$

Então,

$$\varphi(\eta(T,u)) < \varphi(u) - T \ < \ \beta - (\beta - \alpha) \ = \ \alpha.$$

b) Dado $(t_0, u_0) \in [0,T] \times \varphi^\beta$. O conjunto $K = \eta([0,T] \times \{u_0\})$ é um conjunto compacto, poís é a imagem por uma aplicação contínua de um conjunto compacto, logo, K é $\tau-$compacto. Para cada $v \in K$ existe uma vizinhança N_v tal que f é lipschtziana em N_v. Note que, $\bigcup_{v \in K} N_v$ forma uma cobertura $\tau-$ aberta para K. Sendo K $\tau-$compacto, existe uma cobertura finita $\bigcup_{j=1}^{n} N_{v_j}$, onde as vizinhanças N_{v_j} se intersectam duas a duas. Assim,

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} N_{v_j} \subset V.$$

Desta forma, existem $k > 0$ e $r > 0$ tais que

$$u, v \in \bigcup_{j=1}^{n} N_{v_j} \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq |u - v|$$

e

$$B(K, r) \subset \bigcup_{j=1}^{n} N_{v_j} \subset V.$$

Isto é,

$$U := \{u \in X, |||u - K||| < r\} \subset V,$$

$$u, v \in U \Rightarrow |||f(u) - f(v)||| \leq k|||u - v|||,$$

e

$$f(U) \subset W, \text{ com } dim(W) < +\infty.$$

A existência de $B(K, r)$ é garantida pelo Teorema (C.14).

Dados $\delta > 0$ $t \in [0, T]$ e $u \in \varphi^{\beta}$, com

$$|||u - u_0||| < \delta.$$

Considerando $\delta < re^{-kT}$ temos, $\eta(0, u) \in U$, pois

$$|||\eta(0, u) - \eta(0, u_0)||| = |||u - u_0||| < re^{-KT} < r.$$

Como a aplicação

$$|||\eta(\cdot, u) - \eta(\cdot, u_0)|||$$

é contínua, segue que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$t' \in (0, \varepsilon] \Rightarrow |||\eta(t', u) - \eta(t', u_0)||| < r.$$

Observe também que, se $\eta(s,u) \in U$, para $0 \le s < t$. Então,

$$|||\eta(t,u)-\eta(t,u_0)||| = |||\eta(t,u)-\eta(0,u)+\eta(0,u)-\eta(0,u_0)+\eta(0,u_0)-\eta(t,u_0)|||,$$

pela desigualdade triangular temos,

$$|||\eta(t,u)-\eta(t,u_0)||| \le |||u-u_0|||+|||\eta(t,u)-\eta(0,u)+\eta(0,u_0)-\eta(t,u_0)|||,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$|||\eta(t,u)-\eta(t,u_0)||| \le |||u-u_0|||+|||\int_0^t \frac{d}{ds}\eta(s,u)ds - \int_0^t \frac{d}{ds}\eta(s,u_0)ds|||,$$

do problema $(P.C)$ segue que

$$|||\eta(t,u)-\eta(t,u_0)||| \le |||u-u_0|||+|||-\int_0^t f(\eta(s,u))ds + \int_0^t f(\eta(s,u_0))ds|||,$$

de onde,

$$|||\eta(t,u)-\eta(t,u_0)||| \le |||u-u_0|||+\int_0^t |||f(\eta(s,u))-f(\eta(s,u_0))|||ds,$$

da escolha de U , obtemos

$$|||\eta(t,u)-\eta(t,u_0)||| \le |||u-u_0|||+k\int_0^t |||\eta(s,u)-\eta(s,u_0)|||ds.$$

Então, segue da Desiguldade de Gronwall que,

$$|||\eta(t,u)-\eta(t,u_0)||| \le |||u-u_0|||e^{kt} \le |||u-u_0|||e^{kT}.$$

Em particular, para $\delta < re^{-kT}$ obtemos

$$|||\eta(t,u)-\eta(t,u_0)||| \le r,$$

de onde segue

$$\eta(t,u) \in U.$$

Desta forma, podemos concluir que para todo $0 \le t < T$ e $|||u-u_0||| < \delta < re^{-kT}$, temos

$$\eta(t,u) \in U.$$

Assim,

$$u-\eta(t,u) = -\int_0^t \frac{d}{ds}\eta(s,u)ds = \int_0^t f(\eta(s,u))ds \in W$$

c) Seja $0 < \delta < re^{-kT}$. Se $|||u - u_0||| < \delta,\ |t - t_0| < \delta$ e $0 < t < T$, temos

$$|||\eta(t,u) - \eta(t_0,u_0)||| = |||\eta(t,u) - \eta(t,u_0) + \eta(t,u_0) - \eta(t_0,u_0)|||,$$

da desigualdade triangular temos

$$|||\eta(t,u) - \eta(t_0,u_0)||| \leq |||\eta(t,u) - \eta(t,u_0)||| + |||\eta(t,u_0) - \eta(t_0,u_0)|||,$$

do Teorema Fundamental do Cálculo segue que,

$$|||\eta(t,u) - \eta(t_0,u_0)||| \leq |||\eta(t,u) - \eta(t,u_0)||| + |||\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\eta(s,u_0)ds|||,$$

do problema $(P.C)$ obtemos

$$|||\eta(t,u) - \eta(t_0,u_0)||| \leq |||\eta(t,u) - \eta(t,u_0)||| + |||\int_{t_0}^{t} f(\eta(s,u_0))ds|||,$$

ou ainda

$$|||\eta(t,u) - \eta(t_0,u_0)||| \leq |||\eta(t,u) - \eta(t,u_0)||| + \int_{t_0}^{t} |||f(\eta(s,u_0))|||ds.$$

Assim, segue do item anterior e do item c) do Lema 3.1 que

$$|||\eta(t,u) - \eta(t_0,u_0)||| \leq r + m|t - t_0| < e^{kT}\delta + m\delta = (e^{kT} + m)\delta.$$

Portanto, η é $\tau-$contínua.

■

3.3 Teorema de Linking Generalizado

Nesta seção demosnstraremos o Teorema do Linking Generalizado, como no Teorema do Linking que demonstramos no Capítulo 2 consideraremos um espaço $X = Y \oplus Z$, no entanto não faremos nenhuma restrição quanto a dimensão dos subespaços Y e Z.

Sejam Y um subespaço separável de um espaço de Hilbert X e $Z = Y^{\perp}$. Sejam $P_Y : X \longrightarrow Y$ e $P_Z : X \longrightarrow Z$ as projeções ortogonais de X em Y e em Z respectivamente. A $\tau-$topologia em X é a gerada pela norma (3.8). Dados $\rho > r > 0$ e $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$. Definamos

$$\begin{aligned}
M &= \{u = y + \lambda z; \|u\| \leq \rho \text{ e } y \in Y\} \\
M_0 &= \{u = y + \lambda z;\ y \in Y, \|u\| = \rho \text{ e } \lambda \geq 0 \text{ ou } \|u\| \leq 0\text{e } \lambda = 0\} \\
N &= \{u \in Z; \|u\| = r\}.
\end{aligned}$$

No próximo teorema consideraremos uma função $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que:

$$\begin{aligned} \varphi \quad & \text{é } \tau - \text{semicontínua superiormente e } \nabla\varphi \text{ é fracamente} \\ & \text{sequencialmente contínuo;} \end{aligned} \tag{3.14}$$

e

$$b := \inf_N \varphi > 0 = \sup_{M_0} \varphi, \;\; d := \sup_M \varphi < +\infty. \tag{3.15}$$

Observação 3.4 *Veremos no Capítulo 4 que existe uma função φ com essas propriedades.*

Teorema 3.7 (Kryszewski- Szulkin) *Se φ é como enunciamos anteriormente, existem $c \in [b, d]$ e uma seqüência $(u_n) \subset X$ tais que*

$$\varphi(u_n) \to c \text{ e } \varphi'(u_n) \to 0.$$

Demonstração.

a) Suponhamos, por contradição, que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|\varphi'(u)\| \geq \varepsilon, \;\; \forall u \in \varphi^{-1}([b - \varepsilon, d + \varepsilon]). \tag{3.16}$$

Seja η o campo vetorial definido no Lema 3.3. Como

$$M \subset \varphi^{d+\varepsilon},$$

segue do item a) do Lema 3.3 que existe $T > 0$ tal que

$$\eta(T, M) \in \varphi^{b-\varepsilon.} \tag{3.17}$$

De (3.14) e (3.16) segue que a hipótese (A) é satisfeita para $\alpha = b - \varepsilon$ e $\beta = d + \varepsilon$.

b) Seja U o interior de M em $E = Y \oplus \mathbb{R}z$. A topologia induzida em E pela topologia τ é a topologia σ gerada pela norma (3.1). Concideremos a aplicação $h : [0, T] \times M \longrightarrow E$ definida por

$$h(t, u) = P_Y(\eta(t, u)) + (\|P_Z(\eta(t, u))\| - r)z.$$

Afirmação 3.8 *h é uma homotopía admissível, ou seja*

1) $0 \notin h([0,T] \times \partial M)$

2) *h é $\sigma-$contínua*

3) *para cada ponto $(t,u) \in [0,T] \times U$ existe uma $\sigma-$vizinhança aberta $N_(t,u)$ tal que $\{v - h(s,v); (s,v) \in N_{(t,u)} \cap ([0,T] \times U)\}$ está contido em um subespaço de E com dimensão finita.*

De fato,

1) Observe que,

$$h(t,u) = 0 \Leftrightarrow P_Y(\eta(t,u)) + (\|P_Z(\eta(t,u))\| - r)z = 0,$$

isto é

$$h(t,u) = 0 \Leftrightarrow P_Y(\eta(t,u)) = 0 \text{ e } \|P_Z(\eta(t,u))\| = r.$$

Logo,

$$h(t,u) = 0 \Leftrightarrow \eta(t,u) \in N. \tag{3.18}$$

Suponhamos, por contradição, que

$$0 \in h([0,T] \times \partial U).$$

Então, existe $(t,u) \in [0,T] \times \partial U$ tal que $h(t,u) = 0$. De (3.18) segue que

$$\eta(t,u) \in N.$$

Pela hipótese (3.15) temos

$$\inf_N \varphi = b > 0 = \sup_{\partial U} \varphi.$$

Então,

$$0 = \sup_{\partial U} \varphi \geq \varphi(u) = \varphi(\eta(0,u)) \geq \varphi(\eta(t,u)) \geq b > 0,$$

o que é absurdo.

Portanto,

$$0 \notin h([0,T] \times \partial U).$$

2) Da definição de h e do item c) do Lema 3.3 segue que h é $\sigma-$contínua.

3) Do item b) do Lema 3.3 segue que para cada $(t,u) \in [0,T] \times U$ existem uma $\sigma-$vizinhança $N_{(t,u)}$ e um subespaço W de E, onde $dimW < +\infty$, tais que

$$\{v - \eta(s,v);\ (s,v) \in N_{(t,u)} \cap ([0,T] \times U)\} \subset W.$$

Assim, para todo $(s,v) \in N_{(t,u)} \cap ([0,T] \times U)$, temos

$$v - h(s,v) = v - [P_Y(\eta(s,v)) + (\|P_Z(\eta(s,v))\| - r)z],$$

logo,

$$v - h(s,v) = [v - P_Y(\eta(s,v))] + [(\|P_Z(\eta(s,v))\| - r)z] \in W \oplus \mathbb{R}z.$$

Como $W \oplus \mathbb{R}z$ é um subespaço de dimensão finita de E, concluímos nossa afirmação.

