Resumo

Neste trabalho, apresentamos condições necessárias e suficientes para existência de soluções não triviais do seguinte problema de autovalor

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \eta \left(\dfrac{e^u}{\int_\Omega e^u dz} - \dfrac{1}{|\Omega|} \right), \ z \in \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega u dz = 0, \end{cases}$$

onde $\Omega = \mathbb{R}^2/(\alpha\mathbb{Z} \times \alpha\mathbb{Z})$ é um toro bidimensional, $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\Omega)$. Usamos os Métodos Variacionais e a Teoria de Bifurcação para tal objetivo.

Abstract

In this work we present necessary and sufficient condition for existence of non-trivial solutions of the next eigenvalue problem

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \eta \left(\dfrac{e^u}{\int_\Omega e^u dz} - \dfrac{1}{|\Omega|} \right), \ z \in \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega u dz = 0, \end{cases}$$

where $\Omega = \mathbb{R}^2/(\alpha\mathbb{Z} \times \alpha\mathbb{Z})$ is a two-dimensional torus, $\alpha > 0$ and $u \in H^1(\Omega)$. We use the Variational Methods and Bifurcation Theory for such an objective.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre Soluções de Equações Diferenciais Parciais Elípticas Não-Lineares em um Toro Bidimensional

por

Rawlilson de Oliveira Araújo †

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CNPq

Sobre Soluções de Equações Diferenciais Parciais Elípticas Não-Lineares em um Toro Bidimensional

por

Rawlilson de Oliveira Araújo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda

____

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

____

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2009

Agradecimentos

A Deus, ao Senhor Jesus e ao Consolador, pelo infinito amor.

Aos meus pais Vilma e Reginaldo e ao meu irmão Wagner, pela atenção, paciência, apoio e amor.

Ao professor Marco Aurélio, pela orientação, paciência, conhecimento, atenção e auxílio. Muitíssimo Obrigado!

Aos professores Angelo Roncalli e Uberlandio, pela avaliação deste trabalho.

Aos professores do DME da UFCG, em especial ao Sérgio Mota, ao Antônio Brandão, ao Vânio Fragoso, ao Jaime Sobrinho, ao Henrique Fernandes, ao Aparecido Jesuíno, a Bianca Morelli, ao Daniel Cordeiro, ao Francisco Júlio e ao Claudianor Alves, pelo apoio e por cada parcela de conhecimento adquirido. Muito Obrigado!

Aos professores do DM da UFRN, em especial ao Francisco Gurgel, ao José Querginaldo, ao Jonas Gonçalves, ao Rubens Leão, a Márcia Maria, ao Benedito Tadeu, ao Marcelo Gomes, ao Ronaldo Freire, a Viviane Simioli e ao André Gustavo, pela atenção, incentivo e paciência. Muito Obrigado!

Aos professores André Gustavo e Claudianor Alves, pelo imensa atenção, imenso incentivo e imenso cuidado. Muitíssimo Obrigado!

Ao PET-UFRN de Matemática, pelo apoio financeiro e acadêmico.

Aos meus grandes amigos do Residencial Flamingo(CG/PB), pelo companheirismo e auxílio.

Aos meus grandes amigos e colegas da UFRN em especial aos amigos do DM, pelo companheirismo e auxílio.

Aos meus grandes amigos da DME-UFCG, pelo companheirismo e auxílio.

A Sheyla Marinho, ao Rodrigo Nemer, ao Damião Júnio, ao Vinícius Sacramento, ao José Eder, ao Josiluiz Nobre e todos amigos do PET-UFRN de Matemática, pelo companheirismo, paciência e auxílio.

Aos funcionários do DM-UFRN e do DME-UFCG, pelo auxílio.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais e ao meu irmão.

Conteúdo

Notação

- $\big|[a,b]\big|$: Medida de Lebesgue do intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$;
- Para $u : [a,b] \to \mathbb{R}$,
$$\dot{u}(x) = \frac{d}{dx}u(x);$$
- $C([a,b])$ = Espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$;
- Norma do espaço $C([a,b])$:
$$||u||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |u(x)|;$$
- $C^2([a,b]) = \{u \in C([a,b]);\ \ddot{u} \in C([a,b])\}$;
- $|\Omega|$: Medida de Lebesgue do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável; u é limitada quase sempre em $\Omega\}$;
- Norma do espaço $L^\infty(\Omega)$:
$$||u||_\infty = \sup_{z\in\Omega} |u(z)|;$$
- Para $p \in [1,\infty)$,
$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_\Omega |u|^p dz < \infty\};$$
- Norma do espaço $L^p(\Omega)$:
$$||u||_p = \left(\int_\Omega |u|^p dz\right)^{\frac{1}{p}};$$
- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ u^{'} \in L^2(\Omega)\}$;

- $\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}(u), \frac{\partial}{\partial y}(u) \right)$;

- Para $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$,
$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_e = \frac{\partial}{\partial x}(u)\frac{\partial}{\partial x}(v) + \frac{\partial}{\partial y}(u)\frac{\partial}{\partial y}(v);$$

- Para $u, v \in H^1(\Omega)$,
$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle_e dz;$$

- Para $u \in H^1(\Omega)$,
$$||u|| = ||\nabla u||_2;$$

- Para $u : \Omega \to \mathbb{R}$,
$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u);$$

- Para $\gamma \in \mathbb{N}^n \cup (0, 0, ..., 0)$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$,
$$|\gamma| = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i,$$
$$D^\gamma u = \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} ... \partial x_n^{\gamma_n}};$$

- $\mathfrak{L}(V, W)$: Espaço das transformações lineares entre os espaços vetoriais V e W;

- $X \hookrightarrow Y$: Imersão entre os espaços de Banach X e Y;

Introdução

Neste trabalho, vamos estudar o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \eta \left(\dfrac{e^u}{\int_\Omega e^u dz} - \dfrac{1}{|\Omega|} \right), \ z \in \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega u dz = 0, \end{cases}$$

onde $\Omega = \mathbb{R}^2/(\alpha\mathbb{Z} \times \alpha\mathbb{Z})$ é um toro bidimensional (detalhes no Capítulo 1), $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\Omega)$. Este problema é um caso particular do problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = 4\pi N \left(\dfrac{K(z)e^u}{\int_{\widehat{\Omega}} K(z) e^u dz} - \dfrac{1}{|\widehat{\Omega}|} \right), \ z \in \Omega \\ \displaystyle\int_{\widehat{\Omega}} u dz = 0, \end{cases}$$

onde K é uma função não negativa, N é um número inteiro chamado Número de Vórtice, $\widehat{\Omega} = \mathbb{R}^2/(\alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z})$ é um toro bidimensional e $u \in H^1(\widehat{\Omega})$. De acordo com G. Tarantello (em [5]), na Teoria do Calibre de Chern-Simons (Chern-Simons Gauge Theory), o comportamento assintótico de uma classe de soluções é descrito pelo problema (P_2). Assim, começa uma investigação para saber se o problema

$$(P_3) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \eta \left(\dfrac{e^u}{\int_{\widehat{\Omega}} e^u dz} - \dfrac{1}{|\widehat{\Omega}|} \right), \ z \in \Omega \\ \displaystyle\int_{\widehat{\Omega}} u dz = 0, \end{cases}$$

onde $\widehat{\Omega} = \mathbb{R}^2/(\alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z})$ é um toro bidimensional e $u \in H^1(\widehat{\Omega})$, possui solução não trivial.

O problema (P_3) admite formulação variacional. O funcional de Euler-Lagrange para o problema (P_3) é dado por

$$I_\eta : E \to \mathbb{R}$$
$$I_\eta(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \eta \ln\left(\frac{1}{|\widehat{\Omega}|}\int_{\widehat{\Omega}} e^u dz\right),$$

com $E = \{u \in H^1(\widehat{\Omega}); \int_{\widehat{\Omega}} u dz = 0\}$. Para $\eta \leq 0$, o funcional I_η é estritamente convexo e, assim, o problema (P_3) só admite a solução trivial. Para $\eta > 0$, o estudo do problema (P_3) torna-se mais complexo. Para $\eta \in (0, 8\pi)$, W. Ding, J. Jost, J. Li e G. Wang (em [6]) e M. Nolasco e G. Tarantello (em [7]) mostraram que o funcional I_η admite ponto crítico. C.C. Chen e C. S. Lin (em [8]) provaram que as soluções do problema (P_3) são uniformemente limitadas até mesmo quando $\eta = 8\pi$. Isso não garante que as soluções são não triviais. Quando η está próximo de zero, M. Struwe e G. Tarantello (em [2]) mostraram que o problema (P_3) admite apenas a solução trivial. Quando

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{1}{2},$$

X. Cabré, M. Lucia e M. Sanchón (em [9]) mostraram que o problema (P_3) admite apenas a solução trivial se, e só se, $\eta \leq \lambda_1(\widehat{\Omega})|\widehat{\Omega}|$, onde $\lambda_1(\widehat{\Omega})$ é o primeiro autovalor do laplaciano sobre $\widehat{\Omega}$ referente ao problema (P_3). Apesar de X. Cabré, M. Lucia e M. Sanchón (em [9]), C. S. Lin e M. Lucia (em [4]) provarem ótimos resultados para uma grande classe de toros, tais trabalhos não abrangem todos os tipos de toros. Porém, quando $\alpha = \beta$, o problema (P_3) (ou seja, o problema (P_1)) já se encontra resolvido. O problema (P_1) tem o seguinte comportamento:

(i) Para $\eta > 0$ próximo de zero, M. Struwe e G. Tarantello (em [2]) mostraram que o problema (P_1) admite apenas a solução trivial.

   Teorema 2.20 *Existe $\delta > 0$ tal que a única solução do problema (P_1), com $\eta \in [0, \delta)$, é a solução identicamente nula.*

(ii) Para $\eta \in (0, 8\pi]$, C. S. Lin e M. Lucia (em [4]) provaram que o problema (P_1) admite apenas a solução trivial;

(iii) Para $\eta \in (8\pi, 4\pi^2)$, M. Struwe e G. Tarantello (em [2]) provaram que o problema (P_1) admite soluções não triviais somente bidimensionais, ou seja, as soluções dependem simultâneamente das duas variáveis.

Teorema 2.1 *Para cada $\eta \in (8\pi, 4\pi^2)$, existe uma solução não trivial u_η do problema (P_1) tal que*

$$I_\eta(u_\eta) \geq c_0(1 - \frac{\eta}{4\pi^2}),$$

onde $c_0 > 0$ e independe de η;

(iv) Para $\eta \in (4\pi^2, \infty)$, T. Ricciardi e G. Tarantello (em [1]) mostraram a Existência e a Multiplicidade de soluções não triviais unidimensionais (as soluções dependem apenas de uma variável) para o problema (P_1). Neste trabalho, T. Ricciardi e G. Tarantello observaram que o problema (P_1) torna-se o problema $(1)_\lambda$, onde

$$(1)_\lambda \qquad \begin{cases} -\ddot{u} = \lambda \left(\dfrac{e^u}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u dx} - 1 \right) \\ u(-1) = u(1), \dot{u}(-1) = \dot{u}(1) \\ \int_{-1}^{1} u dx = 0 \end{cases}$$

com $u \in H^1([-1,1])$, quando as soluções são unidimensionais e utilizaram a definição de funções Geometricamente Distintas (Capítulo 1, Definição 1.2).

Teorema 1.3 *O problema $(1)_\lambda$ possui soluções não triviais se, e só se, $\lambda > \pi^2$. Mais ainda, se $\lambda > \lambda_k = k^2\pi^2$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $(1)_\lambda$ possui pelo menos k soluções geometricamente distintas.*

Nós vamos apresentar os itens (i),(iii) e (iv) neste trabalho. Este está organizado da seguinte maneira:

- **Capítulo 1**: Vamos apresentar a demonstração do item (iv);
- **Capítulo 2**: Vamos apresentar a demonstração dos itens (iii) e (i);
- **Apêndice A**: Vamos apresentar alguns resultados da Teoria de Análise necessários para o entendimento deste trabalho;
- **Apêndice B**: Vamos apresentar alguns resultados da Pertubação no Problema Linear necessários para o entendimento do Capítulo 1;
- **Apêndice C**: Vamos apresentar alguns resultados da Teoria da Bifurcação necessários para o entendimento do Capítulo 1.

Capítulo 1

O Problema Unidimensional

Sejam $\alpha > 0$ e $\Omega = \mathbb{R}^2/(\alpha\mathbb{Z} \times \alpha\mathbb{Z})$ um toro bidimensional, ou seja,

$$\Omega = [a, b] \times [c, d],$$

com

$$\big|[a, b]\big| = \big|[c, d]\big| = \alpha,$$

a, b, c e d números reais (veja a Figura 1.1). Uma função u definida em Ω satisfaz as seguintes propriedades:

- $u(x, c) = u(x, d), \forall x \in [a, b]$;
- $u(a, y) = u(b, y), \forall y \in [c, d]$.

Em outras palavras, para uma função

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$

e para os pontos

$$M = (a, d),\ N = (a, c),\ O = (b, c)\ e\ P = (b, d)$$

obtemos

- $u(NO) = u(MP)$;
- $u(MN) = u(OP)$.

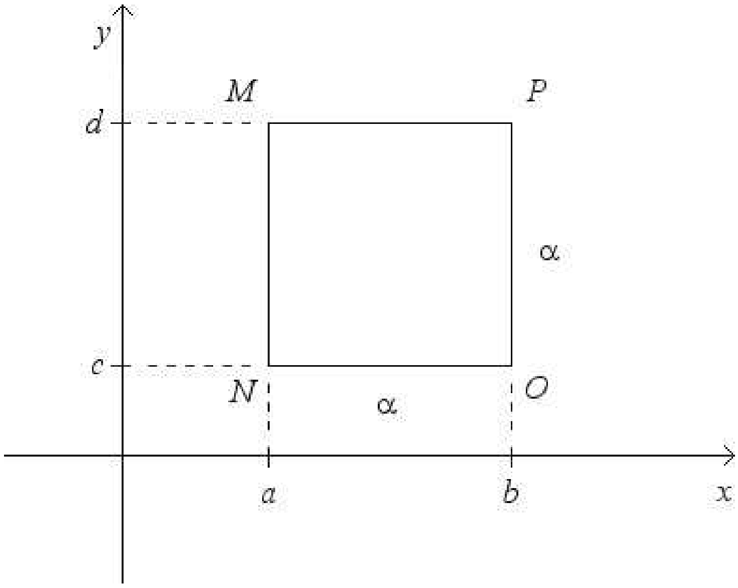

Figura 1.1: Toro Bidimensional $\Omega = \mathbb{R}^2/(\alpha\mathbb{Z} \times \alpha\mathbb{Z})$.

Observemos que uma função u definida em Ω pode ser estendida periodicamente em todo $\mathbb{R}^2$.

O problema a ser estudado é:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \eta \left(\dfrac{e^u}{\int_\Omega e^u dz} - \dfrac{1}{|\Omega|} \right), \; z \in \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega u dz = 0, \end{cases}$$

onde $u \in H^1(\Omega)$ e $\eta > 4\pi^2$. Devido aos estudos de Ricciardi-Tarantello [1], vamos supor $\eta = 4\lambda$ e $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$, ou seja, $\alpha = 2$.

Definição 1.1 *Dizemos que uma função definida em um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ é unidimensional se tal função depende apenas de uma única variável.*

Definição 1.2 *Sejam u, v funções reais. Dizemos que u e v são Geometricamente Semelhantes se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) = u(x + r)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e quando u e v não são Geometricamente Semelhantes dizemos que u e v são Geometricamente Distintas.*

Para resolvermos o problema (P_1), vamos mostrar que o problema (P_1) torna-se o problema

$$(1)_\lambda \qquad \begin{cases} -\ddot{u} = \lambda \left(\dfrac{e^u}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u dx} - 1 \right) \\ u(-1) = u(1), \dot{u}(-1) = \dot{u}(1) \\ \int_{-1}^{1} u dx = 0 \end{cases},$$

com $\lambda > \pi^2$, quando as soluções são unidimensionais. Assim, a Existência e a Multiplicidade de soluções não triviais unidimensionais do problema (P_1) são justificadas pelo Teorema:

Teorema 1.3 *O problema $(1)_\lambda$ possui soluções não triviais se, e só se, $\lambda > \pi^2$. Mais ainda, se $\lambda > \lambda_k = k^2\pi^2$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $(1)_\lambda$ possui pelo menos k soluções geometricamente distintas.*

Vamos dividir a demonstração do Teorema 1.3 da seguinte forma:

- **Primeira Etapa: Se $\lambda > \pi^2$, então o problema $(1)_\lambda$ possui soluções não triviais**. Nesta etapa, vamos usar os Métodos Variacionais;

- **Segunda Etapa: Se $\lambda > \lambda_k = k^2\pi^2$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $(1)_\lambda$ possui pelo menos k soluções geometricamente distintas**. Nesta etapa, vamos mostrar a equivalência entre $(1)_\lambda$ e o problema $(2)_\lambda$ (definiremos posteriormente) e utilizar a Teoria da Bifurcação e alguns resultados de Análise;

- **Terceira Etapa: Se o problema $(1)_\lambda$ possui soluções não triviais, então** $\lambda > \pi^2$. Nesta etapa, vamos mostrar mais algumas equivalências com o problema $(1)_\lambda$ e mostraremos alguns lemas sobre o comportamento das soluções dos problemas equivalentes ao problema $(1)_\lambda$.

O Problema (P_1) e o Problema $(1)_\lambda$

Proposição 1.4 *O problema (P_1) torna-se o problema $(1)_\lambda$ quando as soluções são unidimensionais.*

Demonstração: Seja u uma solução unidimensional arbitrária do problema (P_1). Então,

$$\int_\Omega u dz = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u(x) dx dy = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} u dx = 0,$$

$$\int_\Omega e^u dz = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{u(x)} dx dy = 2\int_{-1}^{1} e^{u(x)} dx,$$

$$
\begin{aligned}
-\Delta u = \eta\left(\frac{e^u}{\int_\Omega e^u dz} - \frac{1}{|\Omega|}\right) \quad &\Rightarrow \quad -\ddot{u} = 4\lambda\left(\frac{e^u}{2\int_{-1}^{1} e^u dx} - \frac{1}{4}\right) \\
&\Rightarrow \quad -\ddot{u} = \lambda\left(\frac{2e^u}{\int_{-1}^{1} e^u dx} - 1\right) \\
&\Rightarrow \quad -\ddot{u} = \lambda\left(\frac{e^u}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u dx} - 1\right),
\end{aligned}
$$

$u(-1) = u(1)$, pois u está definida sobre o toro bidimensional $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$,

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} -\ddot{u}(x)dx = \int_{-1}^{1} \lambda\left(\frac{e^{u(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx} - 1\right)dx \quad &\Rightarrow \quad -\dot{u}(1) + \dot{u}(-1) = 2\lambda - 2\lambda \\
&\Rightarrow \quad \dot{u}(1) = \dot{u}(-1).
\end{aligned}
$$

Logo, u é solução do problema $(1)_\lambda$. Já que u é arbitrária, segue que toda solução unidimensional do problema (P_1) é solução do problema $(1)_\lambda$.

■

A seguir, vamos iniciar a primeira etapa da demonstração do Teorema 1.3

Primeira Etapa da Demonstração do Teorema 1.3.

Observemos que as soluções do problema $(1)_\lambda$ pertencem ao Espaço Ambiente

$$E = \{u \in H^1([-1,1]);\ u(-1) = u(1) \text{ e } \int_{-1}^{1} u(x)dx = 0\}.$$

Teorema 1.5 *Se $\lambda > \pi^2$, então o problema $(1)_\lambda$ possui solução não trivial.*

Demonstração: Vamos usar os Métodos Variacionais para demonstrar este Teorema. As soluções fracas do problema $(1)_\lambda$ correspondem aos pontos críticos do seguinte funcional de Euler-Lagrange:

$$I_\lambda : E \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \dot{u}^2(x)dx - 2\lambda \ln\left(\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx\right).$$

O funcional I_λ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $I_\lambda \in C^2(E)$;

(ii) I_λ é coercivo;

(iii) I_λ é limitado inferiormente;

(iv) I_λ atinge o ínfimo;

(v) O mínimo de I_λ é negativo.

Logo, o mínimo do funcional I_λ é uma solução não trivial para o problema $(1)_\lambda$. Portanto, basta mostrarmos as propriedades do funcional I_λ.

Prova do item (i):

Primeiramente, observemos algumas afirmações.

Afirmação 1.6 $||u||_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |u(x)| \leq \sqrt{2}\,||u||, \forall u \in E.$

Seja $u \in E$ arbitrário. Então $\int_{-1}^{1} u(x)dx = 0$, ou seja, existe $s \in [-1,1]$ tal que $u(s) = 0$. Como $[-1,1]$ é compacto e u é contínua, então existe $t \in [-1,1]$ tal que $|u(t)| = ||u||_\infty$. $||u||_\infty \geq 0$, pois $\int_{-1}^{1} u(x)dx = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} ||u||_\infty &= |u(t) - u(s)| \\ &= \left| \int_s^t \dot{u}(x)dx \right| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |\dot{u}(x)|dx \\ &\leq \left(\int_{-1}^{1} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{1} \dot{u}^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\,||u|| \end{aligned}$$

Devido a arbitrariedade de u, segue a Afirmação 1.6.

Afirmação 1.7

$$I_\lambda^{'} : E \to \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$$

$$I_\lambda^{'}(u)v = \int_{-1}^{1} \dot{u}(x)\dot{v}(x)dx - 2\lambda \frac{\int_{-1}^{1} e^{u(x)} v(x)dx}{\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx}, \ \forall u, v \in E.$$

Observemos que o funcional de Euler-Lagrange pode ser escrito da seguinte maneira:

$$I_\lambda(u) = GoF(u) - 2\lambda \ln(H(u)),$$

onde

$$F : E \to E \times E, \ F(u) = (u, u),$$

$$G : E \times E \to \mathbb{R},\ G((u,v)) = \frac{1}{2}\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \dot{u}(x)\dot{v}(x)dx,$$

$$H : E \to \mathbb{R},\ H(u) = \int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx.$$

Assim, $I_\lambda^{'}(u) = (GoF)^{'}(u) - \frac{2\lambda}{H(u)}(H)^{'}(u), \forall u \in E$. Observemos que

$$(GoF)^{'}(u)v = G^{'}(F(u))(F^{'}(u)v) = \frac{1}{2}(\langle u, .\rangle + \langle u, .\rangle)(v, v) = \int_{-1}^{1} \dot{u}(x)\dot{v}(x)dx$$

e, para a Transformação Linear $T_1(u) : E \to \mathbb{R}$ definida por $T_1(u)v = \int_{-1}^{1} e^{u(x)}v(x)dx$,

$$\begin{aligned}
\frac{|H(u+v) - H(u) - T_1(u)v|}{||v||} &= \frac{\left|\int_{-1}^{1} e^{u(x)+v(x)}dx - \int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx - \int_{-1}^{1} e^{u(x)}v(x)dx\right|}{||v||} \\
&= \frac{1}{||v||}\left|\int_{-1}^{1} e^{u(x)}(e^{v(x)}dx - 1 - v(x))dx\right| \\
&= \frac{1}{||v||}\left|\int_{-1}^{1} e^{u(x)}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{v^i(x)}{i!}dx\right| \\
&\leq \frac{1}{||v||}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}\ ||v||)^i}{i!}\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx \\
&= \sum_{i=2}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^i(||v||)^{i-1}}{i!}\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

quando $||v|| \to 0$. Logo, a derivada da função H é

$$H^{'} : E \to \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$$
$$H^{'}(u)v = \int_{-1}^{1} e^{u(x)}v(x)dx.$$

Assim,

$$I_\lambda^{'}(u)v = (GoF)^{'}(u)v - \frac{2\lambda}{H(u)}(H)^{'}(u)v = \int_{-1}^{1} \dot{u}(x)\dot{v}(x)dx - 2\lambda\frac{\int_{-1}^{1} e^{u(x)}v(x)dx}{\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx}.$$

Logo, segue a Afirmação 1.7.

