

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA**

**APRIMORAMENTO DE TÉCNICAS DE SÍNTESE
DE FUNÇÕES UTILIZADAS EM SIMULAÇÕES
DE TRANSITÓRIOS ELETROMAGNÉTICOS**

ESTÁCIO TAVARES WANDERLEY NETO

CAMPINA GRANDE – PARAÍBA – BRASIL

Mai de 2003

**APRIMORAMENTO DE TÉCNICAS DE SÍNTESE DE FUNÇÕES
UTILIZADAS EM SIMULAÇÕES DE TRANSITÓRIOS
ELETROMAGNÉTICOS**

Dissertação submetida ao colegiado dos cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Mestre em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Energia.

Estácio Tavares Wanderley Neto
Orientando

Washington Neves, Ph.D.
Orientador

Campina Grande – Paraíba – Brasil
Abril de 2003



W245a Wanderley Neto, Estacio Tavares
Aprimoramento de tecnicas de sintese de funcoes
utilizadas em simulacoes de transitorios eletromagneticos /
Estacio Tavares Wanderley Neto. - Campina Grande, 2003.
73 f.

Dissertacao (Mestrado em Engenharia Eletrica) -
Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciencias
e Tecnologia.

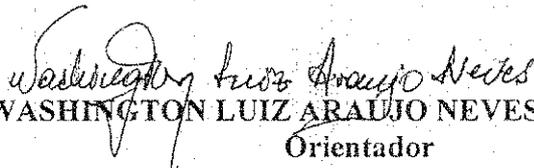
1. Transientes - Engenharia Eletrica 2. Simulacoes 3.
Linha de Transmissao 4. Ajuste de Funcoes - Engenharia
Eletrica 5. Dissertacao I. Neves, Washington Luiz Araujo
II. Universidade Federal de Campina Grande - Campina Grande
(PB) III. Título

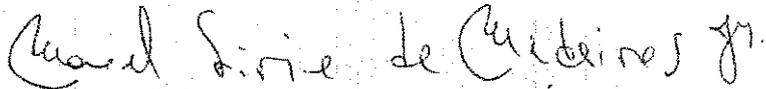
CDU 621.3.015.3(043)

APRIMORAMENTO DE TÉCNICAS DE SÍNTESE DE FUNÇÕES UTILIZADAS EM
SIMULAÇÕES DE TRANSITÓRIOS ELETROMAGNÉTICOS

ESTÁCIO TAVARES WANDERLEY NETO

Dissertação Aprovada em 09.05.2003


WASHINGTON LUIZ ARAUJO NEVES, Ph.D., UFCG
Orientador


MANOEL FIRMINO DE MEDEIROS JÚNIOR, Dr., UFRN
Componente da Banca


BENEMAR ALENCAR DE SOUZA, D.Sc., UFCG
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB
Maio - 2003

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, agradeço pela saúde, pela disposição, pela fé, e por todos aqueles que Ele colocou em meu caminho para me orientar e ajudar quando necessário, para me corrigir quando eu errasse, para me consolar quando eu estivesse triste, e principalmente para compartilhar comigo todos os meus momentos de alegria.

Ao meu pai, que mesmo ausente fisicamente, estará sempre presente em meu coração tomando parte de todos os momentos importantes da minha vida.

A minha mãe, minha maior incentivadora, fonte de força e exemplo de fé e perseverança.

Aos meus irmãos, junto a quem sempre posso conseguir apoio, carinho e incentivo.

Ao Professor Washington Neves, por partilhar comigo um pouco do seu conhecimento através de sua orientação.

Aos Professores Edson Guedes, Benemar Alencar e demais professores do Grupo de Sistemas de Potência pelo incentivo e disposição para me ajudar nos momentos de dúvida.

A Luciano, Damásio, Hélivio, Cida e demais amigos do Laboratório de Alta Tensão que compartilham comigo as angústias e alegrias de sermos ainda estudantes.

Aos amigos que, fora do meio acadêmico.

Aos funcionários da Copele e do Laboratório de Alta Tensão.

À CAPES e a Chesf, pelo auxílio financeiro.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Lista de figuras	vii
Capítulo 1 - Introdução	01
1.1 Motivação.....	01
1.2 Delimitação do Tema	03
1.3 Justificativa	06
1.4 Objetivos	07
1.5 Estrutura da Dissertação.....	08
Capítulo 2 - Fundamentação Teórica	09
2.1 Propagação de Ondas em Linhas de Transmissão	09
2.2 Equações das Linhas de Transmissão	10
Linha de Transmissão Monofásica sem Perdas	15
Linha de Transmissão Monofásica com Perdas.....	16
Linha de Transmissão Polifásica.....	16
Capítulo III - Revisão Bibliográfica	20
3.1 Modelo de Dommel.....	21
3.2 Modelos de Budner e Snelson.....	23
3.3 Modelo de Martí.....	25

3.4 Outras Contribuições.....	29
Capítulo IV - Modelo Implementado	33
4.1 Metodologia Aplicada à Simulação de Linhas	33
4.2 Ajuste de Funções	34
4.3 Rotina Implementada	40
Capítulo 5 - Análise dos Resultados	47
5.1 Comparativos – Impedância Equivalente do Circuito RLC	50
Caso 1: Função com 6 pólos e 6 zeros	50
Caso 2: Função com 8 pólos e 8 zeros	52
5.2 Comparativos – Funções Artificialmente Criadas	54
Caso 1: Função com 7 pólos e 6 zeros	54
Caso 2: Função com 6 pólos e 6 zeros	56
5.3 Comparativos para Linhas de Transmissão	59
Caso 1: Linha Trifásica – Admitância Característica	59
Caso 2: Linha Trifásica – Fator de Propagação	61
5.4 Funções Ajustadas com Compartilhamentos de Pólos	63
Capítulo 6 – Conclusões.....	66
Referências Bibliográficas	65

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Parâmetros distribuídos ao longo de uma linha de transmissão.....	10
Figura 2.2 – Elemento série representando parâmetros de uma linha de transmissão	11
Figura 3.1 – Linha de Transmissão sem perdas.....	21
Figura 3.2 – Circuito equivalente do modelo proposto por DOMMEL.....	23
Figura 3.3 – Circuito equivalente do modelo proposto por SNELSON.....	23
Figura 3.4 – Circuito equivalente do modelo proposto por MARTÍ.....	25
Figura 3.5 – Circuito representativo para $Z_c(\omega)$	26
Figura 3.6 – Circuito equivalente para um capacitor	27
Figura 3.7 – Redução do circuito equivalente da Figura 3.5	28
Figura 3.8 – Modelo Z-line.....	30
Figura 5.1 – Circuito RLC	47
Figura 5.2 – Linha de transmissão trifásica	48
Figura 5.3 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte real.....	50
Figura 5.4 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte imaginária.....	50
Figura 5.5 - Erro calculado – Parte real.....	51
Figura 5.6 - Erro calculado – Parte imaginária.....	51
Figura 5.7 - Função com 8 pólos e 8 zeros – Parte real.....	52

Figura 5.8 - Função com 8 pólos e 8 zeros – Parte imaginária.....	52
Figura 5.9 - Erro calculado – Parte real.....	53
Figura 5.10 - Erro calculado – Parte imaginária.....	53
Figura 5.11 - Função com 7 pólos e 6 zeros – Parte real.....	54
Figura 5.12 - Função com 7 pólos e 6 zeros – Parte imaginária.....	54
Figura 5.13 - Erro calculado – Parte real.....	55
Figura 5.14 - Erro calculado – Parte imaginária.....	55
Figura 5.15 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte real – Método base.....	56
Figura 5.16 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte real – Método modificado.....	56
Figura 5.17 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte imaginária – Método base.....	57
Figura 5.18 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte imaginária – Método modificado.....	57
Figura 5.19 - Erro calculado – Parte real.....	58
Figura 5.20 - Erro calculado – Parte imaginária.....	58
Figura 5.21 – Admitância Característica (Fase 2) – Parte real.....	59
Figura 5.22 – Admitância Característica (Fase 2) – Parte imaginária.....	60
Figura 5.23 - Erro calculado – Parte real.....	60
Figura 5.24 - Erro calculado – Parte imaginária.....	60
Figura 5.25 – Fator de Propagação (Fase 2) - Parte imaginária.....	61
Figura 5.26 – Fator de Propagação (Fase 2) - Parte imaginária.....	62
Figura 5.27 - Erro calculado – Parte real.....	62
Figura 5.28 - Erro calculado – Parte imaginária.....	62
Figura 5.29 – Admitância característica – Fase 1 - Parte real.....	64

Figura 5.30 – Adm. característica – Fase 1 - Parte imaginária.....	64
Figura 5.31 – Admitância característica – Fase 2 - Parte real	64
Figura 5.32 – Adm. característica – Fase 2 - Parte imaginária.....	64
Figura 5.33 – Admitância característica – Fase 3 - Parte real	65
Figura 5.34 – Adm. característica – Fase 3 - Parte imaginária.....	65

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Sistemas elétricos de potência devem ser projetados de forma a garantir um funcionamento idealmente contínuo ou, em termos práticos, com um número mínimo de interrupções, a fim de evitar danos ao próprio sistema assim como aos seus consumidores. A confiabilidade do sistema está diretamente relacionada à frequência de interrupções e a duração das mesmas.

A quantidade de interrupções a qual o sistema está associado depende, em sua maior parte, do comportamento do mesmo diante de surtos de potência que possam levá-lo a ruptura do isolamento. Dessa forma, um sistema elétrico bem projetado deve ser capaz de suportar sobretensões elétricas provenientes de diferentes fontes – energização de linhas, chaveamento de cargas, descargas atmosféricas, energização de reatores e transformadores, entre outras. Estes distúrbios provocam o surgimento de ondas de tensão com formas variadas, muitas delas com elevadas amplitudes e duração.

Assim, mesmo operando a maior parte do tempo em regime permanente, os sistemas de transmissão e distribuição de energia elétrica devem ser projetados para suportar as sobretensões as quais são eventualmente submetidos. Torna-se então necessário o desenvolvimento de técnicas que possam ser utilizadas para analisar o comportamento destes sistemas diante de solicitações severas. O alto custo dos equipamentos de alta tensão torna proibitivo a realização de ensaios deste tipo diretamente sobre os mesmos sob o risco de danificá-los, resultando em prejuízos consideráveis. Desta forma, utilizam-se ferramentas que possam representá-los o mais fielmente possível.

No passado, modelos de sistemas elétricos em miniatura, conhecidos como analisadores de rede foram bastante utilizados. Atualmente, o computador digital é a principal ferramenta utilizada na simulação destes sistemas. São vários os softwares desenvolvidos com a finalidade de simular transitórios eletromagnéticos em sistemas de potência, chamados programas do tipo *EMTP (Electromagnetic Transients Program)*. Dentre eles, podem ser citados o *ATP [Alternate Transients Program – Leuven EMTP Center, 1987]*, o *MICROTRAN [Microtran Power Systems Analysis Corporation]* e o *PSCAD/EMTDC [PSCAD/EMTDC – Manitoba HVDC Resaerch Centre, 2000]*.

O comportamento de um sistema de potência é geralmente descrito por equações diferenciais com um alto grau de complexidade, cuja solução não é obtida de maneira simples. Assim, implementar uma solução exata, na maioria dos casos é praticamente impossível. Em se tratando de linhas de transmissão, são muitos os softwares comerciais desenvolvidos com o propósito de simular transitórios, entretanto, são poucos aqueles que englobam modelos capazes de incluir configurações com graus mais elevados de assimetria, sendo que, em sua maioria, agregam modelos desenvolvidos para casos mais

gerais de configurações de linhas. Isto faz com que estes softwares sejam limitados, pois atualmente são cada vez mais comuns os sistemas de transmissão que apresentam elevados graus de assimetria, como os sistemas de potência natural elevada.

Em vista disso, torna-se necessário aprimorar as técnicas e modelos atuais, de modo que eles possam ser aplicados às mais diversas variações nas configurações dos sistemas de potência e, ainda assim, oferecer resultados satisfatórios. Dessa forma, é possível prever o comportamento de um grande sistema de potência diante das solicitações extremas a que ele pode ser submetido, sem riscos ou danos para o mesmo, preservando a integridade dos equipamentos e, principalmente, das pessoas que trabalham diretamente com estes equipamentos.

1.2 Delimitação do Tema

Em um sistema elétrico de potência, as linhas de transmissão se diferenciam dos outros componentes por apresentarem uma característica especial: seus parâmetros são distribuídos ao longo do seu comprimento. Além disso, apresentam uma forte dependência com a frequência, característica importante na análise de transitórios eletromagnéticos. Desta forma, uma ferramenta apropriada para a análise do comportamento de linhas deve levar em conta estas características, as quais são muitas vezes desprezadas com a finalidade de se obter uma simplificação na representação destas linhas.

As linhas de transmissão, dependendo de sua configuração, podem ser representadas digitalmente de diversas formas, de acordo com a precisão desejada. Assim, podem ser considerados modelos a parâmetros concentrados, nos quais a linha é representada por uma

série de seções contendo elementos concentrados; ou modelos a parâmetros distribuídos, onde é considerada a natureza distribuída dos parâmetros da linha. Podem-se ainda considerar os parâmetros como sendo constantes com a frequência, ou seja, são calculados para uma única frequência e mantidos constantes para qualquer outra componente de frequência se propagando ao longo da linha; ou ainda, parâmetros dependentes da frequência, onde os efeitos da variação de frequência sobre os parâmetros da linha são considerados. Uma análise superficial mostra que os modelos que consideram parâmetros distribuídos e dependentes da frequência representam de maneira mais precisa uma linha de transmissão real. No entanto, tais modelos são mais complexos, de forma que, em muitos casos, simplificações podem ser feitas e ainda assim, os resultados obtidos apresentarem uma aproximação fiel dos sistemas em análise.

Os programas atualmente desenvolvidos para a simulação de linhas de transmissão dividem-se em dois grandes grupos, de acordo com a técnica utilizada para a solução das equações de linha – domínio da frequência e domínio do tempo. Os programas de cálculo de transitórios no domínio da frequência implementam a resposta transitória do sistema no domínio da frequência. Através do uso de transformadas inversas, é obtida a resposta no domínio do tempo. São limitados pela dificuldade de simulação de mudanças súbitas na configuração do sistema ao longo da análise e pela representação de elementos não lineares. Os programas que utilizam modelos no domínio do tempo determinam a solução para cada passo de tempo Δt . A solução é determinada a partir das condições iniciais e calculada para cada intervalo de tempo até que seja atingido o tempo máximo de simulação. Em programas deste tipo, mudanças súbitas na configuração do sistema e elementos não-lineares são mais facilmente implementados.

Os programas de cálculo no domínio do tempo podem ainda ser divididos em programas no domínio modal e programas no domínio de fases. Os que utilizam modelos no domínio modal fazem uso da técnica de transformação modal, simplificando a simulação de linhas polifásicas. Os programas desta classe consideram a matriz de transformação modal constante com a frequência, de modo que sua aplicação se torna limitada quando são consideradas configurações de linhas de transmissão em que a matriz de transformação modal possua forte dependência com a frequência. Já os modelos no domínio de fases determinam o comportamento da linha diretamente no domínio de fases, sem utilização da transformação modal durante a simulação no tempo. Com isso, tenta-se superar as restrições impostas devido às diferentes configurações de linhas de transmissão.

Os programas no domínio de fases são modelos de desenvolvimento recente e cuja implementação tem despertado bastante interesse, pois representam mais fielmente configurações de linhas com graus mais elevados de assimetria, como circuitos múltiplos e cabos subterrâneos. Nestes casos a consideração da matriz de transformação modal como dependente da frequência tem se tornado uma alternativa bastante utilizada, pois é comprovado que os elementos desta matriz apresentam uma forte variação com a frequência, a qual não pode ser simplesmente desprezada.

No âmbito dos modelos no domínio de fases, várias técnicas de ajuste têm sido desenvolvidas para a aproximação por funções racionais para o fator de propagação, impedância característica e elementos das matrizes de transformação modal. Muitos deles, no entanto têm esbarrado em dificuldades para a obtenção de uma representação adequada para a simulação de transitórios eletromagnéticos. Entre estas dificuldades pode-se citar a obtenção de funções com elevado número de pólos, funções descontínuas ou ainda funções

que apresentam pólos instáveis, inadequados para o uso em simulações no tempo. Novos estudos têm sido desenvolvidos na tentativa de se conseguir superar estas dificuldades, apresentando como resultados funções racionais contínuas adequadas para o estudo do comportamento de ondas em linhas de transmissão. Este trabalho procura apresentar uma contribuição nesta área, na medida em que procura obter um ajuste de funções racionais que apresentem como características a continuidade em toda a faixa de frequência de interesse e a utilização de pólos complexos e estáveis.

1.3 Justificativa

A complexidade das novas configurações de linhas de transmissão resulta em imprecisões na simulação digital de transitórios eletromagnéticos, pois a maioria dos programas implementados com esta finalidade considera um certo grau de simetria ou simplificações que não são adequadas para estas novas configurações. Dessa forma, os resultados obtidos podem não ser apropriados para o estudo, de modo que resultados inadequados podem comprometer a integridade dos sistemas de transmissão, controle e proteção, comprometendo a qualidade da energia fornecida e o funcionamento dos equipamentos elétricos.

Sabe-se que as grandes indústrias, os maiores consumidores de energia elétrica, têm se tornado cada vez mais exigentes em relação ao fornecimento de energia de modo a manter seu índice de produtividade e controle de qualidade. Assim como os consumidores domésticos que têm em suas residências equipamentos cada vez mais sensíveis à variações

de tensão. Diante destas cobranças feitas às empresas de transmissão e distribuição de energia, torna-se então necessário desenvolver novos métodos e ferramentas que possam ser aplicadas com precisão e eficiência para análise dos casos mais complexos de configurações de linhas de transmissão. Tal necessidade tem provocado investimentos por parte de grandes empresas do setor elétrico nesta área de transitórios eletromagnéticos, o que abre um amplo campo de pesquisas e a oportunidade de se desenvolver projetos que tenham aplicação prática direta nos setores de interesse.

