

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística

O Problema de Riemann para um
Modelo Matemático de Escoamento
Trifásico com Dados de Injeção do
Tipo Água-gás e Dados de Produção
do Tipo Gás-óleo

por

Luciano Martins Barros [†]

sob orientação do professor

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da ANP

O Problema de Riemann para um Modelo Matemático de Escoamento Trifásico com Dados de Injeção do Tipo Água-gás e Dados de Produção do Tipo Gás-óleo

por

Luciano Martins Barros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota - UFCG

Prof. Dr. Luiz Antonio de Medeiros - UFCG

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março de 2010

Resumo

Neste trabalho obtivemos uma solução do problema de Riemann associado a um sistema de duas leis de conservação proveniente da modelagem matemática de um escoamento trifásico num meio poroso. Consideramos o caso de um reservatório petrolífero contendo inicialmente uma mistura arbitrária do tipo gás/óleo à ser deslocada pela injeção de uma mistura do tipo água/gás, também arbitrária. Usando uma combinação de métodos analíticos e computacionais determinamos a geometria das chamadas curvas de onda sob a condição de entropia de viscosidade, com matriz de viscosidade sendo a identidade. Determinamos todas as possíveis sequências de ondas que descrevem o escoamento para cada par de misturas de injeção e de produção representando os dados de Riemann. Mostramos que para dados de produção representando uma mistura próxima de óleo puro, ou de gás puro, apenas duas ondas estão presentes no escoamento, independentemente da mistura de injeção. No entanto, para dados de produção representando uma melhor proporção gás/óleo mostramos a existência de uma faixa de dados de injeção para a qual três ondas estão presentes no escoamento, uma delas sendo uma onda de choque transicional.

Palavras chave: leis de conservação, problema de Riemann, escoamento em meios porosos.

Abstract

In this work we describe a Riemann solution for a system of two conservation laws modeling a three-phase flow in a porous media. We consider the case where a petroleum reservoir is initially filled with an arbitrary gas/oil mixture to be displaced by the injection of a gas/water mixture, also arbitrary. By using a combination of analytical and computational methods we obtain the geometry of the so called wave curves under the viscous profile entropy condition, with the viscosity matrix as the identity. We determine all wave sequences describing the flow for each pair of injection and production mixtures, representing the Riemann data. We show that for production mixture data close to pure oil, or pure gas, only two waves are present in the flow independently on the injection mixture. Nevertheless, for production data representing a more proportional gas/oil mixture we show the existence of a injection data range for which three waves are present in the flow, one of them being a transitional shock wave.

Keywords: conservation laws, Riemann problem, porous media flow.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

Primeiramente, à Deus por estar sempre presente em todos os momentos de minha vida abrindo portas para que eu alcance meus objetivos.

À minha esposa Sânzia e ao meu filho Luan Max pelo amor, carinho e por ter suportado muitas vezes a minha ausência.

Aos meus pais Gessy e Sebastião por terem me conduzido no caminho certo. Aos meus irmãos Lucineide e Júnior pela força e incentivo.

À meu orientador Aparecido Jesuíno de Souza pela sua disposição no desenvolvimento deste trabalho até sua conclusão.

À UAME, particularmente na pessoa do professor Antônio Pereira Brandão Júnior.

Ao PRH-25, particularmente nas pessoas da professora Luciana Viana Amorim e o professor Francisco Antônio de Moraes.

Ao Professor José de Arimatéia e a Professora Rosana Marques pela confiança depositada.

À Professora Maria das Graças de Almeida pelo incentivo em todas ocasiões.

Ao Professor Dan Marchesin por ter disponibilizado o programa “ PAKMAN ” utilizado neste trabalho.

À Professora Maria Joseane Guedes pelo sincero apoio.

À todos meus colegas da pós-graduação pelo companheirismo.

À Agência Nacional de Petróleo (ANP) pelo apoio financeiro por meio do Programa de Recursos Humanos (PRH-25) e aos demais órgãos financiadores deste trabalho CNPq, CTBRASIL, CTPETRO, FINEP e INCTMat.

E a todos que, de uma forma, contribuíram na elaboração desta dissertação.

Dedicatória

Ao meu filho Luan Max.

Conteúdo

Introdução	6
1 Curvas Integrais e Curvas de Hugoniot	10
1.1 Curvas Integrais e Conjuntos de Inflexão	10
1.2 Curvas de Hugoniot Explícitas	12
2 Conjuntos de Extensão de Um dos Lados do Triângulo de Saturações	20
3 Solução do Problema de Riemann	31
3.1 Introdução	31
3.2 Estados Especiais para a Construção da Solução	33
3.3 Construção da Solução do Problema Riemann	34
4 Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros	75
A Resultados Básicos sobre Leis de Conservação	77
A.1 Problema de Cauchy	78
A.2 Problema de Riemann	78
A.3 Soluções Fundamentais	78
A.4 Choques de Lax/ Condição de Entropia de Lax	82
A.5 Choques Viscosos/Condição de Entropia de Viscosidade	83
A.6 Curvas de onda	85
A.7 Conjuntos Relevantes	87
Figuras	89
Bibliografia	133

Introdução

Neste trabalho trataremos do problema de Riemann associado a um sistema de leis de conservação proveniente da modelagem matemática de um escoamento isotérmico num meio poroso, consistindo de três fases móveis e imiscíveis (óleo, água e gás). Estaremos considerando uma situação em que um reservatório petrolífero esteja constituído inicialmente de uma mistura do tipo gás/óleo a qual deve ser deslocada para um poço produtor pela injeção de uma outra mistura do tipo água/gás. A dedução do sistema de leis de conservação pode ser encontrada por exemplo em (GUEDES, 2009) e está baseado nas leis de balanço de massa das fases e na lei de Darcy. Veja também (LAKE, 1989), (PEACEMAN, 1977), (ROSA, 2002), entre outros. Tal sistema é dado por:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(U(x, t))}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_- \equiv I, & \text{se } x < 0 \\ U_+ \equiv P, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (2)$$

onde $U = (s_w, s_o, s_g)$, $F = (f_w, f_o, f_g)$ e I, P representam as misturas de injeção e de produção, respectivamente. Este sistema (1) atrelado a condição inicial (2) é conhecido na literatura matemática como um problema de Riemann.

As variáveis $s_w(x, t)$, $s_o(x, t)$ e $s_g(x, t)$ são as saturações da água, do óleo e do gás, respectivamente, e portanto assumem valores no chamado triângulo de saturações $\Delta = \{(s_w, s_o, s_g); 0 \leq s_w \leq 1, 0 \leq s_o \leq 1, 0 \leq s_g \leq 1, s_w + s_o + s_g = 1\}$. Uma das hipóteses deste modelo é que o fluido ocupa todo o espaço da rocha, e por isto as

variáveis de estados s_w , s_o e s_g satisfazem $s_w + s_o + s_g = 1$. Assim, podemos obter uma das saturações em função das demais.

O triângulo de saturações, ou espaço de estados Δ está representado na Figura 1 em coordenadas baricêntricas. Os segmentos de reta $[G, D]$, $[E, W]$ e $[O, B]$ são os chamados conjuntos de bifurcação secundária cujas equações serão dadas mais a frente.

As chamadas funções de fluxo fracionário que definem $F(U)$ no sistema (1) são dadas por

$$f_w(s_w, s_o, s_g) = \frac{k_w(s_w)/\mu_w}{D(s_w, s_o, s_g)}, \quad (3)$$

$$f_o(s_w, s_o, s_g) = \frac{k_o(s_o)/\mu_o}{D(s_w, s_o, s_g)}, \quad (4)$$

$$f_g(s_w, s_o, s_g) = \frac{k_g(s_g)/\mu_g}{D(s_w, s_o, s_g)}, \quad (5)$$

onde

$$D(s_w, s_o, s_g) = \frac{k_w(s_w)}{\mu_w} + \frac{k_o(s_o)}{\mu_o} + \frac{k_g(s_g)}{\mu_g} \quad (6)$$

é a chamada mobilidade total.

As funções k_w , k_o e k_g que aparecem em (3)-(6) são as permeabilidades relativas e as constantes μ_w , μ_o e μ_g são as viscosidades da água, do óleo e do gás, respectivamente. Adotaremos o modelo de Corey em que a permeabilidade relativa de cada fase é uma função da saturação da própria fase. Em particular, seguindo os trabalhos (ISAACSON et al, 1992), (SOUZA, 1992), (AZEVEDO et al, 2009); entre outros, consideramos estas funções como sendo quadráticas, isto é,

$$k_w(s_w) = s_w^2, \quad (7)$$

$$k_o(s_o) = s_o^2, \quad (8)$$

$$k_g(s_g) = s_g^2. \quad (9)$$

Uma vez adotado este modelo de Corey o sistema (1) tem a peculiaridade de possuir um único ponto umbílico (ponto onde a matriz jacobiana de (1) possui autovalores repetidos e é diagonalizável) no interior do triângulo de saturações (SHEARER et al, 1987). Este ponto umbílico, denotado por \bar{U} , possui as seguintes componentes no espaço de estados (s_w, s_o, s_g) , em termos das viscosidades das fases

$$\bar{U} = \left(\frac{\mu_w}{\mu}, \frac{\mu_o}{\mu}, \frac{\mu_g}{\mu} \right), \quad (10)$$

onde $\mu = \mu_w + \mu_o + \mu_g$.

A evolução da resolução do problema de Riemann para o modelo de Corey quadrático, sob a condição de entropia de viscosidade com a matriz de viscosidade sendo a identidade, tem seguido essencialmente os passos seguintes. Um primeiro passo foi dado em (ISAACSON et al, 1992) considerando as viscosidades das três fases constantes e iguais, com isto o sistema (1) possuía uma simetria tripla no triângulo das saturações. Para este caso, a solução do problema de Riemann (1)-(2) foi determinada completamente para dados de Riemann arbitrários no triângulo de saturações. Em seguida, um segundo passo foi dado em (SOUZA, 1992,1995), considerando-se a viscosidade de uma das fases ligeiramente superior as outras duas e então houve a quebra de uma simetria, restando ainda uma dupla simetria no triângulo das saturações. Para este caso de quebra de simetria, a solução também foi determinada para dados de Riemann arbitrários. Em (GUEDES, 2009) também foi quebrada uma simetria, porém numa direção diferente daquela considerada em (SOUZA, 1992,1995), sendo desta vez considerada uma das viscosidade inferior as outras duas. Porém em (GUEDES, 2009) a solução do problema de Riemann foi determinada apenas para dados à direita ao longo do lado do triângulo de saturações representando mistura do tipo água/óleo no poço produtor e para dados à esquerda ao longo do lado do triângulo de saturações representando saturações de injeção de mistura do tipo água/gás para o deslocamento da mistura água/óleo.

Neste sentido da quebra de simetria em (AZEVEDO et al, 2009) foi considerada a quebra total de simetria em que as três viscosidade foram tomadas distintas, mas considerando o caso particular do estado à direita do problema de Riemann representar apenas a situação de um reservatório virgem, isto é, o dado à direita foi considerado como sendo o vértice O do triângulo de saturações exibido na Fig. 1 correspondendo à saturação de óleo máxima ($s_o = 1$). O dado à esquerda representando a mistura de injeção também foi considerado para o caso de injeção de uma mistura arbitrária do tipo água/gás como em (GUEDES, 2009).

O objetivo principal desta dissertação é ampliar os resultados obtidos até aqui considerando o dado à esquerda (dado de injeção) como uma mistura do tipo água/gás e o dado à direita (dado de produção) como uma mistura do tipo gás/óleo correspondendo a um outro lado do triângulo de saturações considerado em (GUEDES, 2009). Em

termos das viscosidades também estaremos considerando, como em (GUEDES, 2009), que uma das viscosidades seja inferior às outras duas. Em (GUEDES, 2009) o segmento de reta de bifurcação secundária $[G, D]$ na Fig. 1 tem papel relevante na construção da solução, enquanto no problema aqui considerado o segmento $[E, W]$ é que desempenha tal papel. Daí, no caso de (GUEDES, 2009), devido ao fato de parte da reta $[G, D]$ coincidir com parte da inflexão-1 (Fig. 2(a)) e o fato de D ser um ponto de bifurcação secundária e também de inflexão-2 (Fig. 3(a)) há menos casos a ser considerados para a solução do problema de Riemann em relação ao nosso caso, pois aqui o conjunto de inflexão-1 não tem interseção com a reta $[E, W]$, a não ser no ponto umbílico \bar{U} , e o estado E é um ponto do conjunto de bifurcação secundária mas não é um ponto do conjunto de inflexão-2. Estas não coincidências geraram o maior desafio deste trabalho.

Esta dissertação está organizada na seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos os perfis das curvas integrais das duas famílias características e os respectivos conjuntos de inflexão. Também neste mesmo Capítulo 1 determinamos as expressões explícitas das curvas de Hugoniot para estados ao longo do lado $[O, G]$ do triângulo de saturações onde serão considerados os dados de produção, bem como para estados ao longo do segmento de reta $[E, W]$ para os quais as curvas de Hugoniot possuem um ponto de bifurcação secundária.

No Capítulo 2 utilizamos as expressões explícitas das curvas de Hugoniot deduzidas no Capítulo 1, para caracterizar completamente os chamados conjuntos de extensão do lado do triângulo de saturações onde serão tomados os estados de produção. Conjuntos de extensão estes, associados às duas famílias características e que têm papel importante na construção da solução.

No Capítulo 3, baseados nos resultados dos Capítulos anteriores e no método das curvas de onda, apresentamos a construção da solução do problema de Riemann (1)-(2) em que os dados à esquerda representam uma mistura do tipo água/gás e os estados à direita representam um mistura do tipo gás/óleo.

No Apêndice A apresentamos alguns conceitos e resultados básicos que norteiam a construção da solução de um problema de Riemann em geral. Uma leitura por especialista pode ser omitida.

Por último apresentamos todas figuras inerentes à este trabalho.

Capítulo 1

Curvas Integrais e Curvas de Hugoniot

Neste Capítulo apresentaremos os perfis das curvas integrais, bem como os conjuntos de inflexão associados às duas famílias características do sistema (1). Também deduziremos as expressões que definem explicitamente as curvas de Hugoniot por estados bases ao longo do lado $[O, G]$ do triângulo de saturações e por estados ao longo da reta de bifurcação secundária $[E, W]$, veja Fig. 1.

Notação: por $[A, B]$ denotaremos um segmento de curva qualquer de extremidade A e B , com sentido de A para B .

1.1 Curvas Integrais e Conjuntos de Inflexão

Como está dito no Apêndice A as soluções contínuas de um sistema de leis de conservação jazem sobre as curvas integrais dos campos característicos da matriz jacobiana deste sistema. Neste sentido de buscarmos soluções contínuas precisamos então conhecer os perfis de tais curvas integrais. Para o sistema (1) tratado neste trabalho considerando $s_g = 1 - s_w - s_o$ e $f_g = 1 - f_w - f_o$, ou seja, escolhendo as duas primeiras equações em (1), a matriz Jacobiana do sistema correspondente é dada por

$$A(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_w}{\partial s_w} & \frac{\partial f_w}{\partial s_o} \\ \frac{\partial f_o}{\partial s_w} & \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \end{pmatrix}.$$

As expressões dos dois autovalores de $A(U)$ são dadas por

$$\lambda_1(U) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} + \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} - \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_o}{\partial s_w} \frac{\partial f_w}{\partial s_o}}, \quad (1.1)$$

$$\lambda_2(U) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} + \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} - \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_o}{\partial s_w} \frac{\partial f_w}{\partial s_o}}. \quad (1.2)$$

Os autovalores $\lambda_1(U)$ e $\lambda_2(U)$ são chamados de velocidades características associadas à família 1 e à família 2, respectivamente, e claramente temos $\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U)$, $\forall U \in \Delta$.

Mesmo com as expressões explícitas (1.1)-(1.2) para as velocidades características, tanto as curvas integrais como os conjuntos de inflexão foram obtidos numericamente através dos programas “ PAKMAN ” e “ MATLAB ”, mas para justificarmos a presença de estados dos conjuntos de inflexão utilizaremos os gráficos das velocidades características ao longo das curvas integrais. Estes estados do conjunto de inflexão são caracterizados quando as velocidades características atingem valores críticos (de máximo ou de mínimo) ao longo destas curvas integrais, como definido no Apêndice A para o caso geral.

Um perfil geral das curvas integrais associada à família característica “ 1 ” está exibido na Fig. 2(a), onde as setas indicam o sentido de crescimento da velocidade característica λ_1 ao longo das respectivas curvas integrais.

Para justificar o ponto de inflexão ao longo de cada curva integral vamos usar como representante a curva integral pelos estados U_1 , U_2 e U_3 na Fig 2(a). Considerando a expressão explícita de λ_1 , dada em (1.1), obtemos o gráfico de λ_1 ao longo desta curva integral exibido na Fig. 2(b). Observe que λ_1 se anula tanto no estado U_1 quanto no estado U_3 , o que é uma característica geral de λ_1 ao longo de cada lado do triângulo de saturações, isto é, $\lambda_1(U) = 0$, $\forall U \in [O, G] \cup [O, W] \cup [G, W]$.

Assim o estado U_2 (ver Fig. 2(b)) representa exatamente um estado onde a velocidade característica λ_1 é máxima, a partir dos estados U_1 e U_3 ; o que caracteriza o ponto de inflexão U_2 . Portanto, se considerarmos um problema de Riemann com dado à esquerda U_- entre U_1 e U_2 (ou entre U_3 e U_2) e o dado à direita sendo um estado entre o estado fixado U_- e U_2 , então a solução do Problema de Riemann consistirá de uma onda de rarefação-1. No entanto, para o problema de interesse deste trabalho devemos considerar $U_- \equiv I$ como sendo U_1 e $U_+ \equiv P$ como sendo U_3 . Logo, a solução

neste caso não pode ser constituída de apenas uma rarefação-1, mas de uma composta constituída de uma rarefação-1 seguida de choque característico à esquerda.

Para as curvas integrais da família característica “ 2 ”, como também para o conjunto de inflexão-2, fizemos o mesmo tratamento que foi feito para família-1. Os perfis das curvas integrais da família característica “ 2 ” e o conjunto de inflexão-2 estão exibidos na Fig. 3(a). Note que todas as curvas integrais da família-2 emanam dos vértices do triângulo de saturações. Fazendo o comparativo com a família-1 temos que a velocidade característica-2 anula-se apenas nos vértices do triângulo de saturações, enquanto a velocidade característica-1 anula-se em toda a fronteira.

Note na Fig. 3(a) que se considerarmos um estado à esquerda $U_- \equiv I$ ao longo do lado $[G, W]$ e o estado à direita $U_+ \equiv P$ ao longo do lado $[O, G]$ então não é possível resolver o respectivo problema de Riemann por uma onda de rarefação-2 apenas, pois não há curva integral de família-2 passando por este dois estados simultaneamente.

Observamos na Fig. 3(a) que o perfil das curvas integrais-2 são mais complexas nas vizinhança do ponto umbílico \bar{U} , podendo haver até três pontos de inflexão na mesma curva. Como pode ser vista na Fig. 4. Não trataremos disto aqui, já que isto não tem relevância para o problema considerado neste trabalho. Para maiores detalhes neste sentido ver (ISAACSON, 1992) e (SOUZA, 1995).

1.2 Curvas de Hugoniot Explícitas

Nesta seção, vamos obter analiticamente a expressão que define a curva de Hugoniot para estados base ao longo do lado $[O, G]$ do triângulo de saturações, como também para estados base ao longo do segmento $[E, W]$ da Fig. 1, as quais serão utilizadas na construção da solução do problema de Riemann considerado. Estamos nos referindo a estados base os estados considerados sobre o lado $[O, G]$ e o segmento $[E, W]$.

Curvas de Hugoniot por estados ao longo do lado $[O, G]$

Vamos obter a expressão que define a curva de Hugoniot por estados no intervalo (O, G) , pois a curva de Hugoniot pelo vértice O já foi obtida por (AZEVEDO et al, 2009). Ela consiste dos lados $[O, G]$, $[O, W]$ e do segmento de reta $[O, B]$ do triângulo de saturações. A curva de Hugoniot por G é análoga à do estado O consistindo dos

lados $[G, W]$, $[G, O]$ e do segmento $[G, D]$.

Já prevendo o uso de curvas de Hugoniot reversas vamos denotar o estado base ao longo de (O, G) por $U_+ = (s_w^+, s_o^+, s_g^+)$ e por f_w^+ , f_o^+ e f_g^+ os valores das funções de fluxos fracionários (3)-(5), respectivamente, avaliadas no estado U_+ . Da condição de Rankine-Hugoniot (A.8) aplicado ao sistema (1) segue que

$$\sigma(s_w - s_w^+) = f_w - f_w^+, \quad (1.3)$$

$$\sigma(s_o - s_o^+) = f_o - f_o^+, \quad (1.4)$$

$$\sigma(s_g - s_g^+) = f_g - f_g^+, \quad (1.5)$$

Como $U_+ \in (O, G)$, então $s_w^+ = 0$ e conseqüentemente $f_w^+ = 0$. Usando esta informação e analisando as equações (1.3)-(1.5) percebemos que um dos ramos da curva de Hugoniot por U_+ satisfaz $s_w = 0$, o qual coincide com o lado $[O, G]$, sendo que a velocidade de choque σ é obtida utilizando uma das equações (1.4) ou (1.5), já que se $s_w = 0$, então

$$s_o + s_g = 1, \quad (1.6)$$

e as equações (1.4)-(1.5) são idênticas. Assim, usando (1.4) temos que para $s_o \neq s_o^+$, σ é dado por

$$\sigma = \frac{\frac{s_o^2}{\mu_o D} - \frac{(s_o^+)^2}{\mu_o D^+}}{s_o - s_o^+}. \quad (1.7)$$

Como pode ser visto em (SMOLLER, 1994), no limite se fizermos $s_o \rightarrow s_o^+$ então $\sigma \rightarrow \lambda_2(U_+)$ já que o lado $[O, G]$ corresponde também a uma curva integral da família característica-2, como pode ser visto na Fig. 3(a).

Agora, se $s_w \neq 0$, como $s_w^+ = 0$, então a equação (1.3) toma a forma

$$\sigma = \frac{f_w}{s_w}. \quad (1.8)$$

Substituindo (1.8) em (1.4) obtemos uma nova equação dada por

$$\frac{f_o - f_o^+}{s_o - s_o^+} = \frac{f_w}{s_w}. \quad (1.9)$$

Daí, substituindo as expressões dadas pelas funções de fluxo fracionário da água (3) e do óleo (4), e fazendo algumas manipulações algébricas chegamos a equação

$$\mu_w (s_o^+)^2 D - \mu_w D^+ s_o^2 + \mu_o s_w s_o D^+ - \mu_o s_w (s_o^+)^2 D^+ = 0, \quad (1.10)$$

onde D^+ é a função mobilidade aplicada no estado U_+ . Agora, usando que $s_g = 1 - s_w - s_o$, substituímos a expressão da função mobilidade (6) em (1.10) e após mais algumas manipulações algébricas obtemos a seguinte equação quadrática

$$as_w^2 + bs_o^2 + cs_w s_o - ds_w - es_o + f = 0, \quad (1.11)$$

onde seus coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} a &= (\mu_g + \mu_w) (s_o^+)^2, \\ b &= \left(\frac{\mu_g}{\mu_o} \mu_w + \mu_w \right) (s_o^+)^2 - \mu_g \mu_w D^+, \\ c &= 2\mu_w (s_o^+)^2 + \mu_g \mu_o D^+, \\ d &= 2\mu_w (s_o^+)^2 + \mu_g \mu_o s_o^+ D^+, \\ e &= 2\mu_w (s_o^+)^2, \\ f &= \mu_w (s_o^+)^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Note que a equação (1.11) é a equação geral de uma cônica. Como $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ podemos classificar esta cônica como: elipse, parábola, ou hipérbole através do indicador da equação da cônica dado por

$$\delta = b^2 - 4ac. \quad (1.13)$$

Realizando alguns cálculos e utilizando os valores de viscosidades $\mu_w = \mu_o = 1$ e $\mu_g = 1/4$ verificamos que $\delta > 0$ para a equação (1.11). Logo, podemos concluir que a cônica dada pela equação (1.11) é uma hipérbole.

Considerando $Q : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(s_w, s_o) = as_w^2 + bs_o^2 + cs_w s_o - ds_w - es_o + f, \quad (1.14)$$

podemos reescrever a equação (1.11) explicitamente em termos da saturação da água s_w , ou da saturação do óleo s_o . De fato, como $Q \in C^\infty(\Omega)$, pois é um polinômio, então pelo Teorema da Função Implícita (LIMA, 2008) basta encontrarmos pontos $(\bar{s}_w, \bar{s}_o) \in \Omega$ tais que

$$Q(\bar{s}_w, \bar{s}_o) = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s_o}(\bar{s}_w, \bar{s}_o) = 2b\bar{s}_o + c\bar{s}_w - e \neq 0. \quad (1.16)$$

Este teorema garante localmente que $\bar{s}_o = \bar{s}_o(\bar{s}_w)$ em uma vizinhança de (\bar{s}_w, \bar{s}_o) .

Dessa forma, temos

$$s_o = \frac{-(cs_w - e) \pm \sqrt{(e - cs_w)^2 - 4b(as_w^2 - ds_w + f)}}{2b}, \quad (1.17)$$

satisfazendo a condição

$$(e - cs_w)^2 - 4b(as_w^2 - ds_w + f) > 0. \quad (1.18)$$

Resumindo, para obter s_o em função do s_w dada pela equação (1.17) as condições (1.16), ou (1.18) devem ser satisfeitas. Analogamente se escolhermos s_w em função do s_o , temos

$$s_w = \frac{-(cs_o - d) \pm \sqrt{(cs_o - d)^2 - 4a(bs_o^2 - es_o + f)}}{2a}, \quad (1.19)$$

satisfazendo a condição

$$(cs_o - d)^2 - 4a(bs_o^2 - es_o + f) > 0. \quad (1.20)$$

Com isto, descrevemos as expressões explícitas das curvas de Hugoniot por estados bases $U_+ \in [O, G]$. Resumindo, estas curvas consistem do lado $[O, G]$ conjuntamente com dois ramos de hipérboles internas ao triângulo de saturações Δ , sendo que um destes ramos contém o estado U_+ , e por isto é chamado de ramo local, e o outro é o ramo não local. A representação geométrica de curvas de Hugoniot por vários estados U_+ sobre o lado $[O, G]$ podem ser vistas por exemplo nas Figs. 14(a), 15(a), 21 e 39(a), no desenvolvimento do Capítulo 2.

As Retas de Bifurcação Secundária

Iniciamos esta Subseção considerando um caso especial na equação (1.11) onde os ramos da hipérbole se degeneram em duas retas e caracterizam um ponto de bifurcação secundária da curva de Hugoniot. Neste ponto que caracteriza a bifurcação secundária não se aplica o Teorema de Bethe-Wendroff (enunciado no Apêndice A) que relaciona estados na curva de Hugoniot onde a velocidade de choque atinge pontos críticos, os quais são muitas vezes responsáveis por mudanças na estrutura da sequência de ondas que constituem a solução do problema de Riemann.

Considere a reta pelo vértice W e pelo ponto umbílico \bar{U} do triângulo de saturações. Por substituição direta obtemos que a equação desta reta é dada por

$$\mu_g s_o - \mu_o s_g = 0. \quad (1.21)$$

Analogamente, considere duas retas uma por O e \bar{U} , e a outra por G e \bar{U} do triângulo de saturações cujas equações são dadas, respectivamente, por

$$\mu_g s_w - \mu_w s_g = 0, \quad (1.22)$$

$$\mu_w s_o - \mu_o s_w = 0. \quad (1.23)$$

Sejam E , B e D os pontos das interseções das retas por W e \bar{U} , por O e \bar{U} e por G e \bar{U} com os lados $[O, G]$, $[G, W]$ e $[O, W]$, respectivamente. Por um cálculo direto nas variáveis (s_w, s_o, s_g) obtemos que estes pontos são dados por

$$E = \left(0, \frac{\mu_o}{\mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_g}{\mu_o + \mu_g} \right), \quad (1.24)$$

$$B = \left(\frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_g}, 0, \frac{\mu_g}{\mu_w + \mu_g} \right), \quad (1.25)$$

$$D = \left(\frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o}, \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o}, 0 \right). \quad (1.26)$$

Curva de Hugoniot pelo estado E

Fixemos então o estado E sobre o lado $[O, G]$. Aplicando as coordenadas de E na equação (1.11) e fazendo algumas manipulações obtemos que os ramos da hipérbola que são parte da curva de Hugoniot por E correspondem ao produto:

$$(\mu_g s_o - \mu_o s_g) (\mu_g (\mu_o + \mu_g) s_o + \mu_o (\mu_o + \mu_g) s_g - \mu_g \mu_o) = 0. \quad (1.27)$$

Juntando a equação (1.27) com o próprio lado $[O, G]$, que sempre é parte da curva de Hugoniot por estados sobre o lado $[O, G]$, chegamos a conclusão que a curva de Hugoniot por E consiste dos seguintes segmentos de reta, como mostrado na Fig. 5:

$$[O, G] \text{ de equação : } 1 - s_o - s_g = 0, \quad (1.28)$$

$$[E, W] \text{ de equação : } \mu_g s_o - \mu_o s_g = 0, \quad (1.29)$$

$$[D, B] \text{ de equação : } \mu_g(\mu_o + \mu_g)s_o + \mu_o(\mu_o + \mu_g)s_g - \mu_g\mu_o = 0. \quad (1.30)$$

Isto significa que os ramos da hipérbole da curva de Hugoniot pelo estado E degenerou-se em dois segmentos de retas. Fazendo a intersecção das retas $[E, W]$ e $[D, B]$, obtemos as coordenadas do ponto de bifurcação secundária da curva de Hugoniot por E , denotado por T^E :

$$T^E = \left(\frac{2\mu_w}{2\mu_w + \mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_o}{2\mu_w + \mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_g}{2\mu_w + \mu_o + \mu_g} \right). \quad (1.31)$$

Calculando por substituição direta as velocidades características no estado T^E e a velocidade de choque entre T^E e E , obtemos que:

$$\lambda_1(T^E) = \frac{2(2\mu_w + \mu_o + \mu_g)}{4\mu_w + \mu_o + \mu_g}, \quad (1.32)$$

$$\lambda_2(T^E) = 4 \left(\frac{2\mu_w + \mu_o + \mu_g}{4\mu_w + \mu_o + \mu_g} \right)^2 = (\lambda_1(T^E))^2, \quad (1.33)$$

$$\sigma(T^E, E) = \frac{2(2\mu_w + \mu_o + \mu_g)}{4\mu_w + \mu_o + \mu_g} = \lambda_1(T^E). \quad (1.34)$$

Portanto das equações (1.32) e (1.34) obtemos que o estado T^E corresponde a uma extensão-1 do estado E e claramente do ponto de vista geométrico temos também que T^E é um ponto de bifurcação secundária-1 de $\mathcal{H}(E)$ segundo a Definição 1.16 no Apêndice A. Veja a Fig. 5 onde está exibida a curva de Hugoniot por E .

Observação: obtemos de maneira análoga que os estados D e B também correspondem a estados sobre os lados $[O, W]$ e $[G, W]$, respectivamente, em que as curvas de Hugoniot por D e por B possuem um ponto de bifurcação secundária-1. Estes estados são dados por

$$T^D = \left(\frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o + 2\mu_g}, \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o + 2\mu_g}, \frac{2\mu_g}{\mu_w + \mu_o + 2\mu_g} \right), \quad (1.35)$$

$$T^B = \left(\frac{\mu_w}{\mu_w + 2\mu_o + \mu_g}, \frac{2\mu_o}{\mu_w + 2\mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_g}{\mu_w + 2\mu_o + \mu_g} \right). \quad (1.36)$$

Curva de Hugoniot por um estado U_+ em (E, W)

Uma vez caracterizada a bifurcação secundária das curvas de Hugoniot pelos estados E , B e D vamos obter explicitamente as expressões que definem as curvas

de Hugoniot por estados genéricos do segmento de reta $[E, W]$. A curva de Hugoniot pelo estado E já foi obtida acima. A curva de Hugoniot pelo estado W consiste dos ramos $[E, W]$, $[O, W]$ e $[G, W]$ a qual pode ser obtida da mesma forma que a curva de Hugoniot por O .

Considere então um estado arbitrário U_+ no segmento de reta (E, W) . Da equação (1.29) tem-se que

$$U_+ = \left(s_w^+, s_o^+, \frac{\mu_g}{\mu_o} s_o^+ \right). \quad (1.37)$$

Eliminando σ das equações (1.4) e (1.5), segue que

$$\frac{f_o - f_o^+}{s_o - s_o^+} = \frac{f_g - f_g^+}{s_g - s_g^+}. \quad (1.38)$$

Substituindo as coordenadas de U_+ dadas em (1.37) na equação (1.38), usando as expressões das funções de fluxo e realizando algumas manipulações algébricas, obtemos que a expressão da curva de Hugoniot por um estado U_+ arbitrário sobre o segmento (E, W) pode ser escrita como

$$\left(s_o - \frac{\mu_o}{\mu_g} s_g \right) \left[\left(\frac{\mu_o}{\mu_g} D^+ s_o s_g + D (s_o^+)^2 \right) - D^+ s_o^+ \left(s_o + \frac{\mu_o}{\mu_g} s_g \right) \right] = 0. \quad (1.39)$$

Note que o primeiro fator do produto dado pela equação (1.39) é justamente a expressão que define o segmento de reta $[E, W]$ em (1.21). Eliminando este primeiro fator e substituindo a expressão da mobilidade dada em (6) na equação (1.39), e usando que $s_w = 1 - s_o - s_g$, chegamos à seguinte equação quadrática

$$As_o^2 + Bs_g^2 + Cs_o s_g - Ds_o - Es_g + F = 0, \quad (1.40)$$

onde seus coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} A &= \frac{(s_o^+)^2}{\mu_w} + \frac{(s_o^+)^2}{\mu_o}, \\ B &= \frac{(s_o^+)^2}{\mu_w} + \frac{(s_o^+)^2}{\mu_o}, \\ C &= \frac{\mu_o}{\mu_g} D^+ + \frac{2}{\mu_w} (s_o^+)^2, \\ D &= \frac{2}{\mu_w} (s_o^+)^2 + D^+ s_o^+, \\ E &= \frac{2}{\mu_w} (s_o^+)^2 + \frac{\mu_o}{\mu_g} D^+ s_o^+, \\ F &= \frac{(s_o^+)^2}{\mu_w}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Novamente um cálculo direto mostra que o indicador δ dado pela expressão (1.13) é positivo para os coeficientes definidos na equação (1.41) e valores de viscosidades os mesmos dados inicialmente. Logo, a cônica em (1.40) é uma hipérbole.

Daí, fazendo em (1.40) o mesmo tratamento feito com (1.11) podemos obter s_o em função de s_g , ou s_g em função s_o . Se optarmos por s_o em função de s_g , então a expressão que define a hiperbóle é dada por

$$s_o = \frac{-(Cs_g - D) \pm \sqrt{(Cs_g - D)^2 - 4A(Bs_g^2 - Es_g + F)}}{2A}, \quad (1.42)$$

desde que ambas das condições (1.43) e (1.44)

$$2As_o + Cs_g - D \neq 0, \quad (1.43)$$

$$(Cs_g - D)^2 - 4A(Bs_g^2 - Es_g + F) > 0 \quad (1.44)$$

sejam satisfeitas.

Se optarmos por s_g em função de s_o , temos

$$s_g = \frac{-(Cs_o - E) \pm \sqrt{(Cs_o - E)^2 - 4B(As_o^2 - Ds_o + F)}}{2B}, \quad (1.45)$$

com a condição

$$(Cs_o - E)^2 - 4B(As_o^2 - Ds_o + F) > 0 \quad (1.46)$$

Portanto, o primeiro fator do produto dado pela equação (1.39) junto com uma das equações (1.42) ou (1.45) definem explicitamente a curva de Hugoniot por um estado U_+ no segmento (E, W) . Veja as Figs. 6(a) e 6(b) onde estão exibidas duas curvas de Hugoniot por U_+ em (E, W) . Na Fig. 6(a) a curva de Hugoniot por U_+ possui um ponto de bifurcação secundária U_1 associada a família característica “ 1 ”, isto ocorre para todo estado base U_+ no segmento $[E, \bar{U})$. Já na Fig. 6(b) a curva de Hugoniot por U_+ possui um ponto de bifurcação secundária U_2 associada a família característica “ 2 ”, o que ocorre para todo estado base U_+ no segmento (\bar{U}, W) . Observamos, se fizermos $U_+ = E$ na Fig. 6(a), então esta hipérbole degenera-se nas retas $[O, G]$ e $[D, B]$ como discutido anteriormente e exibido na Fig. 5 e que se fizermos $U_+ = W$ na Fig. 6(b) o ramo não local se degenera nos lados $[G, W]$ e $[O, W]$ enquanto o ramo local se reduz ao estado W .

Capítulo 2

Conjuntos de Extensão de Um dos Lados do Triângulo de Saturações

Neste trabalho as extensões do lado $[O, G]$ do triângulo das saturações associadas às duas famílias características são fundamentais na construção da solução do problema de Riemann, uma vez que os estados de produção estarão neste lado $[O, G]$.

Pela definição (1.17) as extensões do lado $[O, G]$ são definidas por

$$E^1([O, G]) = \{U \in \Delta : \exists P \in [O, G], \exists \sigma \in \mathbb{R}, \text{ com } P \neq U, \\ \mathcal{H}(U, \sigma, P) = 0 \text{ e } \sigma = \lambda_1(U)\},$$
$$E^2([O, G]) = \{U \in \Delta : \exists P \in [O, G], \exists \sigma \in \mathbb{R}, \text{ com } U \neq P, \\ \mathcal{H}(U, \sigma, P) = 0 \text{ e } \sigma = \lambda_2(U)\}.$$

Na Fig. 7 apresentamos as curvas correspondentes à representação geométrica dos conjuntos de extensão do lado $[O, G]$ associados as duas famílias características e também a sobrepomos com o conjunto de inflexão-1 para efeito de comparação de posições relativas. A princípio, estes conjuntos de extensão do lado $[O, G]$ foram obtidos numericamente, mas o objetivo desta Seção é descrever ou pelo menos justificar as curvas exibidas na Fig. 7. Para isso, perturbaremos o estado base a partir do vértice O até o vértice G , e de acordo com cada perturbação visualizaremos o perfil da curva de Hugoniot (reversa), bem como gráficos de velocidades características e de velocidade de choque ao longo de segmentos apropriados de tal curva de Hugoniot para obtermos

informações que justifiquem a existência de tais pontos de extensão. Dentre os estados base ao longo de $[O, G]$ aqueles que separam comportamentos geométrico distintos da curva de Hugoniot serão destacados, sendo que vários deles também determinarão construções distintas de soluções do problema de Riemann e outros não.

Destacamos que os perfis das curvas de Hugoniot foram obtidos a partir das expressões explícitas dadas em (1.17) ou (1.19), e apenas para exibí-los é que utilizamos os recursos gráficos do programa MATLAB. Neste caso, usamos os seguintes valores de viscosidades $\mu_w = \mu_o = 1$ e $\mu_g = 0,25$ para podermos comparar os nossos resultados com os de (GUEDES, 2009).

Observação: os ramos das curvas de Hugoniot serão representados nas figuras por linhas tracejadas. Para os gráficos das velocidades vamos usar a convenção dada na Tabela a seguir:

Velocidades	Representação
característica-1	linha pontilhada
característica-2	linha contínua
choque	linha segmentada

Iniciamos considerando a curva de Hugoniot pelo estado base O , a qual está mostrada na Fig. 8. Esta curva de Hugoniot foi inicialmente descrita em (AZEVEDO et al, 2009), mas por conveniência repetimos-a abreviadamente aqui. Ela é composta por três segmentos de reta: o lado $[O, G]$, o segmento $[O, B]$ e o lado $[O, W]$. Na Fig. 8 os estados G_*^O , B_* e W_*^O , são tais que $\sigma(G_*^O, O) = \lambda_2(G_*^O)$, $\sigma(B_*, O) = \lambda_1(B_*)$ e $\sigma(W_*^O, O) = \lambda_2(W_*^O)$, ou seja, G_*^O e W_*^O são extensões-2 e B_* é uma extensão-1 do vértice O . Observamos que com relação ao trabalho citado, fizemos aqui uma alteração de notação de G_* para G_*^O e de W_* para W_*^O , afim de obter uma descrição coerente ao perturbarmos o estado O . Temos ainda que o estado B_* é extensão-1 dos estados B_*^G e B_*^W , conforme (AZEVEDO et al, 2009). As extensões G_*^O , B_* e W_*^O são justificados usando os gráficos das velocidades, como veremos a seguir.

A Fig. 9(a) justifica a existência do estado B_* , onde λ_1 coincide com $\sigma(B_*, O)$ e a Fig. 9(b) justifica a existência do estado G_*^O , onde λ_2 coincide com $\sigma(G_*^O, O)$.

A existência do estado W_*^O está justificada pelos gráficos das velocidades exibido na Fig. 10. Isto conclui a descrição de $\mathcal{H}(O)$.

Observação: chamamos a atenção aqui que não só nas Figs. 9 e 10, mas em todas as figuras representando gráficos de velocidades, cometeremos o abuso de representar o “ valor da velocidade ” pelo próprio estado onde este valor é assumido.

Passemos então a perturbar o estado O ao longo do lado $[O, G]$. Consideremos um estado base A como uma pequena perturbação do estado O ao longo do lado $[O, G]$ do triângulo de saturações. A curva de Hugoniot (representada por linha tracejada) por este estado A está exibida na Fig. 11. Ela é composta pelo lado $[O, G]$ e pelos dois ramos de hipérbole (local e não local) internos ao triângulo de saturações provenientes da equação (1.11). Nas Figs. 12-13 mostramos os gráficos das velocidades características e o da velocidade de choque ao longo dos três ramos da curva de Hugoniot reversa por A . Nestas figuras fica claro a existência dos pontos de extensão de A dadas pelos estados: A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 tais que $\sigma(A_1, A) = \lambda_1(A_1)$, $\sigma(A_2, A) = \lambda_1(A_2)$, $\sigma(A_3, A) = \lambda_1(A_3)$, $\sigma(A_4, A) = \lambda_2(A_4)$ e $\sigma(A_5, A) = \lambda_2(A_5)$. Portanto os estados A_1, A_2 e A_3 são as extensões-1 do estado base A e os estados A_4 e A_5 são extensões-2 do mesmo estado base A . Note também nas Figs. 12-13 a ilustração do Teorema de Bethe-Wendroff, mostrando que a velocidade de choque possui máximo local em A_1, A_3, A_5 e A_4 e mínimo local em A_2 . Com relação às extensões do estado O , notamos que os estados A_3, A_4 e A_5 da Fig. 11 são perturbações dos estados B_* , W_*^O e G_*^O da Fig. 8, respectivamente, enquanto os seguintes estados A, A_1 e A_2 são perturbações do próprio estado O .