Afirmação 1.8

$$I_\lambda^{''} : E \to \mathfrak{L}(E \times E, \mathbb{R})$$
$$I_\lambda^{''}(u)(v, w) =$$
$$\int_{-1}^{1} \dot{v}(x)\dot{w}(x)dx - 2\lambda\left(\frac{\int_{-1}^{1} e^{u(x)}v(x)w(x)dx}{\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx} - \frac{\int_{-1}^{1} e^{u(x)}v(x)dx\int_{-1}^{1} e^{u(x)}w(x)dx}{\left(\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx\right)^2}\right),$$

$\forall (v, w) \in E \times E$.

Seguindo com as definições das funções G, F e H na demonstração da Afirmação 1.7,

$$I_\lambda''(u) = (GoF)''(u) - \left(\frac{2\lambda}{H}(H)'\right)'(u).$$

Observemos que $(GoF)'(\beta u_1 + u_2)v = (\beta(GoF)'(u_1) + (GoF)'(u_2))v, \forall v \in E$, ou seja, $(GoF)'(\beta u_1 + u_2) = \beta(GoF)'(u_1) + (GoF)'(u_2), \forall u_1, u_2 \in E$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Logo, a função derivada $(GoF)' : E \to \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$ é uma Transformação Linear, donde

$$(GoF)'' : E \to \mathfrak{L}(E \times E, \mathbb{R})$$

$$(GoF)''(u)(v, w) = (GoF)'(v)w = \int_{-1}^{1} \dot{v}(x)\dot{w}(x)dx.$$

Agora, seja a aplicação $S : E \to \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$ definida por $S(u) = \frac{(H)'(u)}{H(u)}, \forall u \in E.$

A APLICAÇÃO S É GÂTEAU DIFERENCIÁVEL EM E:

Como

$$\left[\int_{-1}^{1} e^u dx\right]\left[\int_{-1}^{1} e^{u+tv} w dx\right] - \left[\int_{-1}^{1} e^u w dx\right]\left[\int_{-1}^{1} e^{u+tv} dx\right] = t\left(\int_{-1}^{1} e^u dx\left[\int_{-1}^{1} e^u wv dx + \int_{-1}^{1} e^u w \sum_{i=2}^{\infty} \frac{t^{i-1}v^i}{i!} dx\right] - \int_{-1}^{1} e^u w dx\left[\int_{-1}^{1} e^u v dx + \int_{-1}^{1} e^u \sum_{i=2}^{\infty} \frac{t^{i-1}v^i}{i!} dx\right]\right),$$

$\forall u, v, w \in E$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{(S(u+tv) - S(u))w}{t} &= \frac{1}{t}\left(\frac{\int_{-1}^{1} e^{u+tv} w dx}{\int_{-1}^{1} e^{u+tv} dx} - \frac{\int_{-1}^{1} e^u w dx}{\int_{-1}^{1} e^u dx}\right) \\
&= \frac{\left[\int_{-1}^{1} e^u dx\right]\left[\int_{-1}^{1} e^{u+tv} w dx\right] - \left[\int_{-1}^{1} e^u w dx\right]\left[\int_{-1}^{1} e^{u+tv} dx\right]}{t\int_{-1}^{1} e^{u+tv} dx \int_{-1}^{1} e^u dx} \\
&\to \frac{\int_{-1}^{1} e^u vw dx}{\int_{-1}^{1} e^u dx} - \frac{\int_{-1}^{1} e^u w dx \int_{-1}^{1} e^u v dx}{\left(\int_{-1}^{1} e^u dx\right)^2},
\end{aligned}$$

quando $t \to 0$ e para todo $w, v \in E$. Para a Transformação Linear $T_2(u) : E \to \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$ definida por,

$$(T_2(u)v)w = \frac{\int_{-1}^{1} e^{u(x)} v(x) w(x) dx}{\int_{-1}^{1} e^{u(x)} dx} - \frac{\int_{-1}^{1} e^{u(x)} v(x) dx \int_{-1}^{1} e^{u(x)} w(x) dx}{\left(\int_{-1}^{1} e^{u(x)} dx\right)^2},$$

obtemos

$$\frac{S(u+tv)-S(u)}{t} \to T_2(u)v, \ \forall v \in E$$

quando $t \to 0$. Logo, a aplicação S é Gâteau diferenciável em E.

Vejamos a seguinte aplicação:

$$T_2 : E \to \mathfrak{L}(E, \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})) \cong \mathfrak{L}(E \times E, \mathbb{R})$$

$$u \to T_2(u).$$

A APLICAÇÃO T_2 É CONTÍNUA EM E:

Para mostrarmos que a aplicação T_2 é contínua é suficiente mostrarmos que os funcionais

$$K_1 : E \to \mathbb{R}$$

$$K_1(u) = e^{u(x)}g(x),$$

com $g \in C([-1,1])$, e

$$K_2 : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$$
$$K_2(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

são contínuos.

O funcional K_1 é contínuo em E:

Seja $u_0 \in E$ arbitrário. Devido a continuidade uniforme local da função exponencial $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $u \in E$ com $|u(x) - u_0(x)| < \delta_1$,

$$|e^{u(x)} - e^{u_0(x)}| < \frac{\varepsilon}{||g||_\infty}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} > 0$ tal que, para todo $u \in E$ com $||u(x) - u_0(x)|| < \delta$,

$$|u(x) - u_0(x)| < \delta_1$$

implica em

$$|e^{u(x)} - e^{u_0(x)}| < \frac{\varepsilon}{||g||_\infty},$$

ou seja,

$$|e^{u(x)}g(x) - e^{u_0(x)}g(x)| = |e^{u(x)} - e^{u_0(x)}||g(x)| \leq |e^{u(x)} - e^{u_0(x)}|||g||_\infty < \varepsilon.$$

Logo, o funcional K_1 é contínuo em u_0. Portanto, devido a arbitrariedade de u_0, o funcional K_1 é contínuo.

O funcional K_2 é contínuo em C([-1,1]):

Como o funcional K_2 é linear, então basta mostrar que o funcional K_2 é limitado. Assim,

$$\begin{aligned} |K_2(f)| &= \left|\int_{-1}^{1} f(x)dx\right| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |f(x)|dx \\ &\leq ||f||_\infty \int_{-1}^{1} dx = 2||f||_\infty,\ \forall f \in C([-1,1]). \end{aligned}$$

Portanto, o funcional K_2 é limitado.

Logo, a aplicação T_2 é contínua.

Como a aplicação S é Gâteau diferenciável em E e a aplicação T_2 é contínua em E, então a aplicação S é Fréchet diferenciável em E com

$$S^{'} = T_2.$$

Assim,

$$I_\lambda^{''}(u) = (GoF)^{''}(u) - 2\lambda S^{'}(u).$$

Portanto, segue a Afirmação 1.8.

Afirmação 1.9 *A Aplicação $u \mapsto I_\lambda^{''}(u)$ é contínua para todo $u \in E$.*

Seguindo com as definições das funções G, F e H na demonstração da Afirmação 1.7 e com a definição da aplicação S na demonstração da Afirmação 1.8, basta observarmos que

$$I_\lambda^{''}(u) = (GoF)^{''}(u) - 2\lambda S^{'}(u).$$

Portanto,

$$I_\lambda \in C^2(E).$$

■

Prova do item (ii):

De fato,

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \dot{u}^2(x)dx - 2\lambda \ln\left(\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx\right)\\
&= \frac{1}{2}||u||^2 - 2\lambda \ln\left(\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx\right)\\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2 - 2\lambda \ln\left(\int_{-1}^{1} e^{|u(x)|}dx\right)\\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2 - 2\lambda \ln\left(e^{||u||_\infty}\int_{-1}^{1} dx\right)\\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2 - 2\lambda \ln\left(e^{\sqrt{2}\,||u||}\int_{-1}^{1} dx\right)\\
&= \frac{1}{2}||u||^2 - 2\lambda \ln\left(2e^{\sqrt{2}\,||u||}\right)\\
&= \frac{1}{2}||u||^2 - 2\lambda\sqrt{2}\,||u|| - 2\lambda \ln 2 \qquad (1.1)\\
&\rightarrow \infty,
\end{aligned}
$$

quando $||u|| \rightarrow \infty$. Portanto, o funcional I_λ é coercivo.

■

Prova do item (iii):

Como o funcional I_λ é coercivo, então existe $C > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) \geq 1$$

quando $||u|| > C$. Para $||u|| \leq C$, basta observarmos a desigualdade (1.1). Portanto, o funcional I_λ é limitado inferiormente.

■

Prova do item (iv):

Seja (u_n) uma sequência minimizante tal que

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow \inf_{u\in E} I_\lambda(u) = I_0.$$

Como o funcional I_λ é coercivo, então existe $C > 0$ tal que

$$||u|| \geq C \Rightarrow I_\lambda(u) \geq I_0 + 1.$$

Já que a sequência $(I_\lambda(u_n))$ converge para I_0, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_\lambda(u_n) < I_0 + 1$$

com $n \geq n_0$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$,

$$||u_n|| < \delta,$$

ou seja, podemos concluir que a sequência (u_n) é limitada. Como $H^1([-1,1])$ é reflexivo, então, pelo Teorema de Kakutani (em [16]), existem uma subsequência de (u_n) (vamos denotá-la por (u_n) para facilitar a notação) e $u_0 \in H^1([-1,1])$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } H^1([-1,1]).$$

Como $H^1([-1,1]) \hookrightarrow C([-1,1])$ é compacta, então

$$u_n \to u_0 \text{ uniformemente em } C([-1,1]).$$

Assim,

$$\ln\left(\int_{-1}^{1} e^{u_n} dx\right) \to \ln\left(\int_{-1}^{1} e^{u_0} dx\right).$$

Observemos que a função

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto ||u||^2 \end{aligned}$$

é contínua e convexa. Logo, φ é s.c.i. (veja a Definição A.7 no Apêndice A). Segue do Teorema A.8 (Apêndice A) que φ é f.s.c.i. Segue do Teorema A.9 (Apêndice A) e do fato de que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1([-1,1])$ (em particular em E) que

$$\varphi(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}||u_n||^2 - 2\lambda \ln\left(\int_{-1}^{1} e^{u_n} dx\right)\right) \\ &\geq \frac{1}{2}||u_0||^2 - 2\lambda \ln\left(\int_{-1}^{1} e^{u_0} dx\right) \\ &= I_\lambda(u_0). \end{aligned}$$

Como

$$\inf_{u \in E} I_\lambda(u) = I_0,$$

então

$$I_0 = I_\lambda(u_0).$$

Portanto, I_λ atinge o ínfimo.

$\blacksquare$

Prova do item (v):

Vejamos a Fórmula de Taylor do funcional I_λ em torno do funcional nulo (vamos denotá-lo por 0).

$$I_\lambda(v) - I_\lambda(0) - I_\lambda^{'}(0)v - \frac{1}{2!} I_\lambda^{''}(0)(v,v) = o(||v||^2), \ \forall v \in E.$$

Seja $v \in E$ definida por

$$v(x) = t\cos(\pi x)$$

com $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Como

$$I_\lambda^{''}(0)(v,v) =$$
$$(\pi t)^2 \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}^2(\pi x)dx - \lambda\left(t^2 \int_{-1}^{1} \cos^2(\pi x)dx - \left[t\int_{-1}^{1} \cos^2(\pi x)dx\right]^2\right) + o(||t\cos(\pi x)||^2)$$

e o funcional nulo é ponto crítico do funcional I_λ, então

$$\begin{aligned} I_\lambda(v) &= I_\lambda(v) - I_\lambda(0) \\ &= \frac{1}{2!}\, I_\lambda^{''}(0)(v,v)) + o(||v||^2) \\ &= \frac{t^2}{2}(\pi^2 - \lambda) + o(t^2), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Assim,

$$\lim_{t\to 0} \frac{I_\lambda(v)}{t^2} = \frac{(\pi^2 - \lambda)}{2} + \lim_{t\to 0}\frac{o(t^2)}{t^2} = \frac{(\pi^2 - \lambda)}{2} < 0,$$

ou seja, dado

$$\frac{(\lambda - \pi^2)}{2} > \varepsilon > 0$$

existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta \text{ implica em } I_\lambda(v) < \delta^2 \left(\varepsilon + \frac{(\pi^2 - \lambda)}{2} \right) < 0.$$

Portanto, o mínimo de I_λ é negativo.

■

Agora, vamos tratar da multiplicidade das soluções do problema $(1)_\lambda$.

Segunda Etapa da Demonstração do Teorema 1.3.

Primeiramente, vamos mostrar a equivalência entre o problema $(1)_\lambda$ e o problema

$$(2)_\lambda \qquad \left\{ \begin{array}{c} -\ddot{u} = \lambda \left(\dfrac{e^u}{\int_0^1 e^u dx} - 1 \right) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \\ \int_0^1 u dx = 0 \end{array} \right. ,$$

onde $\lambda > \pi^2$.

Lema 1.1 *A extensão par 2-periódica de toda solução do problema* $(2)_\lambda$ *é solução do problema* $(1)_\lambda$.

Demonstração: Sejam u uma solução arbitrária do problema $(2)_\lambda$ e v a extensão par 2-periódica de u definida sobre $[-1, 1]$, ou seja,

$$v(x) = \left\{ \begin{array}{c} u(-x), \ se \ x \in [-1, 0) \\ u(x), \ se \ x \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Então:

- v é $C^1([-1, 1])$. Como a função u é $C^1([-1, 1])$, então basta apenas provarmos que v é diferenciável em 0 e $\dot{v}$ é contínua em 0. Logo,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{v(h) - v(0)}{h} = -\dot{u}(0) = 0 = \dot{u}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{v(h) - v(0)}{h},$$

$$\lim_{x \to 0^-} \dot{v}(x) = -\dot{u}(0) = 0 = \dot{u}(0) = \lim_{x \to 0^+} \dot{v}(x);$$

- $\int_{-1}^1 v(x) dx = 0$;

- $v(-1) = u(-(-1)) = u(1) = v(1) \Rightarrow v(-1) = v(1)$;

- $\dot{v}(-1) = -\dot{u}(-(-1)) = -\dot{u}(1) = 0 = \dot{u}(1) = \dot{v}(1) \Rightarrow \dot{v}(-1) = \dot{v}(1)$;

- $\int_{-1}^{1} e^{v(x)}dx = 2\int_0^1 e^{u(x)}dx \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{v(x)}dx = \int_0^1 e^{u(x)}dx;$$

- $x \ \in [-1, 0) \Rightarrow$

$$-\ddot{v}(x) = -\ddot{u}(-x) = \lambda\left(\frac{e^{u(-x)}}{\int_0^1 e^{u(x)}dx} - 1\right) = \lambda\left(\frac{e^{v(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{v(x)}dx} - 1\right);$$

- $x \ \in [0, 1] \Rightarrow$

$$-\ddot{v}(x) = -\ddot{u}(x) = \lambda\left(\frac{e^{u(x)}}{\int_0^1 e^{u(x)}dx} - 1\right) = \lambda\left(\frac{e^{v(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{v(x)}dx} - 1\right).$$

Logo, v é solução do problema $(1)_\lambda$. Como u é arbitrária, então segue o resultado.

■

Não faremos distinção entre as soluções do problema $(2)_\lambda$ e suas extensões pares 2-periódica.

A seguir, mostraremos a existência de uma solução decrescente para o problema $(2)_\lambda$ com $\lambda = \frac{\mu}{n_0^2}$.

Lema 1.2 *Seja $u \neq 0$ solução do problema $(1)_\lambda$, $\lambda = \mu$. Então existem $t_0 \in [0, 2)$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma solução decrescente u_0 do problema $(2)_\lambda$, $\lambda = \frac{\mu}{n_0^2}$, tal que $u(t + t_0) = u_0(n_0 t)$. Em particular, $u(t + t_0)$ é solução do problema $(2)_\lambda$, $\lambda = \mu$.*

Demonstração: O fato de u ser solução do problema $(1)_\lambda$, $\lambda = \mu$, garante que u é pelo menos 2-periódica e contínua. Daí, $u\big|_{[0,2]}$ admite valor de máximo global. Tal valor de máximo global é o mesmo quando $u\big|_{[0,2)}$. Logo, existe $x_0 \in [0, 2)$ tal que x_0 é ponto de máximo global. Seja T_0 o menor período de u, ou seja, T_0 é um número positivo que satisfaz as seguintes propriedades:

- $u(x + T_0) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}$;

- Se $u(x + T) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}$ então existe k $\in \mathbb{N}$ tal que $T = kT_0$.

u não é uma função constante, pois a única solução constante do problema $(1)_\lambda$, $\lambda = \mu$, é a função nula. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T_0 = \frac{2}{n_0}.$$

Vejamos o gráfico da função u.

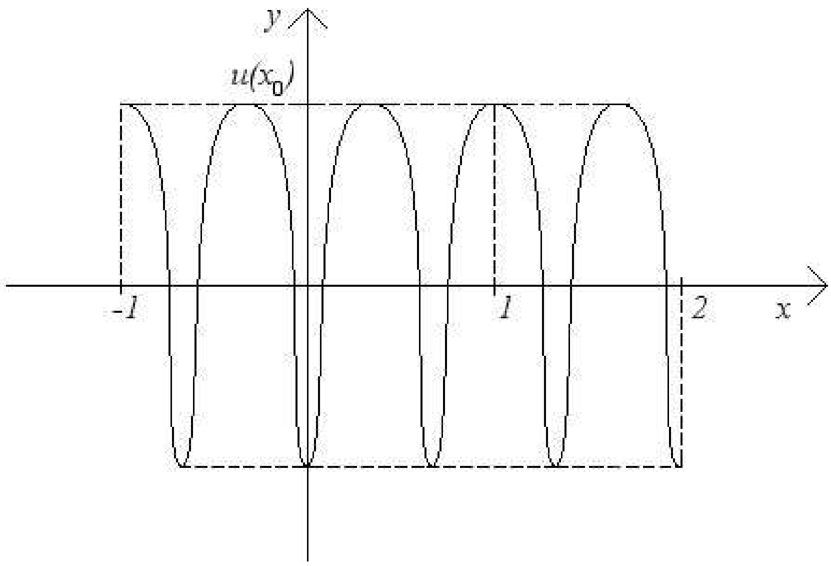

Figura 1.2: Gráfico da função u em $[-1, 2]$.

Graficamente, a idéia da demonstração consiste em reescrever a função u de maneira que a velocidade da variação da função u seja reduzido para que esta nova função (a função u reescrita) seja solução do problema $(2)_\lambda$, $\lambda = \mu$.

Seja

$$\begin{aligned} u_0 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto u_0(x) = u\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right). \end{aligned}$$

Afirmação 1.10 *O menor período de u_0 é 2 e $\dot{u}_0(0) = 0$.*

$$\begin{aligned} u_0(x+2) &= u\left(x_0 + \frac{x+2}{n_0}\right) \\ &= u\left(x_0 + \frac{x}{n_0} + T_0\right) \\ &= u\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right) \\ &= u_0(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Seja $T > 0$ tal que $u_0(x+T) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Então,

$$u\left(x_0 + \frac{x+T}{n_0}\right) = u\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right) \Rightarrow u\left(x_0 + \frac{x}{n_0} + \frac{T}{n_0}\right) = u\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right).$$

Como T_0 é o menor período de u, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{T}{n_0} = kT_0.$$

Logo, $T = k2$. Portanto, o menor período de u_0 é 2. Ao observar

$$\dot{u}_0(x) = \frac{1}{n_0}\dot{u}\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right)$$

e x_0 ser um ponto de máximo global de u, concluímos que

$$\dot{u}_0(0) = \frac{1}{n_0}\dot{u}(x_0) = 0.$$

Afirmação 1.11 *u_0 é uma função par.*

Trabalhando com a função u_0 obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{u_0(x)}dx &= \int_{-1}^{1} e^{u\left(x_0+\frac{x}{n_0}\right)}dx \\
&= n_0 \int_{x_0-\frac{1}{n_0}}^{x_0+\frac{1}{n_0}} e^{u(t)}dt \\
&= n_0 \int_{x_0-\frac{1}{n_0}}^{x_0-\frac{1}{n_0}+T_0} e^{u(t)}dt \\
&= n_0 \int_{-1}^{-1+T_0} e^{u(t)}dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^{u(t)}dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0(x) = u\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right) \quad &\Rightarrow \quad \dot{u}_0(x) = \frac{1}{n_0}\dot{u}\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right) \\
&\Rightarrow \quad \ddot{u}_0(x) = \frac{1}{n_0^2}\ddot{u}\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\ddot{u}_0(x) &= \frac{1}{n_0^2}\left(-\ddot{u}\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right)\right) \\
&= \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{u\left(x_0+\frac{x}{n_0}\right)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx} - 1\right) \\
&= \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{u_0(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u_0(x)}dx} - 1\right).
\end{aligned}$$

O mesmo ocorre com a função

$$\begin{array}{rcl} w_0 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & w_0(x) = u_0(-x) \end{array}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{w_0(x)}dx = \int_{-1}^{1} e^{u(x)}dx,$$

$$-\ddot{w}_0(x) = \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{w_0(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{w_0(x)}dx} - 1\right).$$

Agora, observando o seguinte Problema de Valor Inicial

$$(PVI)_1 \qquad \left\{ \begin{array}{c} -\ddot{v}(x) = \dfrac{\mu}{n_0^2}\left(\dfrac{e^{v(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{v(x)}dx} - 1\right) \\ \dot{v}(0) = 0 \\ v(0) = u(x_0) \end{array} \right. ,$$

podemos concluir que as funções u_0 e w_0 são soluções. Logo, devido a unicidade do $(PVI)_1$,

$$u_0 = w_0.$$

Portanto, u_0 é uma função par.

Observação 1.1 *O ponto de mínimo de u_0 em $[0, 2]$ pertence ao intervalo $(0, 2)$, pois:*

- *Caso zero fosse o ponto de mínimo de u_0 em [0,2], então x_0 seria ponto de mínimo de u em $[x_0, x_0 + T_0]$. Isso contradiz o fato de que x_0 é ponto de máximo global de u;*
- *Caso 2 fosse o ponto de mínimo de u_0 em [0,2], então $x_0 + T_0$ seria ponto de mínimo de u em $[x_0, x_0 + T_0]$. Isso contradiz o fato de que $x_0 + T_0$ é ponto de máximo global de u (u é T_0-periódica).*

Afirmação 1.12 $\dot{u}_0(1) = 0$.