1.4 Objetivos

Este estudo tem como objetivo principal aprimorar um método de síntese de funções racionais para a modelagem de linhas de transmissão, resultando em uma rotina computacional precisa e eficiente para uso no cálculo de transitórios eletromagnéticos. Para isso, será utilizada como base um algoritmo que utiliza o método de ajuste não-linear de Levenberg-Marquardt.

Tal rotina deve apresentar como resultados funções estáveis com pólos e zeros complexos, cuja aplicação envolve o cálculo de parâmetros de linhas de transmissão e elementos de matrizes de transformação dependentes da frequência. Os resultados obtidos serão comparados com aqueles apresentados pelo algoritmo base de modo que se possa validar as mudanças propostas neste trabalho.

1.5 Estrutura da Dissertação

O trabalho aqui apresentado está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: Fundamentação Teórica. Neste capítulo serão abordados as equações de linhas de transmissão e os métodos utilizados para a sua discretização.

- Capítulo 3: Revisão Bibliográfica. Neste capítulo será mostrada a evolução dos modelos utilizados para a representação de linhas de transmissão até as propostas atuais.

- Capítulo 4: Modelo Implementado. Serão abordados os métodos de ajuste utilizados para a obtenção da rotina desejada e a metodologia utilizada para o ajuste de funções racionais

- Capítulo 5: Análise dos Resultados: Aqui serão mostrados os resultados obtidos com o método implementado.

- Capítulo 6: Conclusões. Aqui serão apresentadas as conclusões obtidas a partir dos resultados apresentados no capítulo anterior. Neste capítulo serão também feitas sugestões de melhorias que poderão ser implementadas futuramente.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Propagação de Ondas em Linhas de Transmissão

Considere uma linha de transmissão na qual aplicamos um impulso de tensão qualquer em seu terminal emissor, estando o seu terminal receptor aberto. Os efeitos desta tensão, ou qualquer outra perturbação aplicada no terminal emissor serão sentidos pelo terminal receptor apenas após um certo tempo durante o qual o sinal percorrerá toda a extensão da linha. Chegando ao terminal receptor aberto, o sinal será refletido e transmitido de volta ao terminal emissor. Desta forma o sinal é refletido continuamente entre os dois terminais da linha, sofrendo atenuações por perdas resistivas e efeito corona até atingir o regime permanente. O tempo que o sinal leva para ir de um terminal a outro, chamado tempo de propagação, está ligado à velocidade com a qual o mesmo leva para percorrer toda a extensão da linha. Devido a estas características, as ondas que se propagam nas linhas de transmissão são denominadas ondas viajantes.

As equações que regem o fenômeno de propagação de ondas em linhas podem ser determinadas partindo-se de um modelo simples, envolvendo uma linha de transmissão monofásica. A partir daí, elas podem ser generalizadas para o caso mais complexo, no qual, consideram-se configurações polifásicas, com perdas e parâmetros dependentes da frequência. São estas equações que serão mostradas neste capítulo, de maneira mais simplificada, com o intuito de que se possa compreender, mais adiante, os modelos utilizados na simulação digital de linhas de transmissão.

2.2 Equações das Linhas de Transmissão

Considere como ponto de partida no desenvolvimento das equações que regem o comportamento das ondas viajantes, uma linha de transmissão monofásica. Uma das formas de se representar o caráter distribuído dos parâmetros da linha, é considerá-la como a conexão de uma série de elementos discretos, nos quais estão representadas parcelas de todos os seus parâmetros, conforme a figura abaixo:

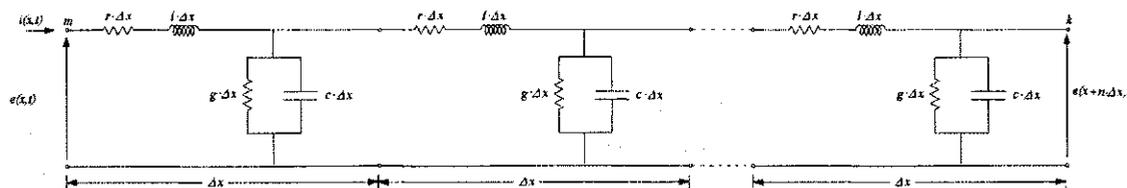


Figura 2.1 – Parâmetros distribuídos ao longo de uma linha de transmissão.

Tomando um dos elementos que se repetem ao longo da linha, temos:

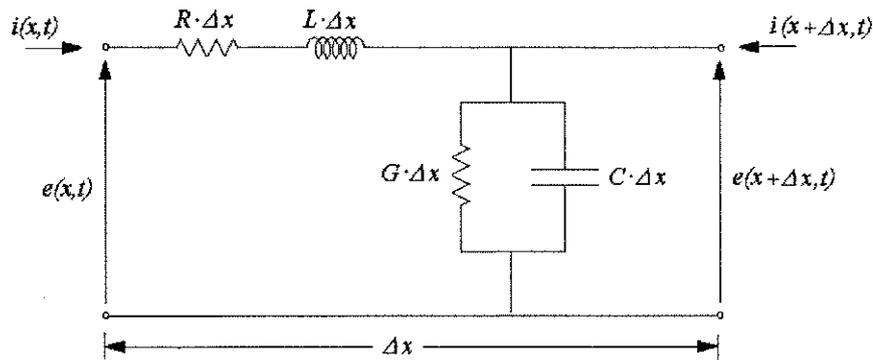


Figura 2.2 – Elemento série representando parâmetros de uma linha de transmissão.

Sendo:

R : resistência série da linha, Ω/km ;

L : indutância série da linha, F/km ;

C : capacitância *shunt* da linha, H/km ;

G : condutância de dispersão, Ω^{-1}/km ;

Δx : comprimento da porção escolhida da linha, km .

A tensão e a corrente no circuito da Figura 2.2 são dadas por:

$$e(x,t) - e(x + \Delta x, t) = R \cdot \Delta x i(x + \Delta x, t) + L \cdot \Delta x \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t}, \text{ ou ainda :}$$

$$\frac{e(x,t) - e(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = R \cdot i(x + \Delta x, t) + L \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t};$$

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) - G \cdot \Delta x e(x, t) - C \cdot \Delta x \frac{\partial e(x, t)}{\partial t}, \text{ ou ainda :}$$

$$\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = -G \cdot \Delta x e(x, t) - C \cdot \Delta x \frac{\partial e(x, t)}{\partial t}.$$

Tomando-se o limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial e(x,t)}{\partial x} &= R \cdot i(x,t) + L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= G \cdot e(x,t) + C \frac{\partial e(x,t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Para esse sistema de equações, os parâmetros da linha R , L , G e C apresentam variação com a frequência. Assim, utilizando a Transformada de Laplace as equações (2.1) são passadas para o domínio da frequência:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E(x,s)}{\partial x} &= R(s) \cdot I(x,s) + s \cdot L(s) \cdot I(x,s); \\ -\frac{\partial I(x,s)}{\partial x} &= G(s) \cdot E(x,s) + s \cdot C(s) \cdot E(x,s). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Em que $E(x,s) = \mathcal{L}\{e(x,t)\}$, $I(x,s) = \mathcal{L}\{i(x,t)\}$ e $s = j\omega$. O símbolo \mathcal{L} representa a Transformada de Laplace de uma função.

Fazendo $(R + s \cdot L) = Z(s)$ e $(G + s \cdot C) = Y(s)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E(x,s)}{\partial x} &= Z(s) \cdot I(x,s); \\ -\frac{\partial I(x,s)}{\partial x} &= Y(s) \cdot E(x,s). \end{aligned} \quad (2.3-a)$$

Ou, simplificando a notação:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E}{\partial x} &= ZI; \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= YE. \end{aligned} \quad (2.3-b)$$

Onde Z é a impedância série da linha e Y é a admitância shunt da linha.

Diferenciando as equações (2.3) em relação a x , chega-se a:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= Z \frac{\partial I}{\partial t}; \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= Y \frac{\partial E}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) em (2.4):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= ZYE; \\ -\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= YZI. \end{aligned} \quad (2.5)$$

As equações (2.5) definem o comportamento físico das ondas de tensão e corrente ao longo da linha e são conhecidas como equações telegráficas. A solução geral destas equações é da forma (FERNANDES, 2001):

$$\begin{aligned} E(x, s) &= K_f(s)e^{-\gamma(s)x} + K_b(s)e^{\gamma(s)x}; \\ I(x, s) &= \frac{1}{Z_c(s)} K_f(s)e^{-\gamma(s)x} - \frac{1}{Z_c(s)} K_b(s)e^{\gamma(s)x}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Onde $\gamma(s)$ é a constante de propagação da linha, dada por $\sqrt{YZ} = (\alpha(s) + j\beta(s))$, e $Z_c(s)$ é a impedância característica da linha, dada por $\sqrt{\frac{Z}{Y}}$. $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ são conhecidos como fator de atenuação e fator de distorção da linha e representam os efeitos de atenuação e distorção sofridos pela onda eletromagnética ao percorrer uma linha física.

Para se chegar ao sistema de equações no domínio do tempo, utiliza-se a transformada inversa de Laplace nas equações (2.6). Assim, fazendo $\gamma(s) = (\alpha(s) + j\beta(s))$ e sabendo-se que a transformada inversa de e^{-sz} , resulta no degrau unitário $u(t - z)$, e que através do Teorema da Translação, $\mathcal{L}\{u(t - z)f(t - z)\} = e^{-sz}F(s)$:

$$\begin{aligned}
 e(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\{E(x,s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{K_f(s) \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-\frac{x}{\omega}\beta \cdot s} + K_b(s) \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-\frac{x}{\omega}\beta \cdot s}\right\}; \\
 i(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(x,s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Z_c(s)} K_f(s) \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-\frac{x}{\omega}\beta \cdot s} - \frac{1}{Z_c(s)} K_b(s) \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-\frac{x}{\omega}\beta \cdot s}\right\}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Em que \mathcal{L}^{-1} corresponde a transformada inversa de Laplace.

Efetuada a transformação inversa:

$$\begin{aligned}
 e(x,t) &= k'_f(t-\tau) \cdot u(t-\tau) \cdot e^{-\alpha x} + k'_b(t+\tau) \cdot u(t+\tau) \cdot e^{\alpha x}; \\
 i(x,t) &= \frac{1}{Z_c} k'_f(t-\tau) \cdot u(t-\tau) \cdot e^{-\alpha x} - \frac{1}{Z_c} k'_b(t+\tau) \cdot u(t+\tau) \cdot e^{\alpha x} \cdot u(t-\tau).
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Em que $\tau = \frac{\beta \cdot x}{\omega}$ é o tempo de propagação da onda.

As equações (2.8) representam a soma de duas ondas viajantes se propagando em direções opostas ao longo da linha, uma progressiva e outra regressiva.

As equações (2.6) relacionam as correntes e tensões na linha, de forma que:

$$\begin{aligned}
 E + Z_c \cdot I &= 2K_f \cdot e^{-\gamma x} \\
 E - Z_c \cdot I &= 2K_b \cdot e^{\gamma x}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para a linha de transmissão em questão têm-se as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 x=0: & \begin{cases} E(0,s) = K_f(s) + K_b(s) \\ I(0,s) = \frac{1}{Z_c(s)} (K_f(s) + K_b(s)) \end{cases} \\
 x=d: & \begin{cases} E(d,s) = K_f(s)e^{-\gamma(s)d} + K_b(s)e^{\gamma(s)d} \\ I(d,s) = \frac{1}{Z_c(s)} (K_f(s)e^{-\gamma(s)d} - K_b(s)e^{\gamma(s)d}) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para simplificar a notação: $E(0,s) = E_k(s)$ e $E(d,s) = E_m(s)$ são as tensões nos terminais k e m . $I(0,s) = I_{km}(s)$ é a corrente partindo do terminal k para o terminal m e $I(d,s) = I_{mk}(s)$ é a corrente que vai do terminal m para o terminal k .

A aplicação das condições definidas em (2.10) ao sistema de equações (2.9) resultam em:

$$\begin{aligned} E_k(s) - Z_c(s) \cdot I_{km}(s) &= [E_m(s) + Z_c(s) \cdot I_{mk}(s)] \cdot e^{-\gamma(s)d} \\ E_m(s) - Z_c(s) \cdot I_{mk}(s) &= [E_k(s) + Z_c(s) \cdot I_{km}(s)] \cdot e^{-\gamma(s)d}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A utilização da transformada inversa de Laplace em (2.11) resulta nas equações no domínio do tempo:

$$\begin{aligned} e_k(t) - z_c * i_{km}(t) &= [e_m(t - \tau) - z_c * i_{mk}(t - \tau)] \cdot e^{-\alpha d} \\ e_m(t) - z_c * i_{mk}(t) &= [e_k(t - \tau) - z_c * i_{km}(t - \tau)] \cdot e^{-\alpha d}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Em que o símbolo $*$ denota uma convolução.

Linha de Transmissão Monofásica sem Perdas

Para uma linha de transmissão monofásica sem perdas a resistência série, r , e a condutância de dispersão, g , são nulas, de modo que $\alpha = 0$ e $\beta = \omega\sqrt{lc}$. Assim, a equação (2.11) se torna:

$$\begin{aligned} E_k(s) - Z_c(s) \cdot I_{km}(s) &= [E_m(s) + Z_c(s) \cdot I_{mk}(s)] \cdot e^{-s_0\sqrt{lc}d} \\ E_m(s) - Z_c(s) \cdot I_{mk}(s) &= [E_k(s) + Z_c(s) \cdot I_{km}(s)] \cdot e^{-s_0\sqrt{lc}d}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

No domínio do tempo:

$$\begin{aligned} e_k(t) - z_c \cdot i_{km}(t) &= e_m(t - \tau) - z_c \cdot i_{mk}(t - \tau) \\ e_m(t) - z_c \cdot i_{mk}(t) &= e_k(t - \tau) - z_c \cdot i_{km}(t - \tau). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Linha de Transmissão Monofásica com Perdas

Para uma linha monofásica com perdas, os termos α e β diferem de zero. Neste caso, as equações que regem o comportamento da linha no domínio da frequência e no domínio do tempo são dadas pelas equações (2.11) e (2.12) respectivamente.

Linha de Transmissão Polifásica

As equações para linhas de transmissão polifásicas podem ser obtidas seguindo-se o mesmo raciocínio aplicado para uma linha de transmissão monofásica. Neste caso, a diferença é que os elementos referentes aos parâmetros da linha – R , L , G e C – são substituídos pelas matrizes $[R]$, $[L]$, $[G]$ e $[C]$. Assim, partindo das equações (2.1) para uma linha com n fases, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 [e]}{\partial x^2} &= [Z] \cdot [Y] \cdot [e]; \\ \frac{\partial^2 [i]}{\partial x^2} &= [Y] \cdot [Z] \cdot [i]\end{aligned}\tag{2.15}$$

Onde $[e]$ e $[i]$ são os vetores de tensão e corrente para as n fases no domínio da frequência.

Se as matrizes $[Z]$ e $[Y]$ são simétricas, as equações (2.15) podem ser substituídas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 [e]}{\partial x^2} &= [P] \cdot [e]; \\ \frac{\partial^2 [i]}{\partial x^2} &= [P]^t \cdot [i]\end{aligned}\tag{2.16}$$

Em que $[P] = [Z][Y]$ e $[P]^t = [Y][Z]$.

A solução destas equações se torna complicada devido ao acoplamento mútuo entre as n fases que compõem a linha de transmissão. Isto faz com que as matrizes $[Z]$ e $[Y]$ sejam cheias dificultando os cálculos de correntes e tensões. Esta dificuldade é resolvida com a utilização de um artifício matemático que torna possível a diagonalização das matrizes impedância e admitância da linha. Este artifício é a transformação modal. A transformação modal utiliza as propriedades dos autovalores e autovetores das matrizes para diagonalizá-las, de modo que uma linha de transmissão com n fases pode ser tratada como n linhas de transmissão monofásicas, em que cada fase corresponde a um modo diferente. A transformação modal é dada por:

$$\begin{aligned} [e] &= [T_v] \cdot [V]; \\ [i] &= [T_i] \cdot [J] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Onde $[V]$ e $[J]$ são as tensões e correntes no domínio modal. $[T_v]$ é a matriz cujas colunas são os autovetores de $[P]$ e $[T_i]$ é a matriz cujas colunas são os autovetores de $[P]^t$ [NEVES, 2002].

Utilizando (2.17) as equações (2.16) se tornam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [V]}{\partial x^2} &= [T_v]^{-1} \cdot [P] \cdot [T_v] \cdot [V]; \\ \frac{\partial^2 [J]}{\partial x^2} &= [T_i]^{-1} \cdot [P] \cdot [T_i] \cdot [J] \end{aligned} \quad (2.18)$$

As equações (2.15) podem ainda ser resolvidas no domínio da frequência. Nesse caso, partindo das equações (2.5), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [E]}{\partial x^2} &= [Z] \cdot [Y] \cdot [E]; \\ \frac{\partial^2 [I]}{\partial x^2} &= [Y] \cdot [Z] \cdot [I] \end{aligned} \quad (2.19)$$

O resultado é dado por [FERNANDES, 2001]:

$$\begin{aligned} [Y_c(s)] \cdot [E_k(s)] - [I_{km}(s)] &= [A(s)] \cdot \{[Y_c(s)] \cdot [E_m(s)] + [I_{mk}(s)]\} \\ [Y_c(s)] \cdot [E_m(s)] - [I_{mk}(s)] &= [A(s)] \cdot \{[Y_c(s)] \cdot [E_k(s)] + [I_{km}(s)]\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Onde $[Y_c(s)] = \sqrt{[Y(s)] \cdot [Z(s)]} \cdot [Z(s)]^{-1}$ é a matriz admitância característica de ordem $n \times n$;

$[A(s)] = e^{-[\gamma(s)]d}$ é a matriz fator de propagação, de ordem $n \times n$;

$[\gamma(s)] = \sqrt{[Y(s)] \cdot [Z(s)]}$ é a matriz constante de propagação, de ordem $n \times n$.

