Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

A Dimensão de Gelfand-Kirillov e Algumas Aplicações a PI-Teoria

por

Carlos David de Carvalho Lobão

sob orientação de

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Março/2009

A Dimensão de Gelfand-Kirillov e algumas aplicações a PI-teoria

por

Carlos David de Carvalho Lobão

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2009

Abstract

The verbally prime algebras are well understood in characteristic 0 while over a field of characteristic $p > 2$ little is known about them. In this work we discuss some sharp differences between these two cases for the characteristic.

We exhibit constructions of generic models. By using these models we compute the Gelfand-Kirillov dimension of the relatively free algebras of rank m in the varieties generated by $E \otimes E$, $A_{a,b}$, $M_{a,b}(E) \otimes E$, and $M_n(E) \otimes E$. As consequence we obtain the PI non equivalence of important algebras for the PI theory in positive characteristic.

Resumo

As álgebras verbalmente primas são bem conhecidas em característica 0, já sobre corpos de característica $p > 2$ pouco sabemos sobre elas.

Apresentaremos modelos genéricos e calcularemos a dimensão de Gelfand-Kirillov para as álgebras relativamente livres de posto m nas variedades determinadas pelas álgebras $E \otimes E$, $A_{a,b}$, $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a,b}(E) \otimes E$. Como conseqüência, obteremos a prova da não PI-equivalência entre álgebras importantes para PI-teoria em característica positiva.

Agradecimentos

Quando me vejo mestre em Matemática, olho um pouco para trás e vejo que devo muito a muitas pessoas: a minha mãe, Maria José Carvalho Lobão (Zelita), pelas cobranças e todo apoio moral e financeiro de que precisei nestes anos; aos meus filhos, Gregório Souza Lobão, Lílian Arruda Lobão e Nathalia Souza Lobão, que apesar de todas as dificuldades nunca deixaram de acreditar em mim. A minha namorada Cristiane Maria Nepomuceno, pelo apoio e companheirismo e aos meus irmãos, irmãs e sobrinhos (as).

Aos professores da UEPB, onde fiz minha graduação: Rômulo, Núbia, Vandemberg, Castor, Pedro Lúcio e Ernesto que me apresentaram com a carta de recomendação e me apoiaram, em particular a Ernesto e Vandemberg que me ajudaram quando recorri a eles para tirar minhas dúvidas.

Aos professores e funcionários da Pós-Graduação em Matemática da UFCG, que contribuíram com a minha formação; em especial aos professores Antônio Brandão, Bianca, Vânio Fragoso, Sergio Mota e Daniel Cordeiro, dos quais tive o prazer de ser aluno. A amiga incentivadora, professora Marisa, pelo exemplo e apoio.

Ao meu orientador, professor Sérgio Mota, por todo acompanhamento durante o meu mestrado, uma vez que sem a sua confiança e companheirismo acho que as difíceis barreiras que tive de superar se tornariam intransponíveis.

Aos professores que aceitaram o convite e compõe a banca examinadora, Antônio Brandão e Vanderberg Vieira, que parceiros diante das minhas dúvidas nas disciplinas no mestrado, ainda tive o prazer de ter tido as suas colaborações na redação final da minha dissertação.

Aos meus colegas do mestrado que pacientemente estudaram comigo e fortaleceram minha confiança, Joseane, Rivaldo, Suene e em especial a Leomaques (Leo) que com idade para ser meu filho, comportou-se como meu pai incentivando-me e ensinando-me. Obrigado, Leo! Não sei se conseguiria conquistar este título sem o seu apoio. A todos, meu muito obrigado.

"A humildade exprime, uma das raras certezas de que estou certo: a de que ninguém é superior a ninguém."

Paulo Freire

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos meus alunos (as) e ex-alunos (as) que por quase três décadas me aturaram como professor e tentaram aprender matemática em diversas salas de aula comigo, apesar de todas as minhas limitações e dificuldades.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo será apresentado o objeto de nosso estudo, uma motivação e uma breve discussão a seu respeito. Ponderamos os objetivos e a metodologia do nosso trabalho e oferecemos um esquema de sua organização.

1.1 Apresentação

A dimensão de Gelfand-Kirillov, denotada por GK-dimensão, foi introduzida originalmente por Gelfand e Kirillov (1966) para estudar o crescimento de álgebras de Lie de dimensão finita, posteriormente tornou-se um importante invariante para álgebras afins, pois a mesma independe da escolha de seu conjunto de geradores (ao contrário das séries de Hilbert). Uma referência padrão sobre GK-dimensão é o livro de Krause e Lenagan (veja [22]), que também contém os principais resultados sobre GK-dimensão para PI-álgebras.

1.2 Metodologia

Metodologicamente, o estudo é de natureza quantitativa, sobretudo explicatória visto a principal finalidade ter sido desenvolver conceitos, com vista à formulação de novos esboços para estudos posteriores. Buscou-se através de uma pesquisa bibliográfica compreender e apreender A DIMENSÃO DE GELFAND-KIRILLOV das álgebras, realizando um aprofundamento teórico. A pesquisa foi desenvolvida principalmente apartir dos artigos: S.M. Alves e P. Koslukov [1], S.M. Alves e Marcello Fidelis [2], S.M. Alves [3] e S.M. Alves [4]. Deste modo, após definida a questão motivadora e os objetivos da pesquisa foram determinados o plano de trabalho.

1.3 Motivação

A maior motivação de estudar a dimensão de Gelfand-Kirillov de álgebras universais de álgebras T-primas é que podemos usar tal conceito para discutir a PI-equivalencia entre as mesmas.

1.4 Objetivos

Adquirir um melhor entendimento da dimensão de Gelfand-Kirillov e como podemos usa-lá para discutir PI-equivalência em álgebras T-primas.

1.5 Organização da Dissertação

O Capítulo 1 apresenta uma breve organização do trabalho com a motivação que nos levou a executá-lo.

O Capítulo 2 apresenta conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento do trabalho, acompanhado de exemplos. Define álgebra, identidade polinomial, T-ideal e faz um breve resumo sobre a construção de álgebras genéricas, entre outros conceitos importantes como Variedades e álgebras relativamente livres, álgebras graduadas e discutiremos os resultados mais importantes destes conceitos.

O Capítulo 3 apresenta o conceito básico e propriedades da teoria de dimensão de Gelfand-Kirillov e alguns exemplos, os conceitos de altura essencial e altura essencial generalizada de uma álgebra e discute alguns resultados envolvendo a GK-dimensão da álgebra universal.

O Capítulo 4 apresenta o cálculo da GK-dimensão de algumas álgebras universais de posto m, as álgebras trabalhada são: $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$, $U_m(A_{2,1})$ e $U_m(A_{2,2})$.

O Capítulo 5 apresenta um modelo genérico para as álgebras $U_m(A_{a,b})$, $U_m(M_{a,a}(E) \otimes E)$, $U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)$, $U_m(M_n(E) \otimes E)$, calcula suas GK-dimensões e chega à conclusão que as álgebras: $A_{a,b}$ e $A_{c,d}$, $A_{a,b}$ e $M_{a+b}(E)$, $M_{a,a}(E) \otimes E$ e $M_{2a}(E)$, $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ e $M_n(E) \otimes E$ e $M_{n,n}(E)$ não são PI - equivalentes sobre corpos de característica positiva maior que 2. Finalmente apresentamos a conjectura devido a S. M. Mota, a cerca da dimensão Gelfabd-Kirillov da álgebra universal de posto m, no qual diz respeito ao produto tensorial de álgebras T-primas pela álgebra de Grassmann.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é relembrar definições e resultados importantes para uma melhor compreensão do texto. Em geral, não apresentaremos demonstrações, e em casos mais importantes, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

2.1 Conceitos básicos sobre álgebras

Iniciamos com a definição do objeto central de nossos estudos.

Definição 2.1.1 *Diremos que um K-espaço vetorial $\mathcal{A}$, munido de uma operação binária, $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, denominada de multiplicação, tem estrutura de K-álgebra (ou $\mathcal{A}$ é uma álgebra sobre K, ou simplesmente que $\mathcal{A}$ é uma álgebra) se, para qualquer $\alpha \in K$ e quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$, valer:*

(1) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(2) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(3) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$

Para simplificar a notação, vamos escrever $\underline{ab}$ ao invés de $\underline{a * b}$. Dizemos que β é uma base da álgebra $\mathcal{A}$ se β é uma base de $\mathcal{A}$ como espaço vetorial e definimos a dimensão de $\mathcal{A}$ como sendo a dimensão de $\mathcal{A}$ como espaço vetorial.

Definição 2.1.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma K-álgebra, diremos que:*

(1) $\mathcal{A}$ *é comutativa se* $ab = ba$ *para quaisquer* $a, b \in \mathcal{A}$;

(2) $\mathcal{A}$ *é associativa se* $(ab)c = a(bc)$ *para quaisquer* $a, b, c \in \mathcal{A}$;

(3) $\mathcal{A}$ *é unitária se existir* $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ *tal que* $1_{\mathcal{A}}a = a1_{\mathcal{A}} = a$ *para qualquer* $a \in \mathcal{A}$ *(vamos escrever* $\underline{1}$ *ao invés de* $\underline{1_{\mathcal{A}}}$*).*

Em praticamente todo texto vamos trabalhar com álgebras associativas unitárias tendo corpo de base infinito. Assim, no que segue, a menos que seja feita menção explícita em contrário, o termo álgebra deverá ser entendido como uma K-álgebra associativa unitária.

Definição 2.1.3 *Um K-subespaço vetorial $\mathcal{B}$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ será denominado uma K-subálgebra de $\mathcal{A}$, se tiver estrutura de álgebra, isto é, se $\mathcal{B}$ for fechado com respeito a multiplicação definida em $\mathcal{A}$. O subespaço $\mathcal{B}$ será denominado um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$. De modo similar, definimos ideal à direita de $\mathcal{A}$. Um ideal bilateral será simplesmente denominado de ideal.*

Nos próximos sete exemplos recordamos as definições de algumas álgebras e subálgebras que serão utilizadas no decorrer do texto.

Exemplo 2.1.4 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e $S \subseteq \mathcal{A}$. Consideremos o subespaço $\mathcal{B}_S$ de $\mathcal{A}$ gerado pelo conjunto $\{1, s_1 s_2 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. Temos que $\mathcal{B}_S$ é multiplicativamente fechado e $1 \in \mathcal{B}_s$. Logo, $\mathcal{B}_S$ é subálgebra de $\mathcal{A}$, chamada de **subálgebra gerada por** S. Observe que toda subálgebra de $\mathcal{A}$ que contém S deve conter $\mathcal{B}_S$ e assim $\mathcal{B}$ é a menor subálgebra de $\mathcal{A}$ contendo S.*

Exemplo 2.1.5 *Seja $\mathcal{V}$ um K-espaço vetorial com base enumerável $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. A álgebra de Grassmann (ou exterior) $E = E(\mathcal{V})$ é a álgebra gerada por $\{1, e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo as relações*

$$e_i e_j = -e_j e_i \text{ para todos } i, j \in \mathbb{N}.$$

Mais ainda, se $\operatorname{char} K = 2$, impomos:

$$e_i^2 = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Observe que $D = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r; r = 1, 2, \dots\}$ é uma base para E. Além disso, se $\mathcal{V}_n$ é o subespaço de $\mathcal{V}$ gerado por $\{e_1, \dots, e_n\}$ denotaremos por $E(\mathcal{V}_n)$ sua correspondente álgebra de Grassmann.

Exemplo 2.1.6 *O conjunto $Z(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid ax = xa, \forall x \in \mathcal{A}\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ denominada o centro de $\mathcal{A}$ e seus elementos são ditos ser centrais. Se $\mathcal{A} = E$ (álgebra de Grassmann) é fácil ver que $Z(E) = E_0$ onde E_0 é o subespaço de E gerado pelo conjunto $D_0 = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r; r = 2, 4, \dots\}$.*

Exemplo 2.1.7 *O K-espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas no corpo K, denotado por $M_n(K)$, munido com a multiplicação usual de matrizes, tem estrutura de álgebra.*

Exemplo 2.1.8 *O K-espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas na álgebra de Grassmann E, denotado por $M_n(E)$, munido com a multiplicação usual de matrizes, tem estrutura de álgebra. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ com $a + b = n$, é fácil verificar através de multiplicação de matrizes, que o K-subespaço de $M_{a+b}(E)$*

$$M_{a,b}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid \ A \in M_a(E_0), B \in M_{a\times b}(E_1), C \in M_{b\times a}(E_1), D \in M_b(E_0) \right\},$$

tem estrutura de álgebra. Aqui, E_1 é o subespaço de E gerado por

$$D_1 = \{e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \ ; \ r = 1, 3, \dots\}.$$

Observamos que os elementos de E_1 anticomutam entre si.

Exemplo 2.1.9 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ com $a+b = n$, é fácil verificar através de multiplicação de matrizes, que o K-subespaço de $M_{a+b}(E)$*

$$A_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid \ A \in M_a(E), B \in M_{a\times b}(E'), C \in M_{b\times a}(E'), D \in M_b(E) \right\}$$

tem estrutura de álgebra. Aqui, E' denota a álgebra de Grassmann sem unidade.

Exemplo 2.1.10 *Consideramos agora a subálgebra de $M_{a+b}(K)$ definida por:*

$$M_a M_b = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid A \in M_a(K); B \in M_{a\times b}(K) \ e \ C \in M_b(K) \right\}.$$

Denotaremos por $\overline{M_a M_b}$ a subálgebra de $M_a M_b$ obtida considerando $B = 0$.

Definição 2.1.11 *Uma transformação linear $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de álgebras é um homomorfismo de álgebras, se $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ e além disso $\Phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$. Analogamente às demais estruturas algébricas, chamaremos Φ de isomorfismo quando Φ for um homomorfismo bijetor; mergulho quando Φ for injetor; endomorfismo quando Φ for um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$; e automorfismo quando Φ for um endomorfismo bijetor.*

Exemplo 2.1.12 *Seja $\mathcal{A}'$ uma álgebra sem unidade. Podemos mergulhar $\mathcal{A}'$ numa álgebra com unidade. Com efeito, seja $\mathcal{A} = K \oplus \mathcal{A}'$ como soma direta de espaços vetoriais. Definimos em $\mathcal{A}$ a seguinte multiplicação, para todos $a, b \in \mathcal{A}'$ e para todos $\alpha, \beta \in K$*

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha b + \beta a + ab).$$

Assim, $(1, 0)$ é unidade de $\mathcal{A}$ e a inclusão $\mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ é um mergulho. Diremos que $\mathcal{A}$ é obtida a partir de $\mathcal{A}'$ por adjunção da unidade.

2.2 Produto tensorial

Nesta seção, introduziremos o conceito de Produto Tensorial de Espaços Vetoriais. A propriedade Universal e o Produto Tensorial de Álgebras, apresentaremos alguns exemplos e resultados.

Definição 2.2.1 *Sejam V e W espaços vetoriais e $K(V \times W)$, o K-espaço vetorial com base $V \times W$, isto é, o espaço vetorial formado pelas somas formais*

$$\sum_{(v,w) \in V \times W} \alpha_{(v,w)}(v, w)$$

onde $\alpha_{(v,w)} \in K$ e $\{(v, w) \in V \times W \mid \alpha_{(v,w)} \neq 0\}$ é finito. Sendo $\mathcal{U}$ um subespaço de $K(V \times W)$ gerado pelos elementos dos tipos

$$\begin{gathered}(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)\\(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)\\(\lambda v, w) - \lambda(v, w)\\(v, \lambda w) - \lambda(v, w)\end{gathered}$$

com $v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W$ e $\lambda \in K$. Definimos o ***produto tensorial*** *de V e W, denotado por $V \otimes_K W$ (ou simplesmente por $V \otimes W$) como sendo o espaço vetorial quociente $K(V \times W)/\mathcal{U}$. Dado $(u, w) \in V \times W$, denotamos por $v \otimes w$ o elemento $\overline{(v, w)}$ de $V \otimes W$ e o chamamos de tensores. Desta forma, temos que $\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$ é um conjunto gerador de $V \otimes W$ e*

$$\begin{gathered}(v_1 + v_2) \otimes w = (v_1 \otimes w) + (v_2 \otimes w)\\v \otimes (w_1 + w_2) = (v \otimes w_1) + (v \otimes w_2)\\(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w)\\v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w)\end{gathered}$$

para quaisquer $v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W$ e $\lambda \in K$. Concluímos que todos os elementos de $V \otimes W$ são da forma $\Sigma(v_i \otimes w_i)$, com $v_i \in V$ e $w_i \in W$.

Teorema 2.2.2 ***(Propriedade Universal)*** *Sejam V, W e U espaços vetoriais sobre o corpo K e a aplicação bilinear $f : V \times W \to U$, então existe uma única transformação linear $t_f : V \otimes W \to U$, definida por $t_f(v \otimes w) = f(v, w)$, $\forall v \in V$ e $w \in W$.*

Definição 2.2.3 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras. Considere o K-espaço vetorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Existe um produto bilinear $\cdot : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, tal que $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1a_2 \otimes b_1b_2$ para quaisquer $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ e $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$. Então $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, munido deste produto é uma álgebra, chamada de* ***Produto Tensorial das Álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$****.*

Exemplo 2.2.4 *Sendo K um corpo, é naturalmente uma álgebra sobre si mesmo e $K \otimes K \simeq K$. Mais geralmente, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra, então $K \otimes \mathcal{A} \simeq A$.*

Exemplo 2.2.5 *Sendo $\mathcal{A}$ uma K-álgebra, então $M_n(K) \otimes \mathcal{A} \simeq M_n(\mathcal{A})$.*

Exemplo 2.2.6 *Sejam G_1 e G_2 grupos e $G_1 \times G_2$ o seu produto direto. Então $K(G_1 \times G_2) \simeq KG_1 \otimes KG_2$.*

Os próximos resultados relacionam as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ com a álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Suas demonstrações são imediatas.