Observação: daqui por diante, dado um estado base P muitas vezes chamaremos de “ Hugoniot pelo estado P ”, ao invés de “ curva de Hugoniot pelo o estado P ”, ou simplesmente por $\mathcal{H}(P)$.

Ao perturbarmos o estado base A ao longo do lado $[O, G]$ no sentido de G , percebemos que a curva de Hugoniot correspondente segue o mesmo comportamento da Hugoniot pelo estado A até que para um determinado estado base C sua extensão C_2 no ramo não local coincide com o estado T^E dado em (1.31), extensão-1 do estado E , exibido na Fig. 5. A curva de Hugoniot pelo estado C está ilustrado na Fig. 14(a), sendo que na Fig. 14(b) é exibida uma ampliação do retângulo da Fig. 14(a) destacando a coincidência dos estados C_2 e T^E . A existência dos estados de extensão C_1, C_2, C_3, C_4 , e C_5 podem ser visualizados de maneira análoga ao caso do estado A , usando os gráficos das velocidades. Nas Figs. 14(a) e 14(b) também mostramos a Hugoniot do

estado E , para efeito de uma futura referência.

Agora, perturbamos o estado C ao longo de $[O, G]$ até um estado F mais abaixo, tal que a extensão F_2 do estado F passe a ficar abaixo do segmento $[E, W]$ e o ramo não local de $\mathcal{H}(F)$ cruze o ramo $[D, B]$ da Hugoniot de E exatamente no estado F_3 , como mostrado na Fig. 15.

Um fato importante a ser destacado na descrição até aqui é que os estados de índices “ 2 ” e “ 3 ” no ramo não local estão se aproximando um do outro conforme o estado base se afasta de O . Isto fica mais evidente quando comparamos a evolução da Fig. 16 em relação a Fig. 13, por exemplo. As extensões F_2 , F_3 e F_4 do estado F estão justificadas através dos gráficos das velocidades exibidos na Fig. 16. Os gráficos das velocidades para justificar F_1 e F_5 são análogos aos gráficos das Figs. 12(b) e 12(a), respectivamente, e por esta razão não os exibiremos. Exibiremos os gráficos justificando os estados de índice “ 1 ” e “ 5 ” quando houverem mudanças significativas envolvendo estes estados.

Na mesma Fig. 16, percebemos que a velocidade característica λ_1 atinge um valor máximo entre F_2 e F_3 ao longo do ramo não local de $\mathcal{H}(F)$. Isto indica a presença de um ponto no conjunto de inflexão-1 nesta região próxima de F_2 e F_3 .

Da observação de que os estados de índices “ 2 ” e “ 3 ” estão se aproximando, perturbamos o estado F mais para abaixo até obtermos o estado H tal que $H_2 \equiv H_3$. A curva de Hugoniot por este estado H está exibida na Fig. 17(a). Na descrição de $\mathcal{H}(F)$ foi feita a observação que a velocidade característica-1 atinge um valor máximo ao longo do seu ramo não local e que isto indicaria a presença de um ponto no conjunto de inflexão-1 nesta região. Com respeito a esta observação, na Fig. 17(a) exibimos a curva integral pelo estado $H_2 \equiv H_3$ associada à família característica-1 juntamente com o segmento de extensão-1 de $[O, G]$ e também de $\mathcal{H}(H)$ contidos no retângulo da Fig. 17(a). Note que o ramo não local de $\mathcal{H}(H)$ e a curva integral-1 são tangentes em $H_2 \equiv H_3$ conforme o que diz o Teorema de Bethe-Wendroff. Na Fig. 18(a) sobrepomos os gráficos da velocidade característica-1 ao longo do ramo não local de $\mathcal{H}(H)$, da velocidade característica λ_1 ao longo da curva integral pelo estado $H_2 \equiv H_3$ e também o gráfico da velocidade de choque ao longo do segmento de ramo não local de $\mathcal{H}(H)$. Através destes gráficos das velocidades na Fig. 18(a) verificamos que de fato $H_2 \equiv H_3$ é ao mesmo tempo um ponto do conjunto de inflexão-1 e uma extensão-1 do estado H ,

com $\sigma(H_2 \equiv H_3, H) = \lambda_1(H_2 \equiv H_3)$.

Observação: o ponto onde ocorreu está tangência $H_2 \equiv H_3$ foi denotado em (GUEDES, 2009) por T^J .

Dado a coincidência entre os estados H_2 e H_3 , ao perturbarmos o estado H mais para abaixo temos que os estados de índice “ 2 ” e “ 3 ” desaparecem restando apenas os estados de índices “ 1 ”, “ 4 ” e “ 5 ”. Portanto o ramo não local passa momentaneamente a não mais possuir pontos de extensão-1. Outro fato importante aqui é que o estado de índice “ 4 ” passa a ficar cada vez mais próximo do segmento $[E, W]$ pelo lado superior, como mostra a Fig. 18(b). Assim, perturbamos o estado H até um estado I tal que o estado de índice “ 4 ” atinja o segmento $[E, W]$, como mostrado na Fig. 19. Assim, como podemos observar na Fig. 19(a), temos apenas a presença dos pontos de extensão I_1 no ramo local, I_5 sobre o lado $[O, G]$ e I_4 no ramo não local de $\mathcal{H}(I)$, tais que $\sigma(I_1, I) = \lambda_1(I_1)$, $\sigma(I_5, I) = \lambda_2(I_5)$ e $\sigma(I_4, I) = \lambda_2(I_4)$.

Na Fig. 20 onde são exibidos os gráficos das velocidades são confirmados as ausências dos estados I_2 e I_3 e a presença do estado I_4 .

Perturbando a partir do estado I na direção do vértice G , o estado de índice “ 4 ” cruza o segmento $[E, W]$ e se aproxima cada vez mais do lado $[G, W]$. Embora não seja relevante neste ponto, notamos também que antes do estado de índice “ 4 ” atingir o lado $[G, W]$ ele passa por um estado na interseção do conjunto de inflexão-1 com conjunto de extensão-2 de $[O, G]$. Continuando com as perturbações, obtemos o estado J tal que J_4 esteja sobre o lado $[G, W]$. O comportamento geométrico da Hugoniot pelo estado J está mostrado na Fig. 21. A parte do ramo não local de $\mathcal{H}(J)$ no triângulo de saturações consiste apenas do estado J_4 , extensão-2 do estado J , ou seja, com $\sigma(J_4, J) = \lambda_2(J)$. Conseqüentemente o ramo não local da $\mathcal{H}(J)$ sai momentaneamente do triângulo das saturações ao perturbamos além do estado J .

Perturbando o estado J ao longo do lado $[O, G]$ mais para abaixo até um estado L , o ramo não local da Hugoniot volta a aparecer como também um estado L_6 de extensão-2, como mostrado na Fig. 22. Para facilitar a compreensão desta descrição optamos pelo índice “ 6 ” ao invés do índice “ 4 ” para representar a extensão-2 do estado L no ramo não local de $\mathcal{H}(L)$. Além disso, não poderíamos deixar de registrar que com estas perturbações o estado de índice “ 6 ” também passa pelo estado de interseção do conjunto de inflexão-1 com o conjunto de extensão-2 do lado $[O, G]$.

Continuando a perturbar a partir de L ao longo de $[O, G]$, obtemos um estado M tal que o ramo não local volta mais uma vez a tangenciar a extensão-1 do lado $[O, G]$ num estado que por conveniência denotaremos por M_7 e por M_8 , isto é, $M_7 \equiv M_8$. A curva de Hugoniot pelo estado M está exibida na Fig. 23(a) e uma ampliação da região retangular próxima de $M_7 \equiv M_8$ está exibida na Fig. 23(b), ficando claro, mais uma vez, a presença da extensão-1 de M definida por $M_7 \equiv M_8$ no ramo não local de $\mathcal{H}(M)$, como também a coincidência de $M_7 \equiv M_8$ com o estado $T^J \equiv H_2 \equiv H_3$ e a aproximação do estado M_1 , no ramo local de $\mathcal{H}(M)$, para o estado T^E . Note que dos pontos de extensão do caso do estado base A na Fig. 11 restaram apenas os de índices “ 1 ” e “ 5 ” sendo que os de índices “ 2 ”, “ 3 ” e “ 4 ” foram substituídos pelos os de índices “ 6 ”, “ 7 ” e “ 8 ”, todos sobre o ramo não local. Os gráficos das velocidades que justificam as extensões M_1 , M_6 e $M_7 \equiv M_8$ estão exibidos na Fig. 24.

Prosseguindo, perturbamos o estado base M até atingirmos o estado E definido na Seção 2 deste Capítulo 1 em que a curva de Hugoniot por E tem uma bifurcação secundária no estado T^E , como mostrado na Fig. 5. Neste caso limite a partir do caso anterior, o ramo local passa a coincidir com os segmentos de reta $[E, T^E] \cup [T^E, D]$, enquanto o ramo não local passa a coincidir com os segmentos de reta $[B, T^E] \cup [T^E, W]$, conforme pode ser visto na Fig. 25.

Através dos gráficos das velocidades justificamos as extensões do estado E dadas pelos estados E_1 , E_5 , E_6 , E_7 e E_8 satisfazendo $\sigma(E_1, E) = \lambda_1(E_1)$, $\sigma(E_7, E) = \lambda_1(E_7)$, $\sigma(E_8, E) = \lambda_1(E_8)$, $\sigma(E_6, E) = \lambda_2(E_6)$ e $\sigma(E_5, E) = \lambda_2(E_5)$, como veremos mais adiante.

Na realidade temos apenas quatro extensões do estado E , ao invés de cinco, pois os estados E_1 e E_7 coincidem justamente no estado T^E , ou seja, o estado de índice “ 7 ” variou do estado T^J (quando consideramos $\mathcal{H}(M)$) para o estado T^E ao mesmo tempo em que o estado de índice “ 1 ” variou de M_1 para T^E , conforme as perturbações sofridas a partir do estado M . Outras coincidências são entre o estado E_6 e o estado I_4 e entre o estado E_8 e F_3 definidos anteriormente. Dada a importância das extensões do estado E para a construção da solução do problema de Riemann, como veremos no Capítulo 3, definimos o estado $E_6 \equiv I_4$ por W_*^E , bem como o estado E_8 por E_* e o estado E_5 por G_*^E .

Na Fig. 26(a) exibimos os gráficos das velocidades sobre o ramo $[E, T^E] \cup [T^E, D]$

de $\mathcal{H}(E)$ justificando a existência do estado $E_1 \equiv E_7 \equiv T^E$, e na Fig. 26(b) o gráfico das velocidades sobre o ramo $[B, T^E] \cup [T^E, W]$ de $\mathcal{H}(E)$ justificando a existência dos estados $E_8 \equiv E_*$, $E_1 \equiv E_7 \equiv T^E$ e $W_*^E \equiv E_6$. Este gráficos foram feitos para compararmos com os gráficos de velocidades do estado M nas Figs 24(a) e 24(b). Exibimos também na Fig. 27(a) o gráfico das velocidades sobre o ramo $[D, T^E] \cup [T^E, W]$ de $\mathcal{H}(E)$, para podermos comparar com a próxima perturbação a partir do estado E . Nesta mesma Fig. 27(a) exibimos também a reta de altura $\lambda_2(E)$ e daí, como $\lambda_1(E) = 0$, fica claro que tomando um estado K no segmento (T^E, W_*^E) de $\mathcal{H}(E)$ temos um choque de K para E que não é de Lax. No entanto este choque tem perfil viscoso, como pode ser visto no plano de fase exibido na Fig. 56(a), ou seja, este choque de K para E é um choque transicional, (ver definição no último parágrafo da Seção A.4).

Na Fig. 28 apresentamos também a reta horizontal de altura $\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E)$. A interseção desta reta com o gráfico da velocidade σ ao longo do lado $[O, G]$ define dois estados que denotamos por P_1 e por P_8 , satisfazendo as igualdades $\sigma(E_*, P_1) = \sigma(E_*, P_8) = \sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$, isto é, E_* é extensão-1 dos estados P_1 e P_8 . Na realidade P_1 é o estado F considerado anteriormente, já que $F_3 \equiv E_*$ e P_8 é o estado Z ainda a ser considerado. Observando estas igualdades temos a caracterização de um choque triplo entre P_1 , E e E_* ao mesmo tempo temos um choque triplo entre P_8 , E e E_* , e portanto temos a seguinte cadeia de igualdades

$$\sigma(E_*, P_8) = \sigma(E_*, E) = \sigma(P_8, E) = \sigma(E_*, P_1) = \sigma(P_1, E) = \sigma(P_1, P_8). \quad (2.1)$$

Estes estados P_1 e P_8 definidos acima são de fundamental importância na construção da solução do problema de Riemann. Eles determinam os extremos do intervalo para os estados de produção P onde são usados choques transicionais na solução do problema de Riemann aqui considerado. Isto ficará mais claro no Capítulo 3 quando da construção da solução.

Observação: Comparando a Fig. 23 com a Fig. 25, e a Fig 24 com a Fig. 26 podemos acompanhar a evolução de $\mathcal{H}(M)$ para $\mathcal{H}(E)$.

Perturbando E ao longo do lado $[O, G]$ no sentido de G , digamos para um estado Q , a bifurcação secundária em T^E desaparece e o segmento $[E, T^E]$ juntamente com o segmento $[T^E, B]$ da Fig. 25 dão origem ao ramo local de $\mathcal{H}(Q)$ na Fig. 29 (abaixo do segmento $[E, W]$), enquanto os segmentos $[D, T^E]$ e $[T^E, W]$ dão origem ao ramo

não local (acima do segmento $[E, W]$). Note que o ramo local de $\mathcal{H}(Q)$ possui apenas o estado Q_8 como extensão-1 do estado Q , já que os estados de índices “ 1 ” e “ 7 ” desapareceram depois do colapso entre E_1 , E_7 e T^E no caso anterior. Enquanto isto o ramo não local de $\mathcal{H}(Q)$ continua possuindo apenas o estado Q_6 extensão-2 do estado Q . Os gráficos das velocidades exibidos na Fig. 30 justificam a existência dos estados extensões Q_6 e Q_8 . O gráfico das velocidades exibidos na Fig. 27 em conjunto com os gráficos das velocidades exibidos na Fig. 30 auxiliam na compreensão da perturbação de $\mathcal{H}(E)$ para $\mathcal{H}(Q)$. Os gráficos das velocidades ao longo do ramo $[O, G]$ de $\mathcal{H}(Q)$ estão exibidos na Fig. 31. Estes gráficos além de justificar a existência do estado Q_5 extensão-2 de Q , mostram também que o estado Q está se aproximando do ponto onde a velocidade característica λ_2 ao longo do lado $[O, G]$ é máxima, isto é, está se aproximando do ponto de inflexão-2 ao longo do lado $[O, G]$.

Perturbando o estado Q mais para abaixo, antes de atingir o estado de inflexão-2, o estado de índice “ 6 ” no ramo não local da respectiva curva de Hugoniot aproxima do lado $[O, W]$ do triângulo de saturações. Quando isto ocorre, digamos para um estado base denotado por R , o ponto R_6 extensão-2 do estado R passa a coincidir com W_*^O que também é uma extensão-2 do vértice O . A curva de Hugoniot pelo estado R está exibida na Fig. 32. Neste ponto o ramo não local de $\mathcal{H}(R)$ se reduz apenas ao estado $R_6 \equiv W_*^O$ e pela Regra do Choque Triplo temos que $\lambda_2(W_*^O) = \sigma(W_*^O, R) = \sigma(W_*^O, O) = \sigma(R, O)$.

Perturbando o estado R levemente, temos que a curva de Hugoniot momentaneamente deixa de possuir o ramo não local no interior do triângulo de saturações. Fazemos isto até que o estado base atinja o estado de inflexão-2 sobre o lado $[O, G]$, que denotaremos aqui por T , como mostrado na Fig. 33. Na realidade, o ramo não local de $\mathcal{H}(T)$ está fora do triângulo de saturações. O gráfico das velocidades exibido na Fig. 34(a) mostra a tangência entre o gráfico da velocidade de choque e o gráfico da velocidade característica-2, exatamente no ponto de máximo das duas velocidades e portanto temos a coincidência $T_5 \equiv T$.

Os gráficos das velocidades que justifica a existência do estado T_8 , extensão-1 do estado T está mostrado na Fig. 34(b). Daqui para frente não mais exibiremos o gráfico das velocidades que justifica a extensão de índice “ 8 ” já que não há mudanças substanciais em relação ao gráfico exibido na Fig. 34(b).

Ao perturbarmos o estado base para abaixo de T , a extensão-2 de índice “ 5 ” ao

longo do lado $[O, G]$ continua a aparecer só que a mesma passa a ficar entre o estado O e o estado base e não mais entre o estado base e o estado G , como anteriormente. Por esta razão trocaremos o índice “ 5 ” pelo índice “ 9 ” para indicar esta extensão-2. Perturbamos então o estado T até obtermos o estado U tal que o estado de índice “ 9 ” extensão-2 de U ao longo do lado $[O, G]$ coincida com o estado E . A curva de Hugoniot por este estado U está exibida na Fig. 35. Os gráficos das velocidades ao longo do lado $[O, G]$ exibidos na Fig. 36 mostra a coincidência entre U_9 e E .

Prosseguindo perturbando o estado U no sentido de G , percebemos que a curva de Hugoniot segue o mesmo comportamento da curva de Hugoniot do estado U até que para um determinado estado V sua extensão-2 no ramo não local volta a aparecer exatamente sobre o estado W_*^O . Passaremos a identificar esta extensão-2 pelo índice “ 10 ”. Este fato está ilustrado na Fig. 37. O estado V_9 , extensão-2, de V está justificada pelo gráfico das velocidades na Fig. 38. Daqui para frente, só exibiremos o gráfico das velocidades que justifica a extensão de índice “ 9 ” no próprio lado $[O, G]$, quando houver uma mudança no seu comportamento em relação ao gráfico exibido na Fig. 38. Com a descrição do estado V fica claro que as curvas de Hugoniot por estados $P \in (R, V)$ não possuem ramos não locais interiores ao triângulo de saturações.

Agora perturbamos o estado base a partir de V , na direção do vértice G , até o estado base X tal que sua extensão-2 de índice “ 10 ” atinja o segmento $[E, W]$ da Hugoniot por E , como exibido na Fig. 39(a) e na Fig. 39(b). Os gráficos das velocidades exibidos na Fig. 40 também justificam a existência do estado X_{10} , com $\sigma(X_{10}, X) = \lambda_2(X_{10})$, bem como a coincidência entre X_{10} e $W_*^E \equiv I_4 \equiv E_6$, já que a reta na Fig. 40 tem altura exatamente igual à $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$. Daí, usando os gráficos da Fig. 40 obtemos uma caracterização de choque triplo entre os estados X , E e W_*^E . De fato, como $W_*^E \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{H}(E)$ e temos as igualdades $\lambda_2(W_*^E) = \sigma(W_*^E, X) = \sigma(W_*^E, E)$, pela Regra do Choque Triplo tem-se que

$$\sigma(W_*^E, X) = \sigma(W_*^E, E) = \sigma(X, E) = \lambda_2(W_*^E). \quad (2.2)$$

Com isto, concluímos a descrição da curva de Hugoniot pelo o estado X .

Se perturbarmos X ligeiramente para abaixo, obteremos pela terceira vez que a extensão-2, pertencente ao ramo não local do estado base correspondente, coincidirá com um ponto do conjunto de inflexão-1, só que dessa vez com índice “ 10 ”. A

primeira vez desta coincidência ocorreu para um estado de índice “ 4 ” cujo estado base correspondente estava entre os estados I e J . Em seguida esta coincidência ocorreu para um estado de índice “ 6 ” cujo estado base correspondente estava entre os estados J e M . Vamos denotar este estado base abaixo de X , onde há esta coincidência, por Y . A curva de Hugoniot pelo estado Y está ilustrada na Fig. 41. O fato de registrar só agora esta coincidência deve-se à admissibilidade do choque entre os estados Y e Y_{10} , o que não ocorria para os outros pares correspondentes aos índices “ 4 ” e “ 6 ”.

Prosseguindo, perturbamos o estado Y para o estado N tal que o ramo não local da sua curva de Hugoniot volta a tangenciar o conjunto de extensão-1 do lado $[O, G]$ no estado que denotamos por $N_{11} \equiv N_{12}$. A curva de Hugoniot pelo estado N está exibida na Fig. 42(a). Para ficar mais claro esta tangência exibimos na Fig. 42(b) uma ampliação do retângulo contido na Fig. 42(a). Notamos que o estado $N_{11} \equiv N_{12}$ também coincide com o estado $T^J \equiv H_2 \equiv H_3 \equiv M_7 \equiv M_8$. Adotamos agora os estados de índices “ 11 ” e “ 12 ” para representarem os estados extensões-1 no ramo não local da curva de Hugoniot do estado base correspondente.

Perturbando ligeiramente o estado base para abaixo a partir de N obtemos então dois estados de extensão-1, de índices “ 11 ” e “ 12 ”, sendo que aquele de índice “ 11 ” fica entre T^E e T^J e o de índice “ 12 ” fica entre E_* e T^J . Continuamos então perturbando o estado base até um estado Z tal que Z_{12} coincida com E_* e Z_{11} ainda fique entre T^J e T^E . A curva de Hugoniot pelo estado Z está exibida na Fig. 43(a). A coincidência entre Z_{12} e $E_* \equiv E_8 \equiv F_3$ está ilustrada na Fig. 43(b). Dada a coincidência entre Z_{12} e E_* temos que Z coincide com o estado P_8 definido quando de descrição de $\mathcal{H}(E)$.

Os gráficos das velocidades exibidos na Fig. 44 justificam as extensões Z_{10} , Z_{11} e Z_{12} de Z tais que $\lambda_2(Z_{10}) = \sigma(Z_{10}, Z)$, $\lambda_1(Z_{11}) = \sigma(Z_{11}, Z)$ e $\lambda_1(Z_{12}) = \sigma(Z_{12}, Z)$. Para justificarmos a coincidência entre Z_{12} e E_* traçamos na Fig. 44(b) uma reta de altura $\lambda_1(E_*)$, a qual tangencia o gráfico da velocidade de choque no estado Z_{12} interior ao retângulo contido no gráfico da Fig. 44(a). Com isto, concluímos a descrição da Hugoniot pelo estado base Z .

Seguindo perturbando o estado base a partir de Z para o vértice G , segue que as curvas de Hugoniot por estes estados seguem o mesmo comportamento apresentado no caso do estado Z , sendo que o estado de índice “ 12 ” passa do estado E_* e o de índice “ 11 ” passa do estado T^E . Mais especificamente os estados de índices “ 8 ” e “ 12 ”

tendem ao vértice G e o estado de índice “ 11 ” se aproxima do estado D_* , interseção da extensão-1 do lado $[O, G]$ com o segmento $[G, D]$. Além disto o estado de índice “ 10 ” tende ao lado $[G, W]$ para coincidir com estado J_4 definido anteriormente. A Fig. 45 ilustra a curva de Hugoniot pelo estado G , a qual consiste dos segmentos $[G, O]$, $[G, D]$ e $[G, W]$.

Os gráficos das velocidades que justificam algumas das extensões do estado G não exibiremos pois são análogos aos que vínhamos mostrando. Vamos apenas exibir na Fig. 46 os gráficos das velocidades sobre o ramo $[G, D]$ para justificar a presença do estado G_{11} tal que $\lambda_1(G_{11}) = \sigma(G_{11}, G)$. Com isto, terminamos a descrição do comportamento geométrico das curvas de Hugoniot por estados sobre o lado $[O, G]$.

Durante toda esta descrição ficou claro o comportamento geométrico das extensões associadas às duas famílias características do lado $[O, G]$ exibidas na Fig. 7. Na Fig. 47 indicamos como é feita a correspondência (múltipla) entre os estados base e suas extensões. As extensões-2 representadas pelos estados de índices “ 4 ”, “ 6 ” e “ 10 ” sobre o ramo não local das curvas de Hugoniot percorrem o conjunto de extensão-2 do lado $[O, G]$. Portanto a extensão-2 de $[O, G]$ interior ao triângulo de saturações é descrita 3 vezes enquanto o estado base varia de O para G . Já as extensões de índices “ 2 ”, “ 3 ”, “ 7 ”, “ 8 ”, “ 11 ” e “ 12 ” dos estados base mostram que o conjunto de extensão-1 do lado $[O, G]$ é tal que os segmentos $[O, D_*]$ e $[G, B_*]$ são descritos duas vezes por extensões de índices “ 1 ” e “ 2 ” e de índices “ 8 ” e “ 12 ”, respectivamente. Por outro lado, os segmentos $[D_*, T^E]$ e $[T^E, T^J]$ são descritos três vezes por extensões de índices “ 1 ”, “ 2 ” e “ 11 ” e de índices “ 2 ”, “ 7 ” e “ 11 ”, respectivamente e o segmento $[B_*, T^J]$ é descrito três vezes por extensões de índices “ 3 ”, “ 8 ” e “ 12 ”.

Observação: as letras utilizadas neste Capítulo para representarem as perturbações sofridas pelo estado O e que se propagaram até o estado G serviram apenas para tentar tornar a descrição do comportamento geométrico das curvas de Hugoniot mais dinâmico, não tendo sentido nenhum fora deste Capítulo.

Capítulo 3

Solução do Problema de Riemann

3.1 Introdução

Como dito na Introdução da dissertação, estamos interessados em resolver o problema de Riemann (1)-(2) para o modelo de Corey com funções de permeabilidade relativas quadráticas associado ao seguinte problema prático: considerar um poço produtor contendo qualquer mistura do tipo gás/óleo e recuperar parte deste óleo pela injeção de uma mistura do tipo água/gás. No triângulo de saturações exibido na Fig. 1 os dados de produção correspondem a um ponto arbitrário P sobre o lado $[O, G]$ e os dados de injeção a um ponto arbitrário I sobre o lado $[G, W]$.

Na construção da solução, primeiramente determinamos os estados de produção P ao longo do lado $[O, G]$ que definem segmentos disjuntos, cuja construção da solução ocorra de maneira distinta. Estes estados são chamados de estados especiais. Fixado então um estado P representativo num destes segmentos, de maneira análoga determinamos estados especiais ao longo do lado $[G, W]$ que definem segmentos disjuntos para estados de injeção I , cuja construção da solução ocorra de maneira distinta. Uma vez considerados todos os estados representativos de injeção, fixamos um novo estado de produção e procedemos de forma análoga até que todos os casos representativos, tanto de produção como de injeção, tenham sido considerados.

A metodologia utilizada para determinar a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann, para cada estado P fixado sobre o lado $[O, G]$ do

triângulo de saturações, é a seguinte

- (i) inicialmente determinamos a geometria da curva de Hugoniot por P , obtida explicitamente no Capítulo 1 e já discutido em parte no Capítulo 2;
- (ii) determinamos os estados $M \in \mathcal{H}(P)$ tais que os choque-2 de M para P , satisfaçam a condição de entropia de viscosidade, com matriz de viscosidade igual a identidade, através da análise dos planos de fase dos sistemas de EDO's correspondentes;
- (iii) a partir de cada estado M da extensão-2 de P , isto é, com $\lambda_2(M) = \sigma(M, P)$ tal que o choque de M para P seja admissível, determinamos a curva integral-2 correspondente aos estados que podem ser conectados a M por uma onda de rarefação-2;
- (iv) a partir das informações do itens (ii) e (iii), determinamos os estados genéricos M que podem ser conectados à P por um choque-2 ou por uma composta-2 (do tipo rarefação/choque). Tais pontos são representados genericamente através da curva de onda-2 reversa por P , que é denotada por $\mathcal{W}_-^2(P)$;
- (v) fixado um estado de injeção I sobre o lado $[G, W]$, determinamos o estado M , se existir, definido pela intersecção de $\mathcal{W}^1(I)$ com $\mathcal{W}_-^2(P)$.
- (vi) para um estado de injeção I fixado, caso não haja intersecção entre $\mathcal{W}^1(I)$ e $\mathcal{W}_-^2(P)$, procuramos um estado K numa possível intersecção de $\mathcal{W}^1(I)$ com o segmento da curva de onda transicional reversa do estado E , cuja solução do problema de Riemann com $U_- = E$ e $U_+ = P$ tenha velocidade inicial não inferior a $\sigma(K, E)$.
- (vii) baseados nos passos anteriores, descrevemos a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann (1)-(2), para cada estado de produção P fixado e de injeção I arbitrário, levando-se em conta a condição de compatibilidade geométrica entre as velocidades das ondas que fazem parte da sequência.

3.2 Estados Especiais para a Construção da Solução

Nesta seção determinaremos os estados especiais ao longo do lado $[O, G]$ do triângulo de saturações que definem segmentos disjuntos para estados de produção P , cuja construção da solução do problema de Riemann ocorra de maneira distinta. No Capítulo 2 descrevemos o comportamento das curvas de Hugoniot por um estado arbitrário sobre o lado $[O, G]$. Entre estes estados, o estado E merece destaque, pois além de ser um estado especial ele também define outros dois estados especiais ao longo do lado $[O, G]$ que no Capítulo 2 foram denominados de $P_1 \equiv F$ e $P_8 \equiv Z$. A curva de Hugoniot pelo estado P_1 está exibida na Fig. 15(a), sendo que sua extensão-1 de índice “3” coincide com o estado E_* , que foi definido na descrição do estado E . Veja Fig. 48. Seja E_*^W o estado na Fig. 48 definido pela interseção do segmento $[T^E, W_*^E]$ de $\mathcal{H}(E)$ com o ramo não local de $\mathcal{H}(P_1)$. Na Fig. 49 apresentamos os gráficos das velocidades de choque no segmento $[F_3, F_4]$ de $\mathcal{H}(P_1)$ e no segmento $[T^E, W_*^E]$ de $\mathcal{H}(E)$ usando o mesmo parâmetro s_g para tais segmentos. Desta forma, pela interseção destes gráficos fica claro que $\sigma(E_*^W, P_1) = \sigma(E_*^W, E)$. Considerando a reta de altura $\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E)$, vemos também na Fig. 49 que esta reta cruza o gráfico da velocidade de choque $\sigma(\cdot, P_1)$ exatamente no ponto E_*^W . Daí obtemos que $\sigma(E_*, E) = \sigma(E_*^W, E)$ e da Regra de Choque Triplo temos que $E_*^W \in \mathcal{H}(E_*)$ e

$$\sigma(E_*, E_*^W) = \lambda_1(E_*), \quad (3.1)$$

mostrando de fato que E_* é uma extensão-1 do estado E_*^W . Portanto temos a seguinte cadeia de igualdades

$$\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E_*^W) = \sigma(E_*, P_1) = \sigma(E_*^W, P_1). \quad (3.2)$$

De forma análoga vale

$$\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E_*^W) = \sigma(E_*, E) = \sigma(E_*^W, E), \quad (3.3)$$

ou ainda

$$\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*^W, E) = \sigma(E_*^W, P_1) = \sigma(E, P_1). \quad (3.4)$$

Para o estado $P_8 \equiv Z$ segue o mesmo tratamento feito para o estado P_1 .

Um outro estado especial descrito no Capítulo 2 é o estado lá denotado por I , no qual o ramo não local de $\mathcal{H}(I)$ fica abaixo do segmento $[E, W]$ tangenciando-o justamente no estado $W_*^E \equiv I_4$, como podemos acompanhar na Fig. 19(b). Vamos denotá-lo por P_2 . Este estado P_2 está relacionado com a utilização de choques transicionais na solução do Problema de Riemann, como veremos mais adiante.

O estado T descrito no mesmo Capítulo 2 também é um estado especial. Veja as Figs. 33-34. Este estado T é o ponto do conjunto de inflexão-2 sobre o lado $[O, G]$. Assim, denotaremos este estado T por P_3 .

Um outro estado especial é o estado U descrito também no Capítulo 2, tal que sua extensão-2 sobre o lado $[O, G]$ coincide com o estado E , isto é, $\sigma(E, U) = \lambda_2(E)$. Veja as Figs. 35-36. Denotaremos o estado U por P_4 .

Temos também o estado X descrito no Capítulo 2, tal que sua extensão-2 de índice “ 10 ”, coincide com o estado W_*^E e o ramo não local fica acima do segmento $[E, W]$. Veja as Figs. 39-40. Vamos denotar este estado X por P_5 .

O estado base Y descrito no Capítulo 2, possui uma extensão-2 de índice “ 10 ” pertencente ao conjunto de inflexão-1. Veja Fig. 41. Denotaremos este estado Y por P_6 .

Para finalizar temos o estado N descrito no Capítulo 2, onde o ramo não local tângencia a extensão-1 justamente no estado T^J , como descrito no Capítulo 2. Veja a Fig. 42. Este estado N será denotado por P_7 .

Dessa forma separando o caso 1, com $P = O$, mostrado em (AZEVEDO et al, 2009), os segmentos ao longo sobre o lado $[O, G]$ do triângulo de saturações que representarão dados de produção P com construções distintas da solução do problema de Riemann são: $(O, P_1]$, $(P_1, P_2]$, $(P_2, E]$, $(E, P_3]$, $(P_3, P_4]$, $(P_4, P_5]$, $(P_5, P_6]$, $(P_6, P_7]$, $(P_7, P_8]$ e $(P_8, G]$, os quais estão representados na Fig. 50 juntamente com os conjuntos de extensão e de inflexão-1.

3.3 Construção da Solução do Problema Riemann

A metodologia consiste em fixar um estado de produção P representativo em um dos segmentos definidos na Seção 3.2 e para este estado considerar todas as possibilidades distintas de injeção ao longo sobre o lado $[G, W]$. Feito isto, fixamos um novo

estado de produção em outro segmento de $[O, G]$ e procedemos de forma análoga até que todos os casos representativos, tanto de produção como de injeção, tenham sido considerados.

A verificação da admissibilidade das descontinuidades, pela condição de entropia de viscosidade foi feita computacionalmente em que a matriz de viscosidade foi fixada como sendo a matriz identidade.

Caso 1: Estado de Produção $P = O$: Reservatório Virgem.

Para o estado de produção P coincidindo com o vértice O do triângulo de saturações a solução do problema de Riemann foi descrito em (AZEVEDO et al, 2009), considerando todas as possibilidades de injeção ao longo do lado $[G, W]$ podendo ser acompanhada com o auxílio da Fig. 51. Conforme citado no Capítulo 2, o estado B_* é uma extensão-1 dos estados B_*^G e B_*^W exibidos na Fig. 8 e na Fig. 51, ou seja, estes estados satisfazem $\sigma(B_*, B_*^G) = \lambda_1(B_*)$ e $\sigma(B_*, B_*^W) = \lambda_1(B_*)$.

Os estados de injeção que separam segmentos sobre o lado $[G, W]$ do triângulo de saturações com construções distintas para a sequência de ondas que compõe a solução são I^{G^O} , B e I^{W^O} , sendo que I^{G^O} e I^{W^O} são obtidos pelas interseções das curvas de onda-1 reversas por G_*^O e W_*^O com o lado $[G, W]$, respectivamente.

As possibilidades de solução do problema de Riemann para este caso $P = O$ estão descritas logo abaixo. Acompanhe com a Fig. 51.

(a) Se $I = G$, ou seja, se for injetado gás puro, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo f_o (ou do gás f_g) restrita ao lado $[O, G]$ do triângulo de saturações. Portanto, a sequência de ondas que compõe a solução é dada por uma onda de rarefação-2 de G para G_*^O , seguida de uma onda de choque de G_*^O para O , com $\sigma(G_*^O, O) = \lambda_2(G_*^O)$.

(b) Se $I \in (G, I^{G^O})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para um certo estado M , com M no segmento (G, G_*^O) do lado $[O, G]$, seguida de uma composta-2 de M para O . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T no segmento (G, T^{G^O}) extensão-1 do segmento (G, G_*^O) no lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M ,

com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 é formada por uma rarefação-2 de M para G_*^O , seguida de um choque de G_*^O para O , com $\sigma(G_*^O, O) = \lambda_2(G_*^O)$.

(c) Se $I \in [I^{G_*^O}, B)$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , onde M é um estado no segmento $[G_*^O, B_*^G)$ do lado $[O, G]$ do triângulo de saturações, seguida de um choque-2 de M para O . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T no segmento $[T^{G_*^O}, B_*)$ extensão-1 do segmento $[G_*^O, B_*^G)$ do lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. Vale também salientar que se $I = I^{G_*^O}$ então $T = T^{G_*^O}$, $M = G_*^O$ e o choque de G_*^O para O é característico a esquerda com $\sigma(G_*^O, O) = \lambda_1(G_*^O)$.

(d) Se $I = B$, então como consequência da Regra do Choque Triplo, a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de três maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- xt .

- (i) Composta-1 de B para B_*^G , seguida de um choque-2 de B_*^G para O . A composta-1 é formada por uma rarefação de B para o estado B_* , seguida de um choque de B_* para B_*^G , com $\sigma(B_*, B_*^G) = \sigma(B_*^G, O) = \lambda_1(B_*)$;
- (ii) Composta-1 de B para B_*^W , seguida de um choque-2 de B_*^W para O . A onda composta-1 é formada por uma rarefação de B para o estado B_* , seguida de um choque de B_* para B_*^W , com $\sigma(B_*, B_*^W) = \sigma(B_*^W, O) = \lambda_1(B_*)$;
- (iii) Apenas uma onda composta de B para O , definida pelo segmento de rarefação B para B_* e por um choque de B_* para O , com $\sigma(B_*, O) = \lambda_1(B_*)$.

Note que nos três subitens a velocidade do choque que atinge O é a mesma, assim como a velocidade final no segmento de rarefação, o que caracteriza a mesma solução no espaço físico- xt .

(e) Se $I \in (B, I^{W_*^O}]$ então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento $(B_*^W, W_*^O]$ do lado $[O, W]$, seguida de um choque-2 de M para O . A composta-1

é formada por uma rarefação-1 de I para um estado T , com T sobre o segmento $(B_*, T^{W_*^O})$ extensão-1 do segmento (B_*^W, W_*^O) do lado $[O, W]$, e segue por um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. Observamos também que se $I = I^{W_*^O}$ então $T = T^{W_*^O}$, $M = W_*^O$ e o choque de W_*^O para O é característico à esquerda, com $\sigma(W_*^O, O) = \lambda_2(W_*^O)$.

(f) Se $I \in (I^{W_*^O}, W)$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (W_*^O, W) do lado $[O, W]$, seguida de uma composta-2 de M para O . A onda composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $(T^{W_*^O}, W)$ extensão-1 do segmento (W_*^O, W) , seguido de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 é formada de uma rarefação-2 de M para W_*^O , seguida de um choque de W_*^O para O , com $\sigma(W_*^O, O) = \lambda_2(W_*^O)$;

(g) Se $I = W$, ou seja, se for injetada água pura, então a solução é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo f_o (ou da água f_w) restrita ao lado $[O, W]$ do triângulo de saturações. Portanto, a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta-2 de W para O . Esta composta-2 é formada de uma rarefação-2 de W para W_*^O seguida de um choque de W_*^O para O , com $\sigma(W_*^O, O) = \lambda_2(W_*^O)$.

Isto conclui a descrição da solução para o caso $P = O$. Logo abaixo estão descritas as possíveis soluções para o problema de Riemann para os demais estados de produção P ao longo do lado $[O, G]$ do triângulo de saturações.

Caso 2: Estados de Produção P sobre o segmento $(O, P_1]$

Primeiramente, fixamos um estado de produção P sobre o segmento (O, P_1) , onde o estado $P_1 \equiv F$ foi definido no Capítulo 2 de forma que o estado F_3 extensão-1 de F coincide com o estado E_* . Depois determinamos a curva de Hugoniot reversa pelo estado P a qual está ilustrada na Fig. 52. A curva de Hugoniot por P é análoga à $\mathcal{H}(A)$, onde A é um dos estados ao longo do lado $[O, G]$ descritos no Capítulo 2.

Para ficar claro quem são os estados $O_1, \bar{P}_*, P_*, W_*^P$ e G_*^P mostrados na Fig. 52, fazemos a correspondência com a Fig. 11 contendo $\mathcal{H}(A)$: $O_1 \equiv A_1, \bar{P}_* \equiv A_2, P_* \equiv A_3,$

$W_*^P \equiv A_4$ e $G_*^P \equiv A_5$. Os estados O_1 , \bar{P}_* , P_* , W_*^P e G_*^P são extensões do estado P satisfazendo $\sigma(O_1, P) = \lambda_1(O_1)$, $\sigma(\bar{P}_*, P) = \lambda_1(\bar{P}_*)$, $\sigma(P_*, P) = \lambda_1(P_*)$, $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$ e $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$.

Os segmentos de choque-2 admissíveis na curva de Hugoniot reversa $\mathcal{H}(P)$ segundo o critério de viscosidade são: (P, G_*^P) e (\bar{P}_*, W_*^P) .

O estado P_*^G na Fig. 52 é definido como sendo o estado sobre o lado $[O, G]$ de $\mathcal{H}(P)$ tal que P_* é extensão-1 do mesmo, isto é, tal que $\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*, P_*^G)$. Para justificarmos a existência deste estado P_*^G utilizamos o gráfico da velocidade $\sigma(\cdot, P)$ na Fig. 53(a). A reta de altura $\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*, P)$ corta o gráfico da velocidade de choque ao longo do lado $[O, G]$, em dois estados. Um deles não nos interessa pois não é admissível pelo critério de viscosidade. O outro é justamente aquele que estamos chamando de P_*^G . Daí, temos que $P_*^G, P_* \in \mathcal{H}(P)$ e como $\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*^G, P) = \sigma(P_*, P)$, então pela Regra do Choque Triplo segue que

$$\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*, P) = \sigma(P_*^G, P) = \sigma(P_*, P_*^G). \quad (3.5)$$

Utilizando de maneira análoga o gráfico da velocidade de choque, justificamos a existência do estado P_*^W na Fig. 52 ao longo do segmento de choque-2 admissível do ramo não local de $\mathcal{H}(P)$ tal que $\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*, P_*^W)$. Assim novamente, temos uma cadeia de igualdades dada como consequência da Regra do Choque Triplo

$$\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*, P) = \sigma(P_*, P_*^W) = \sigma(P_*^W, P). \quad (3.6)$$

Os estados P_*^G e P_*^W das Figs. 52 e 54 são justamente as perturbações dos estados B_*^G e B_*^W das Figs. 8 e 51 respectivamente, quando perturbamos o estado O para o estado P em questão.