Visto isso, segue do Teorema 3.5 que

$$deg(h(T,\cdot), U, 0) = deg(h(0,\cdot), U, 0),$$

isto é

$$deg(h(T,\cdot), U, 0) = deg(id - rz, U, 0) = 1.$$

Então existe $u \in U$ tal que

$$h(T,u) = 0.$$

Por (3.18),

$$\eta(T,u) \in N$$

e portanto,

$$\varphi(\eta(T,u)) \geq b.$$

Por outro lado, temos por (3.17)

$$\varphi(\eta(T,u)) \leq b - \varepsilon,$$

o que é absurdo.

Portanto, existem $c \in [b,d]$ e uma seqüência $(u_n) \subset X$ tal que

$$\varphi(u_n) \to 0 \text{ e } \varphi'(u_n) \to 0.$$

■

O corolário que enunciaremos a seguir encontra-se no [15], no entanto a demonstração a seguir foi desenvolvida por nós. Vale resaltar também, que este corolário será de grande importância no desenvolvimento do próximo capítulo.

Corolário 3.9 *Seja $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ uma função fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente, limitada inferiormente e tal que $\nabla\psi$ é fracamente sequencialmente contínuo. Se*

$$\varphi(u) := \frac{\|P_Z u\|^2}{2} - \frac{\|P_Y u\|^2}{2} - \psi(u)$$

satisfaz a hipótese (3.15) então a conclusão do Teorema 3.7 é válida para φ.

Demonstração. Iremos mostrar que φ satisfaz (3.14), ou seja,

(i) φ é $\tau-$semicontínua superiormente,

(ii) $\nabla\varphi$ é fracamente sequencialmente contínuo.

Verificação de (i): Devemos provar que,

$$\varphi_r := \{x \in X; \varphi(x) \geq r\} \text{ é } \tau - \text{fechado}, \ \forall r \in \mathbb{R}.$$

Ora, dada uma seqüência$(u_m) \subset \varphi_r$ tal que

$$u_m \xrightarrow{\tau} u.$$

Note que, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$r \leq \varphi(u_m) = \frac{\|P_Z u_m\|^2}{2} - \frac{\|P_Y u_m\|^2}{2} - \psi(u_m).$$

Recorde que,

$$u_m \xrightarrow{\tau} u \Rightarrow \|P_Z u_m\| \to \|P_Z u\|.$$

Então, existe $k_1 > 0$ tal que

$$\|P_Z u_m\| \leq k_1, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese, existe $k_2 > 0$ tal que

$$\psi(u_m) \geq k_2, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$r \leq \frac{k_1^2}{2} - \frac{\|P_Y u_m\|^2}{2} - k_2.$$

Daí,

$$\frac{\|P_Y u_m\|^2}{2} \leq \frac{k_1^2}{2} - k_2 - r,$$

ou seja,

$$\frac{\|P_Y u_m\|^2}{2} \leq K, \text{ onde } K > 0.$$

Desta forma a seqüência (u_m) é limitada. Logo, segue da Proposição 3.6 que $u_m \rightharpoonup u$. Sendo, por hipótese, ψ é fracamente semicontínua inferiormente, temos

$$r \leq \limsup_{m \to +\infty} \varphi(u_m) = \varphi(u).$$

Portanto, φ_r é $\tau-$fechado para todo $r \in \mathbb{R}$.

Verificação de (ii): Note que

$$(\nabla\varphi(u), h) = (P_Z u, h) - (P_Y u, h) - (\nabla\psi(u), h), \ \forall h \in X.$$

Temos pelo Teorema C.15

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } X \Rightarrow \begin{cases} P_Y u_m & \rightharpoonup & P_Y u \\ P_Z u_m & \rightharpoonup & P_Z u; \end{cases}$$

logo, para todo $h \in X$

$$(P_Y u_m, h) \to (P_Y u, h)$$
$$(P_Z u_m, h) \to (P_Z u, h).$$

Além disso, temos por hipótese, $\nabla\psi$ fracamente sequencialmente contínuo. Então, concluímos que $\nabla\varphi$ é fracamente sequencialmente contínuo.

Desta forma, mostramos que φ satisfaz as hipóteses (3.14) e (3.15), e portanto o Teorema 3.7 se verifica para φ.

■

Capítulo 4

Sistemas de Equações de Poisson Acopladas com Crescimento Crítico em domínios Não-Limitados

Neste capítulo consideraremos os seguintes sistemas de equações de Poisson com crescimento crítico em domínios não-limitados

$$\begin{cases} -\Delta u & = |v|^{2^*-2}v, \\ -\Delta v & = |u|^{2^*-2}u, \\ & u, v \in D_0^{1,2}(\Omega_*), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u & = \gamma v + |v|^{2^*-2}v, \\ -\Delta v & = \lambda u + |u|^{2^*-2}u, \\ & u, v \in H_0^1(\Omega_{**}), \end{cases}$$

onde $\Omega_* = \mathbb{R}^N \setminus E$ com $E = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}^N} (a + \omega_*)$ para um domínio contendo a origem

$$\omega_* \subset \overline{\omega_*} \subset B(0, \frac{1}{2})$$

e $\Omega_{**} = \mathbb{R}^l \times \omega_{**}$ é um domínio cilindrico, com ω_{**} um domínio limitado de $\mathbb{R}^{N-l}$, para $1 \leq l \leq N-1$, $0 < \gamma,\ \lambda < \lambda_1(\Omega_{**})$, onde

$$\lambda_1(\Omega_{**}) := \inf\{\int_{\Omega_{**}} |\nabla u|^2 dx;\ u \in H_0^1(\Omega_{**}) \text{ e } \int_{\Omega_{**}} u^2 dx = 1\}.$$

Nosso obletivo será demonstrar o seguintes Teoremas:

Teorema 4.1 *O problema* (1) *tem uma solução não-trivial.*

Teorema 4.2 *Se* $\gamma, \lambda \in (0, \lambda_1(\Omega_{**}))$, *então o problema* (2) *tem uma solução não-trivial.*

Nestes dois teoremas quando dizemos solução estamos nos referindo a solução no sentido fraco. Como (1) e (2) têm uma estrutura variacional, suas soluções são os pontos críticos dos funcionais

$$\varphi(u,v) = \int_{\Omega_*} [\nabla u \nabla v - \frac{|u|^{2^*}}{2^*} - \frac{|v|^{2^*}}{2^*}]dx,$$

e

$$\varphi_1(u,v) = \int_{\Omega_*} [\nabla u \nabla v - \frac{\gamma u^2}{2} - \frac{\lambda v^2}{2} - \frac{|u|^{2^*}}{2^*} - \frac{|v|^{2^*}}{2^*}]dx,$$

respectivamente.

4.1 Principais Lemas Técnicos

Consideremos o espaço

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N);\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}N)\},$$

munido com o produto interno

$$(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx$$

e denotemos a norma associada a este produto interno por $\|u\|$. O Teorema de Imersão de Sobolev afirma que a imersão

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

é contínua.

Para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, denotamos por $D_0^{1,2}(\Omega)$ o completamento de C_0^∞ na norma $\|\cdot\|$. Note que,$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = D_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e quando valer a Desigualdade de Poincaré, $D_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Observação 4.1 *A imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ não é compacta.*

De fato, considere a aplicação

$$\begin{cases} \varphi \in C_0^\infty \text{ com, } supp\ \varphi \subset \overline{B(0,1)} \\ \varphi(x) > 0, \text{ para } |x| < 1 \end{cases}$$

Defina, $u_n(x) = \varphi(x - 2ne_1)$. Observe que,

$$\|u_n\| = [\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla u_n|^2]^{\frac{1}{2}} = \|\nabla\varphi\|_2 = \|\varphi\| \text{ que é limitada em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Mas,

$$\|u_n - u_m\|_{2^*} = 2\|\varphi\|_{2^*} > 0.$$

No entanto, temos o seguinte resultado:

Lema 4.1 *Se $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então $u_n \to u$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Como $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{2^*} \leq C\|u\|,$$

ou seja,

$$(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

Daí,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Definamos,

$$S := \inf\{\frac{1}{C};\ \frac{1}{C} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}}\}.$$

Para cada $R > 0$ e $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, temos pela Desigualdade de Hölder

$$\int_{B(0,R)} |u|^2 dx \leq [\int_{B(0,R)} |u|^{2^*} dx]^{\frac{2}{2^*}}\ [\int_{B(0,R)} dx].$$

O que implica

$$\int_{B(0,R)} |u|^2 dx \leq S^{-1}\ [\int_{B(0,R)} |\nabla u|^2 dx](W_N R^N)^{\frac{2}{N}}.$$

Logo,

$$\int_{B(0,R)} |u|^2 dx \leq \tilde{C} \int_{B(0,R)} |\nabla u|^2 dx. \tag{4.1}$$

Se $u_n \rightharpoonup u$, em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, temos por propriedade de convergência fraca que $\|u_n\|$ é limitado. Da desigualdade (4.1), segue que,

$$\|u_n\|_{L^2(B(0,R))} \text{ e } \|\nabla u_n\|_{L^2(B(0,R))}$$

são limitadas, ou seja, (u_n) é limitada em $W^{1,2}(B(0,R))$. Uma vez que,

$$W^{1,2}(B(0,R)) \underset{comp}{\hookrightarrow} L^2(B(0,R)),$$

então, passando a uma subseqüência se necessário,

$$u_n \to v \text{ em } L^2(B(0,R)),\ \forall R > 0. \tag{4.2}$$

Por outro lado, segue do Teorema da Representação de Riesz, que dado $w \in C_0^\infty(B(0,R))$, temos

$$(u_n, w) \to (u, w),$$

ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(0,R)} \nabla u_n\ \nabla w\ dx = \int_{B(0,R)} \nabla u\ \nabla w\ dx].$$

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(0,R)} u_n\ \Delta w\ dx = \lim_{n\to+\infty} [- \int_{B(0,R)} \nabla u_n\ \nabla w\ dx,$$

daí,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(0,R)} u_n\ \Delta w\ dx = - \int_{B(0,R)} \nabla u\ \nabla w\ dx.$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(0,R)} u_n\ \Delta w\ dx = \int_{B(0,R)} u\ \Delta w\ dx. \tag{4.3}$$

Em contrapartida, passando a uma subseqüência se necessário, segue de (4.2)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(0,R)} u_n\ \Delta w\ dx = \int_{B(0,R)} v\ \Delta w\ dx. \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4) segue,

$$\int_{B(0,R)} u\ \Delta w\ dx = \int_{B(0,R)} v\ \Delta w\ dx.$$

Pelo Lema de Du Bois-Raymond temos,

$$u = v,\ q.t.p\ em\ B(0,R).$$

Portanto,

$$u_n \to u \ em \ L^2_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

■

O seguinte Lema é um corolário em domínios cilindricos de um resultado devido a Ramos,Wang e Willem em $\mathbb{R}^N$, veja [13]

Lema 4.2 (Ramos,Wang and Willem) *Seja $r > 0$. Se (u_n) é limitada em $H^1_0(\Omega_{**})$ e se*

$$\sup_{x\in\Omega_{**}} \int_{B(x,r)} |u_n|^{2^*} dx \to 0, \ \ quando \ n \to +\infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^{2^*}(\Omega_{**})$.