Proposição 2.2.7 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras.*

(1) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são associativas, então $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é associativa.

(2) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são comutativas, então $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é comutativa.

(3) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ possuem unidade, então $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é uma álgebra com unidade.

2.3 Álgebras com identidades polinomiais

Nesta seção, introduziremos as álgebras com identidades polinomiais, uma classe muito importante de álgebras. Pois, além de surgirem como uma generalização das álgebras nilpotentes, comutativas e as de dimensão finita, elas mantém várias das boas propriedades destas classes.

Definição 2.3.1 *Para o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots,\}$ de variáveis não comutativas, $K\langle X\rangle$ denotará a álgebra associativa livre, isto é, $K\langle X\rangle$ terá como base os elementos da forma*

$$x_{i_1} \ldots x_{i_n} \ ; \ x_{i_j} \in X \ ; \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

e a multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_k})(x_{j_1} \ldots x_{j_l}) = x_{i_1} \ldots x_{i_k} x_{j_1} \ldots x_{j_l} \text{ onde } x_{i_t}, x_{j_s} \in X.$$

Os elementos de $K\langle X\rangle$ são denominados de polinômios.

O subespaço $K\langle X\rangle' \subset K\langle X\rangle$ gerado pelos elementos da forma

$$x_{i_1} \ldots x_{i_n} \ ; \ x_{i_j} \in X \ ; \ n = 1, 2, \ldots$$

é uma subálgebra denominada de álgebra associativa livre sem unidade.

Observe que a álgebra $K\langle X\rangle$ definida acima é, noutras palavras, a álgebra dos polinômios não comutativos.

Definição 2.3.2 *Um polinômio $f(x_1,\dots,x_n) \in K\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1,\dots,x_n) = 0$) é denominado uma identidade polinomial da álgebra $\mathcal{A}$, se $f(a_1,\dots,a_n) = 0$ para quaisquer $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{A}$. Uma álgebra com identidade polinomial (PI-álgebra) é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial.*

Seguem alguns exemplos importantes de álgebras com identidades polinomiais, ou seja, de PI-álgebras.

Exemplo 2.3.3 *Toda álgebra comutativa $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra, pois o polinômio comutador $f(x_1,x_2) = [x_1,x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial para $\mathcal{A}$.*

Exemplo 2.3.4 *A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois um cálculo direto usando os elementos da base de E mostra que o polinômio $f(x_1,x_2,x_3) = [[x_1,x_2],x_3]$ é uma identidade polinomial para E.*

Exemplo 2.3.5 *Uma K-álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser uma Nil-álgebra se para cada $a \in \mathcal{A}$ existe um número natural n tal que $a^n = 0$. O menor inteiro n com tal propriedade é denominado índice de nilpotência do elemento a. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma Nil-álgebra de índice n se $a^n = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Toda Nil-álgebra de índice limitado n é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio $f(x) = x^n$.*

Exemplo 2.3.6 *Uma K-álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser nilpotente se existe um natural fixo n tal que o produto de quaisquer n elementos de $\mathcal{A}$ é igual a zero. O menor natural n com tal propriedade é denominado o índice de nilpotência da álgebra $\mathcal{A}$, e $\mathcal{A}$ é denominada uma álgebra nilpotente de classe $n-1$. Toda álgebra associativa nilpotente de classe $n-1$ é uma PI-álgebra, pois ela satisfaz o polinômio $f(x_1,\dots,x_n) = x_1\dots x_n$. Observamos que neste exemplo e no anterior, as álgebras consideradas não possuem unidade.*

Aqui mencionamos brevemente que o clássico Teorema de Nagata, Higman, Dubnov e Ivanov, afirma que em característica 0, toda nil-álgebra de índice limitado, é nilpotente. Ver para mais detalhes Capítulo 8 de [16].

Exemplo 2.3.7 *(Regev, [16]) Seja E' a álgebra de Grassmann sem unidade sobre um corpo infinito K com $\operatorname{char} K = p \neq 0$. Então, $f(x) = x^p$ é uma identidade polinomial para E'.*

Exemplo 2.3.8 *A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade $f(x_1,x_2,x_3) = [[x_1,x_2]^2,x_3]$ conhecida como a identidade de Hall. A verificação é simples, basta observarmos dois fatos:*

(1) Se $a,b \in M_2(K)$ então $tr([a,b]) = 0$;

(2) Se $a \in M_2(K)$ e $tr(a) = 0$ então $a^2 = \lambda I_2$ onde I_2 é a matriz identidade de $M_2(K)$.

Exemplo 2.3.9 *(Teorema de Amitsur-Levitzki, [16]) A álgebra $M_n(K)$ satisfaz o polinômio standard de grau $2n$*

$$s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}$$

onde S_{2n} é o grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal da permutação σ. Ademais, não satisfaz identidades sob a forma s_m^k, para todo k quando $m < 2n$.

Exemplo 2.3.10 *(Regev,[30]) O produto tensorial $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ de duas PI-álgebras é uma PI-álgebra.*

Após vários exemplos de PI-álgebras, surge uma pergunta inevitável: Existem álgebras que não são PI-álgebras ? A resposta é sim. A álgebra $K\langle X\rangle$, por exemplo, não satisfaz nenhuma identidade polinomial não nula. Isto pode ser compreendido por um argumento simples. Suponhamos, por absurdo, que $f(x_1, \ldots, x_n)$ seja uma identidade polinomial não nula de $K\langle X\rangle$. Assim, $f(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) = 0$ onde $f_i(x_i) = x_i$ para $i = 1, \ldots, n$, o que é um absurdo, pois $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

O próximo teorema mostra que toda álgebra de dimensão finita é também uma PI-álgebra.

Teorema 2.3.11 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita, digamos n. Então, ela satisfaz o polinômio standard de grau $n+1$, isto é, o polinômio*

$$s_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n+1)}.$$

Prova: Da definição de polinômio standard é imediato que ele é igual a zero, se dois de seus argumentos forem iguais. Por multilinearidade, é suficiente verificarmos numa base de $\mathcal{A}$, digamos $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Observe que $s_{n+1}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+1}})$ é tal que ao menos dois dos e_{i_j} são iguais. Daí, s_{n+1} é identidade polinomial para $\mathcal{A}$. ∎

Definição 2.3.12 *Um ideal $\mathcal{I}$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ é dito ser um T-ideal, se $\mathcal{I}$ for invariante sob todos os endomorfismos Φ de $\mathcal{A}$, isto é, se $\Phi(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$ para todo endomorfismo $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.*

Teorema 2.3.13 *O ideal $T(\mathcal{A})$ das identidades da álgebra $\mathcal{A}$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Prova: É fácil ver que $T(\mathcal{A})$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Sejam $f(x_1,\dots,x_n) \in T(\mathcal{A})$ e $\Phi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ um endomorfismo. Como $\Phi(f(x_1,\dots,x_n)) = f(\Phi(x_1),\dots,\Phi(x_n))$ e $f(a_1,\dots,a_n) = 0$ para quaisquer $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{A}$, obtemos que, $\Phi(f(x_1,\dots,x_n)) \in T(\mathcal{A})$. Portanto, $\Phi(T(\mathcal{A})) \subseteq T(\mathcal{A})$. ■

Teorema 2.3.14 *Se $\mathcal{I}$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então $\mathcal{I} = T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$.*

Prova: Sejam $f(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{I}$ e $f_1,\dots,f_n \in K\langle X\rangle$. Como $f(f_1,\dots,f_n) \in \mathcal{I}$, temos que

$$f(f_1+\mathcal{I},\dots,f_n+\mathcal{I}) = f(f_1,\dots,f_n)+\mathcal{I} = \mathcal{I}.$$

Logo, $\mathcal{I} \subseteq T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$. Por outro lado, supondo-se que $f(x_1,\dots,x_n) \in T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$, obtemos $\mathcal{I} = f(x_1+\mathcal{I},\dots,x_n+\mathcal{I}) = f(x_1,\dots,x_n)+\mathcal{I}$. Donde, $f(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{I}$. Logo $T(K\langle X\rangle/\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$. Portanto temos a igualdade. ■

Definição 2.3.15 *Duas álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ditas PI-equivalentes e denotamos por $A \sim B$, se elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais, ou seja, se $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$.*

Definição 2.3.16 *Seja B um conjunto gerador de $T(\mathcal{A})$ para uma álgebra $\mathcal{A}$, diremos que B é uma base de identidades de $\mathcal{A}$. Se B não contém propriamente nenhuma base de $\mathcal{A}$, B será denominada uma base minimal de $T(\mathcal{A})$. Se $\mathcal{S}$ é um subconjunto de $K\langle X\rangle$, o T-ideal gerado por $\mathcal{S}$ é denotado por $\langle\mathcal{S}\rangle^T$. Noutras palavras, $\langle\mathcal{S}\rangle^T$ é o ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios*

$$\{f(g_1,\dots,g_n) \mid f(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}; g_i \in K\langle X\rangle\}.$$

Se um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ pertence a $\langle\mathcal{S}\rangle^T$ dizemos que f segue de $\mathcal{S}$, ou que f é uma conseqüência de $\mathcal{S}$. Dois subconjuntos de $K\langle X\rangle$ são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal.

Um dos principais problemas da teoria de identidades polinomiais é encontrar, para uma dada álgebra, bases para suas identidades polinomiais. Seguem alguns exemplos de bases de identidades polinomiais.

Exemplo 2.3.17 *(veja, [16]) A álgebra $M_2(K)$ quando K é um corpo de característica zero, tem por base minimal*

$$s_4(x_1,x_2,x_3,x_4) \text{ e } h(x_1,x_2,x_3) = [[x_1,x_2]^2,x_3].$$

Exemplo 2.3.18 *Regev e Krakowski, em [16], mostraram que sobre corpos de base com característica zero todas as identidades da álgebra de Grassmann seguem da identidade polinomial* $[[x_1, x_2], x_3] = 0$. *Este último resultado generaliza-se facilmente para o caso de corpos infinitos com característica positiva e diferente de dois (quando* $char(K) = 2$, *a álgebra é comutativa, logo não muito "interessante" do ponto de vista da PI teoria. Pois, neste caso, um raciocínio simples mostra que qualquer identidade polinomial que não seja consequência da comutatividade, implica na nilpotência da álgebra). Ressaltamos ainda que a álgebra de Grassmann* E *de um espaço vetorial* $\mathcal{V}$ *de dimensão infinita é um exemplo de uma PI-álgebra que não satisfaz nenhuma identidade standard, quando o corpo base é de característica zero. Quando,* $char K = p > 2$, *a álgebra* E *satisfaz a identidade standard de grau* $p + 1$. *Um teorema devido a Kemer, veja [20], afirma que neste último caso, toda PI-álgebra satisfaz alguma identidade standard.*

Em 1950, Specht [32] formulou o seguinte problema para álgebras associativas sobre corpos de característica zero: Toda álgebra possui uma base finita para suas identidades polinomiais? Esta pergunta, que ficou conhecida como o problema de Specht, passou a ser uma das questões centrais da teoria de identidades polinomiais e foi finalmente respondida de modo positivo por Kemer em 1987 (veja, [19]). Por volta de 1973; Krause e Lvov, separadamente, provaram que este problema tem resposta positiva para álgebras finitas. A resposta para o problema de Specht é negativa no caso de álgebras sobre corpos infinitos e de característica positiva. Não vamos entrar em detalhes sobre o avanço na resolução do problema de Specht, pois o assunto merece atenção especial, envolvendo métodos e técnicas sofisticadas, e não está diretamente relacionado com o conteúdo da presente dissertação. Mais adiante, faremos uma exposição resumida sobre alguns pontos da teoria desenvolvida por Kemer, com a finalidade de justificar o nosso interesse no estudo das identidades em álgebras matriciais e de Grassmann.

2.4 Variedades e álgebras relativamente livres

Nesta seção, apresentaremos as variedades (de álgebras associativas) que classificam as PI-álgebras de acordo com as identidades que estas satisfazem. Dentro das variedades, encontram-se seus elementos mais importantes, as álgebras livres. Através destes conceitos, desenvolve-se o estudo das álgebras e suas identidades polinomiais.

Definição 2.4.1 *Seja $\mathcal{I}$ um subconjunto de $K\langle X\rangle$. A variedade de álgebras $var(\mathcal{I})$ definida pelo conjunto $\mathcal{I}$ é a classe de todas as álgebras que satisfazem cada identidade de $\mathcal{I}$. O conjunto $\mathcal{I}$ é o conjunto de identidades que definem a variedade $var(\mathcal{I})$. É fácil verificar que o conjunto $\mathcal{I}$ está contido no núcleo de qualquer homomorfismo da álgebra livre $K\langle X\rangle$ numa álgebra da variedade $var(\mathcal{I})$. A variedade trivial é a classe de álgebras que contém apenas a álgebra nula (noutras palavras, é a variedade definida pelo conjunto $K\langle X\rangle$).*

Definição 2.4.2 *Se $\mathcal{V}$ é uma classe de álgebras, o conjunto*

$$T(\mathcal{V}) = \{f \in K\langle X\rangle \mid f \in T(\mathcal{A}) \text{ para cada } \mathcal{A} \in \mathcal{V}\}$$

é um T-ideal de $K\langle X\rangle$ chamado ideal das identidades que definem a variedade $\mathcal{V}$.

Definição 2.4.3 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Para um conjunto fixo Y, a álgebra $U_Y(\mathcal{V}) \in \mathcal{V}$ é uma **álgebra relativamente livre de** $\mathcal{V}$, se $U_Y(\mathcal{V})$ é livre na classe $\mathcal{V}$ (livremente gerada por Y). A cardinalidade de Y é chamada o **posto de** $U_Y(\mathcal{V})$.*

O próximo teorema mostra que toda variedade tem uma álgebra livre.

Teorema 2.4.4 *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade não trivial de álgebras e $\Pi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ a projeção canônica. Então,*

(1) A restrição de Π a X é injetora;

(2) A álgebra $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é livre na variedade $\mathcal{V}$ com conjunto gerador livre $\Pi(X)$.

Prova: (1) Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos de X tais que $\Pi(x_1) = \Pi(x_2)$. Consideramos uma álgebra não nula $\mathcal{A}$ de $\mathcal{V}$ e um elemento não nulo a de $\mathcal{A}$. Então, existe homomorfismo $\Psi : K\langle X\rangle \to \mathcal{A}$ tal que $\Psi(x_1) = a$ e $\Psi(x_2) = 0$. Como $T(\mathcal{V})$ está contido no núcleo de Ψ, existe um homomorfismo $\Phi : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}$ para o qual $\Phi \circ \Pi = \Psi$. Mas,

$$a = \Psi(x_1) = \Phi \circ \Pi(x_1) = \Phi \circ \Pi(x_2) = \Psi(x_2) = 0$$

o que é uma contradição. Portanto $x_1 = x_2$ e assim Π restrito a X é injetora.

(2) A álgebra $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é gerada pelo conjunto $\Pi(X)$ e pertence a $\mathcal{V}$ desde que satisfaz todas as identidades de $T(\mathcal{V})$. Vamos mostrar que esta álgebra é livre em $\mathcal{V}$, com

conjunto gerador livre $\Pi(X)$. Sejam $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ e σ uma aplicação de $\Pi(X)$ em $\mathcal{A}$. Como $K\langle X\rangle$ é álgebra livre com conjunto gerador X, a aplicação $\sigma \circ \Pi : X \to \mathcal{A}$ estende-se a um homomorfismo $\Phi : K\langle X\rangle \to \mathcal{A}$. Existe homomorfismo $\Psi : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}$ para o qual $\Psi \circ \Pi = \Phi$, pois $T(\mathcal{V}) \subseteq Ker(\Phi)$. Se $x \in X$, temos que

$$\Psi(\Pi(x)) = \Psi \circ \Pi(x) = \Phi(x) = \sigma \circ \Pi(x) = \sigma(\Pi(x))$$

ou seja, o homomorfismo Ψ estende a aplicação σ. Portanto, $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é uma álgebra livre na variedade $\mathcal{V}$, tendo como conjunto gerador livre $\Pi(X)$. ■

Uma variedade de álgebras é claramente fechada sob as operações de tomar subálgebras, imagem homomórfica e produto cartesiano. Uma variedade $\mathcal{V}$ de álgebras é gerada por uma classe $\mathcal{U}$ de álgebras se, toda álgebra de $\mathcal{V}$ pode ser obtida das álgebras de $\mathcal{U}$ por uma seqüência finita de aplicações das operações citadas acima: denotamos este fato por $\mathcal{V} = var(\mathcal{U})$ ou, por $\mathcal{V} = var(\mathcal{A})$ quando a classe $\mathcal{U}$ contém apenas uma álgebra $\mathcal{A}$. O clássico Teorema de Birkhoff (veja, [16]) demonstra que uma classe não vazia de álgebras é variedade se, e somente se, ela é fechada com respeito às três operações acima descritas.

No próximo Teorema, listamos algumas das propriedades básicas das variedades (omitimos a prova, pois a mesma é bastante direta). É importante frisar que ele só é válido devido ao conjunto X ser infinito.

Teorema 2.4.5 *Sejam $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ duas classes de álgebras e $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Então,*

(1) $T(\mathcal{U}_1) = \cap_{\mathcal{A}\in\mathcal{U}_1} T(\mathcal{A}) = T(var(\mathcal{U}_1))$;

(2) $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \Rightarrow T(\mathcal{U}_2) \subseteq T(\mathcal{U}_1)$;

(3) $U_1 \subseteq \mathcal{V} \Leftrightarrow T(\mathcal{V}) \subseteq T(U_1)$;

(4) Se $\mathcal{F}$ é uma álgebra livre em $\mathcal{V}$, então $T(\mathcal{V}) = T(\mathcal{F})$.

