Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Polinômios centrais para álgebras T-primas

por

Sabrina Alves de Freitas [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

Polinômios centrais para álgebras T-primas

por

Sabrina Alves de Freitas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Profa. Dra. Aline Gomes da Silva Pinto - UnB

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves - UnB

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2010

Agradecimentos

↪ A Deus por ter me permitido chegar até aqui.

↪ Ao meu amado esposo, amigo, confidente e companheiro Isaac Soares de Freitas, por ser minha vida. Pela força e apoio. Por sempre estar ao meu lado quando estou feliz ou nos momentos de desespero. Por suportar minhas mudanças de humor e ainda brincar com isso. Por ser você.

↪ Aos meus pais, Nias e Sidênia, pelo amor incondicional, educação, suporte e por acreditarem em mim muito mais do que eu mesma. Devo tudo o que sou a vocês.

↪ Aos meus irmãos, Júnior e Rodolfo, pela alegria, amizade e amor. Por serem parte fundamental dessa maravilhosa família da qual tenho tanto orgulho em fazer parte.

↪ A minha amiga, a irmã que eu escolhi, minha quase eu, Valéria, por se mostrar tão presente em todos os momentos. Tenho certeza que estamos na mesma classe de equivalência, pois algumas coisas são inexplicáveis. Mesmo sendo tão presente na minha vida, tenho muitas saudades da época em que tínhamos tempo juntas sobrando.

- ↪ Ao meu orientador Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior, por ter me dado a honra de ter sido sua orientanda. Pela paciência, humildade e pelos ensinamentos que não têm preço. Nada deste trabalho teria sido feito se não fosse por você. É um profissinal invejável. Se algum dia eu chegar a ser um décimo do profissional que você é, estarei satisfeitíssima e extremamente feliz.

- ↪ Aos professores Aline Gomes da Silva Pinto e Dimas José Gonçalves por aceitarem participar da banca examinadora e pelas sugestões que só enriqueceram este trabalho.

- ↪ A todos os colegas de mestrado: Natan, Sheyla, Jéssyca, Josiluiz, Désio, Luciano, Jackson e, em particular, Geizane, Marciel e Leomaques(meus irmãos acadêmicos) e Eder. Conhecer, conviver e construir essas amizades foram de grande importância pra mim. Admiro-os demais e espero que essas amizades possam durar por muito tempo.

- ↪ A todos os professores do programa de matemática da UFCG, em especial Bráulio Maia, Júlio Corrêa, Henrique Fernandes, Daniel Cordeiro e Antônio Brandão. Aprendi muitíssimo com cada um vocês.

- ↪ A todos os funcionários do departamento de matemática da UFCG, por sempre fazerem o possível para ajudar todos os alunos, especialmente, nossa queridíssima Salete, Du (D. Severina), D. Argentina e David.

- ↪ Aos meus professores da Universidade Regional do Cariri - URCA que me incentivaram muito em relação ao mestrado, principalmente Mário de Assis, Luís Antônio, Ricardo Rodrigues, Humberto Soares, Liane Mendes, Carlos Alberto e Evandro Ferreira. Devo muito a cada um de vocês.

- ↪ A Dona Alice e Fátima, secretárias do departamento de matemática de URCA, pela alegria, amizade e por sempre atender a todos os alunos da melhor maneira possível.

- ↪ A Capes pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais Nias e Sidênia.

Ao meu esposo Isaac.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um estudo sobre polinômios centrais ordinários, $\mathbb{Z}_2$-graduados e com involução para algumas importantes álgebras na PI-teoria sobre corpos infinitos. Mais precisamente, descreveremos os polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para as álgebras $M_2(\mathbb{K})$ (matrizes 2×2 sobre um corpo $\mathbb{K}$), $M_{1,1}(E)$ (subálgebra de $M_2(E)$ que consite das matrizes cujas entradas da diagonal principal estão em E_0 e os da diagonal secundária estão em E_1, onde E é a álgebra de Grassmann com unidade de dimensão infinita e E_0 e E_1 suas componentes homogêneas de graus 0 e 1, respectivamente) e $E \otimes E$. Além disso descreveremos os polinômios centrais para E sobre um corpo infinito $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2 e finalmente os polinômios centrais com involução para $M_2(\mathbb{K})$, considerando as involuções transposta e simplética.