Agora, estabelecermos um resultado análogo em $D^{1,2}_0(\Omega_*)$.

Lema 4.3 *Seja $r \geq \sqrt{N}$, e $(u_n) \subset D^{1,2}_0(\Omega_*)$ uma seqüência limitada. Se*

$$\sup_{a\in\mathbb{Z}^N} \int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u_n|^{2^*} dx \to 0, \ \ quando \ n \to +\infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^{2^*}(\Omega_*)$.

Demonstração. Sejam $u \in C^\infty_0(\Omega_*)$ e $a \in \mathbb{Z}^N$. Devido a invariância por translações em $\mathbb{Z}^N$, isto é

$$\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u_n(y)| = \int_{B(0,r)\cap\Omega_*} |u_n(x+a)|,$$

podemos supor que $a = 0$. Denote

$$U = B(0,r) \setminus \omega_*$$

e defina

$$\begin{aligned} H : \overline{U} \ &\longrightarrow \ \mathbb{R}^N \\ x \ &\longmapsto \ H(x) = (-1 + \frac{2r}{|x|})x., \end{aligned}$$

Denotemos $W = H(U)$ e $V = W \cup \overline{U}$. Mostraremos agora que H satisfaz as hipóteses do Teorema da Aplicação Inversa. Para facilitar os cálculos, considere $N = 2$. Primeiramente, segue da definição que $H \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$J(H(x)) = \begin{vmatrix} -1 + \frac{2r}{|x|} - \frac{2rx_1^2}{|x|^3} & -\frac{2rx_1x_2}{|x|^3} \\ -\frac{2rx_1x_2}{|x|^3} & -1 + \frac{2r}{|x|} - \frac{2rx_2^2}{|x|^3} \end{vmatrix}.$$

Calculando este determinante, obtemos

$$J(H(x)) = -(-1 + \frac{2r}{|x|}) < -1 \neq 0.$$

Fixe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \subset \omega_*$ e defina

$$U_\varepsilon = B(0, r+\varepsilon) \setminus B(0,\varepsilon).$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{H} : U_\varepsilon \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^N \\ x \quad &\longmapsto \quad \tilde{H}(x) = (-1 + \frac{2r}{|x|})x. \end{aligned}$$

Das condições verificadas anteriormente e do Teorema da aplicação Inversa segue que, para cada $x \in U_\varepsilon$ existem vizinhanças, $x \in V_1 \subset U_\varepsilon$ e $\tilde{H}(x) \in V_2 \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\tilde{H} : V_1 \longrightarrow V_2$$

é um difeomorfismo de classe C^∞. Note também que, $\tilde{H}$ é injetiva, pois se

$$\tilde{H}(x) = \tilde{H}(y),$$

temos

$$x = \frac{(-1 + \frac{2r}{|y|})}{(-1 + \frac{2r}{|x|})} y,$$

ou seja, x e y têm as mesmas direções e sentidos. Logo

$$x = ty, \ t > 0$$

de onde segue que $|x| = t|y|$. Daí

$$ty = \frac{(-1 + \frac{2r}{|y|})}{(-1 + \frac{2r}{t|y|})} y.$$

De onde, obtemos

$$t = 1.$$

Portanto,

$$x = y.$$

Desta forma concluímos que,

$$\tilde{H} : U_\varepsilon \longrightarrow \tilde{H}(U_\varepsilon)$$

é um difeomorfismo de classe C^∞ e portanto, $\tilde{H}|_{\overline{U}} = H$ é um difeomorfismo de classe C^∞.

Para cada $\phi \in C_0^\infty(V)$, temos pelo Teorema do Divergente

$$\int_W u(H^{-1}(x))\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx = -\int_W \phi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(u(H^{-1}(x)))dx \;+\; \int_{\partial W} u(H^{-1}(x))\phi(x)\nu dS.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_W u(H^{-1}(x))\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx = -\int_W \phi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(u(H^{-1}(x)))dx \;-\; &\int_{\partial B(0,r)} u(H^{-1}(x))\phi(x)\nu dS \\ +&\int_{H(\partial\omega_*)} u(H^{-1}(x))\phi(x)\nu dS.\end{aligned}$$

Como $\phi \in C_0^\infty(V)$, temos

$$\phi(x) = 0,\ \forall x \in H(\partial\omega_*).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_W u(H^{-1}(x))\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx = -\int_W \phi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(u(H^{-1}(x)))dx - \\ \int_{\partial B(0,r)} u(H^{-1}(x))\phi(x)\nu dS.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Também pelo Teorema do Divergente, temos

$$\int_U u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx = -\int_U \phi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)dx \;+\; \int_{\partial U} u(x)\phi(x)\nu dS.$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_U u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx = -\int_U \phi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)dx \;+&\int_{\partial B(0,r)} u(x)\phi(x)\nu dS \\ -&\int_{\partial\omega_*} u(x)\phi(x)\nu dS.\end{aligned}$$

Uma vez que, $\phi \in C_0^\infty(V)$, temos

$$\phi(x) = 0,\ \forall x \in \partial\omega_*.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_U u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx = -\int_U \phi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)dx \\ +\int_{\partial B(0,r)} u(x)\phi(x)\nu dS\ .\end{aligned} \tag{4.6}$$

Definindo,

$$\begin{array}{rcl} u^*: V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u^*(x) = \begin{cases} u(x), \text{ se } x \in U, \\ u(H^{-1}(x)), \text{ se } x \in \overline{W}. \end{cases} \end{array}$$

Temos por (4.5) e (4.6)

$$\int_V u^*(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) dx = - \int_V \phi(x) [\frac{\partial}{\partial x_i} \chi_U(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} u(H^{-1}(x)) \chi_W(x)] dx. \qquad (4.7)$$

Observe que,

$$\int_W |\nabla_x u(H^{-1}(x))|^2 dx = \int_{H(U)} |\nabla_x (u \circ H^{-1})(x)|^2 dx.$$

Pelo Teorema da Mudança de Variáveis, obtemos

$$\int_W |\nabla_x u(H^{-1}(x))|^2 dx = \int_U |\nabla_x (u \circ H^{-1})(H(y))|^2 |\det J(H(y))| dy.$$

Ou ainda

$$\int_W |\nabla_x u(H^{-1}(x))|^2 dx = \int_U |\nabla_x u(y)|^2 |\det J(H(y))| dy.$$

Então pela Regra da Cadeia, segue que

$$\int_W |\nabla_x u(H^{-1}(x))|^2 dx = \int_U |\nabla_y u(y).J(H^{-1}(x))|^2 |\det J(H(y))| dy.$$

Denote,

$$x_i = \langle \nabla_y u(y), (\frac{\partial}{\partial x_i} H_1^{-1}(x), \frac{\partial}{\partial x_i} H_2^{-1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_i} H_N^{-1}(x)) \rangle.$$

Assim,

$$\int_W |\nabla_x u(H^{-1}(x))|^2 dx = \int_U |(x_1, x_2, \cdots, x_N)|^2 |\det J(H(y))| dy.$$

Ou seja,

$$\int_W |\nabla_x u(H^{-1}(x))|^2 dx = \int_U (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2) |\det J(H(y))| dy.$$

Da Desigualdade de Schwarz , temos

$$x_i^2 \leq |\nabla_y u(y)|^2 . |(\frac{\partial}{\partial x_i} H_1^{-1}(x), \frac{\partial}{\partial x_i} H_2^{-1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_i} H_N^{-1}(x))|^2.$$

Assim,

$$\int_W |\nabla_x u(H^{-1}(x))|^2 dx \leq \int_U |\nabla_y u(y)|^2 (\sum_{i=1}^N |(\frac{\partial}{\partial x_i} H_1^{-1}(x), \frac{\partial}{\partial x_i} H_2^{-1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_i} H_N^{-1}(x))|^2)$$
$$|\det J(H(y))| dy.$$

Sejam,

$$c_1 = \max_{y\in\overline{U}} |\det J(H(y))|$$

e

$$c_2 = \max_{x\in\overline{W}} (\sum_{i=1}^{N} |(\frac{\partial}{\partial x_i} H_1^{-1}(x), \frac{\partial}{\partial x_i} H_2^{-1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_i} H_N^{-1}(x))|^2).$$

Então,

$$\int_W |\nabla_x u(H^{-1}(x))|^2 dx \leq c_1 c_2 \int_U |\nabla_y u(y)|^2 dy. \tag{4.8}$$

Observe que $u^* \in L^2(V)$,pois

$$\int_V |u^*|^2 dx = \int_U |u(x)|^2 dx + \int_W |u(H^{-1}(x))|^2 dx,$$

como $u \in L^2(U)$ e

$$\int_W |u(H^{-1}(x))|^2 dx = \int_U |(u \circ H^{-1})(H(y))|^2 |\det J(H(y))|,$$

ou seja

$$\int_W |u(H^{-1}(x))|^2 dx \leq c_1 \int_U |u(y)|^2,$$

e portanto,

$$u^* \in L^2(V).$$

Temos também,

$$\int_V |\nabla_x u^*|^2 dx = \int_U |\nabla_x u(x)|^2 dx + \int_W |\nabla_x u(H^{-1}(x))|^2.$$

De (4.8) segue que,

$$\int_V |\nabla_x u^*|^2 dx \leq \int_U |\nabla_x u(x)|^2 dx + c_1 c_2 \int_U |\nabla_y u(y)|^2 dy = (1 + c_1 c_2) \|\nabla_x u\|^2_{L^2(U)}.$$

Assim, concluímos que,

$$\nabla_x u^* \in L^2(V).$$

De (4.7) e da Desigualdade de Hölder, segue que

$$|\int_V u^*(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi dx| = |\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} u^* \phi dx| \leq \|\nabla u^*\|_{L^2(V)} \|\phi\|_{L^2(V)}.$$

Do Teorema C.16, obtemos

$$u^* \in H_0^1(V).$$

Além disso,

$$\|\nabla u^*\|_{L^2(V)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(U)} = c\|\nabla u\|_{L^2(U\cap\Omega_*)}, \tag{4.9}$$

com

$$c = 1 + c_1c_2.$$

Como $U \cap \Omega_* \subset V$, temos

$$\|u^*\|_{L^{2^*}(U\cap\Omega_*)} \leq \|u^*\|_{L^{2^*}(V)}.$$

Das Imersões de Sobolev, segue que

$$\|u^*\|_{L^{2^*}(U\cap\Omega_*)} \leq k_1\|u^*\| = k_1(\|u^*\|_{L^2(V)} + \|\nabla u^*\|_{L^2(V)}).$$

Pela Desigualdade de Poicaré, temos

$$\|u^*\|_{L^{2^*}(U\cap\Omega_*)} \leq k_2\|\nabla u^*\|_{L^2}(V).$$

De (4.9)

$$\|u^*\|_{L^{2^*}(U\cap\Omega_*)} \leq k\|\nabla u\|_{L^2(U\cap\Omega_*)}.$$

Como $u = u^*$ em $U \cap \Omega_*$, temos

$$\int_{U\cap\Omega_*} |u|^{2^*}dx \leq k(\int_{U\cap\Omega_*} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{2^*}{2}}. \tag{4.10}$$