Corolário 2.4.6 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra, então $T(var(\mathcal{A})) = T(\mathcal{A})$.*

Vários resultados e definições apresentados nesta seção podem ser generalizados para álgebras não necessariamente associativas (álgebras de Lie, de Jordan, alternativas, entre outras), sobre anéis comutativos com identidade. Porém, como as álgebras tratadas neste texto são principalmente álgebras de matrizes e a álgebra de Grassmann, nós restringimos as definições às álgebras associativas sobre corpos.

A proposição a seguir caracteriza as álgebras relativamente livres em qualquer variedade.

Proposição 2.4.7 *Sejam $\mathcal{V}$ a variedade definida por $\{f_i \mid i \in I\}$, Y um conjunto qualquer e $\mathcal{J}$ o ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) \mid g_i \in K\langle Y\rangle; i \in I\}.$$

Então, a álgebra $U = K\langle Y\rangle/\mathcal{J}$ é a álgebra relativamente livre em $\mathcal{V}$ com conjunto de geradores livre $\overline{Y} = \{y + \mathcal{J} \mid y \in Y\}$. Duas álgebras relativamente livres de mesmo posto em $\mathcal{V}$ são isomorfas.

Prova:

(1) Vamos mostrar que $U \in \mathcal{V}$. Seja $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ uma das identidades que definem $\mathcal{V}$ e sejam $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n \in U$ onde $\overline{g}_j = g_j + \mathcal{J}$ com $g_j \in K\langle Y\rangle$. Então, $f_i(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{J}$. Logo, $f_i(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n) = 0$. Isto mostra que $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ é identidade polinomial para U. Daí, $U \in \mathcal{V}$.

(2) Agora vamos provar a propriedade universal de U. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de $\mathcal{V}$ e $\Psi : \overline{Y} \rightarrow \mathcal{A}$ uma função arbitrária. Definimos a função $\Theta : Y \rightarrow \mathcal{A}$ pondo $\Theta(y) = \Psi(\overline{y})$ e estendemos Θ a um homomorfismo (também denotado por Θ) $\Theta : K\langle Y\rangle \rightarrow \mathcal{A}$. Isto é sempre possível, porque $K\langle Y\rangle$ é álgebra associativa livre. Para provar que Ψ pode ser estendido a um homomorfismo de U em $\mathcal{A}$, é suficiente mostrarmos que $\mathcal{J} \subseteq Ker(\Theta)$. Seja $f \in \mathcal{J}$, isto é,

$$f = \sum_{i \in I} u_i f_i(\overline{g}_{i_1}, \ldots, \overline{g}_{i_n}) v_i \text{ onde } g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle Y\rangle$$

para $r_{i_1}, \ldots, r_{i_n} \in \mathcal{A}$, o elemento $f_i(r_{i_1}, \ldots, r_{i_n})$ é igual a zero em $\mathcal{A}$, e isto implica que $\Theta(f) = 0$, isto é, $\mathcal{J} \subseteq Ker(\Theta)$ e $U \simeq U_{\overline{Y}}(\mathcal{V})$ é a álgebra relativamente livre em V, livremente gerada por $\overline{Y}$.

(3) $|Y| = |Z|$ com $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ e $Z = \{Z_i \mid i \in I\}$. Sejam $U_Y(\mathcal{V})$ e $U_Z(\mathcal{V})$ suas correspondentes álgebras relativamente livres. Dessa forma, podemos definir homomorfismos

$$\Psi : U_Y(\mathcal{V}) \rightarrow U_Z(\mathcal{V}) \text{ e } \Phi : U_Z(\mathcal{V}) \rightarrow U_Y(\mathcal{V})$$

pondo $\Psi(y_i) = z_i$ e $\Phi(z_i) = y_i$. Assim, Ψ e Φ são isomorfismos.

A partir de (1), (2) e (3) temos o requerido. ■

Observação 2.4.8 *A partir da Proposição 2.4.7, temos que o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por $\{f_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ consiste de todas as combinações lineares dos elementos sob a forma*

$$u_i f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}) v_i \text{ onde } g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle X\rangle.$$

2.5 Identidades polinomiais homogêneas, multilineares e próprias

Nesta seção, verificamos que sob determinadas condições podemos simplificar as identidades que estamos trabalhando. A primeira vista, estes resultados parecem apenas simplificar as técnicas, mas sua importância vai muito além disso, como veremos no decorrer do texto.

Definição 2.5.1 *Um monômio $\mathtt{m}$ tem grau k em x_i se a variável x_i ocorre em $\mathtt{m}$ exatamente k vezes. Um polinômio é homogêneo de grau k em x_i se todos os seus monômios têm grau k em x_i. Denotamos este fato por $\deg_{x_i} f = k$. Um polinômio linear em x_i é um polinômio de grau 1 em x_i.*

Definição 2.5.2 *Um polinômio é multihomogêneo se para cada variável x_i todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. Um polinômio é multilinear se é linear em cada variável. O grau de um polinômio é o grau do seu maior monômio.*

Definição 2.5.3 *Sejam f um polinômio de $K\langle X\rangle$ de grau n e x_k uma variável de f. Podemos escrever f como uma soma $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, onde cada polinômio f_i é homogêneo de grau i na variável x_k. Cada polinômio f_i é a componente homogênea de grau i em x_k do polinômio f.*

Os polinômios multilineares e multihomogêneos desempenham um papel importante na busca de bases para as identidades polinomiais sobre determinados tipos de corpos. Este fato já observado por Specht em 1950 está desenvolvido no próximo lema.

Lema 2.5.4 *Seja $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ onde f_i é a componente homogênea de f com grau i em x_1.*

(i) Se o corpo K contém mais que n elementos, então as identidades $f_i = 0$ onde $i = 1, 2, \ldots, n$ seguem de $f = 0$;

(ii) Se a característica do corpo é zero ou maior que o grau de f então $f = 0$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares.

Prova: (i) Seja $\mathcal{I} = \langle f \rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ de K. Como $\mathcal{I}$ é um T-ideal, obtemos que

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{I} \ ; \ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Consideramos estas equações como um sistema linear com incógnitas f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$. Sendo

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

um determinante de Vandermonde que é diferente de 0, temos que cada $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{I}$, ou seja, as identidades polinomiais $f_i = 0$ são conseqüências de $f = 0$.

(ii) Pela parte (i), podemos assumir que $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é multihomogêneo. Seja $k = \deg_{x_1} f$. Escrevemos $f_i(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{I}$ sob a forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{k} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Logo, $f_i \in \mathcal{I}$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Como $\deg_{y_j} f_i < k \ ; \ i = 1, 2, \ldots, k-1 \ ; \ j = 1, 2$, podemos aplicar argumentos indutivos e obtemos um conjunto de conseqüências multilineares de $f = 0$. Para ver que estas identidades multilineares são equivalentes a $f = 0$ é suficiente observarmos que

$$f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$$

e que o coeficiente binomial é diferente de 0, pois temos por hipótese que $charK = 0$ ou $\mathrm{char}\, K > \deg(f)$. ■

Observamos que o ítem (i) do lema acima significa que o polinômio f gera o mesmo T-ideal que o gerado pelos polinômios f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Corolário 2.5.5 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Então,*

(i) Se o corpo K é infinito, então todas identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem de suas identidades multihomogêneas;

(ii) Se o corpo K tem característica zero, então todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem de suas identidades multilineares.

Quando a álgebra é unitária podemos restringir a nossa busca de identidades polinomiais a um determinado tipo de polinômios, conforme explicamos a seguir.

Definição 2.5.6 *O comutador de comprimento n é definido indutivamente a partir de $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ tomando $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para $n > 2$. Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado polinômio próprio (ou comutador), se ele é uma combinação linear de produtos de comutadores, isto é,*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{i,..,j}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}];\ \alpha_{i,..,j} \in K.$$

(Assumindo que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores.) Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$.

O próximo lema mostra a importância dos polinômios comutadores para encontrar uma base das identidades de uma álgebra unitária. Sua prova não é complicada e pode ser encontrada em ([16], proposição 4.3.3, pp 42-44). A demonstração está baseada no fato que $K\langle X\rangle$ é a álgebra universal envolvente de $L\langle X\rangle$ conhecido como Teorema de Witt.

Lema 2.5.7 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra unitária sobre um corpo infinito então todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas em $T(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}(X)$). Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra unitária sobre um corpo de característica 0 então todas identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem das suas identidades próprias multilineares.*

2.6 Identidades graduadas

Ao estudarmos identidades polinomiais ordinárias, em alguns momentos é interessante tratarmos de outros tipos de identidades, através das quais podemos obter informações sobre as identidades ordinárias. Desta idéia surgiram, por exemplo: as identidades polinomiais fracas, as identidades com involução e as identidades com graduação (graduadas). O nosso interesse nas últimas é que as mesmas estão relacionadas com as ordinárias. Nesta seção, vamos trabalhar com tais identidades e fazer um breve resumo da importante teoria estrutural dos T-ideais desenvolvida por Kemer. No que segue, fixamos G como um grupo abeliano aditivo.

Definição 2.6.1 *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser G-graduada, se $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ onde $\mathcal{A}_g$ é subespaço de $\mathcal{A}$ para todo $g \in G$ e $\mathcal{A}_g\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{g+h}$ para todos $g, h \in G$. Um elemento $\mathbf{a} \in \cup_{g\in G}\mathcal{A}_g$ é chamado homogêneo. Para todo elemento homogêneo $\mathbf{a}$, temos $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_g$ para algum $g \in G$. Dessa forma, o grau homogêneo de $\mathbf{a}$ é igual a g, e denotamos $w_G(\mathbf{a}) = g$. Se $\mathbf{a} = \sum_{\mathbf{a}_g\in\mathcal{A}_g} \mathbf{a}_g$, chamamos $\mathbf{a}_g$ de componente homogênea de grau g em $\mathbf{a}$.*

Definição 2.6.2 *Um subespaço $\mathcal{B}$ de uma álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ é dito ser G-graduado, se*

$$\mathcal{B} = \sum_{g\in G}\mathcal{B}_g \text{ onde } \mathcal{B}_g = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_g,$$

os quais denominaremos de subespaços homogêneos.

Definição 2.6.3 *Uma aplicação $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre álgebras G-graduadas é chamada homomorfismo G-graduado, se Φ é um homomorfismo que satisfaz $\Phi(\mathcal{A}_g) \subseteq \mathcal{B}_g$ para todo $g \in G$. De modo análogo, definimos isomorfismo, endomorfismo e automorfismo G-graduado.*

Os próximos dois lemas são de demonstração imediata.

Lema 2.6.4 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra G-graduada e $\mathcal{B}$ uma subálgebra de $\mathcal{A}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\mathcal{B}$ é subálgebra G-graduada de $\mathcal{A}$;

(2) $\mathcal{B}$ é álgebra G-graduada tal que $\mathcal{B}_g \subseteq \mathcal{A}_g$ para todo $g \in G$;

(3) As componentes homogêneas de cada elemento de $\mathcal{B}$ pertencem a $\mathcal{B}$;

(4) $\mathcal{B}$ é gerada por elementos homogêneos.

Lema 2.6.5 *Se $\mathcal{I}$ é um ideal G-graduado de uma álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ então $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é uma álgebra G-graduada considerando $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_g = \{a + \mathcal{I}/a \in \mathcal{A}_g\}$.*

Observação 2.6.6 *Seja $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo G-graduado de álgebras. Então, o $Ker(\Phi)$ é um ideal G-graduado de $\mathcal{A}$ e $\Phi(\mathcal{A})$ é uma subálgebra G-graduada de $\mathcal{B}$ tal que $(\Phi(\mathcal{A}))_g = \Phi(\mathcal{A}_g)$. Noutras palavras, pelo Lema 2.6.5, vale a versão graduada do teorema do Isomorfismo, isto é, a álgebra quociente $\mathcal{A}/\ker\Phi$ é isomorfa (como álgebra graduada) a $Im\Phi = \Phi(\mathcal{A})$.*

Em seguida, apresentaremos alguns exemplos de álgebras graduadas. Desde que uma mesma álgebra pode ter diferentes graduações, estes exemplos serão importantes para apresentarmos as graduações que usaremos no decorrer do texto, também denominadas de graduações canônicas (ou usuais).

Exemplo 2.6.7 *A álgebra de Grassmann E é $\mathbb{Z}_2$-graduada. De fato, seja E_0 o subespaço de E gerado por $\{1, e_{i_1} \ldots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \ ; k = 2, 4, \ldots\}$ e seja E_1 o subespaço de E gerado por $\{e_{i_1} \ldots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \ ; k = 1, 3, \ldots\}$. Assim, $E = E_0 \oplus E_1$ e facilmente podemos verificar que $E_i E_j \subseteq E_{i+j}$ para todos $i, j \in \mathbb{Z}_2$.*

Exemplo 2.6.8 *A partir da graduação do Exemplo 2.6.7 construiremos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para o quadrado tensorial da álgebra de Grassmann $E \otimes E$. Para tanto é suficiente considerarmos*

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \text{ e } (E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0).$$

Usando o fato que o produto tensorial é distributivo em relação a soma direta, é imediato verificar que

$$E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1.$$

Além disso, verifica-se diretamente que

$$(E \otimes E)_i (E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{i+j} \text{ para todos } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Portanto a álgebra $E \otimes E$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Exemplo 2.6.9 *A álgebra $M_{1,1}(E)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada. De fato, consideramos*

$$M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1$$

onde

$$(M_{1,1}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0 \right\} \text{ e } (M_{1,1}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1 \right\}$$

e verificamos diretamente que

$$(M_{1,1}(E))_i (M_{1,1}(E))_j \subseteq (M_{1,1}(E))_{i+j} \text{ para todos } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Exemplo 2.6.10 *Seja $\{X_g \mid g \in G\}$ uma família de conjuntos disjuntos e enumeráveis. Considerando $X = \cup_{g \in G} X_g$, a álgebra $K\langle X \rangle$ é denominada de álgebra livre G-graduada. Para uma variável $x \in X$, definimos $w_G(x) = g$ se $x \in X_g$. Recordamos que o conjunto de monômios $\{1, x_{i_1} \ldots x_{i_k} \mid x_{i_j} \in X \text{ e } n = 1, 2, \ldots\}$ é uma base de $K\langle X \rangle$. Para um tal monômio, digamos $m = x_{i_1} \ldots x_{i_n}$, definimos*

$w_G(m) = \sum_{j=1}^{n} w_G(x_{i_j})$ *como sendo o grau homogêneo do monômio. Se* $g \in G$, *denotamos por* $K\langle X\rangle_g$ *o subespaço gerado pelos monômios de grau* g. *Observando que*

$$K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{g+h} \text{ para todos } g, h \in G,$$

concluímos que $K\langle X\rangle$ *é de fato* G*-graduada.*

Definição 2.6.11 *Um ideal* $\mathcal{I}$ *numa álgebra* G*-graduada* $\mathcal{A}$ *é chamado de* T_G*-ideal se* $\mathcal{I}$ *é invariante por todos os endomorfismos* G*-graduados de* $\mathcal{A}$, *isto é,* $\Phi(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$ *para todo endomorfismo* G*-graduado* Φ *de* $\mathcal{A}$.

Definição 2.6.12 *Um polinômio* $0 \neq f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, *ou mesmo a expressão* $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, *é uma identidade polinomial* G*-graduada da álgebra* G*-graduada* $\mathcal{A}$, *se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } a_i \in \mathcal{A}_{g_i} \text{ onde } g_i = w_G(x_i) \text{ e } i = 1, 2, \ldots, n.$$

O conjunto $T_G(\mathcal{A})$ *de todas as identidades* G*-graduadas de* $\mathcal{A}$ *é um* T_G*-ideal de* $K\langle X\rangle$, *denominado de ideal das identidades* G*-graduadas da álgebra* A.

De modo análogo ao caso ordinário, as álgebras com identidades polinomiais graduadas possuem as mesmas propriedades no que diz respeito a T-ideais, variedades, polinômios multilineares, polinômios homogêneos, etc. Assim, por exemplo, dizemos que $h \in K\langle X\rangle$ é T_G conseqüência de f (ou que h segue de f como identidade graduada) se h pertence ao T_G-ideal gerado por f em $K\langle X\rangle$. Bem como, dado um conjunto de polinômios $\{f_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ a classe V de todas as álgebras G-graduadas satisfazendo as identidades $f_i = 0$ para todo i é chamada uma variedade de álgebras G-graduadas determinada pelo sistema de identidades $\{f_i \mid i \in I\}$. Deste modo adaptamos as propriedades das identidades ordinárias para as identidades graduadas.

Os resultados a seguir fornecem informações sobre identidades ordinárias a partir de identidades graduadas.

Lema 2.6.13 *Sejam* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *duas álgebras* G*-graduadas com respectivos* T*-ideais de identidades* G*-graduadas* $T_G(\mathcal{A})$ *e* $T_G(\mathcal{B})$. *Se* $T_G(\mathcal{A}) \subseteq T_G(\mathcal{B})$ *então* $T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})$.

Prova: Sejam $f(x_1, \ldots, x_m)$ uma identidade qualquer de $\mathcal{A}$ e

$$b_1 = \sum_{g \in G} b_{1_g}, \ldots, b_m = \sum_{g \in G} b_{m_g} \in \mathcal{B}.$$

Como $f \in T(\mathcal{A})$, temos que

$$f(\sum_{g\in G} x_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} x_{m_g}) \in T_G(\mathcal{A}) \subseteq T_G(\mathcal{B})$$

daí, vem que, $f(b_1, \ldots, b_m) = f(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{m_g}) = 0$.