Sejam x_1 um ponto de mínimo u_0 em $(0, 2)$,

$$\begin{array}{rcl} u_1 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u_1(x) = u_0(x_1 + x), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} u_2 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u_2(x) = u_0(x_1 - x). \end{array}$$

Observando a função u_1 obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{u_1(x)}dx &= \int_{-1}^{1} e^{u_0(x_1+x)}dx \\
&= \int_{-1+x_1}^{1+x_1} e^{u_0(t)}dt \\
&= \int_{-1+x_1}^{-1+x_1+2} e^{u_0(t)}dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^{u_0(t)}dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x) = u_0(x_1+x) &\Rightarrow \dot{u}_1(x) = \dot{u}_0(x_1+x) \\
&\Rightarrow \ddot{u}_1(x) = \ddot{u}_0(x_1+x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\ddot{u}_1(x) &= -\ddot{u}_0(x_1+x) \\
&= \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{u_0(x_1+x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u_0(x)}dx} - 1\right) \\
&= \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{u_1(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u_1(x)}dx} - 1\right).
\end{aligned}$$

O mesmo ocorre com a função u_2:

$$\int_{-1}^{1} e^{u_2(x)}dx = \int_{-1}^{1} e^{u_0(x)}dx,$$

$$-\ddot{u}_2(x) = \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{u_2(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u_2(x)}dx} - 1\right).$$

Observando o seguinte Problema de Valor Inicial

$$(PVI)_2 \qquad \left\{\begin{array}{c}
-\ddot{v}(x) = \dfrac{\mu}{n_0^2}\left(\dfrac{e^{v(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{v(x)}dx} - 1\right) \\
\dot{v}(0) = 0 \\
v(0) = u_0(x_1)
\end{array}\right. ,$$

podemos concluir que as funções u_1 e u_2 são soluções. Logo, devido a unicidade do $(PVI)_2$, $u_1 = u_2$, ou seja,

$$u_0(x_1 - x) = u_0(x_1 + x), \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$u_0(2x_1) = u_0(0) \Rightarrow u(x_0) = u\left(x_0 + \frac{2x_1}{n_0}\right) = u(x_0 + x_1T_0),$$

ou seja, $x_0 + x_1T_0$ é ponto de máximo global de u. Seja

$$\begin{aligned} u_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto u_3(x) = u_0(2x_1 + x). \end{aligned}$$

Ao trabalhar com a função u_3 obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} e^{u_3(x)}dx &= \int_{-1}^{1} e^{u_0(2x_1+x)}dx \\ &= \int_{-1+2x_1}^{1+2x_1} e^{u_0(t)}dt \\ &= \int_{-1+2x_1}^{-1+2x_1+2} e^{u_0(t)}dt \\ &= \int_{-1}^{1} e^{u_0(t)}dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3(x) = u_0(2x_1 + x) &\Rightarrow \dot{u}_3(x) = \dot{u}_0(2x_1 + x) \\ &\Rightarrow \ddot{u}_3(x) = \ddot{u}_0(2x_1 + x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\ddot{u}_3(x) &= -\ddot{u}_0(2x_1 + x) \\ &= \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{u_0(2x_1+x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u_0(x)}dx} - 1\right) \\ &= \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{u_3(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u_3(x)}dx} - 1\right), \end{aligned}$$

$$\dot{u}_3(0) = \dot{u}_0(2x_1) = \frac{1}{n_0}\dot{u}(x_0 + x_1T_0) = 0,$$

$$u_3(0) = u_0(2x_1) = u_0(0) = u(x_0).$$

Isso nos diz que a função u_3 é solução do $(PVI)_1$. Daí, pela unicidade do $(PVI)_1$,

$$u_0(x) = u_3(x) = u_0(2x_1 + x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, u_0 é $2x_1$-periódica. Como 2 é o menor período de u_0, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2x_1 = k2$. Assim, $x_1 \in \mathbb{N} \cap (0, 2)$, ou seja, $x_1 = 1$. Portanto,

$$\dot{u}_0(1) = 0.$$

Afirmação 1.13 *A função u_0 é solução do problema $(2)_\lambda$ com $\lambda = \frac{\mu}{n_0^2}$.*

Trabalhando com a função u_0 obtemos:

$$\dot{u}_0(0) = \dot{u}_0(1) = 0,$$

$$u_0(-x) = u_0(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-1}^{1} u_0(x)dx = 2\int_0^1 u_0(x)dx,$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u_0(x)dx &= \int_{-1}^{1} u\left(x_0 + \frac{x}{n_0}\right)dx \\
&= \int_{x_0-\frac{1}{n_0}}^{x_0+\frac{1}{n_0}} u(t)dt \\
&= \int_{x_0-\frac{1}{n_0}}^{x_0-\frac{1}{n_0}+\frac{2}{n_0}} u(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} u(t)dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 u_0(x)dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} e^{u_0(x)}dx = 2\int_0^1 e^{u_0(x)}dx,$$

$$\begin{aligned}
-\ddot{u}_0(x) &= \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{u_0(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u_0(x)}dx} - 1\right) \\
&= \frac{\mu}{n_0^2}\left(\frac{e^{u_0(x)}}{\int_0^1 e^{u_0(x)}dx} - 1\right).
\end{aligned}$$

Portanto, a função u_0 é solução do problema $(2)_\lambda$ com $\lambda = \frac{\mu}{n_0^2}$.

Afirmação 1.14 *u_0 é uma função decrescente em $[0,1]$.*

Observando a Afirmação 1.12 concluímos que $x_1 \in (0,2)$ é o único ponto de mínimo da função u_0 em $(0,2)$, pois x_1 é ponto crítico e u_0 é simétrica em relação a x_1. Como $x_1 = 1$, então a função u_0 é decrescente em $[0,1]$.

■

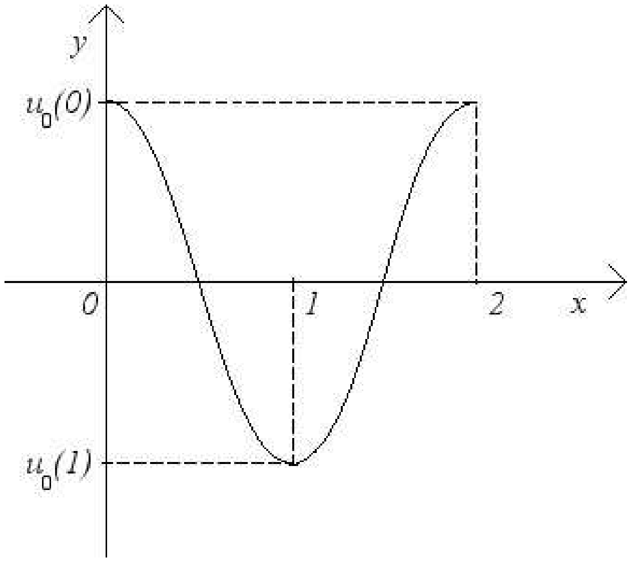

Figura 1.3: Gráfico da função u_0 em $[0,2]$.

Ao observarmos o gráfico da função u_0 em $[0,2]$ na Figura 1.3, notamos que a velocidade da função u foi reduzida de maneira que a função u_0 é solução do problema $(2)_\lambda$, $\lambda = \frac{\mu}{n_0^2}$.

O próximo Teorema a ser demonstrado é o principal Teorema desta etapa. Como já foi dito, vamos usar a Teoria da Bifurcação (Apêndice C) para demonstrá-lo.

Teorema 1.15 *Se $\lambda > \lambda_k = k^2\pi^2$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então o problema $(1)_\lambda$ tem pelo menos k soluções geometricamente distintas.*

Demonstração: Sejam

$$X = \{v \in C([0,1]);\ \int_0^1 v dx = 0\},$$

$$Y = \{u \in C^2[0,1];\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \text{ e } \int_0^1 u dx = 0\}$$

espaços de Banach com a norma do máximo, $G : X \to Y$ o operador inverso de $-d^2/dx^2$, ou seja,

$$G(v) = u = -\int_0^x \left(\int_0^t v(s) ds\right) dt, \forall v \in X$$

e $K : X \to Y$ o operador tal que

$$K(v) = G\left(\frac{e^v}{\int_0^1 e^{v(x)} dx} - 1\right), \forall v \in X.$$

O operador K é importante nesta demonstração, pois mostraremos que o problema $(2)_\lambda$ é equivalente a equação

$$v = \lambda K(v), \forall v \in E$$

e, a partir do operador K, construiremos os operadores H e F (serão definidos posteriormente) que satisfazem as hipóteses de alguns Teoremas da Teoria da Bifurcação. Com esta ferramenta seremos capazes de demonstrar o Teorema 1.15.

Primeiramente, vamos mostrar que o problema $(2)_\lambda$ é equivalente a equação

$$v = \lambda K(v), \forall v \in E.$$

Afirmação 1.16 *O operador G está bem definido, é linear e contínuo.*

Seja $v \in X$ arbitrário tal que $G(v) = u$. Logo,

- $\dot{u}(x) = -\int_0^x v(t)dt, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \dot{u}$ é contínua em $[0,1]$,
$$\dot{u}(0) = -\int_0^0 v(t)dt = 0 \text{ e } \dot{u}(1) = -\int_0^1 v(t)dt = 0;$$
- $\ddot{u}(x) = -v(x), \forall x \in [0,1] \Rightarrow \ddot{u}$ é contínua em $[0,1]$;
- $G(v) = u \Rightarrow u \in C^2[0,1]$ e $\dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$. Mas $w = u + c \in C^2[0,1]$ e $\dot{w}(0) = \dot{w}(1) = 0, \forall c \in \mathbb{R}$. Porém, a condição $\int_0^1 u(x)dx = 0$ nos diz que $c = 0$ em $w = u + c$.

Logo, só existe um único $u \in Y$ tal que $G(v) = u$. Logo, devido a arbitrariedade de $v \in X$, segue que o operador G está bem definido.

A linearidade do operador G é clara. Agora, mostraremos a continuidade do operador G. Seja $v \in X$ arbitrário. Então existe $m \in [0,1]$ tal que

$$||G(v)|| = \int_0^m \left(\int_0^t v(s)ds \right) dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||G(v)|| &= \int_0^m \left(\int_0^t v(s)ds \right) dt \\ &\leq \int_0^m \left(\int_0^t |v(s)|ds \right) dt \\ &\leq ||v||_\infty \int_0^m \left(\int_0^t ds \right) dt \\ &= ||v||_\infty \frac{m^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, segue a Afirmação 1.16.

Afirmação 1.17 *O problema* $(2)_\lambda$ *é equivalente a equação* $v=\lambda K(v),\ \forall v\in E.$

Primeiramente, observemos que $E\subset X$, pois $H^1([0,1])\hookrightarrow C([0,1])$ é compacta. Seja $v\in E$ uma solução arbitrária do problema $(2)_\lambda$. Então,

$$\begin{aligned}
-\ddot{v}(x)=\lambda\left(\frac{e^{v(x)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}-1\right) \quad &\Rightarrow \quad v=\lambda\left(-\int_0^x\left[\int_0^t\left(\frac{e^{v(s)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}-1\right)ds\right]dt\right)\\
&\Rightarrow \quad v=\lambda G\left(\frac{e^{v(s)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}-1\right)\\
&\Rightarrow \quad v=\lambda K(v).
\end{aligned}$$

Logo, devido a arbitrariedade de v, segue que o problema $(2)_\lambda$ implica na equação $v=\lambda K(v),\ \forall v\in E$. Agora, seja $v\in E$ arbitrário tal que $v=\lambda K(v)$. Então,

$$\begin{aligned}
v=\lambda K(v) \quad &\Rightarrow \quad v=\lambda G\left(\frac{e^{v(s)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}-1\right)\\
&\Rightarrow \quad -\ddot{v}(x)=\lambda\left(\frac{e^{v(x)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}-1\right),\ \forall x\in[0,1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v=\lambda G\left(\frac{e^{v(s)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}-1\right) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda}\,v\in Y\\
&\Rightarrow \quad \dot{v}(0)=\dot{v}(1)=0.
\end{aligned}$$

$$v\in E\Rightarrow\int_0^1 v(x)dx=0.$$

Logo, v é uma solução do problema $(2)_\lambda$. Assim, devido a arbitrariedade de $v\in E$, segue que a equação $v=\lambda K(v),\ \forall v\in E$ implica no problema $(2)_\lambda$.

A seguir, vamos nos concentrar em mostrar que o operador K é compacto. Para tal, vamos provar algumas afirmações.

Afirmação 1.18 *O operador* G *é compacto.*

Sejam (v_n) em X uma sequência limitada e $u_n=G(v_n),\forall n\in\mathbb{N}$. Logo, existe $M>0$ tal que $||v_n||\leq M,\forall n\in\mathbb{N}$. Como $\ddot{u}_n(x)=-v_n(x),\forall n\in\mathbb{N}$ e $\forall x\in[0,1]$, então, para $x,t\in[0,1]$, segue que

$$\begin{aligned}
|\dot{u}_n(x)-\dot{u}_n(t)| &= \left|\int_t^x \ddot{u}_n(r)dr\right|\\
&\leq \int_t^x|-v_n(r)|dr\\
&\leq M\int_t^x dr\\
&\leq M|x-t|,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\dot{u}_n(x) - \dot{u}_n(t)| \leq M|x - t|, \forall x, t \in [0, 1] \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Já que $\dot{u}_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$|\dot{u}_n(x)| = |\dot{u}_n(x) - \dot{u}_n(0)| \leq M|x - 0| = Mx \leq M, \forall x \in [0, 1] \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, a sequência $(\dot{u}_n)$ é limitada. Assim, para $x, t \in [0, 1]$, segue que

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u_n(t)| &= \left| \int_t^x \dot{u}_n(r)dr \right| \\
&\leq \int_t^x |\dot{u}_n(r)|dr \\
&\leq M \int_t^x dr \\
&\leq M|x - t|,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|u_n(x) - u_n(t)| \leq M|x - t|, \forall x, t \in [0, 1] \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\int_0^1 u_n(x)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $s_n \in (0, 1)$ tal que $u_n(s_n) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
|u_n(x)| &= |u_n(x) - u_n(s_n)| \\
&\leq M|x - s_n| \\
&\leq M, \ \forall x \in [0, 1] \text{ e } \forall n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

ou seja, a sequência (u_n) é limitada. Observemos que dado $\varepsilon > 0$, existe

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$$

tal que para todo $x, t \in [0, 1]$, com $|x - t| < \delta$, temos $|u_n(x) - u_n(t)| < \varepsilon$. Isso nos diz que a sequência (u_n) é equicontínua. Logo, pelo Teorema de Ascoli (Teorema A.1 no Apêndice A), (u_n) possui uma subsequência convergente. Portanto, o operador G é compacto.

Afirmação 1.19 *A função $S : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ tal que $S(v) = \int_0^1 v(x)dx, \forall v \in C([0, 1])$ é contínua.*

Como a função S é um funcional linear, então basta mostrarmos que S é limitado. Assim,

$$|S(v)| = \left| \int_0^1 v(x)dx \right| \leq \int_0^1 |v(x)|dx \leq ||v|| \int_0^1 dx = ||v||, \ \forall v \in C([0,1]).$$

Afirmação 1.20 *A aplicação $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ tal que $T(v) = e^v, \forall v \in C([0,1])$ é contínua.*

Seja $v_0 \in C([0,1])$ arbitrário. Devido a continuidade uniforme local da função exponencial $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $v \in C([0,1])$, com $||v - v_0|| < \delta$, temos

$$|v(x) - v_0(x)| < \delta \text{ implica em } |e^{v(x)} - e^{v_0(x)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x \in [0,1],$$

donde

$$||e^v - e^{v_0}|| = \max_{x \in [0,1]} |e^{v(x)} - e^{v_0(x)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, o operador T é contínuo em $v_0 \in C([0,1])$ e, devido a sua arbitrariedade, o operador T é contínuo em $C([0,1])$.

Observação 1.2 *Devido a Desigualdade de Jensen (Teorema A.2), segue a seguinte desigualdade:*

$$SoT(v) \geq 1, \ \forall v \in X.$$

Afirmação 1.21 *O operador $R : X \to X$ definido por*

$$R(v) = \frac{e^v}{\int_0^1 e^{v(x)}dx} - 1, \ \forall v \in X$$

é contínuo e limitado.

Devido as Afirmações 1.19 e 1.20, $SoT : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e o operador

$$\frac{T}{SoT} : C([0,1]) \to C([0,1])$$

é contínuo. Assim,

$$R = \left.\frac{T}{SoT}\right|_X - 1$$

é um operador contínuo. Agora, seja $A \subset X$ limitado. Logo, existe $k > 0$ tal que $||v|| \leq k, \forall v \in A$. Da Observação 1.2,

$$\frac{1}{SoT(v)} \leq 1, \ \forall v \in A.$$

Assim,

$$||R(v)|| = \left|\left|\frac{e^v}{\int_0^1 e^{v(x)}dx} - 1\right|\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{e^{v(x)}}{\int_0^1 e^{v(x)dx}} - 1\right| \leq \left(\frac{1}{\int_0^1 e_{v(x)}dx}\right)\sup_{x\in[0,1]} e^{v(x)} + 1 =$$

$$\left(\frac{1}{SoT(v)}\right)\max_{x\in[0,1]} e^{v(x)} + 1 \leq e^{\,k} + 1 = \mu \Rightarrow ||R(v)|| \leq \mu.$$

Logo, $R(A) \subset X$ é um conjunto limitado. Portanto, o operador R é limitado.

Afirmação 1.22 *O operador R pode ser escrito como $R(v) = v + o(||v||)$.*

Quando v é a função identicamente nula $R(v) = 0$. Para $v \neq 0$ precisamos mostrar algumas sentenças. Sabemos que $e^s = 1 + s + s^2 g(s), \forall s \in \mathbb{R}$, onde

$$g(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{(2+i)!}.$$

Assim,

(i) Se $|s| \leq \frac{1}{2}$, então $|g(s)| \leq 1$;

(ii) Se $v \in C([0,1])$ e $||v|| \to 0$, então $v^2 g(v) = o(||v||)$;

(iii) Se $v \in X$ e $||v|| \to 0$, então $\int_0^1 e^{v(x)}dx - 1 = o(||v||)$.

(i):

$$|s| \leq \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; s^i \leq |s|^k \leq \frac{1}{2^k},\ \forall i \in \mathbb{N}\cup\{0\} \;\Rightarrow\; \frac{s^i}{(k+2)!} \leq \frac{1}{2^i(i+2)!},\ \forall i \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Como

$$e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i(i+2)!},$$

então

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i(i+2)!} \leq 1.$$

Logo,

$$|g(s)| \leq 1.$$

(ii):

$$||v|| \to 0 \Rightarrow |v(x)| \leq ||v|| \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow |g(v(x))| \leq 1, \forall x \in [0,1] \Rightarrow ||g(v)|| \leq 1 \Rightarrow$$

$$||v^2g(v)|| \leq ||v^2|| = ||v||^2 \Rightarrow \frac{||v^2g(v)||}{||v||} \leq ||v||.$$

Como $||v|| \to 0$, então

$$\frac{||v^2g(v)||}{||v||} \to 0.$$

Logo,

$$v^2g(v) = o(||v||).$$

(iii): $v \in X \Rightarrow$

$$\int_0^1 e^{v(x)}dx - 1 = \int_0^1 v^2(x)g(v(x))dx \Rightarrow \left|\int_0^1 e^{v(x)}dx - 1\right| = \left|\int_0^1 v^2(x)g(v(x))dx\right| \leq$$

$$\int_0^1 |v^2(x)g(v(x))|dx \leq ||v^2g(v)|| \leq ||v^2|| \leq ||v||^2 \Rightarrow \frac{|\int_0^1 e^{v(x)}dx - 1|}{||v||} \leq ||v||.$$

Como $||v|| \to 0$, então

$$\frac{|\int_0^1 e^{v(x)}dx - 1|}{||v||} \to 0.$$

Logo,

$$\int_0^1 e^{v(x)}dx - 1 = o(||v||).$$

Observemos que

$$R(v) = \frac{e^v}{\int_0^1 e^{v(x)}dx} - 1 = v + o(||v||), \ \forall v \in X,$$

se e só se,

$$\frac{1}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}\left(v^2g(v) + (1 - \int_0^1 e^{v(x)}dx)(v+1)\right) = o(||v||). \tag{1.2}$$

Como

$$\frac{1}{|\int_0^1 e^{v(x)}dx|}\left|\left|v^2g(v) + \left(1 - \int_0^1 e^{v(x)}dx\right)(v+1)\right|\right|\frac{1}{||v||} \leq$$

$$\frac{1}{|\int_0^1 e^{v(x)}dx|}\left(\frac{||v^2g(v)||}{||v||} + \frac{\left|1 - \int_0^1 e^{v(x)}dx\right|}{||v||} + \left|1 - \int_0^1 e^{v(x)}dx\right|\right),$$

então

$$\frac{1}{|\int_0^1 e^{v(x)}dx|}\left|\left|v^2g(v) + \left(1 - \int_0^1 e^{v(x)}dx\right)(v+1)\right|\right|\frac{1}{||v||} \to 0$$

quando $||v|| \to 0$. Portanto, segue a igualdade (1.2).

Afirmação 1.23 *O operador K é compacto.*

Basta observamos que o operador K pode ser escrito como $K = GoR$.

A partir de agora, vamos utilizar a Teoria da Bifurcação (Apêndice C). Seja o operador $H : \mathbb{R} \times X \to X$ definido por

$$H(\lambda, v) = -\lambda G(S(v)),\ \forall (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times X,$$

onde o operador $S : X \to X$ é definida por

$$S(v) = \frac{1}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}\left(v^2 g(v) + \left(1 - \int_0^1 e^{v(x)}dx\right)(v+1)\right),\ \forall v \in X.$$

Afirmação 1.24 *O operador H é compacto.*

De fato, esta propriedade é garantida pela compacidade do operador G.

Afirmação 1.25 *Os operadores $H_\lambda(\lambda, v)$, $H_v(\lambda, v)$, $H_{\lambda v}(\lambda, v) : \mathbb{R} \times X \to X$ são contínuos* $\forall (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times X$

Primeiramente, precisamos mostrar que os operadores G e S são $C^1(X)$. Observemos que $G' : X \to \mathfrak{L}(X, X)$ é contínua e para cada $v \in X$

$$\begin{aligned} G'(v) : X &\to X \\ w &\mapsto G'(v)(w) = -\int_0^x \left(\int_0^t w(s)ds\right) dt \end{aligned}$$

Observemos que $R(v) = v + S(v)$ (veja (1.2)), para todo $v \in X$. Logo, para provarmos que S é $C^1(X)$ basta provarmos que o operador R é $C^1(X)$. Assim, para

$$D(t) = \frac{R(v+tw) - R(v)}{t},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} D(t) &= \frac{e^{tw}e^v \int_0^1 e^v dx - e^v \int_0^1 e^{tw}e^v dx}{t\int_0^1 e^{tw+v}dx \int_0^1 e^v dx} \\ &= \frac{e^v\left(tw\int_0^1 e^v dx + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{(tw)^i}{i!}\int_0^1 e^v dx - \int_0^1 twe^v dx - \int_0^1 \sum\limits_{i=2}^{\infty}\frac{(tw)^i}{i!}e^v dx\right)}{t\int_0^1 e^{v+tw}dx \int_0^1 e^v dx} \\ &\to \frac{e^v w \int_0^1 e^v dx - e^v \int_0^1 e^v w dx}{\left(\int_0^1 e^v dx\right)^2}, \end{aligned}$$

quando $t \to 0$ e para todo $v, w \in X$. Sejam $v \in X$ arbitrário e a transformação linear $T(v) : X \to X$ definida por

$$T(v)w = \frac{e^v w \int_0^1 e^v dx - e^v \int_0^1 e^v w dx}{\left(\int_0^1 e^v dx\right)^2}.$$

Então

$$\frac{R(v+tw)-R(v)}{t} \to \frac{e^v w \int_0^1 e^v dx - e^v \int_0^1 e^v w dx}{\left(\int_0^1 e^v dx\right)^2}, \ \forall w \in X,$$

quando $t \to 0$. Como $v \in X$ é arbitrário, então o operador R é Gâteau diferenciável em X. Observemos que os funcionais

$$R_1 : X \to \mathbb{R}$$

$$R_1(v) = e^{v(x)}h(x),$$

com $h \in C([0,1])$, e

$$R_2 : C([0,1]) \to \mathbb{R}$$
$$R_2(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

são contínuos (basta observarmos a demonstração da continuidade dos funcionais K_1 e K_2 na demonstração da Afirmação 1.8). Assim, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} T : X & \to & \mathfrak{L}(X,X) \\ v & \mapsto & T(v) \end{array}$$

é contínua em X. Logo, R é Fréchet diferenciável e $C^1(X)$ com $R^{'} = T$ em E. Desta maneira, o operador S é $C^1(X)$ e sua derivada é dada por

$$\begin{array}{rcl} S^{'} : X & \to & \mathfrak{L}(X,X) \\ v & \mapsto & S^{'}(v) \end{array}$$

com

$$\begin{array}{rcl} S^{'}(v) : X & \to & \mathfrak{L}(X,X) \\ w & \mapsto & S^{'}(v)w = R^{'}(v)w - w \end{array}$$

para cada $v \in X$. Agora, basta observarmos que

- $H_\lambda(\lambda, v) = -G(S(v))$;
- $H_v(\lambda, v) = -\lambda G^{'}(S(v))oS^{'}$;
- $H_{\lambda v}(\lambda, v) = -G^{'}(S(v))oS^{'}$.

Portanto, segue a Afirmação 1.25.