O segmento PO_1O_2 de $\mathcal{H}(P)$ na Fig. 52 é irrelevante para o problema de Riemann considerado porque não há como atingir um estado M neste ramo por uma curva de choque ou rarefação proveniente do lado $[G, W]$ e satisfazendo a condição de compatibilidade geométrica entre as velocidades.

Atráves dos gráficos das velocidades é possível justificar a compatibilidade geométrica das sequência de ondas que compõem a solução do Problema de Riemann para o estado de produção P considerado. Para ilustrarmos isto, vamos justificar que o choque de um estado T sobre o segmento $[G, P_*]$ extensão-1 do segmento $[G, P_*]$

para um estado M sobre o segmento $[G, P_*]$ da Fig. 54 satisfaz a compatibilidade geométrica. Para isso, na Fig. 53(b) construímos o gráfico da velocidade de choque $\sigma(M, P)$ (tracejada) com M variando ao longo do lado $[G, O]$ juntamente com o gráfico da função $\sigma(T, M)$ com M variando no segmento $[G, E]$ e T variando no segmento $[G, E_*]$, sendo T a extensão-1 de índice “ 8 ” de M definida no Capítulo 2. Ou seja, este segundo gráfico coincide com o gráfico de $\lambda_1(T)$ para T variando no segmento $[G, E_*)$ extensão-1 de $[G, E]$ no lado $[G, O]$.

Note que os gráficos se encontram transversalmente para $M = P_*^G$ e consequentemente para $T = P_*$, ficando claro que $\lambda_1(T) = \sigma(T, M) \leq \sigma(M, P)$ para T sobre o segmento $[G, P_*]$ e M sobre o segmento $[G, P_*^G]$ da Fig. 53(b), justificando a compatibilidade geométrica entre $\sigma(T, M)$ e $\sigma(M, P)$ nestes segmentos. Da mesma forma a mesma Fig. 53(b) mostra que um choque $\sigma(T, M)$ com T sobre o segmento (P_*, E_*) e M sobre o segmento $(P_*^G, E]$ é incompatível com um choque de M para P .

A curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$ é dada pelos segmentos $[G, G_*^P]$ e $(W_*^P, W]$ de composta-2, pelos segmentos (G_*^P, P) e (\bar{P}_*, W_*^P) de choque-2 na Fig. 52. Os segmentos de composta-2 que constituem a curva de onda-2 reversa são definidos considerando a rarefações-2 reversa pelos estados W_*^P e G_*^P . Resumidamente temos os seguintes estados especiais em $\mathcal{W}_-^2(P)$ mostrados na Fig. 54: $P, P_*^G, G_*^P, P_*, P_*^W$ e W_*^P .

Com base nos segmentos que constituem a curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$, como também a compatibilidade geométrica entre as velocidades, determinamos os estados de injeção que separam segmentos no lado $[G, W]$ do triângulo de saturações com construções distintas das sequências de ondas que compõem a solução do problema de Riemann. Tomando as curvas de onda-1 reversas pelos estados: G_*^P, P_* e W_*^P e fazendo a intersecção destas curvas com o lado $[G, W]$ obtemos os seguintes estados de injeção: $I^{G_*^P}, I^{P_*}$ e $I^{W_*^P}$, respectivamente, exibidos na Fig. 54. Ainda com relação a Fig. 54, o segmento de curva no interior do triângulo de saturações ligando os estados $G, T^{G_*^P}$ e P_* corresponde à parte do conjunto de extensão-1 do lado $[O, G]$ definida pelos estados de índices “ 8 ” nos ramos locais de $\mathcal{H}(P)$ com P variando de G à P_*^G . Já o segmento de curva ligando P_* à $T^{W_*^P}$ corresponde à extensão-1 do segmento $[P_*^W, W_*^P]$ da curva de Hugoniot $\mathcal{H}(P)$, enquanto o segmento $[T^{W_*^P}, W]$ corresponde à extensão-1 do segmento $[W_*^P, W]$ de curva de rarefação-2, parte de $\mathcal{W}_-^2(P)$.

Passemos então a descrição da solução do problema de Riemann para o estado

de produção P fixado sobre o segmento $(O, P_1]$ e variando os estados de injeção I nos segmentos $[G, I^{G^P})$, $[I^{G^P}, I^{P^W}]$, (I^{P^W}, I^{W^P}) e $(I^{W^P}, W]$ do lado $[G, W]$ que acabamos de determinar. A construção pode ser acompanhada com o auxílio da Fig. 54:

(a) Se $I = G$, ou seja, se for injetado gás puro, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo f_o (ou do gás f_g) restrita ao lado $[O, G]$ do triângulo de saturações. Portanto, a sequência de ondas que compõe a solução consiste de uma composta-2 conectando G à P , a qual é dada por uma onda de rarefação-2 de G para G_*^P , seguida de uma onda de choque de G_*^P para P , com $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$.

(b) Se $I \in (G, I^{G^P})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para um certo estado M , com M sobre o segmento (G, G_*^P) do lado $[O, G]$, seguida de uma composta-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento (G, T^{G^P}) extensão-1 do segmento (G, G_*^P) do lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 é formada por uma rarefação-2 de M para G_*^P , seguida de um choque de G_*^P para P , com $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$. Note que se fizermos I tender a G pela direita, então reobtemos a solução descrita no item (a).

(c) Se $I \in [I^{G^P}, I^{P^W})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , onde M é um estado sobre o segmento $[G_*^P, P_*^G)$ do lado $[O, G]$ do triângulo de saturações, seguida de um choque-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $[T^{G^P}, P_*)$ extensão-1 do segmento $[G_*^P, P_*^G)$ do lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. Note que se $I = I^{G^P}$, então $T = T^{G^P}$, $M = G_*^P$ e o choque de G_*^P para P é característico à esquerda com $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$, obtendo a solução limite do item (b) quando se faz I se aproximar de I^{G^P} pela esquerda.

(d) Se $I = I^{P^W}$, então como consequência da Regra do Choque Triplo, a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de duas maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no

espaço físico- xt .

- (i) Composta-1 de I^{P^W} para P_*^G , seguida de um choque-2 de P_*^G para P . A composta -1 é formada por uma rarefação-1 de I^{P^W} para o estado P_* , seguida de um choque de P_* para P_*^G , com $\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*, P_*^G) = \sigma(P_*^G, P)$. Esta solução é a solução limite do item (c) quando se faz I tender para I^{P^W} pela esquerda;
- (ii) Composta-1 de I^{P^*} para P_*^W , seguida de um choque-2 de P_*^W para P . A onda composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I^{P^*} para o estado P_* , seguida de um choque de P_* para P_*^W , com $\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*, P_*^W) = \sigma(P_*^W, P)$;

Note que nos dois casos a velocidade final de choque que atinge P é a mesma, assim como a velocidade final sobre o segmento de rarefação-1, o que caracteriza a mesma solução no espaço físico- xt . Ou seja, a unicidade é consequência da cadeia de igualdades: $\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*, P_*^G) = \sigma(P_*^G, P) = \sigma(P_*, P_*^W) = \sigma(P_*^W, P) = \sigma(P_*, P)$.

(e) Se $I \in (I^{P^W}, I^{W_*^P}]$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento $(P_*^W, W_*^P]$ da curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento $(P_*, T^{W_*^P}]$ da extensão-1 do segmento $(P_*^W, W_*^P]$ em $\mathcal{W}_-^2(P)$, e segue por um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. Observamos que se fizermos I tender a I^{P^W} pela direita então obtemos a sequência (ii) do item (d) acima. Observamos também que se $I = I^{W_*^P}$ então $T = T^{W_*^P}$, $M = W_*^P$ e o choque de W_*^P para P é característico a esquerda, com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$.

(f) Se $I \in (I^{W_*^P}, W)$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (W_*^P, W) da curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de uma composta-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para estado T sobre o segmento $(T^{W_*^P}, W)$ extensão-1 do segmento (W_*^P, W) em $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 é formada de uma rarefação-2 de M para W_*^P , seguida de um choque de W_*^P para P , com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$. Note que se fizermos I tender à $I^{W_*^P}$ pela direita, o segmento de rarefação na composta-2

desaparecerá e ficamos com a mesma solução limite do item (e);

(g) Se $I = W$, ou seja, se for injetada água pura, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta-2 de W para P . Esta composta -2 é formada de uma rarefação-2 de W para W_*^P seguida de um choque de W_*^P para P , com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$. Note também que esta solução pode ser obtida como o caso limite para I tendendo à W pela esquerda no item (f).

Isto conclui a descrição da solução para o estado de produção P sobre o segmento (O, P_1) inclusive mostrando a estabilidade na estrutura da solução quando se varia o estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$. Observamos que se fizermos P tender ao estado O então obteremos a mesma solução obtida em (AZEVEDO et al, 2009) para $P = O$ resumido no **Caso 1**, mais uma vez mostrando a estabilidade estrutural da solução.

Caso limite $P = P_1$

As curvas de Hugoniot com base no estado $P = P_1$ e com base no estado E estão exibidas na Fig. 55. Note a semelhança de $\mathcal{H}(P_1)$ com relação ao caso $P \in (O, P_1)$. Lembrando que P_1 coincide com o estado F do Capítulo 2, veja Fig. 15, temos que o estado $P_* \equiv F_3$ passa a coincidir com o estado E_* , como está ilustrado na Fig. 48, e o estado P_*^W passa a coincidir com o estado E_*^W . Temos também a coincidência entre os estados P_*^G e E . Sabemos da Seção 2 deste Capítulo que o estado E_* é extensão-1 dos seguintes estados: E , E_*^W e $P_1 \equiv F$. O fato primordial para este caso limite $P = P_1$ é a admissibilidade de choque entre os estados E_*^W e E o que não ocorria para o choque entre os estados P_*^W e P_*^G para $P \in (O, P_1)$. O plano de fase para o sistema de EDO's definido por E_*^W e por E , obtido numericamente, está exibido na Fig. 56(a). Portanto o choque de E_*^W para E é um choque transicional caracterizado pela conexão entre duas selas sobre o segmento de reta $[E, W]$.

Os estados especiais de $\mathcal{H}(P_1)$ nas Fig. 55 e na Fig. 57 são P , $E = P_*^G$, G_*^P , $E_* = P_*$, $E_*^W = P_*^W$ e W_*^P . Além disso, para o caso de injeção $I^{E_*} \equiv P_*^W$, a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann passa a ter apenas uma, e não mais três, estruturas distintas no espaço de estados, a qual pode ser acompanhada com auxílio da Fig. 57, isto é, só temos o caso:

(d) Se $I \equiv I^{E_*} \equiv I^{P_*^W}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de $I = I^{E_*}$ para $E_*^W = P_*^W$, seguido de um choque transicional de E_*^W para E , que por sua vez é seguido de um choque-2 de E para P_1 . A composta-1 é formada por uma rarefação de $I = I^{E_*}$ para o estado E_* seguida de um choque, de E_* para E_*^W , com $\sigma(E_*, E_*^W) = \lambda_1(E_*)$;

Observação: Outras três possibilidades de soluções no espaço de estados representando a mesma solução no espaço físico- xt seriam:

- (i) Composta-1 de $I = I^{E_*}$ para $E = P_*^G$, seguida de um choque-2 de $E = P_*^G$ para P_1 . A composta-1 é formada por uma rarefação de $I = I^{E_*}$ para o estado $E_* = P_*$, seguida de um choque de $E_* = P_*$ para $E = P_*^G$, com $\sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$. Porém este choque de E_* para E não é admissível segundo o critério de viscosidade.
- (ii) Composta-1 de $I = I^{E_*}$ para $E_*^W = P_*^W$, seguida de um choque-2 de E_*^W para P_1 . A composta-1 é formada por uma rarefação de $I = I^{E_*}$ para o estado E_* seguida de um choque, de E_* para E_*^W , com $\sigma(E_*, E_*^W) = \lambda_1(E_*)$. Mas o choque de E_*^W para P_1 também não é admissível segundo o critério de viscosidade.
- (iii) Apenas uma onda composta de $I = I^{E_*}$ para P_1 , definida pelo segmento de rarefação $[I^{E_*}, E_*]$ e por um choque de E_* para P_1 , com $\sigma(E_*, P_1) = \lambda_1(E_*)$. No entanto, o choque de E_* para P_1 não é admissível segundo o critério de viscosidade.

Caso 3: Estados de Produção P sobre o segmento $(P_1, P_2]$

As curvas de Hugoniot pelo estado P e pelo estado E podem ser vistas na Fig. 58(a). O estado P_E^W na Fig. 58(b) é definido com sendo a intersecção do ramo não local da Hugoniot por P com o segmento $[E, W]$ de $\mathcal{H}(E)$. O segmento $[T_*^E, T_*^{W^E}]$ é justamente a extensão-1 do segmento $[T^E, W_*^E]$. Já o segmento $[E_*, P_*]$ é a extensão-1 do segmento $[E, P]$ sobre o lado $[O, G]$ descrita por estados de índices “ 3 ” e “ 8 ” do Capítulo 2, os quais correspondem à choques não admissíveis entre os estados T sobre o segmento $[E_*, P_*]$ e estados M sobre o segmento $[E, P]$ correspondentes. De fato, tomando $M \in [E, P]$ e $T \in [E_*, P_*]$ sobre sua extensão-1 temos o plano de fase do sistema dinâmico definido por M e por T mostrado na Fig. 59(a). A Fig. 59(b) mostra que não existe

uma órbita saindo do repulsor T e chegando em M , mas sim uma órbita de T para uma sela N e, daí uma órbita saindo de N para o atrator M . Esta variedade instável de N para T é que serve como barreira para não haver a conexão entre T e M , caracterizando a não admissibilidade.

Desta não admissibilidade do segmento $[E_*, P_*]$ nos resta a tentativa de utilização do segmento de choque transicional $[T^E, W_*^E]$ ficando claro a diferença deste caso para o **Caso 1**. Resta analisar a questão da compatibilidade das velocidades das ondas na sequência. Na Fig. 60(a), mostramos o gráfico da velocidade de choque $\sigma(K, E)$ com K variando sobre o segmento $[T^E, W_*^E]$ de $\mathcal{H}(E)$ na Fig. 58(b) juntamente com a reta horizontal de altura $\sigma(E, P)$. Vemos que esta reta corta o gráfico da velocidade de choque justamente para $K = P_E^W$, mostrando de fato a coincidência entre as velocidades $\sigma(E, P)$ e $\sigma(P_E^W, E)$. Assim da Regra do Choque Triplo temos

$$\sigma(E, P) = \sigma(P_E^W, E) = \sigma(P_E^W, P). \quad (3.7)$$

Portanto, se considerarmos K sobre o segmento de choque transicional $(P_E^W, W_*^E]$, nas Fig. 58(b) e na Fig. 60(a), teremos que $\sigma(K, E) > \sigma(E, P)$, o que contraria a compatibilidade geométrica entre as velocidades das ondas numa sequência de choque transicional seguida de um choque-2 de E para P . Por outro lado, considere K sobre o segmento $[T^E, E_*^W]$ na Fig. 58(b) e sua respectiva extensão-1 $K_* \in [E_*, T_*^E]$. Daí, utilizando os gráficos das velocidades $\sigma(K, E)$ e $\sigma(K_*, K) = \lambda_1(K_*)$ vemos que $\lambda_1(K_*) = \sigma(K_*, K) > \sigma(K, E)$, caracterizando à falta de compatibilidade geométrica entre as velocidades numa sequência composta-1 de K_* para K seguida de um choque transicional de K para E . Ademais, note também na Fig. 60(b) que a compatibilidade geométrica entre as velocidades para esta sequência de ondas é válida apenas para K sobre o segmento $[E_*^W, W_*^E]$ e K_* sobre o segmento $[E_*, T_*^E]$ da Fig. 58(b).

Voltando à questão dos estados especiais, temos que os segmentos com choque associados à família-2 admissíveis de $\mathcal{H}(P)$ segundo o critério de viscosidade são: $[P, G_*^P]$ e $[P_E^W, W_*^P]$ exibidos na Fig. 58 e na Fig. 61. Os estados G_*^P e W_*^P são extensões-2 de P , e portanto $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$ e $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$. Quanto à $\mathcal{H}(E)$ temos os estados P_E^W, E_*^W e W_*^E tais que $\sigma(P_E^W, P_E^W) = \lambda_1(P_E^W)$, $\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E_*^W) = \sigma(E_*^W, E)$ e $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

Assim, a curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-(P)$, representada na Fig. 61, é dada pelos

segmentos $[G, G_*^P]$ e $[W, W_*^P]$ de composta-2, pelos segmentos (G_*^P, P) e $(W_*^P, P_E^W]$ de choque-2 e pelo segmento de rarefação-2 $[O, P]$. Além disto há o segmento de choque transicional $[E_*^W, P_E^W]$ em $\mathcal{W}_-^t(E)$. Resumidamente temos os seguintes estados especiais mostrados na Fig. 61: $P, E, G_*^P, E_*, E_*^W, P_E^*, P_E^W$ e W_*^P .

Com base nos segmentos que constituem $\mathcal{W}_-^2(P)$ e $\mathcal{W}_-^t(E)$ determinamos os estados de injeção que separam segmentos no lado $[G, W]$ do triângulo de saturações com construções distintas para a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann. Tomando a curva de onda-1 reversa pelos estados G_*^P, E_*^W, P_E^W e W_*^P e fazendo a intersecção destas curvas com a fronteira $[G, W]$ obtemos os seguintes estados de injeção: $I^{G_*^P}, I^{E_*}, I^{P_E^W}$ e $I^{W_*^P}$, respectivamente.

Passemos a descrição da solução do problema de Riemann para um estado de produção P (arbitrário) fixado sobre o segmento (P_1, P_2) e estados de injeção I nos segmentos do lado $[G, W]$ determinados acima.

De acordo com a localização de I sobre o lado $[G, W]$ temos os seguintes casos, os quais podem ser acompanhados com o auxílio da Fig. 61.

(a) Se $I = G$, ou seja, se injetarmos gás puro, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo f_o restrita ao lado $[O, G]$ do triângulo de saturações. Portanto, a sequência de ondas que compõe a solução é constituída por uma onda composta-2, a qual é dada por uma onda de rarefação-2 de G para G_*^P , seguida de uma onda de choque de G_*^P para P , com $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$.

(b) Se $I \in (G, I^{G_*^P})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (G, G_*^P) de $\mathcal{W}_-^2(P)$ no lado $[O, G]$, seguida de uma composta-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $(G, T^{G_*^P})$ extensão-1 do segmento (G, G_*^P) do lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. Na composta-2 é formada por uma rarefação-2 de M para G_*^P , seguida de um choque de G_*^P para P , com $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$.

(c) Se $I \in [I^{G_*^P}, I^{E_*})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , onde M é um estado sobre

o segmento $[G_*^P, E]$ de choque-2 de $\mathcal{W}_-(P)$ no lado $[O, G]$ do triângulo de saturações, seguida de um choque-2 de M para P . Para $I = I^{G_*^P}$, este último choque é característico à esquerda, com $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$. A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $[T^{G_*^P}, E_*)$ extensão-1 do segmento $[G_*^P, E]$ do lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

(d) Se $I = I^{E_*}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I^{E_*} para E_*^W , seguida de um choque transicional de E_*^W para E e depois um choque-2 de E para P com $\sigma(E_*^W, E) < \sigma(E, P)$. A composta-1 é formada por uma rarefação de I^{E_*} para o estado E_* , seguida de um choque de E_* para E_*^W , com $\sigma(E_*, E_*^W) = \lambda_1(E_*)$.

Observação: Uma outra possibilidade de solução no espaço de estados representando a mesma solução no espaço físico- xt seria:

- Composta-1 de I^{E_*} para E seguida de choque-2 de E para P . A composta-1 formada por uma rarefação de I^{E_*} para E_* , seguida de um choque de E_* para E , com $\sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*) < \sigma(E, P)$. Porém este choque de E_* para E não é admissível segundo o critério de viscosidade.

A unicidade segue do fato que $\sigma(E_*, E) = \sigma(E_*, E_*^W) = \sigma(E_*^W, E) = \lambda_1(E_*)$.

(e) Se $I \in (I^E, I^{P_E^W})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para K , com K sobre o segmento (E_*^W, P_E^W) de $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de um choque transicional de K para E e depois de um choque-2 de E para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento (E_*, P_E^*) extensão-1 do segmento (E_*^W, P_E^W) de $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de um choque de T para K , com $\sigma(T, K) = \lambda_1(T)$.

(f) Se $I = I^{P_E^W}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de $I^{P_E^W}$ para P_E^W , seguida de um choque transicional de P_E^W para E e depois um choque-2 de E para P ambos com mesma velocidade. A composta-1 é formada por uma rarefação de I para o estado P_E^* , seguida de um choque de P_E^* para P_E^W , com $\sigma(P_E^*, P_E^W) = \lambda_1(P_E^*)$;

Observação: A sequência descrita a seguir também seria uma solução caso o choque

de P_E^W para P fosse admissível, mas novamente representa a mesma solução no espaço físico- xt devido a Regra do Choque Triplo.

- Composta-1 de $I^{P_E^W}$ para P_E^W , seguida de um choque-2 de P_E^W para P . A composta-1 é análoga à anterior.

(g) Se $I \in (I^{P_E^W}, I^{W_*^P}]$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento $(P_*^W, W_*^P]$ de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento $(P_E^*, T^{W_*^P}]$ extensão-1 do segmento $(P_*^W, W_*^P]$ de $\mathcal{W}_-^2(P)$, e segue por um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. Observamos também que se $I = I^{W_*^P}$ então $T = T^{W_*^P}$, $M = W_*^P$ e o choque de M para P é característico à esquerda, com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$.

(h) Se $I \in (I^{W_*^P}, W)$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (W_*^P, W) da curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de uma composta-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para estado T sobre o segmento $(T^{W_*^P}, W)$ extensão-1 do segmento (W_*^P, W) de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 é formada de uma rarefação-2 de M para W_*^P , seguida de um choque de W_*^P para P , com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$;

(i) Se $I = W$, ou seja, se for injetada água pura, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta-2 de W para W_*^P seguida de choque de W_*^P para P , com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$.

Caso limite $P = P_2$

A curva de Hugoniot por $P = P_2$ está exibida na Fig. 19(a), onde $P_2 \equiv I$. Ela possui todo o ramo não local abaixo do segmento $[E, W]$ tangenciando em $W_*^E \equiv W_*^P$. Veja também Fig. 50. A construção para este caso é análoga ao $P \in (P_1, P_2)$, com alguns destaques importantes: os estados P_E^W e W_*^P colapsam e passam a coincidir com o estado W_*^E , onde W_*^E está no ramo $[E, W]$ da curva de Hugoniot pelo estado E . Com isto, o segmento $[I^{P_E^W}, I^{W_*^P}]$ de injeção reduz-se ao estado $I^{W_*^E}$. Consequentemente não temos o item “ g ” do caso anterior, devido a ausência do segmento $[P_E^W, W_*^P]$ de

choque-2 de $\mathcal{W}_-^2(P)$.

Ademais valem as igualdades

$$\lambda_2(W_*^E) = \sigma(W_*^E, E) = \sigma(E, P_2) = \sigma(W_*^E, P_2). \quad (3.8)$$

Os estados de injeção que separam segmentos no lado $[G, W]$ do triângulo de saturações com construções distintas para a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann para este caso limite são os mesmos para $P \in (P_1, P_2)$, exceto I_E^{PW} . São eles I^{G^P} , I^{E^*} e $I^{W_*^E}$ como mostrados na Fig. 62.

Passemos a descrição da solução do problema de Riemann para o estado de produção $P = P_2$ fixado e de injeção I nos segmentos do lado $[G, W]$ determinados anteriormente. Para $I \in [G, I^{E^*}]$ a construção é análoga ao caso anterior, por este motivo será omitida. Antes de iniciarmos a descrição, acompanhemos na Fig. 62 as representações das possíveis soluções, para uma melhor compreensão.

(a) Se $I \in (I^{E^*}, I^{W_*^E})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para K , com K sobre o segmento (E_*^W, W_*^E) de $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de um choque transicional de K para E , e depois um choque-2 de E para $P = P_2$. A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento $(E_*, T^{W_*^E})$ extensão-1 do segmento (E_*^W, W_*^E) de $\mathcal{W}_-^t(E)$, e segue por um choque de T para K , com $\sigma(T, K) = \lambda_1(T)$.

(b) Se $I = I^{W_*^E}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de $I = I^{W_*^E}$ para W_*^E , seguida de um choque de W_*^E para o estado E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$ e depois de um choque-2 de E para $P = P_2$. A composta-1 é formada por uma rarefação de $I = I^{W_*^E}$ para o estado $T^{W_*^E}$ onde $T^{W_*^E}$ é extensão-1 do estado W_*^E , seguida de um choque de $T^{W_*^E}$ para W_*^E , com $\sigma(T^{W_*^E}, W_*^E) = \lambda_1(T^{W_*^E})$;

Observação: Como nos casos anteriores, uma outra solução seria:

- Composta-1 de $I = I^{W_*^E}$ para W_*^E , seguida de um choque de W_*^E para $P = P_2$, com $\sigma(W_*^E, P) = \lambda_2(W_*^E)$. A composta-1 é análoga a anterior. Porém o choque de W_*^E para $P = P_2$ não é admissível. Caso fosse, a unicidade da solução no espaço físico- xt seguiria do fato que $\lambda_2(W_*^E) = \sigma(W_*^E, P) = \sigma(W_*^E, E) = \sigma(E, P)$.

(c) Se $I \in (I^{W_*^E}, W)$, então a sequência de ondas para a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (W_*^E, W) de $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de uma composta transicional de M para E , e depois um choque-2 de E para $P = P_2$. A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I para estado T sobre o segmento $(T^{W_*^E}, W)$ extensão-1 do segmento (W_*^E, W) de $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta transicional é formada de uma rarefação-2 de M para W_*^E , seguida de um choque transicional de W_*^E para E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

(d) Se $I = W$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta transicional de W para para E , seguida de um choque-2 de E para $P = P_2$. A composta transicional consiste de uma rarefação-2 de W para W_*^E , seguida de um choque transicional de W_*^E para E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

Caso 4: Estados de Produção P sobre o segmento $(P_2, E]$

As curvas de Hugoniot por um estado P sobre o segmento (P_2, E) e pelo estado E estão exibidas na Fig. 63. Observamos que $\mathcal{H}(P)$ possui apenas o segmento $[P, G_*^P)$ de choque-2 admissível segundo o critério de viscosidade, sendo que todo o seu ramo não local fica abaixo do segmento $[E, W]$ e não tem papel na construção da solução por não possuir choque admissível de pontos neste ramo local para P . Assim, as sequências de onda que compõem a solução do problema de Riemann são as mesmas do caso limite $P = P_2$.

Caso limite $P = E$

A curva de Hugoniot pelo estado $P = E$ está exibida na Fig. 25 e em várias outras figuras. Lembramos que o estado E corresponde à um estado tal que $\mathcal{H}(E)$ possui o ponto de bifurcação secundária-1 denotado por T^E . A curva de Hugoniot (reversa) $\mathcal{H}(P = E)$ possui os segmentos de choques admissíveis: (E, G_*^P) de choque-2 ao longo de $[O, G]$ e $[T^E, W_*^E)$ de choque transicional ao longo do segmento $[E, W]$. O estado E_* é uma extensão-1 de E , isto é, $\sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$ bem como é extensão-1 do estado E_*^W , logo $\sigma(E_*, E_*^W) = \lambda_1(E_*)$.

A curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(E)$ é constituída pelos segmentos (E, G_*^P) de

choque-2, pelo segmento $[G, G_*^P]$ de composta-2 e pelo segmento $[O, E]$ de rarefação-2.

A curva de onda transicional reversa $\mathcal{W}_-^t(E)$ é constituída pelos segmentos (T^E, W_*^E) de choque transicional e pelo segmento $[W_*^E, W]$ de composta transicional, no entanto devido o fato da compatibilidade geométrica justificado anteriormente apenas a parte $[E_*^W, W_*^E]$ do segmento (T^E, W_*^E) é usado na solução.

Na Fig. 64 a curva por G, T^{G^P} e E_* corresponde à extensão-1 do segmento $[G, E]$ descrita pelos estados de índices “ 8 ” no Capítulo 2 e a curva por $E_*, T^{W_*^E}$ e W corresponde à extensão-1 do segmento $[E_*^W, W]$ de $\mathcal{W}_-^t(E)$.

Em resumo, temos os seguinte estados especiais em $\mathcal{H}(E)$, mostrados na Fig. 64: E, G_*^P, E_*, E_*^W e W_*^E . Baseados nestes estados especiais temos os seguintes estados de injeção que separam segmentos no lado $[G, W]$ cujas soluções tem estruturas distintas: $I^{G_*^P}, I^{E_*}$ e $I^{W_*^E}$, também mostrados na Fig. 64.

As possibilidades de solução do problema de Riemann para este caso é análoga ao caso $P \in (P_2, E)$, com apenas uma ligeira mudança na sequência de ondas quando $I \in [I^{E_*}, W]$, pois não temos mais o segmento de choque-2 de E para o estado P como tínhamos para $P \in (P_2, E)$. Na Fig. 64 estão exibidas as representações das possíveis soluções para este caso, e logo abaixo estão descritas as possibilidades.

(a) Se $I = G$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo f_o restrita ao lado $[O, G]$ do triângulo de saturações. Portanto, a sequência de ondas que compõe a solução consiste de uma composta-2 conectando G à E , a qual é dada por uma onda de rarefação-2 de G para G_*^P , seguida de uma onda de choque característica à esquerda de G_*^P para E , com $\sigma(G_*^P, E) = \lambda_2(G_*^P)$;

(b) Se $I \in (G, I^{G_*^P})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (G, G_*^P) de $\mathcal{W}_-^2(E)$, seguida de uma composta-2 de M para E . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $(G, T^{G_*^P})$ extensão-1 do segmento (G, G_*^P) , seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 é formada por uma rarefação-2 de M para G_*^P , seguida de um choque característico de G_*^P para E , com $\sigma(G_*^P, E) = \lambda_2(G_*^P)$.

(c) Se $I \in [I^{G_*^P}, I^{E_*})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , onde M é um estado sobre o segmento $[G_*^P, E)$ sobre $\mathcal{W}_-^2(E)$, seguida de um choque-2 de M para E . Para $I = I^{G_*^P}$, o choque do estado G_*^P para o estado E é característico à esquerda, com $\sigma(G_*^P, E) = \lambda_2(G_*^P)$. A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $[T^{G_*}, E_*)$ da extensão-1 do segmento $[G_*^P, E)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

(d) Se $I = I^{E_*}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I^{E_*} para E_*^W , seguida de um choque transicional de E_*^W para E . A composta-1 é formada por uma rarefação de I^{E_*} para o estado E_* , seguida de um choque de E_* para E_*^W , com $\sigma(E_*, E_*^W) = \lambda_1(E_*)$.

Observação: Uma outra possibilidade de solução no espaço de estados seria:

- Composta-1 de I^{E_*} para E . A composta-1 formada por uma rarefação-1 de I^{E_*} para E_* , seguida de um choque de E_* para E , com $\sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$. Porém este choque de E_* para E é não admissível segundo o critério de viscosidade e mesmo assim seria a mesma solução no espaço físico- xt , porque $\sigma(E_*, E) = \sigma(E_*, E_*^W) = \lambda_1(E_*)$.

(e) Se $I \in (I^{E_*}, I^{W_*^E})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para K , com K sobre o segmento (E_*^W, W_*^E) de $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de um choque transicional de K para E . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento $(E_*, T^{W_*^E})$ extensão-1 do segmento (E_*^W, W_*^E) de choque transicional de $\mathcal{W}_-^t(E)$, e segue por um choque de T para K , com $\sigma(T, K) = \lambda_1(T)$.

(f) Se $I = I^{W_*^E}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de $I = I^{W_*^E}$ para W_*^E , seguida de um choque de W_*^E para o estado E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$. A composta-1 é formada por uma rarefação de $I = I^{W_*^E}$ para o estado $T^{W_*^E}$ onde $T^{W_*^E}$ é extensão-1 do estado W_*^E , seguida de um choque de $T^{W_*^E}$ para W_*^E , com $\sigma(T^{W_*^E}, W_*^E) = \lambda_1(T^{W_*^E})$. Observamos aqui que o choque de W_*^E para E é o limite de um choque transicional

característico à esquerda;

(g) Se $I \in (I^{W_*^E}, W)$, então a sequência de ondas para a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (W_*^E, W) sobre $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de uma composta transicional de M para E . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para estado T sobre o segmento $(T^{W_*^E}, W)$ da extensão-1 do segmento (W_*^E, W) sobre $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguido de choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta transicional é formada de uma rarefação-2 de M para W_*^E , seguida de um choque de W_*^E para E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

(h) Se $I = W$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta transicional de W para para E . A composta transicional consiste de uma rarefação-2 de W para W_*^E , seguida de um choque de W_*^E para E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

Caso 5: Estados de Produção P sobre o segmento $(E, P_3]$

Primeiramente, lembramos que o estado P_3 corresponde ao estado T de inflexão-2 ao longo do lado $[O, G]$, onde λ_2 possui valor máximo. A curva de Hugoniot (reversa) pelo estado P está exibida na Fig. 65. A curva de Hugoniot $\mathcal{H}(P)$ possui apenas o segmento (P, G_*^P) de choques-2 admissíveis. Neste caso o segmento $[E, P]$ ao longo do lado $[O, G]$ corresponde a rarefações-2, como pode ser visto na Fig. 3(a), enquanto no **Caso 4** com $P \in (P_2, E)$ o segmento $[E, P]$ corresponde à choques-2. Por isto, a construção da solução para este **Caso 5** se diferencia do **Caso 4**. Assim, utilizaremos o segmento de choque transicional $[E_*^W, W_*^E]$ da curva de onda transicional reversa $\mathcal{W}_-^t(E)$ e também o segmento $[E, P]$ de rarefação-2 na curva de onda reversa de $\mathcal{W}_-^2(P)$ na construção da solução. Temos também o segmento (P, P_*) em $\mathcal{H}(P)$ correspondente à choques-1 admissíveis segundo o critério de viscosidade sendo que $\sigma(P_*, P) = \lambda_1(P_*)$.

Como mostrado na Fig. 66, a curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$ é dada pelo segmento $[G, G_*^P]$ de composta-2, o segmento (G_*^P, P) de choque-2 e o segmento $[O, P]$ de rarefação-2. Resumindo temos os seguinte estados especiais em $\mathcal{W}_-^2(P)$ mostrados nas Figs. 65 e 66: P , P_* e E . Temos também os seguintes estados especiais em $\mathcal{H}(E)$: E_* , E_*^W e W_*^E .

Assim os estados especiais de injeção que definem segmentos com construções distintas para a solução são análogos ao caso anterior, acrescido do estado I^{P*} . Conforme mostrado na Fig. 66 são eles : I^{G^P} , I^{P*} , I^{E*} e I^{W^E} . Para estados de injeção $I \in [G, I^{G^P}]$, a sequência de ondas que compõe a solução para o problema de Riemann é análoga ao caso anterior e por este motivo omitiremos. Mesmo assim, é possível acompanhar a construção na Fig. 66 onde estão exibidas as representações das possíveis soluções.

De acordo com a localização de I sobre o segmento $(I^{G^P}, W]$ temos os seguintes casos:

(a) Se $I \in (I^{G^P}, I^{P*})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , onde M é um estado sobre o segmento (G^P, P) de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento (T^{G^P}, P_*) extensão-1 do segmento (G^P, P) no lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

(b) Se $I = I^{P*}$, então a sequência de ondas que compõe a solução é constituída por uma composta-1 de I^{P*} para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I^{P*} para o estado P_* , seguida de um choque de P_* para P , com $\sigma(P_*, P) = \lambda_1(P_*)$.

(c) Se $I \in (I^{P*}, I^{E*})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , onde M é um estado sobre o segmento $(P, E]$ de $\mathcal{W}_-^2(P)$ no lado $[O, G]$, seguida de uma rarefação-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento (T^{P*}, E_*) extensão-1 do segmento (P, E) no lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

(d) Se $I = I^{E*}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I^{E*} para E_*^W , seguida de um choque transicional de E_*^W para E e depois uma rarefação-2 de E para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I^{E*} para o estado E_* , seguida de um choque de E_* para E_*^W , com $\sigma(E_*, E_*^W) = \lambda_1(E_*) = \sigma(E_*^W, E)$.

Observação: como nos casos anteriores, uma outra possibilidade de solução no espaço de estados seria:

- Composta-1 de I^{E_*} para E , seguida de uma rarefação-2 de E para P . A onda composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I^{E_*} para E_* , seguida de um choque de E_* para E , com $\sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$. No entanto o choque de E_* para E não é admissível e mesmo assim teríamos a mesma solução no espaço físico- xt pois $\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E) = \sigma(E_*^W, E) = \sigma(E_*, E_*^W)$.

(e) Se $I \in (I^{E_*}, I^{W_*^E}]$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para K , onde K é um estado sobre o segmento $(E_*^W, W_*^E]$ de $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de um choque transicional de K para E e depois uma rarefação-2 de E para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $(E_*, T^{W_*^E}]$ extensão-1 do segmento $(E_*, W_*^E]$ de $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de um choque de T para K , com $\sigma(T, K) = \lambda_1(T)$. Observe que se $I = I^{W_*^E}$ teremos $T = T^{W_*^E}$, $K = W_*^E$, e o choque de W_*^E para E é o limite de um choque transicional, com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

(f) Se $I \in (I^{W_*^E}, W)$, então a sequência de ondas para a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (W_*^E, W) de $\mathcal{W}_-(E)$, e depois por uma composta transicional de M para E , seguida de uma rarefação-2 de E para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para estado T sobre o segmento $(T^{W_*^E}, W)$ extensão-1 do segmento (W_*^E, W) de $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta transicional é formada de uma rarefação-2 de M para W_*^E , seguida do limite de choque transicional de W_*^E para E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$;

(g) Se $I = W$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta transicional de W para o estado E , seguida de uma rarefação-2 de E para P . A composta transicional é análoga ao item anterior.

Caso limite $P = P_3$

Considere o estado de produção $P = P_3$ sobre o lado $[O, G]$, onde P_3 é o ponto T do conjunto de inflexão-2 sobre o lado $[O, G]$. Por isto o estado G_*^P dos casos anteriores

desaparece neste caso; em outras palavras G_*^P coincide com o próprio $P = P_3$. A Fig. 33 exhibe a curva de Hugoniot por $P_3 \equiv T$. O estado T_1 na Fig. 33 é uma extensão-1 do estado P_3 , mas seguindo a notação deste Capítulo denotaremos T_1 por P_* , como na Fig. 67. Como o estado P_3 não possui extensão-2 no lado $[O, G]$, então utilizaremos o segmento $[E, P_3]$ de rarefação-2, como usamos para o **Caso 4**.

Utilizaremos também, o segmento de choque transicional $[E_*^W, W_*^E]$ da curva de onda transicional reversa $\mathcal{W}_-^t(E)$.

A curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P_3)$ é constituída pelos segmentos $[G, P_3]$ e $[O, P_3]$ de rarefação-2. O segmento (P_3, P_*) de $\mathcal{H}(P_3)$ corresponde à choques-1 admissíveis.

Em resumo, temos os seguinte estados especiais em $\mathcal{W}_-^2(P)$ mostrados na Fig. 67: P_3, E, P_* e também os estados E_*, E_*^W e W_*^E em $\mathcal{H}(E)$.

Os estados de injeção que separam segmentos no lado $[G, W]$ do triângulo de saturações com estruturas distintas das sequêcia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann também estão mostrados na Fig. 67. São eles: I^{P_*}, I^{E_*} e $I^{W_*^E}$, os quais são obtidos da mesma maneira que nos casos anteriores.

Dessa maneira, temos as seguintes possibilidades de solução do problema de Riemann, de acordo com a localização do estado I ao longo do lado $[G, W]$ do triângulo de saturações, como pode ser acompanhado com o auxílio da Fig. 67.

(a) Se $I = G$, então a sequêcia de ondas que compõe a solução é dada por apenas uma onda de rarefação-2 de G para P_3 .

(b) Se $I \in (G, I^{P_*})$, então a sequêcia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (G, P_3) de $\mathcal{W}_-^2(P_3)$ no lado $[O, G]$, seguida de uma rarefação-2 de M para P_3 . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento (G, P_*) extensão-1 do segmento (G, P_3) no lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

(c) Se $I = I^{P_*}$, então a sequêcia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por apenas uma composta-1 de I^{P_*} para P_3 . Esta composta-1 é formada por uma rarefação de I^{P_*} para o estado P_* , seguida de um choque de P_* para P_3 , com $\sigma(P_*, P_3) = \lambda_1(P_*)$.

As possíveis soluções para $I \in (I^{P_*}, W]$ são análogas às do **Caso 4**.

Caso 6: Estados de Produção P sobre o segmento $(P_3, P_4]$

Considere P um estado de produção arbitrário sobre o segmento (P_3, P_4) no lado $[O, G]$, onde P_4 foi definido como sendo o estado U do Capítulo 2 tal que $\sigma(U, E) = \lambda_2(E)$. A Fig. 68 exibe a curva de Hugoniot (reversa) por esse estado P , bem como $\mathcal{H}(E)$. A curva $\mathcal{H}(P)$ possui os seguintes segmentos de choques admissíveis que podem atingir P : (P, G_*^P) de choque-2 e (P, P_*) de choque-1. Como nos casos anteriores os estados P_* e G_*^P são extensões do estado P , com $\sigma(P_*, P) = \lambda_1(P_*)$ e $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$. Note nas Figs. 68 e 69 que G_*^P está entre P_3 e E .

Consideramos também o segmento de choque transicional $[E_*^W, W_*^E]$ em $\mathcal{H}(E)$.

Baseados nestas informações, temos que $\mathcal{W}_-^2(P)$ é constituída dos segmentos $[O, G_*^P]$ de composta-2 e (P, G_*^P) de choque-2, além do segmento $[G, P]$ de rarefação-2.

Conforme está mostrado na Fig. 69 os estados especiais que definem construções distintas de soluções do problema de Riemann são $G_*^P, P, P_*, E_*, E_*^W$ e W_*^E . Os estados de injeção sobre o lado $[G, W]$ que determinam estruturas distintas nas sequências de ondas são $I^{P_*}, I^{G_*^P}, I^{E_*}$ e $I^{W_*^E}$ são obtidos como nos casos anteriores através de curvas de onda-1 reversas.