Portanto, $T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})$. ∎

Corolário 2.6.14 *Se $T_G(\mathcal{A}) = T_G(\mathcal{B})$ então $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$.*

Observação 2.6.15 *(Contra-exemplo) Consideramos na álgebra de Grassmann E duas graduações. A primeira é a $\mathbb{Z}_2$-graduação $E = E_0 \oplus E_1$, a segunda é a graduação trivial. O polinômio $y_1y_2 = y_2y_1$, onde $deg_{\mathbb{Z}_2}(y_1) = deg_{\mathbb{Z}_2}(y_2) = 0$, é uma identidade graduada para álgebra E com a primeira graduação, mas não é identidade graduada para a segunda graduação. Portanto, uma mesma álgebra pode ter identidades graduadas diferentes conforme sua graduação.*

2.7 A Teoria de Kemer

Nesta seção faremos um breve resumo sobre a teoria estrutural dos T-ideais desenvolvida por Kemer para álgebras sobre corpos de característica zero. No que segue, K denotará um corpo de característica zero. O leitor interessado poderá encontrar mais informações nas monografias [19] e [12].

A teoria desenvolvida por Kemer mostrou que as PI-álgebras sobre corpos de característica 0, satisfazem muitas propriedades "boas" que as aproximam das álgebras comutativas. Começamos com os conceitos de T-ideais T-primos e T-semiprimos, que têm um papel extremamente importante nessa teoria.

Definição 2.7.1 *Diremos que:*

(1) Um T-ideal $\mathcal{S}$ é T-semiprimo se, para qualquer T-ideal $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^n \subseteq \mathcal{S}$ implicar que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}$;

(2) Um T-ideal $\mathcal{I}$ é T-primo se, para quaisquer T-ideais $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$ implicar que $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$.

Os próximos resultados podem ser encontrados nas Seções 2 e 3 do capítulo I de [19], e recomendamos este livro para mais detalhes e informações sobre esta teoria.

Teorema 2.7.2 *(Kemer)*

(1) *Seja $\mathcal{V} \neq \emptyset$ uma variedade. Então $\mathcal{V} = \mathcal{N}_m\mathcal{W}$, onde $\mathcal{N}_m$ é a maior variedade de todas as álgebras nilpotentes de índice menor ou igual a m, $\mathcal{W}$ é a maior subvariedade semiprima de $\mathcal{V}$ e o produto de duas variedades $\mathcal{N}\mathcal{M}$ consiste das álgebras $\mathcal{A}$ tendo um ideal $\mathcal{I}$ contido em $\mathcal{N}$ e cujo quociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ está em $\mathcal{M}$;*

(2) *O T-ideal $\mathcal{I}$ é semiprimo se, e somente se, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{I}_q$ onde os T-ideais $\mathcal{I}_j$ são T-primos.*

(3) *Os únicos T-ideais T-primos não triviais são:*

$$T(M_n(K)) \ , T(M_n(E)) \text{ e } T(M_{a,b}(E)).$$

Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada então

$$E(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0 \otimes E_0 \oplus \mathcal{A}_1 \otimes E_1$$

é denominada o envelope de Grassmann de $\mathcal{A}$.

Kemer demonstrou ainda os seguintes resultados, veja [19].

(1) Todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada;

(2) O T-ideal de qualquer álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada coincide com o T-ideal de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita;

(3) De (1) e (2) segue que todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita.

Dentre as consequências mais importantes dos resultados acima está a resposta afirmativa para o problema de Specht.

Como visto anteriormente, a hipótese sobre a característica do corpo ser zero permite-nos trabalhar apenas com identidades multilineares, e assim, podemos fazer uso das boas propriedades da multilinearidade. No desenvolvimento da teoria de Kemer, estas propriedades foram bastante utilizadas. Uma questão interessante é o quanto esta teoria depende das identidades multilineares? Observamos que essa questão está fortemente relacionada com uma possível generalização dos resultados obtidos por Kemer para álgebras sobre corpos infinitos de qualquer característica. Convém observar que, em característica positiva, a teoria de Kemer não se aplica diretamente. Um dos obstáculos é o surgimento de novos T-ideais T-primos, chamados de T-ideais irregulares, cuja descrição completa é ainda um problema em aberto. No entanto, vimos que identidades polinomiais graduadas podem ser usadas no estudo das identidades polinomiais ordinárias em álgebras sobre corpos de qualquer característica.

Ressaltamos que recentemente foi provado por Belov [11], Grishin [18] e Shchigolev [31] que o problema de Specht resolve-se em negativo sobre corpos de característica positiva.

2.8 Álgebras genéricas

Podemos observar no resumo sobre a teoria de Kemer, a importância das PI-álgebras $M_n(K)$, $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$. Existem construções algébricas genéricas para as álgebras relativamente livre destas álgebras. Para a álgebra $M_n(K)$ esta é a álgebra das matrizes genéricas introduzidas por Procesi [26], e para $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$ as construções genéricas foram dadas por Berele [8]. Outro caso importante para nossos objetivos é a construção dada por Lewin [23] para $U_m(\mathcal{A})$ quando $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{A}_1)T(\mathcal{A}_2)$. Vamos fazer um breve resumo sobre estas construções. Para mais casos, veja o Capítulo 4 e Capítulo 5, deste trabalho e as referências citadas acima e veja também [24] para aplicações.

Sejam $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ conjuntos de variáveis com $Y \cap Z = \emptyset$. Tomando $X = Y \cup Z$ denotamos por $K\langle X\rangle$ a álgebra livre gerada por X. Freqüentemente, denominamos os elementos de Y de pares e os elementos de Z de ímpares. Noutras palavras, definimos $w = w_{\mathbb{Z}_2} : X \to \mathbb{Z}_2$ pondo $w(x) = 0$ se $x \in Y$ e $w(x) = 1$ se $x \in Z$. Deste modo, os elementos de Y também são denominados de 0-variáveis e os de Z de 1-variáveis. Se $f = x_1x_2\dots x_k$ é um monômio, definimos $w(f) = w(x_1)+w(x_2)+\dots+w(x_k)$ (aqui consideramos a somatória módulo 2), e chamamos f de par se $w(f) = 0$, e de ímpar se $w(f) = 1$. Assim, $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \oplus K\langle X\rangle_1$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada onde $K\langle X\rangle_0$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelos monômios pares e $K\langle X\rangle_1$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelos monômios ímpares.

Definição 2.8.1 *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Os elementos de $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ são denominados de homogêneos. Além disso, cada elemento homogêneo* **a** *possui um* *grau w em $\mathbb{Z}_2$, isto é, $w(\mathbf{a}) = 0$ ou 1. A álgebra $\mathcal{A}$ é dita supercomutativa, se*

$$\mathbf{ab} = (-1)^{w(\mathbf{a})w(\mathbf{b})}\mathbf{ba} \text{ para todos } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1.$$

Exemplo 2.8.2 *A álgebra de Grassmann é sem dúvida o exemplo mais importante de álgebra supercomutativa.*

Definição 2.8.3 *Seja $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \oplus K\langle X\rangle_1$ a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada definida como acima. Para os monômios $f, g \in K\langle X\rangle$, consideramos as relações $fg = (-1)^{w(f)w(g)}gf$ e seja $\mathcal{I}$ o ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado gerado por estas relações. Quando $\operatorname{char} K = p > 0$, adicionamos $\{y_i^p \mid y_i \in Y\}$ ao conjunto de geradores de $\mathcal{I}$. A álgebra $K\langle Y; Z\rangle = K\langle X\rangle/\mathcal{I}$ é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada (pois herda a graduação de $K\langle X\rangle$) e é chamada de álgebra livre supercomutativa.*

Lema 2.8.4 *Sejam $K[Y]$ a álgebra de polinômios comutativos gerada por Y e $E(Z)$ a álgebra de Grassmann gerada pelo espaço vetorial com base Z. Então, as álgebras $K\langle Y; Z\rangle$ e $K[Y] \otimes E(Z)$ são isomorfas.*

Prova: Seja $\Psi : K[Y] \otimes E(Z) \to K\langle Y; Z\rangle = K\langle X\rangle/\mathcal{I}$ a aplicação definida por $\Psi(a \otimes b) = ab + \mathcal{I}$. É imediato que esta aplicação é um homomorfismo (de álgebras) sobrejetor. Sejam $a = y_1 \dots y_n \in K[Y]$ e $b = z_1 \dots z_m \in E(Z)$, ambos não nulos. Fazendo as substituições $y_1 = \cdots = y_n = 1$ e $z_1 = e_1, \dots, z_m = e_m$ onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é subconjunto da base de E, temos que $ab \notin T_2(E)$. Por outro lado, como $K\langle X\rangle/\mathcal{I}$ é a álgebra livre supercomutativa, temos que $\mathcal{I} = \cap Q$ |, onde Q corre sobre todos os T_2-ideais de álgebras supercomutativa. Em particular, $\mathcal{I} \subseteq T_2(E)$ e disto segue a injetividade de Ψ, como queríamos. ■

Lema 2.8.5 *(a) A álgebra $K\langle Y; Z\rangle$ é canonicamente $\mathbb{Z}_2$-graduada e livre na classe de todas as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas supercomutativas. Noutras palavras, para toda álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada supercomutativa $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, toda função $\Phi : Y \cup Z \to \mathcal{A}$ tal que $\Phi(Y) \subseteq \mathcal{A}_0$ e $\Phi(Z) \subseteq \mathcal{A}_1$ pode ser estendida a um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de álgebras;*

(b) Se $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$, $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ e $x_i = y_i + z_i$ onde $i = 1, 2, \dots$. Então, toda função $\Phi : x_i \to \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$; $i = 1, 2, \dots$ pode ser estendida a um homomorfismo homogêneo de $K\langle Y; Z\rangle \to \mathcal{A}$ de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Prova: Veja introdução de [8]. ■

Sejam n e m inteiros positivos e consideremos os conjuntos

$$Y = \{y_{ij}^{(q)} \mid i, j = 1, \dots, n; q = 1, \dots, m\} \text{ e } Z = \{z_{ij}^{(q)} \mid i, j = 1, \dots, n; q = 1, \dots, m\}.$$

Combinando a construção de Procesi [27] com a de Berele [8], definimos as seguintes matrizes com entradas em $K\langle Y; Z\rangle$:

(1) As $n \times n$ matrizes genéricas

$$A_q = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}^{(q)} E_{ij} \text{ onde } q = 1, \dots, m;$$

(2) As $n \times n$ matrizes genéricas com entradas supercomutativas

$$B_q = \sum_{i,j=1}^{n} (y_{ij}^{(q)} + z_{ij}^{(q)}) E_{ij} \text{ onde } q = 1, \dots, m;$$

(3) As (a, b) matrizes genéricas $(n = a + b)$

$$C_q = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}^{(q)} E_{ij} \text{ onde } t_{ij}^{(q)} = y_{ij}^{(q)} \text{ se } (i, j) \in \Delta_0 \text{ e } t_{ij}^{(q)} = z_{ij}^{(q)} \text{ se } (i, j) \in \Delta_1 \text{ e } q = 1, \dots, m.$$

Teorema 2.8.6 *(Procesi (i) e Berele ((ii),(iii)))*

(i) (veja [26])A álgebra gerada por $A_1, \dots, A_m$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida por $M_n(K)$, isto é, a álgebra $U_m(M_n(K))$;

(ii) (veja [8])A álgebra gerada por $B_1, \dots, B_m$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida por $M_n(K)$, isto é, a álgebra $U_m(M_n(E))$;

(iii) (veja [8])A álgebra gerada por $C_1, \dots, C_m$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida por $M_n(K)$, isto é, a álgebra $U_m(M_{a,b}(E))$.

Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ duas PI-álgebras com T-ideais, $T(\mathcal{A}_1)$ e $T(\mathcal{A}_2)$, respectivamente. Lewin em [23] apresentou o seguinte modelo genérico para a álgebra relativamente livre de posto m correspondente ao T-ideal $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{A}_1)T(\mathcal{A}_1)$.

Teorema 2.8.7 *(Lewin) Sejam $U_m(\mathcal{A}_1)$ e $U_m(\mathcal{A}_2)$ as álgebras relativamente livres geradas respectivamente por y_i e z_i onde $i = 1, \dots, m$. Considere o $(U_m(\mathcal{A}_1), U_m(\mathcal{A}_2))$ bimódulo livre $U_m = \sum_{i=1}^{m} U_m(\mathcal{A}_1) u_i U_m(\mathcal{A}_2)$. Então, a subálgebra gerada por:*

$$x_i = y_i E_{11} + z_i E_{22} + u_i E_{12} \text{ onde } i = 1, \dots, m$$

na álgebra das matrizes em blocos 2×2

$$\begin{pmatrix} U_m(\mathcal{A}_1) & U_m \\ 0 & U_m(\mathcal{A}_2) \end{pmatrix}$$

é isomorfa a $U_m(\mathcal{A})$ onde $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{A}_1)T(\mathcal{A}_2)$.

Capítulo 3

GK-dimensão de Álgebras

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos e propriedades da teoria de GK-dimensão necessários para uma boa compreensão da dissertação.

3.1 Conceitos Básicos e Propriedades

Iniciamos com a definição do nosso principal objeto de estudos, a dimensão de Gelfand-Kirillov.

Definição 3.1.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra gerada pelo conjunto finito $\{r_1, \ldots, r_m\}$, consideramos $\mathcal{V}^n = span\{r_{i_1} \ldots r_{i_n} / i_j = 1, \ldots, m\}$; $n = 1, 2, \ldots$ e $\mathcal{V}^0 = K$. A função de argumento inteiro e não-negativo n, definida por*

$$g_{\mathcal{V}}(n) = \dim_K(\mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^n) \ ; \ n = 1, 2, \ldots$$

é denominada a função de crescimento da álgebra $\mathcal{A}$ (com respeito a $\mathcal{V} = \mathcal{V}^1$).
A dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra $\mathcal{A}$ é definida por

$$GK\dim(\mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \log_n[g_{\mathcal{V}}(n)] = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log[g_{\mathcal{V}}(n)]}{\log(n)} \right\}.$$

O próximo resultado trata da independência da GK-dimensão de uma álgebra no que diz respeito ao seu conjunto de geradores.

Lema 3.1.2 *A GK-dimensão de uma álgebra finitamente gerada $\mathcal{A}$ não depende da escolha do conjunto de geradores.*

Prova: Sejam $\mathcal{V} = span\{r_1, \ldots, r_m\}$ e $\mathcal{W} = span\{s_1, \ldots, s_l\}$ subespaços gerados por dois conjuntos de geradores da álgebra $\mathcal{A}$. Sejam $\mathrm{GKdim}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$ e $\mathrm{GKdim}_{\mathcal{W}}(\mathcal{A})$ as GK-dimensões de $\mathcal{A}$ definidas por $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, respectivamente. Como $r_1, \ldots, r_m$ geram a álgebra $\mathcal{A}$, existe inteiro p tal que para todo $j = 1, \ldots, l$ temos que $s_j \in \mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^{pn}$. Assim,

$$\mathcal{W}^0 + \cdots + \mathcal{W}^n \subseteq \mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^{pn} \ ; \ n = 0, 1, \ldots$$

Daí, obtemos que

$$g_{\mathcal{W}}(n) = \dim_K(\mathcal{W}^0 + \cdots + \mathcal{W}^n) \leq \dim_K(\mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^{pn}) = g_{\mathcal{V}}(pn)$$

e aplicando logaritmo, vem que

$$\log_n(g_{\mathcal{W}}(n)) \leq \log_n(g_{\mathcal{V}}(pn)) = \frac{\log_{pn}(g_{\mathcal{V}}(pn))}{\log_{pn}(n)} = \frac{\log_{pn}(g_{\mathcal{V}}(pn))}{1 - \log_{pn}(p)}.$$

Agora aplicando limite,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} \log_n[g_{\mathcal{W}}(n)] &\leq \limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{\log_{pn}[g_{\mathcal{V}}(pn)]}{1 - \log_{pn}(p)} \right\} = \limsup_{pn \to \infty} \log_{pn}[g_{\mathcal{V}}(pn)] \\ &\leq \limsup_{n \to \infty} \log_n[g_{\mathcal{V}}(n)]. \end{aligned}$$

Agora, da definição, obtemos que

$$\text{GKdim}_{\mathcal{W}}(\mathcal{A}) \leq \text{GKdim}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}).$$

De modo similar obtemos a desigualdade contrária, e portanto

$$\text{GKdim}_{\mathcal{W}}(\mathcal{A}) = \text{GKdim}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$$

como queríamos. ■

Exemplo 3.1.3 *Seja* $\mathcal{A} = K[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ *a álgebra polinomial. Então,* *GK*$\dim(\mathcal{A}) = m$.

Prova: Observe que o número de monômios de grau menor ou igual a n em m variáveis é igual ao número de monômios de grau n em $m+1$ variáveis, pois se $a_1 + \cdots + a_m \leq n$, temos a seguinte correspondência biunívoca:

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \leftrightarrow x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \text{ onde } a_0 = n - (a_1 + \cdots + a_m)$$

entre estes conjuntos. Agora, com respeito ao conjunto usual de geradores de $\mathcal{A}$, temos

$$g(n) = \begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} \ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

que é um polinômio de grau m. A partir da definição de GK-dimensão, obtemos que

$$\text{GKdim}\,(\mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \log_n[g_{\mathcal{V}}(n)] = m$$

como desejado. ■

No próximo resultado apresentaremos algumas propriedades básicas da dimensão de Gelfand-Kirillov. Para demonstrações e mais detalhes recomendamos uma leitura de ([16] e [22]).