Usando a $\mathbb{Z}^N$ invariância e a densidade de $C_0^\infty(\Omega_*)$ em $D_0^{1,2}(\Omega_*)$, obtemos para todo $u \in D_0^{1,2}(\Omega_*)$

$$\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^{2^*}dx \leq k(\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^2 dx)^{\frac{2^*}{2}}. \tag{4.11}$$

Logo, para qualquer $\lambda > 0$, temos

$$(\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^{2^*}dx)^\lambda \leq k^\lambda(\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^2 dx)^{\frac{2^*}{2}\lambda},$$

isto é

$$\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^{2^*}dx \leq K^\lambda(\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^2 dx)^{\frac{2^*}{2}\lambda}(\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^{2^*}dx)^{1-\lambda}.$$

Em particular, escolhendo $\lambda = \frac{2}{2^*}$, obtemos

$$\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^{2^*}dx \leq K_0(\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^2 dx)(\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^{2^*}dx)^{\frac{2^*-2}{2^*}}.$$

Daí

$$\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^{2^*}dx \leq K_0(\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^2 dx)[\sup_{a\in\mathbb{Z}^N}(\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^{2^*}dx)]^{\frac{2^*-2}{2^*}}.$$

Como esta desigualdade é válida para todo $a \in \mathbb{Z}^N$, obtemos

$$\int_{\Omega_*} |u|^{2^*} dx \leq K_0 (\int_{\Omega_*} |u|^2 dx) [\sup_{a \in \mathbb{Z}^N} (\int_{B(a,r)\cap\Omega_*} |u|^{2^*} dx)]^{\frac{2^*-2}{2^*}}.$$

Portanto, segue das hipóteses que,

$$u_n \to 0 \text{ em } L^{2^*}(\Omega_*).$$

■

4.2 Propriedades do Funcional φ

Nesta seção estabeleceremos resultados gerais relacionados ao funcional φ mencionado na introdução. Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e denotemos

$$X = D_0^{1,2}(\Omega) \times D_0^{1,2}(\Omega),$$

o espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$((u,v),(u_1,v_1)) = \int_\Omega (\nabla u \nabla u_1 + \nabla v \nabla v_1) dx. \tag{4.12}$$

Consideremos os conjuntos

$$Y = \{(-v,v) \in X\} \text{ e } Z = \{(u,u) \in X\}.$$

Observe que,

$$X = Y \oplus Z,$$

pois, dado $(u,v) \in X$, temos

$$(u,v) = \frac{1}{2}(-(v-u), v-u) + \frac{1}{2}(u+v, u+gv).$$

Denotaremos por P_Y(resp. P_Z) a projeção de X sobre Y(resp. Z).

Definindo o funcional

$$\begin{array}{rcl} \varphi : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v) = \int_\Omega [\nabla u \nabla v - \frac{|u|^{2^*}}{2^*} - \frac{|v|^{2^*}}{2^*}] dx. \end{array}$$

Então,

$$\varphi(u,v) = \frac{\|P_Z(u,v)\|^2}{2} - \frac{\|P_Y(u,v)\|^2}{2} - \psi(u,v),$$

onde

$$\psi(u,v) = \int_\Omega [\frac{|u|^{2^*}}{2^*} + \frac{|v|^{2^*}}{2^*}] dx.$$

Lema 4.4 *O funcional $\psi \in C^1(\Omega)$ e é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente. Além disso, dados $(u,v),(w,z) \in X$, temos*

$$\langle \varphi'(u,v),(w,z)\rangle = \int_\Omega [\nabla u \nabla z + \nabla v \nabla w - |u|^{2^*-2}uw - |v|^{2^*-2}vz]dx.$$

Demonstração. Na Proposição 2.3 mostramos que $\psi \in C^2(\Omega)$. Agora, dados $(u_n) \subset D_0^{1,2}(\Omega)$ e $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$em $D_0^{1,2}(\Omega)$. Das propriedades de convergência fraca (veja [3]), temos $\|u_n\|$ limitada. Da imersão contínua

$$D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega),$$

segue que (u_n) é uma seqüência limitada em $L^{2^*}(\Omega)$. Sendo $L^{2^*}(\Omega)$ um espaço reflexivo, existe uma subseqüência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_0 \text{ em } L^{2^*}(\Omega).$$

Então, para todo $\xi \in C^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} -\int_\Omega u_0 \Delta\xi dx = -\lim \int_\Omega u_{n_j}\Delta\xi dx = \lim \int_\Omega \nabla u_{n_j}\nabla\xi dx = \\ = \int_\Omega \nabla u \nabla \xi dx = -\int_\Omega u\Delta\xi dx. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Du Bois-Raymond, concluímos que

$$u = u_0 \; q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Uma vez que, para toda subseqüência pode-se obter uma sub-subseqüência que converge fraco para u em $L^{2^*}(\Omega)$, temos pela Proposição C.12 que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em} L^{2^*}(\Omega).$$

Portanto, por propriedade de convergência fraca, temos

$$\liminf \|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)} \geq \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Analogamente mostramos que, se $v_n \rightharpoonup v$ em $D_0^{1,2}(\Omega)$ implica em

$$\liminf \|v_n\|_{L^{2^*}(\Omega)} \geq \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$(u_n,v_n) \rightharpoonup (u,v) \text{ em} X \Rightarrow \liminf \psi(u_n,v_n) \geq \psi(u,v).$$

Além disso, observe que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega[\nabla(u+tw)\nabla(v+tz)-\nabla u\nabla v]dx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega[t(\nabla u\nabla z + \nabla w\nabla v) + t^2\nabla w\nabla z]dx.$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega[\nabla(u+tw)\nabla(v+tz)-\nabla u\nabla v]dx = \int_\Omega[\nabla u\nabla z+\nabla w\nabla v]dx. \tag{4.13}$$

Uma vez que,

$$\langle\varphi'(u,v),(w,z)\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(u+tw,v+tz)-\varphi(u,v)}{t}.$$

Temos pela Proposição 2.3 e pela identidade (4.13) que

$$\langle\varphi'(u,v),(w,z)\rangle = \int_\Omega[\nabla u\nabla z+\nabla v\nabla w-|u|^{2^*-2}uw-|v|^{2^*-2}vz]dx.$$

■

Lema 4.5 *A aplicação ψ' é fracamente sequencialmente contínua.*

Demonstração. Suponha que $(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v)$ em X. Então, como já vimos anteriormente, (u_n) e (v_n) são limitadas em $L^{2^*}(\Omega)$, e portanto $(|u_n|^{2^*-2}u_n)$ e $(|v_n|^{2^*-2}v_n)$ são limitadas em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$. Sendo $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ um espaço reflexivo, existem $(|u_{n_j}|^{2^*-2}u_{n_j})$, $(|v_{n_j}|^{2^*-2}v_{n_j})$, $u_1,\ u_2\in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$, tais que

$$|u_{n_j}|^{2^*-2}u_{n_j}\rightharpoonup u_1$$

e

$$|v_{n_j}|^{2^*-2}v_{n_j}\rightharpoonup u_2,$$

ou seja

$$\int_\Omega|u_{n_j}|^{2^*-2}u_{n_j}wdx\to\int_\Omega u_1wdx,\ \forall w\in L^{2^*} \tag{4.14}$$

e

$$\int_\Omega|v_{n_j}|^{2^*-2}v_{n_j}zdx\to\int_\Omega u_2zdx,\ \forall z\in L^{2^*}. \tag{4.15}$$

Pelo Lema 4.1, temos

$$u_n\to u \text{ e } v_n\to v \text{ em } L^2_{loc}(\Omega).$$

Desta forma, $(\frac{|u_{n_j}|^{2^*}}{2^*})$ é limitada em L^1 e $\frac{|u_{n_j}|^{2^*}}{2^*} \to \frac{|u|^{2^*}}{2^*}$ $q.t.p$ em Ω. Então segue do Teorema C.4 que $\frac{|u_{n_j}|^{2^*}}{2^*} \rightharpoonup \frac{|u|^{2^*}}{2^*}$ em $L^1(\Omega)$. Logo,

$$\int_{\Omega)} |u|^{2^*-2}uwdx = -\int_{\Omega)} \frac{|u|^{2^*}}{2^*}w'dx = -\lim \int_{\Omega} \frac{|u_{n_j}|^{2^*}}{2^*}w'dx.$$

Ou ainda

$$\int_{\Omega)} |u|^{2^*-2}uw = \lim \int_{\Omega)} |u_{n_j}|^{2^*-2}u_{n_j}wdx$$

De (4.14) segue que

$$\int_{\Omega)} |u|^{2^*-2}uw = \int_{\Omega)} u_1 w.$$

Pelo Lema de Du Bois- Raimond, temos

$$u_1 = |u|^{2^*-2}u, \ q.t.p.$$

Analogamente mostramos que

$$u_2 = |v|^{2^*-2}v, \ q.t.p.$$

Portanto, usando a Proposição C.12, temos para todos $w, z \in C_0^\infty$

$$\int_\Omega [|u_n|^{2^*-2}u_n w + |v_n|^{2^*-2}v_n z]dx \to \int_\Omega [|u|^{2^*-2}uw + |v|^{2^*-2}vz]dx,$$

ou seja

$$\langle \psi'(u_n, v_n), (w, z)\rangle \to \langle \psi'(u, v), (w, z)\rangle.$$

Além disso, $(\psi'(u_n, v_n))$ é limitada em X, pois pela Desigualdade de Hölder temos

$$|\langle \psi'(u_n, v_n), (w, z)\rangle| \leq \||u_n|^{2^*-2}u_n\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}} \|w\|_{L^{2^*}} + \||v_n|^{2^*-2}v_n\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}} \|z\|_{L^{2^*}}.$$

Logo,

$$\|\psi'(u_n, v_n)\| \leq \sup_{\|(w,z)\|=1} |\langle \psi'(u_n, v_n), (w, z)\rangle| \leq \||u_n|^{2^*-2}u_n\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}} + \||v_n|^{2^*-2}v_n\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}} \| \leq K.$$

Sendo X um espaço reflexivo, existe $(\psi'(u_{n_j}, v_{n_j}))$ tal que

$$\psi'(u_{n_j}, v_{n_j}) \rightharpoonup (w_1, w_2) \text{ em } X.$$

Assim,

$$\langle \psi'(u_{n_j}, v_{n_j}), (w, z)\rangle \to \langle (w_1, w_2), (w, z)\rangle.$$

Por outro lado,

$$\langle \psi'(u_{n_j}, v_{n_j}), (w, z)\rangle \to \langle \psi'(u, v), (w, z)\rangle.$$

Portanto,

$$(w_1, w_2) = \psi'(u, v).$$

Usando novamente a Proposição C.12, concluímos que $\psi'(u_n, v_n) \rightharpoonup \psi'(u, v)$.

■

Agora, mostraremos que o funcional φ satisfaz a hipótese (3.15) do Corolário devido a Kryszewski e Szulkin (Corolário 3.9). Fixemos $(z, z) \in Z$ tais que $\|(z, z)\| = 1$.