As tensões e correntes obtidas em (2.20) são difíceis de serem encontradas diretamente devido ao acoplamento entre as diversas fases. Assim, utiliza-se a transformação modal para desacoplar as n fases do sistema. Neste caso, as matrizes $[P(s)]$, $[T_v(s)]$ e $[T_i(s)]$ serão também dependentes da frequência. O resultado das equações no domínio modal será:

$$\begin{aligned} [Y_{c\text{mod}}(s)] \cdot [V_k(s)] - [J_{km}(s)] &= [A_{\text{mod}}(s)] \cdot \{[Y_{c\text{mod}}(s)] \cdot [V_m(s)] + [J_{mk}(s)]\} \\ [Y_{c\text{mod}}(s)] \cdot [V_m(s)] - [J_{mk}(s)] &= [A_{\text{mod}}(s)] \cdot \{[Y_{c\text{mod}}(s)] \cdot [V_k(s)] + [J_{km}(s)]\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Retornando ao domínio do tempo, as equações (2.21) se tornam:

$$\begin{aligned} [y_{c\text{mod}}(t)] * [v_k(t)] - [j_{km}(t)] &= [a_{\text{mod}}(t)] * \{[y_{c\text{mod}}(t)] * [v_m(t - \tau)] + [j_{mk}(t - \tau)]\} \\ [y_{c\text{mod}}(t)] * [v_m(t)] - [j_{mk}(t)] &= [a_{\text{mod}}(t)] * \{[y_{c\text{mod}}(t)] * [v_k(t - \tau)] + [j_{km}(t - \tau)]\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Em que, o símbolo * representa uma integral de convolução.

Por fim, retorna-se ao domínio de fases a partir das equações:

$$\begin{aligned} [e(t)] &= [T_v(t)] * [v(t)] \\ [i(t)] &= [T_i(t)] * [j(t)] \end{aligned} \quad (2.23)$$

O que se verifica nas equações (2.22) e (2.23) é a presença de integrais de convolução, o que dificulta a sua resolução. Uma alternativa que vem sendo utilizada é a

resolução de (2.19) diretamente no domínio de fases, obtendo-se o sistema de equações dado por (2.20) sem a necessidade da transição para o domínio modal. Entretanto, a transformação modal não é completamente descartada. As matrizes $[Y_c(s)]$ e $[A(s)]$ são difíceis de serem calculadas diretamente no domínio de fases de modo que seus elementos podem ser obtidos mais facilmente no domínio modal, através das relações:

$$\begin{aligned} Y_{c\text{mod-}i}(s) &= \sqrt{\frac{Y_{\text{mod-}i}(s)}{Z_{\text{mod-}i}(s)}}; \\ A_{\text{mod-}i}(s) &= e^{-Y_{\text{mod-}i}(s)d}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Em que o índice i representa o modo que está sendo calculado.

Assim, $[Y_c(s)]$ e $[A(s)]$ são dadas por:

$$\begin{aligned} [Y_c(s)] &= [T_i(s)] \cdot [Y_{c\text{mod}}(s)] \cdot [T_i(s)]^t; \\ [A(s)] &= [T_i(s)] \cdot [A_{\text{mod}}(s)] \cdot [T_i(s)]^t. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Consegue-se assim uma redução no número de integrais de convolução. Entretanto, as matrizes $[Y_c(s)]$ e $[A(s)]$ são cheias, de modo que as convoluções envolvem matrizes cheias e vetores.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica

Ao longo dos anos, os modelos e as técnicas utilizados para a representação de linhas de transmissão foram sendo aperfeiçoados. Dessa forma, os modelos evoluíram desde aqueles representando linhas bastante simplificadas, sendo desprezadas muitas de suas características, até modelos em que mesmo os efeitos mais sutis são representados durante a simulação.

Muitos dos modelos desenvolvidos foram implementados em diversos programas comerciais de cálculos de transitórios eletromagnéticos. Hoje, a grande maioria destes programas oferece a possibilidade de se escolher entre um dos diversos modelos neles implementados, de acordo com o grau de complexidade do sistema e a precisão necessária nos resultados.

A maior parte desses modelos pode ser classificada em dois grupos: modelos no domínio modal e modelos no domínio de fases. Os primeiros utilizam a técnica de transformação modal para fazer a transição modo-fases. São limitados por considerarem a matriz de transformação modal como constante e real. Os modelos no domínio de fases

utilizam a transformação modal apenas para o cálculo da impedância característica e do fator de propagação da linha. Sua principal limitação é a necessidade de se calcular integrais de convolução entre matrizes cheias e vetores.

3.1 Modelo de Dommel

Um dos primeiros modelos utilizados para a simulação de linhas de transmissão foi proposto por DOMMEL [1969]. O modelo desenvolvido representa um sistema de linhas de transmissão polifásico sem perdas. Este modelo utiliza a técnica de transformação modal proposta por WEDEPOHL [1963] e HEDMAN [1965], a qual utiliza as propriedades de autovalores e autovetores de uma matriz para desacoplar as fases do sistema. Assim, um sistema polifásico pode ser analisado como se fosse formado por várias linhas monofásicas independentes.

Para desenvolver seu modelo, Dommel partiu de uma linha sem perdas, conforme a figura abaixo:

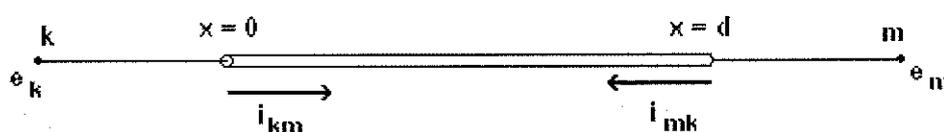


Figura 3.1 – Linha de Transmissão sem perdas.

Partindo da equação de ondas viajantes (equação 2.7), pode-se chegar ao seguinte sistema de equações [DOMMEL, 1969]:

$$\begin{aligned} e(x,t) &= f_1(x-v\cdot t) + f_2(x+v\cdot t) \\ i(x,t) &= \frac{f_1(x-v\cdot t)}{Z} - \frac{f_2(x+v\cdot t)}{Z} \end{aligned} \quad (3.1)$$

o qual representa a superposição de duas ondas, viajando em sentidos contrários. Deste sistema de equações (3.1) chega-se a:

$$\begin{aligned} e(x,t) + Z \cdot i(x,t) &= 2 \cdot f_1(x-v\cdot t) \\ e(x,t) - Z \cdot i(x,t) &= 2 \cdot f_2(x+v\cdot t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Seja τ , o tempo de trânsito da onda, o tempo que o sinal leva para ir do terminal emissor, k , até o terminal receptor, m . O valor $(e + Z \cdot i)$ observado no terminal k no instante $(t - \tau)$ será igual ao valor observado no terminal m no instante t . Dessa forma, tem-se:

$$e_k(t - \tau) + Z \cdot i_{km}(t - \tau) = e_m(t) - Z \cdot i_{mk}(t). \quad (3.3)$$

A equação (3.3) resulta do seguinte sistema:

$$\begin{cases} e_m(t) = Z \cdot i_{mk}(t) - V_m(t - \tau) \\ e_k(t) = Z \cdot i_{km}(t) - V_k(t - \tau). \end{cases} \quad (3.4)$$

Em que:

$$\begin{aligned} V_m(t - \tau) &= -e_k(t - \tau) - Z \cdot i_{km}(t - \tau) \\ V_k(t - \tau) &= -e_m(t - \tau) - Z \cdot i_{mk}(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.5)$$

As tensões nas equações (3.5) são chamadas fontes históricas e contém informações de tensão e corrente nos terminais da linha em passos de tempo anteriores.

Das equações (3.4) e (3.5) pode-se chegar ao circuito equivalente proposto por Dommel:

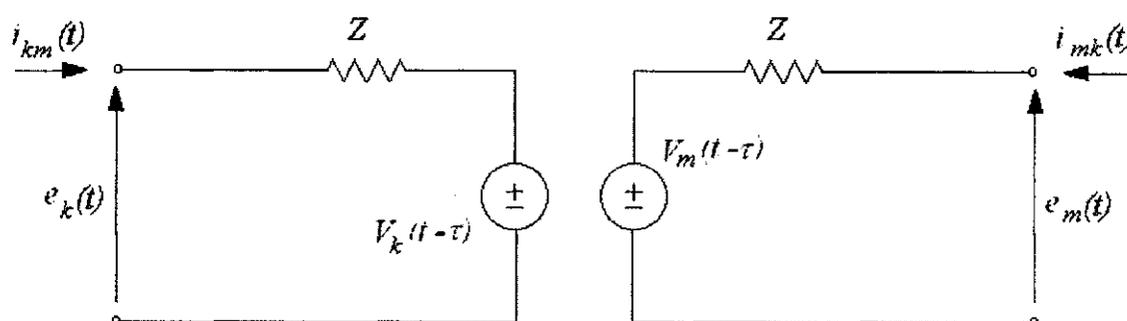


Figura 3.2 – Circuito equivalente do modelo proposto por DOMMEL.

3.2 Modelos de Budner e Snelson

BUDNER [1970] propôs um dos primeiros modelos considerando a dependência dos parâmetros da linha com a frequência. O modelo proposto por Budner introduziu a necessidade de se utilizar integrais de convolução para que fosse feita a transição frequência-tempo. A solução destas integrais de convolução e a necessidade do uso de transformadas inversas eram a principal limitação do modelo proposto.

SNELSON [1972] modificou o modelo proposto por Budner, dando origem ao circuito abaixo, sugerido por MEYER E DOMMEL [1974].

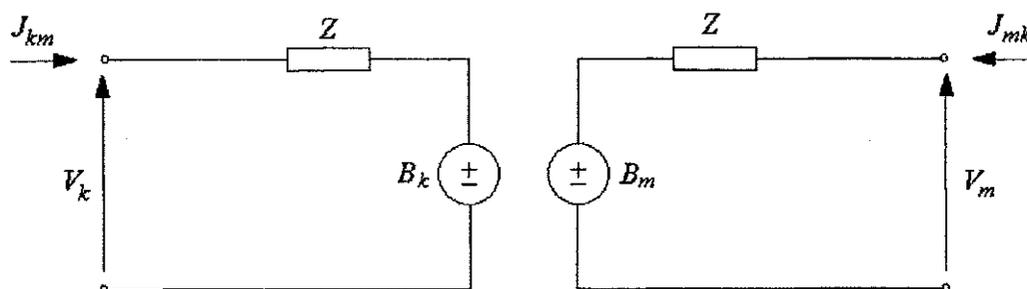


Figura 3.3 – Circuito equivalente do modelo proposto por SNELSON.

Neste circuito, [FERNANDES, 2001]:

$$\begin{aligned} V_k(s) &= Z_{\text{mod}} \cdot J_{km}(s) + B_k(s); \\ V_m(s) &= Z_{\text{mod}} \cdot J_{mk}(s) + B_m(s). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Em que:

$$\begin{aligned} B_k(s) &= [V_m(s) + Z_{\text{mod}} \cdot J_{mk}(s)] \cdot e^{-\gamma(s) \cdot d}; \\ B_m(s) &= [V_k(s) + Z_{\text{mod}} \cdot J_{km}(s)] \cdot e^{-\gamma(s) \cdot d'}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

O parâmetro Z é a impedância de surto da linha no instante da aplicação de um impulso em seus terminais. Ele é dado por $\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_c(s) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{L(s)}{C(s)}}$. Os elementos da matriz Z são reais e constantes, sendo tratados como resistências puras. As fontes B_k e B_m contêm as informações relativas a atenuação e ao atraso entre as tensões ou correntes nos terminais opostos, o que caracteriza o fenômeno de ondas viajantes, assim como informações referentes aos efeitos da frequência. Este modelo representou uma evolução significativa em relação ao modelo proposto por BUDNER [1970], entretanto, ainda apresentava as limitações impostas pelo cálculo das integrais de convolução, pois, no domínio do tempo, tomando as equações 3.7, por exemplo, obtém-se:

$$\begin{aligned} b_k(t) &= [v_m(t) + z_c(t) * j_{mk}(t)] * a(t); \\ b_m(t) &= [v_k(t) + z_c(t) * j_{km}(t)] * a(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3 Modelo de Martí

MARTÍ [1982] propôs a substituição da impedância de surto Z , no modelo anterior, pela impedância característica Z_c . A utilização da impedância característica possibilita a eliminação do efeito das reflexões sucessivas, que antes estavam presentes no terminal emissor pelo fato de que $Z \neq Z_c$. Martí define também o fator de propagação modal, representando a relação entre as tensões no terminal receptor e da fonte, (a tensão no terminal receptor é igual à tensão no terminal da fonte com um deslocamento no tempo de τ segundos) :

$$A_{\text{mod}}(s) = \frac{V_k}{V_m} = e^{-\gamma_{\text{mod}}(s)d} \quad (3.9)$$

O circuito representativo do modelo proposto por MARTÍ é dado abaixo:

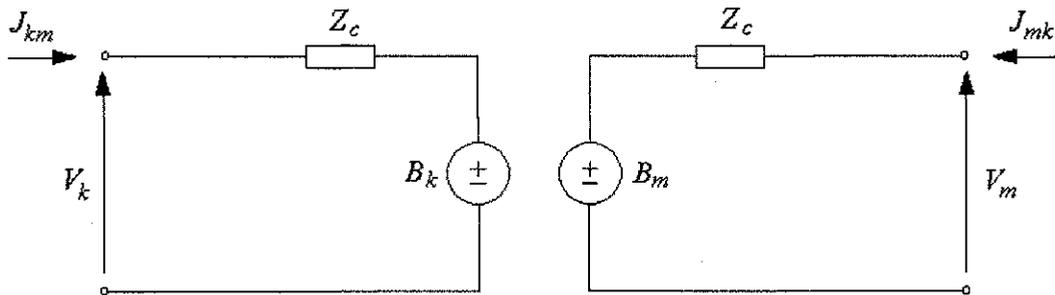


Figura 3.4 – Circuito equivalente do modelo proposto por MARTÍ.

Neste circuito, a linha fica caracterizada pela impedância característica e pelo fator de propagação, conforme verificado nas equações abaixo:

$$\begin{aligned} B_k(s) &= A_{\text{mod}}(s) \cdot [V_m(s) - Z_{c-\text{mod}}(s) \cdot J_{mk}(s)] \\ B_m(s) &= A_{\text{mod}}(s) \cdot [V_k(s) - Z_{c-\text{mod}}(s) \cdot J_{km}(s)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

No domínio do tempo, as equações (3.4) se tornam:

$$\begin{aligned} b_k(t) &= a_{\text{mod}}(t) * [v_m(t - \tau) - z_{c-\text{mod}}(t - \tau) * j_{mk}(t - \tau)] \\ b_m(t) &= a_{\text{mod}}(t) * [v_k(t - \tau) - z_{c-\text{mod}}(t - \tau) * j_{km}(t - \tau)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

A maior contribuição do modelo proposto por MARTÍ é uma forma alternativa de se fazer a transição do domínio da frequência para o domínio do tempo diretamente. O modelo de MARTÍ propõe realizar esta transição sem a necessidade de recorrer ao uso das transformadas inversas. Para isso $Z_c(s)$ e $A(s)$ são aproximados por funções racionais do tipo:

$$P(s) = G \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdot (s + z_3) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot (s + p_3) \cdots (s + p_n)} \quad (3.12)$$

A equação (3.12) pode ser expandida em uma soma de frações parciais da forma:

$$P(s) = k_\infty + \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \frac{k_3}{s + p_3} + \cdots + \frac{k_n}{s + p_n}, \text{ para } n = m. \quad (3.13)$$

Ou ainda:

$$P(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \frac{k_3}{s + p_3} + \cdots + \frac{k_n}{s + p_n}, \text{ para } n < m. \quad (3.14)$$

Assim, cada modo da impedância característica $Z_c(j\omega)$, sendo aproximada por uma função do tipo (3.13), pode ser representada por uma conexão série-paralela de blocos RC, conforme figura abaixo.

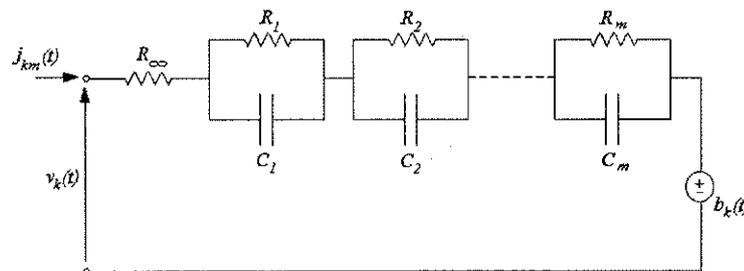


Figura 3.5 – Circuito representativo para $Z_c(\omega)$.

O circuito da figura 3.5 pode ser reduzido utilizando técnicas de integração. Sabe-se que o circuito representativo de um capacitor pode-ser simplificado, através da regra de integração trapezoidal, por exemplo, a um circuito equivalente representado por um resistor e uma fonte de tensão, conforme figura abaixo:

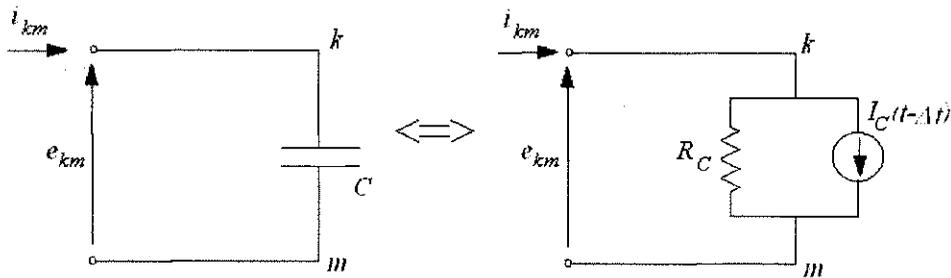


Figura 3.6 – Circuito equivalente para um capacitor.