Proposição 3.1.4 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra.*

(1) Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}$ uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Então

$$GK\text{dim}\,(\mathcal{S}), GK\text{dim}\,(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \leq GK\text{dim}\,(\mathcal{A});$$

(2) Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra que é imagem homomórfica de $\mathcal{A}$. Então

$$GK\text{dim}\,(\mathcal{B}) \leq GK\text{dim}\,(\mathcal{A});$$

(3) $GK\text{dim}\,(\mathcal{A}) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Nos outros casos, temos que

$$GK\text{dim}\,(\mathcal{A}) = 1 \textit{ ou } GK\text{dim}\,(\mathcal{A}) \geq 2;$$

(4) Se $\mathcal{B} = \mathcal{A}[x_1, \ldots, x_m]$, com $x_1, \ldots, x_m$ variáveis comutando, então

$$GK\text{dim}\,(\mathcal{B}) = GK\text{dim}\,(\mathcal{A}) + m;$$

(5) Seja $\mathcal{A}$ comutativa. Então, a GK-dimensão de $\mathcal{A}$ é igual ao grau de transcendência de $\mathcal{A}$, isto é, ao número máximo de elementos algebricamente independentes;

(6) $GK\text{dim}\,(\mathcal{A}) < \infty$ se, e somente se, a função de crescimento de $\mathcal{A}$ com respeito a algum conjunto finito de geradores é de crescimento polinomial.

A seguir apresentaremos dois exemplos de álgebras que não possuem GK-dimensão finita. No primeiro a álgebra é finitamente gerada e no segundo a álgebra não é finitamente gerada.

Exemplo 3.1.5 *Seja $m > 1$. A álgebra associativa livre $\mathcal{A} = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ (polinômios não comutativos) não tem GK-dimensão finita.*

Prova: Para o conjunto usual de geradores de $\mathcal{A}$, a função de crescimento é dada por

$$g(n) = 1 + m + m^2 + \cdots + m^n \ ; \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Como esta função cresce mais rápido que qualquer função polinomial, da Proposição 3.1.4(6), obtemos que a GK-dimensão da álgebra $\mathcal{A}$ não pode ser finita. ■

Exemplo 3.1.6 *Seja $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[x]]$ a $\mathbb{R}$-álgebra das séries de potências de x com coeficientes em $\mathbb{R}$. Então, $GK\dim(\mathcal{A}) = \infty$.*

Prova: Vamos mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ satisfazendo $GK\dim(\mathcal{B}) \geq n$, daí concluímos facilmente que $GK\dim(\mathcal{A}) = \infty$.

Seja $\{r_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ um conjunto enumerável infinito de números reais que é linearmente independente sobre $\mathbb{Q}$. Então, o conjunto das funções $\{f_i(x) = e^{r_i x} \mid i = 1, 2, \ldots\}$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{R}$. Agora, via série de Maclaurin cada função deste conjunto pode ser pensada como um elemento da álgebra $\mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A}$ contém uma subálgebra isomorfa a álgebra polinomial

$$\mathbb{R}[y_1, y_2, \ldots y_n] \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Usando a Proposição 3.1.4(1) e o Exemplo 3.1.3, para cada n, obtemos que:

$$GK\dim(\mathcal{A}) \geq n.$$

Portanto

$$GK\dim(\mathcal{A}) = \infty,$$

como queríamos. ■

3.2 GK-dimensão e Alturas

Nesta seção vamos analisar como a GK-dimensão se comporta com respeito a altura, altura essencial e altura essencial generalizada de uma álgebra. Para mais informações e detalhes, veja ([5], [16], [17]).

Definição 3.2.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra gerada por $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Seja $\mathcal{H}$ um conjunto finito de monômios nos $r_i's$. Diremos que $\mathcal{A}$ é de altura $h = h_{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$ com respeito a $\mathcal{H}$ se, h é o menor inteiro positivo tal que $\mathcal{A}$ pode ser gerada, como espaço vetorial, pelos produtos*

$$U_{i_1}^{j_1} U_{i_2}^{j_2} \ldots U_{i_t}^{j_t} \text{ onde } U_{i_k} \in \mathcal{H} \text{ e } t \leq h.$$

Exemplo 3.2.2 *Sejam* $\mathcal{A} = K[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ *e* $\mathcal{H} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. *Então,* $h_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) = m$.

Prova: Como espaço vetorial, $\mathcal{A}$ é gerada pelos produtos $x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$ e os monômios que possuem todas as variáveis não podem ser escritos como combinação linear de monômios com menos que m potências distintas de x_i. ∎

O seguinte teorema, conhecido como Teorema de Shirshov sobre a altura, é um dos resultados de grande importância na teoria combinatorial das PI álgebras.

Teorema 3.2.3 *(Shirshov) Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra gerada por* $r_1, r_2, \ldots, r_m$. *Assuma que* $\mathcal{A}$ *satisfaz uma identidade polinomial de grau* $d > 1$. *Então,* $\mathcal{A}$ *tem altura finita com respeito ao seguinte conjunto de monômios*

$$\{r_{i_1} r_{i_2} \ldots r_{i_s} \mid i_j = 1, 2, \ldots m \text{ e } s < d\}$$

Prova: Veja ([16], Capítulo 9). ∎

O próximo resultado é devido a A. Berele (1982). Daremos uma idéia de sua demonstração via Teorema de Shirshov (a prova original pode ser encontrada em [22]).

Teorema 3.2.4 *(Berele) Toda PI-álgebra finitamente gerada* $\mathcal{A}$ *tem GK-dimensão finita.*

Prova: (Idéia) Seja $\mathcal{A}$ gerada por $\mathcal{V} = span\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ satisfazendo uma identidade polinomial de grau $d > 1$. Pelo Teorema de Shirshov, existe h tal que $\mathcal{A}$ é gerada como espaço vetorial pelos monômios

$$U_{i_1}^{j_1} U_{i_2}^{j_2} \ldots U_{i_t}^{j_t} \text{ onde } t \leq h$$

e os monômios $U_{i_1}, \ldots, U_{i_t}$ são de comprimento menor que d. Agora, $\mathcal{V}^n$ é gerado pelos monômios com $k_1|U_{i_1}| + \cdots + k_t|U_{i_t}| = n$. Daí, $\mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^n$ é subespaço do espaço gerado pelos monômios

$$U_{i_1}^{k_1} U_{i_2}^{k_2} \ldots U_{i_h}^{k_h} \text{ onde } k_1 + \cdots + k_h \leq n.$$

Seja p o número de monômios com comprimento menor que d ($p = 1 + m + \cdots + m^{d-1}$). O número de sequências de índices $(i_1, \ldots, i_h)$ é limitado por p^h. Assim, a dimensão $g_{\mathcal{V}}(n)$ de $\mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^n$ é limitada pelo produto entre o número de sequências $(i_1, \ldots, i_h)$ e o número de monômios de grau $\leq n$ em h variáveis

$$g_{\mathcal{V}}(n) \leq p^h \begin{pmatrix} n+h \\ h \end{pmatrix}$$

que é um polinômio de grau h. Daí, obtemos que

$$GK\dim(\mathcal{A}) \leq h,$$

onde h é a altura de $\mathcal{A}$. ■

Em resultados mais recentes, Belov (veja [12], p. 254-258), Asparuhov e Drensky em ([5],[17]), estudaram as noções de altura essencial e altura essencial generalizada, que passamos a descrever a seguir.

Definição 3.2.5 *Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dois subconjuntos finitos de uma PI-álgebra finitamente gerada $\mathcal{A}$.*

(i) O inteiro $h_{ess}(\mathcal{A})$ é denominado a altura essencial de $\mathcal{A}$ com respeito aos conjuntos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ se $h_{ess}(\mathcal{A})$ é o menor inteiro q com a propriedade que $\mathcal{A}$ é gerada como espaço vetorial pelos produtos:

$$v_1 u_1^{a_1} v_2 \dots v_q u_q^{a_q} v_{q+1} \ ; \ u_i \in \mathcal{P} \ ; \ v_j \in \mathcal{Q} \ ; \ a_k \geq 0.$$

(ii) Se $\mathcal{A}$ é uma subálgebra de uma álgebra finitamente gerada $\mathcal{B}$, então $h_{ess}(\mathcal{B})$ com respeito a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ (subconjuntos finitos de $\mathcal{B}$) é denominada a altura essencial generalizada de $\mathcal{A}$, que denotaremos por, $h_{gess}(\mathcal{A})$.

O nosso interesse no estudo de tais alturas é justificado a partir do seguinte resultado (para detalhes veja o Teorema 4.5 de [17]).

Teorema 3.2.6 *Para toda PI-álgebra finitamente gerada $\mathcal{A}$, temos que*

$$GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A}) \leq h_{ess}(\mathcal{A}) \ \text{ e } \ GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A}) \leq h_{gess}(\mathcal{A}).$$

Observe que este resultado pode ser usado para obter cota superior para GK-dimensão de PI-álgebras finitamente geradas.

3.3 Sobre a GK-dimensão de $U_m(\mathcal{A})$

Nesta seção discutiremos alguns resultados envolvendo a GK-dimensão da álgebra universal determinada por uma álgebra $\mathcal{A}$. Estes resultados são de importância fundamental para o restante deste trabalho.

Definição 3.3.1 *A álgebra relativamente livre (também chamada de universal) de posto m na variedade gerada pela álgebra $\mathcal{A}$ é definida por*

$$U_m(\mathcal{A}) = K\langle x_1, \dots, x_m\rangle/(T(\mathcal{A}) \cap K\langle x_1, \dots, x_m\rangle) = K\langle x_1, \dots, x_m\rangle/T_m(\mathcal{A}).$$

Lema 3.3.2 *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são duas álgebras PI-equivalentes então*

$$U_m(\mathcal{A}) = U_m(\mathcal{B}) \text{ e } GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{A})] = GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{B})].$$

Prova: Sendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras PI-equivalentes, temos que $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$. Daí, vem que $T_m(\mathcal{A}) = T_m(\mathcal{B})$ e $U_m(\mathcal{A}) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(\mathcal{A}) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(\mathcal{B}) = U_m(\mathcal{B})$. Portanto, $\mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{B})]$. ■

Observação 3.3.3 *Por várias vezes, no decorrer do texto, vamos usar a contra-positiva do Lema 3.3.2, isto é, PI-álgebras que possuem álgebras universais com dimensões de Gelfand-Kirillov diferentes não são PI-equivalentes.*

Lema 3.3.4 *Se $T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})$ então $GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{A})] \geq GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{B})]$.*

Prova: Sendo $T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})$ obtemos que $T_m(\mathcal{A}) \subseteq T_m(\mathcal{B})$. A partir disso obtemos o seguinte homomorfismo sobrejetor

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & U_m(\mathcal{A}) & \longrightarrow & U_m(\mathcal{B}) \\ & f + T_m(\mathcal{A}) & \longmapsto & f + T_m(\mathcal{B}). \end{array}$$

Daí, $U_m(\mathcal{B})$ é imagem homomórfica de $U_m(\mathcal{A})$ e da Proposição 3.1.4(2), obtemos que

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] \geq \mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{B})]$$

como queríamos. ■

Lema 3.3.5 *Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ então $GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{A})] \leq GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{B})]$.*

Prova: Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, temos $T(\mathcal{A}) \supseteq T(\mathcal{B})$ e em seguida usamos o Lema 3.3.4. ■

O próximo resultado é devido a Procesi e Berele. Para mais detalhes e demonstrações sugerimos uma leitura de ([26],[8]).

Teorema 3.3.6 *(Procesi (i) e Berele ((ii),(iii))) Seja K um corpo infinito de característica arbitrária. Então:*

(i) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_n(K))] = (m-1)n^2 + 1$;

(ii) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_n(E))] = (m-1)n^2 + 1$;

(iii) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_{a,b}(E))] = (m-1)(a^2 + b^2) + 2$.

A prova do Teorema acima em sua parte (ii), dada por Berele em [8], também nos fornece uma fórmula para calcular $\mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})]$ quando $T(\mathcal{A}) = T(M_{n_1}(K))\dots T(M_{n_s}(K))$.
A saber

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{GKdim}\, U_m(M_{n_i}(K)).$$

Corolário 3.3.7 *Seja K um corpo com $char\, K = 0$. Então:*

(i) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(E \otimes E)] = 2m$;

(ii) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] = (m-1)(a+b)^2 + 1$;

(iii) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E))] = (m-1)[(ac+bd)^2 + (ad+bc)^2] + 2$.

Prova: De acordo com o Teorema do Produto Tensorial de Kemer, temos
$T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$, $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E))$ e
$T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(E))$.
Agora, aplicando o Lema 3.3.2 e o Teorema 3.3.6 a prova segue. ■

Lema 3.3.8 *(Veja [8])* $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_aM_b)] = (m-1)(a^2+b^2) + 2$.

Prova: Sendo $T(M_aM_b) = T(M_a(K))T(M_b(K))$, do comentário após o Teorema 3.3.6, segue que $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_aM_b)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(M_a(K))] + \mathrm{GKdim}\,[U_m(M_b(K))]$.
Agora, usando o Teorema 3.3.6(i), obtemos que
$\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_aM_b)] = [(m-1)(a^2)+1] + [(m-1)(b^2)+1] = (m-1)(a^2+b^2)+2$. ■

Lema 3.3.9 $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_aM_b)] = (m-1)(a^2+b^2) + 2 = GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_{a,b}(E))]$.

Prova: Compare o Teorema 3.3.6(iii) com o Lema 3.3.8. ■

De acordo com [22], dadas duas K-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, temos que

(1) $\mathrm{GKdim}\,(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = \max\{\mathrm{GKdim}\,(\mathcal{A}), \mathrm{GKdim}\,(\mathcal{B})\}$;

(2) $\max\{\mathrm{GKdim}\,(\mathcal{A}), \mathrm{GKdim}\,(\mathcal{B})\} \leq \mathrm{GKdim}\,(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \leq \mathrm{GKdim}\,(\mathcal{A}) + \mathrm{GKdim}\,(\mathcal{B})$.

Nosso próximo objetivo será discutir o comportamento de (1) e (2) quando substituímos $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ por $U_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$ e $U_m(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, respectivamente.

Teorema 3.3.10 $GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})] = \max\{GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{A})], GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{B})]\}$.

Prova: Inicialmente, observamos que

(1) $T(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = T(\mathcal{A}) \cap T(\mathcal{B})$ e $T_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = T_m(\mathcal{A}) \cap T_m(\mathcal{B})$;

(2) $U_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(\mathcal{A}) \cap T_m(\mathcal{B})$.

Agora, sendo $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ usamos o Lema 3.3.5, para obter que

$$\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})], \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{B})] \leq \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})].$$

Daí, temos

$$\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})] \geq \max\{\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})], \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{B})]\}. \tag{3.1}$$

Consideramos agora a imersão natural

$$K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \hookrightarrow K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(\mathcal{A}) \oplus K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(\mathcal{B}),$$

ou seja,

$$U_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \hookrightarrow U_m(\mathcal{A}) \oplus U_m(\mathcal{B}).$$

Utilizando (1) da Proposição 3.1.4, obtemos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})] \leq \max\{\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})], \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{B})]\}. \tag{3.2}$$

A partir de (3.1) e (3.2), podemos afirmar que

$\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})] = \max\{\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})], \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{B})]\} = \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A}) \oplus U_m(\mathcal{B})]$

como desejado. ■

Teorema 3.3.11 *GK*dim $[U_m(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})] \geq \max\{$*GK*dim $[U_m(\mathcal{A})]$, *GK*dim $[U_m(\mathcal{B})]\}$.

Prova: Iniciamos observando que:

(1) $\mathcal{A} \otimes 1 \simeq \mathcal{A}$ e $1 \otimes \mathcal{B} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow T(\mathcal{A} \otimes 1) = T(\mathcal{A})$ e $T(1 \otimes \mathcal{B}) = T(\mathcal{B})$;

(2) $\mathcal{A} \otimes 1$ e $1 \otimes \mathcal{B}$ são subálgebras de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Usando (1) e (2), segue que

$T(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \subseteq T(\mathcal{A} \otimes 1) = T(\mathcal{A})$, $T(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \subseteq T(1 \otimes \mathcal{B}) = T(\mathcal{B})$ e $T(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \subseteq T(\mathcal{A}) \cap T(B)$.

Logo,

$$\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})] \geq \text{GKdim}\left[\frac{K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle}{T_m(\mathcal{A}) \cap T_m(\mathcal{B})}\right] = \max\{\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})], \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{B})]\}.$$

Portanto, $\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})] \geq \max\{\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})], \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{B})]\}$. ■

Observação 3.3.12 *Para $m > 1$, não é valida a desigualdade*

$$GK\dim[U_m(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})] \leq GK\dim[U_m(\mathcal{A})] + GK\dim[U_m(\mathcal{B})].$$

De fato, sejam $\mathcal{A} = \mathcal{B} = M_{1,1}(E)$ e K um corpo com $char\, K = 0$.
Sendo

$$GK\dim[U_m(\mathcal{A})] = GK\dim[U_m(\mathcal{B})] = 2m$$

obtemos que

$$GK\dim[U_m(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})] = GK\dim[U_m(M_{1,1} \otimes M_{1,1})] = GK\dim[U_m(M_{2,2}(E))] = 8m - 6.$$

Agora, se $m > 1$, então

$$GK\dim[U_m(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})] = 8m - 6 > 4m = GK\dim[U_m(\mathcal{A})] + GK\dim[U_m(\mathcal{B})].$$

O próximo resultado nos fornece uma cota inferior para a GK-dimensão da álgebra universal determinada pela álgebra $A_{a,b}$.

Lema 3.3.13 $GK\dim[U_m(A_{a,b})] \geq (m-1)(a^2+b^2)+2$.