Palavras-chave: *Álgebras T-primas, T-espaços, Polinômios Centrais, Polinômios Centrais Graduados, Polinômios Centrais com Involução.*

Abstract

In this work we study ordinary, $\mathbb{Z}_2$-graded central polinomials and central polinomials with involution for some important algebras in the theory of algebras with polinomial identities, over infinite fields. Namely, we decribe $\mathbb{Z}_2$-graded central polinomials for the algebras $M_2(\mathbb{K})$ (2×2 matrices over a field $\mathbb{K}$), $M_{1,1}(E)$(subalgebra of $M_2(E)$ whose entries on the diagonal belong to E_0 and the off-diagonal entries lie in E_1, E is the infinite-dimensional unitary Grassmann algebra, E_0 is the center of E and E_1 is the anticommutative part of E) and $E \otimes E$.

Also, we describe the central polinomials for E over a field $\mathbb{K}$, with $char\mathbb{K} \neq 2$ and finally the central polinomial with involution for $M_2(\mathbb{K})$, considering the transpose and the sympletic involutions

Keywords: *T-Prime Algebras, T-spaces, Central Polinomials, Graded Central Polinomials, Central Polinomials with Involution.*

Conteúdo

Introdução

As álgebras têm grande importância na teoria de anéis, dentre elas destacamos as álgebras com identidades polinomiais (PI-álgebras). Uma identidade polinomial de uma álgebra A é um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ em variáveis não comutativas que se anula quando avaliado em quaisquer elementos de A. A é dita uma PI-álgebra quando existe um polinômio não nulo nestas condições. Podemos citar como exemplo de PI-álgebras as álgebras comutativas, as de dimensão finita e as nilpotentes. Uma vez que as identidades polinomiais dizem muito sobre a estrutura de uma álgebra, seu estudo passa a ser de grande relevância.

A teoria das álgebras com identidades polinomiais ou PI-teoria teve início com trabalhos de matemáticos como Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Dubnov e Ivanov (podemos citar como exemplos [19], [20], [30], [13]), que tratavam da estrutura de anéis (ou álgebras) que satisfazem uma identidade polinomial, e começou a se desenvolver mais intensamente por volta de 1950 quando foi provado o Teorema de Amitsur-Levitzki [11], o qual afirma que a álgebra $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ satisfaz a identidade "standard" de grau $2n$.

Uma das questões centrais na PI-teoria está relacionada à descrição das identidades polinomiais de uma álgebra, isto é, a determinação de um conjunto gerador para o T-ideal (ideal das identidades) desta álgebra. Em 1950, Specht levantou o seguinte questionamento: "Toda álgebra associativa possui uma base finita para suas identidades polinomiais?". Este questionamento ficou conhecido como Problema de Specht. Em 1987, Kemer, em seu importante trabalho ([22], [23]) sobre a estrutura dos T-ideiais em característica zero, deu uma resposta afirmativa para este problema.

O trabalho de Kemer também trata das importantes álgebras T-primas, que são álgebras cujos T-ideais são T-primos. Um T-ideal I é dito T-primo se a inclusão $I_1 I_2 \subseteq I$ implicar em $I_1 \subseteq I$ ou $I_2 \subseteq I$, onde I_1 e I_2 são T-ideais quaisquer. Kemer mostra em seu trabalho que os únicos T-ideais T-primos não-triviais em característica zero são os T-ideais das álgebras $M_n(\mathbb{K})$,$M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$, onde E (definida como sendo a álgebra com base $\{1, e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k,\ k \geq 1\}$ e cujo produto é definido pelas relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer $i,\ j \in \mathbb{N}$) é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e $M_{a,b}(E)$ é a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ que consiste das matrizes que têm na diagonal principal um bloco $a \times a$ e outro $b \times b$ com entradas em E_0, o centro de E, e na diagonal secundária blocos com entradas em E_1, a parte anticomutativa de E. A partir do trabalho de Kemer foi mostrado que em característica zero valem as seguintes igualdades $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E))$, $T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(E))$ e $T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$, onde $T(A)$ denota o T-ideal das identidades da álgebra A. Este resultado é conhecido como o Teorema do Produto Tensorial de Kemer e do qual segue que o produto tensorial $A \otimes B$ de álgebras T-primas é PI-equivalente a uma álgebra T-prima.