Dessa forma, tomando-se os capacitores do circuito da Figura 3.5 e representando-os na sua forma equivalente (Figura 3.6), a linha passa então a ser representada por uma impedância constante, Z_{eq} em série com uma fonte de tensão $v(t)$. Onde $v(t)$ é a soma da fonte de corrente histórica, $b_k(t)$, com a fonte resultante da aplicação das técnicas de integração sobre os blocos RC, $v_{eq}(t)$ (Figura 3.7).

A constante de propagação $A_{mod}(s)$ é aproximada por:

$$A_{ap}(s) = P(s) \cdot e^{-s \cdot \tau_{min}} \quad (3.15)$$

Onde $P(s)$ é uma função do tipo (3.14) e τ_{min} é o tempo de trânsito da onda mais veloz do modo em questão.

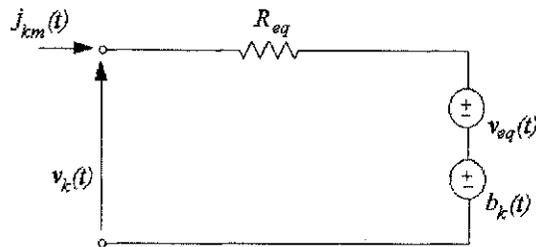


Figura 3.7 – Redução do circuito equivalente da Figura 3.5.

Fazendo-se as aproximações sugeridas, chega-se às equações que relacionam tensão e corrente nas extremidades da linha de transmissão no domínio do tempo:

$$\begin{aligned} v_k(t) - z_{eq}(t) \cdot j_{km}(t) - e(t) &= a_{ap}(t) * [v_m(t) - z_{eq}(t) \cdot j_{mk}(t) - e(t)] \\ v_m(t) - z_{eq}(t) \cdot j_{mk}(t) - e(t) &= a_{ap}(t) * [v_k(t) - z_{eq}(t) \cdot j_{km}(t) - e(t)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

No domínio do tempo $a_{ap}(t)$ tem a forma:

$$a_{ap}(t) = [k_1 e^{-p_1(t-\tau_{\min})} + k_2 e^{-p_2(t-\tau_{\min})} + \dots + k_m e^{-p_m(t-\tau_{\min})}] \cdot u(t - \tau_{\min}). \quad (3.17)$$

Dessa forma, as integrais de convolução nas equações (3.16) podem ser resolvidas de modo mais simples utilizando-se métodos numéricos, e assim, a complexidade da transição frequência-tempo fica bastante reduzida, de modo que a sua implementação computacional se torna mais fácil e eficiente. SEMLYEN & DABULEANU [1975], sugerem a utilização da técnica de convolução recursiva para acelerar a resolução da equação 3.16, utilizando o fator de progação na forma dada em 3.17.

O sucesso do resultado obtido irá depender da qualidade das aproximações das funções racionais para $Zc(s)$ e $A(s)$. MARTÍ [1982] utiliza o método assintótico de Bode e aproxima $Zc(s)$ e $A(s)$ por funções racionais de fase mínima, ou seja, com zeros e pólos reais no semi-plano esquerdo do plano complexo. O método de Bode gera um número muito elevado de pólos e zeros na função aproximada. Além disso, a dependência dos

elementos da matriz de transformação modal com a frequência não é considerada, de modo que em casos mais complexos, onde há um grau maior de assimetria ou desbalanceamento, os resultados obtidos podem se melhorar já que a modelagem utilizada não representa fielmente o comportamento do sistema real.

MARTÍ [1988], propõe então aproximar os elementos da matriz de transformação modal por funções racionais de modo análogo ao que é feito com a impedância característica e o fator de propagação. O método utilizado para esta aproximação possui o inconveniente de, em alguns casos, apresentar como resultado autovetores descontínuos ao longo da faixa de frequência analisada. Dessa forma, devido a estas descontinuidades (*switchovers*), os elementos da matriz de transformação não podem ser representados por funções racionais. WEDEPOHL, NGUYEN E IRWIN [1996] propõem utilizar o método de Newton-Raphson para obter os autovetores da matriz de transformação, a fim de eliminar o problema de descontinuidades.

3.4 Outras Contribuições

FERNANDES [1996], propõe utilizar um método de ajuste não-linear para as funções racionais baseado na rotina de Levenberg-Marquardt [PRESS et al, 1992] no intuito de reduzir o número de pólos e zeros das funções racionais aproximadas, buscando melhorar a eficiência dos modelos propostos. Esse método consiste em minimizar uma função erro, representando a diferença entre a solução aproximada e a solução real (referente aos dados de entrada). A ferramenta sugerida para a minimização desse erro é o método dos mínimos quadrados. Como resultado da aplicação do método não-linear,

obteve-se uma redução significativa do número de pólos e zeros utilizados pela função racional aproximada (função mais simples) e ainda uma melhoria na precisão da função aproximada.

No domínio de fases, uma das primeiras metodologias surgidas foi proposta por SOYSAL E SEMLYEN [1994], utilizando equações de estado para modelar as linhas de transmissão. Esta abordagem é mais complexa e, por isso mesmo, mais geral, podendo inclusive ser utilizada para a representação de outros componentes do sistema de potência. Os pólos e zeros obtidos com este método podem ser reais ou complexos, sendo localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo.

CASTELLANOS E MARTÍ [1995] desenvolveram dois modelos semelhantes, chamados *zi-line* e *id-line*, para simulação no domínio do tempo e no domínio modal, respectivamente. Nestes modelos, a linha de transmissão é separada em duas partes: uma linha ideal, a qual representará o fenômeno de propagação de ondas; e uma impedância equivalente (resistência e indutância internas) representando o efeito das perdas. Dessa forma, a linha pode ser representada pelo circuito abaixo:



Figura 3.8 – Modelo Z-line.

Para melhorar a precisão do modelo, a linha pode ser dividida em diversas partes. Tal modelo é bastante útil quando se deseja incluir o efeito corona, ou quando se deseja

modelar linhas de pequeno comprimento, como vãos de linha em subestações [BARROS, 2002].

NODA [1996] propõe um modelo, chamado ARMA, o qual faz a aproximação de funções racionais para a impedância característica e o fator de propagação no plano z . As convoluções no domínio do tempo são substituídas pelo método ARMA (*Auto Regressive Moving Average*), diretamente no domínio z . Os ajustes realizados no domínio Z estão diretamente ligados ao passo de tempo, de modo que, neste modelo, novas aproximações devem ser feitas sempre que o passo de tempo for alterado. Visando superar este inconveniente, NODA [1997] desenvolveu o modelo IARMA (*Interpolated ARMA*), permitindo um passo de tempo diferente para cada modelo ARMA obtido para a admitância característica e o fator de propagação. Para isto, um passo de tempo comum é obtido através da técnica de interpolação numérica.

GUSTAVSEN E SEMLYEN [1998] propõem aproximar as funções racionais através do método de ajuste vetorial, o qual permite que se considerem pólos e zeros complexos. A utilização de pólos e zeros complexos é justificada pelo fato de que, em alguns casos de configurações de linhas de transmissão, um ajuste preciso não pode ser obtido apenas com a utilização de funções de fase mínima. Para tornar o método mais rápido e eficiente, o ajuste das funções é feito com todos os elementos do vetor compartilhando o mesmo conjunto de pólos. Uma desvantagem neste método se deve ao fato de que, por ser um método linear, não há como levar em consideração as características não-lineares do fator de propagação e da admitância característica como variáveis no processo de ajuste do modelo.

MORCHED [1999] desenvolveu um método em que os tempos de propagação de valor muito próximos são agrupados sob um tempo de trânsito comum reduzindo o esforço computacional e tornando o modelo mais eficiente através da redução do número de integrais de convolução. Seguindo este raciocínio, FERNANDES [2001] desenvolve uma rotina em que todos os elementos da matriz de propagação $[A(\omega)]$ possuem um tempo de propagação único, o que contribui para a redução do esforço computacional. Neste modelo, os elementos da matriz de propagação são dados na forma polar, com módulo e fase, por:

$$A_{ij\text{-mod}}(s) = |A_{ij}(s)| \cdot e^{j\Psi_{ij}(s)} \cdot e^{-s\tau}. \quad (3.12)$$

Onde $|A_{ij}(s)|$ é o módulo do elemento (i,j) da matriz de propagação; $\Psi_{ij}(s)$ é o ângulo de fase do elemento (i,j) da matriz de propagação e τ é o tempo de propagação comum a todos os elementos.

A diferença entre os tempos de propagação originais em cada modo e o tempo mínimo de propagação utilizado é compensada com a multiplicação de cada elemento da matriz de propagação por um termo exponencial, $e^{j\Psi_{ij}(s)}$, que possui uma parcela devida a diferença entre estes tempos.

BARROS [2002] retoma a metodologia desenvolvida por FERNANDES [2001], utilizando o método de ajuste não-linear de Levenberg-Marquardt com a finalidade de promover melhorias no que diz respeito a qualidade das funções racionais aproximadas através da obtenção de pólos complexos.

Capítulo 4

Modelo Implementado

4.1 Metodologia Aplicada à Simulação de Linhas

O modelo para simulação de linhas de transmissão proposto por MARTÍ [1982] serviu de base para os principais programas de simulação de transitórios eletromagnéticos em uso. Através deste modelo, uma linha de transmissão, dada a sua impedância série e a sua admitância *shunt*, fica completamente caracterizada por sua impedância (ou admitância) característica ($Z_C(\omega)$ ou $Y_C(\omega)$) e pelo seu fator de propagação ($A(\omega)$) no domínio modal.

Em modelos mais completos, a consideração da matriz fator de propagação como dependente da frequência tem sido um outro aspecto bastante relevante na simulação de casos de linhas de transmissão assimétricas. Nesses casos, verifica-se uma forte variação dos elementos desta matriz ao longo da faixa de frequência.

Dessa forma, a etapa de cálculo de parâmetros da linha ($Z_C(\omega)$) e $A(\omega)$), na faixa de frequência de interesse da simulação e sua síntese por meio de funções racionais, assim como, mais recentemente, dos elementos da matriz de transformação modal, é uma etapa fundamental para o cálculo de transitórios eletromagnéticos. A qualidade do ajuste obtido para as funções aproximadas é responsável pela qualidade dos resultados das simulações no tempo, enquanto que a complexidade das funções, no que diz respeito ao número de pólos utilizados e estabilidade dos mesmos determina se as funções obtidas são apropriadas para o uso na simulação do tempo. Funções com número muito elevado de pólos resultam em redução na eficiência computacional, enquanto que pólos estáveis resultam em instabilidade numérica no tempo.

O trabalho aqui realizado detém-se no ajuste das funções racionais, buscando obter um método preciso e estável que possa ser aplicado satisfatoriamente em programas do tipo *EMTP*. Para isto, é utilizado como ferramenta principal o método de ajuste não-linear de Levenberg-Marquardt aliado a uma rotina de compartilhamento de pólos, buscando aliar precisão e eficiência computacional na obtenção destas funções e no seu uso pelos programas de simulação de transitórios.

4.2 Ajuste de funções

O ajuste de funções tem como partida um conjunto de pontos ao qual se deseja associar um modelo na forma de uma função racional. Para isso, escolhe-se uma função mérito, a qual dá a medida da concordância entre o modelo ajustado e o conjunto de dados iniciais. Essa função mérito, geralmente é uma função que quantifica o erro, o qual,

normalmente, se deseja minimizar. Dessa forma, o problema de ajuste de funções se transforma em um problema de otimização [FERNANDES, 2000].

O processo de ajuste de funções aqui abordado é, em sua essência, um problema não-linear, pois $f(x)$ é uma função não-linear, a qual apresenta restrições impostas ao vetor solução do problema. Um método de ajuste relaciona o conjunto de dados de entrada e os parâmetros da função a ser ajustada de modo que:

$$y(x) = y(x; a_1, a_2, \dots, a_m). \quad (4.1)$$

A função mérito a ser utilizada é a função Qui-Quadrado (χ^2), a qual é definida por:

$$\chi^2(a) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - y(x_i; a)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (4.2)$$

Sendo:

a , o vetor que apresenta a melhor solução para o problema;

σ_i , o desvio padrão entre a função de base e o modelo no ponto i .

A função χ^2 representa uma medida do erro entre os dados de entrada e os dados obtidos com a função aproximada. Desta forma, minimizar esta função significa fazer com que este erro se aproxime o mais possível de zero.

O método de ajuste de Levenberg-Marquardt tem como ponto de partida o método de Newton, o qual baseia-se na expansão da função a ser ajustada em uma série de Taylor, em torno de um determinado ponto em cuja vizinhança se deseja saber o comportamento da função. Dessa forma, tomando-se a expansão em série de Taylor para uma função $F(x)$ que se deseja ajustar em torno de um ponto x_k , com incremento p , tem-se:

$$F(x_k + p) = F(x_k) + p \cdot \frac{\partial F(x_k)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \frac{\partial^2 F(x_k)}{\partial x_k^2} + \dots \quad (4.3)$$

Se os termos de ordem superior a 2 forem desprezados e x for tomado como um mínimo local, x^* tem-se que:

$$F(x^*) = \min_p \left[F(x_k + p) = F(x_k) + p \cdot \frac{\partial F(x_k)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \frac{\partial^2 F(x_k)}{\partial x_k^2} \right]. \quad (4.4)$$

Dessa forma, a minimização de (4.4) em relação ao incremento p , se torna a minimização da função $F(x)$, sendo que um mínimo para a função existe apenas se:

$$\frac{\partial^2 F(x_k)}{\partial x_k^2} > 0. \quad (4.5)$$

A minimização de (4.4) é obtida tomando-se a sua derivada em relação a p , e igualando o resultado a zero, de modo que:

$$\frac{\partial^2 F(x_k)}{\partial x_k^2} \cdot p = -\frac{\partial F(x_k)}{\partial x_k} \Rightarrow p = -\frac{\frac{\partial F(x_k)}{\partial x_k}}{\frac{\partial^2 F(x_k)}{\partial x_k^2}}.$$

(4.6)

O algoritmo define que p é um incremento de x_k na direção do valor mínimo local. Dessa forma, o valor do mínimo local x^* é obtido por:

$$x^* = x_k + p. \quad (4.7)$$

O valor ótimo de x^* é obtido após várias iterações, com o cálculo dos novos incrementos em cada iteração, desde que o processo convirja, o que depende da estimativa inicial utilizada para os parâmetros x a serem ajustados.

Quando se considera uma função de várias variáveis, $F(x)$, onde x é o vetor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, a expansão em série de Taylor, desprezando-se os termos de ordem superior a 2, é dada por:

$$\begin{aligned}
F(x+p) = & F(x) + p_1 \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} + p_2 \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} + \dots + p_n \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot p_1^2 \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} + \frac{1}{2} \cdot p_1 \cdot p_3 \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_1 \cdot \partial x_3} + \dots + \\
& + \frac{1}{2} \cdot p_n^2 \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_n^2}
\end{aligned} \quad (4.8)$$

em que $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]$, são os incrementos relacionados a cada elemento a_n , do vetor a .

A equação (4.8) pode ser reduzida à forma:

$$F(x+p) = F(x) + p^T \cdot g(x) + \frac{1}{2} \cdot p^T \cdot G(x) \cdot p. \quad (4.9)$$

Sendo: $g(x) = \nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix}$, o vetor das derivadas de primeira ordem de $F(x)$;

$$G(x) = \nabla g(x) = \nabla^2 F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_1 \cdot \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_n \cdot \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}, \text{ a matriz das derivadas de}$$

segunda ordem de $F(x)$, chamada de Matriz Hessiana de $F(x)$.

No caso de uma função de várias variáveis, as condições para que um valor x^* seja um mínimo local para a função são dadas por:

$$g(x^*) = 0; \quad (4.10)$$

$$p^T \cdot G(x^*) \cdot p > 0 \quad (4.11)$$

Partindo de (4.9) o incremento a ser aplicado a cada parâmetro da função é dado por:

$$G(x) \cdot p = -g(x). \quad (4.12)$$

Tomando-se a função χ^2 como função a ser otimizada, sua expansão em série de Taylor é dada por:

$$\chi^2(a+p) = \chi^2(a) - p \cdot g(a) + \frac{1}{2} \cdot p^T \cdot G(a) \cdot \delta a, \quad (4.13)$$

$$\text{sendo: } g(a) = \nabla \chi^2(a) = \frac{\partial \chi^2(a)}{\partial a_i} = -2 \cdot \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i, a)}{\sigma_i} \right]^2 \cdot \frac{\partial y(x_i, a)}{\partial a_i}, \quad (4.14)$$

$$G(a) = \frac{\partial^2 \chi^2(a)}{\partial a_i \partial a_m} = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} \left[\frac{\partial y(x_i, a)}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial y(x_i, a)}{\partial a_m} - [y_i - y(x_i, a)] \cdot \frac{\partial^2 y(x_i, a)}{\partial a_i \partial a_m} \right], \quad (4.15)$$

para cada a_i e a_m pertencentes ao vetor a .

Para se eliminar o fator 2, das equações (4.14) e (4.15) definem-se as matrizes $[\alpha]$ e $[\beta]$, dadas por:

$$[\beta] = \frac{1}{2} g(a) \quad (4.16)$$

e

$$[\alpha] = \frac{1}{2} G(a). \quad (4.17)$$

Na equação (4.15), o termo da segunda derivada não é utilizado pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt, podendo ser desprezado. Dessa forma, a equação se torna:

$$G(a) = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} \left[\frac{\partial y(x_i, a)}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial y(x_i, a)}{\partial a_m} \right]. \quad (4.18)$$

Para que a condição (4.11) seja atendida, a matriz Hessiana da função deve ser positiva definida, ou seja, a componente real de todos os seus autovalores deve ser positiva. Se a matriz Hessiana não atender aos requisitos necessários, os valores dos incrementos não poderão ser corretamente obtidos de modo que o processo iterativo irá divergir. Para que

não haja problemas deste tipo na aplicação do Método de Newton, as estimativas iniciais devem ser feitas de modo que seus valores estejam próximos do valor mínimo local, o que, muitas vezes não se pode conseguir de maneira simples. Uma alternativa, visando superar este problema é uma modificação feita no algoritmo do método de Newton, resultando no método de Levenberg-Marquardt.