Lema 4.6 *Existe $r > 0$ tal que*

$$b = \inf_{\substack{(u,u)\in Z\\ \|(u,u)\|=r}} \varphi(u, u) > 0 = \min_{\substack{(u,u)\in Z\\ \|(u,u)\|\leq r}} \varphi(u, u).$$

Além disso, existe $\rho > r$ tal que

$$\max_{M_0} \varphi = 0 \ \ e\ d = \sup_{M} \varphi < +\infty.$$

Onde M e M_0 são os conjuntos definidos na Seção 3.3 do Capítulo 3.

Demonstração. Dado $(u, u) \in Z$, temos

$$\varphi(u, u) = \int_\Omega [|\nabla u|^2 - \frac{2|u|^{2^*}}{2^*}]dx = \frac{\|(u, u)\|^2}{2} - \frac{\|(u, u)\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)\times L^{2^*}(\Omega)}}{2^*}.$$

Da imersão contínia, $D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, obtemos

$$\varphi(u, u) \geq \frac{\|(u, u)\|^2}{2} - C\|(u, u)\|^{2^*},$$

então existe $r > 0$ tal que

$$b = \inf_{\substack{(u,u)\in Z\\ \|(u,u)\|=r}} \varphi(u, u) > 0 = \min_{\substack{(u,u)\in Z\\ \|(u,u)\|\leq r}} \varphi(u, u).$$

Agora, observe que em Y, temos

$$\varphi(-v, v) = -\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{2}{2^*}\int_\Omega |v|^{2^*} dx,$$

ou seja

$$\varphi(-v, v) = -\frac{\|(-v, v)\|^2}{2} - \frac{2}{2^*}\int_\Omega |v|^{2^*} dx \leq 0.$$

Por outro lado,

$$\varphi((-v,v)+\lambda(z,z)) = \int_\Omega [\nabla(-v+\lambda z)\nabla(v+\lambda) - \frac{|-v+\lambda z|^{2^*}}{2^*} - \frac{|v+\lambda z|^{2^*}}{2^*}]dx.$$

Daí,

$$\varphi((-v,v)+\lambda(z,z)) = -\frac{1}{2}\|(-v,v)\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\|(z,z)\|^2 - \frac{1}{2^*}(\|-v+\lambda z\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v+\lambda z\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}).$$

Como,

$$(\|-v+\lambda z\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v+\lambda z\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}) \geq 2^{2^*}\lambda^{2^*}\|z\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \geq \lambda^{2^*}\|(z,z)\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)\times L^{2^*}(\Omega)},$$

e

$$\|(z,z)\| = \frac{\|(z,z)\|_{L^{2^*}(\Omega)\times L^{2^*}(\Omega)}}{\|(z,z)\|_{L^{2^*}(\Omega)\times L^{2^*}(\Omega)}} \leq C.\|(z,z)\|_{L^{2^*}(\Omega)\times L^{2^*}(\Omega)}.$$

Então,

$$\varphi((-v,v)+\lambda(z,z)) \leq -\frac{1}{2}\|(-v,v)\|^2 + \frac{\lambda^2}{2} - C\lambda^{2^*}. \tag{4.16}$$

Para $w \in Y \oplus \mathbb{R}(z,z)$, temos

$$\varphi(w) \to -\infty, \text{ desde que } \|w\| \to +\infty.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|(-v+\lambda z, v+\lambda z)\|^2 \\ &= \|(-v,v)\| + \lambda^2\|(z,z)\|^2 \\ &= \|(-v,v)\|^2 + \lambda^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|w\| \to +\infty \Rightarrow \lambda \to +\infty.$$

Da inequação (4.16), temos

$$\varphi(w) \leq -\frac{1}{2}(\|(-v,v)\|^2 + \lambda^2) + (\lambda^2 - c\lambda^{2^*}).$$

Observe que,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\lambda^2 - C\lambda^{2^*}) < +\infty, \text{ se } 0 \leq \lambda \leq (\frac{1}{C})^{1/(2^*-2)} \text{ e} \\ (&\lambda^2 - C\lambda^{2^*}) < 0, \text{ se } \lambda > (\frac{1}{C})^{1/(2^*-2)}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\varphi(w) \to -\infty, \text{ sempre que } \|w\| \to +\infty.$$

Assim, existe $\rho > r > 0$ tal que

$$\|w\| \geq \rho \Rightarrow \varphi(w) < 0.$$

Para este ρ fixado definimos o conjunto M_0. Então se $w \in 0$ temos uma das seguintes possibilidades:

- $\|w\| = \rho$ e $\lambda \geq 0 \Rightarrow \varphi(w) < 0,$ ou
- $\|w\| \leq \rho$ e $\lambda = 0 \Rightarrow \varphi(w) = \varphi(-v, v) \leq 0.$

Além disso, como $\varphi(0,0) = 0$, concluímos que

$$\max_{M_0} \varphi = 0.$$

Por outro lado, mostraremos que a imagem por φ de um conjunto limitado é limitada. desta forma, sendo M um conjunto limitado, temos $\varphi(M)$ é limitado e portanto,

$$d = \sup_{M} \varphi < +\infty.$$

Então, fixado $K > 0$, considere o conjunto

$$A_K = \{(u,v) \in X;\ \|(u,v)\| \leq K\}.$$

Observe que para qualquer $(u,v) \in A_K$, temos

$$|\varphi(u,v)| = |\int_\Omega [\nabla u \nabla v - \frac{|u|^{2^*}}{2^*} - \frac{|v|^{2^*}}{2^*}] dx| \leq \int_\Omega |\nabla u \nabla v - \frac{|u|^{2^*}}{2^*} - \frac{|v|^{2^*}}{2^*}| dx.$$

Pela Desigualdade Triângular, obtemos

$$|\varphi(u,v)| \leq \int_\Omega |\nabla u \nabla v| dx + \frac{1|u|^{2^*}}{2^*} \|(u,v)\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega) \times L^{2^*}(\Omega)}.$$

Da Desigualdade de Schwarz, obtemos

$$|\varphi(u,v)| \leq \int_\Omega |\nabla u|\ |\nabla v| dx + \frac{1|u|^{2^*}}{2^*} C_1^{2^*} \|(u,v)\|^{2^*} \leq \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) + K_1 \|(u,v)\|^{2^*}.$$

Daí,

$$|\varphi(u,v)| \leq \frac{\|(u,v)\|}{2} + K_1 \|(u,v)\|^{2^*} \leq \frac{K}{2} + K_1 K^{2^*}.$$

Concluindo nossa afirmação.

■

Lema 4.7 *Existem* $c \in [b,d]$ *e uma seqüência limitada* $((u_n,v_n)) \subset X$ *tal que*

$$\varphi(u_n,v_n) \to c \ e \ \varphi'(u_n,v_n) \to 0. \tag{4.17}$$

Demonstração. Segue do Corolário do Teorema do Linking Generalizado (Corolário 3.9) e dos Lemas 4.4-4.6 que existem $c \in [b,d]$ e uma seqüência $((u_n,v_n)) \subset X$ satisfazendo (4.17). Então, falta mostrarmos que a seqüência $((u_n,v_n))$ é limitada.

Observe que,

$$\begin{aligned}\varphi(u_n,v_n) - & \tfrac{1}{2} \quad \langle \varphi'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle \\ = & \int_\Omega [\nabla u \nabla v - \frac{|u_n|^{2^*}}{2^*} - \frac{|v_n|^{2^*}}{2^*} - \frac{1}{2}(2\nabla u_n \nabla v_n - |u_n|^{2^*} - |v_n|^{2^*})]dx \\ = & \mu(\|u_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}),\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $\mu = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})$. Como $\varphi(u_n,v_n) \to c$ e $\varphi'(u_n,v_n) \to 0$, temos para todo $\epsilon > 0$ e para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos

$$\|\varphi'(u_n,v_n)\| < \epsilon \text{ e } c - \epsilon < |\varphi(u_n,v_n)| < c + \epsilon.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}|\varphi(u_n,v_n) - & \tfrac{1}{2} \quad \langle \varphi'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle| \\ \leq & |\varphi(u_n,v_n)| + \frac{1}{2}|\langle \varphi'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle| \\ \leq & |\varphi(u_n,v_n)| + \frac{1}{2}\|\varphi'(u_n,v_n)\|\|(u_n,v_n)\|.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Temos também,

$$\begin{aligned}|\varphi(u_n,v_n) - & \tfrac{1}{2} \quad \langle \varphi'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle| \\ \geq & |\varphi(u_n,v_n)| - \frac{1}{2}|\langle \varphi'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle| \\ \geq & |\varphi(u_n,v_n)| - \frac{1}{2}\|\varphi'(u_n,v_n)\|\|(u_n,v_n)\|.\end{aligned} \tag{4.20}$$

De (4.18)- (4.20), obtemos

$$c + \epsilon + \epsilon\|(u_n,v_n)\| \geq \mu(\|u_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}) \geq c - \epsilon - \epsilon\|(u_n,v_n)\|. \tag{4.21}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|Q(u_n,v_n)\| - & \epsilon \quad \|Q(u_n,v_n)\| \\ \leq & |\|Q(u_n,v_n)\|^2 - \frac{1}{2}\langle \varphi'(u_n,v_n,u_n+v_n)\rangle|.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\|Q(u_n,v_n)\| - \epsilon & \quad \|Q(u_n,v_n)\| \\ & \leq \int_\Omega [(|u_n|^{2^*-2}u_n + |v_n|^{2^*-2}v_n)(\frac{u_n+v_n}{2})]dx \\ & \leq \int_\Omega |u_n|^{2^*-1}|\frac{u_n+v_n}{2}|dx + \int_\Omega |v_n|^{2^*-1}v_n|\frac{u_n+v_n}{2}|dx.\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\|Q(u_n,v_n)\| - \epsilon & \quad \|Q(u_n,v_n)\| \\ & \leq (\|u_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)})\|\frac{u_n+v_n}{2}\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ & \leq \|Q(u_n,v_n)\|_{L^{2^*}(\Omega)\times L^{2^*}(\Omega)}(\|u_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)}).\end{aligned}$$

Pela imersão contínua $D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$,segue que

$$\begin{aligned}\|Q(u_n,v_n)\| - \epsilon & \quad \|Q(u_n,v_n)\| \\ & \leq K\|Q(u_n,v_n)\|(\|u_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)}).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\|P(u_n,v_n)\| - \epsilon & \quad \|P(u_n,v_n)\| \\ & \leq K\|P(u_n,v_n)\|(\|u_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)}).\end{aligned}$$

Somando as duas inequações anteriores, obtemos

$$\|Q(u_n,v_n)\| + \|P(u_n,v_n)\| - 2\epsilon \leq 2K(\|u_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)}).$$

Note que,

$$\|(u_n,v_n)\| = \|P(u_n,v_n) + Q(u_n,v_n)\| \leq \|Q(u_n,v_n)\| + \|P(u_n,v_n)\|,$$

e pela convexidade da aplicação $x \mapsto |x|^{2^*/(2^*-1)}$, temos

$$2K(\|u_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)}) \leq 2K(\|u_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)})^{(2^*-1)/2^*}.$$

Da inequação (4.21) obtemos

$$2K(\|u_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|v_n\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega)}) \leq 2K(\frac{c+\epsilon}{\mu} + \frac{\epsilon}{\mu}\|(u_n,v_n)\|)^{(2^*-1)/2^*}.$$

Logo,

$$2K(\|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*-1} + \|v_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*-1}) \leq c_1 + c_2\|(u_n, v_n)\|^{(2^*-1)/2^*}.$$

Portanto,

$$\|(u_n, v_n)\| - 2\epsilon \leq c_1 + c_2\|(u_n, v_n)\|^{(2^*-1)/2^*}.$$

Desta forma, concluímos que a seqüência $((u_n.v_n))$ é limitada em X.