Prova: Iniciamos observando que $M_{a,b}(E) \subseteq A_{a,b}$. Do Lema 3.3.5, sabemos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(M_{a,b}(E))] \leq \text{GKdim}\,[U_m(A_{a,b})].$$

De acordo com o Teorema 3.3.6(iii), concluímos que

$$(m-1)(a^2+b^2)+2 \leq \text{GKdim}\,[U_m(A_{a,b})],$$

como queríamos. ■

Capítulo 4

Alguns Cálculos Importantes

Neste capítulo vamos apresentar o cálculo da dimensão de Gelfand-Kirillov de algumas álgebras universais de posto m. Tais cálculos são importantes pois mostram como calcular a GK-dimensão de forma explícita.

4.1 As álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$

Nesta seção construiremos um modelo genérico apropriado para a álgebra $U_m(E \otimes E)$, sobre corpos infinitos com $\operatorname{char} K = p > 2$. Em seguida usaremos esse modelo para calcular $GK\dim[U_m(E \otimes E)]$. Mais ainda, apresentaremos uma nova prova da não PI-equivalência das álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$.

Para $\operatorname{char} K = 0$, já vimos que

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(E \otimes E)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E))] = 2m.$$

Para $\operatorname{char} K = p > 2$, Azevedo, Fidelis e Koshlukov em ([6], [7]), usando identidades graduadas, mostraram os seguintes resultados

(1) Se $\mathcal{A} = K \oplus M_{1,1}(E')$, então $T(\mathcal{A}) = T(K \oplus M_{1,1}(E')) = T(E \otimes E)$;

(2) As álgebras $\mathcal{A}$ e $M_{1,1}(E)$ não são PI-equivalentes. Ademais,

$$T(\mathcal{A}) = T(E \otimes E) \supsetneq T(M_{1,1}(E)).$$

Nosso objetivo nesta seção será mostrar que para corpos infinitos com $\operatorname{char} K = p > 2$, temos

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(E \otimes E)] = m.$$

Lema 4.1.1 *GK*dim $[U_m(\mathcal{A})] \geq m$.

Prova: Sendo $K \subset \mathcal{A} = K \oplus M_{1,1}(E')$ e $m = \text{GKdim}\,[U_m(K)]$, da Proposição 3.1.4(1), vem que $m = \text{GKdim}\,[U_m(K)] \leq \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})]$ (poderíamos ter usado o Teorema 3.3.6(i), com $n = 1$, para obter que $\text{GKdim}\,[U_m(K)] = m$). ■

Vamos construir um modelo genérico para a álgebra $\mathcal{A}$. Seja Ω a álgebra supercomutativa livre com geradores pares $x_{11}^{(i)}, x_{22}^{(i)}$, e geradores ímpares $y_{12}^{(i)}, y_{21}^{(i)}$, onde $i = 1, \ldots, m$. Sejam $x_1, \ldots, x_m$ elementos transcendentes independentes sobre K e seja $L = K(x_1, \ldots, x_m)$ seu respectivo corpo de funções racionais. Defina as matrizes

$$X_i = x_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; Y_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & y_{12}^{(i)} \\ y_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \text{ onde } i = 1, \ldots, m.$$

Seja $\mathcal{U}_L$ a L-álgebra gerada pelas matrizes $Z_i = X_i + Y_i$ com $i = 1, \ldots, m$. Então $\mathcal{U}_L$ pode ser considerada como uma K-álgebra, a qual denotaremos por $\mathcal{U}$. O seguinte lema é imediato.

Lema 4.1.2 *A álgebra $\mathcal{U}$ é isomorfa à álgebra universal $U_m(\mathcal{A})$.*

Proposição 4.1.3 *GK*dim $[U_m(\mathcal{A})] \leq m$.

Prova: Utilizamos o seguinte resultado obtido por Regev em [29], Teorema 2.1. Se $\text{char}\, K = p > 2$, então $\text{GKdim}\,[U_m(M_n(E'))] = 0$ (note que E' satisfaz a identidade $x^p = 0$).

Claramente, temos a inclusão

$$U_m(\mathcal{A}) = \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} = U_m(M_2(E'))[X_1, \ldots, X_m];$$

aqui estamos considerando $U_m(M_2(E'))$ como a álgebra gerada pelas matrizes $Y_1, \ldots, Y_m$ dadas acima. Observando que $U_m(\mathcal{A}) \subseteq U_m(M_2(E'))K[X_1, \ldots, X_m]$, podemos usar o Lema 3.3.5 e a Proposição 3.1.4(4), para obter que

$$\begin{aligned}
\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] &\leq \text{GKdim}\,\{U_m(M_2(E'))K[X_1, \ldots, X_m]\} \\
&= \text{GKdim}\,[U_m(M_2(E'))] + \text{GKdim}\,(K[X_1, \ldots, X_m]) \\
&= \text{GKdim}\,[U_m(M_2(E'))] + m \\
&= m.
\end{aligned}$$

A COTA SUPERIOR USANDO ALTURA

Observamos inicialmente que $U_m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{V}$ onde $\mathcal{V}$ é gerada por elementos sob a forma

$$X_1^{a_1} \dots X_m^{a_m}.g \text{ onde } g \in U_m(M_2(E')) \text{ e } a_i \geq 0.$$

Por Regev ([29], Teorema 2.1), sabemos que existe somente uma quantidade finita de tais g's, digamos $g_1, \dots, g_t$. Agora, considerando $\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_m\}$ e $\mathcal{Q} = \{g_1, \dots, g_t\}$, obtemos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] \leq \text{GKdim}\,(\mathcal{V}) \leq h_{ess}(\mathcal{V}) = h_{gess}(U_m(\mathcal{A})) = h_{gess}(\mathcal{U}) \leq m.$$

Portanto, $\text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] \leq m$. ■

Usando o Lema 4.1.1 e a Proposição 4.1.3, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.4 *$GK\text{dim}\,[U_m(E \otimes E)] = m$ quando $\text{char}\, K = p > 2$.*

Corolário 4.1.5 *As álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: Suponha, por contradição, que as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ são PI-equivalentes, isto é $T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$. Então $T_m(E \otimes E) = T_m(M_{1,1}(E))$ e daí $U_m(E \otimes E) = U_m(M_{1,1}(E))$. Como $\text{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E))] = 2m$, obtemos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(E \otimes E)] = \text{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E))] = 2m,$$

contradizendo o Teorema 4.1.4. Portanto, as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ não podem ser PI-equivalentes. ■

4.2 As álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$

Nesta seção vamos construir um modelo genérico para a álgebra $U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)$ sobre corpos infinitos com $\text{char}\, K = p > 2$. Em seguida usaremos esse modelo para calcular $GK \dim U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)$. Mais ainda, apresentaremos uma nova prova da não PI-equivalência das álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$.

Para $\text{char}\, K = 0$, já vimos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)] = \text{GKdim}\,[U_m(M_2(E))] = 4m - 3.$$

Para $\text{char}\, K = p > 2$, Azevedo, Fidelis e Koshlukov em ([6], [7]), usando identidades graduadas, mostraram os seguintes resultados:

(1) Se $\mathcal{A} = A_{1,1}$, então $T(\mathcal{A}) = T(M_{1,1}(E) \otimes E)$;

(2) As álgebras $\mathcal{A}$ e $M_{1,1}(E) \otimes E$ não são PI-equivalentes. Mais ainda,

$$T(\mathcal{A}) = T(M_{1,1}(E) \otimes E) \supsetneq T(M_2(E)).$$

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que para corpos infinitos com char $K = p > 2$, temos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)] = 2m.$$

Lema 4.2.1 *GKdim $[U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)] = GK$dim $[U_m(\mathcal{A})]$.*

Prova: Sendo $T(M_{1,1}(E) \otimes E) = T(\mathcal{A})$, segue que

$$T_m(M_{1,1}(E) \otimes E) = T_m(\mathcal{A}) \text{ e } U_m(M_{1,1}(E) \otimes E) = U_m(\mathcal{A}).$$

Portanto, $\text{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)] = \text{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})]$. ■

Lema 4.2.2 *GKdim $[U_m(\mathcal{A})] \geq 2m$.*

Prova: Sendo $M_{1,1}(E) \subseteq A_{1,1}$ é fácil ver que

$$\text{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E))] \leq \text{GKdim}\,[U_m(A_{1,1})].$$

Usando o Teorema 3.3.6(iii) com $a = b = 1$, obtemos que $\text{GKdim}\,[U_m(A)] \geq 2m$ (poderíamos ter usado o Teorema 3.3.11 e que $\text{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E))] = 2m$ e $\text{GKdim}\,[U_m(E)] = m$). ■

Vamos construir um modelo genérico para a álgebra $\mathcal{A} = A_{1,1}$. Seja

$$\begin{pmatrix} a^* & b \\ c & d^* \end{pmatrix} \in A_{1,1} = \mathcal{A} \text{ onde } a^*, d^* \in E \text{ e } b, c \in E'.$$

Podemos escrever

$$\begin{pmatrix} a^* & b \\ c & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ onde } a_1, a_2 \in K \text{ e } a, b, c, d \in E'.$$

Sendo char $K = p \neq 2$, podemos representar estas matrizes sob a forma

$$\begin{pmatrix} a^* & b \\ c & d^* \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde $b_1 = (a_1 + a_2)/2$ e $b_2 = (a_1 - a_2)/2$.

Agora sejam

$$X_i = r_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; Y_i = t_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } W_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & x_{12}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} \end{pmatrix},$$

aqui r_i e t_i são variáveis comutando e $x_{kl}^{(i)}$ são geradores livres de Ω'.

Consideramos $\mathcal{U}$ como sendo a K-álgebra gerada pelas matrizes $Z_i = X_i + Y_i + W_i$ onde $i = 1, \ldots, m$. O seguinte lema é imediato.

Lema 4.2.3 *A álgebra $\mathcal{U}$ é isomorfa a álgebra universal $U_m(\mathcal{A}) = U_m(A_{1,1})$.*

Lema 4.2.4 *$GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{A})] \leq 2m$.*

Prova: Escrevemos as matrizes W_i como $W_i = W_i^1 + W_i^2$ onde

$$W_i^1 = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & 0 \\ 0 & x_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \text{ e } W_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & x_{12}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & 0 \end{pmatrix}.$$

É imediato verificar que os X_i são centrais, Y_i comutam entre si e que Y_i comutam com W_j^1 e anticomutam com W_j^2. Daí, obtemos que $Y_i W_j = W_j' Y_i$ onde $W_j' = W_j^1 - W_j^2$.

Escrevemos $X_{m+1}, \ldots, X_{2m}$ para $Y_1, \ldots, Y_m$, respectivamente. Então todo elemento de $\mathcal{U}$ pode ser escrito como combinação linear de elementos sob a forma

$$g_1 X_1^{a_1} g_2 \ldots g_{2m} X_{2m}^{a_{2m}} g_{2m+1} \text{ onde } g_i \in U_m[M_2(E')]\ ,\ a_i \geq 0 \text{ e } i = 1, \ldots, 2m.$$

Se $\mathcal{V}$ é o espaço gerado pelos elementos acima, então, obviamente, ele é fechado com respeito a multiplicação, e portanto $\mathcal{V}$ é uma álgebra. Por Regev ([29], Teorema 2.1), existe quantidade finita de tais g_i's, digamos $g_1, \ldots, g_t$. Consideramos os conjuntos

$$\mathcal{P} = \{X_1, \ldots, X_{2m}\} \text{ e } \mathcal{Q} = \{g_1, \ldots, g_t\},$$

e a partir destes, obtemos que:

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] \leq \mathrm{GKdim}\,(\mathcal{U}) \leq h_{gess}(\mathcal{U}) = h_{ess}(\mathcal{V}) \leq 2m.$$

Daí, temos que $\mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] \leq 2m$. ■

Usando os Lemas 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.4, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.5 *$GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)] = 2m$ quando $\mathrm{char}\,K = p > 2$.*

Corolário 4.2.6 *As álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: Suponha por contradição que as álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ são PI-equivalentes, isto é, que $T(M_{1,1}(E)) \otimes E = T(M_2(E))$.

Assim, $T_m(M_{1,1}(E) \otimes E) = T_m(M_2(E))$, logo $U_m(M_{1,1}(E) \otimes E) = U_m(M_2(E))$ e então temos $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(M_2(E))]$.

Obtemos $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)] = 2m \neq 4m - 3 = \mathrm{GKdim}\,[U_m(M_2(E))]$. Portanto, as álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ não podem ser PI-equivalentes. ■

4.3 GK-dimensão de $U_m(A_{2,1})$

Nesta seção vamos construir um modelo genérico para a álgebra $U_m(A_{2,1})$. A partir deste modelo vamos calcular $GK\dim[U_m(A_{2,1})]$.

Vamos construir um modelo genérico para a álgebra $U_m(A_{2,1})$ de modo similar ao que foi feito para as álgebras $\mathcal{A}$ e $A_{1,1}$. Sejam $Z_i = X_i^* + Y_i^*$ onde $i = 1, 2, \ldots, m$ e

$$X_i^* = \begin{pmatrix} x_{11}^{*(i)} & x_{12}^{*(i)} & 0 \\ x_{21}^{*(i)} & x_{22}^{*(i)} & 0 \\ 0 & 0 & x_{33}^{*(i)} \end{pmatrix} \text{ e } Y_i^* = \begin{pmatrix} y_{11}^{*(i)} & y_{12}^{*(i)} & y_{13}^{*(i)} \\ y_{21}^{*(i)} & y_{22}^{*(i)} & y_{23}^{*(i)} \\ y_{31}^{*(i)} & y_{32}^{*(i)} & y_{33}^{*(i)} \end{pmatrix}.$$

Aqui $x_{kl}^{*(i)}$ são variáveis comutando (correspondentes à parte escalar das respectivas entradas de $A_{2,1}$). Mais ainda, $y_{kl}^{*(i)}$ são geradores da álgebra livre supercomutativa sem unidade Ω'. A partir disso temos o seguinte lema.

Lema 4.3.1 *Seja $\mathcal{U}$ a álgebra gerada por $Z_1, \ldots, Z_m$. Então, $\mathcal{U} \simeq U_m(A_{2,1})$.*

Observe que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_1$ onde $\mathcal{U}_1$ é a álgebra gerada pelos X_i^* e pelos Y_i^* onde $i = 1, \ldots, m$. Seguindo ([8, seção 5]) mudamos o modelo de $\mathcal{U}_1$ da seguinte forma.

Passando de K para o fecho algébrico do corpo $K(x_{kl}^{*(i)})$ nós diagonalizamos a matriz genérica X_1^*. Isto é feito por conjugação por alguma matriz T, e obtemos as matrizes $TX_i^*T^{-1}$ onde $i = 1, \ldots, m$. Mais ainda, podemos escolher a matriz T de modo que $TX_2^*T^{-1}$ tenha a seguinte forma

$$TX_2^*T^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

para elementos algebricamente independentes α e α_i. Como as entradas das matrizes são algebricamente independentes sobre K podemos substituir X_1^* por $TX_i^*T^{-1}$, e estas geram uma álgebra isomorfa a U.

Portanto, para simplificar a notação, identificamos X_1^* com $TX_i^*T^{-1}$ e assumimos que $x_{12}^{*(1)} = x_{21}^{*(1)} = 0$ e $x_{12}^{*(2)} = x_{21}^{*(2)}$. Vamos usar a notação $\mathcal{U}_1$ para a álgebra gerada pelas novas matrizes X_i^* e Y_i^* onde $i = 1, \ldots, m$. Vamos construir uma nova álgebra $\mathcal{U}_2$ tal que $U_m(A_{2,1}) \subseteq \mathcal{U}_2$ e satisfazendo $\mathrm{GKdim}\,(\mathcal{U}_2) \leq 5m - 3$.

Primeiro trabalhamos com a matriz diagonal $diag(x_{11}^{(1)}, x_{22}^{(1)}, x_{33}^{(1)})$. Neste caso, escrevemos $X_1^* = X_1 + X_2 + X_3$, tomando

$$X_1 = x_{11}^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; X_2 = x_{22}^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; X_3 = x_{33}^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

aqui $x_{11}^{(1)} = (x_{11}^{*(1)} + x_{33}^{*(1)})/2$, $x_{22}^{(1)} = (x_{11}^{*(1)} - x_{22}^{*(1)})/2$, $x_{33}^{(1)} = (x_{22}^{*(1)} - x_{33}^{*(1)})/2$.

Agora considerando a matriz simétrica, escrevemos $X_2^* = X_4 + X_5 + X_6 + Y_1^{(2)}$, tomando

$$X_4 = x_{11}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; X_5 = x_{22}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$$X_6 = x_{33}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; Y_1^{(2)} = x_{12}^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

aqui $x_{ii}^{(2)}$ são obtidos da mesma forma que $x_{ii}^{(1)}$ e $x_{12}^{(2)} = x_{12}^{*(2)}$.

Finalmente, quando $i \geq 3$ escrevemos $X_i^* = X_7^{(i)} + X_8^{(i)} + X_9^{(i)} + Y_1^{(i)} + Z_1^{(i)}$ tomando

$$X_7^{(i)} = x_{11}^{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; X_8^{(i)} = x_{22}^{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; X_9^{(i)} = x_{33}^{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$$Y_1^{(i)} = x_{12}^{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; Z_1^{(i)} = x_{21}^{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

aqui os $x_{kk}^{(i)}$ são obtidos da mesma forma que os $x_{kk}^{(1)}$, mais ainda $x_{12}^{(i)} = (x_{12}^{*(i)} + x_{21}^{(i)})/2$ e $x_{21}^{(i)} = (x_{12}^{*(i)} - x_{21}^{(i)})/2$.