O método de Levenberg-Marquardt utiliza em conjunto o método de Newton e o método descendente, de acordo com o caminho tomado nas iterações. Se as iterações levam à convergência dos parâmetros a serem ajustados, o processo definido pelo método de Newton é utilizado, caso contrário, utiliza-se o algoritmo definido pelo método descendente. Em outras palavras, se o método se aproxima do mínimo da função objetivo, que neste caso corresponde a tornar o erro o mais próximo possível de zero, o valor dos parâmetros para a próxima iteração é definido de acordo com o algoritmo de Newton:

$$a_{k+1} = a_k - G(a_k)^{-1} \cdot g(a_k) \Rightarrow \delta a_k = p = -G(a_k)^{-1} \cdot g(a_k). \quad (4.19)$$

Caso contrário, se o ajuste dos parâmetros se distancia do mínimo da função objetivo, seus valores para a próxima iteração serão definidos por:

$$a_{k+1} = a_k - c \cdot g(a_k) \Rightarrow \delta a_k = p = -c \cdot g(a_k). \quad (4.20)$$

O valor de c utilizado em (4.20) foi definido por Marquardt a partir de observações feitas na matriz Hessiana, definindo-o como:

$$c = \frac{1}{\lambda \cdot \alpha_{kk}}, \quad (4.21)$$

$$\text{sendo: } \alpha_{kk} = \left(\frac{\partial^2 \chi^2(a)}{\partial a_{kk}^2} \right), \quad (4.22)$$

os elementos da matriz $[\alpha]$ e λ é um fator de escala adimensional. Dessa forma:

$$\delta a_k = \frac{1}{\lambda \cdot a_{kk}} \cdot g(a_k). \quad (4.23)$$

Uma outra modificação feita pelo método é a criação de uma nova matriz $[\alpha']$ cujos elementos são dados, a partir de (4.23) e (4.20), por:

$$\alpha'_{jj} = \alpha_{jj} \cdot (1 + \lambda);$$

$$\alpha'_{jk} = \alpha_{jk}, \text{ se } (j \neq k).$$

A escolha do valor de λ determinará se a matriz $[\alpha]$ é positiva definida. Um valor muito grande de λ fará com que a matriz seja diagonal dominante [PRESS et al, 1992]. Dessa forma, aqueles valores de α_{jk} que tornam a matriz inadequada para o método de Newton serão substituídos, no método de Levenberg-Marquardt, por novos valores α'_{jk} assegurando a convergência do método, não importando o quão distante estejam as estimativas iniciais.

4.3 Rotina Implementada

Dentre os métodos de ajuste atualmente em uso, o método de ajuste vetorial (*Vector Fitting*) é um dos mais vantajosos, pois permite o ajuste de funções com pólos complexos. Entretanto, no caso do ajuste de funções para os parâmetros de linhas de transmissão, o ajuste realizado pode resultar na obtenção de pólos ou zeros instáveis.

A utilização de um método de ajuste não-linear para a obtenção das funções racionais aproximadas justifica-se pelo fato de que as funções que representam o fator de propagação, a impedância característica e os elementos da matriz de transformação modal

são de natureza não-linear. O método desenvolvido por BARROS [2002] (o qual será chamado de *método base*) é o ponto de partida para a implementação realizada neste trabalho. Este método utiliza o ajuste não-linear de Levenberg-Marquardt procurando superar as restrições impostas pela utilização de métodos de ajuste lineares. Entretanto, ele não permite o compartilhamento de pólos, assim como, para alguns casos não se obteve a precisão desejada. Dessa forma, o trabalho aqui apresentado visa contribuir superando estas limitações a partir de três pontos principais:

- a) Melhorar a precisão obtida no ajuste de funções a partir de modificações feitas na rotina implementada para o método de Levenberg-Marquardt;
- b) Melhoria do processo de convergência, fazendo com que a função erro seja minimizada com um número menor de iterações;
- c) Convergência com compartilhamento de pólos de maneira semelhante ao que é feito no *Vector Fitting*.

O primeiro passo para o desenvolvimento do algoritmo é definir a forma da função racional a ser utilizada. A função racional utilizada difere da função definida pela equação (3.12). Seu formato é dado por:

$$P(s) = G \frac{(a_1 s^2 + a_2 s + 1)}{(a_{p+1} s^2 + a_{p+2} s + 1)} \cdot \frac{(a_3 s^2 + a_4 s + 1)}{(a_{p+3} s^2 + a_{p+4} s + 1)} \cdots \frac{(a_{n-1} s^2 + a_n s + 1)}{(a_{n+p-1} s^2 + a_{n+p} s + 1)} \quad (4.24)$$

Esta diferença no formato da equação se deve ao fato de que a utilização dos termos do segundo grau nos denominadores e numeradores permite a obtenção de pólos e zeros complexos.

As modificações realizadas na rotina base podem ser divididas em três etapas principais:

- Divisão da faixa de frequência de interesse;
- Ajuste independente para pólos e zeros;
- Compartilhamento de pólos.

A primeira etapa, a divisão da faixa de frequência, consiste em dividir o número de pontos a ser ajustado de acordo com o número de pólos que serão utilizados, de forma que cada um destes conjuntos menores de pontos seja aproximado por uma função racional com apenas dois pólos. As estimativas iniciais utilizadas para os parâmetros nesta fase serão valores da função obtidos do próprio conjunto de pontos que se deseja ajustar. Os resultados obtidos são então utilizados como estimativas iniciais para um novo ajuste, desta vez utilizando o conjunto total de pontos. Esta etapa tem como finalidade melhorar a qualidade do ajuste obtido diminuindo a média dos erros finais.

A segunda etapa consiste de um ajuste feito de forma independente para o numerador e o denominador da função racional aproximada, tendo como objetivo principal escrever a função de forma adequada para a realização do compartilhamento de pólos assim como aprimorar a qualidade do ajuste.

Esta etapa é determinada por três passos principais. O primeiro deles consiste em definir a função racional aproximada na forma:

$$F_{ap}(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}. \quad (4.25)$$

Para esta função, os parâmetros do denominador, $D_1(s)$, são mantidos fixos enquanto que apenas os parâmetros do numerador, $N_1(s)$, são ajustados. Feito isto, é necessário agora passar para o segundo passo, realizando o processo inverso, ou seja, os novos parâmetros obtidos para $N_1(s)$ são mantidos fixos, enquanto realiza-se o ajuste de $D_1(s)$. Para este segundo passo, utiliza-se uma função auxiliar definida por:

$$\frac{F_{ap}(s)}{F(s)} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \frac{N_1(s)}{F(s)} \cdot \frac{1}{D_1(s)} = \frac{N_2(s)}{D_1(s)}. \quad (4.26)$$

Dessa forma, com os parâmetros de $D_1(s)$ ainda fixos, realiza-se o ajuste para os parâmetros de $N_2(s)$. De (4.26) se obtém a relação:

$$F(s) = \frac{N_1(s)}{N_2(s)}. \quad (4.27)$$

Ou seja, o polinômio $N_2(s)$ ajustado anteriormente, corresponde na verdade ao denominador da função que se deseja ajustar. Seus parâmetros são então utilizados para substituir os parâmetros de $D_1(s)$, de modo que a partir daí pode-se realizar um novo ajuste para $N_1(s)$, repetindo-se todo o processo a partir da equação (4.25).

Deve-se observar que o ajuste de $D_1(s)$ não é feito diretamente, mas a partir do uso de uma expressão auxiliar. A utilização da função auxiliar definida em (4.26) para a obtenção dos novos parâmetros para o denominador $D_1(s)$ se deve ao fato de que, procedendo desta forma, não é necessário definir uma nova rotina para o ajuste de $D_1(s)$ na forma como ele é definido na função em (4.25). Já o ajuste de $N_1(s)$ e de $N_2(s)$ da forma como estão definidos nas equações (4.25) e (4.26) é feito de forma mais simples, utilizando a mesma rotina já que estas equações apresentam a mesma estrutura.

Com base nos métodos implementados anteriormente, é desenvolvido o ajuste com compartilhamento de pólos. A primeira modificação realizada para esta etapa consiste na modificação dos dados de entrada. Em vez de serem utilizados os dados para uma única função, deve-se realizar a leitura dos dados de entrada de todas as funções que se deseja ajustar com o mesmo conjunto de pólos. Feito isto, uma das funções é definida como

referência realizando-se para a mesma um primeiro ajuste, utilizando o algoritmo definido na primeira etapa (divisão da faixa de frequência).

Feito o ajuste inicial para a função de referência, passa-se para a segunda etapa (ajuste independente para pólos e zeros), em que o denominador obtido é utilizado para o ajuste dos numeradores das demais funções e para o reajuste do numerador da própria função de referência. Dessa forma, as demais funções utilizarão o mesmo conjunto de pólos definido para a função de referência, diferenciando-se apenas pelos seus zeros (obtidos a partir dos parâmetros do numerador). O processo de ajuste independente dos pólos e zeros da função de referência e dos zeros das demais funções é repetido até que se atinja um resultado satisfatório, ou, até que se atinja um critério de parada pré-estabelecido.

A rotina de ajuste final, com compartilhamento de pólos, segue a seguinte seqüência:

1. Entrada dos pontos para as funções a serem ajustadas: $F_1, F_2 \dots F_n$;
2. A função F_1 é definida como função de referência e um primeiro ajuste (primeira etapa) é realizado para a mesma;
3. Utilizando os resultados obtidos no passo anterior, faz-se uma primeira melhoria para os parâmetros de F_1 , utilizando a segunda etapa;
4. Com o conjunto de pólos obtidos para F_1 no passo anterior, faz-se o ajuste dos zeros para as outras funções $F_2 \dots F_n$.
5. Repete-se o ajuste para F_1 utilizando a segunda etapa, melhorando-se a qualidade do ajuste e obtendo-se um novo conjunto de pólos;

6. Repete-se o ajuste para as outras funções com o novo conjunto de pólos de F_l , retornando-se ao passo anterior até que um critério de parada pré-estabelecido seja atingido.

Deve-se observar que, quando se faz o compartilhamento de pólos, apenas a função de referência utiliza um conjunto de pólos definido de acordo com os seus dados de entrada. As demais funções são forçadas a utilizar este mesmo conjunto de pólos, o qual, difere daquele que idealmente seria definido para as mesmas caso o ajuste fosse realizado de forma independente. É de se esperar então a obtenção de um resultado final com um erro um pouco maior para os parâmetros obtidos. Este inconveniente é contornado de duas formas. A primeira delas é a melhoria da qualidade do ajuste obtida com a divisão da faixa de frequência e com a repetição do ajuste independente para pólos e zeros. A segunda forma é o aumento do número de pólos utilizados em relação ao que seria necessário caso o ajuste independente para cada função fosse executado, permitindo assim uma maior liberdade na alocação dos pólos de modo que eles podem se adaptar mais facilmente às diferentes funções para as quais serão utilizados.

É necessário salientar os resultados obtidos com o compartilhamento de pólos, mesmo quando se utiliza um número maior de pólos para o ajuste, reflete em um aumento da eficiência computacional quando é realizada a simulação no tempo. Pois, conforme se pode verificar na equação (3.17), todas as funções definidas na forma desta equação utilizando o mesmo conjunto de pólos (p_i) serão diferenciadas apenas pelos valores dos parâmetros (k_i), os quais dependem dos valores dos zeros obtidos no ajuste da função. Dessa forma, as integrais de convolução serão praticamente as mesmas para as funções em

questão, diferenciando-se apenas em relação aos fatores k_i , os quais são constantes para cada uma delas.

Os resultados obtidos com as rotinas implementadas podem ser verificados no próximo capítulo.

Capítulo 5

Análise dos Resultados

Para se verificar a validade do método desenvolvido, foram realizados ajustes de diversas funções racionais, comparando-se os resultados com aqueles que foram obtidos para os ajustes feitos com o *método base*. Três tipos de funções foram utilizados: admitância equivalente de um circuito RLC, funções artificialmente criadas e parâmetros de linhas de transmissão.

Para a admitância característica do circuito RLC, considerou-se o circuito abaixo:

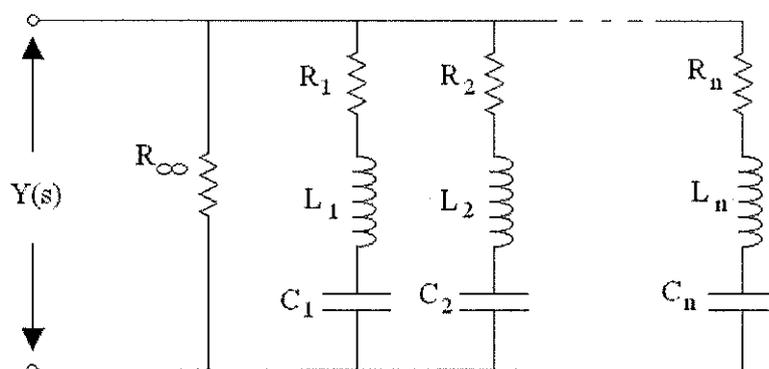


Figura 5.1 – Circuito RLC

Nesse circuito, o número de ramos RLC define o número de pólos e zeros da admitância equivalente. Desta forma, foram ajustadas diferentes funções com base nesse mesmo circuito, variando-se apenas a quantidade de ramos RLC utilizados.

As funções artificialmente criadas foram obtidas a partir da admitância característica para diferentes configurações do circuito RLC utilizado. Estas funções foram modificadas aleatoriamente para que fossem criadas diversas variações possíveis de novas funções para serem ajustadas.

Por fim, diversas configurações de linhas de transmissão foram criadas, de modo a se ajustar as funções correspondentes ao seu fator de propagação e sua admitância característica. Nos exemplos mostrados mais adiante, utilizou-se a seguinte configuração para uma linha trifásica:

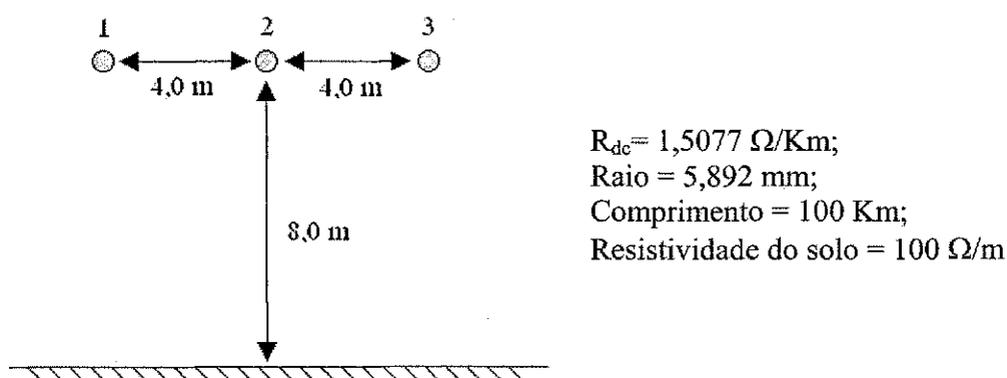


Figura 5.2 – Linha de transmissão trifásica

Para esta linha, foram ajustadas a admitância característica e o fator de propagação para cada uma das fases separadamente e, em seguida, realizou-se o ajuste para a admitância característica das três fases utilizando o compartilhamento de pólos.

No geral, o que se verifica é uma redução dos erros dos resultados obtidos com o método modificado. Tal redução, embora possa parecer muito pouca em alguns casos, é importante quando se utiliza o ajuste com compartilhamento de pólos, pois mantém baixos os erros obtidos para as funções que são forçadas a utilizar um conjunto de pólos diferente daquele que seria mais adequado para as mesmas e que seria obtido caso o ajuste fosse realizado de forma independente para cada função.

5.1 Comparativos – Impedância Equivalente do Circuito RLC

Caso 1: Função com 6 pólos e 6 zeros.

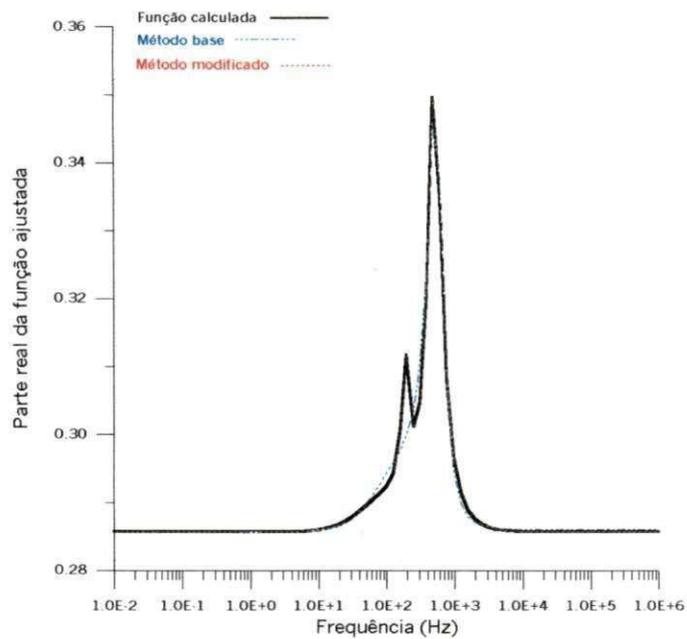


Figura 5.3 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte real.