Seja o operador

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times X &\rightarrow X \\ (\lambda, v) &\mapsto F(\lambda, v) = v - \lambda G(v) + H(\lambda, v). \end{aligned}$$

O operador F satisfaz as seguintes propriedades:

- $F(\lambda, 0) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- $F(\lambda, v) = 0 \Leftrightarrow v - \lambda G(v) + H(\lambda, v) = 0 \Leftrightarrow v - \lambda G(v) - \lambda G(S(v)) = 0 \Leftrightarrow v - \lambda(G(v + S(v))) = 0 \Leftrightarrow v - \lambda GoR(v) = 0 \Leftrightarrow v = \lambda K(v)$.

Observando o problema (P) no Apêndice B, sabemos que seus autovalores são $\lambda_n = n^2\pi^2, \forall n \in \mathbb{N}$. De acordo com o Teorema C.3 (Apêndice C), os pontos $(\lambda_n, 0)$ são pontos de bifurcação para $F(\lambda, v) = 0$.

Sejam

$$A_n^+ = \{v \in X; v(0) > 0 \text{ e } v \text{ possui somente } n \text{ zeros em } (0,1)\},$$

$$A_n^- = -A_n^+,$$

$$B_n^\pm = \mathbb{R} \times A_n^\pm \subset \mathbb{R} \times X.$$

Observemos que

- $B_n^+ \cap B_m^+ = \emptyset, \forall n, m \in \mathbb{N}$, com $n \neq m$;
- $B_n^- \cap B_m^- = \emptyset, \forall n, m \in \mathbb{N}$, com $n \neq m$;
- $(\lambda, v) \in B_n^+ \Rightarrow (\lambda, v_*) \in B_n^-$, onde $v_*(x) = v(1 - x), \forall x \in [0, 1]$.

Assim, concluímos que as soluções de $(1)_\lambda$ geometricamente distintas são caracterizadas pelas soluções de

$$v = \lambda K(v),\ (\lambda, v) \in B_n^+.$$

O Corolário C.5 (Apêndice C) garante que nos pontos $(\lambda_n, 0)$ bifurcam dois contínuos $C^\pm \subset B_n^\pm \cup (\lambda_n, 0)$ de soluções de $F(\lambda, v) = 0$. Os contínuos C_n^+, com $n \in \mathbb{N}$ não se interceptam e, devido a isso, são ilimitados em $\mathbb{R} \times X$ (veja a Figura 1.4).

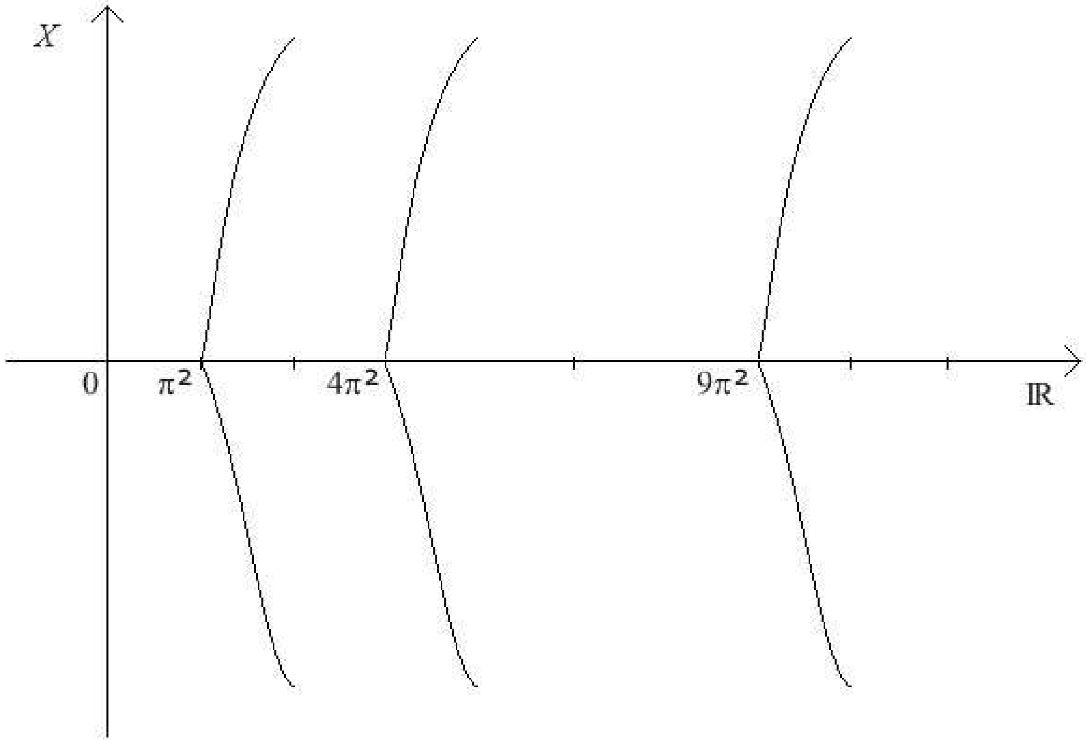

Figura 1.4: Gráfico das Bifurcações.

Afirmação 1.26 *Se a função $v \neq 0$ é solução do problema $(2)_\lambda$, então*

$$||v||_\infty^2 \leq \int_0^1 \dot{v}^2(x)dx = ||\dot{v}||_2^2.$$

Como v é solução do problema $(2)_\lambda$, então $\int_0^1 v(x)dx = 0$, ou seja, existe $t \in (0,1)$ tal que $v(t) = 0$. Assim,

$$|v(x)| = |v(x) - v(t)| = \left|\int_t^x \dot{v}(s)ds\right| \leq \int_t^x |\dot{v}(s)|ds \leq \int_0^1 |\dot{v}(x)|dx = ||\dot{v}||_1.$$

Devido a desigualdade de Hölder (veja em [16]),

$$||\dot{v}||_1 = ||1.(\dot{v})||_1 \leq ||1||_2||\dot{v}||_2 = ||\dot{v}||_2.$$

Logo,

$$||v||_\infty \leq ||\dot{v}||_2$$

e, portanto, segue a Afirmação 1.26.

Afirmação 1.27 *Se a função $v \neq 0$ é solução do problema $(2)_\lambda$, então $||\dot{v}||_2^2 \leq \lambda||v||_\infty$*

De fato,

$$\begin{aligned}
||\dot{v}||_2^2 &= \int_0^1 \dot{v}(x)\dot{v}(x)dx \\
&= \dot{v}(x)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \ddot{v}(x)v(x)dx \\
&= \int_0^1 (-\ddot{v}(x))v(x)dx \\
&= \int_0^1 \lambda\left(\frac{e^{v(x)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx} - 1\right)v(x)dx \\
&= \lambda\int_0^1 \left(\frac{e^{v(x)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}\right)v(x)dx - \int_0^1 v(x)dx \\
&= \lambda\int_0^1 \left(\frac{e^{v(x)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}\right)v(x)dx \\
&\leq \lambda\int_0^1 \left(\frac{e^{v(x)}}{\int_0^1 e^{v(x)}dx}\right)|v(x)|dx \\
&\leq \lambda||v||_\infty.
\end{aligned}$$

As Afirmações 1.26 e 1.27 nos dizem que se a função $v \neq 0$ é solução do problema $(2)_\lambda$, então $||v||_\infty \leq \lambda$. Isso nos diz que os contínuos $C_n^+ \subset \mathbb{R}^+ \times X$ permanecem limitados para valores finitos de λ (veja a Figura 1.5). Assim, se $\lambda > \lambda_n$, então o problema $(2)_\lambda$ admite solução em $A_i^+, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (Teorema B.2 no Apêndice B). Portanto, segue o resultado.

■

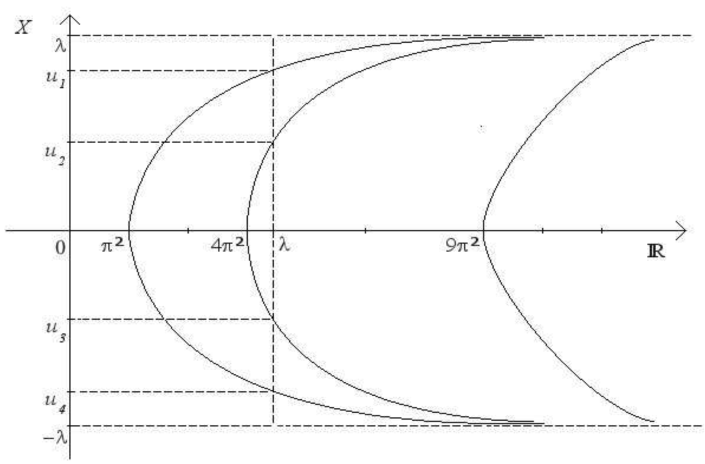

Figura 1.5: Gráfico das Bifurcações para $\lambda > 4\pi^2$.

A Figura 1.5 trata o caso $\lambda > 4\pi^2$. Assim, obtemos pelo menos duas soluções geometricamente distintas, por exemplo, u_1 e u_2.

Terceira Etapa da Demonstração do Teorema 1.3.

Neste momento, vamos completar a demonstração do Teorema 1.3 mostrando a seguinte sentença:

$$\textit{Se o problema } (1)_\lambda \textit{ possui soluções não triviais, então } \lambda > \pi^2. \tag{1.3}$$

Para tal, vamos mostrar que o problema $(1)_\lambda$ é equivalente ao problema:

$$(3)_\lambda \qquad \begin{cases} -\ddot{v}(x) = \lambda\left(e^{v(x)} - 1\right) \\ \\ v(-1) = v(1), \dot{v}(-1) = \dot{v}(1) \\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{v(x)}dx = 1 \end{cases}$$

Proposição 1.28 *Seja u solução do problema $(1)_\lambda$. A função $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$v(x) = u(x) - \ln\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u dx\right), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

é solução do problema $(3)_\lambda$.

Demonstração: Trabalhando com a função v, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) = \dot{u}(x) \ &\Rightarrow \ -\ddot{v}(x) = -\ddot{u}(x) \\ &\Rightarrow \ \lambda\left(\frac{e^u}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u dx} - 1\right) = \lambda\left(e^{v(x)} - 1\right) \\ &\Rightarrow \ -\ddot{v}(x) = \lambda\left(e^{v(x)} - 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(-1) &= u(-1) - \ln\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u\right) \\ &= u(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u\right) \\ &= v(1), \end{aligned}$$

$$\dot{v}(-1) = \dot{u}(-1) = \dot{u}(1) = \dot{v}(1),$$
$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{v(x)}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{e^{u(x)}}{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u(x)}}dx = 1.$$

Portanto, a função v é solução do problema $(3)_\lambda$.

■

Proposição 1.29 *Seja v solução do problema $(3)_\lambda$. A função $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $v(x) = u(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$ é solução do problema $(1)_\lambda$, onde*

$$c = -\ln\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u dx\right).$$

A seguir, vamos mostrar que o problema $(3)_\lambda$ é equivalente ao seguinte problema:

$$(4)_\lambda \qquad \begin{cases} -\ddot{v}(x) = \lambda\left(e^{v(x)} - 1\right) \\ \dot{v}(0) = \dot{v}(1) = 0 \\ \int_0^1 e^{v(x)}dx = 1 \end{cases}$$

Lema 1.3 *A extensão par 2-periódica de toda solução do problema $(4)_\lambda$ é solução do problema $(3)_\lambda$.*

Demonstração: Sejam v uma solução arbitrária do problema $(4)_\lambda$ e w a extensão par 2-periódica de v definida sobre [-1,1], ou seja,

$$w(x) = \begin{cases} v(-x), se\ x \in [-1,0) \\ v(x), se\ x \in [0,1] \end{cases}$$

Então:

- $w(-1) = v(-(-1)) = v(1) = w(1) \Rightarrow w(-1) = w(1);$
- $\dot{w}(-1) = -\dot{v}(-(-1)) = -\dot{v}(1) = 0 = \dot{v}(1) = \dot{w}(1) \Rightarrow \dot{w}(-1) = \dot{w}(1);$
- $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{w(x)}dx = \int_0^1 e^{v(x)}dx = 1;$
- $x \in [-1,0) \Rightarrow -\ddot{w}(x) = -\ddot{v}(-x) = \lambda\left(e^{v(-x)} - 1\right) = \lambda\left(e^{w(x)} - 1\right);$
- $x \in [0,1] \Rightarrow -\ddot{w}(x) = -\ddot{v}(x) = \lambda\left(e^{v(x)} - 1\right) = \lambda\left(e^{w(x)} - 1\right).$

Logo, w é solução do problema $(3)_\lambda$. Como v é arbitrária, então segue o resultado.

■

Não faremos distinção entre as soluções do problema $(4)_\lambda$ e suas extensões pares 2-periódica. Assim, podemos reescrever o Lema 1.2 da seguinte forma:

Lema 1.4 *Seja $v \neq 0$ solução do problema $(3)_\lambda$, $\lambda = \mu$. Então existem $t_0 \in [0, 2)$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma solução decrescente do problema $(4)_\lambda$, $\lambda = \frac{\mu}{n_0^2}$, tal que $v(t+t_0) = v_0(n_0 t)$. Em particular, $v(t+t_0)$ é solução do problema $(4)_\lambda$, $\lambda = \mu$.*

Para provar a sentença (1.3), basta provarmos a seguinte sentença:

$$\textit{Se } \lambda \leq \pi^2, \textit{ então } v = 0 \textit{ é a única solução decrescente do problema } (4)_\lambda. \tag{1.4}$$

Vamos provar por absurdo. Suponhamos que exista uma solução não trivial decrescente v do problema $(4)_\lambda$. Seja $v_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$v_*(x) = v(1-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, as funções v e v_* satisfazem as seguintes propriedades:

(i) v_* é uma solução crescente do problema $(4)_\lambda$;

(ii) Se $x \in [0, \frac{1}{2})$, então $v(x) > v_*(x)$;

(iii) Se $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $v(x) < v_*(x)$;

(iv) $v(\frac{1}{2}) = v_*(\frac{1}{2})$;

(v) $\int_0^1 \dot{v}^2(x)dx = \int_0^1 \dot{v}_*^2(x)dx$;

(vi) $\int_0^1 v(x)dx = \int_0^1 v_*(x)dx$;

(vii)
$$\frac{1}{2}\dot{v}^2(x) + \lambda\left(e^{v(x)} - v(x)\right) = c, \ \forall x \in [0, 1],$$

com
$$c = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{v}^2(x)dx + \lambda\left(1 - \int_0^1 v(x)dx\right);$$

(viii)
$$\frac{1}{2}\dot{v}^2(x) + \lambda\left(e^{v(x)} - v(x)\right) = \frac{1}{2}\dot{v}_*^2(x) + \lambda\left(e^{v_*(x)} - v_*(x)\right), \ \forall x \in [0, 1].$$

Para mostrar a propriedade (vii), basta observar que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\dot{v}(x) + \lambda(e^{v(x)} - v(x))\right) &= \dot{v}(x)\ddot{v}(x) + \lambda(\dot{v}(x)e^{v(x)} - \dot{v}(x)) \\
&= \dot{v}(x)\left(\ddot{v}(x) + \lambda(e^{v(x)} - 1)\right) \\
&= \dot{v}(x)\left(\ddot{v}(x) - \ddot{v}(x)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\dot{v}^2(x) + \lambda\left(e^{v(x)} - v(x)\right) = c \;\Rightarrow\; \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\dot{v}^2(x) + \lambda(e^{v(x)} - v(x))\right) dx = \int_0^1 c\, dx$$
$$\Rightarrow\; c = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{v}^2(x)dx + \lambda\left(1 - \int_0^1 v(x)dx\right)$$

Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(x) = -\dot{v}(x) - \dot{v}_*(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função ψ satisfaz as seguintes propriedades:

- $\psi(0) = 0$;
- $\psi(x) = -\psi(1-x), \forall x \in [0,1]$;
- $\psi(\frac{1}{2}) = 0$.

Observação 1.3 *:*

- *$v(0) > 0 > v(1)$. Como $\int_0^1 e^{v(x)}dx = 1$, então $v(0)$ e $v(1)$ possuem sinais contrários. Logo, o resultado segue da monotonicidade de v;*
- *$A = \{\rho > 0;\ vv_* < 0$ em $[0,\rho)\} \neq \emptyset$. Como $v(0)v(1) = v(0)v_*(0) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $vv_* < 0$ em $[0,\delta)$. Logo, $\delta \in A$;*
- *O conjunto A é limitado. Como $v(\frac{1}{2})v_*(\frac{1}{2}) \geq 0$, então $A \subset (0, \frac{1}{2}]$.*

Lema 1.5 *Seja $\rho_0 = sup\ A$. Então,*

(i) $\psi(x) > 0,\ \forall x \in (0,\rho_0)$;

(ii) $v(\rho_0) = 0$.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar mais algumas propriedades das funções v, v_* e ψ.

Afirmação 1.30 *$v(x) > 0 > v_*(x)$, $\forall x \in [0,\rho_0)$.*

Seja $x \in [0,\rho_0)$ arbitrário. Suponhamos que $x = 0$. Então, a Observação 1.3 nos garante que $v(0) > 0 > v_*(0)$. Agora, suponhamos que $x \neq 0$. Então, devido a $\rho_0 = sup\ A$, existe $\rho \in A$ tal que $x \in (0,\rho)$. Como $A \subset (0,\frac{1}{2}]$, então $x \in (0,\frac{1}{2})$. Isso nos diz que $x < 1-x$, ou seja, $v(x) > v(1-x) = v_*(x)$. Como $v(x)v_*(x) < 0$, então $v(x) > 0 > v_*(x)$. Portanto, devido a arbitrariedade de x em $[0,\rho_0)$, segue o resultado.

Afirmação 1.31 *Se $x \in [0,\rho_0)$ e $\psi(x)=0$, então $\dot{\psi}(x)>0$.*

Vamos observar o que significa $\psi(x)=0$ e $\dot{\psi}(x)>0$

- $\psi(x)=0 \Rightarrow -\dot{v}(x)=\dot{v}_*(x) \Rightarrow e^{v(x)}-v(x)=e^{v_*(x)}-v_*(x)$ (garantido pela propriedade (viii)).
- $\dot{\psi}(x)=-\ddot{v}(x)-\ddot{v}_*(x)=\lambda\left((e^{v(x)}-1)+(e^{v_*(x)}-1)\right)$;
- $\dot{\psi}(x)>0 \Rightarrow (e^{v(x)}-1)+(e^{v_*(x)}-1)>0 \Rightarrow e^{v(x)}-1>1-e^{v_*(x)}$.

Logo, para mostrarmos a Afirmação 1.31 basta mostrarmos a seguinte sentença:

$$\textit{Se } x\in[0,\rho_0) \textit{ e } e^{v(x)}-v(x)=e^{v_*(x)}-v_*(x), \textit{ então } e^{v(x)}-1>1-e^{v_*(x)}. \tag{1.5}$$

Suponhamos que $v(x)\geq \ln(2)$. Então, $e^{v(x)}-1\geq 1$. Já que $0<e^{v_*(x)}<\infty$, então $1-e^{v_*(x)}<1$. Logo, $e^{v(x)}-1>1-e^{v_*(x)}$. Agora, suponhamos que $0<v(x)<\ln(2)$. Então, existe $\xi\in(0,1)$ tal que $v(x)=\ln(1+\xi)$. Como $v_*(x)<0$, então existe $\eta\in(0,1)$ tal que $v_*(x)=\ln(1-\eta)$. Assim,

- $e^{v(x)}-v(x)=e^{v_*(x)}-v_*(x) \Leftrightarrow 1+\xi-\ln(1+\xi)=1-\eta-\ln(1-\eta) \Leftrightarrow \xi-\ln(1+\xi)=-\eta-\ln(1-\eta)$;
- $e^{v(x)}-1>1-e^{v_*(x)} \Leftrightarrow 1+\xi-1>1-(1-\eta) \Leftrightarrow \xi>\eta$.

Daí, basta mostrarmos a seguinte sentença:

$$\xi-\ln(1+\xi)=-\eta-\ln(1-\eta) \Rightarrow \xi>\eta. \tag{1.6}$$

Para tal, primeiramente precisamos garantir que

$$\frac{1+t}{e^{2t}(1-t)}>1, \forall t\in(0,1). \tag{1.7}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1+t}{e^{2t}\,(1-t)}>1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1+t>e^{2t}\,(1-t)\\
&\Leftrightarrow \quad e^t-\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!}>e^{2t}-te^{2t}\\
&\Leftrightarrow \quad e^t-e^{2t}+te^{2t}>\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!}\\
&\Leftrightarrow \quad e^t\left(1-e^t+te^t\right)>\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^t\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}+t\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}\right)>\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^t\left(\sum_{i=2}^{\infty}t^i\left(\frac{1}{(i-1)!}-\frac{1}{i!}\right)\right)>\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^t\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i\,(i-1)}{i!}\right)>\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!}.$$

Logo, basta mostrarmos que

$$e^t\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i(i-1)}{i!}>\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!},\forall t\in(0,1). \tag{1.8}$$

Seja $t\in(0,1)$ arbitrário. Como $t^2(2-1)=t^2$ e $t^i(i-1)>t^i,\forall i\in\mathbb{N}\cap[3,\infty)$, então

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i(i-1)}{i!}>\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!} \quad\Rightarrow\quad e^t\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i(i-1)}{i!}>\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i(i-1)}{i!}>\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^i}{i!}.$$

Logo, devido a arbitrariedade de $t\in(0,1)$, segue (1.7).

Sejam $f,g:(0,1)\to\mathbb{R}$ funções tais que

$$f(t)=t-\ln(1+t)$$

$$g(t)=-t-\ln(1-t).$$

Assim,

- $\dot{f}(t)=1-\frac{1}{1+t}>0,\forall t\in(0,1)$ e $\dot{g}(t)=-1+\frac{1}{1-t}>0,\forall t\in(0,1)$. Logo, f e g são estritamente crescentes;

- $g(t)-f(t)=-2t-ln(1-t)+\ln(1+t)=-2t+\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=-\ln(e^{2t})+\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\ln\left(\frac{1+t}{e^{2t}(1-t)}\right),\forall t\in(0,1)$. Como $\frac{1+t}{e^{2t}(1-t)}>1,\forall t\in(0,1)$, então $g(t)-f(t)>0,\forall t\in(0,1)$.

Logo, para mostrarmos (1.6), basta mostrarmos:

$$f(\xi)=g(\eta)\Rightarrow\xi>\eta. \tag{1.9}$$

Suponha por contradição que $\xi\leq\eta$. Então,

- $\xi=\eta\Rightarrow 0=g(\eta)-f(\xi)=g(\xi)-f(\xi)>0;$

- $\xi<\eta\Rightarrow g(\xi)<g(\eta)\Rightarrow g(\xi)-f(\xi)<g(\eta)-f(\xi)=0.$

Portanto, segue (1.9) e aqui terminamos a demonstração da Afirmação 1.31.

Prova do item (i):

Como $\psi(0) = -\dot{v}(0) - \dot{v}_*(0) = 0$, então, devido a Afirmação 1.31, $\dot{\psi}(0) > 0$. Daí, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (0, \delta)$, $\psi(t) > \psi(0) = 0$. Logo, (i) ocorre para $x \in (0, \rho_0)$ suficientemente pequeno. Agora, suponha por contradição que existe $s \in (0, \rho_0)$ tal que $\psi(s) = 0$ e $\psi(x) > 0, \forall x \in (0, s)$. Então,

$$\dot{\psi}(s) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\psi(s+h) - \psi(s)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\psi(s+h)}{h} \leq 0.$$

Isso contradiz a Afirmação 1.31. Logo, $\psi(s) > 0$. Desta maneira, podemos concluir que não existe $x \in (0, \rho_0)$ tal que $\psi(x) = 0$ ou $\psi(x) < 0$ (Caso ocorresse, existiria $t \in (0, x)$ tal que $\psi(t) = 0$ devido a continuidade da função ψ). Portanto, segue (i).

Agora, vamos mostrar algumas propriedades de ρ_0.