Agora renomeamos as matrizes X_i, $X_i^{(j)}$, $Y_i^{(j)}$ e $Z_i^{(j)}$ como segue. Escrevemos

$$X_7 = X_7^{(3)},\ X_8 = X_8^{(3)},\ X_9 = X_9^{(3)},$$
$$X_{10} = X_7^{(4)},\ X_{11} = X_8^{(4)},\ X_{12} = X_9^{(4)}, \ldots, X_{3m} = X_9^{(m)},$$
$$Y_1 = Y_1^{(2)},\ Y_2 = Y_1^{(3)},\ \ldots, Y_{m-1} = Y_1^{(m)},$$
$$Z_1 = Z_1^{(3)},\ Z_2 = Y_1^{(4)},\ \ldots, Z_{m-2} = Z_1^{(m)}.$$

Lema 4.3.2 *Os elementos X_i, Y_i e Z_i satisfazem as relações*

$$X_iX_j = X_jX_i \ ;\ Y_iY_j = Y_jY_i \ ;\ Z_iZ_j = Z_jZ_i;$$

$$X_iY_j = \pm Y_jX_i \ ;\ X_iZ_j = \pm Z_jX_i \ ;\ Y_iZ_j = Z_jY_i.$$

Prova: Podemos fazer tal verificação através de um cálculo direto. ■

Agora, consideramos

$$\mathcal{B}_1 = U_m(M_3(E'))[X_1, \ldots, X_{3m}]\ ,\ \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1[Y_1, \ldots, Y_{m-1}] \text{ e } \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2[Z_1, \ldots, Z_{m-2}].$$

Lema 4.3.3 $U_m(A_{2,1}) \subseteq \mathcal{B}_3$.

Prova: Segue imediatamente da definição de $\mathcal{B}_3$. ■

Para uma melhor compreensão vamos novamente renomear as variáveis, como segue. Escrevemos $X_{3m+j} = Y_j$ onde $j = 1\ldots, m-1$ e $X_{4m-1+j} = Z_j$ onde $j = 1\ldots, m-2$. Finalmente, chamaremos de $\mathcal{U}_2$ a álgebra $\mathcal{B}_3$.

Lema 4.3.4 $GK\dim\left[U_m(A_{2,1})\right] \leq 5m-3$.

Prova: Como $U_m(A_{2,1}) \subseteq \mathcal{U}_2$ é suficiente provarmos que $h_{ess}(\mathcal{U}_2) \leq 5m-3$. Mas, todo elemento de $\mathcal{U}_2$ é combinação linear de elementos sob a forma

$$g_1X_1^{a_1}g_2\ldots g_{5m-3}X_{5m-3}^{a_{5m-3}}g_{5m-2} \text{ onde } g_i \in U_m[M_3(E')]\ ;\ a_i \geq 0 \text{ e } i = 1, \ldots, 5m-3.$$

Novamente usando Regev ([29], Teorema 2.1), existe quantidade finita de tais g's, digamos $g_1, \ldots, g_t$. Consideramos agora os seguintes conjuntos

$$\mathcal{P} = \{X_1, \ldots, X_{5m-3}\} \text{ e } \mathcal{Q} = \{g_1, \ldots, g_t\}.$$

A partir destes conjuntos obtemos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(A_{2,1})] \leq h_{gess}(U_m(A_{2,1})) = h_{ess}(\mathcal{U}_2) \leq 5m-3.$$

Portanto,

$$\text{GKdim}\,[U_m(A_{2,1})] \leq 5m-3$$

como desejado. ■

Usando os Lemas 3.3.13 e 4.3.4, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.5 $GK\text{dim}\,[U_m(A_{2,1})] = 5m-3.$

4.4 GK-dimensão de $U_m(A_{2,2})$

Nesta seção construiremos um modelo genérico para a álgebra $U_m(A_{2,2})$. A partir deste modelo vamos calcular $GK\dim[U_m(A_{2,2})]$.

Como na seção prévia iniciamos com a construção de um modelo genérico apropriado para a álgebra $U_m(A_{2,2})$. Todo elemento A de $A_{2,2}$ pode ser escrito sob a forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & \alpha_7 & \alpha_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \text{ onde } \alpha_i \in K \ ; \ a_{ij} \in E'.$$

Portanto, consideramos $Z_i = X_i^* + Y_i^*$ com $i = 1, \ldots, m$, onde

$$X_i^* = \begin{pmatrix} x_1^{*(i)} & x_2^{*(i)} & 0 & 0 \\ x_3^{*(i)} & x_4^{*(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_5^{*(i)} & x_6^{*(i)} \\ 0 & 0 & x_7^{*(i)} & x_8^{*(i)} \end{pmatrix} \ ; \ Y_i^* = \begin{pmatrix} y_{11}^{*(i)} & y_{12}^{*(i)} & y_{13}^{*(i)} & y_{14}^{*(i)} \\ y_{21}^{*(i)} & y_{22}^{*(i)} & y_{23}^{*(i)} & y_{24}^{*(i)} \\ y_{31}^{*(i)} & y_{32}^{*(i)} & y_{33}^{*(i)} & y_{34}^{*(i)} \\ y_{41}^{*(i)} & y_{42}^{*(i)} & y_{43}^{*(i)} & y_{44}^{*(i)} \end{pmatrix}.$$

Aqui $x_j^{*(i)}$ são variáveis comutativas e $y_{kl}^{*(i)}$ são geradores livres da álgebra supercomutativa livre sem unidade Ω'. Denotamos por $\mathcal{U}$ a K-álgebra gerada por $Z_1, \ldots, Z_m$. Apartir da construção do modelo genérico acima, temos o seguinte resultado.

Lema 4.4.1 *A álgebra $\mathcal{U}$ é isomorfa a álgebra genérica (que é relativamente livre) de posto m na variedade de álgebras determinada por $A_{2,2}$.*

Seguindo o que foi feito em ([8], seção 5) podemos assumir que X_1^* é diagonal e X_2^* é simétrica. Toda matriz diagonal é combinação linear das matrizes

$$X_1^1 = diag(1,1,1,1) \ ; \ X_2^1 = diag(1,1,-1,-1);$$

$$X_3^1 = diag(1,-1,1,-1) \ ; \ X_4^1 = diag(1,-1,-1,1).$$

Em tais combinações temos que dividir por 4 (lembremos que $\mathrm{char}\, K = p \neq 2$). Sejam

$$Z_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ Z_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Y_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ Y_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É imediato que toda matriz simétrica em bloco 2×2 com diagonal secundária nula é combinação linear de X_1^1, X_1^2, X_1^3, X_1^4, Z_1^2 e Z_2^2, e toda matriz de ordem 4 em bloco 2×2 com diagonal secundária nula é combinação linear das seis acima mais as matrizes Y_1^3 e Y_2^3. Os denominadores que aparecem são 2 ou 4. Considere as seguinte matrizes

$$X_i = x_i X_1^1 \text{ com } i = 1, \ldots, m \ ; \ X_i = x_i X_2^1 \text{ com } i = m+1, \ldots, 2m;$$

$$X_i = x_i X_3^1 \text{ com } i = 2m+1, \ldots, 3m \ ; \ X_i = x_i X_4^1 \text{ com } i = 3m+1, \ldots, 4m.$$

Aqui x_i, com $i = 1 \ldots, 4m$ são variáveis comutativas. Mais ainda,

$$Z_i = z_i Z_1^2, \text{ com } i = 1, \ldots, m-1 \ ; \ Z_i = z_i Z_2^2, \text{ com } i = m, \ldots, 2m-2;$$

aqui todos z_i são varáveis comutativas, e

$$Y_i = y_i Y_1^3, \text{ com } i = 1, \ldots, m-2 \ ; \ Y_i = y_i Y_2^3, \text{ com } i = m-1, \ldots, 2m-4,$$

onde todos z_i são variáveis comutativas.

Através de um cálculo direto verificamos que para todos i, j possíveis temos:

$$X_iX_j = X_jX_i,\ Y_iY_j = Y_jY_i,\ Z_iZ_j = Z_jZ_i,\ X_iY_j = \pm Y_jX_i,\ X_iZ_j = \pm Z_jX_i \text{ e}$$
$$Y_iZ_j = \pm Z_jY_i.$$

A demonstração do próximo lema é imediata.

Lema 4.4.2 *Sejam $T_1, \ldots, T_m$ as m matrizes genéricas para $M_4(E')$ e sejam $R_1 = X_1 + X_{m+1} + X_{2m+1} + X_{3m+1} + T_1$, $R_2 = X_2 + X_{m+2} + X_{2m+2} + X_{3m+2} + Z_1 + Z_m + T_2$, $R_i = X_i + X_{m+i} + X_{2m+i} + X_{3m+i} + Z_{i-1} + Z_{2i-2} + Y_{i-2} + Y_{2i-4} + T_i$, $i \geq 3$. Então, a álgebra gerada pelas matrizes $R_1, \ldots, R_m$ é isomorfa a álgebra genérica $U_m(A_{2,2})$.*

Agora, renomeando Z_i como X_{4m+i} para $i = 1, \ldots, 2m-2$ e Y_i como X_{6m-2+i} para $i = 1, \ldots, 2m-4$, obtemos $X_iX_j = \pm X_jX_i$ para todos valores possíveis de i e j. Seja

$$\mathcal{U}_1 = ((U_m(M_4(E'))[X_1, \ldots, X_{4m}])[X_{4m+1}, \ldots, X_{6m-2}])[X_{6m-1}, \ldots, X_{8m-6}].$$

Como antes, facilmente mostramos que $\mathcal{U}_1$ é gerado pelos elementos

$$g_1X_1^{a_1}g_2 \ldots g_{8m-6}X_{8m-6}^{a_{8m-6}}g_{8m-5}\ ;\ a_i \geq 0 \text{ e } g_j \in U_m(M_4(E')).$$

Por Regev ([29], Teorema 2.1), temos quantidade finita de g's, digamos $g_1, \ldots, g_s$. Considerando os conjuntos,

$$\mathcal{P} = \{X_1, \ldots, X_{8m-6}\} \text{ e } \mathcal{Q} = \{g_1, \ldots, g_s\},$$

obtemos que $h_{ess}(\mathcal{U}_1) \leq 8m - 6$.

Lema 4.4.3 *$GK\dim[U_m(A_{2,2})] \leq 8m - 6$.*

Prova: Basta observarmos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(A_{2,2})] \leq \text{GKdim}\,(\mathcal{U}_1) \leq h_{ess}(\mathcal{U}_1) = h_{gess}(U_m(A_{2,2})) \leq 8m - 6.$$

Portanto,

$$\text{GKdim}\,[U_m(A_{2,2})] \leq 8m - 6$$

como queríamos. ■

Usando os Lemas 3.3.13 e 4.4.3, obtemos diretamente o seguinte resultado.

Teorema 4.4.4 *$GK\dim[U_m(A_{2,2})] = 8m - 6$.*

Corolário 4.4.5 *As álgebras $A_{2,2}$ e $A_{3,1}$ não são PI-equivalentes.*

Prova: Suponha por contradição que as álgebras $A_{2,2}$ e $A_{3,1}$ são PI-equivalentes, isto é, que $T(A_{2,2}) = T(A_{3,1})$. Usando o Lema 3.3.2, temos que

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(A_{2,2})] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(A_{3,1})]. \tag{4.1}$$

Já vimos em seções anteriores que

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(A_{2,2})] = 8m - 6 \text{ (Lema 4.4.4)} \tag{4.2}$$

e

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(A_{3,1})] \geq 10m - 8 \text{ (Lema 3.3.13)}. \tag{4.3}$$

Agora de 4.2 e 4.3, para $m > 1$, obtemos que

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(A_{2,2})] = 8m - 6 < 10m - 8 \leq \mathrm{GKdim}\,[U_m(A_{3,1})]. \tag{4.4}$$

Observe que a desigualdade em 4.4 contradiz 4.1. Portanto, as álgebras $A_{2,2}$ e $A_{3,1}$ não podem ser PI-equivalentes. ■

Capítulo 5

Resultados Recentes

5.1 GK-dimensão de $U_m(A_{a,b})$

Nesta seção apresentaremos um modelo genérico para a álgebra $U_m(A_{a,b})$. A partir deste modelo vamos calcular $GK\dim[U_m(A_{a,b})]$. Como aplicação, concluiremos que as álgebras $A_{a,b}$ e M_{a+b} não são PI-equivalentes. Lembramos que sobre corpos com característica zero as álgebras $A_{a,b}$ e $M_{a+b}(E)$ são PI-equivalentes (isto segue do fato que E e E' são PI-equivalentes em $\operatorname{char} K = 0$, veja [25]) e daí,

$$GK\dim[U_m(A_{a,b})] = GK\dim[U_m(M_{a+b}(E))] = (m-1)(a+b)^2 + 1.$$

No que segue vamos assumir que $\operatorname{char} K = p > 2$.

Agora construiremos o modelo genérico para a álgebra $A_{a,b}$. Seja $W_r = \widetilde{X_r} + \widetilde{Y_r} + \widetilde{Z_r}$; $r = 1, 2, \ldots, k$, com

$$\widetilde{X_r} = (a_{ij})_{n\times n} \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} \widetilde{x_{ij}}^{(r)}, & \text{se} \quad (i,j) \in \Delta_0, \\ 0, & \text{se} \quad (i,j) \in \Delta_1, \end{cases}$$

onde $\Delta_0 = \{(i,j); 1 \le i,j \le a \text{ ou } a+1 \le i,j \le a+b\}$
e $\Delta_1 = \{(i,j); 1 \le i \le a \text{ e } a+1 \le j \le a+b \text{ ou } a+1 \le i \le a+b \text{ e } 1 \le j \le a\}$

$$\widetilde{Y_r} = (\widetilde{y_{ij}}^{(r)})_{n\times n} \text{ e } \widetilde{Z_r} = (\widetilde{z_{ij}}^{(r)})_{n\times n}.$$

Aqui $\widetilde{x_{ij}}^{(r)}$ são variáveis comutando e elas correspondem a parte escalar das respectivas entradas das matrizes em $A_{a,b}$; $\widetilde{y_{ij}}^{(r)}$ são geradores livres de Ω_0' e $\widetilde{z_{ij}}^{(r)}$ são geradores livres de Ω_1. Lembramos que $\Omega' = \Omega_0' \oplus \Omega_1$ é a álgebra supercomutativa livre sem unidade.

Lema 5.1.1 *Se $\mathcal{U}$ é a álgebra gerada por $W_1, \ldots, W_m$, então $\mathcal{U} \simeq U_m(A_{a,b})$.*

Prova: A prova é análoga ao caso das matrizes genéricas. Veja também a prova do Lema 7 de [7]. ∎

Note que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_1$ onde $\mathcal{U}_1$ é a álgebra gerada por $\widetilde{X_r}$, $\widetilde{Y_r}$ e $\widetilde{Z_r}$ onde $r = 1, 2, \ldots, k$. Do mesmo modo como foi feito em [[8], Seção 5], mudamos o modelo de $\mathcal{U}_1$.

Passando de K para o fecho algébrico do corpo $K(\widetilde{x_{ij}}^{(r)})$ podemos diagonalizar a matriz "genérica" $\widetilde{X_1}$. Isto é feito através da conjugação por uma matriz T, de onde obtemos as matrizes $X_r = T\widetilde{X_r}T^{-1}$, $Y_r = T\widetilde{Y_r}T^{-1}$, e $Z_r = T\widetilde{Z_r}T^{-1}$, $r = 1, 2, \ldots, k$. Mantemos a notação $\mathcal{U}_1$ para a álgebra gerada por X_r, Y_r e Z_r, aqui $X_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{ii}$.

No restante da prova assumiremos que $k = 2$ para simplificar as notações. Para obter um limite superior para a GK-dimensão de $\mathcal{U}$ imergimos $\mathcal{U}_1$ em um anel maior $\mathcal{R}$. Este anel $\mathcal{R}$ é gerado pelo conjunto

$$\{\lambda_i E_{ii}, x_{ij}^{(2)} E_{ij} \mid (i,j) \in \Delta_0\} \cup \{y_{ij}^{(r)} E_{ij}, z_{ij}^{(r)} E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq k; r = 1, 2\}.$$

Para tornar as notações mais simples escrevemos x_{ij} para $x_{ij}^{(2)}$, y_{ij} para $y_{ij}^{(1)}$, t_{ij} para $y_{ij}^{(2)}$, z_{ij} para $z_{ij}^{(1)}$, w_{ij} para $z_{ij}^{(2)}$. Assim, $\mathcal{R}$ pode ser pensado como uma versão "split" de $\mathcal{U}_1$.

Lema 5.1.2 *Sejam $\mathcal{V}$ o espaço vetorial com base $u_1, \ldots, u_n$, e*

$$r = \prod_i \lambda_i^{\alpha_i} \prod_{i,j} x_{ij}^{a_{ij}} \prod_{i,j} y_{ij}^{b_{ij}} \prod_{i,j} t_{ij}^{c_{ij}} \prod_{i,j} z_{ij}^{d_{ij}} \prod_{i,j} w_{ij}^{f_{ij}} e_{st}.$$

Aqui os índices de x_{ij} e λ_i vão sobre Δ_0, e os índices de y_{ij}, t_{ij}, z_{ij}, w_{ij} vão sobre todos $1 \leq i$, $j \leq k$; α_i, a_{ij} são inteiros positivos, b_{ij}, $c_{ij} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ e d_{ij}, $f_{ij} \in \{0, 1\}$. Suponha que $r \in \mathcal{R}$. Então

$$\sum_{i,j} (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + f_{ij})(u_i - u_j) = u_s - u_t \text{ em } \mathcal{V}.$$

Prova: Veja ([8], Lema 15). ∎

Definimos $f_{s,t}(m)$ como o número de sêxtuplas ordenadas $(\alpha_i, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, f_{ij})$ que satisfazem as condições acima e a restrição adicional que a soma das entradas é $\leq m$. Seja $f(m) = \sum_{s,t} f_{s,t}(m)$. A função $f(m)$ é um limite superior para a função de crescimento de $\mathcal{R}$. Assim passamos a estimar a função $f(m)$.