Ainda se conhece pouco sobre as descrições das identidades das álgebras T-primas. As identidades da álgebra de Grassmann E foram descritas em característica zero por Latyshev [27] e por Krakowski e Regev [26] (veja também o artigo [15] para as identidades de E sobre corpos infinitos de característica diferente de 2). A descrição das identidades de $M_n(\mathbb{K})$ é conhecida apenas no caso $n = 2$ e foi dada por Razmyslov [33] e Drensky [11], em característica zero, e por Koshlukov [24], para corpos infinitos de característica diferente de 2. Em característica zero, geradores das identidades da álgebra $E \otimes E$, e consequentemente da álgebra $(M_{1,1}(E))$, foram determinados por Popov [32]. É importante ressaltar que em característica positiva ainda não se tem descrição para as identidades destas álgebras e nem é válida a igualdade $T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$.

Uma das maiores ferramentas no trabalho de Kemer foi o uso de identidades graduadas. Este tipo de identidade é uma generalização das identidades ordinárias e tem uma estreita relação com elas. Dessa forma, as identidades graduadas têm grande importância na PI-teoria e por essa razão se tornaram objetos de estudos independentes.

Por ser um trabalho mais fácil que a descrição das identidades ordinárias, a descrição das identidades graduadas das álgebras T-primas vai mais além. As álgebras E, $M_2(\mathbb{K})$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ possuem $\mathbb{Z}_2$-graduações naturais e os geradores de suas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas já são conhecidos. Temos o seguinte resultado:

Teorema: [10, 25] Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito tal que $char\mathbb{K} = p > 2$. Então:

1) $T_2(M_2(\mathbb{K}))$ é gerado por $x_1x_2 - x_2x_1$ e $y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1$;

2) $T_2(M_{1,1}(E))$ é gerado por $x_1x_2 - x_2x_1$ e $y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1$;

3) $T_2(E \otimes E)$ é gerado por $x_1x_2 - x_2x_1$, $y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1$ e $x_1^py_1 - y_1x_1^p$;

onde as x_i's são variáveis de grau zero e as y_j's são variáveis de grau um. No item 3 ocorre a omissão da última identidade quando $char\mathbb{K} = 0$.

No caso das álgebras $M_n(\mathbb{K})$, ao contrário das identidades ordinárias, as graduadas são bem mais conhecidas. $M_n(\mathbb{K})$ possui graduações naturais pelos grupos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$ e suas identidades $\mathbb{Z}$-graduadas e $\mathbb{Z}_n$-graduadas foram descritas para n qualquer por Vasilovsky [37, 38], em característica zero, e por Azevedo [3, 4], para corpos infinitos.

As identidades com involução também aparecem como um importante tipo de generalização das identidades polinomiais ordinárias. Uma involução (do primeiro tipo) em uma álgebra A é um automorfismo de ordem 2 do espaço vetorial A que satisfaz $(ab)^* = b^*a^*$ para quaisquer $a, b \in A$. O problema da descrição das identidades com involução das álgebras T-primas ainda está longe de uma solução, tendo sido resolvido apenas para a álgebra E, por Anisimov [2] em característica zero, e para a álgebra $M_2(\mathbb{K})$ por Levchenko, para $char\mathbb{K} = 0$ [28] e para $\mathbb{K}$ finito [29], e por Colombo e Koshlukov [9], para $\mathbb{K}$ infinito com $char\mathbb{K} \neq 2$. Os resultado centrais de [9] estão resumidos no seguine teorema:

Teorema: Considere a álgebra $M_2(\mathbb{K})$ e as involuções transposta t e simplética s. As seguintes afirmações são válidas:

1) O $*$-ideal $T(M_2(\mathbb{K}), t)$ é gerado pelos polinômios $[y_1y_2, x_1]$, $[y_1, y_2]$, $[y_1x_1y_2, x_2] - y_1y_2[x_2, x_1]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_1, x_3][x_2, x_4] + [x_1, x_4][x_2, x_3]$;

2) O $*$-ideal $T(M_2(\mathbb{K}), s)$ é gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $[x_1, y_1]$;

onde os x_i's são elementos simétricos os y_j's são elementos anti-seimétrios.