Afirmação 1.32 *Pelo menos um dos seguintes casos ocorre:*

- $v(\rho_0) = 0$
- $v_*(\rho_0) = 0$

Como $\rho_0 = sup\ A$, então $\forall \varepsilon > 0$ tal que $(\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon) \in [0, 1]$ temos

- $v(\rho_0 - \varepsilon)v_*(\rho_0 - \varepsilon) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon \to 0} v(\rho_0 - \varepsilon)v_*(\rho_0 - \varepsilon) \leq 0 \Rightarrow v(\rho_0)v_*(\rho_0) \leq 0$;
- $v(\rho_0 + \varepsilon)v_*(\rho_0 + \varepsilon) \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon \to 0} v(\rho_0 + \varepsilon)v_*(\rho_0 + \varepsilon) \geq 0 \Rightarrow v(\rho_0)v_*(\rho_0) \geq 0$.

Logo, $v(\rho_0)v_*(\rho_0) = 0$, o que prova a Afirmação 1.32. Suponhamos por contradição que $v(\rho_0) \neq 0$ e $v_*(\rho_0) = 0$. Como $v(x) > 0, \forall x \in [0, \rho_0)$, então, devido a continuidade de v, $v(\rho_0) > 0$.

Afirmação 1.33 $\dot{v}_*(\rho_0) > 0$

Observemos que

- Devido a propriedade (viii),

$$\frac{1}{2}\dot{v}^2(\rho_0) + \lambda \left(e^{v(\rho_0)} - v(\rho_0)\right) = \frac{1}{2}\dot{v}_*^2(\rho_0) + \lambda \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\dot{v}^2(\rho_0) + \lambda \left(e^{v(\rho_0)} - (1 + v(\rho_0))\right) = \frac{1}{2}\dot{v}_*^2(\rho_0).$$

Como $\dot{v}^2(\rho_0) \geq 0$, $\lambda > 0$ e $e^{v(\rho_0)} - (1 + v(\rho_0)) > 0$, então $\dot{v}_*^2(\rho_0) > 0$;

- $\dot{v}_*(\rho_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{v_*(\rho_0+h)}{h} \geq 0$, pois $h \to 0^-$ implica em $(\rho_0 + h) \in (0, \rho_0)$, ou seja, $v_*(\rho_0 + h) < 0$.

Logo, segue a Afirmação 1.33.

Afirmação 1.34 *ρ_0 é o único ponto de máximo da função $\dot{v}_*$ sobre $[0,1]$.*

Observemos que

- $-\ddot{v}_*(\rho_0) = \lambda(e^{v_*(\rho_0)} - 1) = \lambda(1-1) = 0 \Rightarrow \rho_0$ é ponto crítico da função $\dot{v}_*$;

- $-\dddot{v}_*(\rho_0) = \lambda\dot{v}_*(\rho_0)e^{v_*(\rho_0)} = \lambda\dot{v}_*(\rho_0) > 0 \Rightarrow \dddot{v}_*(\rho_0) < 0$.

Logo, ρ_0 é ponto de máximo local da função $\dot{v}_*$, ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $\dot{v}_*(\rho_0) \geq \dot{v}_*(x), \forall x \in (\rho_0 - \delta, \rho_0 + \delta)$. Como $v_*(x) < 0, \forall x \in [0, \rho_0)$ e $-\ddot{v}_*(x) = \lambda(e^{v_*(x)} - 1), \forall x \in [0,1]$, então $\ddot{v}_*(x) > 0, \forall x \in [0, \rho_0)$. Logo, a função $\dot{v}_*$ é crescente em $[0, \rho_0)$. Já que $v_*(x) > v_*(\rho_0), \forall x \in (\rho_0, 1]$, então $\ddot{v}_*(x) < 0, \forall x \in (\rho_0, 1]$. Logo, a função $\dot{v}_*$ é decrescente em $(\rho_0, 1]$. Isso nos diz que $\dot{v}_*(\rho_0) > \dot{v}_*(x), \forall x \in [0, \rho_0)$ e $\dot{v}_*(\rho_0) > \dot{v}_*(x), \forall x \in (\rho_0, 1]$. Portanto, segue a Afirmação 1.34.

Prova do item (ii):

Observemos que $-\dot{v}(\rho_0) = -\dot{v}(1 - (1 - \rho_0)) = \dot{v}_*(1 - \rho_0)$. Logo, $\dot{v}_0(\rho_0) > -\dot{v}(\rho_0)$. Assim, $\psi(\rho_0) = -\dot{v}(\rho_0) - \dot{v}_*(\rho_0) < 0$ e, pela continuidade da função ψ, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) < 0, \forall x \in (\rho_0 - \delta, \rho_0 + \delta)$, em particular, $\psi(x) < 0, \forall x \in (\rho_0 - \delta, \rho_0)$. Isso contradiz o item (i). Portanto, $v(\rho_0) = 0$.

∎

Observação 1.4 *Observemos que:*

- $-\dot{v}(1 - x) = \dot{v}_*(x), \forall x \in [0,1]$;

- *$\dot{v}_*$ crescente em $[0, \rho_0]$, decrescente em $[\rho_0, 1]$ e $\dot{v}_*(0) = \dot{v}_*(1) = 0 \Rightarrow \dot{v}_* > 0$ em $(0,1) \Rightarrow -\dot{v}(x) = |\dot{v}(x)| = |\dot{v}(1-(1-x))| = |-\dot{v}_*(1-x)| = \dot{v}_*(1-x), \forall x \in [0,1]$;*

- *Afirmação 1.34 $\Rightarrow \rho_0$ é o único ponto de máximo da função $|\dot{v}|$ sobre $[0,1]$.*

Observação 1.5 *:*

- *Devido a propriedade (viii),*

$$2\lambda\left(e^{v(x)} - e^{v_*(x)} - (v(x) - v_*(x))\right) = \dot{v}_*^2(x) - \dot{v}^2(x), \forall x \in (0, \tfrac{1}{2});$$

- $\dot{v}_*^2(x) - \dot{v}^2(x) = (\dot{v}_*(x) + \dot{v}(x))(\dot{v}_*(x) - \dot{v}(x)) = -\psi(x)(\dot{v}_*(x) - \dot{v}(x)), \forall x \in (0, \frac{1}{2})$;
- *Devido a propriedade (ii),*

$$\dot{v}_*(x) - \dot{v}(x) > 0, \forall x \in (0, \tfrac{1}{2}).$$

Proposição 1.35

$$0 < \frac{e^{v(x)} - e^{v_*(x)}}{v(x) - v_*(x)} < 1, \forall x \in (0, \frac{1}{2}).$$

Demonstração: Já sabemos que $\rho_0 \in (0, \frac{1}{2}]$. Suponhamos que $\rho_0 < \frac{1}{2}$.

Afirmação 1.36 $v(x) < 0$, $v_*(x) < 0, \forall x \in (\rho_0, \frac{1}{2})$.

Basta observarmos que:

- $v(\rho_0) > v(x), \forall x \in (\rho_0, \frac{1}{2})$. Logo, devido ao item (ii) do Lema 1.5, $v(x) < 0, \forall x \in (\rho_0, \frac{1}{2})$;
- Se $x \in (\rho_0, \frac{1}{2})$, então $1 - x \in (\frac{1}{2}, 1 - \rho_0)$, ou seja, $\rho_0 < 1 - x$. Logo, $v_*(x) = v(1 - x) < v(\rho_0) = 0, \forall x \in (\rho_0, \frac{1}{2})$.

Devido a Observação 1.4,

$$-\dot{v}(\rho_0) = |\dot{v}(\rho_0)| > |\dot{v}(1 - \rho_0)| = -\dot{v}(1 - \rho_0) = \dot{v}_*(\rho_0).$$

Assim,

$$\psi(\rho_0) = -\dot{v}(\rho_0) - \dot{v}_*(\rho_0) > 0.$$

Logo, pelo item (i) do Lema 1.5,

$$\psi(x) > 0, \forall x \in (0, \rho_0].$$

Afirmação 1.37 $\psi(x) > 0, \forall x \in (\rho_0, \frac{1}{2})$.

Suponhamos que existe $t \in (\rho_0, \frac{1}{2})$ tal que $\psi(t) = 0$. Já que $\psi(\frac{1}{2}) = 0$, então, pelo Teorema de Rolle, existe $s \in (t, \frac{1}{2})$ tal que $\dot{\psi}(s) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{\psi}(s) \\
&= -\ddot{v}(s) - \ddot{v}_*(s) \\
&= \lambda\left(e^{v(s)} - 1\right) + \lambda\left(e^{v_*(s)} - 1\right) \\
&= \lambda\left(e^{v(s)} + e^{v_*(s)} - 2\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{v(s)} + e^{v_*(s)} = 2.$$

Mas, isso contradiz a Afirmação 1.36, pois

$$v(s) < 0,\ v_*(s) < 0 \Rightarrow e^{v(s)} + e^{v_*(s)} < 2.$$

Logo, segue a Afirmação 1.37 e, devido a Observação 1.5,

$$0 < \frac{e^{v(x)} - e^{v_*(x)}}{v(x) - v_*(x)} < 1,\ \forall x \in (0, \frac{1}{2}).$$

Agora, suponhamos que $\rho_0 = \frac{1}{2}$. Seja $x \in (0, \frac{1}{2})$ arbitrário. Pelo item (i) do Lema 1.5 e pela Observação 1.5,

$$\dot{v}_*^2(x) - \dot{v}^2(x) < 0,$$

ou seja,

$$0 < \frac{e^{v(x)} - e^{v_*(x)}}{v(x) - v_*(x)} < 1.$$

Logo, devido a arbitrariedade de $x \in (0, \frac{1}{2})$, segue o resultado.

$\blacksquare$

Finalização da Demonstração da Sentença (1.4).

Sejam as funções $w, f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ tais que $w(x) = v(x) - v_*(x), \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ e $f(x) = \cos(\pi x), \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$. Trabalhando com as funções w e f obtemos:

- A expressão da segunda derivada da função w

$$\begin{aligned} -\ddot{w}(x) &= -\ddot{v}(x) + \ddot{v}_*(x) \\ &= \lambda\left(e^{v(x)} - 1\right) - \lambda\left(e^{v_*(x)} - 1\right) \\ &= \lambda\left(e^{v(x)} - e^{v_*(x)}\right),\ \forall x \in [0, \frac{1}{2}]; \end{aligned} \tag{1.10}$$

- O valor da primeira derivada da função w no ponto zero

$$\begin{aligned} \dot{w}(0) &= \dot{v}(0) - \dot{v}_*(0) \\ &= \dot{v}(0) - (-\dot{v}(1-0)) \\ &= \dot{v}(0) + \dot{v}(1) \\ &= 0; \end{aligned}$$

- Devido a propriedade (iv),

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = v\left(\frac{1}{2}\right) - v_*\left(\frac{1}{2}\right) = 0;$$

- Devido a propriedade (ii),

$$w(x) > 0, \forall x \in [0, \frac{1}{2});$$

- Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \dot{w}(x)\,\mathrm{sen}(\pi x)dx &= \mathrm{sen}(\pi x)w(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} w(x)f(x)dx \\ &= -\pi \int_0^{\frac{1}{2}} w(x)f(x)dx; \end{aligned}$$

- Integrando por partes,

$$\begin{aligned} -\int_0^{\frac{1}{2}} \ddot{w}(x)f(x)dx &= -\left(f(x)\dot{w}(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \dot{w}(x)\,\mathrm{sen}(\pi x)dx \right) \\ &= \pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}} w(x)f(x)dx; \end{aligned} \tag{1.11}$$

- Utilizando (1.10),

$$\begin{aligned} -\int_0^{\frac{1}{2}} \ddot{w}(x)f(x)dx &= \lambda \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{v(x)} - e^{v_*(x)})f(x)dx \\ &= \lambda \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{v(x)} - e^{v_*(x)}}{v(x) - v_*(x)}\right) w(x)f(x)dx \\ &< \lambda \int_0^{\frac{1}{2}} w(x)f(x)dx; \end{aligned} \tag{1.12}$$

- Como $w, f > 0$ em $(0, \frac{1}{2})$, então

$$\int_0^{\frac{1}{2}} w(x)f(x)dx > 0.$$

Da igualdade (1.11) e da desigualdade (1.12) obtemos

$$\pi^2 < \lambda.$$

A desigualdade $\pi^2 < \lambda$ contradiz a hipótese da sentença (1.4). Portanto, segue o resultado.

$\blacksquare$

Capítulo 2

O Problema Bidimensional

Como no capítulo anterior, vamos estudar o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \eta\left(\dfrac{e^u}{\int_\Omega e^u dz} - \dfrac{1}{|\Omega|}\right) \\ \displaystyle\int_\Omega u dz = 0 \end{cases}$$

onde $u \in H^1(\Omega)$ e $\eta \in (8\pi, 4\pi^2)$. Assim, as soluções do problema (P_1) residem no conjunto $E = \{w \in H^1(\Omega); \int_\Omega w(z)dz = 0\}$. Devido aos estudos de Struwe-Tarantello [2], vamos supor que $\Omega = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. As soluções fracas do problema (P_1) são pontos críticos do funcional $I_\eta : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_\eta(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \eta \ln\left(\int_\Omega e^{u(z)}dz\right), \ \forall u \in E,$$

o qual satisfaz as seguintes propriedades:

- $\int_\Omega e^{u(z)}dz \geq 1$, devido a Desigualdade de Jensen (Teorema A.2 no Apêndice A);
- $||u||^2 \geq I_\eta(u), \forall u \in E$;
- A aplicação $\eta \to I_\eta(u)$ é monótona decrescente, $\forall u \in E$;
- O funcional I_η possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.14 no Apêndice A).

A meta deste capítulo é mostrar que existe um ponto crítico não nulo para o funcional I_η e estudar o que acontece com o problema (P_1) quando $\eta > 0$ está próximo de zero. Para tal, vamos dividir este Capítulo em duas partes:

- **Primeira Parte: A existência de uma solução não-trivial para o problema** (P_1);

- **Segunda Parte: Comportamento do problema** (P_1) **quando** $\eta > 0$ **está próximo de zero**.

A Primeira Parte deste Capítulo resume-se a mostrar o seguinte Teorema:

Teorema 2.1 *Para cada* $\eta \in (8\pi, 4\pi^2)$, *existe uma solução não trivial* u_η *do problema* (P_1) *tal que*

$$I_\eta(u_\eta) \geq c_0\left(1 - \frac{\eta}{4\pi^2}\right),$$

onde $c_0 > 0$ *e independe de* η.

Para tanto, a dividimos da seguinte maneira:

- ***Primeira Etapa:*** *O funcional* I_η *possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha e algumas propriedades*;

- ***Segunda Etapa:*** *A Existência de uma Sequência de Palais-Smale limitada*;

- ***Terceira Etapa:*** *O Lema do Completamento da Reta e o Teorema 2.1.*

Primeira Parte: A existência de uma solução não-trivial para o problema (P_1)**.**

Primeira Etapa: *O funcional* I_η *possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha e algumas propriedades.*

Primeiramente vamos mostrar algumas proposições.

Lema 2.1

$$I_\eta^{'} : E \to \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$$

$$I_\eta^{'}(u)v = \int_\Omega \nabla u(z)\nabla v(z)dz - \eta\frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}, \ \forall u, v \in E.$$

Demonstração: Analogamente a demonstração da derivada da aplicação GoF na demonstração da Afirmação 1.7 (Capítulo 1), a derivada da aplicação

$$\begin{aligned} J_1 : E &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2}||u||^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

é dada por

$$J_1' : E \to \mathfrak{L}(E, \mathbb{R}),$$

onde

$$\begin{aligned} J_1'(u) : E &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dz \end{aligned}$$

para cada $u \in E$. Seja a aplicação

$$\begin{aligned} J_2 : E &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_\Omega e^u dz. \end{aligned}$$

Afirmação 2.2 *A Aplicação J_2 é Gâteau diferenciável em E.*

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{J_2(u+tv) - J_2(u)}{t} &= \frac{\int_\Omega e^{u+tv} dz - \int_\Omega e^u dz}{t} \\ &= \frac{1}{t}\left(\int_\Omega t e^u v dz + \int_\Omega \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(tv)^i}{i!} e^u dz \right) \\ &\to \int_\Omega e^u v dz \end{aligned}$$

quando $t \to 0$, para todo $u, v \in E$. Logo, a aplicação J_2 é Gâteau diferenciável em E.

Afirmação 2.3 *A aplicação*

$$\begin{aligned} J_3 : E &\to L^2(\Omega) \\ u &\mapsto e^u \end{aligned}$$

é contínua em E.

Seja $u \in E$. Para a função $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$w(z) = \begin{cases} u(z), \ se \ z \in \Omega \\ 0, \ se \ z \in \mathbb{R}^2 \backslash \Omega \end{cases}$$

obtemos, pelo Teorema A.10 (Apêndice A),

$$e^{1+w^2} \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

ou seja,

$$e^{1+u^2} \in L^1(\Omega).$$

Como

$$|e^{u(z)}|^2 = e^{2u(z)} \leq e^{2\left(1+u^2(z)\right)}, \ \forall z \in \Omega,$$

então a aplicação está bem definida. Seja $u_n \to u$ em E. Devido a Observação A.1 (Apêndice A), podemos aplicar o Teorema A.11 (Apêndice A). Assim, existe $h \in H^1(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência,

- $u_n(z) \to u(z)$ quase sempre em Ω;
- $|u_n(z)| \leq h(z)$ quase sempre em Ω.

Logo,

$$e^{u_n(z)} \leq e^{h(z)} \leq e^{1+h^2(z)}, \ \forall z \in \Omega.$$

Pelo Teorema A.10 (Apêndice A), para a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} h(z), \ se \ z \in \Omega \\ 0, \ se \ z \in \mathbb{R}^2 \backslash \Omega \end{cases}$$

obtemos

$$e^{2\left(1+f^2\right)} \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

ou seja,

$$e^{2\left(1+h^2\right)} \in L^1(\Omega)$$

donde

$$e^{1+h^2} \in L^2(\Omega).$$

Como a continuidade da função exponencial garante que $e^{u_n(z)} \to e^{u(z)}$ quase sempre em Ω, então, pelo Teorema da Convergência Dominada (veja em [13]),

$$e^{u_n} \to e^u, \text{ em } L^2(\Omega).$$

Portanto, a Afirmação 2.3 está provada.

Afirmação 2.4 *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} T_1 : E & \to & \mathfrak{L}(E, \mathbb{R}) \\ u & \to & T_1(u) \end{array}$$

com

$$\begin{aligned} T_1(u): E &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow T(u)v = \int_\Omega e^u v dz \end{aligned}$$

é contínua em E.

Seja $u_n \rightarrow u$ em E. Assim, pela continuidade da aplicação J_3 obtemos

$$e^{u_n} \rightarrow e^u, \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim, pela desigualdade de Hölder (veja em [16]) e pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger (Teorema A.4 no Apêndice A),

$$\begin{aligned} \sup_{||v||=1} \Big| T_1(u_n)v - T_1(u)v \Big| &= \sup_{||v||=1} \left| \int_\Omega (e^{u_n} - e^u)\, v dz \right| \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} ||e^{u_n} - e^u||_2^2 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, segue a Afirmação 2.4. Observemos que, devido a Afirmação 2.2,

$$\frac{J_2(u+tv) - J_2(u)}{t} \rightarrow \int_\Omega e^u v dz$$

quando $t \rightarrow 0$, para todo $u, v \in E$. Assim, pela Afirmação 2.4, a aplicação J_2 é Fréchet diferenciável com

$$J_2^{'} = T_1.$$

Portanto,

$$I_\eta^{'}(u) = J_1^{'}(u) - \eta \frac{J_2^{'}(u)}{J_2(u)}, \ \forall u \in E,$$

ou seja,

$$I_\eta^{'} : E \rightarrow \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$$

$$I_\eta^{'}(u)v = \int_\Omega \nabla u(z) \nabla v(z) dz - \eta \frac{\int_\Omega e^{u(z)} v(z) dz}{\int_\Omega e^{u(z)} dz}, \ \forall u, v \in E.$$

■

Lema 2.2

$$I_\eta^{''} : E \rightarrow \mathfrak{L}(E \times E, \mathbb{R})$$

$$I_\eta^{''}(u)(v, w) =$$

$$\int_\Omega \dot{v}(z)\dot{w}(z)dz - \eta\left(\frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)w(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz} - \frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz\int_\Omega e^{u(z)}w(z)dz}{\left(\int_\Omega e^{u(z)}dz\right)^2}\right),$$

$\forall(v,w)\in E\times E$.

Demonstração: Usando a notação da demonstração da Proposição 2.1, analogamente a demonstração da segunda derivada da aplicação GoF na demonstração da Afirmação 1.8 (Capítulo 1) segue que a segunda derivada da aplicação J_1 é dada por

$$J_1^{''}: E \to \mathfrak{L}(E, \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})),$$

onde

$$\begin{array}{rcl} J_1^{''}(u): E & \to & \mathfrak{L}(E,\mathbb{R}) \\ v & \mapsto & J_1^{''}(u)v = J_1^{'}(v) \end{array}$$

para cada $u \in E$. Analogamente a demonstração da diferenciabilidade Gâteau da aplicação S na demonstração da Afirmação 1.8, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} J_4: E & \to & \mathfrak{L}(E,\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & J_4(u) = \dfrac{J_2^{'}(u)}{J_2(u)} \end{array}$$

é Gâteau diferenciável em E e para a Transformação Linear

$$T_2(u): E \to \mathfrak{L}(E,\mathbb{R})$$

definida por,

$$(T_2(u)v)w = \frac{\int_\Omega e^{u(x)}v(x)w(x)dx}{\int_\Omega e^{u(x)}dx} - \frac{\int_\Omega e^{u(x)}v(x)dx\int_\Omega e^{u(x)}w(x)dx}{\left(\int_\Omega e^{u(x)}dx\right)^2},$$

obtemos

$$\frac{J_4(u+tv)-J_4(u)}{t} \to T_2(u)v,\ \forall v\in E$$

quando $t \to 0$. Segue da continuidade da aplicação T_1 que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} T_2: E & \to & \mathfrak{L}(E,\mathfrak{L}(E,\mathbb{R})) \\ u & \mapsto & T_2(u) \end{array}$$

é contínua em E. Logo, a aplicação J_4 é Fréchet diferenciável em E com

$$J_4^{'} = T_2.$$

Logo,

$$I_\eta^{''}(u) = J_1^{''}(u) - \eta\ J_4^{'}(u),\ \forall u \in E.$$

Portanto, segue o Lema 2.2.

■

Lema 2.3 *A função $u = 0$ é ponto de mínimo local estrito do funcional I_η.*

Demonstração: Observemos que o funcional $I_\eta^{'}(u) : E \to \mathbb{R}$ é dado por

$$I_\eta^{'}(u)v = \int_\Omega \langle \nabla u(z), \nabla v(z)\rangle dz - \eta \frac{\int_\Omega e^{u(z)} v(z) dz}{\int_\Omega e^{u(z)} dz},\ \forall u, v \in E$$

e o funcional $I_\eta^{''}(u) : E \times E \to \mathbb{R}$ na direção de $v \in E$ é dado por

$$I_\eta^{''}(u)(v,v) = \int_\Omega |\nabla v(z)|^2 dz - \eta \left[\int_\Omega \frac{e^{u(z)}}{\int_\Omega e^{u(z)} dz} v(z)^2 dz - \left(\int_\Omega \frac{e^{u(z)}}{\int_\Omega e^{u(z)} dz} v(z) dz \right)^2 \right].$$

Como o funcional I_η é duas vezes diferenciável e $I_\eta^{'}(0) = 0$, então, devido ao Teorema A.6 (Apêndice A), basta mostrarmos que existe $k > 0$ tal que

$$I_\eta^{''}(u)(v,v) \geq k||v||^2, \forall v \in E.$$

De fato, utilizando a desigualdade de de Poincaré-Wirtinger (Teorema A.4 no Apêndice A),

$$I_\eta^{''}(0)(v,v) = ||v||^2 - \eta \int_\Omega v(z)^2 dz \geq ||v||^2 - \frac{\eta}{4\pi^2}||v||^2 = (1 - \frac{\eta}{4\pi^2})||v||^2,\ \forall v \in E.$$

Logo, segue o resultado.