Desta forma, temos as seguintes possibilidades de solução do problema de Riemann que também podem ser acompanhadas com o auxílio da Fig. 69:

(a) Se $I \in [G, I^{P_*}]$, então as possibilidades de solução do problema de Riemann é análoga ao **Caso 5**, no mesmo intervalo considerado.

(b) Se $I \in (I^{P_*}, I^{G_*^P})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (P, G_*^P) de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguido de um choque-2 de M para P . A composta-1 é formada de uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento de extensão-1 $(P_*, T^{G_*^P})$ do segmento (P, G_*^P) no lado $[O, G]$.

(c) Se $I = I^{G_*^P}$, então a sequência de ondas que compõe a solução é constituída por uma composta-1 de I para G_*^P , seguida de um choque de G_*^P para P , com $\sigma(G_*^P, P) =$

$\lambda_2(G_*^P)$. A composta-1 é análoga aquela do item **(b)**.

(d) Se $I \in (I^{G_*^P}, I^{E_*})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , onde M é um estado sobre o segmento (G_*^P, E) de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de uma composta-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento $(T^{G_*^P}, E_*)$ extensão-1 do segmento (G_*^P, E) no lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 é formada por uma rarefação-2 de M para G_*^P , seguida de um choque de G_*^P para P , com $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$.

(e) Se $I = I^{E_*}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I^{E_*} para E_*^W , seguida de um choque transicional de E_*^W para E e depois uma composta-2 de E para P . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I^{E_*} para E_* seguida de E_* para E_*^W com $\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E) = \sigma(E_*, E_*^W)$.

Observação: Caso o choque de E_* para E fosse admissível, uma outra solução no espaço de estados, representando a mesma solução no espaço físico- xt seria:

- Composta-1 de I^{E_*} para E seguida de uma composta-2 de E para P . A onda composta-1 formada por uma rarefação-1 de I^{E_*} para E_* , seguida de um choque de E_* para E , com $\sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$, e a composta-2 análoga a anterior.

(f) Se $I \in (I^{E_*}, I^{W_*^E}]$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para K , onde K é um estado sobre o segmento $(E_*^W, W_*^E]$ de $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de um choque transicional de K para E e depois de uma composta-2 de E para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $(E_*, T^{W_*^E}]$ extensão-1 do segmento $(E_*, W_*^E]$ em $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de um choque de T para K , com $\sigma(T, K) = \lambda_1(T)$. Observe também, que se $I = I^{W_*^E}$ temos $T = T^{W_*^E}$ e $K = W_*^E$, e o choque de W_*^E para E é o limite do choque transicional, com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$. A composta-2 é a mesma do item anterior.

(g) Se $I \in (I^{W_*^E}, W)$, então a sequência de ondas que compõe solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento

(W_*^E, W) de $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de uma composta transicional de M para E , que por sua vez é seguida de uma composta-2 de E para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para estado T sobre o segmento (TW_*^E, W) extensão-1 do segmento (W_*^E, W) em $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta transicional é formada de uma rarefação-2 de M para W_*^E , seguida do limite de choque transicional de W_*^E para E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$. A composta-2 é análoga aquela do item (d).

(h) Se $I = W$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta transicional de W para E seguida de uma composta-2 de E para P . A composta transicional e a composta-2 são análogas ao item anterior.

Caso limite $P = P_4$.

De acordo com a definição de $P_4 \equiv U$ do Capítulo 2 temos que $\mathcal{H}(P_4)$, exibida na Fig. 70, é tal que o estado G_*^P , no lado $[O, G]$ extensão-2 de P_4 , coincide com o estado E . Este detalhe caracteriza uma construção distinta daquela apresentada para $P \in (P_3, P_4)$ como veremos na construção das possíveis soluções do problema de Riemann para este caso.

Os possíveis segmentos de choques admissíveis em $\mathcal{H}(P_4)$ são (P_4, E) de choque-2 e (P_4, P_*) de choque-1. A curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P_4)$ possui os segmentos $[O, E]$ de composta-2, (G, P_4) de rarefação-2 e (E, P_4) de choque-2, sendo que o segmento $[O, E]$ de composta-2 não será relevante na construção. Veja Fig. 71.

Utilizaremos, mais uma vez, o segmento de choque transicional $[E_*^W, W_*^E]$ e o de composta transicional $[W_*^E, W]$ sobre $\mathcal{W}_-(E)$.

Dessa maneira, os estados especiais que definem construções distintas de soluções do problema de Riemann exibidos nas Figs. 70 e 71 são P, P_*, E_* e W_*^E . Os estados de injeção sobre o lado $[G, W]$ também mostrados na Fig. 71, que determinam estruturas distintas nas sequências de ondas são I^{P_*}, I^{E_*} e $I^{W_*^E}$. Todos eles obtidos como nos casos anteriores via curvas de onda-1 reversas.

As possibilidades de solução do problema de Riemann para este caso estão descritas logo abaixo e podem ser acompanhadas com o auxílio da Fig. 71.

(a) Se $I \in [G, I^{P_*}]$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de

Riemann é análoga ao **Caso 5** ($P = P_3$), para I no mesmo intervalo considerado.

(b) Se $I \in (I^{P_*}, I^{E_*})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M sobre o segmento (P_4, E) de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque-2 de M para P_4 . A composta-1 é formada de uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento (P_*, E_*) extensão-1 do segmento (P, E) no lado $[O, G]$.

(c) Se $I = I^{E_*}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I^{E_*} para E_*^W , seguida de um choque transicional de E_*^W para E , que por sua vez é seguido de um choque de E para P_4 , com $\sigma(E, P_4) = \lambda_2(E)$. A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I^{E_*} para E_* , seguida de um choque de E_* para E , com $\sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$.

Observação: como nos casos anteriores, teríamos

- Composta-1 de I^{E_*} para E , seguida de um choque de E para $P \equiv P_4$, com $\sigma(E, P_4) = \lambda_2(E)$. A composta-1 formada por uma rarefação-1 de I^{E_*} para E_* , seguida de um choque de E_* para E , com $\sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$.

(d) Se $I \in (I^{E_*}, I^{W_*^E}]$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para K , onde K é um estado sobre o segmento $(E_*^W, W_*^E]$ de $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de um choque transicional de K para E e depois segue por um choque de E para P , com $\sigma(E, P) = \lambda_2(E)$. A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $(E_*, T^{W_*^E}]$ extensão-1 do segmento $(E_*, W_*^E]$ em $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de um choque de T para K , com $\sigma(T, K) = \lambda_1(T)$. Observe que se $I = I^{W_*^E}$ teremos $T = T^{W_*^E}$, $K = W_*^E$ e o choque de W_*^E para E é o limite do choque transicional, com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

(f) Se $I \in (I^{W_*^E}, W)$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (W_*^E, W) de $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de uma composta transicional de M para E , e posteriormente seguida de um choque de E para P , com $\sigma(E, P) = \lambda_2(E)$. A composta-1 é formada por uma rarefação de I para estado T sobre o segmento $(T^{W_*^E}, W)$

extensão-1 do segmento (W_*^E, W) em $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta transicional é formada de uma rarefação-2 de M para W_*^E , seguida do limite de choque transicional de W_*^E para E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

(g) Se $I = W$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta transicional de W para E , seguida de um choque de E para P , com $\sigma(E, P) = \lambda_2(E)$. A composta transicional é análoga ao item anterior.

Caso 7: Estados de Produção P sobre o segmento $(P_4, P_5]$

Seja P um estado de produção arbitrário sobre o segmento $(P_4, P_5]$ do lado $[O, G]$, onde o estado P_5 corresponde ao estado X definido no Capítulo 2 como sendo aquele estado em que sua extensão-2, correspondente ao índice “ 10 ”, pertencente ao ramo não local de $\mathcal{H}(P_5)$ coincide com o estado W_*^E como mostrado na Fig 39. O estado P está localizado entre os estados U e X do Capítulo 2, mas para efeito de continuidade de nossos argumentos exibimos a $\mathcal{H}(P)$ na Fig. 72, para P entre V e X do Capítulo 2 e por isto $\mathcal{H}(P)$ já possui um ramo não local “ entrando ” no triângulo de saturações pelo lado $[O, W]$. O estado W_*^P neste ramo não local corresponde à extensão-2 de índice “ 10 ” do Capítulo 2. O ramo não local de $\mathcal{H}(P)$ não possui estados M tais que o choque de M para P seja admissível para o critério de viscosidade como usado neste trabalho, por isto este ramo não é utilizado na solução. Note que o estado G_*^P de extensão-2 de P no lado $[O, G]$, correspondente ao índice “ 9 ” no Capítulo 2, está entre os estados E e O . Isto implica numa ligeira mudança na construção das possíveis soluções do problema de Riemann em relação ao caso anterior como veremos a seguir.

Os possíveis estados $M \in \mathcal{H}(P)$ tais que o choque de M para P seja admissível correspondem aos segmentos (P, G_*^P) de choque-2 e (P, P_*) de choque-1. O estado P_* é a extensão-1 de P correspondente ao índice “ 8 ” no Capítulo 2.

A curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$ é constituída pelos segmentos $[G_*^P, O]$ de composta-2 e (P, G_*^P) de choque-2, além do segmento $[G, P]$ de rarefação-2.

Consideramos também neste caso o segmento de choque transicional $[E_*^W, W_*^E]$ e o de composta transicional $(W_*^E, W]$ na curva de onda transicional reversa $\mathcal{W}_-^t(E)$.

Os estados especiais para este caso mostrados nas Figs. 72 e 73 são: P, E, P_* ,

E_* , E_*^W e W_*^E . Consequentemente, temos os seguintes estados de injeção sobre o lado $[G, W]$ que determinam estruturas distintas nas sequências que compõem a solução do problema de Riemann. São eles I^{P_*} , I^{E_*} e $I^{W_*^E}$, como mostrados na Fig. 73.

Assim, temos as seguintes possibilidades de solução do problema de Riemann, de acordo com a localização do estado I ao longo do lado $[G, W]$, as quais podem ser acompanhadas com auxílio da Fig. 73.

(a) Se $I = G$, então a sequência de ondas que compõe a solução é dada por uma única onda de rarefação-2 de G para P .

(b) Se $I \in (G, I^{P_*})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (G, P) de $\mathcal{W}_-^2(P)$ no lado $[O, G]$, seguida de uma rarefação-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento (G, P_*) extensão-1 do segmento (G, P) no lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

(c) Se $I = I^{P_*}$, então a sequência de ondas que compõe a solução é constituída por uma única onda composta-1 de I^{P_*} para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I^{P_*} para o estado P_* , seguida de um choque de P_* para P , com $\sigma(P_*, P) = \lambda_1(P_*)$.

(d) Se $I \in (I^{P_*}, I^{E_*})$, então a sequência de ondas que compõe a solução é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (P, E) de $\mathcal{W}_-^2(P)$ no lado $[O, G]$, seguida de um choque-2 de M para P . A composta-1 é formada de uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento (P_*, E_*) extensão-1 do segmento (P, E) no lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

(e) Se $I = I^{E_*}$, então a sequência de ondas que compõe a solução é constituída por uma composta-1 de I^{E_*} para E_*^W , seguida de um choque transicional de E_*^W para E , seguido de um choque-2 de E para P . A onda composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I^{E_*} para E_* , seguida de um choque de E_* para E , com $\sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$.

Observação: Como nos casos anteriores uma outra possibilidade de solução no espaço de estados, representando a mesma solução no espaço físico- xt seria:

- Composta-1 de I^{E_*} para E , seguida de um choque-2 de E para P . A onda

composta-1 sendo formada por uma rarefação-1 de I^{E_*} para E_* , seguida de um choque de E_* para E com $\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E)$. Porém este choque de E_* para E não é admissível.

(f) Se $I \in (I^{E_*}, I^{W_*^E}]$, então a sequência de ondas que compõe a solução é constituída por uma composta-1 de I para K , onde K é um estado sobre o segmento $(E_*^W, W_*^E]$ de $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de um choque transicional de K para E , o qual é seguido por um choque-2 de E para P . A composta-1 é formada por uma rarefação de I para um estado T sobre o segmento $(E_*, T^{W_*^E}]$ extensão-1 do segmento $(E_*, W_*^E]$ em $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de um choque de T para K , com $\sigma(T, K) = \lambda_1(T)$. Observe também, que se $I = I^{W_*^E}$ temos $T = T^{W_*^E}$ e $K = W_*^E$, e o choque W_*^E para E é o limite de um choque transicional, com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

(g) Se $I \in (I^{W_*^E}, W)$, então a sequência de ondas que compõe a solução é constituída por uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (W_*^E, W) de $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de uma composta transicional de M para E , a qual é seguida de um choque-2 de E para P , com $\sigma(E, P) = \lambda_2(E)$. A composta-1 é formada por uma rarefação de I para estado T sobre o segmento $(T^{W_*^E}, W)$ extensão-1 do segmento (W_*^E, W) em $\mathcal{W}_-(E)$, seguida de choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta transicional é formada de uma rarefação-2 de M para W_*^E , seguida do limite de choque transicional de W_*^E para E , com $\sigma(W_*^E, E) = \lambda_2(W_*^E)$.

(h) Se $I = W$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta transicional de W para E , seguida de um choque-2 de E para P . A composta transicional é análoga ao item anterior.

Caso limite $P = P_5$

Para este caso limite $P = P_5$ a modificação que ocorre é apenas relativa ao ramo não local de $\mathcal{H}(P)$, que como foi dito antes fica todo acima do segmento $[E, W]$ tangenciando-o exatamente no estado W_*^E , isto é, o estado W_*^P da Fig. 72 passa à coincidir com W_*^E . Sendo assim, como este ramo não local não possui estados M tais que o choque de M para P_5 seja admissível, nada muda com relação à construção da solução para P sobre o segmento (P_4, P_5) .

Caso 8: Estados de Produção P sobre o segmento $(P_5, P_6]$

Seja P um estado de produção arbitrário sobre o segmento (P_5, P_6) do lado $[O, G]$, onde o estado P_6 corresponde ao estado Y introduzido no Capítulo 2 tal que sua extensão-2 no ramo não local correspondente ao índice “ 10 ” é também um ponto do conjunto de inflexão-1 entre T^J e W da Fig. 50. A curva de Hugoniot por P está exibida na Fig. 74. O diferencial deste caso para o caso anterior é que o ramo não local da curva de Hugoniot $\mathcal{H}(P)$ passa a ter o segmento $[P_E^W, W_*^P]$ de choque-2 admissível abaixo do segmento $[E, W]$. Quanto à Fig. 74(b) o estado P_E^W é definido com sendo a intersecção do ramo não local da Hugoniot por P com o segmento $[E, W]$ de $\mathcal{H}(E)$; e o estado W_*^P corresponde à extensão-2 de índice “ 10 ” de P , do Capítulo 2 e o estado G_*^P corresponde à extensão-2 de índice “ 9 ” de P , do Capítulo 2. O segmento $[E_*, P_E^*]$ é a extensão-1 do segmento $[E_*^W, P_E^W]$ de choque transicional em $\mathcal{H}(E)$; o segmento $[P_E^*, T^{W_*^P}]$ é a extensão-1 do segmento $[P_E^W, W_*^P]$ de choque-2 em $\mathcal{H}(P)$.

A curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$ formada pelos segmentos $[O, G_*^P]$ e $(W_*^P, W]$ de composta-2, pelos segmentos (P, E) e $[P_E^W, W_*^P]$ de choque-2; e pelo segmento $[G, P]$ de rarefação-2.

Temos também o segmento de choque transicional $[E_*^W, W_*^E]$ da curva de onda transicional reversa $\mathcal{W}_-^t(E)$. Porém segmento $(P_E^W, W_*^E]$ de $\mathcal{W}_-^t(E)$ não é relevante devido à incompatibilidade geométrica de velocidades. A justificativa desta incompatibilidade é semelhante ao **Caso** $P \in (P_1, P_2)$ sendo que $\sigma(P_E^W, P) = \sigma(E, P)$ e por esta razão omitiremos.

Os estados especiais mostrados nas Fig. 74 e Fig. 75 são: P , E , E_* , E_*^W , P_E^W e W_*^P .

Com base nos segmentos que constituem $\mathcal{W}_-^2(P)$ e $\mathcal{W}_-^t(E)$ determinamos os estados de injeção que separam segmentos no lado $[G, W]$ do triângulo de saturações com construções distintas para a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann. Na Fig. 75 eles estão denotados por: I^{P_*} , I^{E_*} , $I^{P_E^W}$ e $I^{W_*^P}$.

De acordo com a localização de I sobre o segmento $[G, W]$ temos as seguintes possibilidades para a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann, as quais podem ser acompanhadas com o auxílio da Fig. 75:

(a) Se $I \in [G, I^{E_*}]$, então as possibilidades de solução do problema de Riemann é

análoga ao **Caso** $P \in (P_4, P_5]$, no mesmo intervalo considerado.

(b) Se $I \in (I^{E_*}, I^{P_E^W})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para K , com K sobre o segmento $[E_*^W, P_E^W)$ de $\mathcal{W}_-^t(E)$, seguida de um choque transicional de K para E , que por sua vez é seguido de um choque-2 de E para P . A composta-1 é constituída por uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento (E_*, P_E^*) extensão-1 do segmento (E_*^W, P_E^W) , seguida de um choque de T para K , com $\sigma(T, K) = \lambda_1(T) < \sigma(K, E)$.

(c) Se $I = I^{P_E^W}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de $I^{P_E^W}$ para P_E^W , seguida de um choque transicional de P_E^W para E e depois de um choque-2 de E para P . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I para o estado P_E^* , seguida de um choque de P_E^* para P_E^W , com $\sigma(P_E^*, P_E^W) = \lambda_1(P_E^*)$;

Observação: Se o choque de P_E^W para P fosse admissível, então teríamos outra possibilidade de sequência no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- xt :

- Composta-1 de $I^{P_E^W}$ para P_E^W , seguida de um choque-2 de P_E^W para P . A composta-1 é análoga à anterior.

(d) Se $I \in (I^{P_E^W}, I^{W_*^P})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (P_E^W, W_*^P) de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque-2 de M para P . A composta-1 é constituída de uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento $(P_E^*, T^{W_*^P})$ extensão-1 do segmento (P_E^W, W_*^P) de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

(e) Se $I = I^{W_*^P}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de $I^{W_*^P}$ para W_*^P , seguida de choque de W_*^P para P , com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$. A composta-1 é constituída de uma rarefação-1 de $I^{W_*^P}$ para $T^{W_*^P}$, seguida de um choque de $T^{W_*^P}$ para W_*^P , com $\sigma(T^{W_*^P}, W_*^P) = \lambda_1(T^{W_*^P})$.

(f) Se $I \in (I^{W_*^P}, W)$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema

de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (W_*^P, W) sobre $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de uma composta-2 de M para P . A composta-1 é constituída de uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento $(T^{W_*^P}, W)$ extensão-1 do segmento (W_*^P, W) de composta-2, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 é constituída de uma rarefação-2 de M para W_*^P , seguida de um choque de W_*^P para P , com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$.

(g) Se $I = W$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-2 de W para P . A composta-2 é constituída de uma rarefação-2 de W para W_*^P , seguida de um choque de W_*^P para P , com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$.

Caso limite $P = P_6$

A curva de Hugoniot (reversa) por P_6 está exibida na Fig. 76. De acordo com a definição de P_6 (estado Y descrito no Capítulo 2) o estado W_*^P extensão-2 de P (de índice 10) coincide com um ponto de interseção entre o conjunto de inflexão-1 e a extensão-2 do lado $[O, G]$. Com isto, o estado $T^{W_*^P}$ extensão-1 de W_*^P desaparece já que passa também a coincidir com W_*^P . Ainda na Fig. 76(b) e 77, o segmento $[E_*, P_E^*]$ corresponde à extensão-1 do segmento $[E_*^W, P_E^W]$ de $\mathcal{H}(E)$ e o segmento $[P_E^*, W_*^P]$ corresponde à extensão-1 do segmento $[P_E^W, W_*^P]$ de choque-2 em $\mathcal{H}(P)$.

A solução para este caso é análoga ao caso anterior, exceto para o estado de injeção $I^{W_*^P}$ devido a coincidência entre os estados $T^{W_*^P}$ e W_*^P . Para este estado a onda composta-1 reduz-se a uma onda de rarefação-1 de $I^{W_*^P}$ para W_*^P . Depois temos um choque de W_*^P para P_6 , com $\sigma(W_*^P, P_6) = \lambda_2(W_*^P)$.

Por este motivo não exibiremos toda a descrição da solução do problema de Riemann para este caso, mas exibiremos a Fig. 77 que ilustra resumidamente as possíveis soluções.

Caso 9: Estado de Produção P sobre o segmento $(P_6, P_7]$

Seja P um estado de produção arbitrário sobre o segmento (P_6, P_7) do lado $[O, G]$. O estado P_7 foi definido como sendo o estado N do Capítulo 2 tal que o ramo não local de $\mathcal{H}(N)$ tangencia a extensão-1 do lado $[O, G]$ justamente no estado $T^J \equiv N_{11} \equiv N_{12}$. A

curva de Hugoniot por P está exibida na Fig. 78. O estado P_S na Fig. 78(b) é definido pela interseção do ramo não local de $\mathcal{H}(P)$ com o conjunto de inflexão-1. Destacamos que o segmento (P_E^W, P_S) de $\mathcal{H}(P)$ fica entre o segmento $[E, W]$ de bifurcação secundária e o conjunto de inflexão-1, enquanto o segmento (P_S, W_*^P) fica abaixo do conjunto de inflexão-1. O segmento $[E_*, P_E^*]$ é extensão-1 do segmento $[E_*^W, P_E^W]$ e o segmento $[P_E^*, P_S]$ é extensão-1 do segmento $[P_E^W, P_S]$.

A curva $\mathcal{H}(P)$ possui o segmento (P, P_*) de choque-1 admissível, segundo o critério de viscosidade. Como nos casos anteriores o estado P_* é extensão-1 (de índice “ 8 ”) do estado P , isto é, $\sigma(P_*, P) = \lambda_1(P_*)$.

Os segmentos de choque-2 admissíveis de $\mathcal{H}(P)$ segundo o critério de viscosidade são: (P, G_*^P) e $[P_E^W, W_*^P)$, sendo que o segmento $[P_E^W, P_S)$ está acima do conjunto de inflexão-1.

A curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$ relevante em nossa construção é dada pelo segmento $[O, G_*^P)$ e $(W_*^P, W]$ de composta-2, pelos segmentos (P, G_*^P) e $[P_E^W, W_*^P)$ de choque-2 e, o segmento $[G, P)$ de rarefação-2. O estado P_R exibido na Fig. 79(b) é definido como sendo interseção do segmento $(W_*^P, W]$ de composta-2 com o conjunto de inflexão-1. Chamamos a atenção que o segmento de composta-2 $[W_*^P, P_R)$ fica abaixo do conjunto de inflexão-1, enquanto o segmento (P_R, W) fica acima.

Na curva de onda transicional reversa $\mathcal{W}_-^t(E)$ temos os segmentos $[T^E, W_*^E]$ de choque transicional e o segmento $[W_*^E, W]$ de composta transicional, sendo que apenas o segmento $[E_*^W, P_E^W]$ será utilizado na construção da solução, devido a incompatibilidade geométrica de velocidades de ondas.

Os estados especiais para este caso $P \in (P_6, P_7)$ são: $P, E, E_*, P_E^W, W_*^P, P_S$ e P_R , os quais estão mostrados nas Figs. 78 ou 79.

Desta forma temos os seguintes estados de injeção sobre o lado $[G, W]$ que determinam estruturas distintas nas sequências de ondas que compõe a solução do problema de Riemann, como mostrados na Fig. 79. São eles $I^{P_*}, I^{E_*}, I^{P_E^W}, I^{P_S}, I^{W_*^P}$ e I^{P_R} os quais foram obtidos usando curvas de onda-1 reversas, como nos casos anteriores.

Assim, temos as seguintes possibilidades de solução do problema de Riemann, de acordo com a localização do estado I ao longo do lado $[G, W]$, as quais podem ser acompanhadas com o auxílio da Fig. 79.

(a) Se $I \in [G, I^{P_E^W}]$, então as possibilidades de solução do problema de Riemann é

análoga ao **Caso** $P \in (P_5, P_6)$, com o estado de injeção I no mesmo intervalo considerado.

(b) Se $I \in (I^{P_E^W}, I^{P_S})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento (P_E^W, P_S) de choque-2 de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque-2 de M para P . A onda composta-1 é constituída de uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento (P_E^*, P_S) de extensão-1 do segmento (P_E^W, P_S) de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

Esta construção em que a primeira onda da sequência é composta-1 termina aqui porque o estado P_S é um ponto de inflexão-1, como definido acima. Assim o próximo item é o responsável pela mudança da construção da solução com em relação ao **Caso** $P \in (P_5, P_6]$.

(c) Se $I \in [I^{P_S}, I^{W_*^P})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma rarefação-1 de I para M , com M sobre o segmento $[P_S, I^{W_*^P})$ de choque-2 de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida por um choque-2 de M para P .

(d) Se $I = I^{W_*^P}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma rarefação-1 de I para W_*^P , seguida de choque de W_*^P para P , com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$.

(e) Se $(I^{W_*^P}, I^{P_R}]$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma rarefação-1 de I para M , com M sobre o segmento $[W_*^P, P_R]$, seguida de uma composta-2 de M para P . A composta-2 é formada por uma rarefação-2 de M para W_*^P seguida de um choque de W_*^P para P , com $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$.

Chamamos a atenção, novamente, que P_R é um ponto de inflexão-1 como definido acima.

(f) Se (I^{P_R}, W) , então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M seguida de uma composta-2 de M para P . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I para um estado T

sobre o segmento (P_R, W) extensão-1 do segmento (P_R, W) de rarefação-2, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 é análoga ao item **e**.

(g) Se $I = W$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-2 de W para P análoga ao item **e**.

Caso limite $P = P_7$

O caso $P = P_7$ segue analogamente a solução do problema de Riemann para o caso $P \in (P_6, P_7)$. A única mudança é que os estados P_5 e T^J na Fig. 78 coincidem. Por esta razão omitiremos a descrição da solução.

Caso 10: Estado de Produção P sobre o segmento $(P_7, P_8]$

Considere P um estado de produção arbitrário sobre o segmento $(P_7, P_8]$ no lado $[O, G]$, onde P_8 foi definido como sendo o estado Z do Capítulo 2 tal que sua extensão de índice “12” coincide com o estado E_* de $\mathcal{H}(E)$ e também $\sigma(E_*, P_8) = \sigma(E_*, P_1) = \lambda_2(E_*)$. Na Fig. 80 está exibida a curva de Hugoniot (reversa) por P , bem como $\mathcal{H}(E)$. Frisamos aqui que este é o caso mais trabalhoso de escrever a solução devido ao fato da região entre o conjunto de inflexão-1 e o segmento $[E, W]$ próximo do ponto T^J ser muito pequena e também envolvendo uma variação mínima de velocidades. A curva $\mathcal{H}(P)$ possui os seguintes segmentos de choques-2 admissíveis que podem atingir P : (P, G_*^P) ao longo do lado $[O, G]$, $[P_E^W, P_Z)$ e (P_X, W_*^P) no ramo não local e o segmento de (P, P_*) de choque-1. O segmento $[P_Z, P_X)$ no ramo não local correspondem à choques compressivos, os quais não são usados na construção da solução devido à falta de compatibilidade geométrica entre as velocidades. Como nos casos anteriores os estados P_* e G_*^P são extensões do estado P , com $\sigma(P_*, P) = \lambda_1(P_*)$ e $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$. Temos também que os estados P_Z e P_X são as extensões-1 de P , que correspondem aos estado de índices “11” e “12” descritos no Capítulo 2 para $P = Z$ (veja a Fig. 43(b) mostrando Z_{11} e Z_{12} para o caso $P = Z$ do Capítulo 2). Na Fig. 80(b) o segmento $[E_*, P_E^*]$ é extensão-1 do segmento $[E_*^W, P_E^W]$ e o segmento $[P_E^*, P_Z^*]$ é extensão-1 do segmento $[P_E^W, P_Z]$. Frisamos aqui que estes segmentos de extensão são relativamente pequenos e que as suas geometrias foram obtidas através de vários experimentos numéricos com o programa PAKMAN.

Os estados P_X e P_Z^* na Fig. 80(b) são extensões-1 dos estados P_X^* e P_Z , respectivamente. Vamos mostrar que P_X é extensão-1 de P_X^* , o outro caso é análogo. Primeiramente construímos os gráficos das velocidades sobre o ramo não local de $\mathcal{H}(P)$ que estão exibidos na Fig. 81. Lembramos que o estado P_X está bem determinado pela extensão-1 de índice “ 12 ” do Capítulo 2 e por isto podemos obter $\lambda_1(P_X) = \sigma(P_X, P)$. Na Fig. 81(b) a reta de altura $\lambda_1(P_X)$ corta o gráfico da velocidade de choque $\sigma(\cdot, P)$ no estado P_X^* . Isto define o estado P_X^* em $\mathcal{H}(P)$ tal que $\sigma(P_X^*, P) = \lambda_1(P_X)$. Mas por outro lado, temos $\sigma(P_X, P) = \lambda_1(P_X)$. Desta forma, pela Regra do Choque Triplo segue que $P_X^* \in \mathcal{H}(P_X)$ e $\sigma(P_X, P_X^*) = \lambda_1(P_X)$, como queríamos.

Observação: Note na Fig. 81(b) a variação mínima das velocidades numa vizinhança de P_Z .

A curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$ é dada pelos segmentos (W_*^P, W) e $[O, G_*^P]$ de composta-2, pelos segmentos $(P, G_*^P]$, $[P_E^W, P_X^*]$ e (P_X, W_*^P) de choque-2 e também o segmento $(P, G]$ de rarefação-2. Além de $\mathcal{W}_-^2(P)$ temos também o segmento de choque transicional $[E_*^W, P_E^W]$ da curva de onda transicional reversa $\mathcal{W}_-(E)$. Embora não esteja representado na Fig. 80(b), frisamos que o estado P_S interseção de $\mathcal{H}(P)$ com o conjunto de inflexão-1 está localizado entre P_Z e P_Z^* . Destacamos que através de experimentos com o programa PAKMAN concluímos que o segmento $(P_X^*, P_Z]$ não é utilizado na construção da solução devido à falta de compatibilidade geométrica entre as velocidades dos choques na sequência candidata à solução, ou seja, se usamos um choque de um estado T sobre o segmento $[P_X, P_Z^*]$ à um estado M sobre o segmento $[P_X^*, P_Z]$ e um choque-2 de M para P , então verificamos que $\sigma(T, M) > \sigma(M, P)$. Já os segmentos $[T^E, E_*^W]$ e (P_E^W, W_*^E) de choque transicional também não são utilizados devido à falta da compatibilidade geométrica, mas neste caso é mais simples verificar, basta usarmos os gráficos das velocidades de choque a partir das expressões explícitas das curvas de Hugoniot como já fizemos em outros casos.

Dessa maneira temos os seguintes estados especiais exibidos na Fig. 82: $P, E, E_*^W, E_*, P_E^W, P_X^*, P_E^*, P_X$ e W_*^P . Além do estado P_R definido no caso anterior como sendo a interseção do conjunto de inflexão-1 com o segmento (W_*^P, W) de composta-2 na curva de onda reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$.

Os estados de injeção sobre o lado $[G, W]$ que determinam estruturas distintas nas sequências de ondas que compõe a solução do problema de Riemann, também

mostrados na Fig. 82 são I^{P^*} , I^{E^*} , $I^{P_E^W}$, I^{P_X} , I^{W^P} e I^{P_R} .

As possibilidades de solução do problema de Riemann para este caso estão descritas logo abaixo e podem ser acompanhadas com o auxílio da Fig. 82.

(a) Se $I \in [G, I^{P_E^W}]$, então as possibilidades de solução do problema de Riemann é análoga ao **Caso** $P \in (P_5, P_6)$, com o estado de injeção I no mesmo intervalo considerado.

(b) Se $I \in (I^{P_E^W}, I^{P_X}]$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M sobre o segmento $(P_E^W, P_X^*]$ de choque-2 em $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguido de um choque-2 de M para P . A onda composta-1 é constituída de uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento $(P_E^*, P_X]$ extensão-1 do segmento $(P_E^W, P_X^*]$ de $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$. Se $I = I^{P_X}$, então $T = P_X$ e $M = P_X^*$. Este **Caso** (b) é responsável pela mudança da solução deste caso em relação ao caso anterior.

(c) Se $I \in (I^{P_X}, I^{W^P})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma rarefação-1 de I para M , com M sobre o segmento (P_X, W_*^P) de choque-2 em $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida por um choque-2 de M para P .

(d) Se $I \in [I^{W^P}, W]$, então as possibilidades de solução do problema de Riemann é análoga ao **Caso** $P \in (P_6, P_7]$, com o estado de injeção I no mesmo intervalo considerado.

Caso limite $P = P_8$

Considere o estado de produção $P = P_8$ sobre o lado $[O, G]$, onde P_8 foi definido na Seção 3.2 deste Capítulo como sendo o estado Z do Capítulo 2 o qual satisfaz a Regra do Choque Triplo com os estados E e E_* , ou seja,

$$\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E) = \sigma(E_*, P) = \sigma(E, P).$$

Na Fig. 43 está exibida a curva de Hugoniot por $P_8 \equiv Z$. Os estados Z_8 , Z_9 e Z_{10} na Fig. 43 são os estados P_* , G_*^P e W_*^P da Fig. 83. Um fato importante neste caso é que como E_* também é uma extensão-1 de E_*^W , isto é, $\lambda_1(E_*) = \sigma(E_*, E_*^W)$ temos que os estados P_X , P_E^* e E_* coincidem, como também os estados P_X^* , P_E^W e E_*^W ficando claro

por argumento de continuidade a não utilização do segmento de choque transicional $(E_*^W, W_*^E]$ da curva de onda transicional $\mathcal{W}_-^t(E)$ na construção da solução do problema de Riemann devido à falta de compatibilidade geométrica entre as velocidades. O único estado satisfazendo a compatibilidade geométrica (no limite) é o estado $E_*^W = P_*^W = P_X^*$.

A curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P_8)$ é dada pelos segmentos $[O, G_*^P)$ e $(W_*^P, W]$ de composta-2, pelos segmentos $[E_*, W_*^P)$ e (P, G_*^P) de choque-2, além do segmento $[G, P_8)$ de rarefação-2.

Em resumo, temos os seguinte estados especiais para este caso $P = P_8$, como mostrado na Fig. 83: P_8, E, P_*, E_* e W_*^P .

Os estados de injeção que separam segmentos no lado $[G, W]$ do triângulo de saturações com estruturas distintas das sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann são: I^P, I^{E_*} e $I^{W_*^P}$. Todos estão exibidos na Fig. 83

Baseado nestas informações, temos as seguintes possibilidades de solução do problema de Riemann, de acordo com a localização do estado I ao longo do lado $[G, W]$ do triângulo de saturações. Na Fig. 83 estão exibidas as representações das possíveis soluções.

(a) Se $I \in [G, I^{E_*})$, então as possibilidades de solução do problema de Riemann é análoga ao **Caso** $P \in (P_5, P_6)$, para I no mesmo intervalo considerado.

(b) Se $I = I^{E_*}$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de duas maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- xt . São elas:

- Composta-1 de $I = I^{E_*}$ para $P = P_8$. Esta composta-1 é formada por uma rarefação-1 de I^{E_*} para E_* , seguida de um choque de E_* para $P = P_8$, com $\sigma(E_*, P_8) = \lambda_1(E_*)$. Admissibilidade de choque de E_* para $P = P_8$, pode ser observada no plano de fases exibido na Fig. 56.
- Composta-1 de $I = I^{E_*}$ para $E_*^W = P_*^W = P_X^*$, seguido de um choque transicional de E_*^W para E , que por sua vez é seguido de um choque-2 de E para $P = P_8$. A composta-1 é constituída de uma rarefação-1 de $I = I^{E_*}$ para E_* , seguida de um

choque de E_* para E_*^W , com $\sigma(E_*, E_*^W) = \lambda_1(E_*)$.

Note que nos dois casos a velocidade final de choque que atinge $P = P_8$ é a mesma, assim como a velocidade final sobre o segmento de rarefação, o que caracteriza a mesma solução no espaço físico- xt .

(d) Se $I \in (I^{E_*}, W]$, então as possibilidades de solução do problema de Riemann é análoga ao **Caso** $P \in (P_7, P_8)$, com o estado de injeção I no mesmo intervalo considerado, lembrando que $E_*^W \equiv P_E^W \equiv P_X^*$ e $E_* \equiv P_E^* \equiv P_X$.

Caso 11: Estados de Produção $P \in (P_8, G)$

Este caso passa a diferir do anterior devido a não mais utilização de choques transicionais na solução.

Primeiramente, determinamos a curva de Hugoniot pelo estado P a qual está ilustrada na Fig. 84.

Os segmentos relevantes em $\mathcal{H}(P)$ de choque-2 admissíveis segundo o critério de viscosidade são: (P, G_*^P) e $[\bar{P}_*, W_*^P)$. Os estados \bar{P}_* , P_* , W_*^P e G_*^P são as extensões do estado P satisfazendo $\sigma(\bar{P}_*, P) = \lambda_1(\bar{P}_*)$, $\sigma(P_*, P) = \lambda_1(P_*)$, $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$ e $\sigma(G_*^P, P) = \lambda_2(G_*^P)$. Os estados P_* e \bar{P}_* correspondem à extensão-1 de índices “ 8 ” e “ 12 ” do Capítulo 2, respectivamente.

O estado P_*^G na Fig. 84 é definido como sendo o estado sobre o lado $[O, G]$ da $\mathcal{H}(P)$ onde é satisfeita a Regra do Choque Triplo com os estados P e \bar{P}_* . Este estado P_*^G pode ser melhor caracterizado usando os gráficos de velocidades de choque, mas não faremos aqui por ser análogo ao caso $P \in (O, P_1)$. Portanto temos, $\lambda_1(\bar{P}_*) = \sigma(\bar{P}_*, P_*^G) = \sigma(\bar{P}_*, P) = \sigma(P_*^G, P)$.

Assim, a curva de onda-2 reversa $\mathcal{W}_-^2(P)$ é dada pelos segmentos $[O, G_*^P)$ e $(W_*^P, W]$ de composta-2, pelo segmento (P, G_*^P) e $[\bar{P}_*, W_*^P)$ de choque-2. No entanto os segmentos $[O, G_*^P)$ e (P_*^G, G_*^P) não serão usados na construção como veremos adiante. Resumidamente temos os seguintes estados especiais em $\mathcal{W}_-^2(P)$ mostrado na Fig. 84: P , P_*^G , P_* , \bar{P}_* , W_*^P e P_R , onde P_R é definido pela interseção do segmento (W_*^P, W) de composta-2 com o conjunto de inflexão-1, sendo que o segmento (P_R, W) fica entre o conjunto de inflexão-1 e o segmento $[E, W]$.

Com base nestes estados especiais os estados de injeção que separam segmentos no lado $[G, W]$ do triângulo de saturações com construções distintas para a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann, mostrados na Fig. 85, são I^{P_*} , $I^{\bar{P}_*}$, I^{P_R} e $I^{W_*^P}$.

De acordo com a localização de I sobre o lado $[G, W]$ temos os seguintes casos, os quais podem ser acompanhados pela Fig. 85:

(a) Se $I \in [G, I^{P_*}]$, então as possibilidades de solução do problema de Riemann é análoga ao **Caso** $P \in (P_5, P_6)$, do mesmo intervalo considerado.

(b) Se $I \in (I^{P_*}, I^{\bar{P}_*})$, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M sobre o segmento (P, P_*^G) de choque-2 em $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque-2 de M para P . A composta-1 é formada de uma rarefação-1 de I para um estado T sobre o segmento (P_*, \bar{P}_*) extensão-1 do segmento (P, P_*^G) no lado $[O, G]$, seguida de um choque de T para M , com $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$.

(c) Se $I = I^{\bar{P}_*}$, a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de duas maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- xt . São elas:

- Composta-1 de $I = I^{\bar{P}_*}$ para P . Esta composta-1 é formada por uma onda de rarefação-1 de $I = I^{\bar{P}_*}$ para \bar{P}_* , seguida de um choque compressivo de \bar{P}_* para P , com $\sigma(\bar{P}_*, P) = \lambda_1(\bar{P}_*)$;
- Composta-1 de $I = I^{\bar{P}_*}$ para P_*^G , seguida de um choque-2 de P_*^G para P . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de $I = I^{\bar{P}_*}$ para o estado \bar{P}_* seguida de um choque de \bar{P}_* para P_*^G , com $\sigma(\bar{P}_*, P_*^G) = \lambda_1(\bar{P}_*)$;

A unicidade da solução no espaço físico- xt mais uma vez segue da Regra do Choque Triplo, uma vez que $\lambda_1(\bar{P}_*) = \sigma(\bar{P}_*, P_*^G) = \sigma(\bar{P}_*, P)$.

(d) Se $I \in (I^{\bar{P}_*}, I^{W_*^P})$, a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma rarefação-1 de I para M , com M sobre o segmento (\bar{P}_*, W_*^P) de choque-2 em $\mathcal{W}_-^2(P)$, seguida de um choque-2 de M para P .

(e) Se $I \in [I^{W_*^P}, W]$, então as possibilidades de solução do problema de Riemann são análogas ao **Caso** $P \in (P_7, P_8)$, com o estado de injeção I no mesmo intervalo considerado.

Caso limite $P = G$

Para o estado de produção $P = G$, isto é, se o reservatório possuir apenas gás, então com relação a Fig. 85, os estados P_*^G e \bar{P}_* passam a coincidir com o estado G , o estado W_*^P passa a coincidir com o estado $I^{W_*^P}$ no lado $[G, W]$ e com isto a solução será simplesmente a própria solução de Buchley-Leverett, considerando uma das funções de fluxo f_g ou f_w restritas ao lado $[G, W]$. Assim, de acordo com a localização de I no lado $[G, W]$ temos os seguintes casos:

(a) Se $I \in [G, I^{W_*^P})$, então a solução consiste de um choque-2 de I para $P = G$.