4.3 Demonstração dos Teoremas Principais

Nesta seção apresentaremos as demonstrações dos principais resultados deste capítulo, que são os Teoremas 4.1 e 4.2.

Primeiramente, estudaremos a existência de solução não-trivial para o seguinte sistema de equaçõesde Poisson acopladas:

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{2^*-2}v, \\ -\Delta v = |u|^{2^*-2}u, \\ u, v \in D_0^{1,2}(\Omega_*), \end{cases}$$

Uma vez que, esse sistema é hamiltoneano, o funcional energia associado a este sitema é dado por,

$$\varphi(u, v) = \int_{\Omega_*} [\nabla u \nabla v - \frac{|u|^{2^*}}{2^*} - \frac{|v|^{2^*}}{2^*}]dx,$$

e portanto, procurar soluções para (1) é equivalente a procurar os pontos críticos do funcional φ.

Demontração do Teorema 4.1. Considerando $\Omega = \Omega_*$. Pelo Lema 4.7, existe uma seqüência $((u_n, v_n)) \subset X$ limitada, satisfazendo (4.17).

Suponhamos que,

$$\delta_1 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sup_{a\in\mathbb{Z}^N} \int_{B(a,\sqrt{N})\cap\Omega_*} |u_n|^{2^*}dx = 0,$$

e

$$\delta_2 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sup_{a\in\mathbb{Z}^N} \int_{B(a,\sqrt{N})\cap\Omega_*} |v_n|^{2^*}dx = 0.$$

Segue do Lema 4.3 que $u_n, v_n \to 0$ em $L^{2^*}(\Omega_*)$. Recorde que,

$$c + \epsilon + \epsilon\|(u_n, v_n)\| \geq \mu(\|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega_*)}^{2^*} + \|v_n\|_{L^{2^*}(\Omega_*)}^{2^*}) \geq c - \epsilon - \epsilon\|(u_n, v_n)\|.$$

Uma vez que, $((u_n.v_n))$ é limitada em X, existe $K > 0$ tal que

$$\|(u_n, v_n)\| \leq K.$$

Logo,

$$c + \epsilon + \epsilon K \geq \mu(\|u_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega_*)} + \|v_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega_*)}) \geq c - \epsilon - \epsilon K.$$

Passando ao limite com $n \to +\infty$, obtemos

$$c + \epsilon + \epsilon K \geq 0 \geq c - \epsilon - \epsilon K, \ \forall \epsilon > 0.$$

Portanto,$c = 0$. O que é absurdo, pois $c > b > 0$. Então,l devemos ter $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Afirmação 4.3 *Passando a uma subseqüência se necessário, existe $a_n \in \mathbb{Z}^N$ tal que*

$$\int_{B(a_n,\sqrt{N})\cap\Omega_*} (|u_n|^{2^*} + |v_n|^{2^*})dx > \frac{\delta}{2}.$$

De fato, considere $\delta_1 \geq \delta_2$, passando a uma subseqüência se necessário, temos por propriedade de $\limsup$

$$\sup_{a\in\mathbb{Z}^N} \int_{B(a,\sqrt{N})\cap\Omega_*} |u_n|^{2^*} > \delta_1 > 0.$$

Pela definição de limite, segue que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{a\in\mathbb{Z}^N} \int_{B(a,\sqrt{N})\cap\Omega_*} |u_n|^{2^*} = 0,$$

e

$$\sup_{a\in\mathbb{Z}^N} \int_{B(a,\sqrt{N})\cap\Omega_*} |u_n|^{2^*} \in (\delta_1 - \epsilon, \delta_1 + \epsilon).$$

Em particular, se considerarmos $\epsilon = \frac{\delta_1}{2}$, temos

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{a\in\mathbb{Z}^N} \int_{B(a,\sqrt{N})\cap\Omega_*} |u_n|^{2^*} > \frac{\delta_1}{2}.$$

Por propriedde de supremo, existe $a_n \in \mathbb{Z}^N$ tal que

$$\int_{B(a_n,\sqrt{N})\cap\Omega_*} |u_n|^{2^*} > \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Logo,

$$\int_{B(a_n,\sqrt{N})\cap\Omega_*} (|u_n|^{2^*} + |v_n|^{2^*})dx > \frac{\delta_1}{2} + \int_{B(a_n,\sqrt{N})\cap\Omega_*} |v_n|^{2^*}dx \geq \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Procedemos de forma análoga se $\delta_2 \geq \delta_1$.

A seqüência $((\hat{u}_n, \hat{v}_n))$ definida por $\hat{u}_n = u_n(x+a_n)$ e $\hat{v}_n = v_n(x+a_n)$ é tal que

$$\int_{B(0,\sqrt{N})\cap\Omega_*} (|\hat{u}_n|^{2^*} + |\hat{v}_n|^{2^*})dx > \frac{\delta}{2}$$

e satisfaz (4.17). Passando a uma subseqüência , se necessário, temos

$$(\hat{u}_n, \hat{v}_n) \rightharpoonup (u,v) \text{ em } X.$$

Pelo Lema 4.1 temos $\hat{u}_n \to u$ e $\hat{v}_n \to v$ em $L^2_{loc}(\Omega_*)$. Portanto, $(u,v) \neq 0$.

Por fim, a continuidade sequencialmente fraca de $\nabla\varphi$ implica em

$$0 \leq \|\nabla\varphi(u,v)\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\nabla\varphi(u_n,v_n)\| = 0.$$

Consequentemente, (u,v) é uma solução não-trivial de (1).

Agora, estudaremos o senginte problema em $\Omega_{**} = \mathbb{R}^l \times \omega_{**}$ um domínio cilíndrico, com ω_{**} um domínio limitado em $\mathbb{R}^{N-l}$ e $1 \leq l \leq N-1$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \gamma v|v|^{2^*-2}v, \\ -\Delta v = \lambda u|u|^{2^*-2}u, \\ \quad u, v \in H^1_0(\Omega_{**}), \end{cases}$$

onde $0 < \gamma,\ \lambda < \lambda_1(\Omega_{**})$, com $\lambda_1(\Omega_{**})$ sendo a melhor constante na Desigualdade de Poicaré.

Consideremos $\overline{X} = H^1_0(\Omega_{**}) \times H^1_0(\Omega_{**})$, da Desigualdade de Poincaré obtemos que a norma usual de $\overline{X}$ é equivalente a norma induzida pelo produto interno definido em (4.12). Considere também os conjuntos

$$\overline{Y} = \{(-v,v) \in \overline{X}\} \text{ e } \overline{Z} = \{(u,u) \in \overline{X}\}.$$

e denotemos por $P_{\overline{Y}}$ (resp.$P_{\overline{Z}}$) a projeção ortogonal de $\overline{X}$ em $\overline{Y}$ (resp. $\overline{Z}$).

Sendo (2) um sistema hamiltoneano então o funcional energia associado a este sistema e definido por

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \varphi_1(u,v) = \displaystyle\int_{\Omega_*} [\nabla u \nabla v - \frac{\gamma u^2}{2} - \frac{\lambda v^2}{2} - \frac{|u|^{2^*}}{2^*} - \frac{|v|^{2^*}}{2^*}]dx. \end{array}$$

Assim, o problema de encontrar soluções para o problema $(**)$ reduz-se a encontrar pontos críticos do funcional φ_1. Observe que,

$$\varphi_1(u,v) = \frac{\|P_{\overline{Z}(u,v)}\|^2}{2} - \frac{\|P_{\overline{Y}(u,v)}\|^2}{2} - \psi(u,v) - \hat{\psi}(u,v),$$

ou seja,

$$\varphi_1(u,v) = \varphi(u,v) - \hat{\psi}(u,v),$$

onde $\hat{\psi}(u,v) = \int_{\Omega_{**}}[\frac{\gamma u^2}{2} + \frac{\lambda v^2}{2}]dx$.

Da Proposição 2.3 segue que, $\hat{\psi} \in C^1(X,\mathbb{R})$, e procedendo de forma análoga a que fizemos para ψ, pode-se provar que $\hat{\psi}$ é fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente e $\hat{\psi}'$ é fracamente sequencialmente contínua e além disso,

$$\langle \hat{\psi}'(u,v),(w,z)\rangle = \int_{\Omega_{**}} [\gamma uw + \lambda vz]dx.$$

O seguinte resultado estabelece a existência de uma seqüência limitada de Palais-Smale para o funcional φ_1.

Lema 4.8 *Existem $c > o$ e uma seqüência limitada $((u_n,v_n)) \subset \overline{X}$ tal que*

$$\varphi_1(u,v) \to c > 0 \ e \ \varphi_1'(u,v) \to 0. \tag{4.22}$$

Demonstração. Definamos,

$$\beta = \frac{(\gamma - \lambda)}{2}.$$

Observe que,

$$\varphi_1(u,u) = \frac{1}{2}\|(u,u)\|^2 - \frac{\beta}{2}\|(u,u)\|_{L^2(\Omega_{**})\times L^2(\Omega_{**}} - \frac{1}{2^*}\|(u,u)\|_{L^{2^*}(\Omega_{**})\times L^{2^*}(\Omega_{**})}.$$

Pela Desigualdade de Poicaré e pelo Teorema de Imersão de Sobolev, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\varphi(u,u) \geq (\frac{\lambda_1(\Omega_{**}) - \beta}{2\lambda_1(\Omega_{**})})\|(u,u)\|^2 - C\|(u,u)\|^{2^*}.$$

Então, se considerarmos

$$0 < r < (\frac{\lambda_1(\Omega_{**}) - \beta}{2\lambda_1(\Omega_{**})})^{1/(2^*-2)},$$

temos,

$$b = \inf_{\substack{(u,u)\in\overline{Z} \\ \|(u,u)\|=r}} \varphi_1(u,u) > 0 = \min_{\substack{(u,u)\in\overline{Z} \\ \|(u,u)\|\leq r}} a\varphi_1(u,u). \tag{4.23}$$

Por argumentos análogos aos usados no Lema 4.6, existe $\rho > r$ tal que

$$\max_{M_0} \varphi_1 = 0 \text{ e } d = \sup_{M} \varphi_1 < +\infty. \tag{4.24}$$

Temos pelo Corolário do Teorema do Linking Generalizado (Coroláro 3.16 a existência de uma seqüência $((u_n, v_n)) \subset \overline{X}$ satisfazendo (4.22) para $c \in [b, d]$. Novamente, devemos provar que esta seqüência é limitada. Vejamos,

$$\varphi_1(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\langle \varphi_1'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle = \varphi(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\langle \varphi'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle.$$