■

Lema 2.4 *Sejam $u, v \in E$ e $\xi, M \geq 0$. Então:*

(i) $I_\xi(u+v) \leq I_\xi(u) + I_\xi^{'}(u)v + \frac{1}{2}||v||^2$;

(ii) Existe $L > 0$ tal que

$$||I_\tau^{'}(u) - I_\delta^{'}(u)|| \leq L|\tau - \delta|,$$

uniformemente em $u \in E$ com $||u||^2 \leq M$ e $\tau, \delta \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

(i) Primeiramente vamos mostrar algumas afirmações:

Afirmação 2.5

$$I_\xi(u+v) - I_\xi(u) - I'_\xi(u)v - \frac{1}{2}||v||^2 = -\xi\left[\ln\left(\frac{\int_\Omega e^{u(z)+v(z)}dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right) - \frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right]$$

De fato.

$$I_\xi(u+v) - I_\xi(u) - I'_\xi(u)v - \frac{1}{2}||v||^2 = \left[\frac{1}{2}||u+v||^2 - \xi\ln\left(\int_\Omega e^{u(z)+v(z)}dz\right)\right] +$$

$$(-1)\left\{\left[\frac{1}{2}||u||^2 - \xi\ln\left(\int_\Omega e^{u(z)}dz\right)\right] + \left(\langle u,v\rangle - \xi\frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right) + \frac{1}{2}||v||^2\right\} =$$

$$\left(\frac{1}{2}||u+v||^2 - \frac{1}{2}(||u||^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||^2)\right) +$$

$$(-\xi)\left[\ln\left(\int_\Omega e^{u(z)+v(z)}dz\right) - \ln\left(\int_\Omega e^{u(z)}dz\right) - \frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right] =$$

$$-\xi\left[\ln\left(\frac{\int_\Omega e^{u(z)+v(z)}dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right) - \frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right]$$

Logo, a Afirmação 2.5 está provada.

Afirmação 2.6

$$\int_0^1\int_0^t \frac{d^2}{ds^2}f(s)dsdt = \ln\left(\frac{\int_\Omega e^{u(z)+v(z)}dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right) - \frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz},$$

onde a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é definida por

$$f(s) = \ln\left(\frac{\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right), \forall s \in [0,1].$$

De fato. Como

$$\frac{d}{ds}f(s) = \left(\frac{\int_\Omega e^{u(z)}dz}{\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}dz}\right)\left(\frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right) = \frac{\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}dz},$$

então:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^t \frac{d^2}{ds^2}f(s)dsdt &= \int_0^1 \frac{d}{ds}f(s)\Big|_0^t dt = \int_0^1\left(\frac{d}{ds}f(t) - \frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right)dt \\
&= f(t)\Big|_0^1 - \frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz} \\
&= \ln\left(\frac{\int_\Omega e^{u(z)+v(z)}dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}\right) - \frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz}
\end{aligned}$$

Logo, a Afirmação 2.6 está provada.

Afirmação 2.7

$$g(s)=\frac{d^2}{ds^2}f(s)\geq 0$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
g(s) &= \frac{\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}v^2(z)dz\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}dz-\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}v(z)dz\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}v(z)dz}{\left(\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}dz\right)^2}\\
&= \frac{\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}v^2(z)dz\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}dz-\left(\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}v(z)dz\right)^2}{\left(\int_\Omega e^{u(z)+sv(z)}dz\right)^2}\\
&= \frac{\int_\Omega v^2d\mu\int_\Omega d\mu-\left(\int_\Omega vd\mu\right)^2}{\left(\int_\Omega d\mu\right)^2},
\end{aligned}$$

onde $d\mu=e^{u(z)+sv(z)}dz$. Devido a Desigualdade de Hölder (veja em [16]),

$$\int_\Omega vd\mu=\int_\Omega 1.vd\mu\leq\left|\int_\Omega 1.vd\mu\right|\leq\int_\Omega|1.v|d\mu\leq\left(\int_\Omega 1^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega v^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\left(\int_\Omega vd\mu\right)^2\leq\int_\Omega d\mu\int_\Omega v^2d\mu.$$

Assim,

$$\frac{d^2}{ds^2}f(s)\geq\frac{\int_\Omega v^2d\mu\int_\Omega d\mu-\int_\Omega d\mu\int_\Omega v^2d\mu}{\left(\int_\Omega d\mu\right)^2}\geq 0.$$

Logo, a Afirmação 2.7 está provada. Assim, podemos concluir que

$$I_\xi(u+v)-I_\xi(u)-I_\xi^{'}(u)v-\frac{1}{2}||v||^2=-\xi\int_0^1\int_0^t\frac{d^2}{ds^2}f(s)dsdt\leq 0.$$

Portanto, segue o resultado *(i)*.

(ii) Primeiramente, observemos que

- Devido a Desigualdade de Poincaré-Wirtinger (Teorema A.4 no Apêndice A),

  $$||v||_2\leq\frac{1}{\sqrt{4\pi^2}}||v||=\frac{1}{2\pi}||v||\leq 1,\ \forall v\in E$$

  tal que $||v||\leq 1$;

- Como

  $$\frac{2|u(z)|\sqrt{\pi}}{||u||}\geq 0,\ \frac{||u||}{2\sqrt{\pi}}\geq 0$$

  e $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, então, devido a Desigualdade de Young (veja em [16]),

  $$\left(\frac{2|u(z)|\sqrt{\pi}}{||u||}\right)\left(\frac{||u||}{2\sqrt{\pi}}\right)=|u(z)|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{2|u(z)|\sqrt{\pi}}{||u||}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{||u||}{2\sqrt{\pi}}\right)^2.$$

Concluímos que

$$2|u(z)| \leq \frac{4\pi|u(z)|^2}{||u||^2} + \frac{M}{4\pi}.$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
I'_\tau(u)v - I'_\delta(u)v &= \langle u, v\rangle - \tau\frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)\ dz}{\int_\Omega e^{u(z)}\ dz} - \left(\langle u, v\rangle - \delta\frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)\ dz}{\int_\Omega e^{u(z)}\ dz}\right) \\
&= (\delta - \tau)\frac{\int_\Omega e^{u(z)}v(z)\ dz}{\int_\Omega e^{u(z)}\ dz} \\
&\leq |\delta - \tau|\frac{\left|\int_\Omega e^{u(z)}v(z)\ dz\right|}{\left|\int_\Omega e^{u(z)}\ dz\right|} \\
&\leq |\delta - \tau|\left|\int_\Omega e^{u(z)}v(z)\ dz\right| \\
&\leq |\delta - \tau|\int_\Omega |e^{u(z)}v(z)|\ dz \\
&\leq |\delta - \tau|\left(\int_\Omega e^{2u(z)dz}\right)^{\frac{1}{2}}||v||_2 \\
&\leq |\delta - \tau|\left(e^{\frac{M}{4\pi}}\int_\Omega e^{4\pi\frac{u^2(z)}{||u||^2}}dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\delta - \tau|e^{\frac{M}{8\pi}}\sup_{u\in E}\int_\Omega e^{4\pi\frac{u^2(z)}{||u||^2}}dz \\
&= L|\delta - \tau|
\end{aligned}$$

Esta última igualdade é justificada pela desigualdade de Trudinger-Moser (veja em [10]).

■

Sejam $\varepsilon > 0$ e $v_\varepsilon,\ u_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ definidos por

$$v_\varepsilon(z) = \ln\left(\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + \pi|z|^2)^2}\right),\ \forall z \in \Omega$$

$$u_\varepsilon(z) = v_\varepsilon(z) - \int_\Omega v_\varepsilon(z)\ dz,\ \forall z \in \Omega.$$

Lema 2.5 *$I_\eta(u_\varepsilon) = 2(8\pi - \eta)\ln(\frac{1}{\varepsilon}) + O(1)$, onde $|O(1)| \leq C$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Demonstração:

Afirmação 2.8

$$|\nabla u_\varepsilon(z)|^2 = \frac{16\pi^2|z|^2}{(\varepsilon^2 + \pi|z|^2)^2}$$

Basta observarmos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(z) &= \frac{-4\pi\varepsilon^2 x_i(\varepsilon^2+\pi|z|^2)}{(\varepsilon^2+\pi|z|^2)^4}\,\frac{(\varepsilon^2+\pi|z|^2)^2}{\varepsilon^2}\\ &= \frac{-4\pi x_i}{\varepsilon^2+\pi|z|^2},\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Assim,

$$|\nabla u_\varepsilon(z)|^2 = \left|\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}(z), \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_2}(z)\right)\right|^2 = \frac{16\pi^2|z|^2}{(\varepsilon^2+\pi|z|^2)^2}.$$

Portanto, segue a Afirmação 2.8.

Substituindo $w = \frac{z}{\varepsilon}$ na Afirmação 2.8, obtemos:

$$\begin{aligned}||u_\varepsilon(z)||^2 &= 16\pi^2\int_\Omega \frac{|z|^2}{(\varepsilon^2+\pi|z|^2)^2}\,dz\\ &= 16\pi^2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{|w|^2}{(\varepsilon^2+\pi|w|^2)^2}\,\frac{dx_1}{\varepsilon}\frac{dx_2}{\varepsilon}\\ &= 16\pi^2\int_{-\frac{1}{2\varepsilon}}^{\frac{1}{2\varepsilon}}\int_{-\frac{1}{2\varepsilon}}^{\frac{1}{2\varepsilon}} \frac{|w|^2}{(\varepsilon^2+\pi|w|^2)^2}\,dy_1dy_2\\ &= 16\pi^2\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|w|^2}{(\varepsilon^2+\pi|w|^2)^2}\,dw,\end{aligned}$$

onde $\Omega_\varepsilon = [-\frac{1}{2\varepsilon}, \frac{1}{2\varepsilon}] \times [-\frac{1}{2\varepsilon}, \frac{1}{2\varepsilon}]$.

Afirmação 2.9

$$||u_\varepsilon(z)||^2 = 32\pi^3\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{r^3}{(1+\pi r^2)^2}\,dr + O(1) = 32\pi\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(1).$$

Para mostrarmos a Afirmação 2.9, vamos utilizar as coordenadas polares. Assim,

$$\begin{aligned}16\pi^2\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{|w|^2}{(\varepsilon^2+\pi||w||^2)^2}\,dw &= 16\pi^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}} \frac{r^2}{(1+\pi r^2)^2}\,rdrd\theta\\ &= 16\pi^2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}} \frac{r^2}{(1+\pi r^2)^2}\,2r\pi dr\\ &= 16\pi^2\int_1^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon^2}} \frac{s-1}{\pi s^2}\,ds\\ &= 16\pi\left(\int_1^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon^2}} \frac{1}{s}\,ds + \int_1^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon^2}}\left(-\frac{1}{s^2}\right)ds\right)\\ &= 16\pi\left(\ln\left(\frac{2\varepsilon^2+\pi}{2\varepsilon^2}\right) + \frac{2\varepsilon^2}{2\varepsilon^2+\pi} - 1\right)\\ &= 32\pi\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{2}\right) + 16\pi\left(\ln(2\varepsilon^2+\pi) + \frac{2\varepsilon^2}{2\varepsilon^2+\pi} - 1\right).\end{aligned}$$

Como $[0, \frac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}] \subset [0, \frac{1}{\varepsilon}]$, então

$$32\pi^3 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{r^3}{(1+\pi r^2)^2}\, dr \geq 32\pi^3 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}} \frac{r^3}{(1+\pi r^2)^2}\, dr.$$

Seja

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &= 32\pi^3 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{r^3}{(1+\pi r^2)^2}\, dr - 32\pi^3 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}} \frac{r^3}{(1+\pi r^2)^2}\, dr \\ &= 32\pi \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 16\pi \left(\ln(\varepsilon^2+\pi) + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\pi} - 1\right) - 32\pi \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}\right) \\ & -16\pi \left(\ln(2\varepsilon^2+\pi) + \frac{2\varepsilon^2}{2\varepsilon^2+\pi} - 1\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &= -32\pi\ln(\varepsilon) - (-32\pi\ln(\varepsilon\sqrt{2})) + 16\pi\left(\ln\left(\frac{\varepsilon^2+\pi}{2\varepsilon^2+\pi}\right) + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\pi} - \frac{2\varepsilon^2}{2\varepsilon^2+\pi}\right) \\ &= 32\ln(\sqrt{2}) + 16\pi\left(\ln\left(\frac{\varepsilon^2+\pi}{2\varepsilon^2+\pi}\right) - \frac{\pi\varepsilon^2}{(\varepsilon^2+\pi)(2\varepsilon^2+\pi)}\right) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||u_\varepsilon(z)||^2 &= 32\pi^3 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}} \frac{r^3}{(1+\pi r^2)^2}\, dr \\ &= 32\pi^3 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{r^3}{(1+\pi r^2)^2}\, dr + O(1) \\ &= 32\pi \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\ln\left(\int_\Omega e^{u_\varepsilon(z)}\, dz\right) = \ln\left(\int_\Omega e^{v_\varepsilon(z)}\, dz\right) - \int_\Omega v_\varepsilon(z)\, dz.$$

Com o auxílio desta igualdade basta mostrar as Afirmações seguintes

Afirmação 2.10

$$\ln\left(\int_\Omega e^{v_\varepsilon(z)}\, dz\right) = O(1).$$

Basta observamos que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{v_\varepsilon(z)}\,dz &= \int_\Omega \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2+\pi|z|^2)^2}\,dz \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{(1+\pi|w|^2)^2}\,dz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}} \frac{1}{(1+\pi|r|^2)^2}\,rdrd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}} \frac{1}{(1+\pi|r|^2)^2}\,2\pi rdr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2\varepsilon^2}} \frac{1}{(1+s^2)^2}\,ds \\
&= \frac{s}{2(1+s^2)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2\varepsilon^2}} + \frac{1}{2}\arctan(s)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2\varepsilon^2}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2\varepsilon^2}}{2\left(1+\left(\frac{\pi}{2\varepsilon^2}\right)^2\right)} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\pi}{2\varepsilon^2}\right) \\
&= \frac{\varepsilon^2\pi^2}{4\varepsilon^4+\pi^2} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\pi}{2\varepsilon^2}\right) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

Afirmação 2.11

$$\int_\Omega v_\varepsilon dz = 2\ln(\varepsilon) + O(1).$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_\varepsilon dz &= \int_\Omega \ln\left(\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2+\pi|z|^2)^2}\right)dz \\
&= 2\ln(\varepsilon) - 2\int_\Omega \ln(\varepsilon^2+\pi|z|^2) \\
&= 2\ln\varepsilon + O(1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$I_\eta(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}||u_\varepsilon||^2 - \eta\ln\left(\int_\Omega e^{u_\varepsilon(z)}\right)\,dz = 2(8\pi-\eta)\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(1).$$

■

A partir do Lema 2.5 concluímos que:

- $||u_\varepsilon|| \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0$;
- Para $\eta \in (8\pi, 4\pi^2)$ fixo, $I_\eta(u_\varepsilon) \to -\infty$ quando $\varepsilon \to 0$.

Logo, o funcional I_η possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha e, para $\eta \in (8\pi, 4\pi^2)$ fixo, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$I_\eta(u_0) < 0, ||u_0|| \geq 1 \text{ e } I_\mu(u_0) \leq I_\eta(u_0),$$

com $\mu \geq \eta$ e $u_0 = u_{\varepsilon_0}$.

Sejam $P = \{\gamma : [0,1] \to E; \gamma \text{ é contínuo e } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_0\}$ e

$$c_\mu = \inf_{\gamma \in P} \max_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma(t)),$$

com $\mu \geq \eta$. Observemos que o conjunto P independe de μ. Como a aplicação $\eta \to I_\eta(u)$ é monótona decrescente para todo $u \in E$, então, a função $g : (\eta, 4\pi^2) \to \mathbb{R}$, definida por $\mu \to c_\mu$ é monótona decrescente e, pelo Teorema A.3 (Apêndice A), é diferenciável em $(\eta, 4\pi^2)$ quase sempre.

A seguir, vamos mostrar algumas propriedades de c_μ. Tais propriedades nos ajudarão a entender as próximas etapas.

Afirmação 2.12 *Existe uma constante* $c_0 > 0$ *tal que*

$$c_\mu \geq \left(1 - \frac{\mu}{4\pi^2}\right) c_0.$$

Observemos que

$$I_\mu(0 + u) = I_\mu(0) + I_\mu'(0)u + \frac{1}{2} I_\mu''(0)(u,u) + o(||u||^2), \forall u \in E,$$

com $||u|| \leq \delta$, ou seja,

$$I_\mu(u) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu}{4\pi^2})||u||^2 + o(||u||^2), \forall u \in E,$$

com $||u|| \leq \delta$. Notemos que, dado $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\mu}{4\pi^2}\right) > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$-\varepsilon_1 \leq \frac{o(||u||^2)}{||u||^2} \leq \varepsilon_1, \forall u \in E,$$

com $||u|| \leq \delta_1$, ou seja,

$$-\varepsilon_1 ||u||^2 \leq o(||u||^2) \leq ||u||^2 \varepsilon_1, \forall u \in E,$$

com $||u|| \leq \delta_1$. Assim, para $0 < \delta < \delta_1$ e $||u|| \leq \delta$, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{4\pi^2}\right)||u||^2 + o(||u||^2) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{4\pi^2}\right)||u||^2 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\mu}{4\pi^2}\right)||u||^2 \\ &= \left(1 - \frac{\mu}{4\pi^2}\right)\frac{||u||^2}{4} \end{aligned}$$

Agora, observemos que, para todo $\gamma \in P$ a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = ||\gamma(t)||$ é contínua em $[0,1]$. Seja $k \in (0,\delta)$. Como $||\gamma(0)|| = 0$ e $||\gamma(1)|| = ||u_0|| = 1 > \delta_1 > \delta > k$, $\forall \gamma \in P$, então existe $t_\gamma \in [0,1]$ tal que $||\gamma(t_\gamma)|| = k$. Assim,

$$I_\mu(\gamma(t_\gamma)) \geq \left(1 - \frac{\mu}{4\pi^2}\right)\frac{k^2}{4}.$$

Seja $c_0 > 0$ tal que $c_0 = \frac{k^2}{4}$. Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma(t)) \geq \left(1 - \frac{\mu}{4\pi^2}\right)c_0 \Rightarrow c_\mu \geq \left(1 - \frac{\mu}{4\pi^2}\right)c_0$$

Portanto, a Afirmação 2.12 está provada.

Afirmação 2.13 *Se a função g é diferenciável em μ e (μ_n) é uma sequência monótona decrescente tal que $\mu_n \to \mu$, então, para $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n \in P$ e $t_n \in [0,1]$, a sequência $u_n := \gamma_n(t_n)$, com $I_{\mu_n}(u_n) \geq c_{\mu_n} - 2(\mu_n - \mu)$, é limitada e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|I_\mu(u_n) - c_\mu| \leq \kappa(\mu_n - \mu)$ para $n > n_0$, onde $\kappa = -\dot{g}(\mu) + 3$.*

De fato, como

$$g(\mu) = c_\mu = \inf_{\gamma\in P}\max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma(t)),$$

então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\gamma_\varepsilon \in P$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma_\varepsilon(t)) \leq c_\mu + \varepsilon.$$

Para $\varepsilon = (\mu_n - \mu) > 0$, seja $\gamma_n \in P$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma_n(t)) \leq c_\mu + (\mu_n - \mu). \tag{2.2}$$

Assim, garantimos que existe $t \in [0,1]$ tal que

$$I_{\mu_n}(\gamma_n(t)) \geq c_{\mu_n} - 2(\mu_n - \mu),$$

pois

$$c_{\mu_n} - 2\varepsilon < c_{\mu_n} \leq \max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma(t)) \leq c_\mu + \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Sejam $t_n \in [0,1]$ tal que $I_{\mu_n}(u_n) \geq c_{\mu_n} - 2(\mu_n - \mu)$, onde $u_n = \gamma_n(t_n)$ e $\kappa = -\dot{g}(\mu) + 3$. A seguir, vamos mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$c_\mu - \kappa(\mu_n - \mu) \leq c_\mu + (\mu_n - \mu).$$

Notemos que

$$\dot{g}(\mu) = \lim_{h\to 0}\frac{g(\mu + h) - g(\mu)}{h} \leq 0,$$

pois
$$\frac{g(\mu+h)-g(\mu)}{h}<0,$$
quando $h<0$ e
$$\frac{g(\mu+h)-g(\mu)}{h}>0,$$
quando $h<0$. Assim, podemos concluir que
$$\kappa \geq 1. \tag{2.3}$$

Já que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que
$$\dot{g}(\mu)-\varepsilon \leq \frac{c_{\mu+h}-c_\mu}{h} \leq \dot{g}(\mu)+\varepsilon,$$
com $0<|h|<\delta$. Assim, para $\varepsilon=1>0$ existem $\delta>0$ e $n_0\in\mathbb{N}$ tais que
$$\dot{g}(\mu)-1 \leq \frac{c_{\mu_n}-c_\mu}{\mu_n-\mu} \leq \dot{g}(\mu)+1,$$
com $0<\mu_n-\mu<\delta$ e $n>n_0$. Logo,
$$(\dot{g}(\mu)-1)(\mu_n-\mu) \leq c_{\mu_n}-c_\mu,$$
donde
$$c_\mu-\kappa(\mu_n-\mu) \leq c_{\mu_n}-2(\mu_n-\mu)$$
com $n>n_0$. Assim, pela desigualdade (2.2),
$$\begin{aligned} c_\mu-\kappa(\mu_n-\mu) &\leq c_{\mu_n}-2(\mu_n-\mu) \\ &\leq I_{\mu_n}(u_n) \\ &\leq I_\mu(u_n) \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma_n(t)) \\ &\leq c_\mu+(\mu_n-\mu), \end{aligned}$$
com $n>n_0$. Ao utilizarmos (2.3) e as desigualdades
$$c_\mu-\kappa(\mu_n-\mu) \leq I_\mu(u_n) \leq c_\mu+(\mu_n-\mu),$$
obtemos
$$c_\mu-\kappa(\mu_n-\mu) \leq I_\mu(u_n) \leq c_\mu+(\mu_n-\mu) \leq c_\mu+\kappa(\mu_n-\mu),$$

com $n > n_0$. Assim,

$$|I_\mu(u_n) - c_\mu| \leq \kappa(\mu_n - \mu), \tag{2.4}$$

com $n > n_0$. Utilizando as desigualdades

$$c_\mu - \kappa(\mu_n - \mu) \leq I_{\mu_n}(u_n)$$

e

$$I_\mu(u_n) \leq c_\mu + (\mu_n - \mu),$$

obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} I_\mu(u_n) - I_{\mu_n}(u_n) &\leq I_\mu(u_n) - (c_\mu - \kappa(\mu_n - \mu)) \\ &\leq c_\mu + (\mu_n - \mu) - c_\mu + \kappa(\mu_n - \mu) \\ &\leq (1+\kappa)(\mu_n - \mu). \end{aligned}$$

Assim,

$$0 \leq \frac{I_\mu(u_n) - I_{\mu_n}(u_n)}{(\mu_n - \mu)} = \ln\left(\int_\Omega e^{u_n(x)}dx\right) \leq (1+\kappa)$$

e, finalmente, concluímos que

$$||u_n||^2 = 2I_\mu(u_n) + 2\mu \ln\left(\int_\Omega e^{u_n(x)}dx\right) \leq 2c_\mu + 2(\mu_n - \mu) + 2(1+\kappa) \leq M, \tag{2.5}$$

com $n > n_0$. Portanto, a Afirmação 2.13 está provada.