(b) Se $I \in [I^{W_*^P}, W]$, então a solução consiste de uma composta-2 de I para $P = G$. Esta composta-2 é formada por uma rarefação-2 de I para $I^{W_*^P}$ e de um choque de $I^{W_*^P}$, com $\sigma(I^{W_*^P}, G) = \lambda_2(I^{W_*^P})$. Vale salientar que se $I = I^{W_*^P}$ então a composta-2 se reduz ao choque característico à esquerda.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros

Conclusões

Neste trabalho construímos a solução do problema de Riemann associado a um sistema de duas leis de conservação proveniente da modelagem matemática de um escoamento trifásico num meio poroso com dados de produção P representando misturas do tipo gás/óleo e dados de injeção I representando misturas do tipo gás/água. Concluímos que a partir do estado de produção $P = P_6$ até o estado de produção $P = P_8$ nosso trabalho difere substancialmente do trabalho de (GUEDES, 2009) onde foi considerado o estado de produção representando misturas do tipo água/óleo. A diferença fundamental é que em (GUEDES, 2009) parte do conjunto de inflexão-1 envolvida na construção da solução coincide com o segmento $[G, D]$ de bifurcação secundária no triângulo de saturações. Isto fez com que a interseção do conjunto de inflexão-1 com o segmento $[G, D]$ e a interseção do conjunto de extensão-1 do lado $[O, W]$ com o segmento $[G, D]$ coincidissem num mesmo ponto, (lá denotado por T^D). Já no nosso trabalho temos que o estado T^J (interseção do conjunto de inflexão-1 com o conjunto de extensão-1 do lado $[O, G]$) não coincide com o estado T^E (interseção do conjunto de extensão-1 do lado $[O, G]$ com $[E, W]$), o que fez com que a dificuldade aumentasse consideravelmente e tivemos que lançar mão de muitos experimentos numéricos com o programa PAKMAN para chegarmos às soluções apresentadas no Capítulo 3 para

P entre P_6 e P_8 . Uma outra diferença clara é que em (GUEDES, 2009) o estado de inflexão-2 ao longo do lado $[O, W]$ do triângulo de saturações coincide com o estado D tal que $\mathcal{H}(D)$ possui uma bifurcação secundária no estado T^D , enquanto em nosso trabalho o estado de inflexão-2 ao longo do lado $[O, G]$, denotado por T no Capítulo 2, ou por P_3 no Capítulo 3, não coincide com o estado E tal que $\mathcal{H}(E)$ possui uma bifurcação secundária no estado T^E . Estas duas diferenças com relação ao trabalho de (GUEDES, 2009) fez com que o número de casos a serem considerados para o estado de produção P aumentasse de 5 para 10 em nosso trabalho.

Perpectivas de Trabalhos Futuros

Dadas as conclusões acima apresentadas, é interessante para a completude deste trabalho descrever todas essas soluções no espaço físico- xt , uma vez que, para algumas soluções apresentadas no Capítulo 3 a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de duas maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- xt . Desta forma pode-se também detectar qual é a mistura ótima de injeção para obter a recuperação máxima de óleo para cada estado de produção P fixado. Ainda também como trabalho futuro, deve-se considerar o modelo de um escoamento em que as viscosidade das três fases são todas distintas sujeito à injeção de misturas do tipo água/gás para deslocar uma mistura trifásica (água, óleo, gás), a princípio para P próximo de O (reservatório virgem) e depois ampliar para outros estados no interior do triângulo de saturações.

Apêndice A

Resultados Básicos sobre Leis de Conservação

Neste Capítulo são apresentados alguns resultados básicos da teoria de leis de conservação e sobre o problema de Riemann de modo que o texto seja o mínimo auto suficiente. Para maiores detalhes consultar (SMOLLER, 1994), (SERRE, 1999), (DAFERMOS, 2000) entre outros.

Um sistema de n leis de conservação unidimensional em n -variáveis é um sistema de equações diferenciais parciais (EDP), dependendo do tempo e de uma posição espacial, da seguinte forma

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(U(x, t))}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{A.1})$$

em que $U \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ representa as variáveis de estados e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função de fluxo associada, normalmente considerada de classe $C^2(\Omega)$. Em dinâmica dos fluidos o conjunto Ω é geralmente referido como o espaço de estados e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ é referido como espaço físico- xt .

Definição 1.1: *O sistema (A.1) é dito hiperbólico em Ω quando a matriz jacobiana de F , denotada por $DF(U) = A(U)$, tem autovalores reais $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, para todo $U \in \Omega$. Se todas as desigualdades forem estritas então o sistema é dito estritamente hiperbólico. Um estado onde ocorre a igualdade entre todos autovalores é dito ponto de singularidade hiperbólica do sistema. No caso de existir uma singularidade hiperbólica*

isolada U_* , tal que $DF(U_*)$ seja múltipla da matriz identidade, o ponto U_* é chamado de ponto umbílico.

A.1 Problema de Cauchy

O problema de Cauchy consiste do sistema (A.1) atrelado à uma condição inicial previamente fixada, isto é,

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2})$$

Definição 1.2: Uma solução clássica do problema de Cauchy é uma função $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 que satisfaça o sistema de equações (A.1) e a condição inicial (A.2).

Definição 1.3: Uma solução fraca do problema de Cauchy (A.1)-(A.2) é uma função $U \in L^1_{Loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [U(x, t)\phi_t(x, t) + F(U(x, t))\phi_x(x, t)] dx dt + \int_{-\infty}^\infty U_0(x)\phi(x, 0) dx = 0,$$

para toda função teste $\phi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^∞ e de suporte compacto em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

A.2 Problema de Riemann

O problema de Riemann para o sistema de n leis de conservação, centrado na posição $x = 0$, é um caso particular do problema de Cauchy para o sistema (A.1) em que as condições iniciais são tomadas constantes por partes possuindo um salto na origem, ou seja,

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x < 0 \\ U_+, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

em que U_- e U_+ representam vetores constantes. No caso, U_- é chamado de estado inicial à esquerda e U_+ de estado inicial à direita.

A.3 Soluções Fundamentais

Uma propriedade peculiar ao problema de Riemann (A.1),(A.3) é a independência de escala; queremos dizer com isto que uma mudança de coordenadas $(x, t) \rightarrow (ax, at)$,

para $a > 0$, não altera nem o sistema de equações nem as condições iniciais. Consequentemente é esperado que a solução do problema de Riemann dependa apenas da razão $\xi = x/t$. Admitindo uma solução clássica do sistema (A.1), com abuso de notação, substituímos $U = U(\xi)$ no mesmo, obtendo que

$$[A(\mathcal{U}(\xi)) - \xi I]\mathcal{U}'(\xi) = 0, \quad (\text{A.4})$$

onde I é a matriz identidade do \mathbb{R}^n e $\mathcal{U}'(\xi)$ denota a derivada de $\mathcal{U}(\xi)$. Sendo $\mathcal{U}'(\xi) \neq 0$, da equação (A.4) segue que \mathcal{U}' deve ser um vetor característico (à direita) de $A(U) \equiv DF(U)$ associado à velocidade característica $\lambda(U) = \xi$. Isto implica que as soluções suaves do sistema (A.1) devem estar sobre as curvas integrais dos campos de autovetores de $A(U)$. Logo, satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO),

$$\mathcal{U}'(\xi) = e^i(\mathcal{U}(\xi)), \quad (\text{A.5})$$

juntamente com a condição

$$\xi = \lambda_i(\mathcal{U}(\xi)), \quad (\text{A.6})$$

em que e^i denota um vetor característico (à direita) da matriz Jacobiana $A(U)$, associado à velocidade característica λ_i .

Definição 1.4: *Sejam U_- e U_+ os dados iniciais à esquerda e à direita, respectivamente, em (A.3). Dizemos que o estado U_+ é conectável ao estado U_- por uma onda de rarefação associada à i -ésima família característica ou simplesmente por uma rarefação- i , se U_- e U_+ estão na mesma curva integral do i -ésimo campo característico definido por (A.5) e $\lambda_i(U(\xi))$ cresce com o parâmetro ξ ao longo de tal curva integral no sentido de U_- para U_+ .*

Na Definição 1.4 acima, impor que $\lambda_i(\mathcal{U}(\xi))$ seja crescente de U_- para U_+ quer dizer que no espaço físico- xt a inclinação $\xi = x/t$ deve ser estritamente crescente de $\xi_- = \lambda_i(U_-)$ para $\xi_+ = \lambda_i(U_+)$ de tal forma que as retas características de inclinação $\lambda_i(\mathcal{U}(\xi))$ cubram toda a região entre as retas de inclinação $\lambda_i(U_-)$ e $\lambda_i(U_+)$. Sendo $\xi = \lambda_i(\mathcal{U}(\xi))$ estritamente crescente e cobrindo toda a esta região, podemos invertê-la e obter a expressão de $\mathcal{U}(\xi)$ como função inversa de $\lambda^i(\mathcal{U}(\xi))$ na equação (A.6), isto é, podemos escrever $\mathcal{U}(\xi) = (\lambda_i)^{-1}(\xi)$, $\forall \xi \in [\xi_-, \xi_+]$.

Definição 1.5: *Uma curva de rarefação- i por um estado inicial U_- é o conjunto dos estados $U \in \Omega$ que podem ser conectados ao estado U_- por uma onda de rarefação- i .*

Uma solução do problema de Riemann (A.1), (A.3) por uma rarefação- i tem a forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x \leq \lambda_i(U_-)t, \\ (\lambda_i)^{-1}(x/t), & \text{se } \lambda_i(U_-)t \leq x \leq \lambda_i(U_+)t, \\ U_+, & \text{se } \lambda_i(U_+)t \leq x. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Chamaremos de velocidades inicial e final da onda de rarefação- i conectando U_- à U_+ as inclinações $x/t = \lambda_i(U_-)$ e $x/t = \lambda_i(U_+)$, respectivamente.

Observação: uma solução por uma onda de rarefação é contínua, mas não é diferenciável ao longo das retas $x/t = \lambda_i(U_-)$ e $x/t = \lambda_i(U_+)$.

Tendo em vista a importância da monotonicidade da velocidade característica λ_i ao longo de uma curva integral do campo característico associado, temos a seguinte definição.

Definição 1.6: *O i -ésimo campo característico de $A(U)$ é dito genuinamente não linear num subconjunto $\Omega' \subset \Omega$, se $\nabla \lambda_i(U) \cdot e^i(U) \neq 0$, para todo $U \in \Omega'$. Por outro lado, se $\nabla \lambda_i(U) \cdot e^i(U) \equiv 0$, dizemos que o campo é linearmente degenerado.*

Complementando os casos extremos da Definição 1.6, temos o caso de estados isolados ao longo de curvas integrais nas quais a respectiva velocidade característica assume valores extremos. Assim temos a seguinte definição

Definição 1.7: *Um estado U_0 é um estado de inflexão ao longo da i -ésima curva integral característica, ou estado de inflexão- i , se $\nabla \lambda_i(U_0) \cdot e^i(U_0) = 0$ e $\nabla \lambda_i(U) \cdot e^i(U) \neq 0$, para todo U satisfazendo (A.5) numa vizinhança de U_0*

Definição 1.8: *O conjunto de todos os pontos U_0 de Ω que são pontos do conjunto de inflexão- i , é chamado o conjunto de inflexão associado à i -ésima família característica, ou simplesmente, conjunto de inflexão- i*

Vamos agora, caracterizar as soluções descontínuas para o problema de Riemann (A.1),(A.3), mas antes apresentaremos o que significa a palavra choque. Choques são descontinuidades do tipo salto que se formam devido a condição inicial ou ao encontro (choque) de retas características no espaço físico- xt e que se propagam no tempo como uma certa velocidade σ_0 .

Admitindo uma solução fraca do problema de Riemann por um choque, temos como consequência do Teorema de Green que os estados à esquerda U_- , à direita U_+

e a velocidade de propagação σ_0 satisfazem a chamada relação de Hankine-Hugoniot dada pela expressão

$$F(U_+) - F(U_-) - \sigma_0(U_+ - U_-) = 0. \quad (\text{A.8})$$

No caso, a reta $x = \sigma_0 t$ no espaço físico- xt é dita uma reta de descontinuidade da solução.

Consideremos U_- fixo na equação (A.8) com σ_0 e U_+ variáveis. Com isto, substituímos σ_0 por σ arbitrário em \mathbb{R} e U_+ por U arbitrário em Ω e teremos um sistema de n equações algébricas nas $n + 1$ incógnitas σ e U

$$\mathcal{H}(U_-, \sigma, U) \equiv F(U) - F(U_-) - \sigma(U - U_-) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Da mesma forma, podemos fixar U_+ em (A.8) e variar σ_0 e U_0 obtendo o sistema

$$\mathcal{H}(U_+, \sigma, U) \equiv F(U_+) - F(U) - \sigma(U_+ - U) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Definição 1.9: Fixado $U_0 \in \Omega$, a curva de Hugoniot por U_0 , denotada por $\mathcal{H}(U_0)$, é o conjunto dos estados $U \in \Omega$ tais que exista $\sigma \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação (A.9), ou a equação (A.10), com $U_- = U_0$ ou com $U_+ = U_0$, respectivamente.

Quando necessário, a velocidade de propagação σ de uma descontinuidade entre U_- e U_+ será denotada por $\sigma(U_-, U_+)$ já ficando implícito que U_+ está na curva de Hugoniot por U_- e vice-versa.

Observação: normalmente quando fixamos o estado U_- , na Definição 1.9, chamamos apenas curva de Hugoniot por U_- e quando fixamos U_+ passamos à chamá-la de curva de Hugoniot *reversa* por U_+ .

Definição 1.10: Dados os estados U_- e U_+ no espaço de estados Ω . Dizemos que o estado U_+ é conectável ao estado U_- por uma onda de choque, ou simplesmente por um choque, se U_- e U_+ estão na mesma curva de Hugoniot e existe um número real σ_0 tal que $\mathcal{H}(U_-, \sigma_0, U_+) = 0$.

Uma solução do problema de Riemann (A.1),(A.3) por uma onda de choque propagando com velocidade $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tem a forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x < \sigma_0 t, \\ U_+, & \text{se } x > \sigma_0 t. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Neste caso, as velocidades inicial e final de uma onda de choque coincidem com a velocidade σ_0 .

As ondas de rarefações e ondas de choque são chamadas de *ondas elementares*.

Quando um campo característico deixa de ser genuinamente não linear um outro tipo de onda, que também chamaremos elementar, surge como uma combinação das duas anteriores, embora no espaço físico- xt tenhamos apenas choques e rarefações.

Definição 1.11: *Uma curva composta por um estado inicial U_- , associado ao i -ésimo campo característico, ou composta- i , é o conjunto dos estados U de Ω tais que exista um estado $M \in \Omega$ de maneira que M seja conectável a U_- por uma rarefação- i , e que U seja conectável a M por um choque de velocidade $\sigma = \lambda_i(M)$.*

Assim, uma solução do problema de Riemann (A.1),(A.3) por uma composta- i tem a forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x \leq \lambda_i(U_-)t, \\ (\lambda_i)^{-1}(x/t), & \text{se } \lambda_i(U_-)t \leq x \leq \lambda_i(M)t, \\ U_+, & \text{se } \lambda_i(M)t \leq x. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

No caso a velocidade inicial de onda composta- i é dada por $x/t = \lambda_i(U_-)$ e a velocidade final por $x/t = \lambda_i(M) = \sigma(M, U_+)$

Temos agora condições necessárias para a construção de soluções $U(x, t)$ do problema de Riemann com descontinuidades, todavia estas condições não são suficientes a construção desta solução. Falta ainda tratar a questão da unicidade de solução. Assim, devemos impor um critério adicional, ou condição de entropia, para selecionar quando uma descontinuidade é admissível na solução. Do ponto de vista das aplicações, as soluções satisfazendo este critério de entropia devem refletir as soluções fisicamente corretas. As duas próximas seções apresentam dois critérios de entropia bastante conhecidos na literatura.

A.4 Choques de Lax/ Condição de Entropia de Lax

Em 1957, Lax estabeleceu critérios para a admissibilidade de choques para sistemas de leis de conservação estritamente hiperbólicos e com campos característicos genuinamente não lineares, ver (LAX, 1957).

Definição 1.12(Condição de entropia de Lax): *Uma descontinuidade entre os estados U_- e U_+ , que se propaga com velocidade σ é dita um choque admissível segundo a condição de entropia de Lax, ou apenas um choque- i de Lax, se satisfaz as seguintes desigualdades,*

$$\lambda_{i-1}(U_-) < \sigma < \lambda_i(U_-), \quad \lambda_i(U_+) < \sigma < \lambda_{i+1}(U_+). \quad (\text{A.13})$$

Note que um choque- i de Lax está associado à i -ésima família característica, no sentido que as retas características associadas à i -ésima família característica se encontram ao longo da reta de descontinuidade $x = \sigma t$ quando provenientes de lados distintos desta reta.

No caso particular de duas leis de conservação estas condições resumem-se a admitir apenas dois tipos de choque, choque-1 e choque-2, definidos a seguir.

Choque-1, denotado por S_1 .

$$\lambda_1(U_+) < \sigma < \lambda_1(U_-), \quad \sigma < \lambda_2(U_+). \quad (\text{A.14})$$

Choque-2, denotado por S_2 .

$$\lambda_2(U_+) < \sigma < \lambda_2(U_-), \quad \lambda_1(U_+) < \sigma. \quad (\text{A.15})$$

Para sistemas que não são estritamente hiperbólico o critério de Lax é insuficiente para garantir até mesmo a existência de solução quanto mais a unicidade, como pode ser visto em (GOMES, 1987) por exemplo. Daí a necessidade de introduzir outras condições de entropia. Na próxima Seção apresentaremos uma condição de entropia conhecida como condição de entropia de viscosidade, introduzida por (GELFAND, 1963).

A.5 Choques Viscosos/Condição de Entropia de Viscosidade

O sistema de equações (A.1) geralmente resulta da simplificação de sistemas mais complexos, frequentemente de sistemas da forma

$$U_t + (F(U))_x = \epsilon(B(U)U_x)_x, \quad (\text{A.16})$$

onde ϵ é uma constante positiva e $B(U)$ uma matriz positiva definida. Fisicamente o termo direito do sistema (A.16) em geral representa grandezas relacionadas à viscosidades, tensões capilares ou outras. Com isto a matriz $B(U)$ é conhecida como matriz de viscosidade e a constante $\epsilon > 0$ como o factor multiplicador. Uma forma de determinar a admissibilidade de uma solução do problema de Riemann (A.1), (A.3) por uma descontinuidade como definida em (A.11) por uma solução descontínua é verificar se a solução de (A.16) com as mesmas condições iniciais (A.3) tende para essa solução descontínua quando se faz ϵ tender a zero. Mais especificamente assume-se uma solução do tipo onda viajante do sistema (A.16) com condições iniciais (A.3), ou seja, uma solução que depende apenas do parâmetro $\xi = \frac{x - \sigma_0 t}{\epsilon}$ e tomamos o limite quando ϵ tende à zero.

Para sermos mais precisos considere uma solução clássica do tipo onda viajante do sistema (A.16) denotada por $U^\epsilon(x, t) = \mathcal{U}(\xi)$ e satisfazendo as condições de contorno

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(\xi) = U_-, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\xi) = U_+.$$

Substituindo \mathcal{U} em (A.16) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$B(\mathcal{U}) \frac{d\mathcal{U}}{d\xi} = F(\mathcal{U}) - F(U_-) - \sigma_0(\mathcal{U} - U_-). \quad (\text{A.17})$$

Da relação de Hugoniot, como $\mathcal{H}(U_-, \sigma_0, U_+) = 0$, segue que dentre os pontos de equilíbrio do sistema autônomo (A.17), encontram-se os estados U_- e U_+ . Além disso, todos os pontos de equilíbrio do sistema de EDO's (A.17) estão sobre a curva de Hugoniot $\mathcal{H}(U_-)$.

Definição 1.13 (Condição de Entropia de Viscosidade): *Uma solução descontínua do problema (A.1), (A.3) com velocidade de propagação σ_0 conectando os estados U_- e U_+ é admissível, segundo a condição de entropia de viscosidade, se existir uma órbita do sistema de equações diferenciais ordinárias (A.17) de tal forma que*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U_-, \quad (\text{A.18})$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U_+. \quad (\text{A.19})$$

Note que esta condição de entropia não está relacionada com uma família característica específica e, portanto, a condição de viscosidade é apropriada para sistemas de leis de conservação não estritamente hiperbólicos, como é o caso do sistema considerado neste trabalho.

Um choque de perfil viscoso em que as retas associadas à duas famílias características distintas se encontram ao longo da curva de descontinuidade no espaço- xt é chamado de choque transicional.

No caso de um sistema de duas leis de conservação chama-se choque transicional, denotado por S_X , a um choque de velocidade σ satisfazendo a condição de entropia de viscosidade e que satisfaça:

$$\lambda_1(U_-) < \sigma < \lambda_2(U_-), \quad \lambda_1(U_+) < \sigma < \lambda_2(U_+). \quad (\text{A.20})$$

Além destes choques transicionais ilustrados em (A.20) temos também o caso de choques que tem velocidade σ coincidindo com umas das velocidades características. Estes choques são, por exemplo, obtidos como caso limites de choques de Lax, ou mesmo casos limites em que uma, ou mais desigualdades em (A.20) tornam-se uma igualdade. Eles são admissíveis, desde que satisfaçam a condição de entropia de viscosidade.

A.6 Curvas de onda

Definimos um **grupo de ondas** como uma sequência finita de ondas elementares conectando os estados U_- e U_+ , sem estados constantes separando as ondas. Assim, no caso de uma composta- i o grupo de ondas é formado por uma onda de rarefação- i de U_- para M e de choque de M para U_+ . Dizemos que um grupo de ondas está associado à i -ésima família característica se todas as suas ondas são relativas à i -ésima família característica.

A velocidade inicial de um grupo de ondas é a velocidade inicial da primeira onda que o forma, enquanto a velocidade final coincide com a velocidade final da última onda que o forma.

Definição 1.14: *Uma curva de onda por um estado inicial U_- associada à i -ésima família característica, ou curva de onda- i , é o conjunto de estados $U \in \Omega$, que podem ser conectados à direita de U_- por um grupo de ondas da i -ésima família característica.*

Uma curva de onda- i por um estado inicial U_- é denotada por $\mathcal{W}^i(U_-)$.

Geometricamente, no espaço de estados Ω uma curva de onda é constituída de segmentos de curvas de rarefações, de curvas de Hugoniot correspondente à choques admissíveis e de curvas compostas. Da mesma forma podemos fixar o estado à direita U_+ e determinar os possíveis estados à esquerda que podem ser conectados à U_+ por um grupo de ondas. Neste caso passamos a chamar a curva de onda- i reversa por U_+ e a denotamos por $\mathcal{W}_-^i(U_+)$.

Uma observação importante é que uma curva de onda por um ponto inicial U_- , é apenas uma representação no espaço de estados Ω , dos possíveis estados que podem ser conectados à direita de U_- , (ou à esquerda U_+) por um grupo de ondas sem estados intermediários constantes. Porém, não significa que todos os estados sobre tal curva entre U_- e U_+ aparecem na solução no espaço físico- xt ao se considerar os dados U_- e U_+ no problema de Riemann.

Definição 1.15: *Uma curva de onda transicional por um estado inicial U_- , denotada por $\mathcal{W}^t(U_-)$, é o conjunto de estados $U \in \Omega$ que podem ser conectados à direita de U_+ por um grupo de ondas possuindo uma onda transicional, ou um limite de onda transicional. Da mesma forma uma curva de onda transicional reversa, denotada por $\mathcal{W}_-^t(U_+)$, é o conjunto de estados $U \in \Omega$ que podem ser conectados à esquerda de U_- por um grupo de ondas possuindo uma onda ou um limite de uma onda transicional*

Uma solução do problema de Riemann para o sistema (A.1), (A.3) é constituída de uma sequência de grupo de ondas separados por estados constantes, conectando os estados U_- e U_+ . Assim, ao se fixar os dados à esquerda U_- e à direita U_+ , resolver o problema de Riemann correspondente significa encontrar interseções únicas no espaço de estados de curvas de ondas de tal forma que cada estado interseção define um estado intermediário constante na sequência de ondas no espaço físico- xt . Além disto, quando a solução possuir mais de um grupo de ondas a velocidade no final de cada grupo de ondas deve ser inferior à velocidade inicial do grupo de onda seguinte, isto é, deve ser obedecida a chamada *condição de compatibilidade geométrica* entre as velocidades das ondas que compõem a solução.

Quando se tem uma solução do problema de Riemann por uma sequência de dois choques adjacentes, a quebra da compatibilidade geométrica ocorre quando há a coincidência das duas velocidades de choque. Daí a importância da Regra do Choque

Triplo enunciado a seguir

Teorema A.1 (Regra do Choque Triplo:) *Seja U_- um estado qualquer de Ω tal que $\mathcal{H}(U_-)$ possua dois pontos U_1 e U_2 tais que $\sigma(U_-; U_1) = \sigma(U_-; U_2) = \sigma_0$. Então U_2 pertence à curva de Hugoniot por U_1 e $\sigma(U_1; U_2) = \sigma_0$.*

A.7 Conjuntos Relevantes

Dentre os chamados conjuntos especiais para a construção da solução do problema de Riemann para um sistema de leis de conservação (A.1) vamos destacar apenas os dois mais relevantes utilizados neste trabalho, além dos conjuntos de inflexão definido anteriormente.

O primeiro destes conjuntos, chamado de conjunto de bifurcação secundária, está relacionado com estados para os quais a curva de Hugoniot respectiva possui um ponto (estado) de bifurcação secundária, isto é, um ponto ao longo da curva de Hugoniot diferente do estado base, onde falha as hipóteses do Teorema da Função Implícita que são levados a falha das próprias hipóteses de transversalidade no Teorema de Bethe-Wendroff (WENDROFF, 1972) o qual é enunciado a seguir.

Teorema A.2 (Bethe-Wendroff) *Sejam $U_- \in \Omega$, $U^* \in \Omega$ e $l_i(U^*)$ o vetor característico à esquerda de $A(U^*)$ associado à $\lambda_i(U^*)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Suponha que a curva de Hugoniot por U_- esteja parametrizada por ξ e que exista $\xi^* \in \mathbb{R}$ tal que $U^* = U(\xi^*)$. Suponha também que $l_i(U^*) \cdot (U_- - U^*) \neq 0$. Então $\sigma(U_-; U^*) = \lambda_i(U^*)$ se, e somente se, $\frac{d\sigma}{d\xi}(\xi^*) = 0$. Neste caso $e^i(U^*) = \frac{dU}{d\xi}(\xi^*)$.*

O Teorema de Bethe-Wendroff fornece estados onde a velocidade de choque, ao longo de uma curva de Hugoniot, possui um valor de extremo local, correspondente aqueles estados onde a velocidade de choque coincide com uma das velocidades características.

Assim temos a primeira definição:

Definição 1.16: *O conjunto de bifurcação secundária do sistema (A.1), associado à i -ésima família característica denotado por B_i , é definido por*

$$B_i = \{U_- \in \Omega : \exists(\sigma^*, U^*) \in \mathbb{R} \times \Omega, U^* \neq U_-, \mathcal{H}(U_-, \sigma^*, U^*) = 0, \\ \lambda_i(U^*) = \sigma^* \text{ e } l_i(U^*) \cdot (U_- - U^*) = 0\}.$$

Este conjunto é responsável pela mudança da topologia das curvas de Hugoniot, dependendo da localização do estado inicial U_- em relação a ele.

O segundo conjunto relevante para este trabalho na construção da solução do problema de Riemann considerado é o chamado conjunto de extensão relativo à uma das famílias características. Ele associa estados em conjuntos distintos do espaço de estados Ω relacionados entre si via o Teorema de Bethe-Wendroff. Ao se considerar estes conjuntos temos elementos necessários para a construção de ondas compostas, pois para este tipo de onda temos a presença de um choque característico.

Definição 1.17: *O conjunto de extensão- i de um conjunto $\mathcal{B} \subseteq \Omega$, denotado por $E^i(\mathcal{B})$, é definido por*

$$E^i(\mathcal{B}) = \{A \in \Omega : \exists B \in \mathcal{B}, \exists \sigma_0 \in \mathbb{R}, \text{ com } A \neq B \\ \mathcal{H}(A, \sigma_0, B) = 0, \sigma_0 = \lambda_i(A)\}.$$

Observamos que o conjunto \mathcal{B} fixado na Definição 1.17 pode ser uma parte, ou toda a fronteira de Ω , um conjunto de bifurcação secundária, uma curva de Hugoniot, uma curva de onda ou qualquer outro subconjunto próprio de Ω .

Figuras

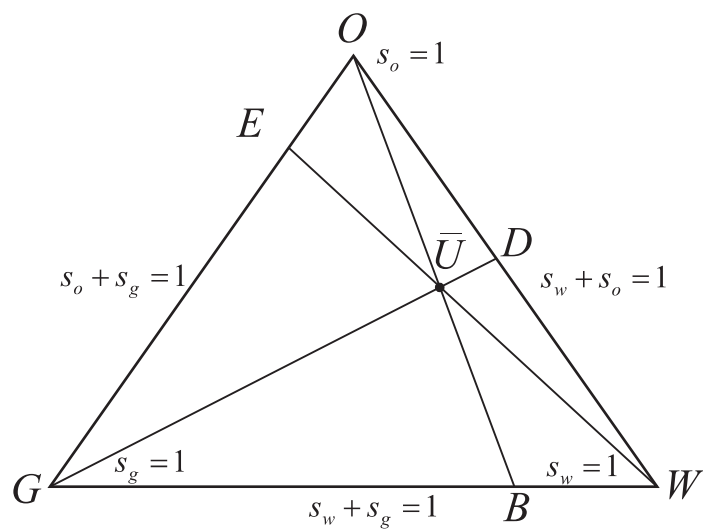


Figura 1: Triângulo de saturações e retas de bifurcação secundária.

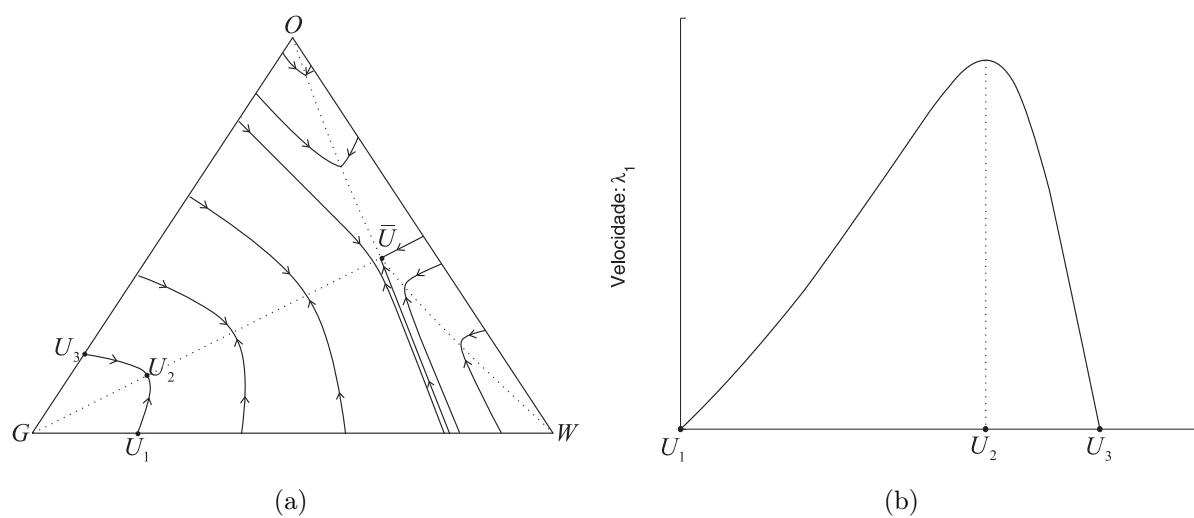


Figura 2: (a) Curvas integrais e conjunto de inflexão associados à família característica-1. (b) Gráfico da velocidade característica sobre a curva integral-1 pelos estados U_1 , U_2 e U_3 .

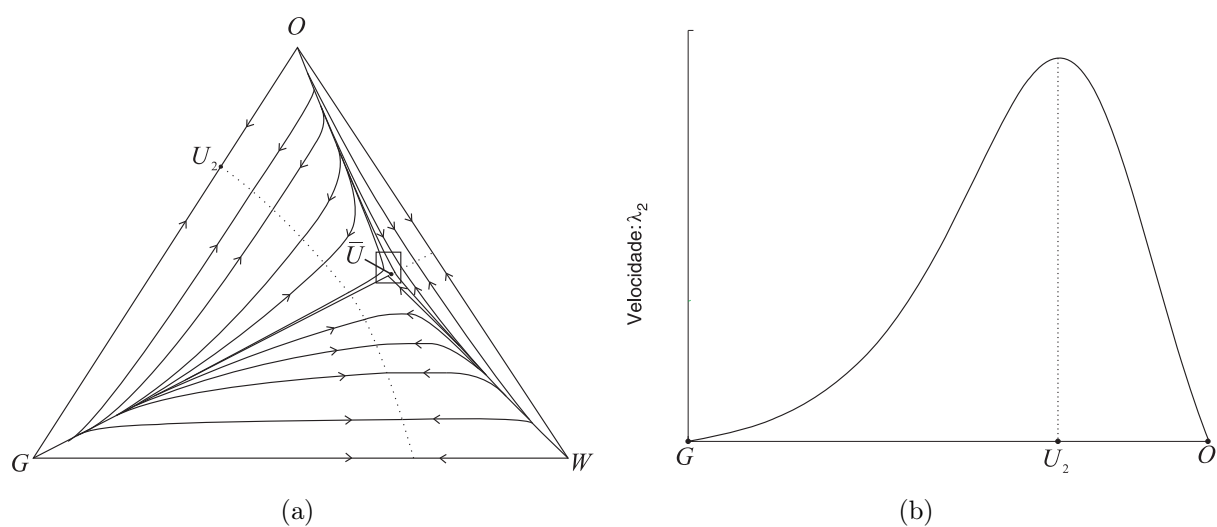


Figura 3: (a) Curvas integrais e conjunto de inflexão associados à família característica-2. (b) Gráfico da velocidade característica sobre a curva integral-2 pelos estados G , U_2 e O .

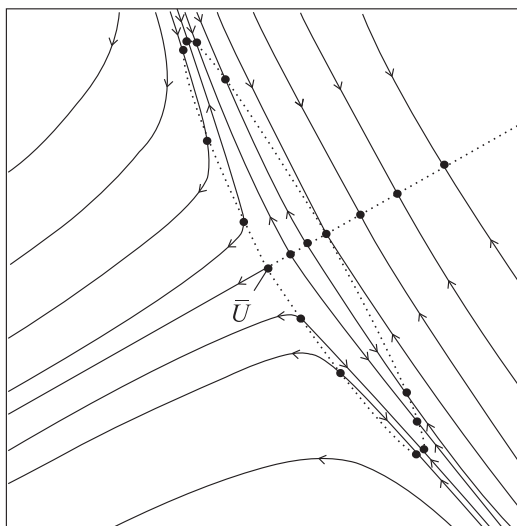


Figura 4: Curvas integrais e conjunto de inflexão (pontilhada) associados à família característica-2 na vizinhança do ponto umbílico \bar{U} .

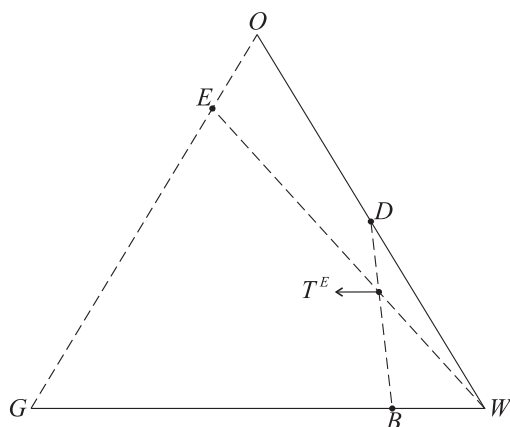


Figura 5: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo o estado E .

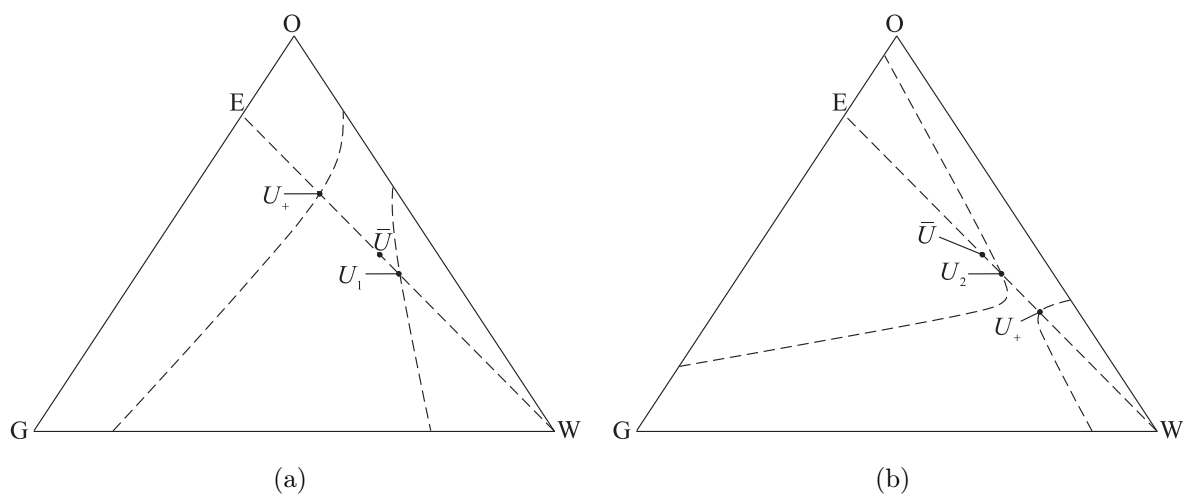


Figura 6: (a) Curva de Hugoniot por U_+ com bifurcação secundária-1. (b) Curva de Hugoniot por U_+ com bifurcação secundária-2.

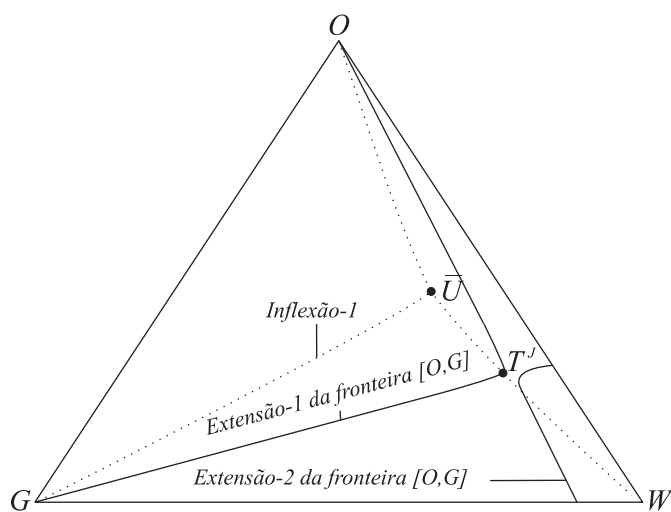


Figura 7: Extensões do lado $[O, G]$.

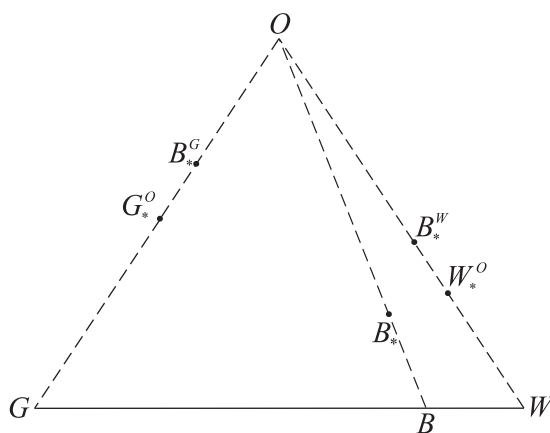


Figura 8: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado O .

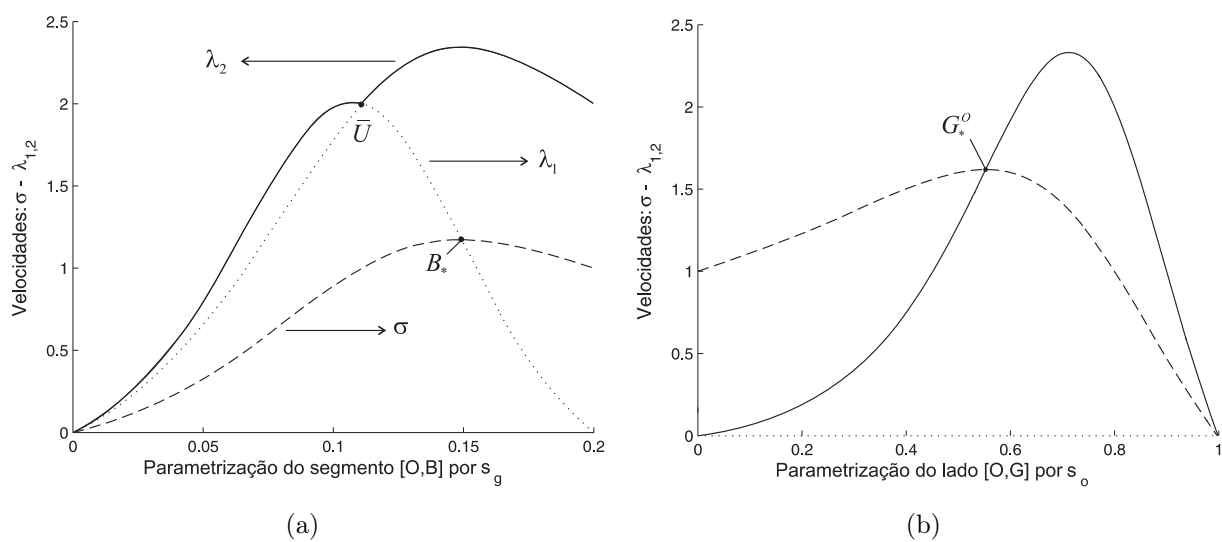


Figura 9: (a) Gráficos das velocidades sobre o segmento $[O, B]$ da curva de Hugoniot por O justificando a existência do estado B_* tal que $\sigma(B_*, O) = \lambda_1(B_*)$. (b) Gráficos das velocidades sobre o lado $[O, G]$ justificando a existência do estado G_*^O tal que $\sigma(G_*, O) = \lambda_2(G_*)$.