Então, como já vimos na demonstração do Lema 4.7

$$c + \epsilon + \epsilon\|(u_n, v_n)\| \geq \mu(\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*}) \geq c - \epsilon - \epsilon\|(u_n, v_n)\|.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos $\lambda \geq \gamma$. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\langle \hat{\psi}'(u_n, v_n), (u_n + v_n, u_n + v_n)\rangle| &= \frac{1}{2}\left|\int_{\Omega_{**}} [\gamma u_n(u_n + v_n) + \lambda v_n(u_n + v_n)]dx\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_{\Omega_{**}} [\gamma u_n^2 + \gamma u_n v_n + \lambda u_n v_n + \lambda v_n^2]dx\right| \\
&\leq \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_{**}} |u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2|dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\langle \hat{\psi}'(u_n, v_n), (u_n + v_n, u_n + v_n)\rangle| &\leq \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_{**}} |u_n + v_n|^2 dx, \\
&\leq \frac{\lambda}{2}\|u_n + v_n\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\langle \hat{\psi}'(u_n, v_n), (u_n + v_n, u_n + v_n)\rangle| &\leq \frac{\lambda}{2\lambda_1(\Omega_{**})}\|\nabla(u_n + v_n)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{\lambda}{4\lambda_1(\Omega_{**})}\|(u_n + v_n, u_n + v_n)\|^2.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2}|\langle \hat{\psi}'(u_n, v_n), (u_n + v_n, u_n + v_n)\rangle| \leq \frac{\lambda}{\lambda_1(\Omega_{**})}\|P_{\overline{Z}}(u_n, v_n)\|^2.$$

Analogamente, mostramos

$$\frac{1}{2}|\langle \hat{\psi}'(u_n, v_n), (u_n + v_n, u_n + v_n)\rangle| \leq \frac{\lambda}{\lambda_1(\Omega_{**})}\|P_{\overline{Y}}(u_n, v_n)\|^2.$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
(\frac{\lambda_1(\Omega_{**} - \lambda)}{\lambda_1(\Omega_{**})})\|P_{\overline{Z}}(u_n, v_n)\|^2 &- \epsilon\|P_{\overline{Z}}(u_n, v_n)\| \\
&\leq |\|P_{\overline{Z}}(u_n, v_n)\|^2 - \frac{1}{2}\langle\varphi'(u_n, v_n), (u_n + v_n, u_n + v_n)\rangle| \\
&- \frac{1}{2}|\langle\hat{\psi}'(u_n, v_n), (u_n + v_n, u_n + v_n)\rangle|.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
(\frac{\lambda_1(\Omega_{**} - \lambda)}{\lambda_1(\Omega_{**})})\|P_{\overline{Z}}(u_n, v_n)\|^2 &- \epsilon\|P_{\overline{Z}}(u_n, v_n)\| \\
&\leq |\|P_{\overline{Z}}(u_n, v_n)\|^2 - \frac{1}{2}\langle\varphi'(u_n, v_n), (u_n + v_n, u_n + v_n)\rangle| \\
&\leq K\|P_{\overline{Z}}(u_n, v_n)\|(\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*-1} + \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*-1}),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
(\frac{\lambda_1(\Omega_{**} - \lambda)}{\lambda_1(\Omega_{**})})\|P_{\overline{Z}}(u_n, v_n)\| - \epsilon \leq K(\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*-1} + \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*-1}).
$$

Analogamente,

$$
(\frac{\lambda_1(\Omega_{**} - \lambda)}{\lambda_1(\Omega_{**})})\|P_{\overline{Y}}(u_n, v_n)\| - \epsilon \leq K(\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*-1} + \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*-1}).
$$

Procedendo da mesma forma que fizemos no Lema 4.7, concluímos que $((u_n, v_n))$ é limitada em $\overline{X}$.

Demonstração do Teorema 4.2. Seja $((u_n, v_n)) \subset \overline{X}$ a seqüência limitada dada no Lema 4.8 e defina

$$
\delta_1 = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \sup_{x \in \Omega_{**}} \int_{B(x,1)} |u_n|^{2^*} dx,
$$

e

$$
\delta_2 = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \sup_{x \in \Omega_{**}} \int_{B(x,1)} |v_n|^{2^*} dx.
$$

Repetindo o mesmo argumento usado na prova do Teorema 4.1, temos

$$
\delta = \max \delta_1, \delta_2 > 0,
$$

então, passando a uma subseqüência se necessário, existe $x_n = (y_n, z_n) \in \Omega_{**}$ tal que

$$
\int_{B(x_n,1)} [|u_n|^{2^*} + |v_n|^{2^*}]dx > \frac{\delta}{2}.
$$

Definindo a seqüência $(\hat{u}_n, \hat{v}_n)$ por

$$\hat{u}_n(x) = u_n(y + y_n, z)$$

e

$$\hat{v}_n(x) = v_n(y + y_n, z).$$

Pelo Teorema da Mudança de Variáveis, temos

$$\int_{B((0,z_n),1)} [|\hat{u}_n|^{2^*} + |\hat{v}_n|^{2^*}]dx > \frac{\delta}{2}.$$

e satisfaz a condição (P.S).

Considerando,

$$R = \max_{z \in \omega_{**}} |z|,$$

obtemos

$$B((0, z_n), 1) \subset B(0, R + 1).$$

Assim,

$$\int_{B(0,R+1)} [|\hat{u}_n|^{2^*} + |\hat{v}_n|^{2^*}]dx > \frac{\delta}{2}.$$

Finalmente, passando a uma subseqüência se necessário obtemos

$$(\hat{u}_n, \hat{v}_n) \rightharpoonup (u, v) \text{ em } X.$$

Por um argumento análogo ao usado na demonstração do Teorema 4.1, concluímos que (u, v) é uma solução não-trivial de (2).

Apêndice A

Teoria do Grau de Brouwer

Neste apêndice definiremos o Grau de Brouwer e apresentaremos os resultados referentes a esta Teoria de maior relevância no nosso trabalho. As demonstrações dos resultados a seguir, podem ser encontrados em [2].

Primeiramente, definiremos o grau para o caso regular. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado.

Definição A.1 *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $S = \{x \in \Omega;\ J_\varphi(x) = 0\}$, onde J_φ representa a matriz jacobiana de φ e $b \in \mathbb{R}^N$, com $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação φ em relação a Ω no ponto b, como sendo o número inteiro*

$$deg(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi(\xi_i)), \tag{A.1}$$

onde sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & se\ t > 0 \\ -1, & se\ t < 0. \end{cases}$$

Afirmação A.2 *A soma em (A.1), é finita.*

De fato, mostraremos que o conjunto $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito. Primeiramente, observe que se $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$, temos

$$J_\varphi(x) \neq 0,$$

então, em virtude do Teorema da Aplicação Inversa, φ é um diferomorfismo de uma vizinhança U de x sobre uma vinhança V de b.

Tendo em vista que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é fechado em $\overline{\Omega}$, temos $\varphi^{-1}(\{b\})$ fechado e limitado em $\mathbb{R}^N$. Portanto, $\varphi^{-1}(\{b\})$ é compacto.

Para cada $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$, considere a bola $B_{r_x}(x) \subset U_x$. Desse modo,

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{x \in \varphi^{-1}(\{b\})} B_{r_x}(x),$$

isto é, $\{B_{r_x}(x)\}_{x \in \varphi^{-1}(\{b\})}$ é um cobertura aberta para o compacto $\varphi^{-1}(\{b\})$, segue do Teorema de Borel-Lebesge que podemos extrair uma subcobertura finita dessa cobertura de modo que

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \bigcup_{j=1}^{k}(\{b\}) B_{r_j}(x_j),$$

mostrando que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito.

A definição de Grau pode ser estendida para uma caso mais geral, onde consideramos $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Para uma descrisão detalhada desse processo, consulte [**??**].

No que segue enuciamos os principais propriedades do Grau Topológico de Brouwer:

(P_1) Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança V de φ na topologia $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, tal que para todo $\psi \in V$ temos

- **(i)** $b \notin \psi(\partial\Omega)$
- **(ii)** $deg(\varphi, \Omega, b) = deg(\psi, \Omega, b)$.

(P_2) **(Invariância do Grau por Homotopia)** Sejam $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1].\mathbb{R}^N)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então, $deg(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante para todo $t \in [0,1]$.

(P_3) O grau é constante em componentes conexas de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$.

(P_4) **(Aditividade)** Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, com Ω_1, Ω_2 abertos, disjuntos e limitados. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\Omega_2)$, então

$$deg(\varphi, \Omega, b) = deg(\varphi, \Omega_1, b) + deg(\varphi, \Omega_2, b).$$

Os resultados a seguir são consequência das propriedades anteriores:

(C_1)**(Normalização)** Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^N$, então

$$deg(I,\Omega,b)\begin{cases} 1, & \text{se } b\in\Omega \\ 0, & \text{se } b\notin\overline{\Omega}. \end{cases}$$

(C_2)**(Existência de Solução)** Se $deg(\varphi,\Omega,b)\neq 0$, então existe $x_0\in\Omega$ tal que

$$\varphi(x_0)=b.$$

(C_3) Se $b\notin\varphi(\overline{\Omega})$, então

$$deg(\varphi,\Omega,b)=0.$$

(C_4) Se $deg(\varphi,\Omega,b)\neq 0$, então existe $\delta>0$ tal que

$$B_\delta(b)\subset\varphi(\Omega).$$

(C_5) Se $\varphi(\Omega)$ está contido num subespaço próprio de $\mathbb{R}^N$, temos

$$deg(\varphi,\Omega,b)=0.$$

(C_6)**(Excisão)** Seja $K\subset\overline{\Omega}$ um compacto e $b\notin\varphi(K)\cup\varphi(\partial\Omega)$. Então,

$$deg(\varphi,\Omega,b)=deg(\varphi,\Omega\setminus K,b).$$

(C_7) Seja $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ uma família de conjuntos abertos contidos em Ω, dois a dois disjuntos, e b um ponto tal que

$$\varphi^{-1}(b)\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i.$$

Então, $deg(\varphi,\Omega_i,b)=0$ exceto de um número finito de índices $i\in I$ e mais

$$deg(\varphi,\Omega,b)-\sum_{i\in I}deg(\varphi.\Omega_i,b).$$

(C_8)**(Dependência da Fronteira)** Suponha que $\varphi=\psi$ em $\partial\Omega$ e que $\varphi,\psi\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$. Então, para todo $b\notin\varphi(\partial\Omega)=\psi(\partial\Omega)$, temos

$$deg(\varphi,\Omega,b)=deg(\psi,\Omega,b).$$

(C_9) Sendo $\varphi, \psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, e supondo que $\hat{H} \in C(\partial\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ com,

$$\hat{H}(\cdot, 0) = \varphi|_{\partial\Omega} \text{ e } \hat{H}(\cdot, 1) = \psi|_{\partial\Omega},$$

tem-se que

$$deg(\varphi, \Omega, b) = deg(\psi, \Omega, b).$$

(C_{10}) **(Não-Contração da Bola Unitária)** Não existe uma aplicação $\varphi : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \partial B_1(0)$, com $\varphi|_{\partial B_1(0)} = I$.