Segunda Etapa: *A Existência de uma Sequência de Palais-Smale limitada.*

Lema 2.6 *Existe uma sequência (u_n) em E tal que*

(i) $||u_n||^2 \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $I_\mu(u_n) \to c_\mu$ *e* $I'_\mu(u_n) \to 0$ *quando* $n \to \infty$*.*

Demonstração: Para cada $\delta > 0$, seja

$$A_\delta = \{u \in E;\ ||u||^2 \leq M,\ |I_\mu(u) - c_\mu| < 2\delta\} \cap \{u \in E;\ ||I'_\mu(u)|| < 2\delta\}.$$

Então, a sequência que buscamos deve ter o seguinte comportamento, para cada $\delta_n > 0$, existe $u_n \in A_{\delta_n}$. Suponhamos que tal sequência não existe. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$u \notin A_\delta, \forall u \in E$. Seja (μ_n) em $\mathbb{R}$ a sequência da Afirmação 2.13. Como E é convexo, então para cada $u \in E$, existem $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n \in P$ e $t_n \in [0,1]$ tais que $u = \gamma_n(t_n)$ e

$$I_{\mu_n}(u) \geq c_{\mu_n} - 2(\mu_n - \mu).$$

Logo, pela Afirmação 2.13, existe $M > 0$ tal que $||u||^2 \leq M$ (desigualdade (2.5)) e existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|I_\mu(u) - c_\mu| \leq \kappa(\mu_n - \mu)$$

para $n > n_1$. Observemos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\kappa(\mu_n - \mu) < \delta$$

para $n > n_2$. Logo, existe $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tal que

$$|I_\mu(u) - c_\mu| < 2\delta$$

para $n > n_0$. Como

- $||u||^2 \leq M$;
- $|I_\mu(u) - c_\mu| < 2\delta$;
- $u \notin A_\delta$;

então

$$||I'_\mu(u)|| \geq 2\delta.$$

Afirmação 2.14 *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\langle I'_{\mu_n}(u), I'_\mu(u)\right\rangle \geq \delta^2$ para $n > n_0$.*

$$\begin{aligned}
\left\langle I'_{\mu_n}(u), I'_\mu(u)\right\rangle &= \frac{1}{2}||I'_\mu(u)||^2 - \frac{1}{2}||I'_\mu(u)||^2 + \left\langle I'_{\mu_n}(u), I'_\mu(u)\right\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}||I'_\mu(u)||^2 - \frac{1}{2}||I'_\mu(u)||^2 + \left\langle I'_{\mu_n}(u), I'_\mu(u)\right\rangle - ||I'_{\mu_n}(u)||^2 \\
&= \frac{1}{2}||I'_\mu(u)||^2 - \frac{1}{2}||I'_\mu(u) - I'_{\mu_n}(u)||^2
\end{aligned}$$

De acordo com o item (ii) do Lema 2.4, existe $L > 0$ tal que

$$||I'_\mu(u) - I'_{\mu_n}(u)|| \leq L|\mu - \mu_n|.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}||I_\mu'(u)||^2 - \frac{1}{2}||I_\mu'(u) - I_{\mu_n}'(u)||^2 \geq \frac{1}{2}||I_\mu'(u)||^2 - L^2|\mu - \mu_n|^2.$$

Como $\mu_n \to \mu$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2}||I_\mu'(u)||^2 - L^2|\mu - \mu_n|^2 \geq \frac{1}{4}||I_\mu'(u)||^2.$$

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\langle I_{\mu_n}'(u), I_\mu'(u) \right\rangle \geq \frac{1}{4}||I_\mu'(u)||^2 \geq \frac{(2\delta)^2}{4} = \delta^2$$

para $n > n_0$. Portanto, a Afirmação 2.14 está provada.

Seja $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ uma função (veja a Figura 2.1) tal que

- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$;
- $\varphi(s) = 1$, para $s \geq -1$;
- $\varphi(s) = 0$, para $s \leq -2$.

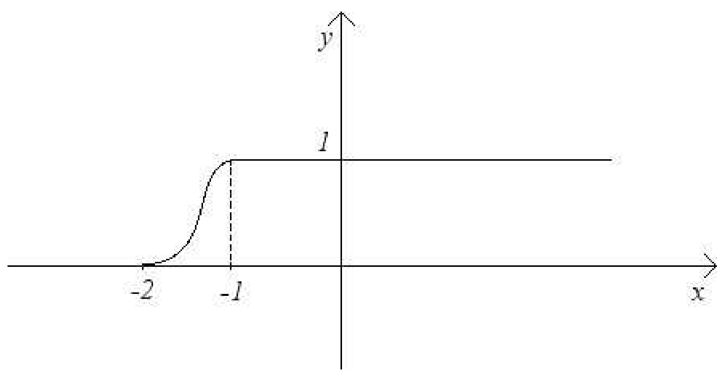

Figura 2.1: Gráfico da função φ.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a função $\varphi_n : E \to [0,1]$ tal que

$$\varphi_n(u) = \varphi\left(\frac{I_{\mu_n}(u) - c_{\mu_n}}{(\mu_n - \mu)}\right), \forall u \in E.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\gamma_n \in P$ satisfazendo a desigualdade (2.2), seja $\tilde{\gamma}_n : [0,1] \to E$ tal que

$$\tilde{\gamma}_n(t) = \gamma_n(t) - (\sqrt{\mu_n - \mu}\ )\varphi_n(\gamma_n(t))\frac{I_\mu'(\gamma_n(t))}{||I_\mu'(\gamma_n(t))||}.$$

Para cada $u = \gamma_n(t_n) \in E$, seja $\tilde{u} = \tilde{\gamma}_n(t_n)$.

Afirmação 2.15 *Existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $I_{\mu_n}(\tilde{u}) \leq I_{\mu_n}(u)$ *para* $n > n_0$.

Seja

$$F(u) = (\sqrt{\mu_n - \mu}\ )\varphi_n(u)\frac{I_\mu^{'}(u)}{||I_\mu^{'}(u)||}.$$

Como

$$I_{\mu_n}(\tilde{u}) = I_{\mu_n}\left(u - F(u)\right),$$

então, pelo item (i) do Lema 2.4,

$$\begin{aligned} I_{\mu_n}(\tilde{u}) &\leq I_{\mu_n}(u) + \left\langle I_{\mu_n}^{'}(u), -F(u)\right\rangle + \frac{1}{2}||F(u)||^2 \\ &= I_{\mu_n}(u) - (\sqrt{\mu_n - \mu}\ )\varphi_n(u)\left\langle I_{\mu_n}^{'}(u), \frac{I_\mu^{'}(u)}{||I_\mu^{'}(u)||}\right\rangle + \frac{1}{2}|\mu_n - \mu|\varphi_n^2(u) \end{aligned}$$

Como $||I_\mu^{'}(u)|| \geq \delta^2$ e, devido a Afirmação 2.14, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\langle I_{\mu_n}^{'}(u), I_\mu^{'}(u)\right\rangle \geq \delta^2$$

para $n > n_1$ então,

$$\left\langle I_{\mu_n}^{'}, \frac{I_\mu^{'}(u)}{||I_\mu^{'}(u)||}\right\rangle \leq \frac{\delta}{2}.$$

Assim,

$$I_{\mu_n}(\tilde{u}) \leq I_{\mu_n}(u) - (\sqrt{\mu_n - \mu}\ )\varphi_n(u)\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{\mu_n - \mu}\ )\varphi_n(u)\right)$$

Como existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{\mu_n - \mu}\ )\varphi_n(u)\right) \geq \frac{\delta}{4}$$

para $n > n_2$, então, existe $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_{\mu_n}(\tilde{u}) \leq I_{\mu_n}(u) - \frac{\delta}{4}(\sqrt{\mu_n - \mu}\ )\varphi_n(u) \leq I_{\mu_n}(u)$$

para $n > n_0$. Portanto, a Afirmação 2.15 está provada. Seja

$$A = \{t \in [0,1];\ I_{\mu_n}(\gamma_n(t))\ \geq\ c_{\mu_n} - (\mu_n - \mu)\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} c_{\mu_n} &\leq \max_{t\in[0,1]} I_{\mu_n}(\tilde{\gamma}_n(t)) \\ &= \max_{t\in A} I_{\mu_n}(\tilde{\gamma}_n(t)) \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} I_{\mu_n}(\gamma_n(t)) - \frac{\delta}{4}(\sqrt{\mu_n - \mu}\ ) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma_n(t)) - \frac{\delta}{4}(\sqrt{\mu_n - \mu}\,) \\
&\leq c_\mu + (\mu_n - \mu) - \frac{\delta}{4}(\sqrt{\mu_n - \mu}\,) \\
&\leq c_{\mu_n} + \kappa(\mu_n - \mu) - \frac{\delta}{4}(\sqrt{\mu_n - \mu}\,) \\
&< c_{\mu_n}
\end{aligned}
$$

Contradição. Portanto, segue o resultado.

■

Lema 2.7 *Suponha que a aplicação $\mu \to c_\mu$ é diferenciável em $\mu > \eta$. Então c_μ é um valor crítico para o funcional I_μ. Em particular, o problema (P_1) com $\eta = \mu$ admite solução não trivial quase sempre em $(\eta, 4\pi^2)$.*

Demonstração: Seja (u_n) em E a sequência do Lema 2.6. Como

$$||u_n||^2 \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e $H^1(\Omega)$ é reflexivo, então, pelo Teorema de Kakutani (veja [16]), existem uma subsequência de (u_n) (vamos denotá-la por (u_n) para facilitar a notação) e $u \in E$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\Omega).$$

Já que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta, então

$$u_n \to u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim, devido a continuidade da aplicação $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definida por

$$G(v) = e^v, \forall v \in L^2(\Omega),$$

$$e^{u_n} \to e^u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I'_\mu(u_n)(u_n - u) &= \int_\Omega \langle \nabla u_n(z), \nabla(u_n - u)(z)\rangle dz - \eta \left(\frac{\int_\Omega e^{u_n(z)}(u_n(z) - u(z))dz}{\int_\Omega e^{u_n(z)}dz} \right) \\
&= ||u_n - u||^2 - o(1),
\end{aligned}
$$

onde

$$o(1) = \int_\Omega \langle \nabla u_n(z), \nabla u(z)\rangle dz - ||u||^2 - \eta \left(\frac{\int_\Omega e^{u_n(z)}(u_n(z) - u(z))dz}{\int_\Omega e^{u_n(z)}dz} \right)$$

e $o(1) \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo,

$$I_\mu'(u_n)(u_n - u) = o(1)$$

e c_μ é valor crítico do funcional I_μ.

■

Terceira Etapa: *O Lema do Completamento da Reta e o Teorema 2.1.*

Primeiramente, é necessário termos em mente o Teorema A.5 (Apêndice A) para mostrarmos o Lema 2.8, o Lema do Completamento da Reta. Após o Lema 2.8, estaremos aptos a demonstrar o Teorema 2.1.

A seguir, vamos definir o espaço de Hölder para $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Informações sobre os espaços de Hölder encontram-se em [15]. Nas definições 2.16, 2.17 e 2.18, $\beta \in (0,1)$ e $d = diamX$ (diâmetro de X).

Definição 2.16 *Sejam $z_0 \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é Hölder contínua com expoente beta em z_0 se*

$$[f]_{\beta,z_0} = \sup_X \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|^\beta} < \infty.$$

Definição 2.17 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uniformemente Hölder contínua com expoente β em X se*

$$[f]_{\beta,X} = \sup_{z \neq w} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|^\beta} < \infty.$$

Definição 2.18 *Seja $k \in \mathbb{N}$. O espaço de Hölder $C^{k,\beta}(X)$ é o conjunto formado por funções do espaço $C^k(X)$ tais que são uniformemente Hölder contínua com expoente β em X.*

O espaço de Hölder $C^{1,\beta}(X)$ é um espaço de Banach e a norma em $C^{1,\beta}(X)$ é definida por

$$||f||_{C^{1,\beta}(X)} = ||f||_\infty + ||\nabla f||_\infty + \sup\{[f]_{\beta,X},\ [\nabla f]_{\beta,X}\}$$

e a norma em $C^{k,\beta}(X)$ é definida por

$$||u||_{C^{k,\beta}(X)} = \sum_{i=0}^{k} d^{\,i} \sup_{|\gamma|=k} (||D^\gamma u||_\infty) + d^{\,k+\beta} \sup_{|\gamma|=k} ([D^\gamma u]_{\beta,X}).$$

Lema 2.8 *Sejam $\lambda_n \to \lambda$ e $u_n \in E$ soluções do problema (P_1) com $\eta = \lambda_n$. Se $\lambda \neq 8\pi m, \forall m \in \mathbb{N}$, então a sequência (u_n) admite uma subsequência que converge uniformemente para uma solução de (P_1) com $\eta = \lambda$.*

Demonstração: Como Ω é compacto, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in \Omega$ tal que $u_n(z_n) = \sup_{\Omega} u_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $v_n(z) = u_n(z + z_n), \forall z \in \Omega$. Assim,

$$v_n(0,0) = \sup_{\Omega} v_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, podemos considerar que

$$u_n(0,0) = \sup_{\Omega} u_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja

$$w_n(z) = u_n(z) - \ln\left(\int_{\Omega} e^{u_n(z)} dz\right) - \frac{\lambda_n}{4}|z|^2,$$

$n \in \mathbb{N}$. Observemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, w_n satisfaz:

- $-\Delta w_n = -\Delta u_n + \lambda_n = \lambda_n \frac{e^{u_n}}{\int_{\Omega} e^{u_n} dz} = \lambda_n e^{(\lambda_n/4)|z|^2} e^{w_n}$;
- $\int_{\Omega} e^{w_n} dz \leq 1$.

Assim, as hipóteses do Teorema A.5 são cumpridas por w_n com

$$V_n = \lambda_n e^{(\lambda_n/4)|z|^2} \leq \lambda_n e^{\lambda_n},\ d_1 = 1.$$

Passando a uma subsequência se necessário, (w_n) deve satisfazer um dos itens listados no Teorema A.5.

Afirmação 2.19 *A sequência (w_n) não satisfaz o item (iii) do Teorema A.5.*

Suponhamos, por absurdo, que a sequência (w_n) satisfaz o item (iii) do Teorema A.5. Como $V_n \to \lambda e^{(\lambda/4)|z|^2}$, então

$$\lambda_n = \int_{\Omega} V_n e^{w_n} dz \to \overline{\lambda} = 8\pi m,$$

para algum $m \in \mathbb{N}$. Mas $\lambda_n \to \lambda$ e $\lambda \in (8\pi, 4\pi^2)$. Portanto, segue a Afirmação 2.19. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$C \geq \sup_{B_{1/2}(0,0)} w_n \geq \sup_{B_{1/2}(0,0)} u_n - \ln\left(\int_{\Omega} e^{u_n} dz\right) - \frac{\lambda_n}{8},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega} u_n - \ln\left(\int_{\Omega} e^{u_n} dz\right) &= u_n(0,0) - \ln\left(\int_{\Omega} e^{u_n} dz\right) \\
&= \sup_{B_{1/2}(0,0)} u_n - \ln\left(\int_{\Omega} e^{u_n} dz\right) \\
&\leq C + \lambda_n 8 \\
&\leq M_1
\end{aligned}$$

Como

$$|\Delta u_n| = \left|\lambda_n\left(\frac{e^{u_n}}{\int_{\Omega} e^{u_n} dz} - 1\right)\right| \leq \lambda_n\left(\frac{e^{u_n}}{\int_{\Omega} e^{u_n} dz} + 1\right),$$

então

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega} |\Delta u_n| &\leq \lambda_n \sup_{\Omega}\left(\frac{e^{u_n}}{\int_{\Omega} e^{u_n} dz} + 1\right) \\
&\leq \lambda_n\left(\sup_{\Omega}\left(\frac{e^{u_n}}{\int_{\Omega} e^{u_n} dz}\right) + 1\right) \\
&\leq \lambda_n\left(\frac{e^{M_1 + \ln\left(\int_{\Omega} e^{u_n} dz\right)}}{\int_{\Omega} e^{u_n} dz} + 1\right) \\
&= \lambda_n(e^{M_1} + 1)
\end{aligned}$$

Logo, $\Delta u_n \in L^{\infty}(\Omega)$. Já que para cada $n \in \mathbb{N}$ a função u_n está definida em um toro bidimensional, então cada função u_n é Ω-periódica e, desta maneira podemos extender cada função u_n de maneira conveniente para aplicarmos o Teorema A.6, ou seja, que $\Omega \subset B_1$. Assim, existe $M_2 > 0$ tal que

$$||u_n||_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq M_2, \forall n \in \mathbb{N},$$

com $\beta \in (0,1)$. Como $C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ é compacta, então existem (u_{n_j}) subsequência de (u_n) e $u \in E$ tais que $(u_{n_j}) \to u$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Portanto, segue o resultado.

$\blacksquare$

Demonstração do Teorema 2.1

Seja $\lambda \in (8\pi, 4\pi^2)$ fixo. De acordo com os Lemas 2.7 e 2.8, existem (λ_n) em $\mathbb{R}$ e $(u_n) \in E$ sequências tais que

- u_n é solução do problema (P_1) com $\eta = \lambda_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

- $\lambda_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$;
- $I_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n}, \forall n \in \mathbb{N}$;
- $\lambda_n \to \lambda$;
- $u_n \to u$ uniformemente, onde u é solução do problema (P_1) com $\eta = \lambda$;
- $c_\lambda \leq c_{\lambda_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$\begin{aligned} ||u||^2 &\geq I_\lambda(u) \\ &= \lim_{n\to\infty} I_{\lambda_n}(u_n) \\ &\geq c_\lambda \\ &\geq \left(1 - \frac{\lambda}{4\pi^2}\right) c_0 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo, segue o resultado.

■

Segunda Parte: Comportamento do problema (P_1) **quando** $\eta > 0$ **está próximo de zero**.

Primeiramente, vamos mostrar o Lema 2.9. Tal lema nos ajudará a mostrar o comportamento do problema (P_1) quando $\eta > 0$ está próximo de zero.

Lema 2.9 *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$||u||^2 + \sup_\Omega |u| \leq C\left(\eta + (\frac{\eta}{4\pi - \eta})^2\right),$$

onde u *é solução do problema* (P_1) *com* $\eta \in [0, 4\pi)$.

Demonstração:

Seja G a função de Green para laplaciano sobre Ω tal que

- $\int_\Omega G(z, w)dw, \forall z \in \Omega$;

- $G(z,w) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{|z-w|}\right) + \phi(z,w)$,

onde ϕ é uma função $C^1(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ e a parte regular de G. Assim,

$$\begin{aligned}
u(w) &= -\int_\Omega \Delta u G(z,w)dz \\
&= \eta\frac{\int_\Omega e^u G(z,w)dz}{\int_\Omega e^u dz} \\
&\leq \frac{\eta}{2\pi}\frac{\int_\Omega \ln\left(\frac{1}{|z-w|}\right)e^u dz}{\int_\Omega e^u dz} + \eta||\phi||_\infty
\end{aligned}$$

Como

$$ab \leq e^a + b(-1+\ln b), \text{ para } b>0 \text{ e } a\in\mathbb{R},$$

então

$$\sup_a\{ab - e^a\} = b(-1+\ln b).$$

Ao substituirmos

$$a = \beta\ln\left(\frac{1}{|z-w|}\right) = \ln\left(\frac{1}{|z-w|^\beta}\right),\ b = \frac{e^u}{\beta},$$

para $\beta\in[1,2)$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{\int_\Omega \ln\left(\frac{1}{|z-w|}\right)e^u dz}{\int_\Omega e^u dz} &\leq \frac{\int_\Omega\left(\frac{1}{|z-w|^\beta}\right)dz}{\int_\Omega e^u dz} + \frac{\int_\Omega e^u u dz}{\beta\int_\Omega e^u dz} + C \\
&\leq \frac{C}{2-\beta} + \frac{\int_\Omega e^u u dz}{\beta\int_\Omega e^u dz},
\end{aligned}$$

para $\beta\in[1,2)$. Como

$$||u||^2 = \eta\,\frac{\int_\Omega e^u u dz}{\int_\Omega e^u dz},$$

então

$$\begin{aligned}
||u||^2 &\leq \eta\sup_\Omega u \\
&\leq \frac{C\eta^2}{2-\beta} + \frac{\eta^2}{2\pi}\frac{\int_\Omega e^u u dz}{\int_\Omega e^u dz} \\
&= \frac{C\eta^2}{2-\beta} + \frac{\eta}{2\beta\pi}||u||^2 \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Como $\eta < 4\pi$, então

$$\begin{aligned}
||u||^2 &\leq \inf_{\beta\in[1,2)} \frac{C\eta^2}{(2-\beta)(2\beta\pi-\eta)} \\
&\leq \frac{C\eta^2}{(2\beta\pi-\eta)} \\
&= \frac{C\eta^2\left(2\pi-\frac{\eta}{2}\right)}{\left(2\pi-\frac{\eta}{2}\right)^2} \\
&\leq \frac{2\pi C\eta^2}{\left(2\pi-\frac{\eta}{2}\right)^2} \\
&= \frac{4C\eta^2}{(4\pi-\eta)^2} \\
&= \frac{C\eta^2}{(4\pi-\eta)^2}
\end{aligned}$$

Substituindo $\beta = 1$ em (2.6) obtemos,

$$\sup_\Omega |u| \leq C\eta + \frac{1}{2\pi}||u||^2$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sup_\Omega |u| + ||u||^2 &\leq C\eta + \frac{1}{2\pi}||u||^2 + ||u||^2 \\
&= C\eta + \left(1+\frac{1}{2\pi}\right)||u||^2 \\
&\leq C\eta + \left(1+\frac{1}{2\pi}\right)\frac{C\eta^2}{(4\pi-\eta)^2} \\
&\leq C\eta + \frac{C\eta^2}{(4\pi-\eta)^2}
\end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado.

■

Teorema 2.20 *Existe $\delta > 0$ tal que a única solução do problema (P_1), com $\eta \in [0, \delta)$, é a solução identicamente nula.*

Demonstração: Observemos que, para $0 \leq \eta \leq \Lambda < 4\pi$ e u solução do problema (P_1)

- $4\pi - \eta \geq 4\pi - \Lambda \Rightarrow \frac{\eta}{(4\pi-\eta)^2} \leq \frac{\Lambda}{(4\pi-\Lambda)^2}$
- $\sup_\Omega |u| \leq C\left(1 + \frac{\eta}{(4\pi-\eta)^2}\right)\eta$, devido ao Lema 2.9.

Assim,

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C\left(1+\frac{\eta}{(4\pi-\eta)^2}\right)\eta \leq C\left(1+\frac{\Lambda}{(4\pi-\Lambda)^2}\right)\eta = M\eta,$$

onde $M = C\left(1+\frac{\Lambda}{(4\pi-\Lambda)^2}\right)$.

Como

- $|e^u - 1| = |u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots| = |u||1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^3}{4!} + \ldots| \leq |u||1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots| = |u|e^u \leq |u|e^{M\eta}$;
- $\int_\Omega u(z)dz = 0$;
- $\int_\Omega e^{u(z)}dz \geq 1$;

então

$$\begin{aligned} ||u||^2 &= \eta \frac{\int_\Omega e^{u(z)}u(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz} \\ &= \eta \frac{\int_\Omega (e^{u(z)}-1)u(z)dz}{\int_\Omega e^{u(z)}dz} \\ &\leq \eta e^{M\eta}\int_\Omega u^2(z)dz \\ &\leq \frac{\eta e^{M\eta}}{4\pi^2}||u||^2. \end{aligned}$$

Já que existe $\delta > 0$ tal que $\eta \in [0, \delta)$ implica em

$$1 - \frac{\eta e^{M\eta}}{4\pi^2} > 0,$$

então

$$0 \leq \left(1 - \frac{\eta e^{M\eta}}{4\pi^2}\right)||u||^2 \leq 0 \Rightarrow u = 0.$$

■

Apêndice A

Resultados de Análise

A seguir, enunciaremos alguns resultados que foram utilizados neste trabalho.

Teorema A.1 (Teorema de Ascoli) *(Veja em [17]) Toda sequência equicontínua limitada em $C([a,b])$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema A.2 (Desigualdade de Jensen) *(Veja em [14]) Seja $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) = 1$. Se Φ é uma função convexa sobre (a,b), com a e b finitos, e f uma função mensurável tal que $f(x) \in (a,b), \forall x \in X$, então*

$$\int (\Phi \circ f) d\mu \geq \Phi \left(\int f d\mu \right).$$

Teorema A.3 *(Veja em [14]) Seja a função $g : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Se g é uma função monótona decrescente então g é diferenciável quase sempre.*

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, um domínio limitado de fronteira suave e

$$E = \{u \in H^1(\Omega); \int_\Omega u(z)dz = 0\}.$$

Teorema A.4 (Desigualdade de Poincaré-Wirtinger) *Existe $c > 0$, a saber*

$$c = \frac{1}{4\pi^2},$$

tal que

$$\int_\Omega u^2(z)dz \leq c \int_\Omega |\nabla u(z)|^2 dz,$$

para todo $u \in E$.