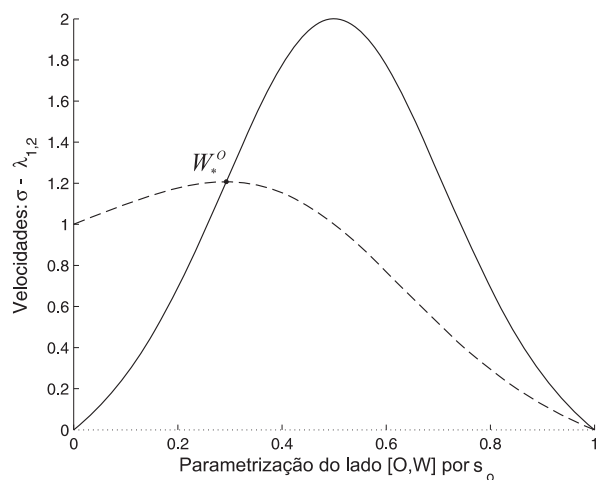


Figura 10: Gráficos das velocidades sobre o lado $[O, W]$ da curva de Hugoniot por O justificando a existência do estado W_*^O tal que $\sigma(W_*^O, O) = \lambda_2(W_*^O)$.

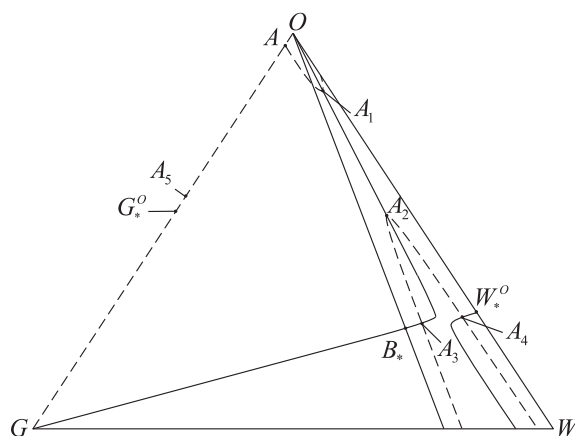


Figura 11: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado A e as extensões 1 e 2 do lado $[O, G]$.

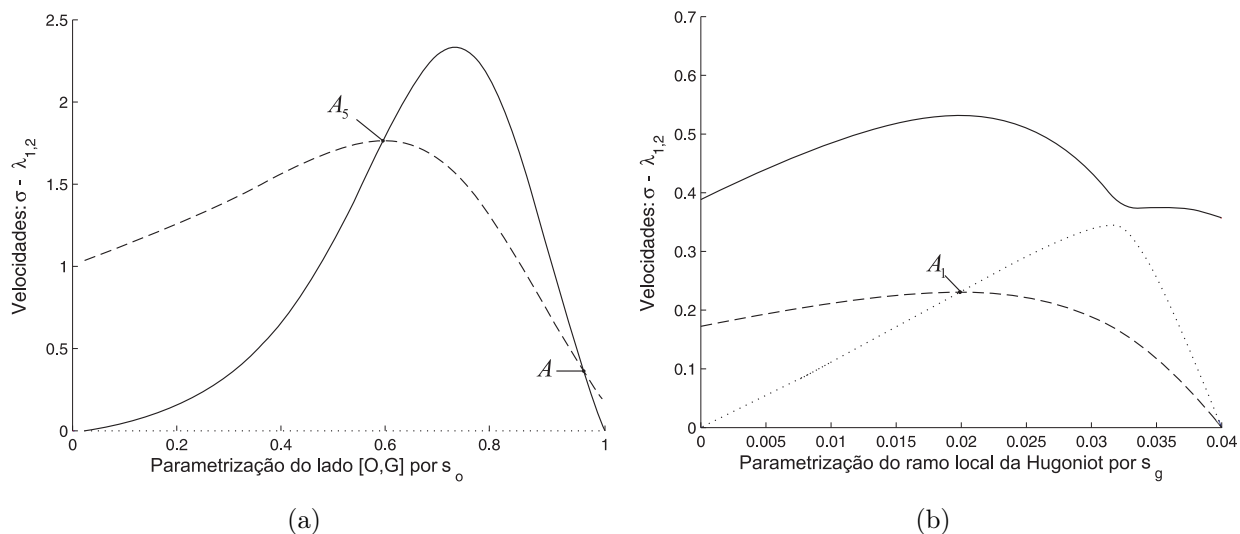


Figura 12: (a) Gráficos das velocidades sobre o lado $[O, G]$ da curva de Hugoniot por A justificando a existência do estado A_5 tal que $\sigma(A_5, A) = \lambda_2(A_5)$. (b) Gráficos das velocidades sobre o ramo local de $\mathcal{H}(A)$ justificando a existência do estado A_1 tal que $\sigma(A_1, A) = \lambda_1(A_1)$.

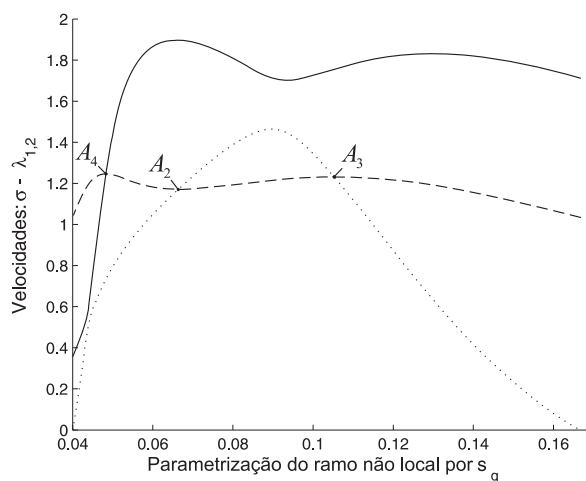


Figura 13: Gráficos das velocidades sobre o ramo não local de $\mathcal{H}(A)$ justificando a existência dos estados A_2 , A_3 e A_4 tais que $\sigma(A_2, A) = \lambda_1(A_2)$, $\sigma(A_3, A) = \lambda_1(A_3)$ e $\sigma(A_4, A) = \lambda_2(A_4)$.

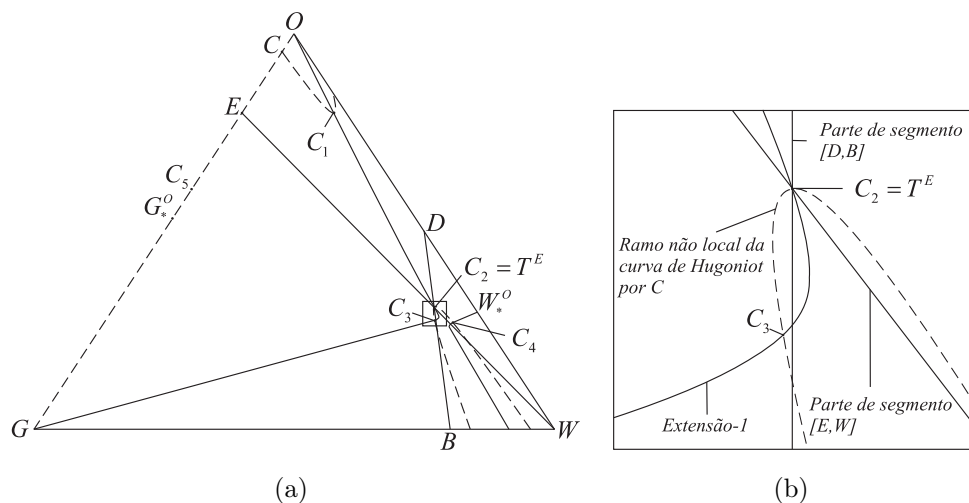


Figura 14: (a) Curva de Hugoniot pelos estados C (tracejada) e E e, as extensões do lado $[O, G]$. (b) Ampliação da região retângular da Fig. 14(a) mostrando a coincidência entre os estados C_2 e T^E .

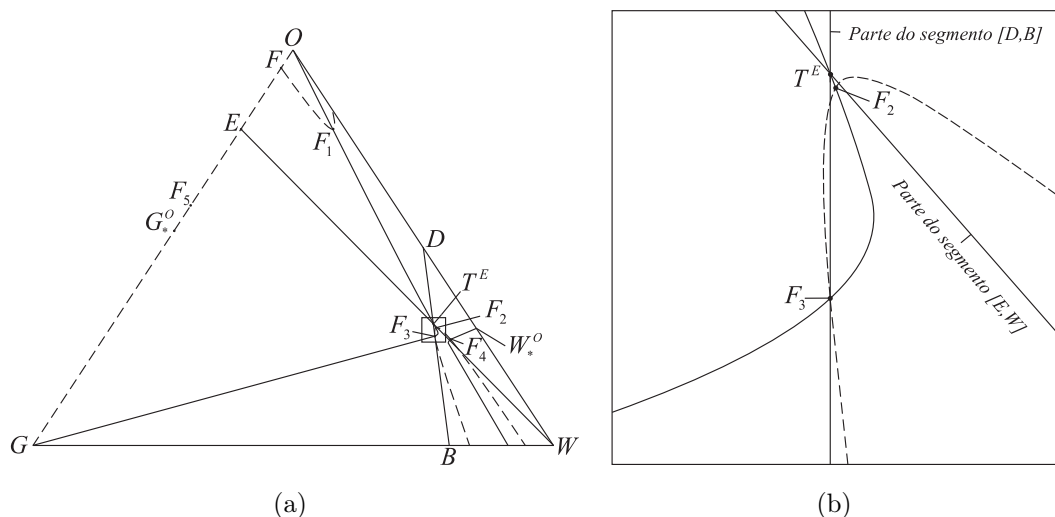


Figura 15: (a) Curvas de Hugoniot pelos estados F (tracejada) e E , e as extensões F_1 a F_5 com $\sigma(F_1, F) = \lambda_1(F_1)$, $\sigma(F_2, F) = \lambda_1(F_2)$, $\sigma(F_3, F) = \lambda_1(F_3)$, $\sigma(F_4, F) = \lambda_2(F_4)$ e $\sigma(F_5, F) = \lambda_2(F_5)$. (b) Ampliação da região retângular da Fig. 15(a) destacando que o estado F_2 está localizado abaixo do segmento $[E, W]$.

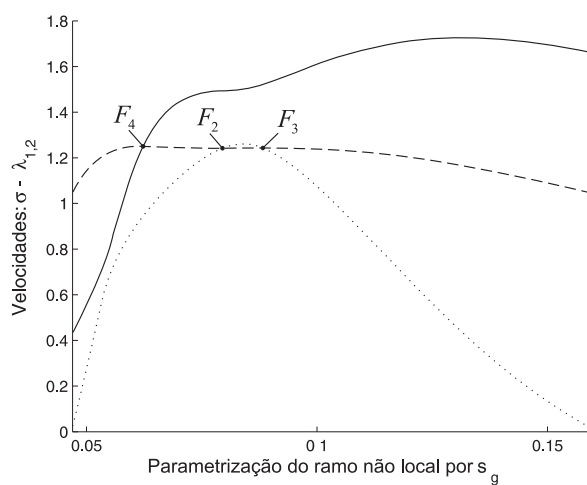


Figura 16: Gráficos das velocidades sobre o ramo não local de $\mathcal{H}(F)$, mostrando os estados extensão de F com $\sigma(F_2, F) = \lambda_1(F_2)$, $\sigma(F_3, F) = \lambda_1(F_3)$ e $\sigma(F_4, F) = \lambda_2(F_4)$.

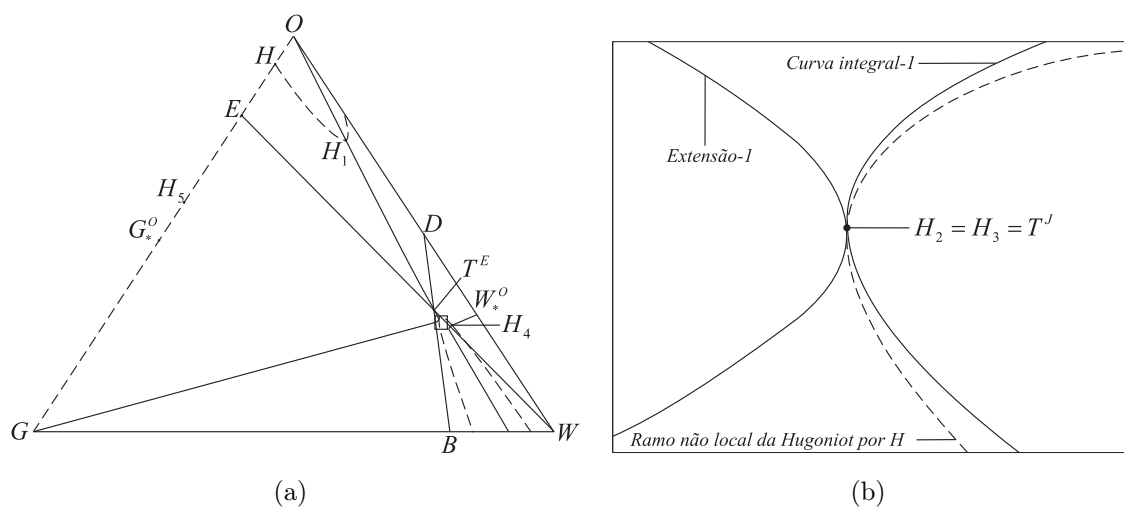


Figura 17: (a) Curvas de Hugoniot pelos estados H (tracejada) e E . (b) Ampliação da região retangular da Fig. 15(a) destacando a coincidência entre os estados H_2 , H_3 e T^J , e também parte da curva integral por $H_2 \equiv H_3 \equiv T^J$.

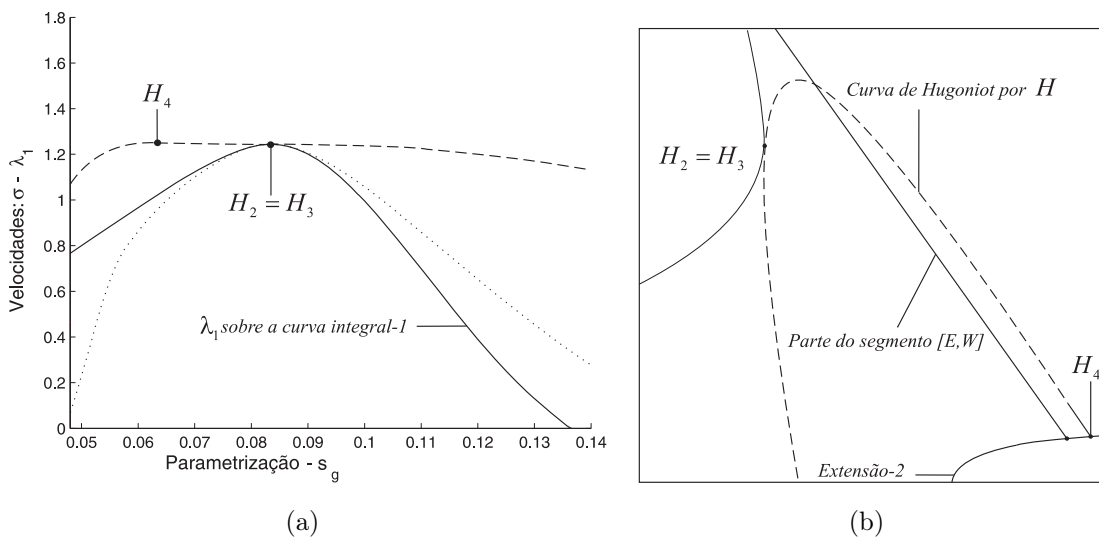


Figura 18: (a) Gráfico de λ_1 sobre parte da curva integral-1 por $H_2 \equiv H_3$ e o gráfico de σ e de λ_1 ao longo de parte do ramo não local de $\mathcal{H}(H)$. (b) Ampliação da região retangular da Fig. 17(a) destacando que H_4 está acima e próximo do segmento $[E, W]$.

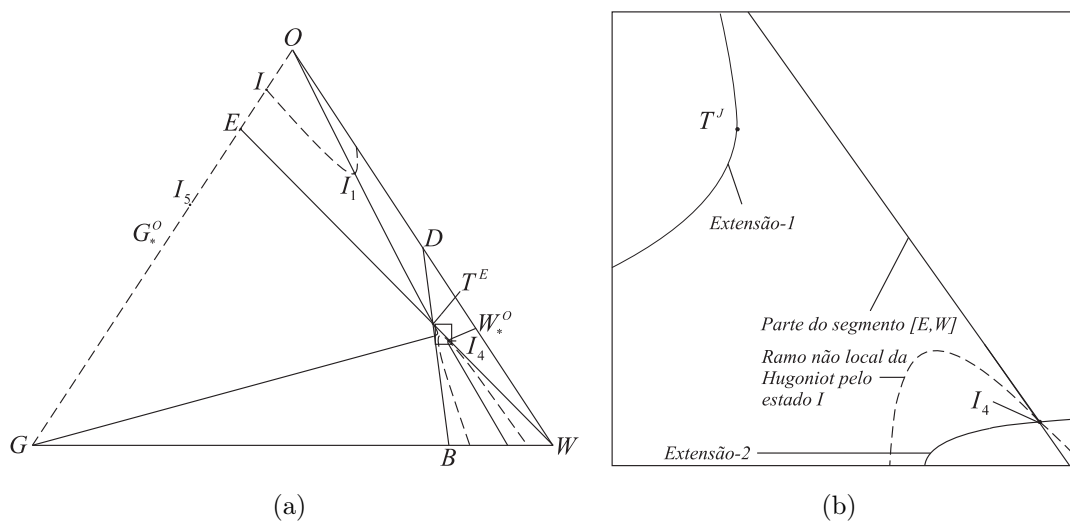


Figura 19: (a) Curvas de Hugoniot pelos os estados I (tracejada) e E . (b) Ampliação da região retangular da Fig. 19(a) mostrando de fato que I_4 está sobre o segmento $[E, W]$.

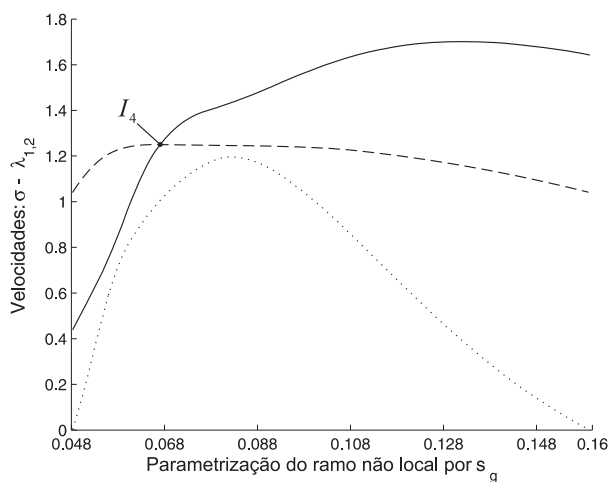


Figura 20: Gráficos das velocidades sobre o ramo não local de $\mathcal{H}(I)$ mostrando a existência de I_4 tal que $\sigma(I_4, I) = \lambda_2(I_4)$.

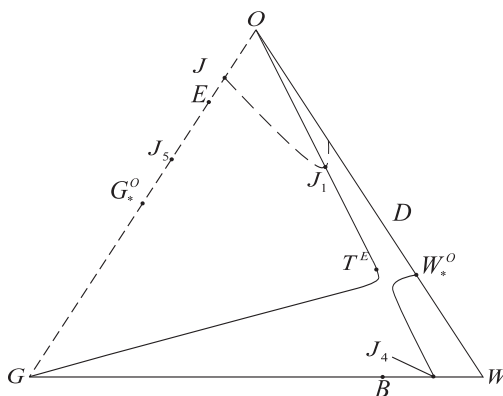


Figura 21: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado J mostrando as extensões J_1 , J_4 e J_5 com $\sigma(J_1, J) = \lambda_1(J_1)$, $\sigma(J_4, J) = \lambda_2(J_4)$ e $\sigma(J_5, J) = \lambda_2(J_5)$.

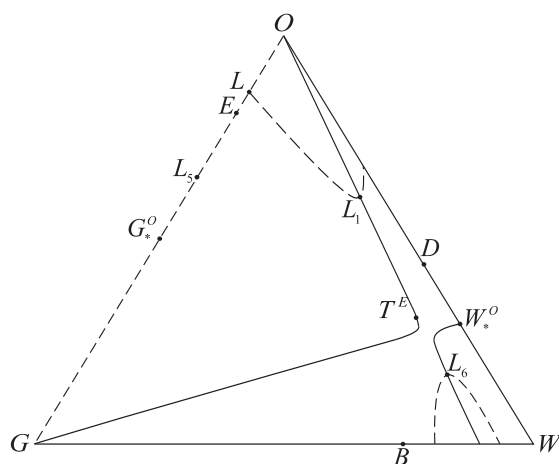


Figura 22: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo o estado L mostrando as extensões L_1 , L_5 e L_6 com $\sigma(L_1, L) = \lambda_1(L_1)$, $\sigma(L_5, L) = \lambda_2(L_5)$ e $\sigma(L_6, L) = \lambda_2(L_6)$.

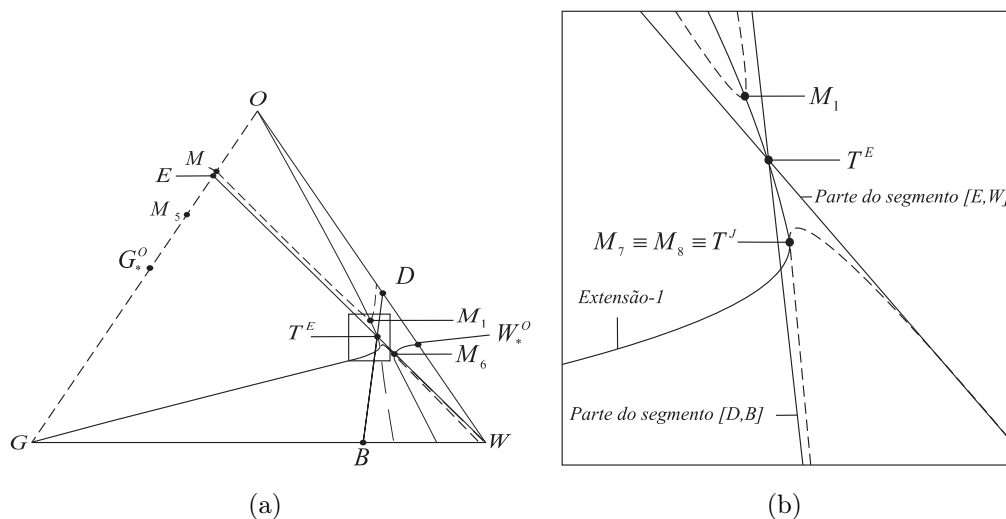


Figura 23: (a) Curvas de Hugoniot pelos estados M (tracejada) e E mostrando as extensões M_1 , M_5 , M_6 e $M_7 \equiv M_8$ tais que $\sigma(M_1, M) = \lambda_1(M_1)$, $\sigma(M_5, M) = \lambda_2(M_5)$, $\sigma(M_6, M) = \lambda_2(M_6)$ e $\sigma(M_7 \equiv M_8, M) = \lambda_1(M_7 \equiv M_8)$. (b) Ampliação da região retângular da Fig. 23(a) mostrando a coincidência entre os estados $M_7 \equiv M_8 \equiv T^J$.

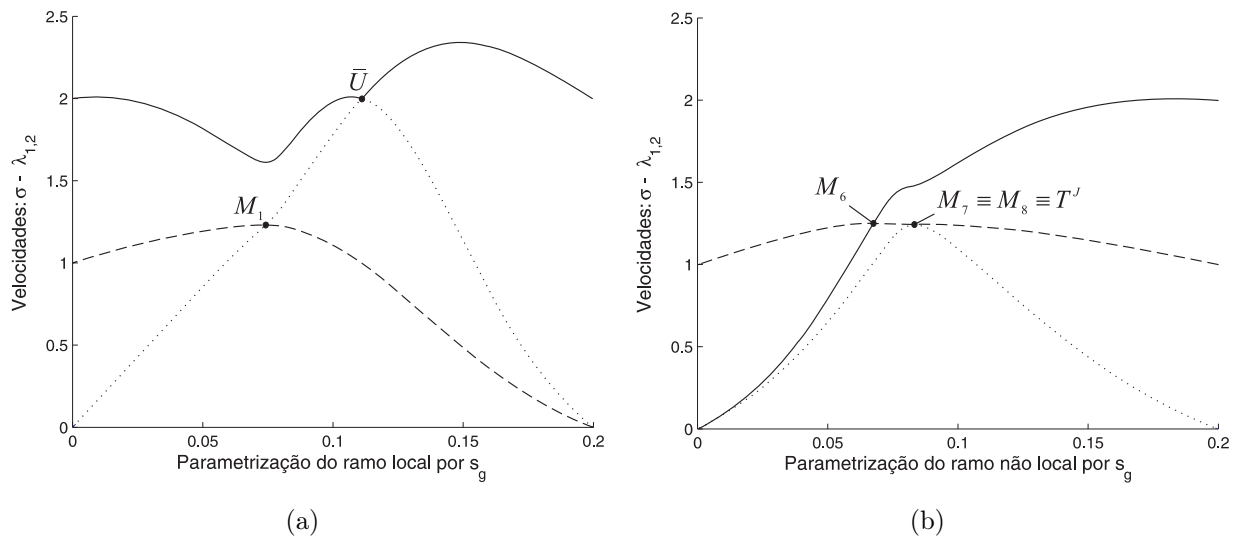


Figura 24: (a) Gr\u00e1ficos das velocidades sobre o ramo local da curva de Hugoniot por M justificando a exist\u00eancia do estado M_1 tal que $\sigma(M_1, M) = \lambda_1(M_1)$. (b) Gr\u00e1ficos das velocidades sobre o ramo n\u00e3o local de $\mathcal{H}(M)$ justificando a exist\u00eancia dos estados $M_7 \equiv M_8$ e M_6 tais que $\sigma(M_7 \equiv M_8, M) = \lambda_1(M_7 \equiv M_8)$ e $\sigma(M_6, M) = \lambda_2(M_6)$.

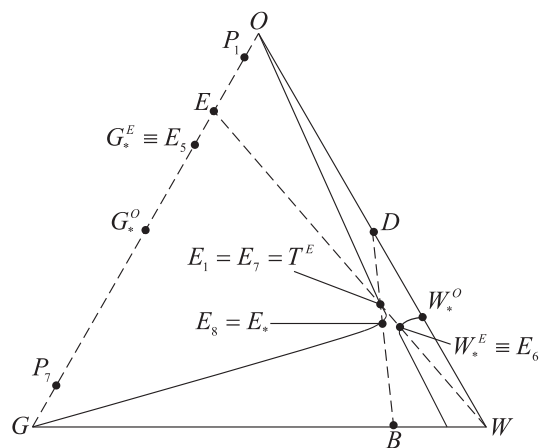


Figura 25: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo o estado E .

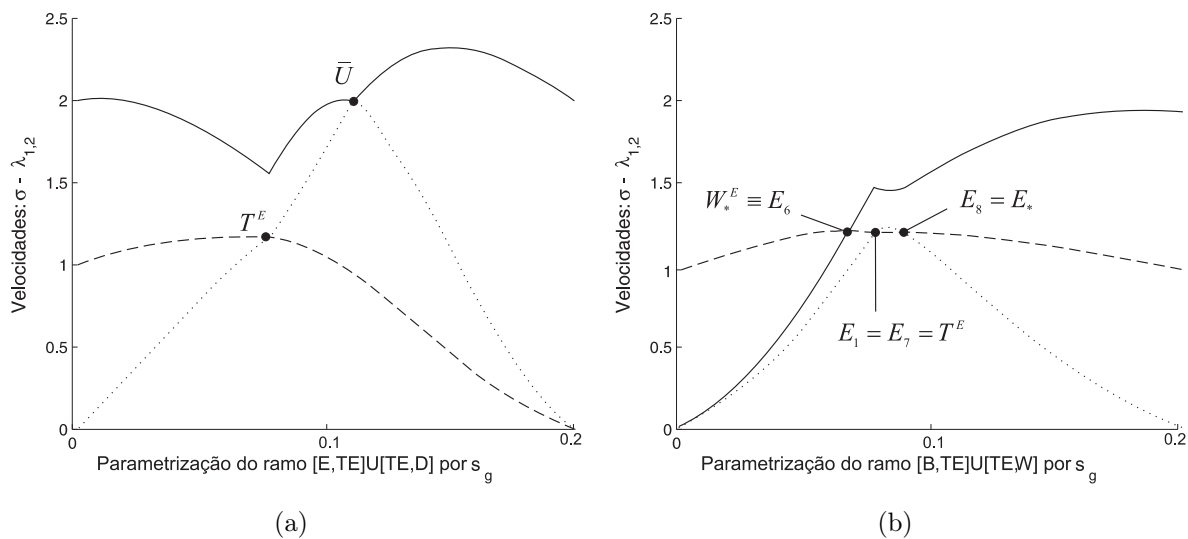


Figura 26: (a) Gráficos das velocidades sobre o ramo $[E, T^E] \cup [T^E, D]$ de $\mathcal{H}(E)$ justificando a extensão $E_1 \equiv E_7 \equiv T^E$. (b) Gráficos das velocidades sobre o ramo $[B, T^E] \cup [T^E, W]$ de $\mathcal{H}(E)$ justificando as extensões $E_8 \equiv E_*$, $E_1 \equiv E_7 \equiv T^E$ e $E_6 \equiv W_*^E$.

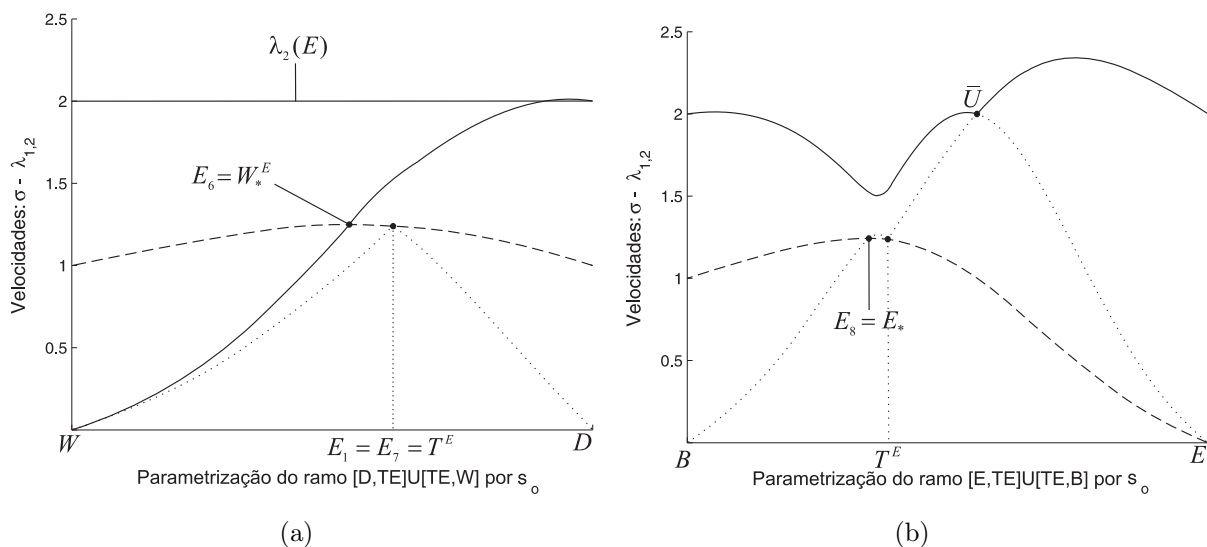


Figura 27: (a) Gráficos das velocidades sobre o ramo $[D, T^E] \cup [T^E, W]$ de $\mathcal{H}(E)$ justificando as extensões $E_6 \equiv W_*^E$ e $E_1 \equiv E_7 \equiv T^E$. (b) Gráficos das velocidades sobre o ramo $[E, T^E] \cup [T^E, B]$ de $\mathcal{H}(E)$ justificando a extensão $E_8 \equiv E_*$.

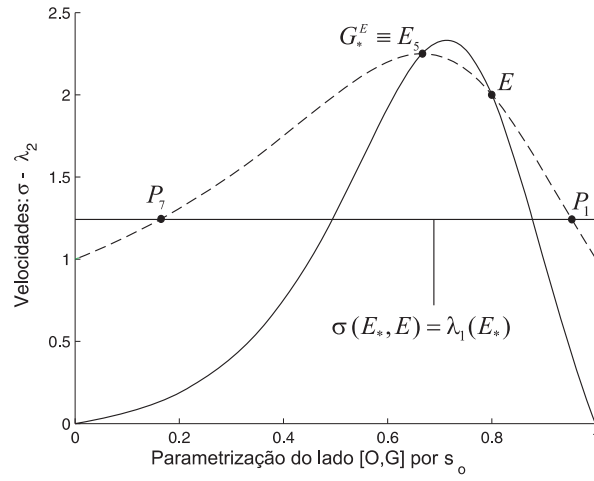


Figura 28: Gráfico das velocidades λ_2 e σ sobre o lado $[O, G]$ da curva de Hugoniot por E mostrando que $\sigma(E_5, E) = \lambda_2(E_5)$ e $\sigma(P_1, E) = \sigma(P_7, E) = \sigma(E_*, E) = \lambda_1(E_*)$.

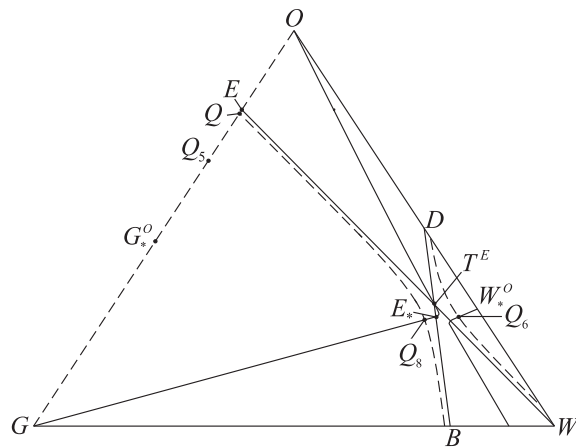


Figura 29: Curvas de Hugoniot pelos estados Q (tracejada) e E .

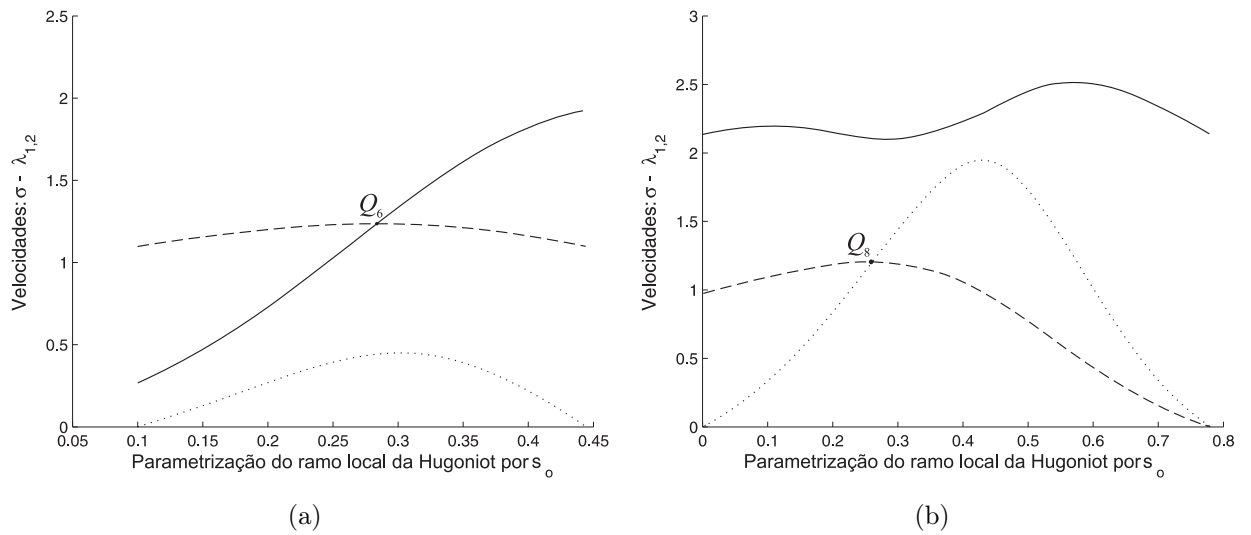


Figura 30: (a) Gráficos das velocidades sobre o ramo não local de $\mathcal{H}(Q)$ mostrando a existência do estado Q_6 tal que $\sigma(Q_6, Q) = \lambda_1(Q_6)$. (b) Gráficos das velocidades sobre o ramo local de $\mathcal{H}(Q)$ mostrando a existência do estado Q_8 tal que $\sigma(Q_8, Q) = \lambda_1(Q_8)$.

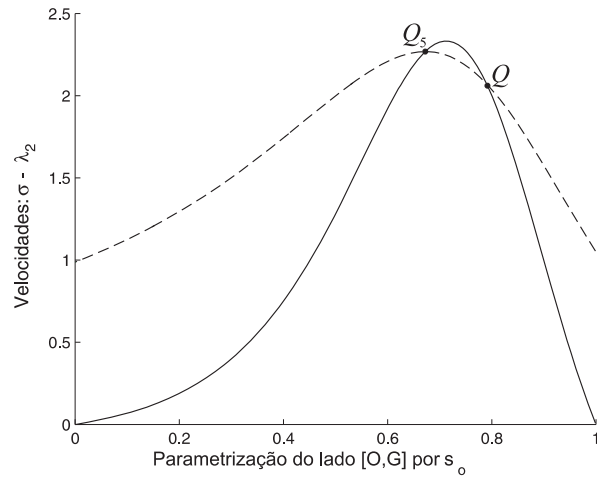


Figura 31: Gráfico das velocidades sobre o lado $[O, G]$ da curva de Hugoniot por Q .

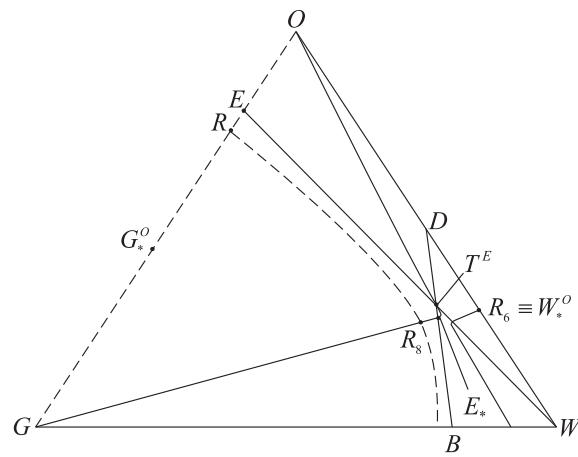


Figura 32: Curvas de Hugoniot pelos estados R (tracejada) e E .

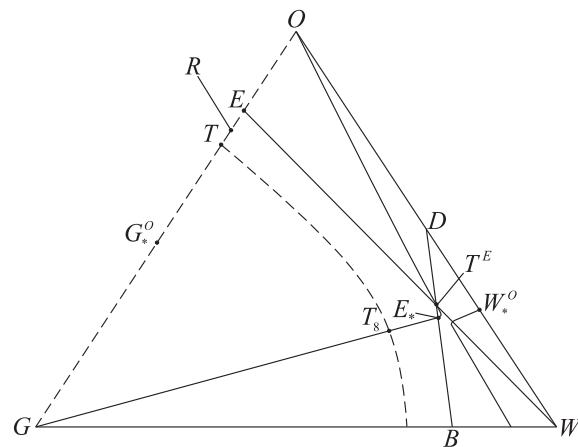


Figura 33: Curvas de Hugoniot pelos estados T (tracejada) e E .

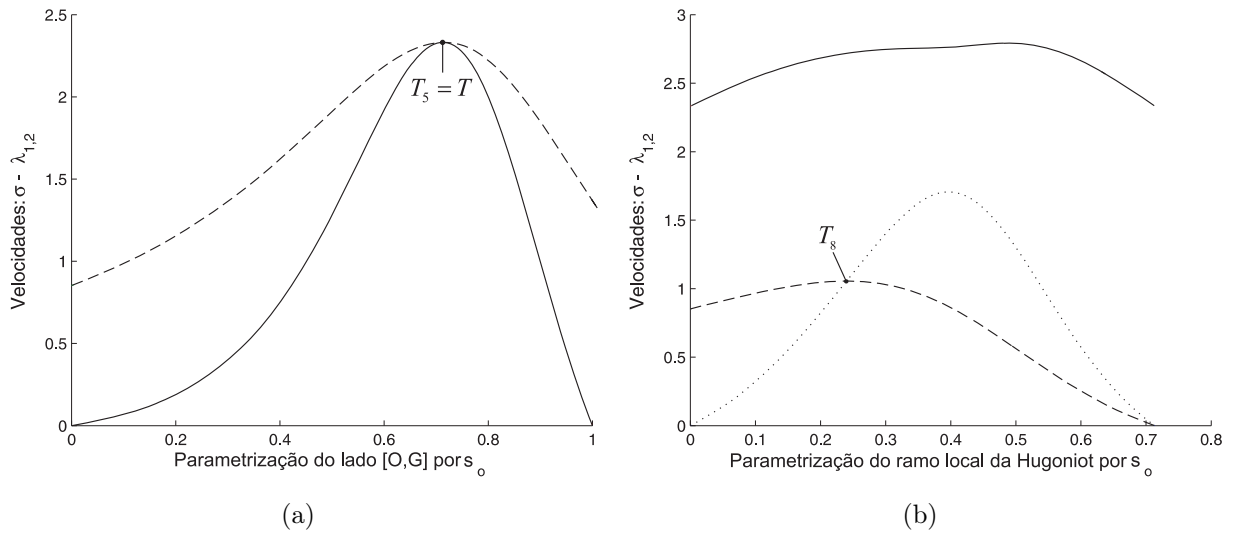


Figura 34: (a) Gráficos das velocidades λ_2 e σ sobre o lado $[O, G]$ de $\mathcal{H}(T)$ mostrando a existência do estado T_5 tal que $\sigma(T_5, T) = \lambda_2(T_5)$. (b) Gráficos das velocidades sobre o ramo local de $\mathcal{H}(T)$ mostrando a existência do estado T_8 tal que $\sigma(T_8, T) = \lambda_1(T_8)$.