Conforme será visto no capítulo 04, em $(M_2(\mathbb{K}))$ é suficiente considerar apenas as involuções transposta e simplética.

Um outro conceito que merece destaque na PI-teoria por sua estreita relação com o de identidade polinomial é o de polinômio central. Um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é dito central para uma álgebra A se resulta em elemento do centro de A quando avaliado em quaisquer elementos desta álgebra. Veja que as identidades polinomiais aparecem como os exemplos mais simples, e são chamadas de polinômios centrais triviais. Em 1956, Kaplansky [21] apresentou uma lista de problemas em aberto que motivaram muitos pesquisadores nas décadas seguintes. Um destes problemas era sobre a existência de polinômio central não trivial para a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{K})$, com $n > 2$ (no caso $n = 2$ o polinômio de Hall $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_3, x_4][x_1, x_2]$ já era conhecido). A solução para este problema foi dada em 1972-1973 independentemente por Formanek [14] e Razmyslov [34] (veja também [35]), que provaram a existência de tais polinômios por construção direta. Mais tarde, outros polinômios centrais para $M_n(\mathbb{K})$ foram construídos. Belov [6] provou que toda variedade T-prima de álgebras possui um polinômio central.

Assim como na descrição de identidades, a descrição dos polinômios centrais de uma álgebra é uma questão de grande importância na PI-Teoria, embora ainda se conheça pouco neste sentido. No caso das álgebras $M_n(\mathbb{K})$, geradores dos polinômios centrais são conhecidos apenas no caso $n = 2$, e foram determinados por Okhitin [31], quando char $\mathbb{K} = 0$, e por Colombo e Koshlukov [8], quando $\mathbb{K}$ é infinito e de característica diferente de 2. No caso da álgebra de Grassmann, um estudo dos polinômios centrais é feita em [1] e apresentado no terceiro capítulo deste trabalho.

Uma generalização natural do conceito de T-ideal é o de T-espaço. Um T-espaço na álgebra associativa livre é um subespaço que é fechado sob os endomorfismos dessa álgebra. Os T-espaços estão sendo estudados por vários algebristas, pois providenciam um meio de estudar as propriedades dos T-ideais através de métodos provenientes da combinatória algébrica. Diferentemente dos T-ideais, onde todo T-ideal é o conjunto de identidades polinomiais e todo conjunto de identidades polinomiais é um T-ideal, o conjunto dos polinômios centrais de uma álgebra é um T-espaço, porém nem todo T-espaço é um espaço de polinômios centrais de alguma álgebra.

Também podemos generalizar os conceitos de identidades polinomiais graduadas e com involução para polinômios centrais graduados e com involução. No estudo destes últimos aparecem os conceitos de T-espaço graduado e T-espaço com involução.

A importância das álgebras graduadas, das álgebras com involução e do conceito de polinômio central, e o fato de se saber pouco sobre as descrições dos polinômios centrais de álgebras importantes são motivações para o estudo de polinômios centrais graduados e com involução. O presente trabalho tem por objetivo este estudo para álgebras sobre corpos infinitos e está dividido em quatro capítulos. No primeiro são apresentados conceitos e resultados básicos necessários no seu desenvolvimento. No segundo são apresentadas as descrições dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para as álgebras $M_2(\mathbb{K})$, $M_{1,1}(E)$, onde E é a álgebra de Grassmann, e $E \otimes E$. Essas descrições são feitas em [7].

No terceiro capítulo é feito um estudo sobre o T-espaço $C(E)$ dos polinômios centrais da álgebra E para os casos em que o corpo em questão tem característica zero e $p > 0$, com $p \neq 2$. Neste capítulo é feita a descrição de geradores para o T-espaço $C(E)$ nos dois caso descritos acima sendo que para o caso da característica ser $p > 0$ com $p \neq 2$ o T-espaço $C(E)$ não é finitamente gerado (ver [1]). Esses resultados podem ser resumidos no seguinte Teorema:

Teorema: Sejam E a álgebra de Grassamann unitária de dimensão infitita e C(E) o T-espaço dos polinômios centrais para E.