Primeiro observamos que as entradas de uma tal sêxtupla satisfazem a equação

$$\sum_{i,j}(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}+d_{ij}+f_{ij})(u_i-u_j)=u_s-u_t$$

para cada escolha de s e t. Mais ainda, obtemos que

$$\sum_i \alpha_i+\sum_{i,j}(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}+d_{ij}+f_{ij})\leq m.$$

Assim, existe uma quantidade finita de possibilidades de escolhas para s, t, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} e f_{ij} que satisfazem as duas condições acima, e o número destas possibilidades é $\leq m^2 2^m p^m$.

Fixamos agora s, t, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} e f_{ij} satisfazendo as duas condições acima. Então os a_{ij} devem satisfazer

$$\sum_{i,j}a_{ij}(u_i-u_j)=u \text{ e } \sum_{i,j}a_{ij}=m'$$

onde

$$\begin{aligned} u &= u_s-u_t-\sum_{i,j}(b_{ij}+c_{ij}+d_{ij}+f_{ij})(u_i-u_j) \text{ e}\\ m' &= m-\sum_{i,j}(b_{ij}+c_{ij}+d_{ij}+f_{ij}). \end{aligned}$$

Lema 5.1.3 *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{V}$ um hiperplano de dimensão d. Seja $L(n)$ o conjunto de pontos de $\mathcal{V}$ cujas coordenadas estão todas em $\{0,1,\dots,n\}$. Então, o número de pontos em $\mathcal{H}\cap L(n)$ é menor ou igual a $(n+1)^d$.*

Prova: Vamos usar indução sobre d. O caso $d=0$ é trivial. Seja $\mathcal{H}_i$ o hiperplano de codimensão 1 no qual a primeira coordenada é constante igual a 1. Sendo $\dim\mathcal{H}>1$ alguma coordenada não é constante em $\mathcal{H}$, vamos assumir que esta é a primeira. Portanto, $\dim(\mathcal{H}_i\cap\mathcal{H})=d-1$ e, por hipótese de indução $\mathcal{H}_i\cap\mathcal{H}\cap L(n)$ tem cardinalidade $\leq(n+1)^{d-1}$. Agora, $\mathcal{H}\cap L(n)$ é a união sobre $i=0,1,\dots,n$ de $\mathcal{H}_i\cap\mathcal{H}\cap L(n)$, e daí tem cardinalidade $\leq(n+1)^d$. ■

Sejam $\mathcal{V}$ o espaço vetorial com base $\{\alpha_i,a_{ij}\mid(i,j)\in\Delta_0\}$ e $\mathcal{W}$ o espaço vetorial com base $\{u_i-u_j\mid(i,j)\in\Delta_0\}$. O conjunto

$$\mathcal{H}=\{(\alpha_i,a_{ij})\mid\sum_{i,j}a_{ij}(u_i-u_j)=u\}$$

é um hiperplano em $\mathcal{V}$ de codimensão $k-2$ e assim ele é de dimensão $(a^2+b^2+k)-(k-2)=a^2+b^2+2$. Isto, juntamente com o Lema 5.1.3, prova o seguinte resultado.

Lema 5.1.4 *$f(n)$ é limitada superiormente por um polinômio de grau a^2+b^2+2.*

Teorema 5.1.5 *$GK\mathrm{dim}\,[U_m(A_{a,b})]=(m-1)(a^2+b^2)+2$.*

Prova: Do Lemma 3.3.13, vem que GKdim $[U_m(A_{a,b})]\geq(m-1)(a^2+b^2)+2$.

Se $m=2$, então

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(A_{a,b})]\leq\limsup\log_n[f(n)]\leq a^2+b^2+2.$$

Se $m>2$, a prova é similar, pois cada nova matriz genérica adiciona (a^2+b^2) novas variáveis $x_{ij}^{(r)}$ e o conjunto de relações permanece o mesmo. A partir disso, $f(n)$ passa a ser limitado superiormente por um polinômio de grau $(m-1)(a^2+b^2)+2$, donde obtemos

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(A_{a,b})]\leq\limsup\log_n[f(n)]\leq(m-1)(a^2+b^2)+2.$$

Portanto,

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(A_{a,b})]=(m-1)(a^2+b^2)+2$$

como queríamos. ■

Corolário 5.1.6 *As álgebras $A_{a,b}$ e $A_{c,d}$, onde $(a,b)\neq(c,d)$, não são PI-equivalentes.*

Prova: As álgebras não podem ser PI-equivalentes pois suas álgebras universais têm GK-dimensões diferentes. ■

Corolário 5.1.7 *([3], Teorema 1) As álgebras $A_{a,b}$ e $M_{a+b}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: As álgebras não podem ser PI-equivalentes pois suas álgebras universais têm GK-dimensões diferentes. ■

Observação 5.1.8 *O Teorema 5.1.5 generaliza os seguintes resultados provados em [1] e discutidos nas seções 4.4, 4.5 e 4.6 do capítulo anterior.*

(1) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(A_{1,1})]=2m$;

(2) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(A_{2,1})]=5m-3$;

(3) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(A_{2,2})]=8m-6$.

Observação 5.1.9 *([4]) De modo similar mostramos que*

$$GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_{a,b}(E))]=(m-1)(a^2+b^2)+2.$$

5.2 GK-dimensão de $U_m(M_{a,a}(E) \otimes E)$

Nesta seção mostraremos como obter $GKdimU_m(M_{a,a}(E) \otimes E)$. Como aplicação concluiremos que as álgebras $M_{a,a}(E) \otimes E$ e $M_{2a}(E)$ não são PI-equivalentes. Lembramos que sobre corpos de característica zero, as álgebras $M_{a,a}(E) \otimes E$ e $M_{2a}(E)$ são PI-equivalentes, e daí obtemos que

$$GK\dim[U_m(M_{a,a}(E) \otimes E)] = GK\dim[U_m(M_{2a}(E))] = (m-1)(2a)^2 + 1.$$

Iniciamos lembrando que as álgebras $M_{a,a}(E) \otimes E$ e $A_{a,a}$ são PI-equivalentes. Daí, obtemos que $U_m(M_{a,a}(E) \otimes E) = U_m(A_{a,a})$.

Teorema 5.2.1 $GK\dim[U_m(M_{a,a}(E) \otimes E)] = (m-1)(2a^2) + 2.$

Prova: Usando o Teorema 5.1.5 juntamente com as observações feitas acima, obtemos que $GK\dim[U_m(M_{a,a}(E) \otimes E)] = GK\dim[U_m(A_{a,a})] = (m-1)(2a^2) + 2.$ ■

Corolário 5.2.2 *As álgebras $M_{a,a}(E) \otimes E$ e $M_{2a}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: As álgebras não podem ser PI-equivalentes, pois suas álgebras universais possuem GK-dimensão diferentes. Basta observarmos que

(1) De Berele ([8], Teorema 7), sabemos que $GK\dim[U_m(M_{2a}(E))] = (m-1)(2a)^2+1$;

(2) Do Teorema 5.2.1, obtemos que $GK\dim[U_m(M_{a,a}(E) \otimes E)] = (m-1)(2a^2) + 2.$

Usando (1) e (2) obtemos que $GK\dim[U_m(M_{2a}(E))] \neq GK\dim[U_m(M_{a,a}(E) \otimes E)]$. ■

5.3 GK-dimensão de $U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)$

Nesta seção mostraremos como obter $GK\dim U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)$. Como aplicação concluiremos que as álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ não são PI-equivalentes. Lembramos que sobre corpos de característica zero, as álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ são PI-equivalentes, e daí obtemos que

$$GK\dim[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] = GK\dim[U_m(M_{a+b}(E))] = (m-1)(a+b)^2 + 1.$$

Lema 5.3.1 $GK\dim[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] \geq (m-1)(a^2+b^2) + 2$

Prova: Como $M_{a,b}(E)$ mergulha em $M_{a,b}(E) \otimes E$ obtemos que

$$T(M_{a,b}(E) \otimes E) \subseteq T(M_{a,b}(E))$$

e assim

$$GK \dim[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] \geq GK \dim[U_m(M_{a,b}(E))] = (m-1)(a^2+b^2)+2$$

■

Lema 5.3.2 $GK \dim[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] \leq (m-1)(a^2+b^2)+2$

Prova: De acordo com ([2], Teorema 23) sabemos que

$$T(A_{a,b}) \subseteq T(M_{a,b}(E) \otimes E)$$

e assim

$$GK \dim[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] \leq GK \dim[U_m(A_{a,b})] = (m-1)(a^2+b^2)+2$$

■

Usando os Lemas 5.3.1 e 5.3.2 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.3 $GK \dim[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] = (m-1)(a^2+b^2)+2$

Corolário 5.3.4 *([4],Teorema 27)As álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: As álgebras não podem ser PI-equivalentes, pois suas álgebras universais possuem GK-dimensão diferentes. Basta observarmos que

(1) De Berele ([8], Teorema 7), sabemos que

$$GK \dim U_m(M_{a+b}(E)) = (m-1)(a+b)^2+1;$$

(2) Do Teorema 5.3.3 obtemos que $GK \dim[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] = (m-1)(a^2+b^2)+2$.

Usando (1) e (2) obtemos que $GK \dim U_m(M_{a+b}(E)) \neq GK \dim U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)$. ■

5.4 GK-dimensão de $U_m(M_n(E)\otimes E)$

Nesta seção mostraremos como obter $GK\dim[U_m(M_n(E)\otimes E)]$. Como aplicação concluiremos que as álgebras $M_n(E)\otimes E$ e $M_{n,n}(E)$ não são PI-equivalentes. Lembramos que sobre corpos de característica zero, as álgebras $M_n(E)\otimes E$ e $M_{n,n}(E)$ são PI-equivalentes, e daí obtemos que

$$GK\dim[U_m(M_{n,n}(E)\otimes E)] = GK\dim[U_m(M_{2n}(E))] = (m-1)(2n)^2+1.$$

Lema 5.4.1 $GK\dim[U_m(M_n(E)\otimes E)] \geq (m-1)n^2+1$

Prova: Como $M_n(K)$ mergulha em $M_n(K)\oplus M_{n,n}(E^{'})$ obtemos que

$$T(M_n(K)\oplus M_{n,n}(E^{'})) \subseteq T(M_n(K))$$

de acordo com ([2], Lema 10) sabemos que

$$T(M_n(K)\oplus M_{n,n}(E^{'})) = T(M_n(E)\otimes E)$$

e assim

$$T(M_n(E)\otimes E) \subseteq T(M_n(K)).$$

Por conseguinte, concluímos que

$$GK\dim[U_m(M_n(E)\otimes E)] \geq GK\dim[U_m(M_n(K))] = (m-1)n^2+1$$

■

Lema 5.4.2 $GK\dim[U_m(M_n(E)\otimes E)] \leq (m-1)n^2+1$

Prova: Veja ([2], Lema 30) ■

Usando os Lemas 5.4.1 e 5.4.2 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.4.3 $GK\dim[U_m(M_n(E)\otimes E)] = (m-1)n^2+1$

Corolário 5.4.4 *As álgebras $M_n(E)\otimes E$ e $M_{n,n}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: As álgebras não podem ser PI-equivalentes, pois suas álgebras universais possuem GK-dimensão diferentes. Basta observarmos que

(1) De Berele ([8], Teorema 7), sabemos que $GK\dim[U_m(M_{n,n}(E))] = (m-1)2n^2+2$;

(2) Do Teorema 5.4.3, obtemos que $GK\dim U_m(M_n(E)\otimes E) = (m-1)n^2+1$.

Usando (1) e (2) concluímos que $GK\dim U_m(M_{n,n}(E)) \neq GK\dim U_m(M_n(E)\otimes E)$. ■

5.5 Uma Conjectura de S.M. Alves

Nesta seção apresentaremos uma Conjectura, devido a S.M. Alves, a cerca da dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra universal de posto m, no que diz respeito ao produto tensorial de álgebras T-primas pela álgebra de Grassmann.

Conjectura 5.5.1 *Seja A uma álgebra T-prima sobre um corpo infinito K com característica positiva $p > 2$. Então*

$$GK \dim U_m(A) = GK \dim U_m(A \otimes E)$$

Observação 5.5.2 *Neste trabalho, mostramos que a conjectura 5.5.1 é valida para as álgebras T-primas E, $M_{a,b}(E)$, $M_n(E)$ e $M_n(K)$, ou seja*

(1) $GK \dim U_m(E) = GK \dim U_m(E \otimes E)$;

(2) $GK \dim U_m(M_{a,b}(E)) = GK \dim U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)$;

(3) $GK \dim U_m(M_n(E)) = GK \dim U_m(M_n(E) \otimes E)$;

(4) $GK \dim U_m(M_n(K)) = GK \dim U_m(M_n(K) \otimes E)$, *neste caso basta observar que* $M_n(E) \simeq M_n(K) \otimes E$.

A maior dificuldade que encontramos para trabalharmos com a conjectura acima é que não temos uma descrição das álgebras T-primas para corpos de característica positiva. Ademais, a conjectura é trivialmente falsa quando o corpo é de característica zero.

Referências Bibliográficas

[1] S.M. Alves, P. Koshlukov, *Polynomial Identities of Algebras in Positive Characteristic*, J. Algebra, 305(2), 1149 − 1165, 2006.

[2] S.M. Alves, Marello Fidelis, *The Gelfand-Kirillov dimension of $M_{a,b}(E) \otimes E$ and $M_n(E) \otimes E$ in Positive Characteristic*, Serdica Math, submetido, 2009.

[3] S.M. Alves, *PI non-equivalence in Positive Characteristic*, Manuscripta Math, aceito, 2008.

[4] S.M. Alves, *PI (non)equivalence and Gelfand-Kirillov dimension*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 58,109 − 124, 2009.

[5] T. Asparuhov, *The Shirshov theorem and Gelfand-Kirillov dimension for finitely generated PI algebras (in Bulgarian)*, MSc Thesis, Dept. Math. Infor., Univ. of Sofia, 1995.

[6] S.S. Azevedo, M. Fidellis and P. Koshlukov, *Tensor Product Theorems in positive characteristic*, J. Algebra 276(2), 836 − 845, 2004.

[7] S.S. Azevedo, M. Fidellis and P. Koshlukov, *Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic*, Commun. Algebra, 33(4), 1011 − 1022, 2005.

[8] A. Berele, *Generic Verbally Prime Algebras and their GK-dimensions*, Commun. Algebra, 21(5), 1487 − 1504, 1993.

[9] A. Berele, *Classification theorems for verbally semiprime algebras*, Commun. Algebra, 21(5), 1505 − 1512, 1993.

[10] A. Ya. Belov, *On the rationality of Hilbert series of relatively free algebras (in Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk 52, N_o.2, 150 − 154, 1997.

[11] A. Ya. Belov, *Counterexamples to the Specth problem*, Mathematic of the USSR-Sbornik, 191, $N_o.3-4$, $329-340$, 2000.

[12] A.K. Belov, L.H. Rowen, *Computational Aspects of Polynomial Identities*, A.K. Peters, Wellesley, 2005.

[13] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel J. Math., 80(3), $323-335$, 1992.

[14] O. M. Di Vincenzo and V. Nardozza, *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra*, Commun. Algebra 31(3), $1453-1474$, 2003.

[15] O. M. Di Vincenzo and V. Nardozza, $Z_{k+l}\times Z_2$*-graded polynomial identities for* $M_{k,l}(E)\otimes E$, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 108, $27-39$, (2000).

[16] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag PTE.LTD, 1999.

[17] V. Drensky, *Gelfand-Kirillov dimension of PI algebras*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 198, Denker, New York, $97-113$, 1998.

[18] A. V. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals in characteristic* 2 *withot finite basis property(in Russian)*, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika, 5, $N_o.1$, $101-118$, 1999.

[19] A. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations Math. Monographs 87, Amer. Math. Soc., Providence. RI, 1991.

[20] A. Kemer, *The standard identities in characteristic p: A conjecture of I.B. Volichenko*, Israel J. Math., 81(3), $343-355$, 1993.

[21] P. Koshlukov and S.S. Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math., 81(3), $343-355$, 2002.

[22] G.R. Krause and T.H. Lenagan, *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*, Pitman Publ., London, 1985.

[23] J. Lewin, *A matrix representation for associative algebras*, I, Trans. Amer. Math. Soc., 188, $293-308$, 1974.

[24] V.T. Markov, *The Gelfand-Kirillov dimension: Nilpotency representability, Non matrix varieties (in Russian)*, Siberian School on Varieties of Algebraic Systems, Abstracts, Barnaul, $43-45$, 1988.

[25] A. Popov, *Identities of the tensor square of a Grassmann algebra*, Algebra Logic, 21(4), $296-316$, 1982.

[26] C. Procesi, *Non-commutative Affine Rings*, Atti Accad. Naz. Lincei menh. Cl. Sci. Fis. Mat Natur. Sez I, 8(8), $239-255$, 1967.

[27] C. Procesi, L. Small, *Endomorphism Rings of Modules over PI-Algebras*, Math. Z., 106, $178-180$, 1968.

[28] A. Regev, *Tensor products of matrix algebras over the Grassmann algebra*, J. Algebra, 133(2), $512-526$, 1990.

[29] A. Regev, *Grasmann algebras over finite fields*, Commun. Algebra, 19, $1829-1849$, 1991.

[30] A. Regev, *Existence of identities in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*, Israel J. Math., 11, $131-152$, 1972.

[31] V.V. Shchigolev, *Examples of infinitely basable T-spaces*, Mathematics of the USSR-Sbornik, 191, $N_o.3-4$, $459-476$, 2000.

[32] W. Specth, *Gesetze in ringen*, Math. Z., 52, $557-589$, 1950.

[33] K. Zhevlakov, A. Slinko, I. Shestakov and A. Shirshov, *Rings that are Nearly associative*, Pure Appl. Math., 104, Academic Press, New York - London, 1982.