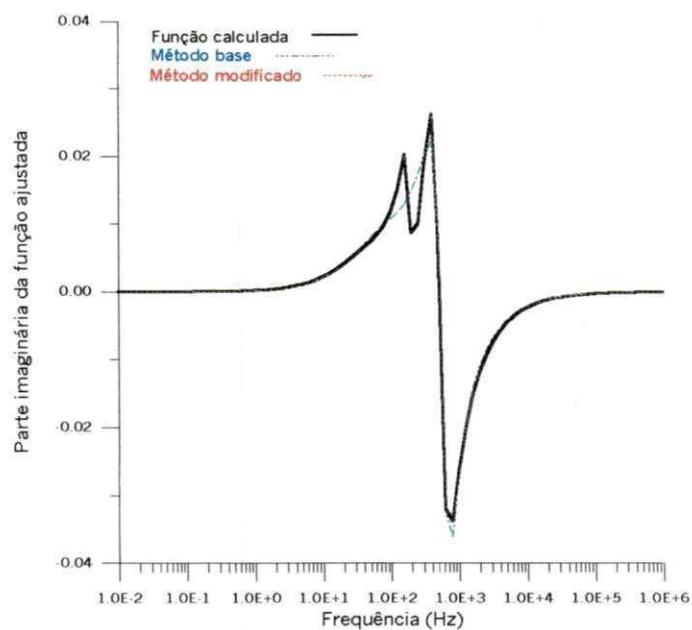


Figura 5.4 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte imaginária.

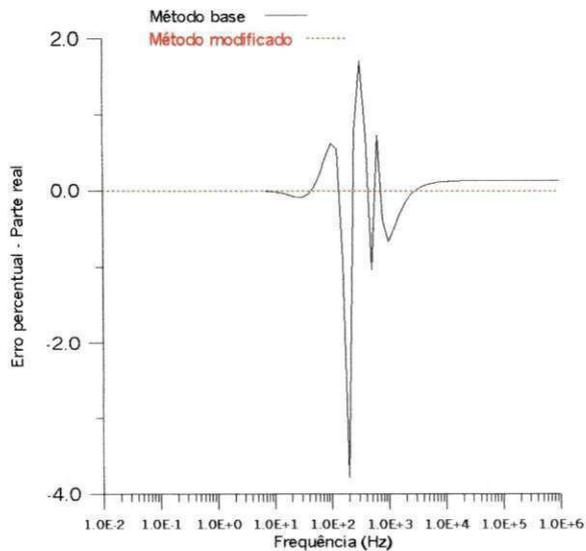


Figura 5.5 - Erro calculado – Parte real.

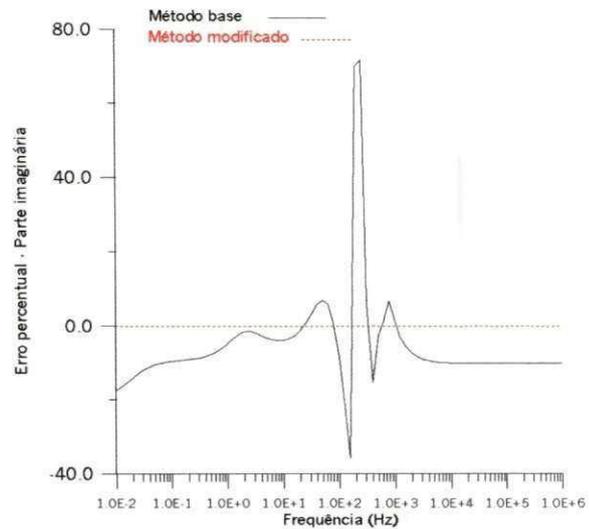


Figura 5.6 - Erro calculado – Parte imaginária.

Neste caso, conforme se pode observar nos gráficos, a utilização do método original resulta numa imprecisão nos resultados na faixa de frequência de 10Hz a 1 kHz. O método modificado conseguiu realizar o ajuste da função de forma mais precisa, tanto para a sua parte real, como para a sua parte imaginária, obtendo um erro médio nulo para os dois casos. Enquanto isso, a função original, obteve um erro médio de 0,21% para a parte real da função, e 9,9% para a parte imaginária.

Caso 2: Função com 8 pólos e 8 zeros.

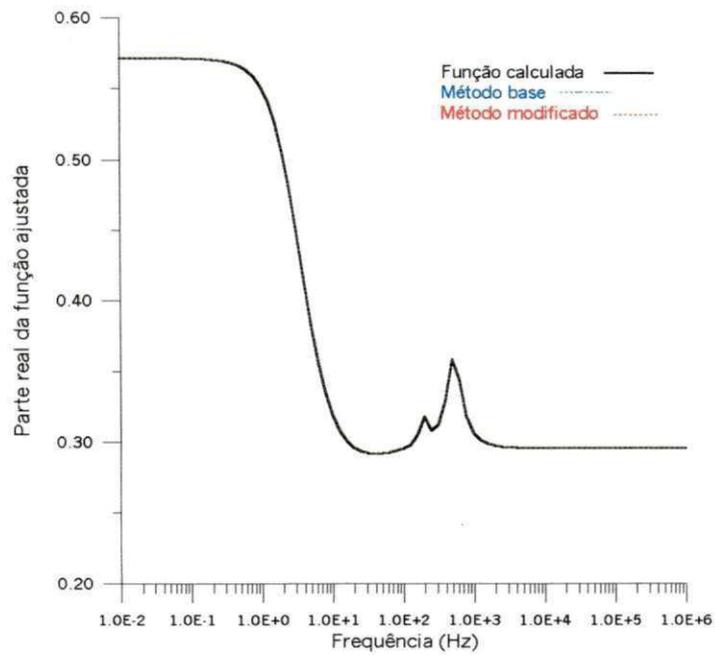


Figura 5.7 - Função com 8 pólos e 8 zeros – Parte real.

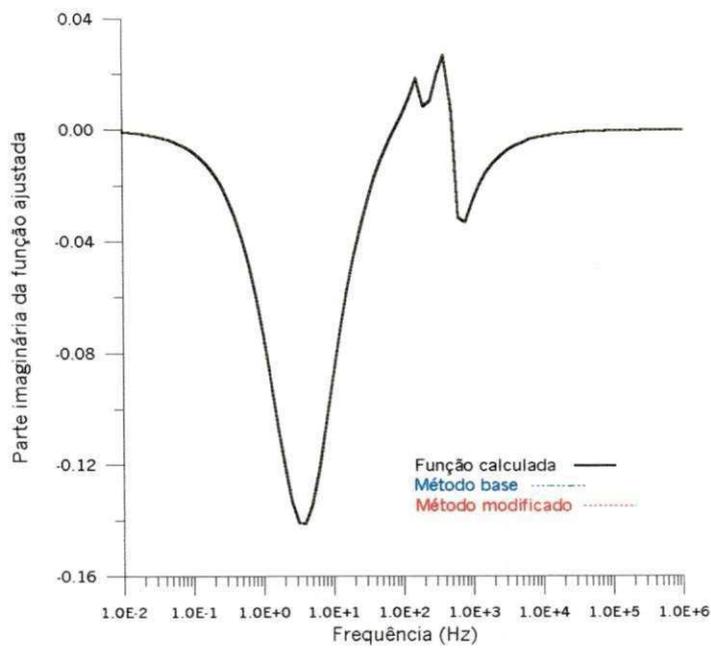


Figura 5.8 - Função com 8 pólos e 8 zeros – Parte imaginária.

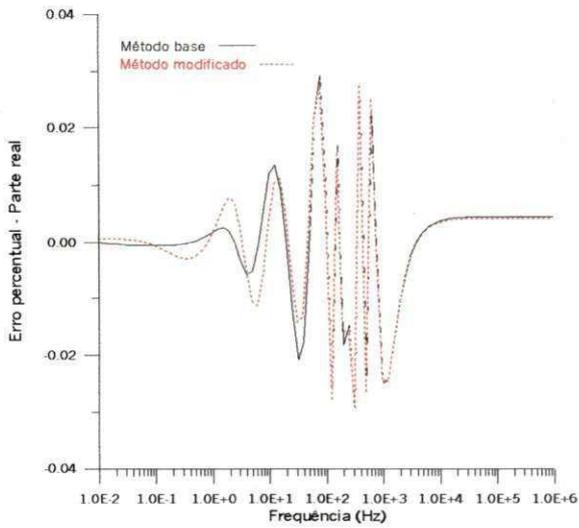


Figura 5.9 - Erro calculado – Parte real.

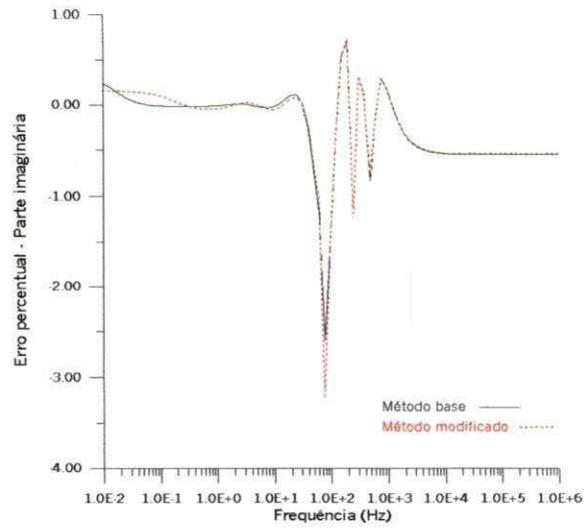


Figura 5.10 - Erro calculado – Parte imaginária.

Neste caso, o que se verifica é que a utilização do método original já resultava em um ajuste com uma boa precisão. Deste modo, a utilização do método modificado não apresentou diferenças apreciáveis nos resultados. Assim, ambos os métodos resultaram em um erro médio equivalente tanto para o ajuste da parte real da função, como para o ajuste da parte imaginária.

5.2 Comparativos – Funções artificialmente criadas

Caso 1: Função com 7 pólos e 6 zeros

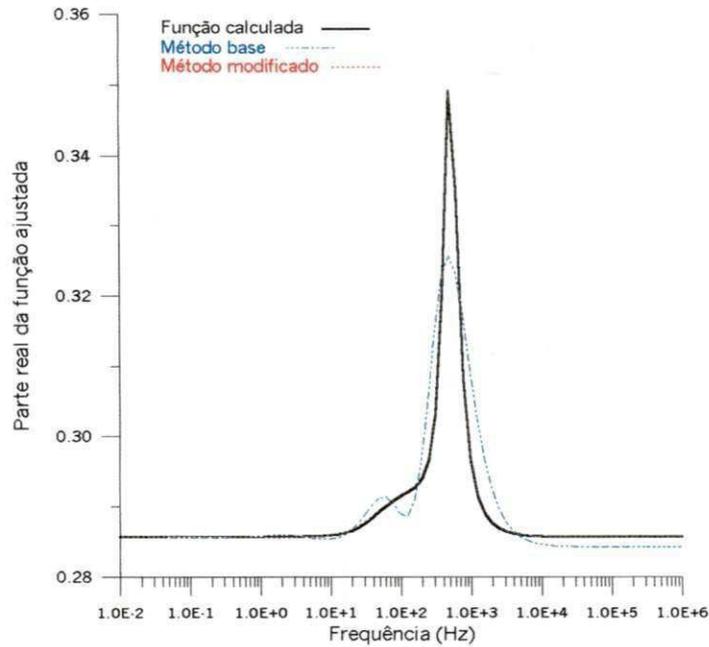


Figura 5.11 - Função com 7 pólos e 6 zeros – Parte real.

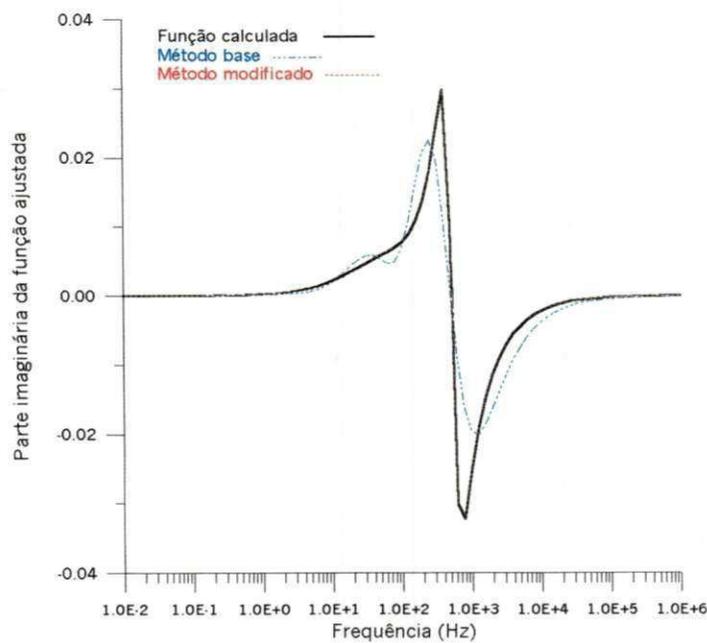


Figura 5.12 - Função com 7 pólos e 6 zeros – Parte imaginária.

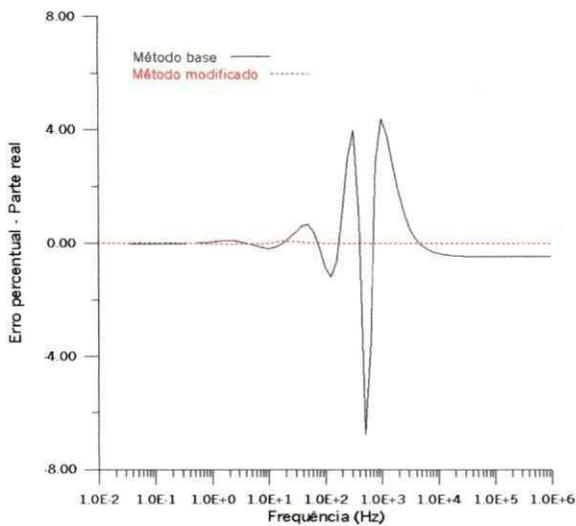


Figura 5.13 - Erro calculado – Parte real.

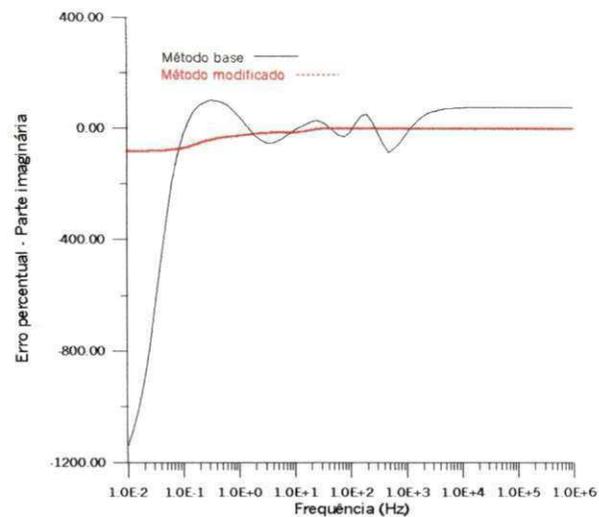


Figura 5.14 - Erro calculado – Parte imaginária.

Aqui, realiza-se o ajuste de uma função obtida a partir de modificações feitas na função para o circuito RLC com 6 pólos e 6 zeros. O que se verifica é que o método original produz um resultado insatisfatório, enquanto que o método modificado apresenta um resultado bastante preciso para as partes real e imaginária da função. O erro médio observado para o ajuste da parte real foi de 0,66% para o método original e 0,01% para o método modificado, enquanto que, para a parte imaginária, obteve-se um erro médio de 128,8% com o método original e 18,1% com o método modificado.

Caso 2: Função com 6 pólos e 6 zeros

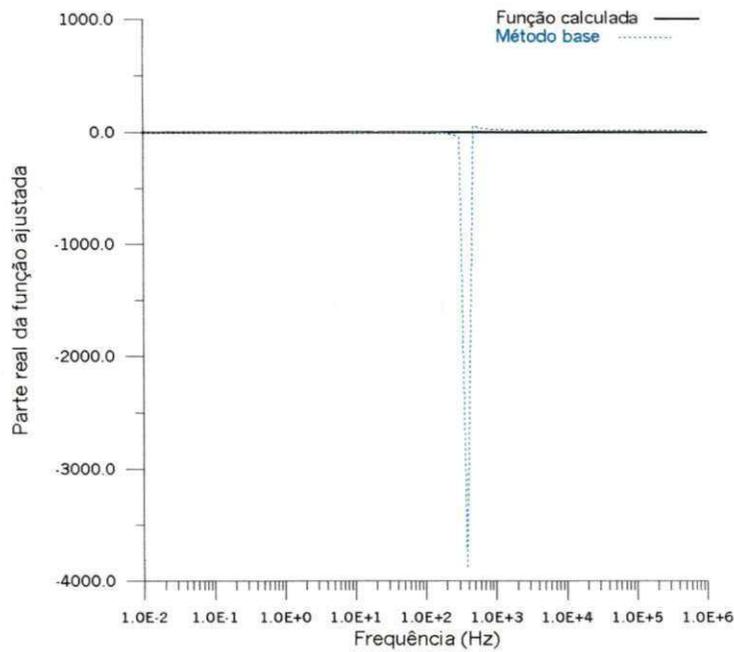


Figura 5.15 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte real – Método base.