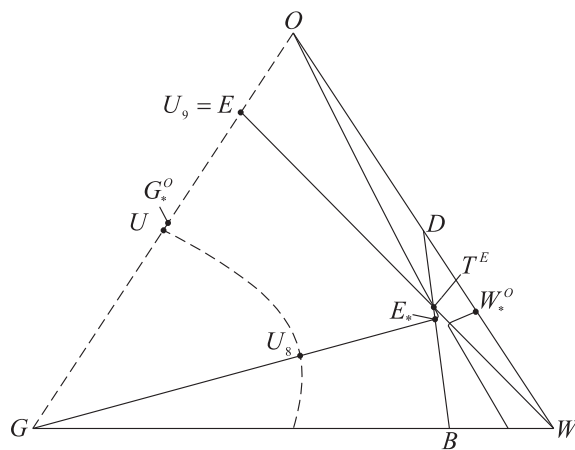


Figura 35: Curvas de Hugoniot pelos estados U (tracejada) e E .

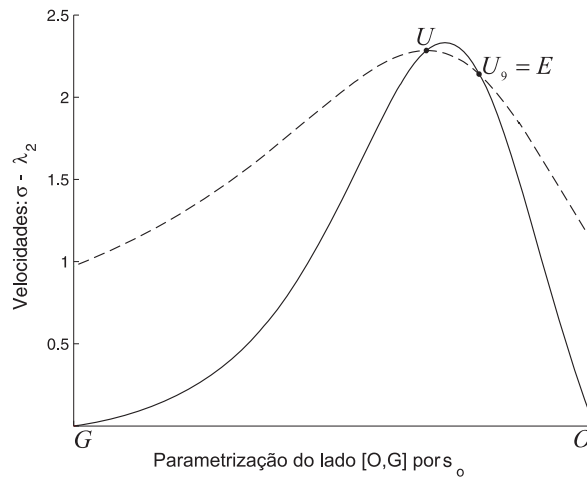


Figura 36: Gráfico das velocidades λ_2 e σ sobre o lado $[O, G]$ de $\mathcal{H}(U)$ mostrando a existência de U_9 tal que $\sigma(U_9, U) = \lambda_2(U_9)$ e também $U_9 \equiv E$.

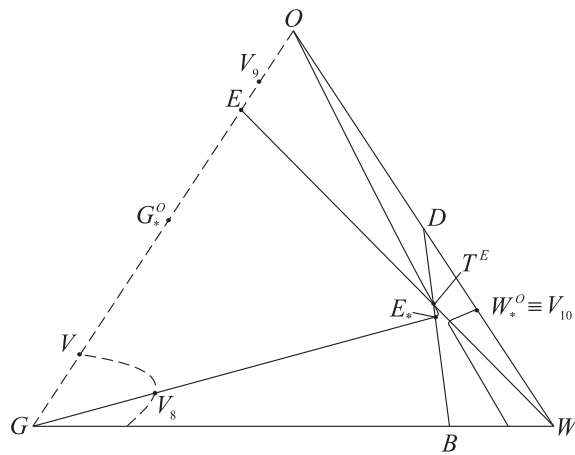


Figura 37: Curvas de Hugoniot pelos estados V (tracejada) e E .

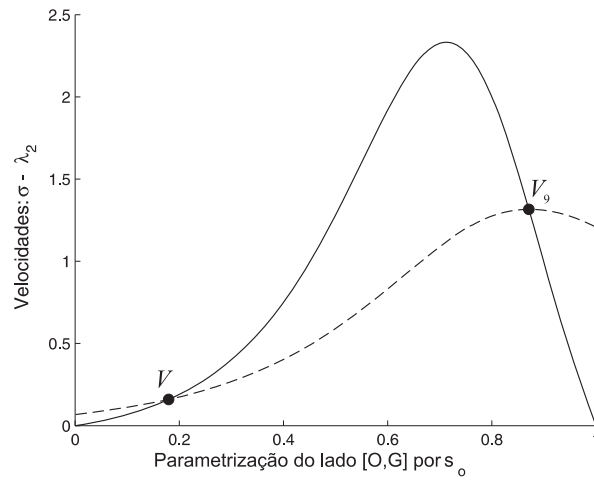


Figura 38: Gráfico das velocidades λ_2 e σ sobre o lado $[O, G]$ de $\mathcal{H}(V)$ mostrando a existência de U_9 tal que $\sigma(V_9, U) = \lambda_2(V_9)$.

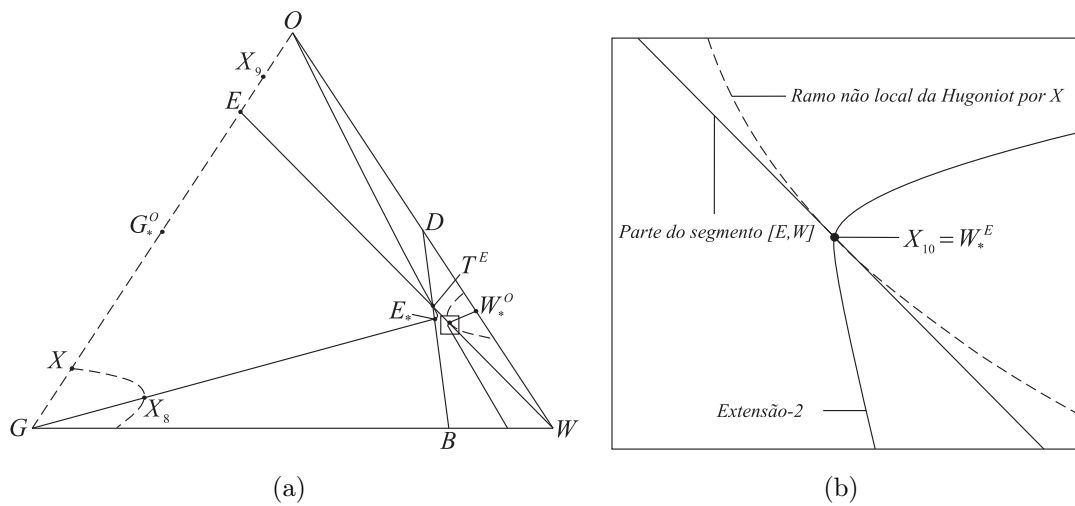


Figura 39: (a) Curvas de Hugoniot pelos estados X (tracejada) e E . (b) Ampliação da região retângular da Fig. 39(a) destacando a coincidência entre os estados X_{10} e W_*^E .

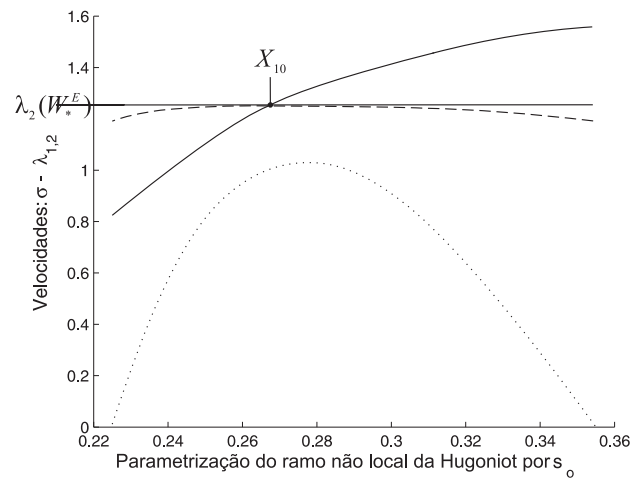


Figura 40: Gráficos das velocidades sobre o ramo não local de $\mathcal{H}(X)$ e reta de altura $\lambda_2(W_*^E)$ mostrando a existência do estado X_{10} tal que $\sigma(X_{10}, X) = \lambda_2(X_{10})$ e também a coincidência entre X_{10} e W_*^E .

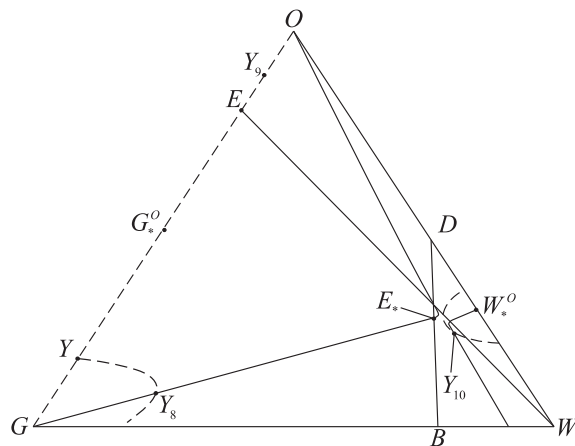


Figura 41: Curvas de Hugoniot pelos estados Y (tracejada) e E .

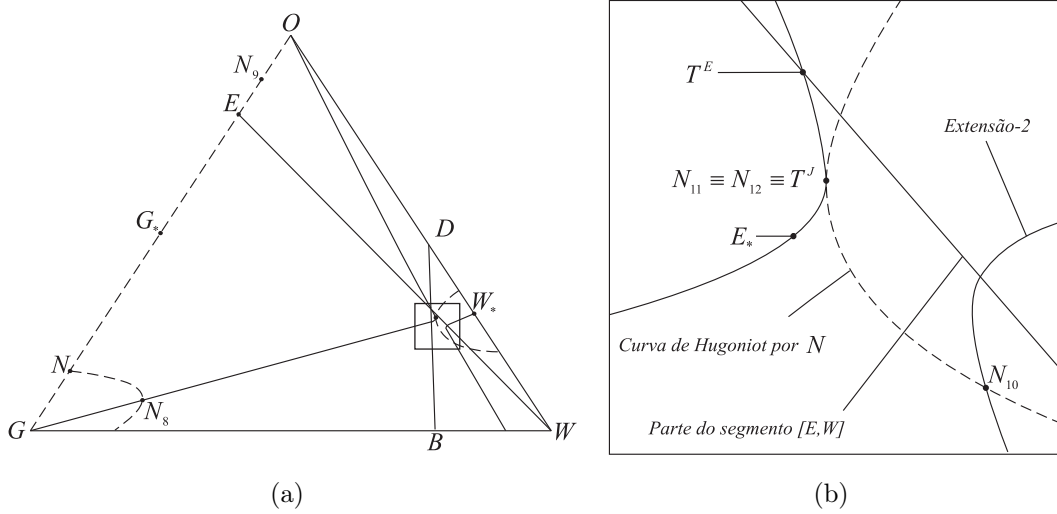


Figura 42: (a) Curvas de Hugoniot pelos estados N (tracejada) e E . (b) Ampliação da região retângular da Fig. 39(a) destacando a coincidência entre os estados N_{11} , N_{12} e T^J .

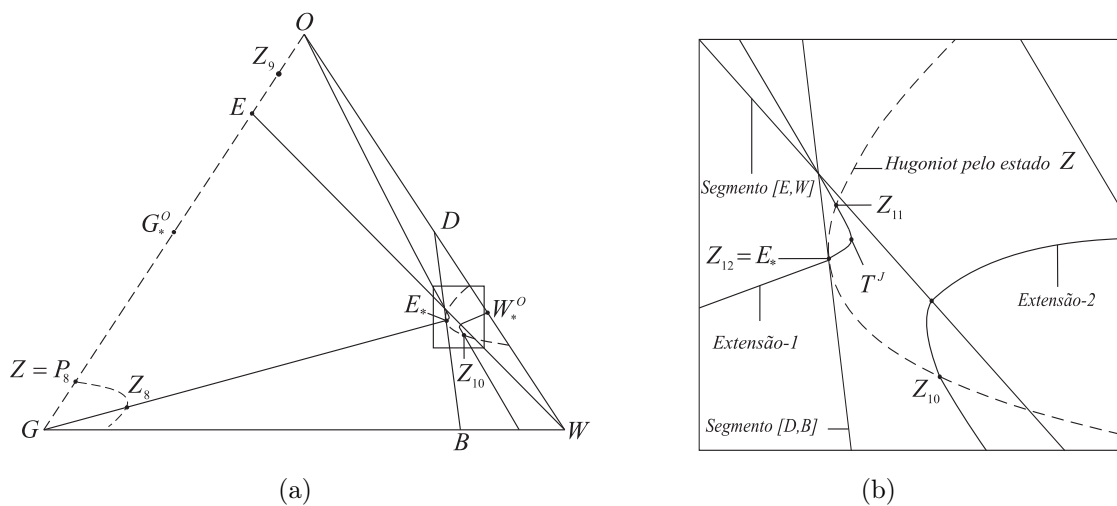


Figura 43: (a) Curvas de Hugoniot pelos estados Z (tracejada) e E . (b) Ampliação da região retângular da Fig. 43(a) destacando a coincidência entre os estados Z_{12} e E_* .

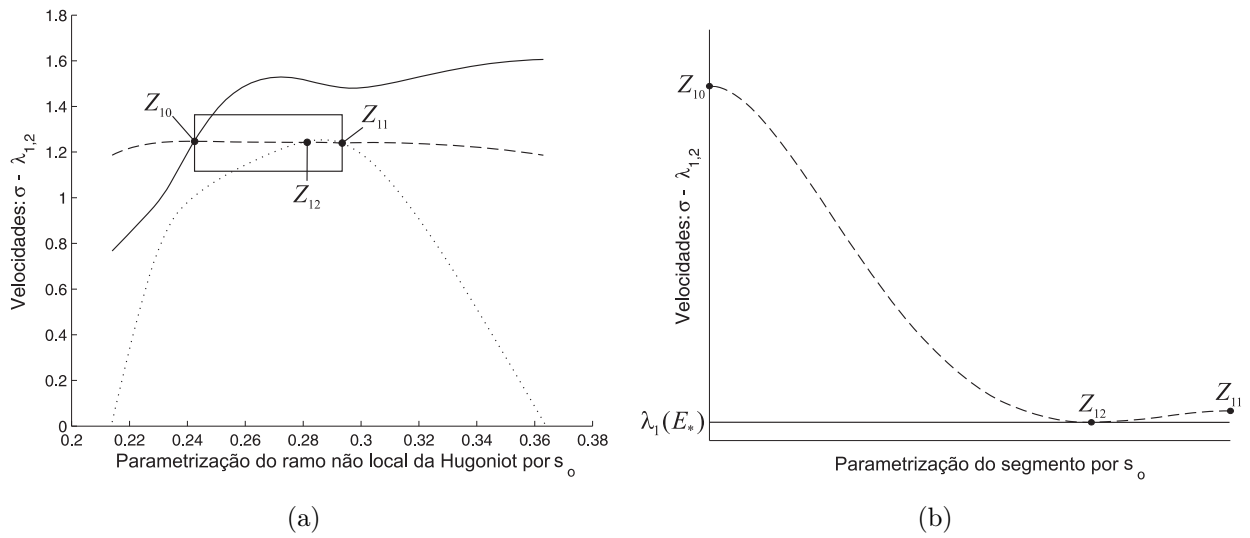


Figura 44: (a) Gráficos das velocidades sobre o ramo não local de $\mathcal{H}(Z)$ mostrando a existência dos estados Z_{10} , Z_{11} e Z_{12} tais que $\sigma(Z_{10}, Z) = \lambda_2(Z_{10})$, $\sigma(Z_{11}, Z) = \lambda_1(Z_{11})$ e $\sigma(Z_{12}, Z) = \lambda_1(Z_{12})$. (b) Ampliação da região retângular da Fig. 44(a) destacando a coincidência entre a reta de altura $\lambda_1(E_*)$ e a velocidade de choque $\sigma(Z_{12}, Z)$.

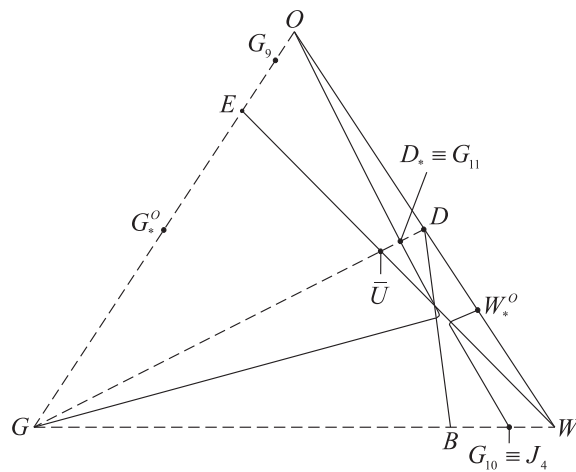


Figura 45: Curvas de Hugoniot pelos estados G (tracejada) e E .

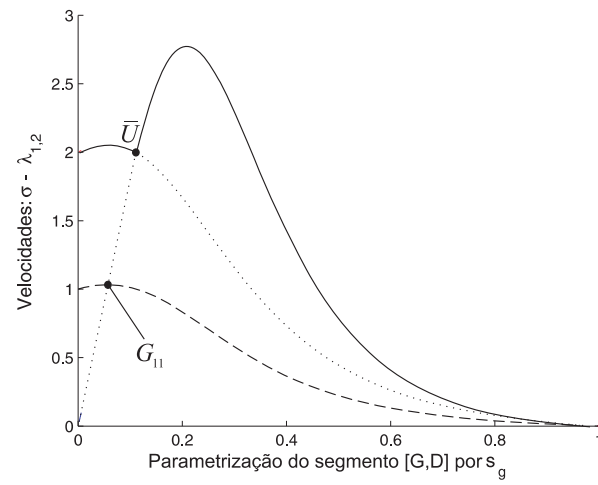


Figura 46: Gráfico das velocidades sobre o segmento $[G, D]$ de $\mathcal{H}(G)$ mostrando a existência do estado G_{11} tal que $\sigma(G_{11}, G) = \lambda_1(G_{11})$.

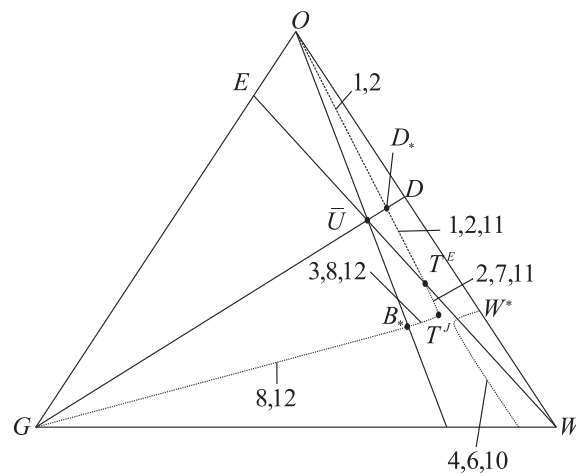


Figura 47: Multiplicidade na correspondência entre os estados bases do lado $[O, G]$ e suas extensões com os índices correspondentes.

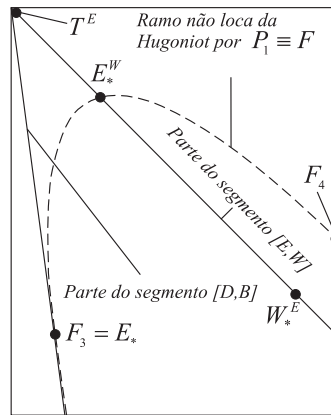


Figura 48: Ampliação da região de interesse das curvas de Hugoniot pelos estados E e $P_1 \equiv F$ destacando a coincidência entre F_3 e E_* e o estado E_*^W interseção de $\mathcal{H}(F)$ com o segmento $[E, W]$ de $\mathcal{H}(F)$.

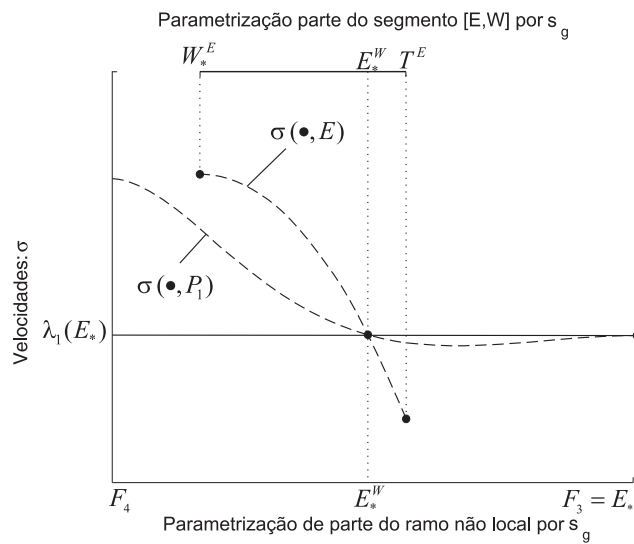


Figura 49: Gráfico de velocidades.

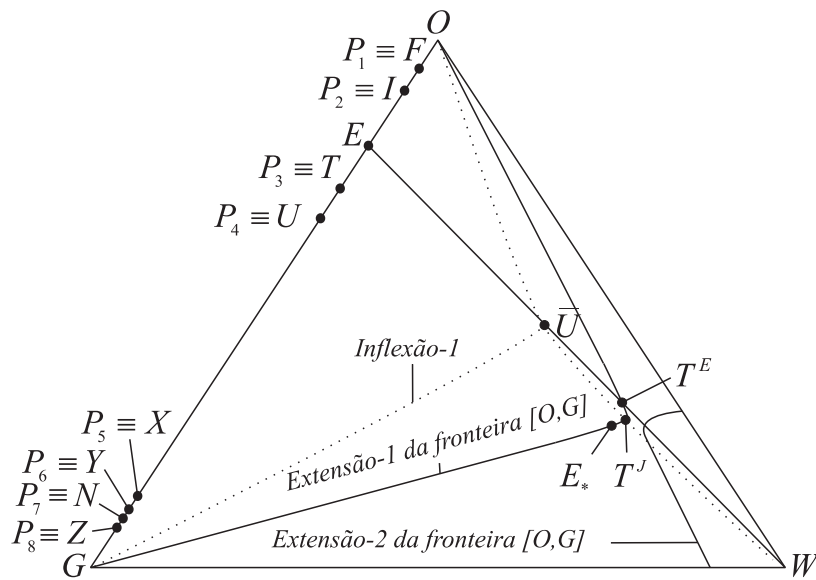


Figura 50: Extensões do lado $[O, G]$ e conjunto de inflexão-1 (linha pontilhada) destacando os estados T^E e T^J . Estados de produção ao longo do lado $[O, G]$ que separam construções distintas da solução do problema de Riemann.

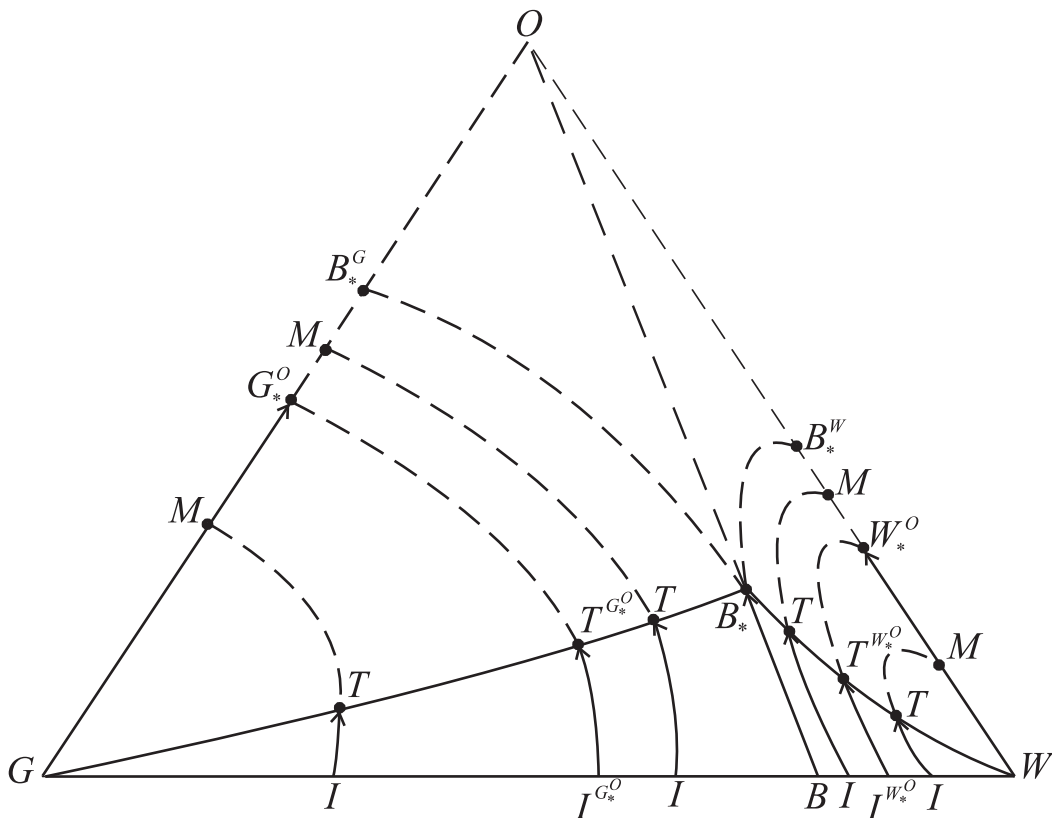


Figura 51: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P = O$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

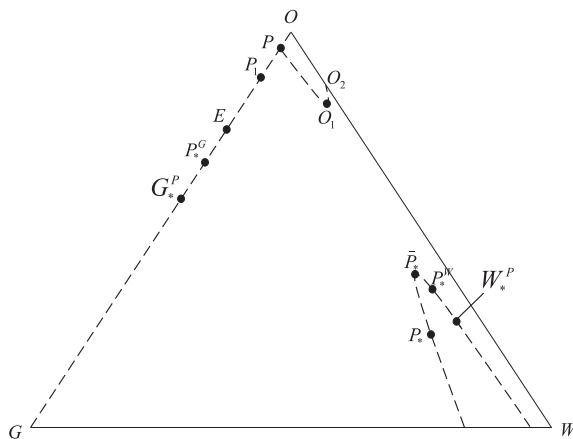


Figura 52: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado P no segmento (O, P_1) .

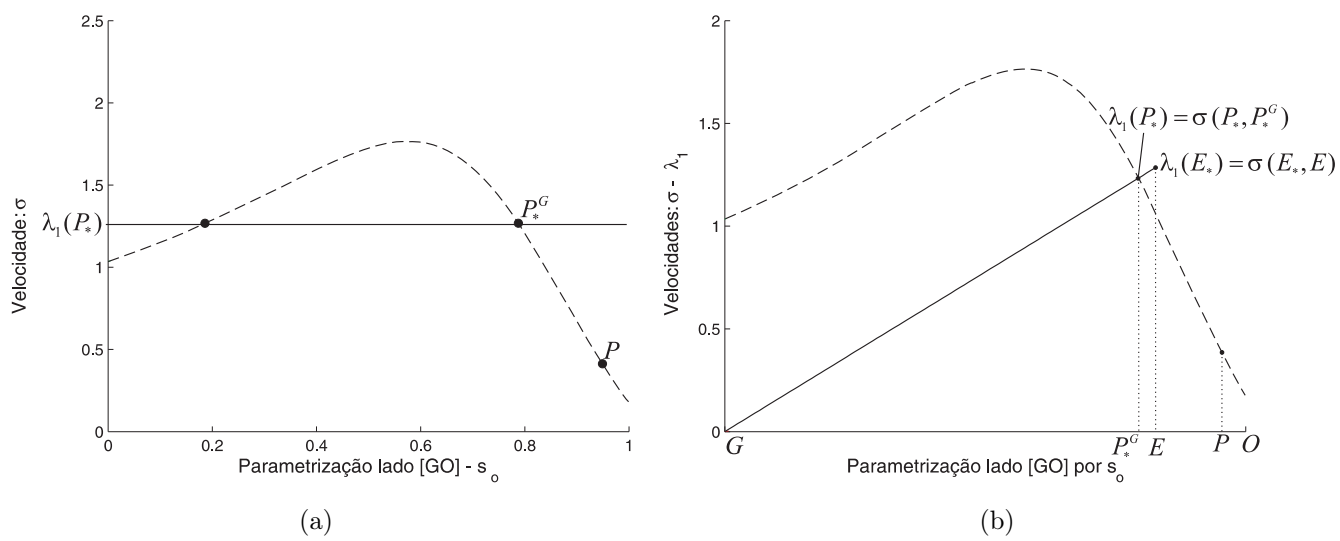


Figura 53: (a) Gráfico de velocidades $\sigma(\cdot, P)$ sobre o lado $[O, G]$ justificando a existência de P_*^G tal que $\lambda_1(P_*) = \sigma(P_*, P_*^G)$. (b) Gráfico das velocidades de choque $\sigma(\cdot, P)$ (tracejada) e característica λ_1 (contínua) em função do lado $[O, G]$. Justificando a compatibilidade geométrica entre as velocidades no segmento $[G, P_*]$ extensão-1 do segmento $[G, P_*^G]$.

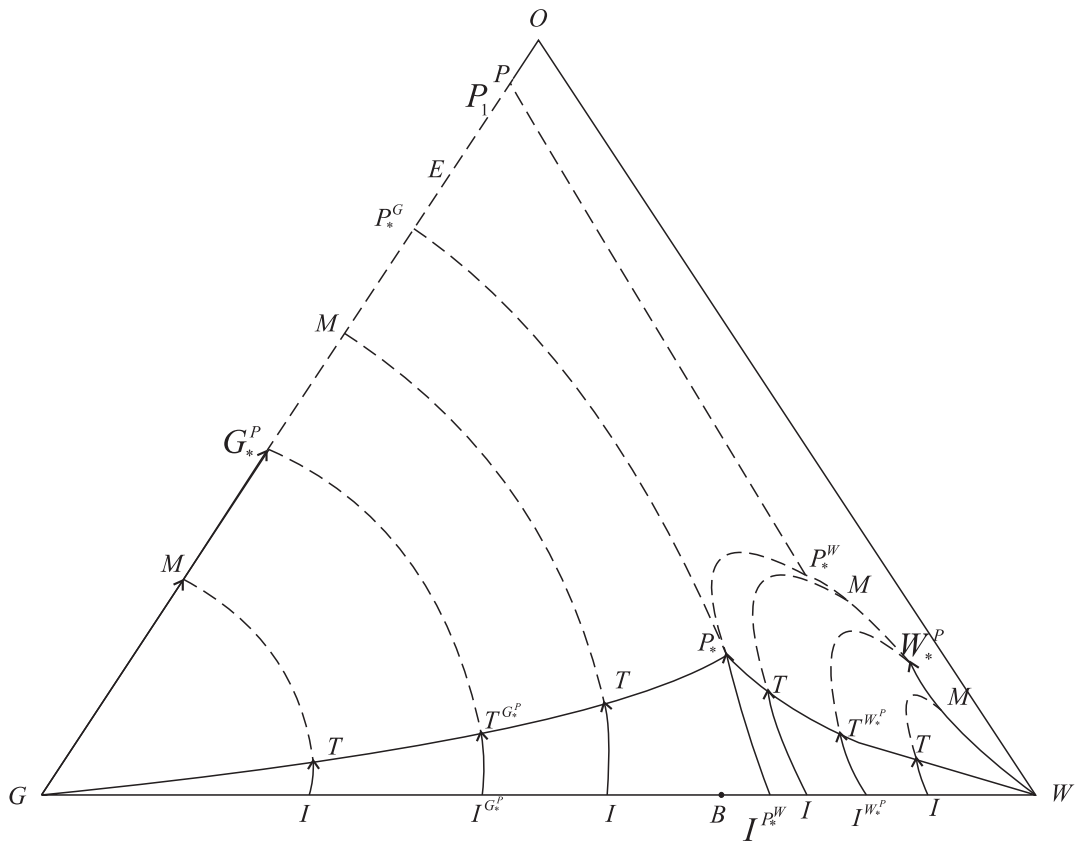


Figura 54: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P \in (O, P_1]$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

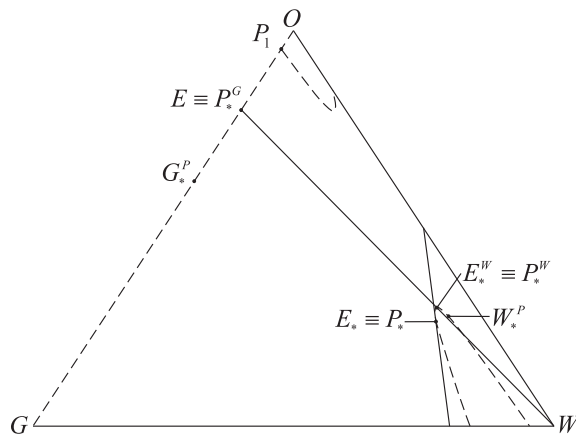


Figura 55: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado $P = P_1$ e curva de Hugoniot por E .

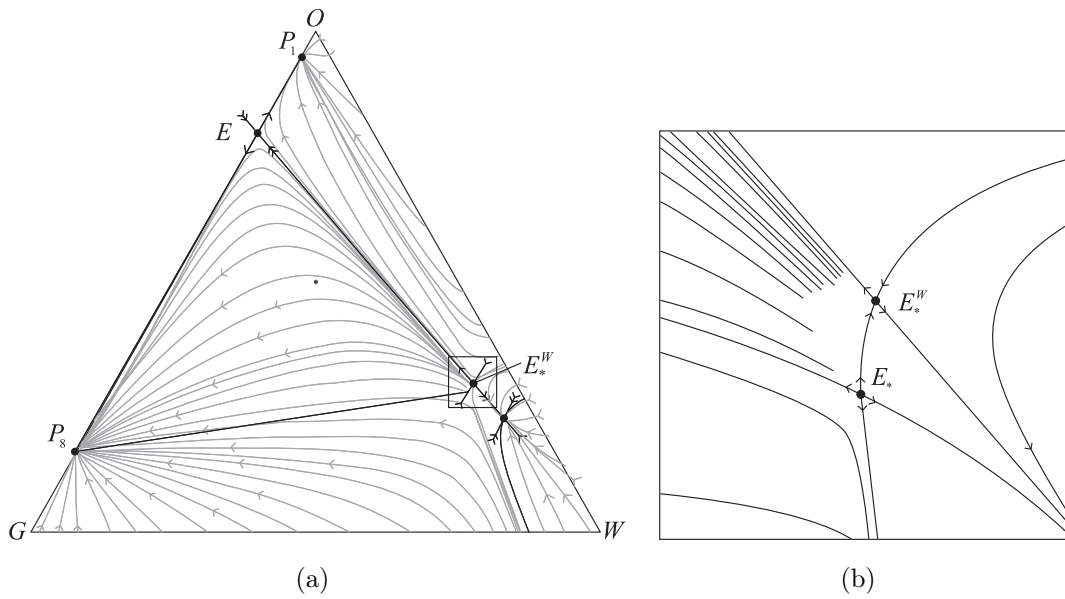


Figura 56: (a) Admissibilidade do choque entre E_*^W e E . (b) Ampliação da região retangular contida na Fig. 56(a) mostrando a admissibilidade do choque entre E_* e P_3 .

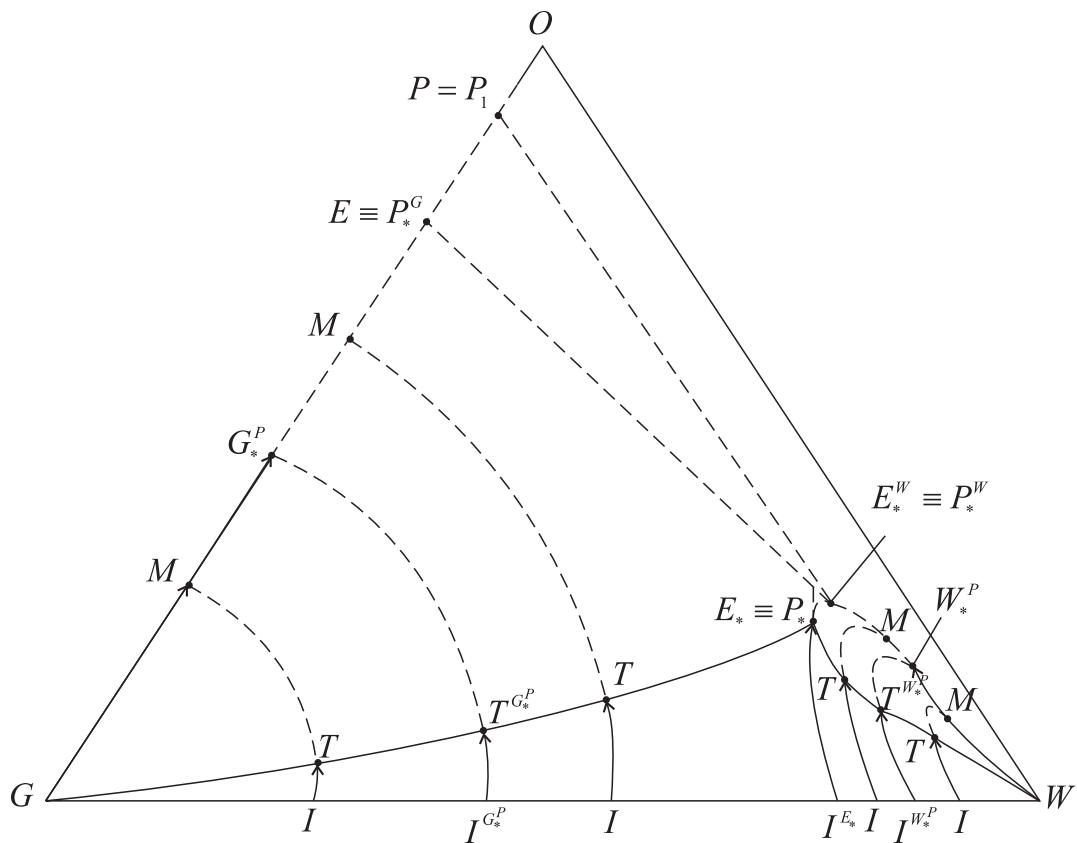


Figura 57: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P = P_1$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

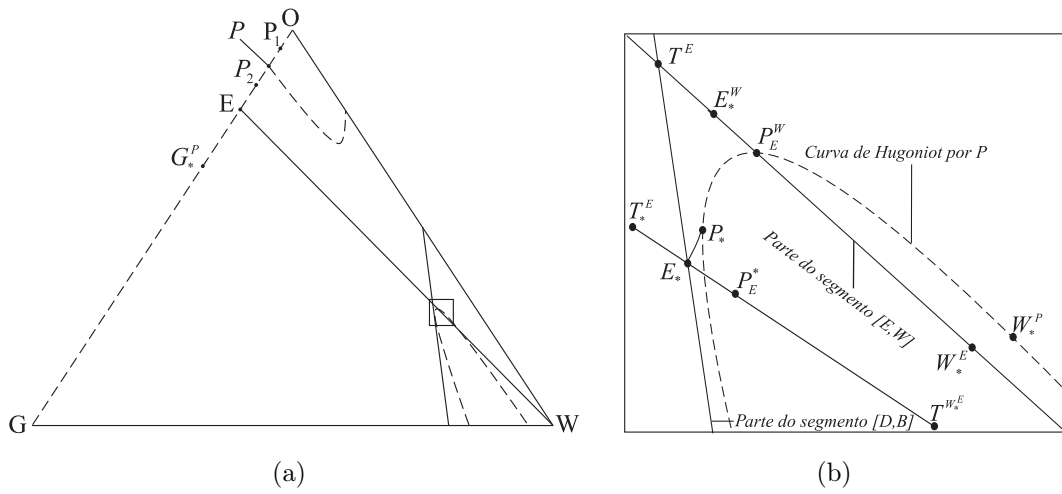


Figura 58: (a) Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado P no segmento (P_1, P_2) e curva de Hugoniot por E . (b) Ampliação da região retangular contida na Fig. 58(a).

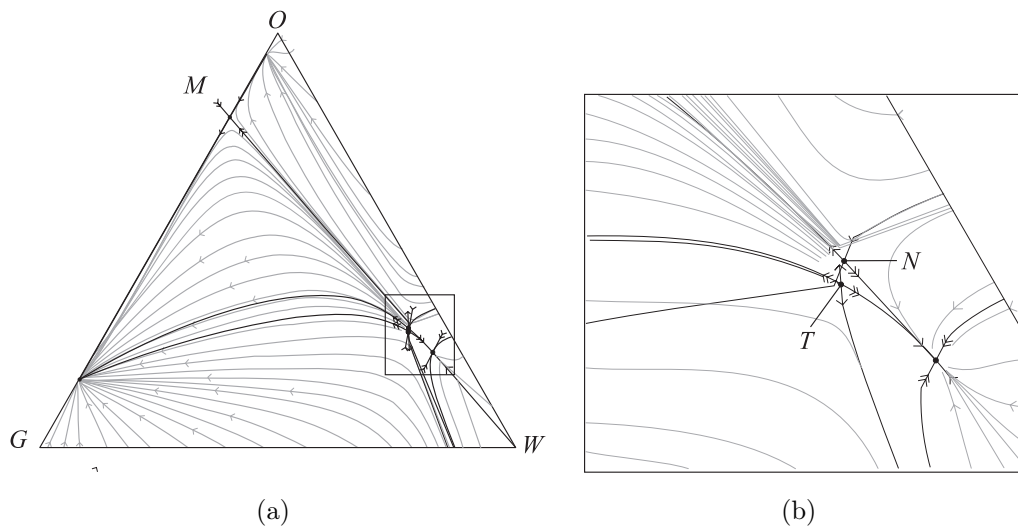


Figura 59: (a) Não admissibilidade entre T e M . (b) Ampliação da região retangular contida na Fig. 59(a).

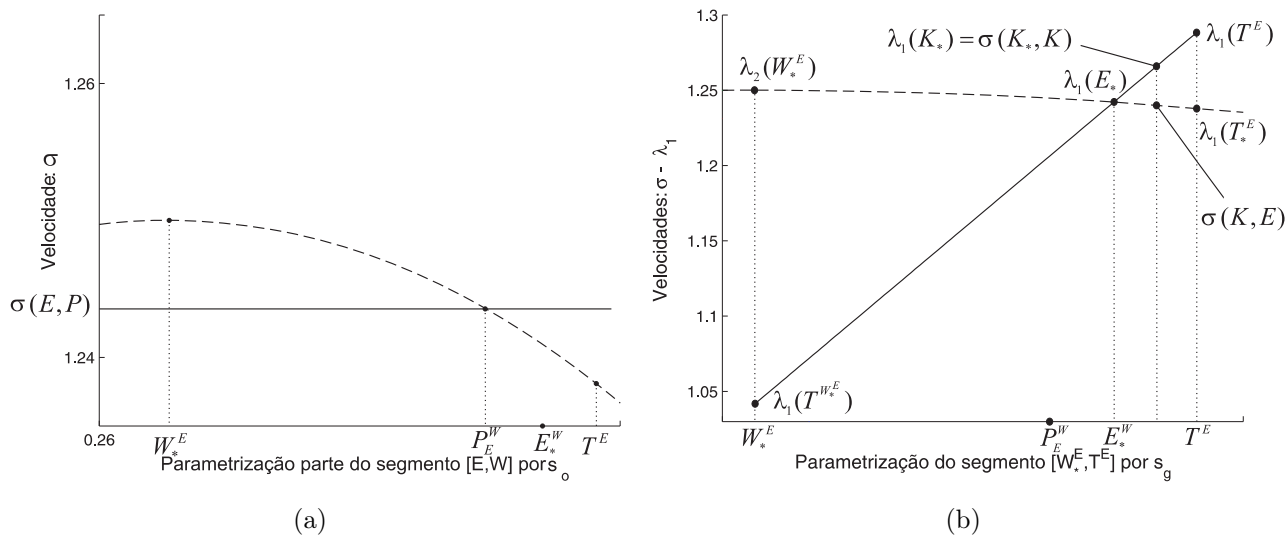


Figura 60: (a) Gráfico da velocidade de choque sobre parte do segmento $[E, W]$. (b) Gráficos da velocidade de choque $\sigma(\cdot, P)$ (tracejado) e da velocidade característica $\lambda_1(K)$ (contínuo), com $K \in [T_*^E, T^{W_*^E}]$.