(C_{11}) Se N é impar, não existe aplicação

$$H : S^{N-1} \times [0,1] \longrightarrow S^{N-1}$$

verificando $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = -1$, para todo $x \in S^{N-1}$.

(C_{12}) Se N é impar, não existe aplicação contínua $\varphi : S^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ com $\varphi(x) \neq 0$ e $(\varphi(x), x) = 0,\ \forall x \in S^{N-1}$.

Teorema A.3 (Propriedade de Contração) *(veja [15]) Seja* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *tais que* $0 \notin f(\partial\Omega)$. *Se existe um subespaço* Y *de* $\mathbb{R}^N$ *tal que* $(id - f)(U) \subset Y$ *então*

$$deg(f, \Omega, 0) = deg(f|_{\Omega \cap Y}, \Omega \cap Y, 0).$$

Apêndice B

Identidade de Pohozaev

Neste Apêndice demonstraremos a Identidade de Pohozaev. Para tanto consideraremos Ω um domínio limitado e regular do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Con sidere o problema

$$(P) : \begin{cases} -\Delta u = f(u) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Teorema B.1 *Seja $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, limitado e regular.Dado $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, tal que u satisfaz (P) temos*

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \sigma \cdot \nu d\sigma = N \int_{\Omega} F(u)dx - \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

onde ν é o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$, e F é a primitiva de f.

Demonstração. Segue de (P) que,

$$0 = [\Delta u + f(u))]x \cdot \nabla u.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} div(xF(u)) &= div(x_1 F(u), \cdots, x_n F(u)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 F(u)) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_N}(x_N F(u)) \\ &= (F(u) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} F(u)) + \cdots + (F(u) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} F(u)) \\ &= NF(u) + f(u) x \cdot \nabla u. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Além disso, após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$div(\nabla u(x\cdot\nabla u)-x\frac{|\nabla u|^2}{2})+\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2. \tag{B.2}$$

Pelo Teorema do Divergente, segue que

$$\int_{\partial\Omega}[\sigma F(u)+\nabla u(\sigma\cdot\nabla u)-\sigma\frac{|\nabla u|^2}{2}]\cdot\nu d\sigma=\int_\Omega div[\sigma F(u)+\nabla u(\sigma\cdot\nabla u)-\sigma\frac{|\nabla u|^2}{2}]dx.$$

De (B.1) e (B.2), temos

$$\int_{\partial\Omega}[\sigma F(u)+\nabla u(\sigma\cdot\nabla u)-\sigma\frac{|\nabla u|^2}{2}]\cdot\nu d\sigma=\int_\Omega div[NF(u)-\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2]dx.$$

Como $u\in H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, então $u=0,$ em $\partial\Omega$. Logo,

$$F(u)=0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Uma vez que, ∇u é paralelo a ν, podemos escrever

$$\nabla u=(\nabla u\cdot\nu)\nu.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}[\nabla u(\sigma\cdot\nabla u)]\nu d\sigma &= \int_{\partial\Omega}(\sigma\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma\\ &= \int_{\partial\Omega}(\sigma\cdot(\nabla u\cdot\nu)\nu)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma\\ &= \int_{\partial\Omega}(\nabla u\cdot\nu)^2(\sigma\cdot\nu)d\sigma\\ &= \int_{\partial\Omega}|nablau|^2(\sigma\cdot\nu)d\sigma\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2\sigma\cdot\nu d\sigma=N\int_\Omega F(u)dx-\frac{N-2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx.$$

■

Apêndice C

Resultados Ultilizados

No que segue enunciaremos os teoremas que foram ultilizados no decorrer do trabalho.

Teorema C.1 *[15] Suponha que* $|\Omega| < \infty$, $1 \leq p, r < +\infty$, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *e*

$$|f(x,u)| \leq c(1 + |u|^{p/r}).$$

Então, para todo $u \in L^p(\Omega)$, $f(\cdot, u) \in L^r(\Omega)$ *e o operador*

$$\begin{aligned} A : L^p(\Omega) \quad &\longrightarrow \quad L^r(\Omega) \\ u \quad &\longmapsto \quad A(u) = f(x,u) \end{aligned}$$

é contínuo.

Definição C.2 *[15] No espaço* $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *definimos a norma*

$$\|u\|_{p \wedge q} = \|u\|_p + \|u\|_q.$$

No espaço $L^p(\Omega) \oplus L^r(\Omega)$ *definimos a norma*

$$\|u\|_{p \vee q} = \inf\{\|v\|_p + \|w\|_q;\ v \in L^p(\Omega), w \in L^q(\Omega) \text{ e } u = v + w\}.$$

Teorema C.3 *[15] Suponha que* $1 \leq p, q, r, s < \infty$, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *e*

$$|f(x,u)| \leq c(|u|^{p/r} + |u|^{q/s}).$$

Então, para todo $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $f(\cdot, u) \in L^r(\Omega) \oplus L^s(\Omega)$ *e o operador*

$$\begin{aligned} A : L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) &\longrightarrow L^r(\Omega) \oplus L^s(\Omega) \\ u &\mapsto A(u) = f(x, u) \end{aligned}$$

Teorema C.4 *[15][Brésiz-Lieb] Sejam* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^N$ *e* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. *Se*

a) (u_n) *é limitada em* $L^p(\Omega)$,

b) $u_n(x) \to u(x)$, *q.t.p em* Ω, *então*

$$\lim_{n \to +\infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p$$

Observação C.1 *[15] Sob as hipóteses do último Teorema,* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^p(\Omega)$.

Teorema C.5 *[9] Sejam* E *um espaço de Banach,* $U \subset E$ *um aberto e* $f : U \longrightarrow E$ *um campo vetorial lipschitziano com constante de Lipschitz* $K > 0$. *Dados* $x_0 \in U$, $0 < a < 1$, *supondo que*

$$\overline{B}_{2a}(x_0) \subset U$$

e que f *é limitado por uma constante* $L > 0$ *nesta bola. Se* b *é um número positivo tal que* $b < a/L$ *e* $b < 1/K$, *então existe um única aplicação*

$$\sigma : (-b, b) \times B_a(x_0) \longrightarrow U$$

tal que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t, x) = f(\sigma(t, x)) \\ \sigma(0, x) = x. \end{cases}$$

Corolário C.6 *[9] A aplicação* σ *definida no Teorema anterior é contínua.*

Teorema C.7 (Brézis-Kato) *[14] Sejam* Ω *um domínio de* $\mathbb{R}^N$ *e* $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory tal que para quase todo* $x \in \Omega$, *vale*

$$|g(x, u)| \leq a(x)(1 + |u|),$$

onde $a \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. *Se* $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *é uma solução da equação*

$$-\Delta u = g(x, u) \text{ em } \Omega.$$

Então, $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ *para qualquer* $q < +\infty$. *Se* $u \in H^1_0(\Omega)$ *e* $a \in L^{N/2}(\Omega)$, *então* $u \in L^q(\Omega)$ *para qualquer* $q < +\infty$

Teorema C.8 *[7] Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *com* $1 < p < +\infty$. *Então existe um único* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ em } \Omega, \\ u = 0, \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe $c > 0$ *que não depende de* f *ou de* u *tal que*

$$\|u\|_{2,p} \leq c\|f\|_p.$$

Definição C.9 *[10] Uma série de funções* $f_n : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se normalmente convergente quando existe uma seqüência de constantes* $a_n \geq 0$ *tais que* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge e* $|f_n(x)| \leq a_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $x \in X$.

Teorema C.10 (Teste de Weierstrass) *(Veja [10]) Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *é normalmente convergente, então* $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *são uniformemente convergentes.*

Teorema C.11 *(Veja [10]) Seja* a *um ponto de acumulação de* X. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *é uniformemente convergente para* f *em* X *e para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $L_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$, *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} L_n$ *converge para* $\lim_{x \to a} f(x)$.

Proposição C.12 *Dados* $(u_n) \subset \mathbb{R}$ *e* $u \in \mathbb{R}$. *Então,* $u_n \to u$ *se, e somente se, toda subseqüência admitir uma sub-subseqüência que converge para* u.

Teorema C.13 *(Veja [6]) Para todo espaço metrico* X *as segintes condições são equivalentes:*

(i) *O espaço* X *é paracompacto.*

(ii) *Todo cobertura aberta do espaço* X *tem uma partição da unidade localmente finita subordinada a ela.*

(iii) *Toda cobertura aberta do espaço* X *tem uma partição da unidade subordinada a ela.*

Teorema C.14 *(Veja [6]) Em um espaço métrico, para todo compacto* K *e qualquer conjunto aberto* A *contendo* K, *existe* $r > 0$ *tal que* $B(K, r) \subset A$.

Teorema C.15 *(Veja [3]) Sejam E e F dois espaços de Banach. Se T é um operador linear e contínuo de E e F. Então T é contínuo de E pela topologia fraca em F pela topologia fraca. E reciprocamente.*

Teorema C.16 *(Veja [3]) Suponha Ω de clase C^1. Seja $u \in L^p(\Omega)$, com $1 < p < +\infty$. As segintes propiedades são equivalentes*

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii) *Existe uma constante C talç que*

$$|\int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi| \leq C \|\varphi\|_{p'}, \ \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N) \ e \ \forall i = 1, 2, \cdots, N.$$

(iii) *A função* $\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x), x \in \Omega \\ 0, v \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$

Bibliografia

[1] AIRES, José Fernando Leite, *Sobre existência e não-existência de soluções para problemas elípticos que envolvem um operador não-linear do tipo Timoshenko.* Dissertação de Mestrado, UFCG, 2004.

[2] ALMEIDA, Orlando Batista de, *Teoria do Grau e Aplicações.* Dissertação de Mestrado, UFCG, 2006.

[3] BRÉZIS, H.,*Analyse Fonctionnelle*, Manson, Paris,1983.

[4] COLIN, F. e FRIGON, M., *Systems of Coupled Poisson Equations with Critical Growth in Unbounded Domains*,Nonlinear differ. equ. appl. 13 (2006), 369-384

[5] COSTA, David Goldstein, *Tópicos em análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais* , CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[6] ENGELKING, Ryszard, *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[7] GILBAR,D. e TRUDINGER, N.S *Elliptic Partial Differntial Equations of Second Order*,Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] KRYSZEWSKI,W. e SZULKIN,A., *Generalized linking theorem with an application to a semilinear Schrödinger equation*,adv. Differential Equations 3 (1998), 441-472.

[9] LANG, Serg, *Analysis II*, Addison-Wesley, 1969.

[10] LIMA, E.L., *Curso de Análise Vol. 1*,Projeto Euclides,IMPA, 2004.

[11] LIMA, E.L., *Espaços Métricos*,Projeto Euclides, IMPA, 2005.

[12] RABINOWITZ, Paul H.*Minimax Methodes in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[13] RAMOS, M., WANG, Z.-Q. e WILLEM, M., *Positive solutions for elliptic equations with critical growth in unbounded domains,* in Cauculus of Variations and Differential Equations, Technion 1988, Chapman and Hall, Boca Raton, 1999, 192-199.

[14] STRUWE, Michael, *Variational Methods*,Springer, Berlin, 1990.

[15] WILLEM, Michel, *Minimax Theorems*, Birkhäuser,Boston,1996.