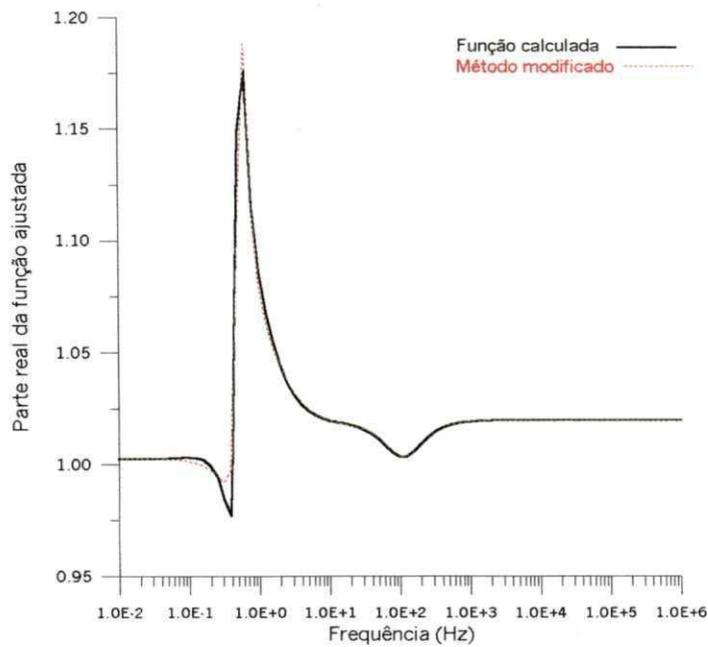


Figura 5.16 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte real – Método modificado.

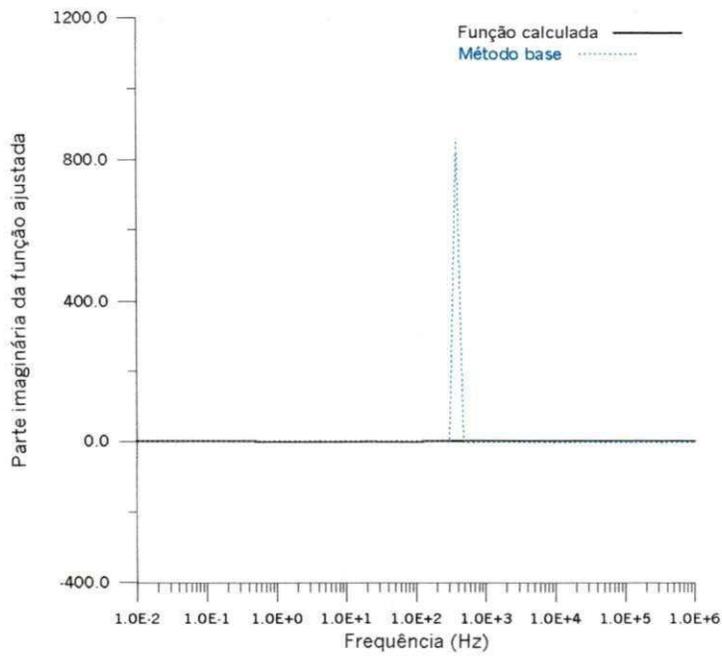


Figura 5.17 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte imaginária – Método base.

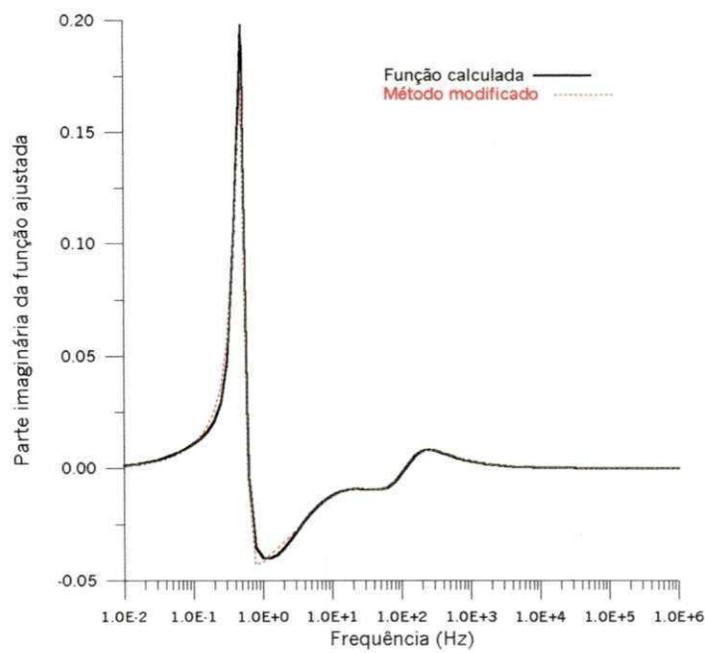


Figura 5.18 - Função com 6 pólos e 6 zeros – Parte imaginária – Método modificado.

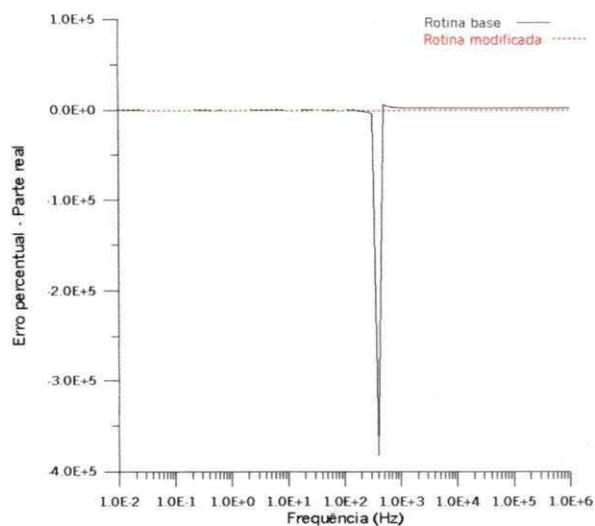


Figura 5.19 - Erro calculado – Parte real.

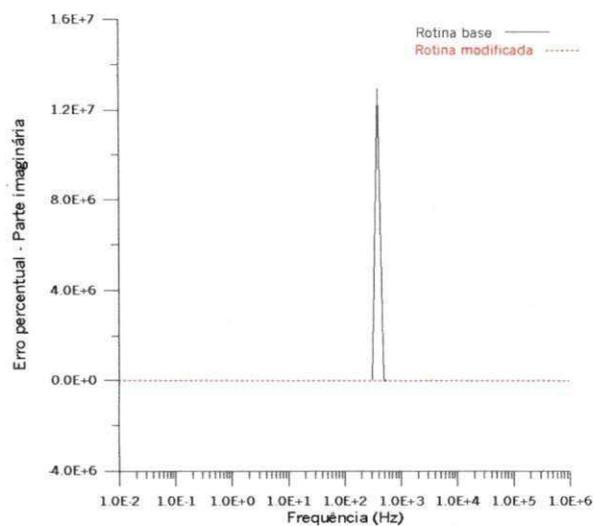


Figura 5.20 - Erro calculado – Parte imaginária.

A função ajustada aqui foi obtida a partir do circuito RLC com 6 pólos e 6 zeros. O que se observa é a divergência no ajuste da função no caso do método original, enquanto que o método modificado resulta em um melhor ajuste.

5.3 Comparativos para Linhas de Transmissão

Caso 1: Linha Trifásica – Admitância Característica

Os gráficos abaixo mostram os resultados para o ajuste da fase 2 da linha de transmissão mostrada na figura 5.2. Para o ajuste, foram utilizados 11 pólos e 11 zeros.

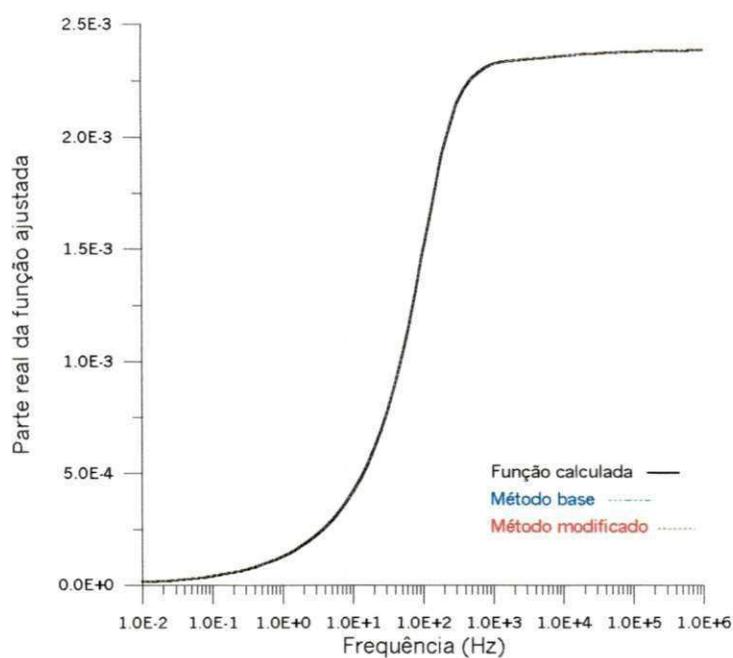


Figura 5.21 – Admitância Característica (Fase 2) - Parte real.

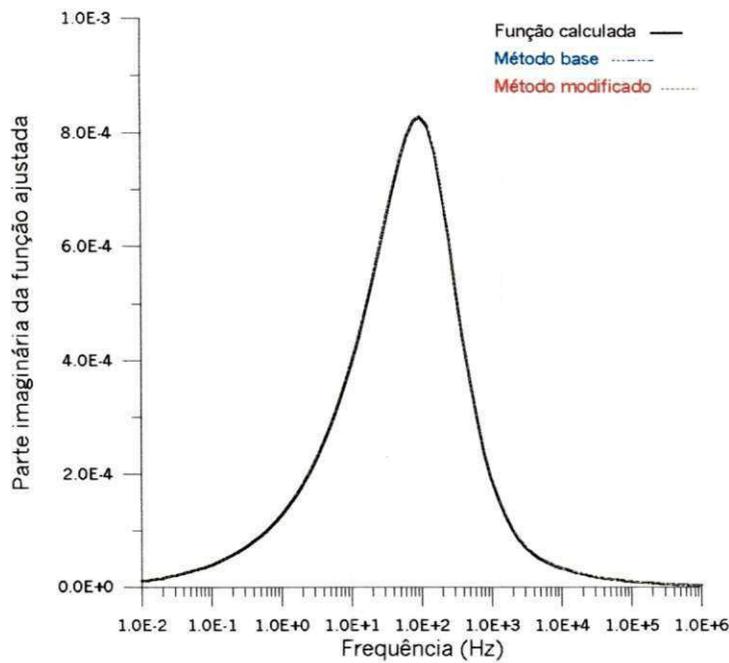


Figura 5.22 – Admitância Característica (Fase 2) - Parte imaginária.

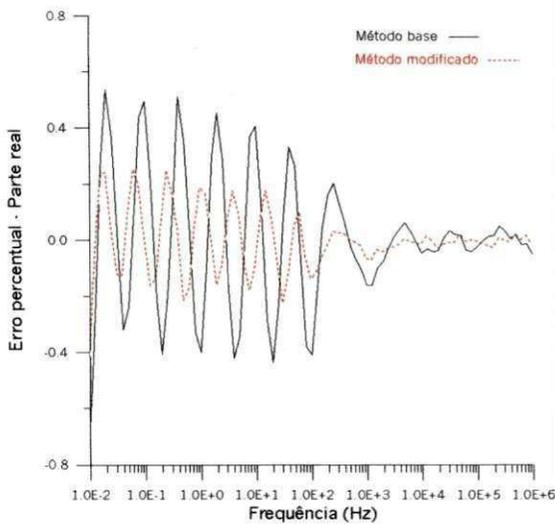


Figura 5.23 – Erro calculado – Parte real.

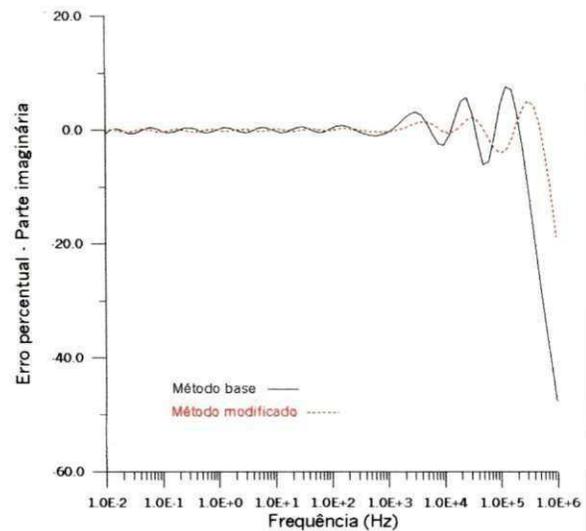


Figura 5.24 – Erro calculado – Parte imaginária.

Neste caso, a rotina base realizou o ajuste considerando apenas pólos reais para o fator de propagação. O que se verifica é que, a rotina modificada, fazendo o ajuste com pólos complexos, manteve a qualidade do ajuste obtido anteriormente, diminuindo um pouco os erros obtidos ao longo da faixa de frequência. O erro médio obtido para a rotina

base foi de 0,17% para a parte real e 3,38% para a parte imaginária, enquanto que, para a rotina modificada, obteve-se um erro médio de 0,08% para a parte real e 1,07% para a parte imaginária.

Caso 2: Linha Trifásica – Fator de Propagação

O exemplo abaixo mostra o ajuste para o fator de propagação para a fase 2 da linha trifásica utilizada no exemplo anterior.

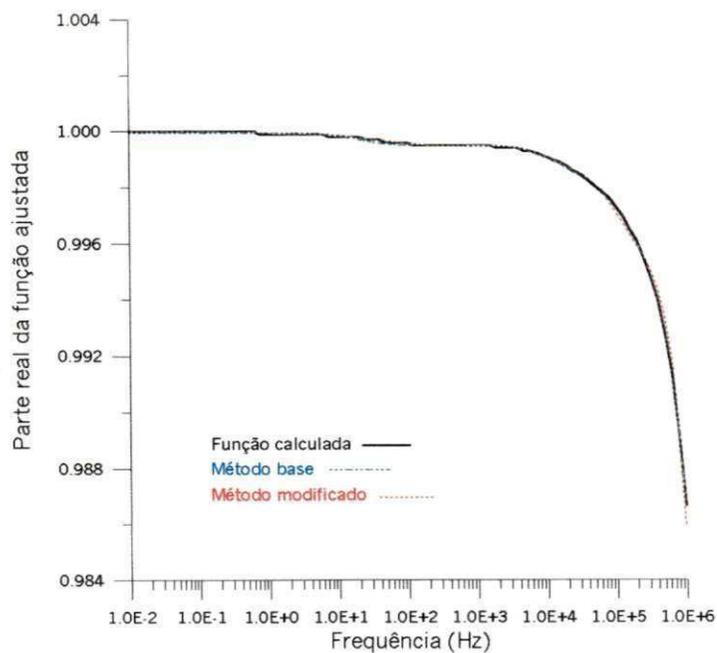


Figura 5.25 – Fator de Propagação (Fase 2) - Parte imaginária.

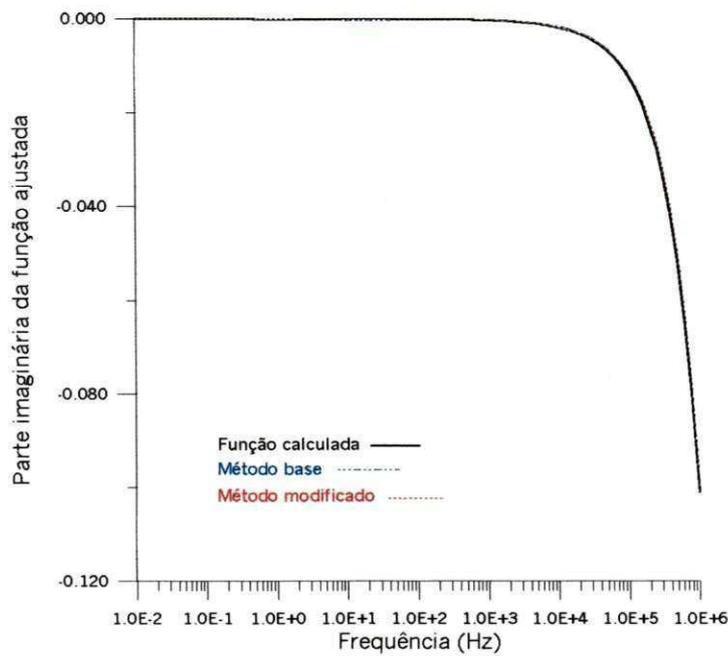


Figura 5.26 – Fator de Propagação (Fase 2) - Parte imaginária.

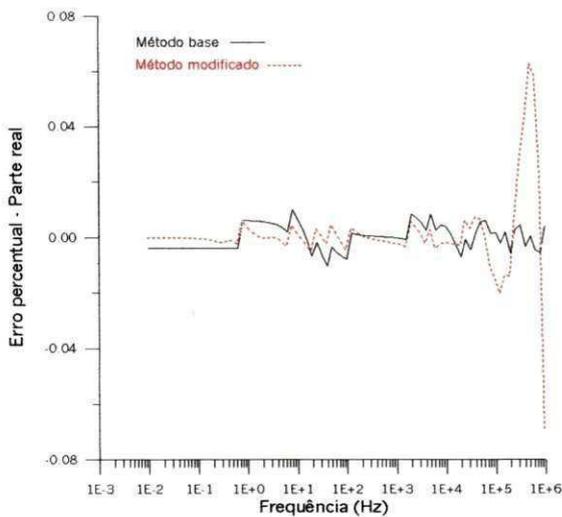


Figura 5.27 - Erro calculado – Parte real.

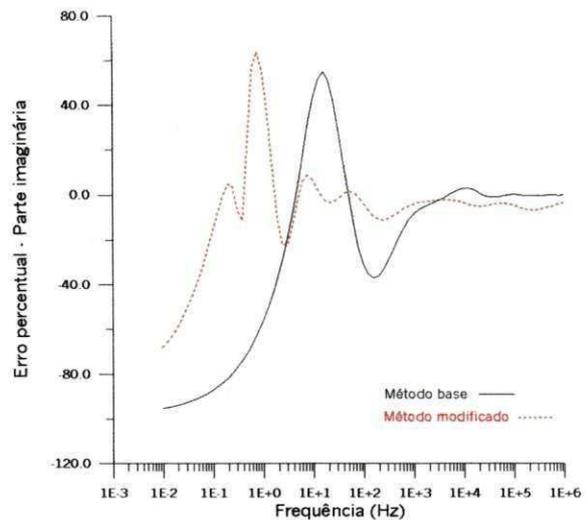


Figura 5.28 - Erro calculado – Parte imaginária.