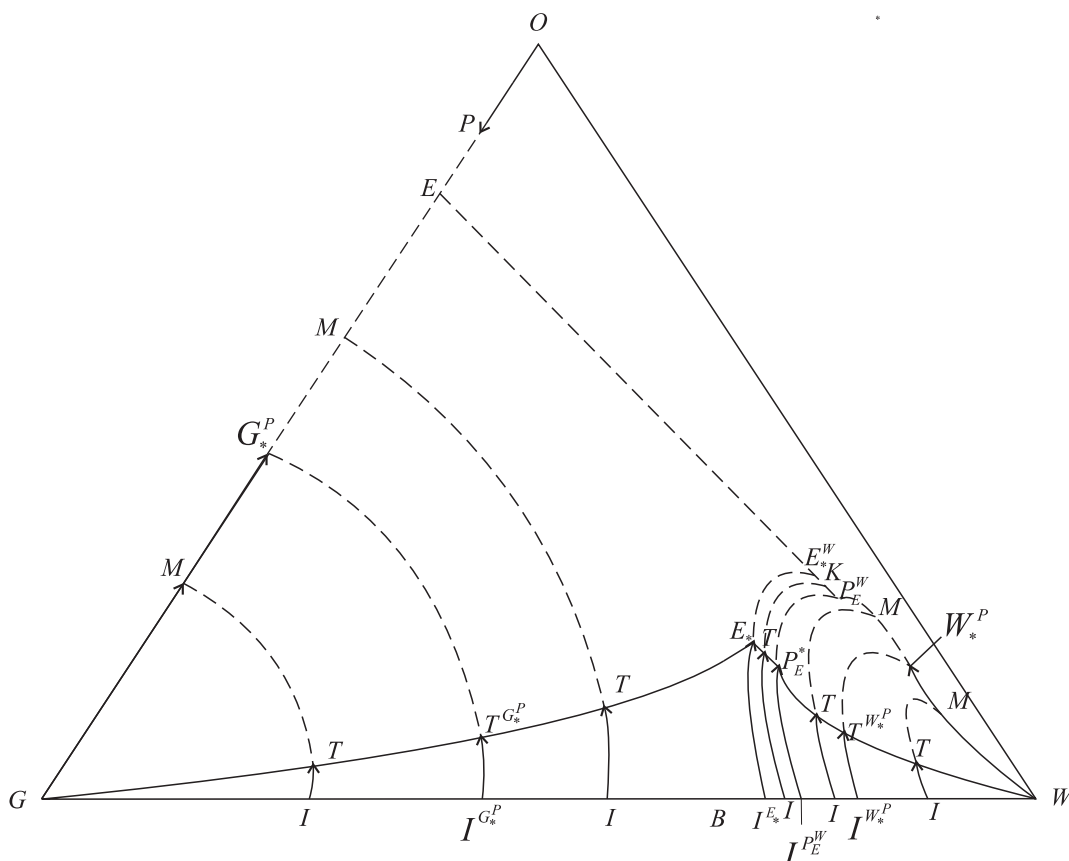


Figura 61: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P \in (P_1, P_2)$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

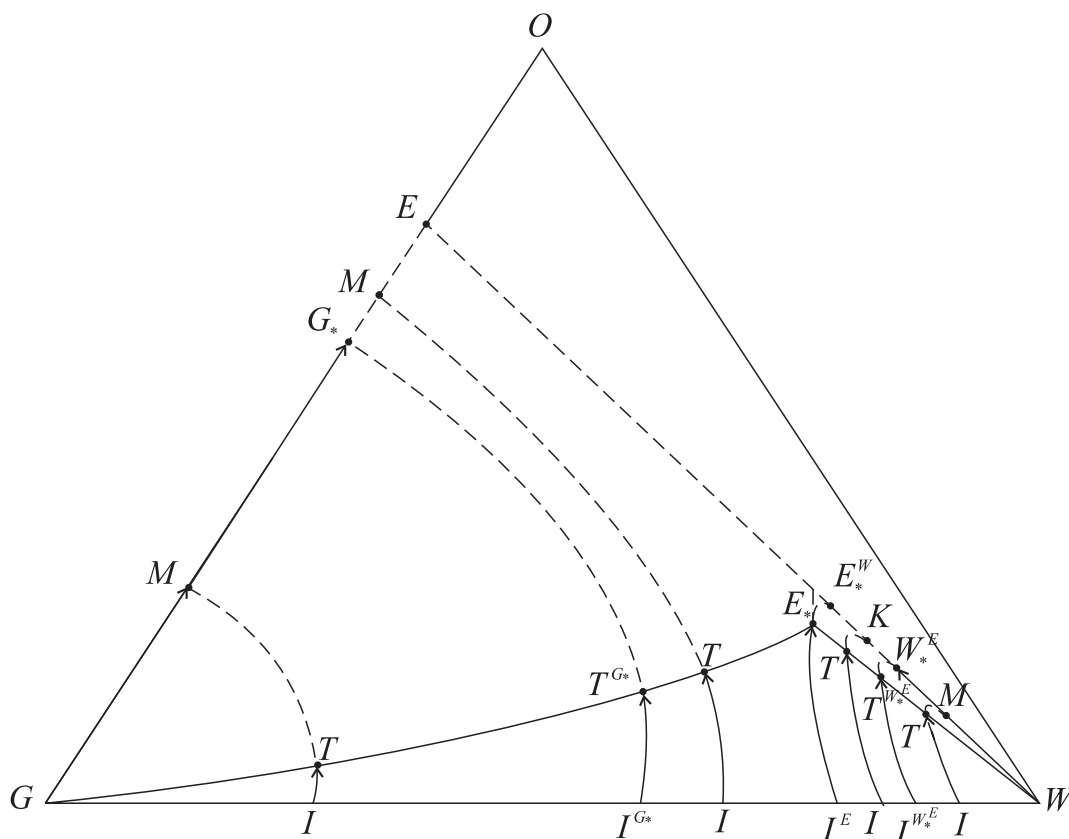


Figura 64: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P = E$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

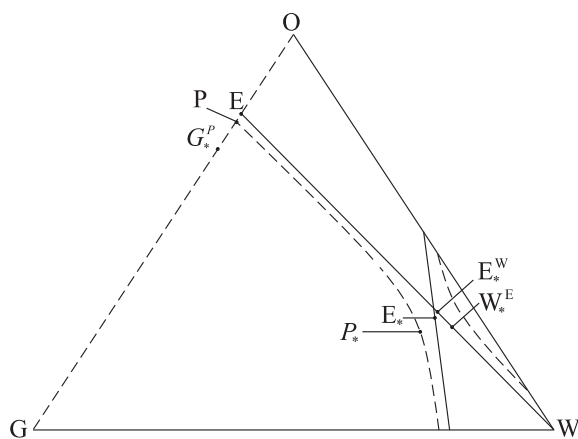


Figura 65: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado P no segmento (E, P_3) e curva de Hugoniot pelo estado E .

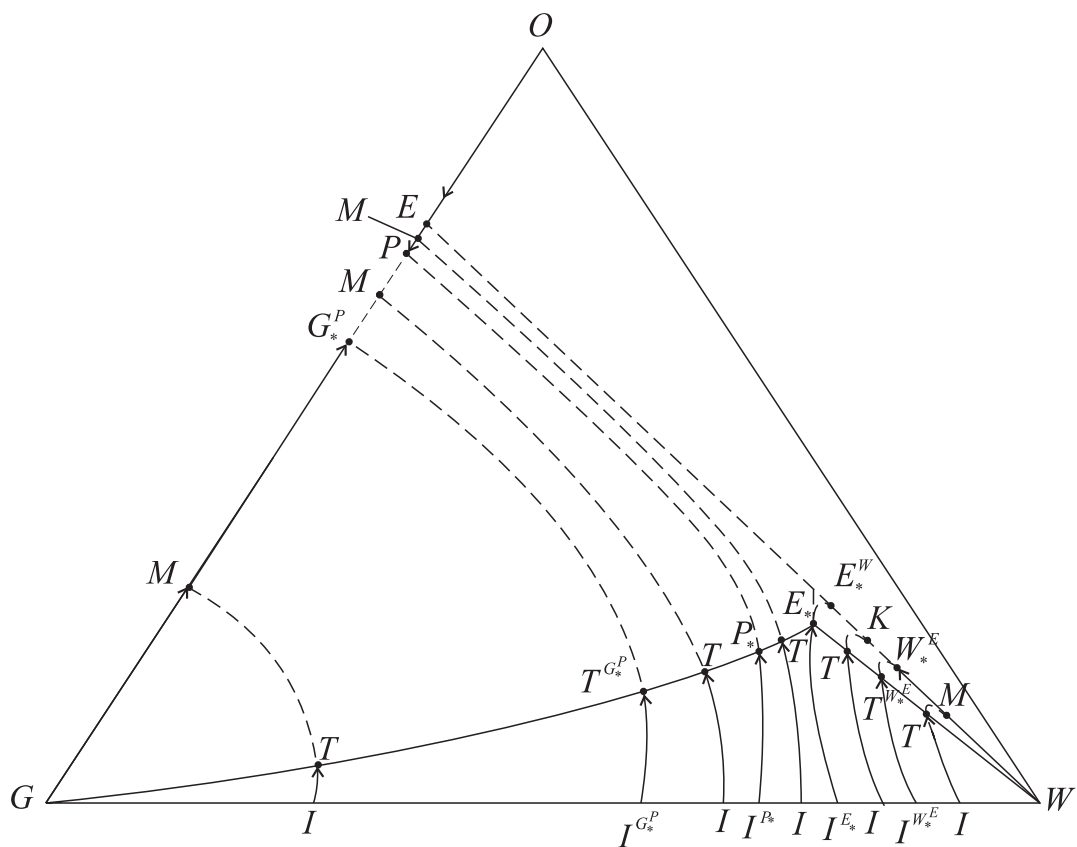


Figura 66: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P \in (E, P_3)$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

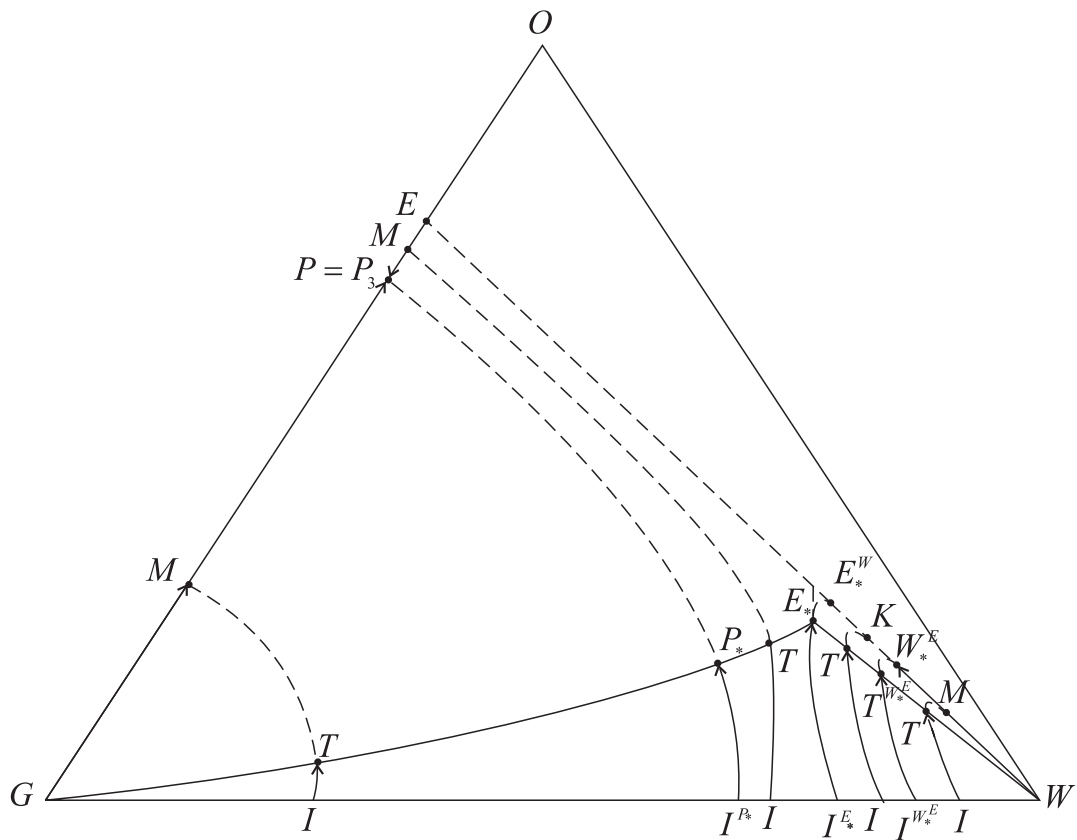


Figura 67: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P = P_3$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

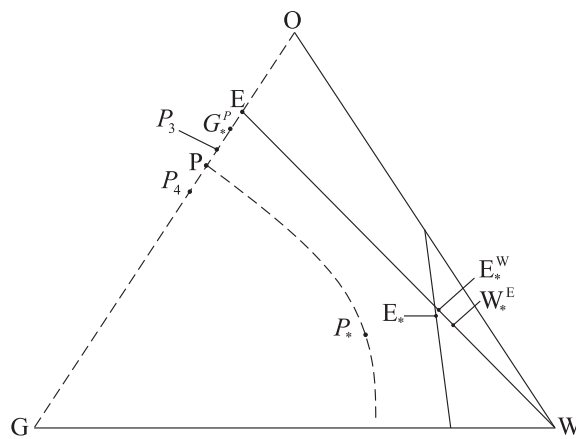


Figura 68: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado P no segmento (P_3, P_4) e curva de Hugoniot pelo estado E .

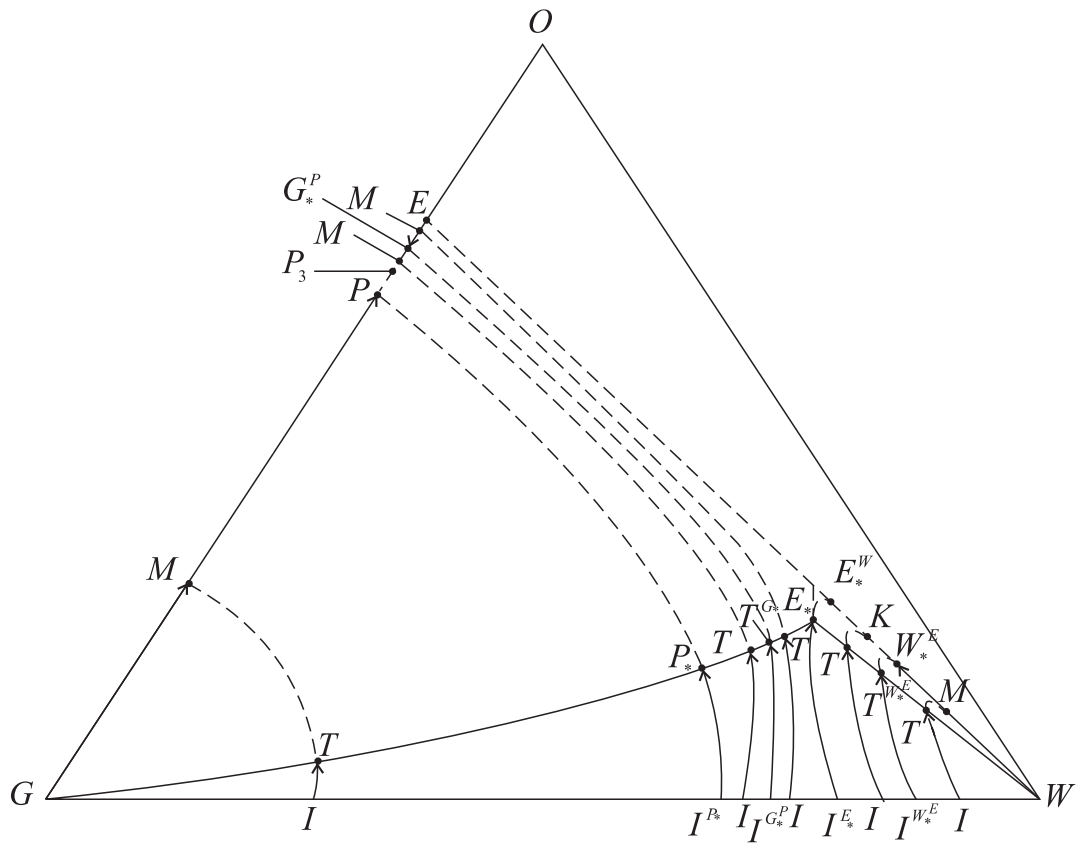


Figura 69: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P \in (P_3, P_4)$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

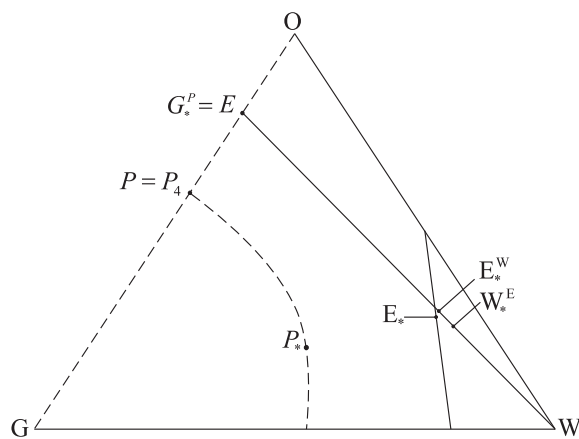


Figura 70: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado $P = P_4$ e curva de Hugoniot por E .

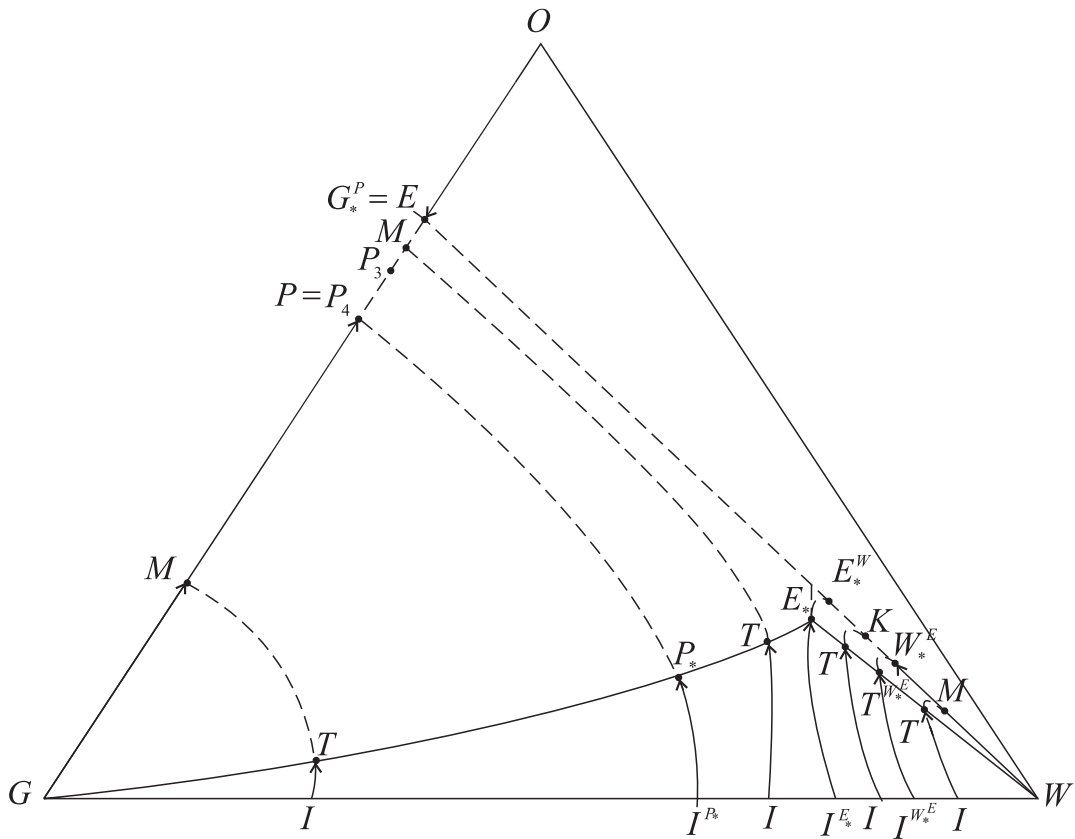


Figura 71: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P = P_4$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

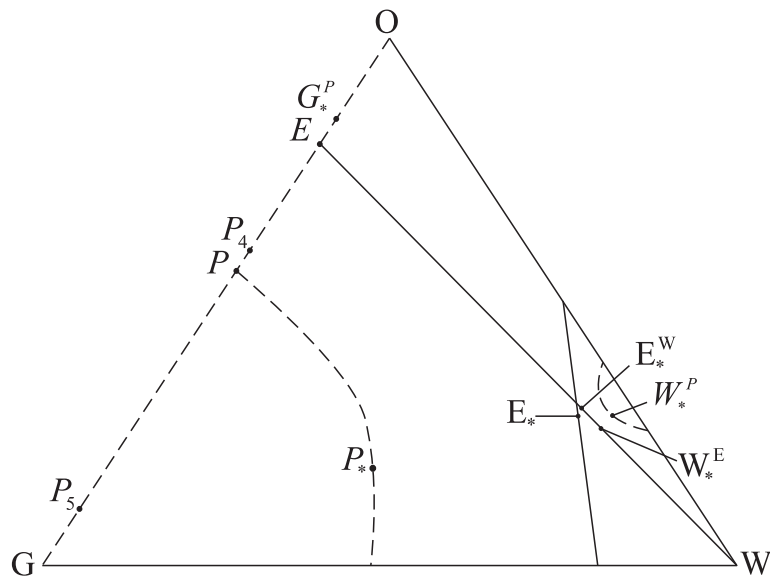


Figura 72: Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado P no segmento (P_4, P_5) e curva de Hugoniot pelo estado E .

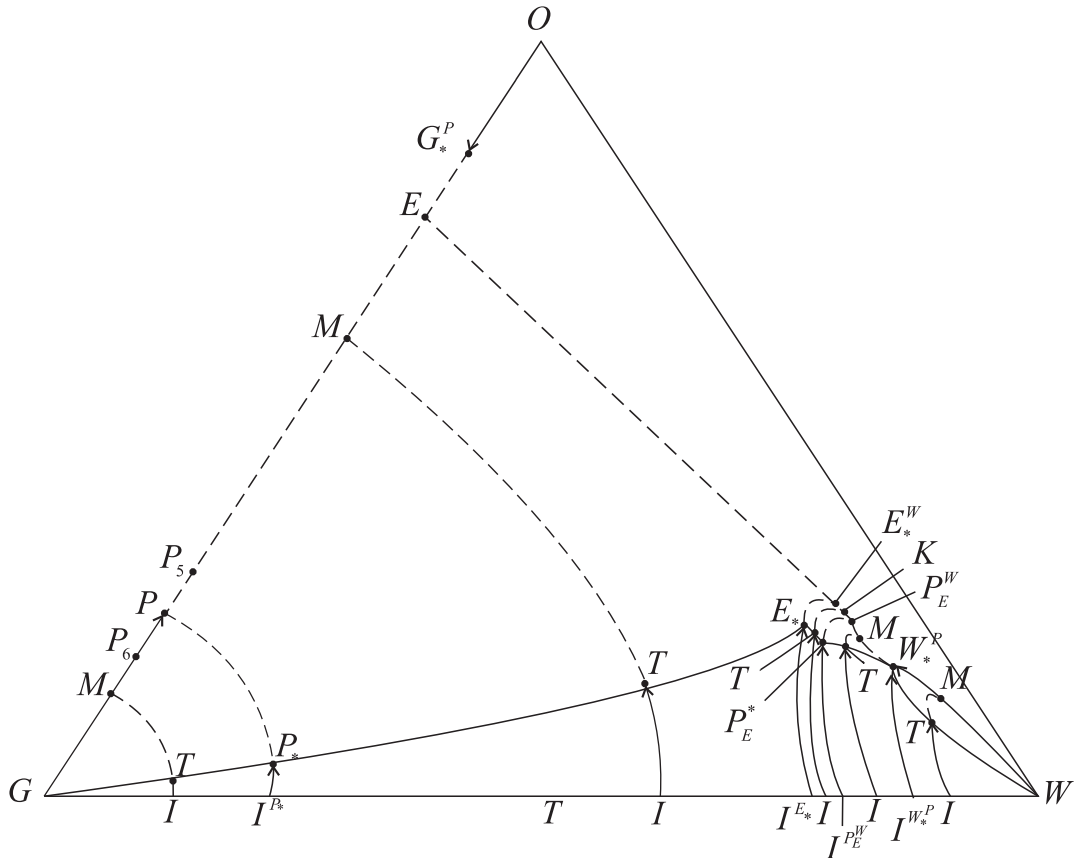


Figura 77: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P = P_6$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

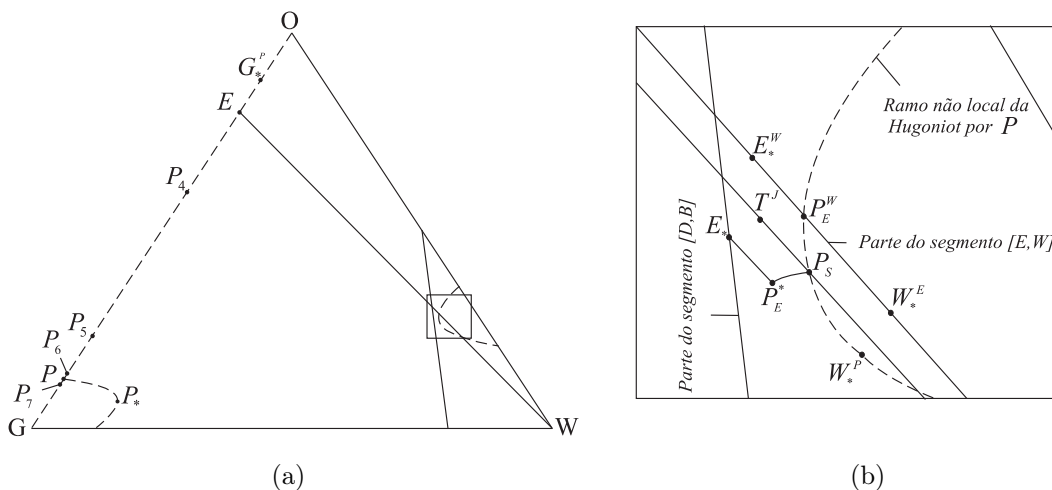


Figura 78: (a) Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado P no segmento (P_6, P_7) e curva de Hugoniot pelo estado E . (b) Ampliação da região retangular contida na Fig. 78(a), destacando o segmento $[E_*, P_E^*]$ de extensão-1 do segmento $[E_*^W, P_E^W]$, bem como o segmento $[P_E^*, P_S]$ de extensão-1 do segmento $[P_E^W, P_S]$. Além disso, a inflexão-1 e T^J .

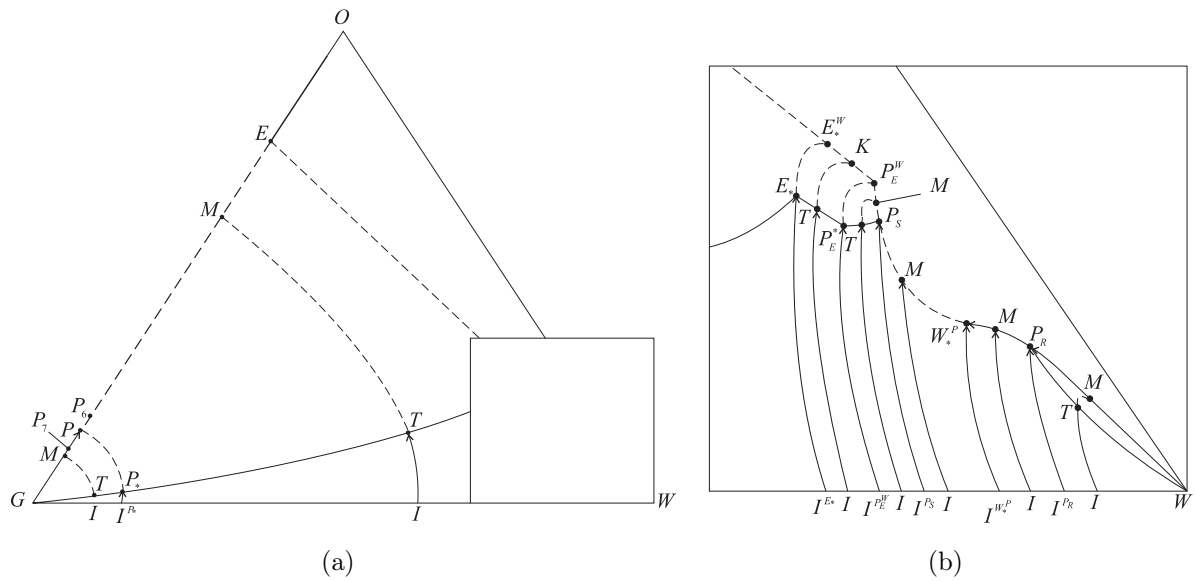


Figura 79: (a) Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P \in (P_6, P_7)$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$. (b) Ampliação da região retângular contida na Fig. 79(a).

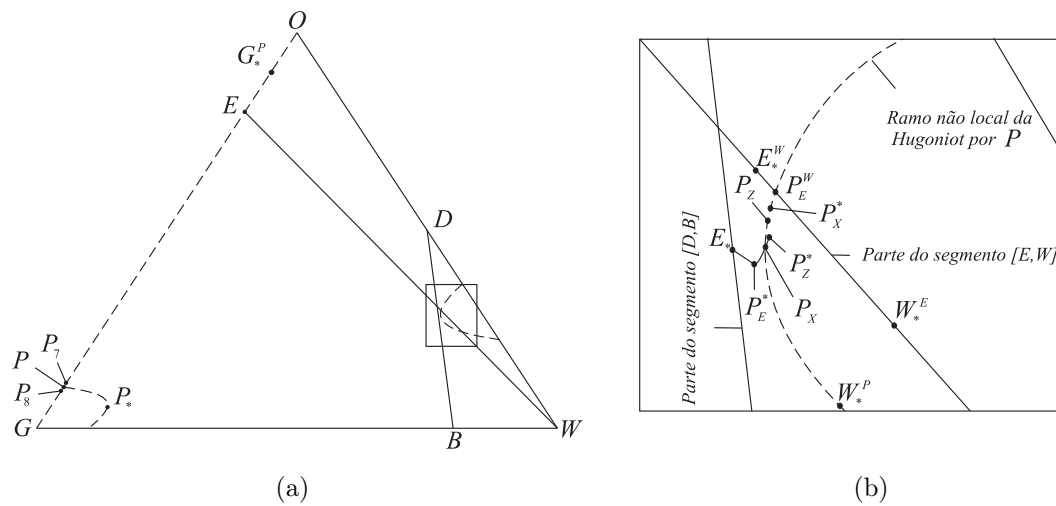


Figura 80: (a) Curva de Hugoniot (tracejada) pelo estado P no segmento (P_7, P_8) e curva de Hugoniot pelo estado E . (b) Ampliação da região retângular contida na Fig. 80(a), destacando o segmento $[E_*, P_E^*]$ de extensão-1 do segmento $[E_*^W, P_E^W]$, bem como o segmento $[P_E^*, P_Z^*]$ de extensão-1 do segmento $[P_E^W, P_Z^W]$.

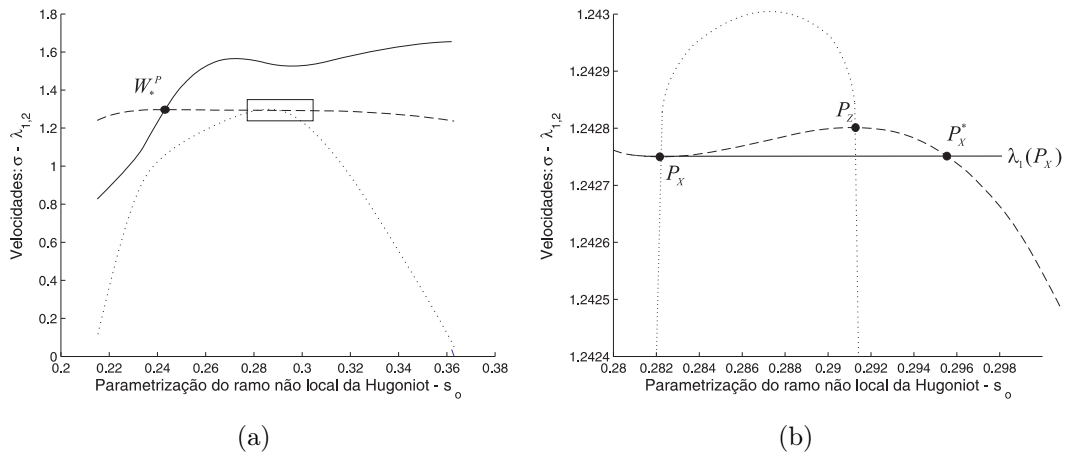


Figura 81: (a) Gráficos das velocidades sobre o ramo não local de $\mathcal{H}(P)$ mostrando a existência do estado W_*^P tal que $\sigma(W_*^P, P) = \lambda_2(W_*^P)$. (b) Ampliação da região retangular da Fig. 81(a) destacando a coincidência entre a reta de altura $\lambda_1(P_X)$ e a velocidade de choque $\sigma(P_X^*, P)$. Além dos estados P_X e P_X^* tais que $\sigma(P_X, P_X^*) = \lambda_1(P_X)$

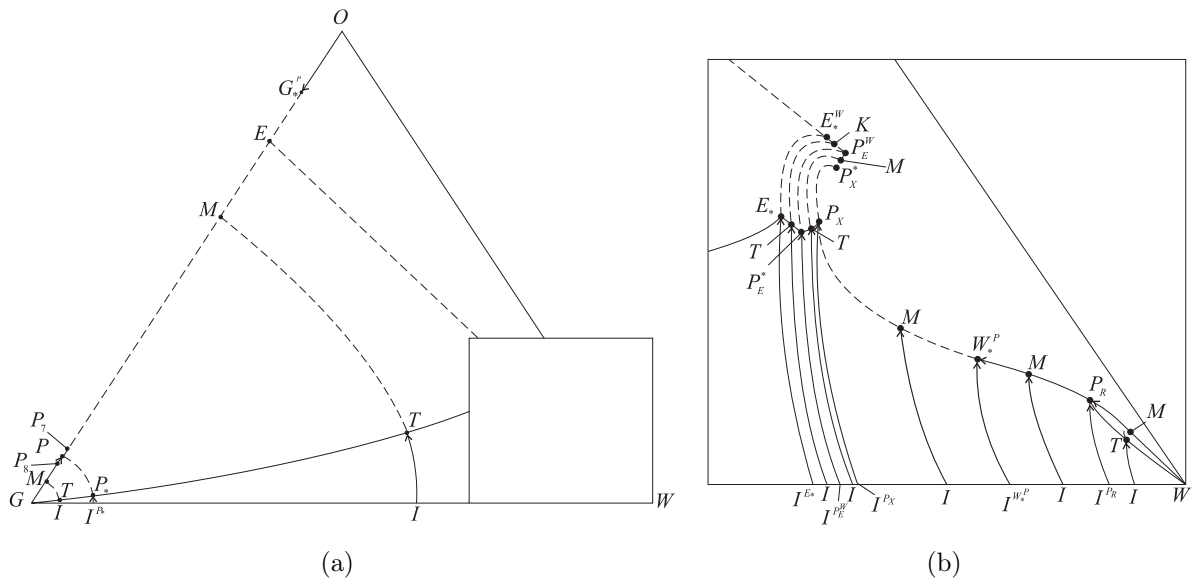


Figura 82: (a) Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P \in (P_7, P_8)$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$. (b) Ampliação da região retangular contida na Fig. 82(a).

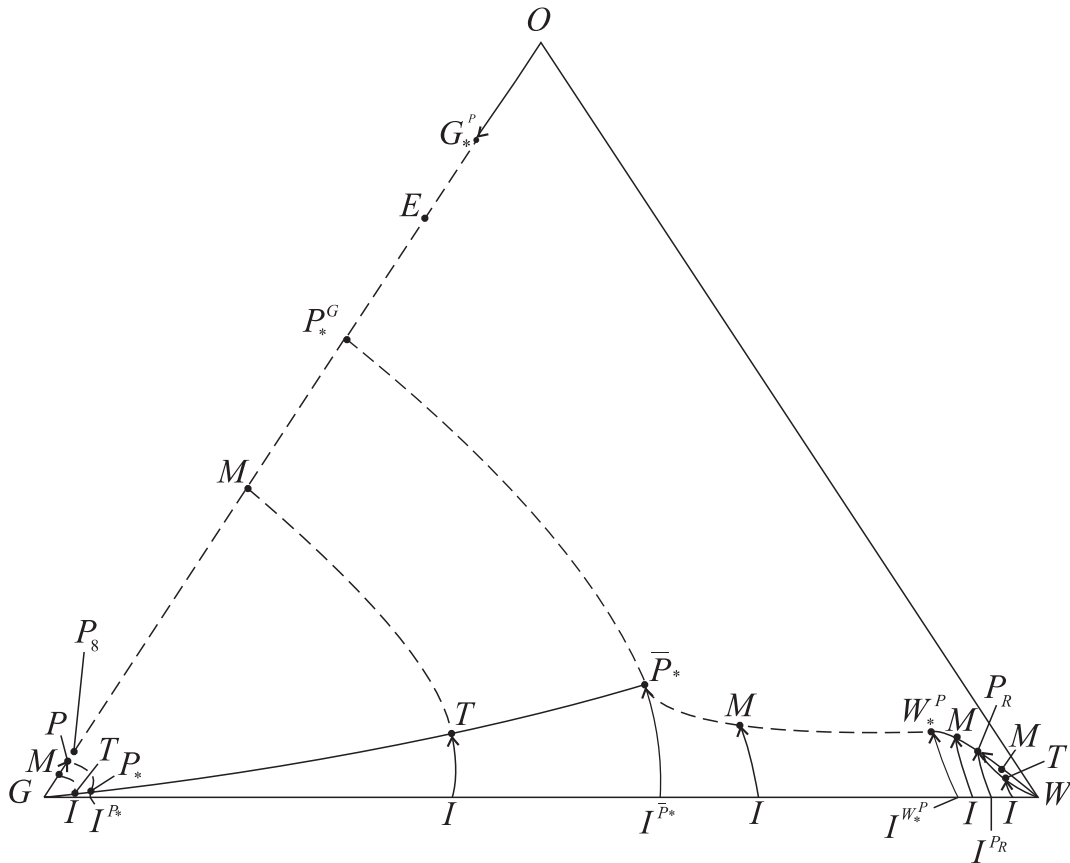


Figura 85: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para $P \in (P_8, G)$, de acordo com a localização do estado de injeção I ao longo do lado $[G, W]$.

Bibliografia

- [1] AZEVEDO, A.; SOUZA, A. J.; FURTADO, F.; MARCHESIN, D.; PLOHR B.; *The Solution by the Wave Curve Method of Three-Phase Flow in Virgin Reservoirs*, Transport in Porous Media, 2009, no prelo.
- [2] DAFERMOS, C.; *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, 2000.
- [3] GELFAND, I. M.; *Some Problems in Theory of Quasilinear Equations*, Amer. Math. Soc. Trans., Ser.2, n^o29, pp. 295-381, 1963.
- [4] GOMES, M. E. S.; *Problema de Riemann Singular para um modelo de Quarta Ordem em Escoamento Multifásico*, Tese de Doutorado, PUC-RIO, 1987.
- [5] GUEDES, M. J. F.; *Estrutura de ondas para um modelo de escoamento trifásico com viscosidades das fases assimétricas*, Dissertação de Mestrado, PPG-Mat/UFCG e PRH-25, 2009.
- [6] ISAACSON, E.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B.; TEMPLE, B.; *Multiphase Flow Models with Singular Riemann Problems*, Comput. Appl. Math., v.11, n^o2, pp. 147-166, 1992.
- [7] LAKE, L. W.; *Enhanced Oil Recovery*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NY, 1989.
- [8] LAX, P. D.; *Hyperbolic Systems os Conservation Laws II*, Comm. Pure Appl. Math., 10, pp. 537-556, 1957.
- [9] LIMA, E. L.; *Curso de Análise, Vol. II*, Projeto Euclides, 2008.
- [10] PEACEMAN, D. W.; *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Elsevier, 1977.

- [11] ROSA, A. J.; CARVALHO, R. S.; *Previsão de Comportamento de Reservatórios de Petróleo*, Editora Interciência, 2002.
- [12] SHEARER, M.; SCHAEFFER D.; *The Classification of 2×2 Systems of non-strictly Hyperbolic Conservation laws, with Application to Oil Recovery*, Comm. Pure Appl. Math., 40: 141-178, 1987.
- [13] SERRE, D.; *Systems of Conservation Laws*, Vols. 1 e 2, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [14] SMOLLER, J.; *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equation*, Springer-Verlag, 1994.
- [15] SOUZA, A. J.; *Stability of Singular Fundamental Solutions under Perturbations for Flow in Porous Media*, Comput. Appl. Math., v.11, n^o2, pp. 73-115, 1992.
- [16] SOUZA, A. J.; *Wave structure for a Non Strictly Hyperbolic System of Three Conservation Laws*, Mathematical and Computer Modelling, v.22, pp. 1-30, 1995.
- [17] WENDROFF, B.; *The Riemann Problem for Materials with Non Convex Equations of State II*, General Flow., J. Math. Appl., 38, pp. 640-685, 1972.