Teorema A.5 (Brezis-Merle) *(Veja em [2]) Sejam D um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ e (w_n) uma sequência em D tal que*

$$\begin{cases} -\Delta w_n = V_n(z)e^{w_n} \text{ sobre } D \\ \displaystyle\int_D e^{w_n} \leq d_1 \end{cases}$$

com $V_n(z) \in [0, d_2], \forall z \in D$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, a sequência (w_n) admite uma subsequência (w_{n_k}) que satisfaz uma das seguintes propriedades:

(i) (w_{n_k}) é localmente limitada uniformemente sobre D;

(ii) Para $B \subset D$ compacto temos,

$$\sup_B w_{n_k} \to -\infty \text{ quando } k \to \infty;$$

(iii) Existem $A = \{a_1, \ldots, a_p\} \subset D$ e uma sequência $(z^i_{n_k})$ em D tais que

- *$z^i_{n_k} \to a_i, w_{n_k}(z^i_{n_k}) \to \infty, \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ quando $k \to \infty$;*
- *$B \subset D \backslash A$ compacto $\Rightarrow \sup_B w_{n_k} \to -\infty$ quando $k \to \infty$;*
- *(Li-Shafrir): Se $V_n \to V$ em $C^0(\overline{\Omega})$, então*

  $$V_{n_k} e^{w_{n_k}} \to \sum_{i=1}^{p} 8\pi m_i \delta_{z=a_i}$$

  no sentido das medidas, com $m_i \in \mathbb{N}$ e $\delta_{x=a_i}$ a distribuição de Dirac em $\{a_i\}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Teorema A.6 *(Veja em [15]) Sejam $\beta \in (0,1)$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ tal que as bolas $B_1 = B_r(z_0)$ e $B_1 = B_{2r}(z_0)$ são subconjuntos próprios de Ω, $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^{0,\beta}(\Omega)$ tais que*

$$\Delta u = f, \text{ em } \Omega.$$

Então, $u \in C^{2,\beta}(\Omega)$ existe $C > 0$ (C depende de n e β) tal que

$$||u||_{C^{2,\beta}(B_1)} \leq C(||u||_{\infty, B_2} + r^2 ||f||_{C^{0,\beta}(B_2)}).$$

Definição A.7 *(Veja em [16]) Seja V um espaço topológico. Dizemos que uma função $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ é semi-contínua inferiormente (s.c.i.) se o conjunto*

$$W_\lambda = \{x \in V; \varphi(x) \leq \lambda\}$$

é fechado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Quando φ é s.c.i. em relação a topologia fraca dizemos que φ é fracamente semi-contínua inferiormente (f.s.c.i.).

Teorema A.8 *(Veja em [16]) Sejam V um espaço topológico e $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Se φ é s.c.i. e convexa, então ϕ é f.s.c.i.*

Teorema A.9 *(Veja em [16]) Sejam V um espaço topológico e $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Se φ é f.s.c.i. e $x_n \rightharpoonup x$, então*

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$

Teorema A.10 (Desigualdade de Trudinger-Moser II) *(Veja em [11]) Se $a > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{au^2} - 1\right) dz < \infty.$$

Teorema A.11 *(Veja em [11]) Seja $\Omega \in \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Se (u_n) converge para u em $H^1(\Omega)$, então existem $h \in H^1(\Omega)$ e uma subsequência (u_k) de (u_n) tais que:*

(i) $u_k(x) \to u(x)$ *quase sempre em* Ω;

(ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$ *quase sempre em* Ω.

Observação A.1 *Observando a demonstração do Teorema A.11 em [11], podemos substituir $H^1(\Omega)$ pelo conjunto $E = \{w \in H^1(\Omega); \int_\Omega w(z)dz = 0\}$ na convergência da sequência (u_n), porém $h\ inH^1$ (devido a (ii) do Teorema A.11, $h(x) \geq 0$ quase sempre em Ω).*

Daqui em diante, vamos considerar X um espaço de Banach, $A \subset X$ aberto em X, $\Phi : A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em A e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Teorema A.12 *(Veja em [18]) Seja $u \in A$ tal que $\Phi'(u) = 0$. Se Φ é duas vezes diferenciável em u e se existe $k > 0$ tal que*

$$\Phi''(u)(v, v) \geq k||v||^2,$$

para todo $v \in X$, então u é ponto de mínimo local estrito para Φ.

Definição A.13 *(Veja em [20]) J satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) se qualquer sequência (u_n) em X tal que*

$$J(u_n) \to c$$

e

$$J'(u_n) \to 0,$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, possui uma subsequência convergente.

Teorema A.14 (Teorema do Passo da Montanha) *(Veja em [20]) Se J satisfaz a condição (PS), $v \in X$ e $r \in (0, ||v||)$ são tais que*

$$\max\{J(0), J(v)\} < \inf_{||u||=r} J(u) = b,$$

então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

é um valor crítico de J com $c \geq b$, onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$.

Teorema A.15 *(Veja em [21]) Se o funcional J é limitado inferiormente, então existe uma sequência minimizante (u_n) para J em uma bola B tal que*

$$J(u_n) \to \inf_{v \in X} J(v)$$

$$J^{'}(u_n) \to 0.$$

Apêndice B

Pertubação no Problema Linear

O objetivo deste Apêndice é mostrar o Teorema B.2.

Seja o seguinte problema:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\ddot{u} = \lambda u \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \\ \int_0^1 u dx = 0 \end{cases}$$

Teorema B.1 *Os autovalores do problema* (P) *e suas autofunções correspondentes são:*

- $\lambda_n = n^2\pi^2, \forall n \in \mathbb{N}$;
- $u_n(x) = \cos(n\pi x)$.

Demonstração: Suponhamos que $\lambda \neq 0$ (para $\lambda = 0$ a única solução do problema (P) é a trivial). Sejam as funções

$$\begin{aligned} u_1 : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{i\sqrt{\lambda}\, x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-i\sqrt{\lambda}\, x} \end{aligned}$$

De acordo com a teoria de equações diferenciais ordinárias (veja em [12]), u_1 e u_2 são soluções da equação

$$\ddot{u} - \lambda u = 0 \tag{B.1}$$

e toda solução u da equação (B.1) pode ser escrita unicamente como

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} \dot{u}(x) &= c_1 \left[-\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + i\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)\right] + \\ & \quad c_2 \left[\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\left(-\sqrt{\lambda}\,x\right) - i\sqrt{\lambda}\cos\left(-\sqrt{\lambda}\,x\right)\right]. \end{aligned}$$

Uma das condições para a função u ser solução do problema (P) é $\dot{u}(0) = 0$. Logo,

$$0 = \dot{u}(0) = i\sqrt{\lambda}(c_1 - c_2) \Rightarrow c_1 = c_2.$$

Desta maneira,

$$u(x) = 2c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right),$$

para todo $x \in [0,1]$. Observemos que $c_1 = \frac{1}{2}$, pois a função u satisfaz a equação (B.1). Uma outra condição para a função u ser solução do problema (P) é $\dot{u}(1) = 0$. Assim,

$$0 = \dot{u}(1) = -\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\right) \Rightarrow \mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lambda = n^2\pi^2$ e $u(x) = \cos(n\pi)$, para algum $n \in \mathbb{N}$. A última condição para a função u ser solução do problema (P) é

$$\int_0^1 u dx = 0.$$

Tal condição é satisfeita pela função u. Portanto, segue o resultado.

■

Teorema B.2 *Sejam $\lambda > 0$ e n o maior número natural tal que $n^2\pi^2 < \lambda$. Então, existe $\delta > 0$ tal que toda solução v do problema $(2)_\lambda$, com $||v|| < \delta$, possui somente n zeros.*

Para demonstrá-lo, precisamos provar alguns resultados. Primeiramente, vimos no Capítulo 1 que o problema $(2)_\lambda$ é equivalente a equação $v = \lambda K(v), \forall v \in E$. Tal equação pode ser reescrita como:

$$v = \lambda G(v) + H(\lambda, v), \forall v \in E,$$

onde $H(\lambda, v) = o(||v||)$ uniformemente em λ próximo de λ_n. Assim, concluímos que o problema $(2)_\lambda$ é equivalente ao seguinte tipo de problema:

$$(P_p) \qquad \begin{cases} -\ddot{v} = \lambda v + \lambda g(v), \ 0 < x < 1 \\ \dot{v}(0) = \dot{v}(1) = 0 \\ \int_0^1 v dx = 0 \end{cases}$$

com $g(s) = o(s)$ na origem.

Observação B.1 *Dado $L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $sL + g(s)$ possui o mesmo sinal de s, para todo $|s| < \delta$.*

De fato. Seja $\varepsilon = \frac{L}{2}$. Então existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{g(s)}{s} \right| < \frac{L}{2},$$

com $|s| < \delta$. Para

- $s < 0 \Rightarrow Ls + g(s) < Ls + \frac{L}{2}|s| = (-s)\left(-L + \frac{L}{2}\right) = -|s|\frac{L}{2} < 0;$
- $s > 0 \Rightarrow Ls + g(s) > Ls - \frac{L}{2}s = s\left(L - \frac{L}{2}\right) = s\frac{L}{2} > 0.$

Assim, mostramos a Observação B.1. Seja u solução do problema (P), ou seja,

$$u(x) = \cos(n\pi x),$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\dot{v}u - v\dot{u}) &= (n^2\pi^2 - \lambda)vu - \lambda g(v)u \\ &= \lambda u \left(\left(\frac{n^2\pi^2 - \lambda}{\lambda} \right) v - g(v) \right) \end{aligned}$$

Observação B.2 *Para $L = \frac{|n^2\pi^2 - \lambda|}{\lambda} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\Gamma(v) = \left(\frac{n^2\pi^2 - \lambda}{\lambda} \right) v - g(v)$$

possui o mesmo sinal de

$$\left(\frac{n^2\pi^2 - \lambda}{\lambda} \right) v$$

quando $||v|| < \delta$.

A demonstração da Observação B.2 segue da Afirmação 1.6 no Capítulo 1 e da Observação B.1.

Vejamos alguns resultados quando $\lambda < n^2\pi^2$.

Lema B.1 *Para* $\lambda < n^2\pi^2$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se* v *é solução de* (P_p)*,* r *é o primeiro zero de* v *em* $(0,1)$ *e* $||v|| < \delta$*, então*

$$r > \frac{1}{2n}.$$

Demonstração: Consideremos $\dot{v}(r) < 0$. Observemos que $v > 0$ em $(0, r)$, pois r é o primeiro zero de v em $(0,1)$ e $\dot{v}(r) < 0$. Por contradição, vamos supor $r \leq \frac{1}{2n}$. Então $u(x) = \cos(n\pi x) > 0, \forall x \in (0, r)$. Assim, pela Observação B.2,

$$0 < \lambda \int_0^r \Gamma(v)udx = \dot{v}(r)u(r) - v(r)\dot{u}(r) - \dot{v}(0)u(0) + v(0)\dot{u}(0) = \dot{v}(r)u(r) \leq 0.$$

Portanto, segue o resultado.

■

Corolário B.3 *Para* $\lambda < n^2\pi^2$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se* v *é solução de* (P_p)*,* r *é o último zero de* v *em* $(0,1)$ *e* $||v|| < \delta$*, então* $r < 1 - \frac{1}{2n}$*.*

Demonstração: Consideremos $\dot{v}(r) > 0$. Observemos que $v > 0$ em $(r, 1)$, pois r é o último zero de v em $(0,1)$ e $\dot{v}(r) > 0$. Por contradição, vamos supor $r \geq 1 - \frac{1}{2n}$. Então

- $u(x) = \cos(n\pi x) > 0, \forall x \in (1 - \frac{1}{2n}, 1]$, se n é par;
- $u(x) = \cos(n\pi x) < 0, \forall x \in (1 - \frac{1}{2n}, 1]$, se n é ímpar.

Assim, pela Observação B.2,

- $0 < \lambda \int_r^1 \Gamma(v)udx = \dot{v}(1)u(1) - v(1)\dot{u}(1) - \dot{v}(r)u(r) + v(r)\dot{u}(r) = -\dot{v}(r)u(r) < 0$, se n par;
- $0 > \lambda \int_r^1 \Gamma(v)udx = \dot{v}(1)u(1) - v(1)\dot{u}(1) - \dot{v}(r)u(r) + v(r)\dot{u}(r) = -\dot{v}(r)u(r) > 0$, se n ímpar.

Portanto, segue o resultado.

■

Lema B.2 *Para* $\lambda < n^2\pi^2$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se* v *é solução de* (P_p)*,* $a, b \in (0,1)$ *são zeros consecutivos de* v *tais que* $a < b$ *e* $||v|| < \delta$*, então* $u(x) = \cos(n\pi x)$ *possui um zero em* (a, b)*.*

Demonstração: Consideremos $\dot{v}(a) > 0$, $\dot{v}(b) > 0$. Observemos que $v(x) < 0, \forall x \in (a,b)$, pois $a < b$, $a, b \in (0,1)$ são zeros consecutivos de v, $\dot{v}(a) > 0$ e $\dot{v}(b) > 0$. Por contradição, vamos supor $u(x) > 0, \forall x \in (a,b)$. Logo, pela Observação B.2,

$$0 \geq \dot{v}(b)u(b) - \dot{v}(a)u(a) = \lambda \int_a^b \Gamma(v) u dx > 0.$$

Portanto, segue o resultado.

■

Lema B.3 *Para $\lambda < n^2\pi^2$, existe $\delta > 0$ tal que se v é solução de (P_p) e $||v|| < \delta$, então v possui no máximo $n-1$ zeros em $(0,1)$.*

Demonstração: Por contradição, vamos supor que v possui n zeros. Então, devido ao Lema A.2, a função $u(x) = cos(n\pi x)$ possui $n-1$ zeros entre o primeiro e o último zero de v. Como o primeiro zero de v é maior estrito do que $\frac{1}{2n}$ (Lema B.1) e o último zero de v é menor estrito do que $1 - \frac{1}{2n}$ (Corolário B.3), então, com $\frac{1}{2n}$ e $1 - \frac{1}{2n}$, a função u tem pelo menos $n+1$ zeros em $(0,1)$. Isso contradiz o fato da função u possuir n zeros em $(0,1)$. Portanto, segue o resultado.

■

Agora, vejamos os resultados para $\lambda > n^2\pi^2$.

Lema B.4 *Para $\lambda > n^2\pi^2$, existe $\delta > 0$ tal que se v é solução de (P_p) e $||v|| < \delta$, então v se anula no intervalo $\left(0, \frac{1}{2n}\right)$.*

Demonstração: Por contradição, vamos supor que $v > 0$ em $\left(0, \frac{1}{2n}\right]$. Assim, pela Observação B.2 e para $u(x) = \cos(n\pi x)$,

$$0 > \lambda \int_0^{\frac{1}{2n}} \Gamma(v) u dx = -v\left(\frac{1}{2n}\right)\dot{u}\left(\frac{1}{2n}\right) > 0.$$

Portanto, segue o resultado.

■

Corolário B.4 *Para $\lambda > n^2\pi^2$, existe $\delta > 0$ tal que se v é solução de (P_p) e $||v|| < \delta$, então v se anula no intervalo $\left(1 - \frac{1}{2n}, 1\right)$.*

Demonstração: Por contradição, vamos supor que $v > 0$ em $\left[1 - \frac{1}{2n}, 1\right)$. Assim, pela Observação B.2 e para $u(x) = \cos(n\pi x)$,

$$0 > \lambda \int_{1-\frac{1}{2n}}^{1} \Gamma(v)udx = v\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\dot{u}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) > 0.$$

Portanto, segue o resultado.

■

Lema B.5 *Para $\lambda > n^2\pi^2$, existe $\delta > 0$ tal que se v é solução de (P_p) e $||v|| < \delta$, então v possui um zero em*

$$\left(\frac{2j-1}{2n}, \frac{2j+1}{2n}\right),$$

para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demonstração: Por contradição, vamos supor que existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $v > 0$ em $[x_1, x_2]$, com

$$x_1 = \frac{2j-1}{2n} \text{ e } x_2 = \frac{2j+1}{2n}.$$

Observemos que x_1 e x_2 são zeros consecutivos da função $u(x) = \cos(n\pi x)$. Consideremos que $u > 0$ em (x_1, x_2). Logo, $\dot{u}(x_2) < 0$ e $\dot{u}(x_1) > 0$. Assim, pela Observação B.2,

$$0 > \lambda \int_{x_1}^{x_2} \Gamma(v)udx = -v(x_2)\dot{u}(x_2) + v(x_1)\dot{u}(x_1) > 0.$$

Portanto, segue o resultado.

■

Lema B.6 *Para $\lambda > n^2\pi^2$, existe $\delta > 0$ tal que se v é solução de (P_p) e $||v|| < \delta$, então v possui no mínimo $n + 1$ zeros em $(0, 1)$.*

Demonstração: Devido ao Lema B.5, a função v possui $n - 1$ zeros entre o primeiro e o último zero da função $u(x) = \cos(n\pi)$. Como a função de v se anula em $\left(0, \frac{1}{2n}\right)$ (Lema B.4) e em $\left(1 - \frac{1}{2n}, 1\right)$ (Corolário B.4), então a função v tem pelo menos $n + 1$ zeros em $(0, 1)$. Portanto, segue o resultado.

■

Demonstração do Teorema B.2

Como $\lambda < (n+1)^2\pi^2$, então, pelo Lema B.3, existe $\delta_1 > 0$ tal que toda solução v do problema $(2)_\lambda$, com $||v|| < \delta_1$, possui no máximo n zeros em $(0, 1)$. Como $(n-1)^2\pi^2 < \lambda$, então, pelo Lema B.6, existe $\delta_2 > 0$ tal que toda solução v do problema $(2)_\lambda$, com $||v|| < \delta_2$, possui no mínimo n zeros em $(0, 1)$. Portanto, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que toda solução v do problema $(2)_\lambda$, com $||v|| < \delta$, possui somente n zeros.

Apêndice C

Resultados da Teoria de Bifurcação

Aqui enunciaremos alguns resultados da Teoria de Bifurcação utilizados neste trabalho. Para entendermos a Teoria de Bifurcação é necessário termos em mente a Teoria do Grau. Todos os resultados encontram-se em [19].

Definição C.1 *Sejam X e Y espaços de Banach, $I = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ e $U \subset X$ uma vizinhança de $u = 0$, $F : I \times U \to Y$ tal que $F(\lambda, 0) = 0$ sobre I. Então $(\lambda_0, 0)$ é um Ponto de Bifurcação para $F(\lambda, u) = 0$ se*

$$(\lambda_0, 0) \in \overline{A},$$

onde $A = \{(\lambda, u) \in I \times U; F(\lambda, u) = 0 \text{ e } u \neq 0\}$.

Daqui por diante, vamos considerar X como um espaço de Banach real, u como elemento arbitrário de X, $G \in \mathfrak{L}(X)$, $\Gamma \subset \mathbb{R} \times X$ uma vizinhança de $(\lambda_0, 0)$ e $F : \Gamma \to Y$, Y espaço de Banach, tal que $F(\lambda, 0) = 0, \forall (\lambda, 0) \in \Gamma$.

Definição C.2 *Sejam W e Y espaços de Banach e $V \subset W$. Um operador $K : V \to Y$ é dito compacto quando $\overline{K(B)}$ é compacto para todo $B \subset V$ limitado.*

Teorema C.3 *Seja $H : \Gamma \to X$ tal que H_λ, H_u $H_{\lambda u}$ são contínuas em Ω. Se*

- *$H(\lambda, u) = o(||u||)$ quando $u \to 0$, uniformemente em λ próximo de λ_0;*
- *G compacto;*
- *λ_0 autovalor simples de G,*

então $(\lambda_0, 0)$ é um Ponto de Bifurcação para $F(\lambda, u) = u - \lambda G(u) + H(\lambda, u) = 0$.

Teorema C.4 *Consideremos*

- $H : \overline{\Gamma} \to X$ *um operador compacto;*
- $H(\lambda, u) = o(||u||)$ *quando* $u \to 0$*, uniformemente em* λ *próximo de* λ_0*;*
- λ_0 *autovalor de* G *com multiplicidade ímpar.*
- $F(\lambda, u) = u - \lambda G(u) + H(\lambda, u)$*;*
- $A = \{(\lambda, u) \in \Gamma; F(\lambda, u) = 0 \text{ e } u \neq 0\}$.

Então a componente C *de* $\overline{A}$*, com* $(\lambda_0, 0) \in C$*, satisfaz pelo menos uma das seguintes propriedades:*

(i) $C \cap \partial\Gamma \neq \emptyset$*;*

(ii) C *possui um número ímpar de zeros triviais* $(\lambda_i, 0) \neq (\lambda_0, 0)$*, onde* λ_i *é autovalor de* G *com multiplicidade ímpar.*

Corolário C.5 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema C.4 com* λ_0 *autovalor simples de* G*. Então a componente* C *de* $\overline{A}$*, com* $(\lambda_0, 0) \in C$*, é composta por dois contínuos* C^- *e* C^+ *tais que*

- $C^- \cap C^+ \cap B_\delta(\lambda_0, 0) = \{(\lambda_0, 0)\}$*;*
- $C^\pm \cap \partial B_\delta(\lambda_0, 0) = \emptyset$*,*

para todo $\delta > 0$ *suficientemente pequeno.*

Bibliografia

[1] Ricciardi, T. e Tarantello, G. *On periodic boundary value problem with exponential nonlinearities*, Differential Integral Equations 11, 745-753, (1998).

[2] Struwe, M. e Tarantello, G. *On multivortex solutions in Chern-Simons Gauge theory.* Boll. Unione Mat. Ital, Sez. B, Artic B(8) 1, 109-121, (1998).

[3] Lin, C. S. e Lucia, M. *One-dimensional symmetry of periodic minimizers for a mean field equation*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) VI, 269-290, (2007).

[4] Lin, C. S. e Lucia, M. *Uniqueness of solutions for a mean field equation on the torus*, J. Differential Equations 229, 172-185, (2006).

[5] Tarantello, G. *Multiple condensate solutions for the Chern-Simons-Higgs theory*, J. Math. Phys. (8) 37, 3769-3796, (1996).

[6] Ding, W., Jost, J., Li, J. e Wang, G. *The differential equation* $\Delta u = 8\pi - 8\pi h e^u$ *on a compact Riemann surface*, Asia J. Math. 1, 230-248, (1997).

[7] Nolasco, M. e Tarantello, G. *On sharp Sobolev-type inequality on two-dimensional compact manifolds*, Arch. Ration. Mech. Anal. 145, 161-195, (1998).

[8] Chen, C. C. e Lin, C. S. *A sharp estimate for solutions of multi-bubbles in compact Riemann surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. 55, 728-771, (2002).

[9] Cabré, X., Lucia, M. e Sanchón, M. *A mean field equation on a torus: one-dimensional symmetry of solutions*, Comm. Partial Differential Equations 30, 1315-1330, (2005).

[10] Moser, J. *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Ind. Univ. Math. J. 20, 1077-1091, (1971).

[11] Bezerra, F. D. M. *Desigualdades do tipo Trudinger-Moser e aplicações*, Dissertação de Mestrado, UFCG, (2006).

[12] Coddington, E. A., *An introduction to ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1963).

[13] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1995).

[14] De Barr, G., *Measure Theory and Integration*, Horwood Publishing Limited, Chichester (2003).

[15] Gilbarg, D. e Trudinger, D., *Elliptic differential equations of second order*, Springer-Verlag, New York (1979).

[16] Brezis, H., *Analyse functionnelle-théorie et applications*, Masson, Paris (1996).

[17] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1989).

[18] Kesavan, S., *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*, Hindustan Book Agency, New Delhi (2004).

[19] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1985).

[20] Costa, D. G., *Tópicos em análise não-linear e aplicações às equações diferenciais*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro (1986).

[21] Struwe, M., *Variational Methods*, Springer-Verlag, Berlin (1990).