Observa-se neste caso, que os erros obtidos com o método modificado foram um pouco maiores que aqueles obtidos com o método base. O método base resultou em um erro médio de 0,004% para a parte real e 32,40% para a parte imaginária, enquanto que o método modificado resultou em um erro médio de 0,006% para a parte real e 13,60% para a

parte imaginária. Parte destes erros são devidos a forma como a função aproximada é escrita. No método base, esta função é ajustada com um zero a menos em relação ao número de pólos, enquanto que, no método modificado, o ajuste é feito considerando-se o mesmo número de pólos e zeros. Assim, o ajuste base foi feito com 11 pólos e 10 zeros, enquanto que o ajuste modificado foi feito com 11 pólos e 11 zeros.

É importante observar o fato de que, no caso da parte imaginária da função ajustada, apesar de as funções estarem praticamente sobrepostas, o erro médio obtido é elevado, parecendo estar em discordância com o resultado obtido. Isto se deve ao fato de que os valores obtidos para a função são de ordem bastante baixa (10^{-2}), dessa forma, variações muito pequenas em relação ao valor teórico refletem em erros percentuais elevados, o que não significa, neste caso, que os resultados obtidos são inadequados.

5. 4 Funções Ajustadas com Compartilhamento de Pólos

Os resultados aqui mostrados referem-se ao ajuste da admitância característica das três fases da linha trifásica descrita no item 5.3. Neste caso, o ajuste é feito ao mesmo tempo para as três fases, considerando-se o compartilhamento de pólos entre elas. A função referente à fase 1 é utilizada como função de referência e os pólos obtidos no seu ajuste são utilizados para as funções das fases 2 e 3. O ajuste foi feito com 19 pólos, resultando na obtenção de pólos reais e complexos, todos estáveis, ou seja, no semi-plano esquerdo do plano complexo.

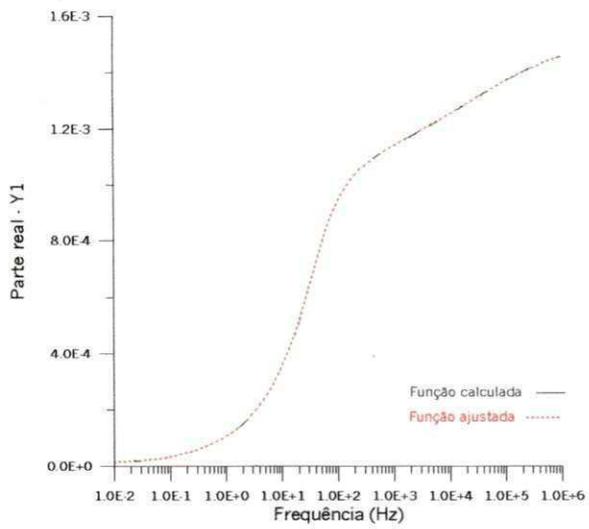


Figura 5.29 – Admitância característica – Fase 1 - Parte real.

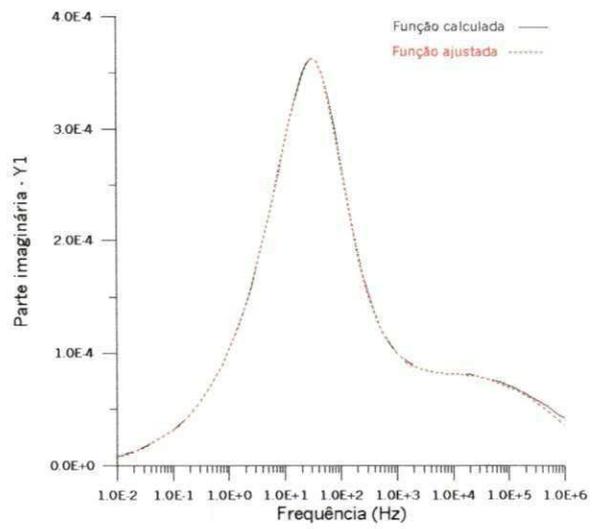


Figura 5.30 – Adm. característica – Fase 1 - Parte imaginária.

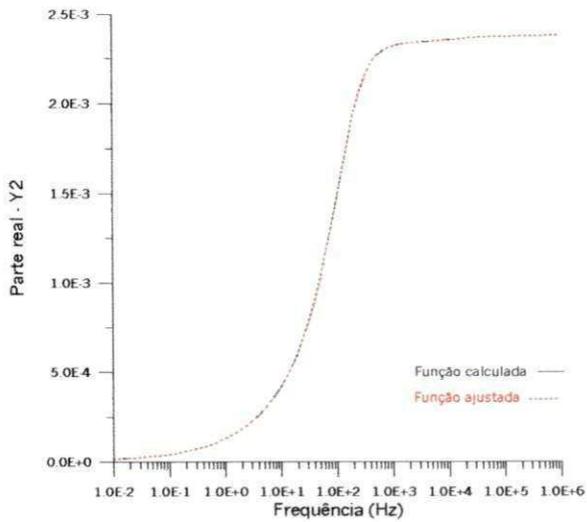


Figura 5.31 – Admitância característica – Fase 2 - Parte real.

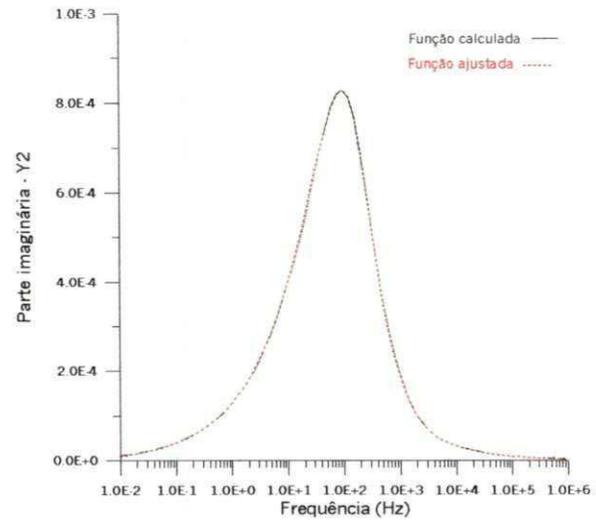


Figura 5.32 – Adm. característica – Fase 2 - Parte imaginária.

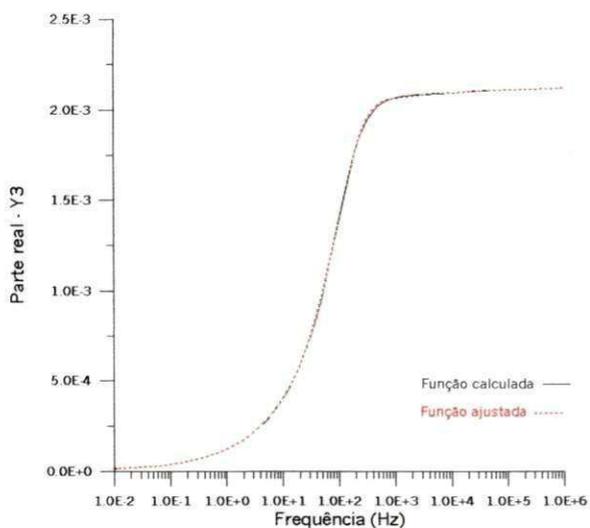


Figura 5.33 – Admitância característica – Fase 3 - Parte real.

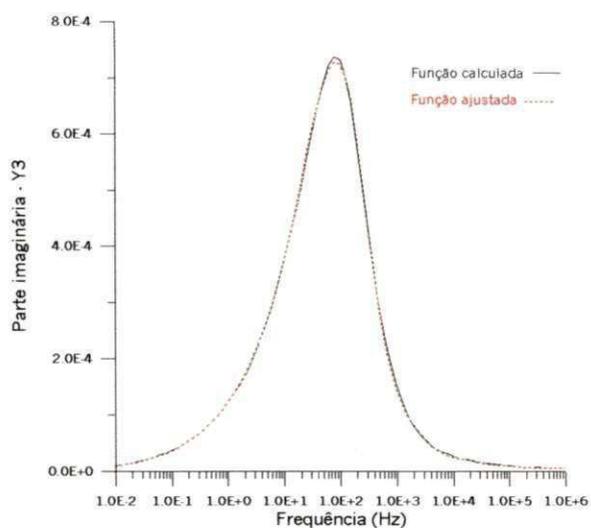


Figura 5.34 – Adm. característica – Fase 3 - Parte imaginária.

Conforme se pode observar nos gráficos, os ajustes foram feitos com uma boa precisão para as três fases da linha de transmissão. Um aspecto a ser observado é que, devido à necessidade de se fazer o compartilhamento, o número de pólos utilizados para o ajuste foi maior do que o número que seria utilizado caso cada uma das funções fosse ajustada de forma independente. Assim em vez de se utilizar 13 pólos, no caso da fase 1, por exemplo, estão sendo utilizados 19 pólos.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo principal, desenvolver a partir de um estudo dos modelos de linhas de transmissão e metodologias aplicadas à simulação de transitórios eletromagnéticos, uma rotina adequada para o ajuste de funções racionais representativas dos parâmetros de linhas de transmissão. Esta rotina, baseada no método de ajuste não-linear de Levenberg-Marquardt, utilizou como ponto de partida trabalhos desenvolvidos anteriormente neste mesmo âmbito de pesquisa, visando superar algumas limitações encontradas ou aprimorar os êxitos obtidos.

O método aqui desenvolvido apresenta algoritmo para o ajuste de funções racionais contínuas com pólos e zeros complexos e estáveis (localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo) de forma semelhante ao que se obtinha no método base. No entanto as modificações implementadas ao longo deste algoritmo resultaram na obtenção de uma melhor precisão no ajuste das funções e permitiram a realização do compartilhamento de

pólos entre as funções ajustadas. Característica esta importante para a utilização em modelos no domínio de fases, nos quais um grande número de funções relacionadas às matrizes de impedância característica, fator de propagação modal e transformação modal, são ajustadas e utilizadas para a simulação de transitórios no tempo.

Para a verificação dos resultados obtidos com o método desenvolvido, foram feitos ajustes da resposta em frequência de um circuito RLC com diferentes configurações, funções artificialmente criadas e parâmetros de linhas de transmissão gerados a partir de programas consagrados de simulação de transitórios eletromagnéticos. Verificou-se, no caso da resposta do circuito RLC e das funções artificialmente criadas, que a rotina implementada mantinha a qualidade do ajuste anterior, nos casos em que este apresentava uma boa precisão, assim como a melhorava consideravelmente em alguns casos em que o ajuste anterior apresentava uma média elevada de erros. No que diz respeito ao ajuste de funções para os parâmetros de linhas de transmissão, partiu-se de uma rotina que considerava apenas a existência de pólos reais e obteve-se uma rotina de ajuste com a obtenção de pólos complexos e precisão equivalente a rotina anterior.

Em relação à rotina de compartilhamento de pólos, foram obtidos resultados satisfatórios apresentando uma boa qualidade de ajuste com a utilização de pólos complexos. Verifica-se um pequeno aumento na quantidade de pólos necessária para fazer o ajuste de cada função, quando feita a comparação com o ajuste individual, sem compartilhamento. Ainda assim, os resultados apresentados levam a uma redução do esforço computacional, pois no processo de simulação no tempo, o mesmo conjunto de pólos é utilizado para todas as funções ajustadas com compartilhamento, reduzindo a

quantidade de integrais de convolução necessárias para a obtenção de uma resposta no tempo.

Um aspecto a ser considerado é o fato de que a rotina desenvolvida apresenta uma redução na velocidade com que o ajuste é implementado. Tal aspecto se deve ao fato de que para a obtenção do resultado final, realiza-se o ajuste em duas partes diferentes. A primeira delas sendo um ajuste grosseiro, e a segunda, utilizando os resultados da primeira parte para a obtenção de um ajuste mais aprimorado. Tal redução na velocidade, no entanto só é verificada na etapa do ajuste de funções, não se refletindo quando se passa para a etapa de simulação no tempo.

Referências Bibliográficas

- BARROS, L. SALES. *Modelagem de Linhas de Transmissão: Técnicas de Ajuste no Domínio de Fases*. Dissertação de Mestrado, UFCG, 2002.
- BUDNER, A.. *Introduction of Frequency-Dependent Line Parameters into an Electromagnetic Transients Program*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, pp. 88-97, January 1970.
- CARVALHO FILHO, D. M.. *Síntese de Funções Racionais para Estudos de Transitórios Eletromagnéticos Envolvendo Linhas de Transmissão*. Dissertação de Mestrado, UFPB, 2000.
- CASTELLANOS, F., MARTÍ, J. R., MARCANO, F.. *Phase-Domain Multiphase Transmission Line Models*. Electrical Power & Energy Systems, Vol. 19, No. 4, pp.241-248, Elsevier Science Ltd., 1997.
- CASTELLANOS, F., MARTI, J. R.. *Phase-Domain Multiphase Transmission Line Models*. IPST'95 - International Conference on Power Systems Transients, pp. 17-22, Lisbon, September 1995.

- DOMMEL, H. W.. *Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multi-Phase Networks*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, pp.388-399, April, 1969.
- DOMMEL, H. W.. *Electromagnetic Transients Program Reference Manual*. Department of Electrical Engineering, University of British Columbia, Vancouver. 1996.
- FERNANDES, A. B., NEVES, W. A.. *Frequency-Dependent Transformation Matrices for Phase Domain Transmission Line Models*. IEEE Summer Power Meeting 2001, Vancouver, Canada, July 15-19, 2001.
- FERNANDES, A. B.. *Linhas de Transmissão: Um Modelo no Domínio de Fases Preciso e Eficiente*. Tese de Doutorado, UFPB, 2001.
- FERNANDES, A. B.. *Linhas de Transmissão: Modelo Otimizado para Estudos de Transitórios Eletromagnéticos*. Dissertação de Mestrado, UFPB, 1996.
- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A.. *Enforcing Passivity for Admittance Matrices Approximated by Rational Functions*. IEEE Transactions Power Systems, Vol. 16, February 2001.
- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A.. *Rational Approximation of Frequency Domain Responses by Vector Fitting*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 14, No. 3, July 1999.
- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A.. *Calculation of Transmission Line Transients Using Polar Decomposition*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No. 3, July 1998.

- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A.. *Simulation of Transmission Lines Using Vector Fitting and Modal Decomposition*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No. 2, April 1998.
- HEDMAN, D. E.. *Propagation on Overhead Transmission Lines. I - Theory of Modal Analysis. II - Earth-Conduction Effects and Practical Results*. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-84, pp.205-211, May 1965.
- KAHANER, D., MOLER, C. and NASH, S.. *Numerical Methods and Software*. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1989.
- MARTÍ, L.. *Simulation of Transients in Underground Cables with Frequency-Dependent Modal Transformation Matrices*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 03, No.3, pp. 1099-1110, July 1988.
- MARTI, L.. *Low-Order Approximation of Transmission Line Parameters for Frequency-Dependent Models*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No.11, pp. 3582-3589, November 1983.
- MARTI, J. R.. *Accurate Modeling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transients Simulations*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No.1, pp. 147-157, January 1982.
- MICROTRAN POWER ANALYSIS CORPORATION. *Transients Analysis Program Reference Manual*. Vancouver, 1992.
- MEYER, W. S., DOMMEL, H. W.. *Numerical Modelling of Frequency-Dependent Transmission-Line Parameters in an Electromagnetic Transients Program*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol PAS-93, pp. 1401-1409, September/October 1974.

- MORCHED, A., GUSTAVSEN, B., TARTIBI, M.. *A Universal Model for Accurate Calculation of Electromagnetic Transients on Overhead Lines and Underground Cables*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 14, Iss..3, pp. 1032-1038, July 1999.
- NAIDU, S. R.. *Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência*. Campina Grande: Editora Grafset, ELETROBRÁS/UFPB, 1985.
- NEVES, W. A.. *Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas Elétricos – Notas de Aula*. Campina Grande, UFPB, 2001.
- NGUYEN, H. V., DOMMEL, H. W., MARTÍ, J. R.. *Direct Phase-Domain Modelling of Frequency-Dependent Overhead Transmission Lines*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 12, No. 3, July 1997.
- NODA, T., NAGAOKA, N., AMETANI, A.. *Phase Domain Modeling of Frequency-Dependent Transmission Lines by Means of an ARMA Model*. IEEE Trans. On Power Delivery, Vol. PWRD-11,-No.1, pp.401-411, January 1996.
- NODA, T., NAGAOKA, N., AMETANI, A.. *Further Improvements to a Phase-Domain ARMA Line Model in Terms of Convolution, Steady-State Initialization and Stability*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 12, No.3, pp.1327-1334, July 1997.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. and FLANNERY, B. P.. *Numerical Recipes in Fortran – The Art of Scientific Computing*. Second Edition. New York: Cambridge University Press, 1992.
- SNELSON, J. K.. *Propagation of Traveling Waves on Transmission Lines - Frequency Dependent Parameters*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, pp. 85-91, January/February 1972.

- WEDEPOHL, L. M. *Application of Matrix Methods to the Solution of Traveling-Wave Phenomena in Polyphase Systems*. Proc. IEE, Vol. 110, No. 12, pp. 2200-2212, December 1963.
- WEDEPOHL, L. M., NGUYEN, H. V., IRWIN, G. D.. *Frequency-dependent Transformation Matrices for Untransposed Transmission Lines Newton-Raphson Method*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, No. 3, August 1996.
- ZHOU, Pei-Bai. *Numerical Analysis of Electromagnetic Fields*. New York: Springer-Verlag, 1993.