1) Se $char\mathbb{K} = p > 2$, $C(E)$ é não é finitamente gerado, porém todo T-espaço que contém propriamente $C(E)$ é finitamente gerado;

2) Se $char\mathbb{K} = 0$, $C(E)$ é gerado por 1 e pelos polinômios $x_1\,[x_2, x_3, x_4]$ e $[x_1, x_2]$.

No quarto capítulo é feito primeiramente um estudo sobre álgebras com involução, no qual são apresentados os conceitos de identidade e polinômios central com involução e também a classificação das involuções em álgebras centrais simples feitos em [7]. Depois, são apresentadas as descrições dos polinômios centrais com involução para a álgebra $M_2(\mathbb{K})$, considerando as involuções transposta e simplética.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente será feita uma breve explanação sobre álgebra, objeto de estudo neste trabalho. No texto, $\mathbb{K}$ denotará um corpo e, a menos de alguma menção em contrário, todas as álgebras e espaços vetoriais serão definidos sobre $\mathbb{K}$.

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1 *Uma $\mathbb{K}$-álgebra é um par $(A,*)$ onde A é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e "$*$" é uma operação em A que é bilinear, ou seja, $* : A \times A \rightarrow A$ satisfaz:*

i) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

ii) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$;

para quaisquer a, b, $c \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Na definição acima "$*$"é chamada de produto ou multiplicação. Para simplificar a notação, a $\mathbb{K}$-álgebra $(A,*)$ será denotada por A, ficando o produto subentendido, e $a * b$, para $a, b \in A$, será denotado por ab. Também, por simplicidade, ao invés de $\mathbb{K}$-álgebra, será usada a expressão álgebra. Um subconjunto β será dito uma base para a álgebra A, se β for uma base de A como espaço vetorial e a dimensão da álgebra A será definida como sendo a dimensão de A como espaço vetorial.

Definição 1.1.2 *A álgebra A será dita:*

a) ***Associativa*** *se o produto de A for associativo, ou seja, se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a,b,c \in A$;*

b) ***Comutativa*** *se o produto de A for comutativo, ou seja, se $ab = ba$ para quaisquer $a,b \in A$;*

c) ***Unitária*** *(ou com unidade) se o produto de A possuir elemento neutro, ou seja, se existir $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$.*

d) ***Álgebra de Lie*** *se $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c+(bc)a+(ca)b = 0$ (identidade de Jacobi) para quaisquer a, b, $c \in A$*

De agora em diante, a menos de menção ao contrário, todas as álgebras serão associativas e com unidade. Em toda álgebra A sendo 1 sua unidade e $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda 1$ será identificado naturalmente com λ e $\{\lambda 1 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ com $\mathbb{K}$.

Exemplo 1.1.3 *Para $n \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial $M_n(\mathbb{K})$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade de dimensão n^2. Destacamos, nesta álgebra, as matrizes E_{ij}, com $1 \leq i$, $j \leq n$ cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. É fácil ver que elas formam uma base para $M_n(\mathbb{K})$.*

Mais geralmente, se A é uma álgebra, considere o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A. O produto de matrizes em $M_n(A)$ é análogo ao produto de matrizes com entradas em $\mathbb{K}$. Temos então uma estrutura de álgebra em $M_n(A)$.

Exemplo 1.1.4 *Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1,e_2,e_3,\ldots\}$. A* ***álgebra de Grassmann*** *(ou álgebra exterior) de V, denotada por $E(V)$ (ou simplesmente por E) é definida como sendo a álgebra com base $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_k,\ k \geq 1\}$ e cujo produto é definido pelas relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer i, $j \in \mathbb{N}$.*

Destacamos em E os subespaços vetoriais E_0 e E_1, gerados pelos conjuntos

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m} \mid m \text{ par}\} \text{ e } \{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\},$$

respectivamente. Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. De $e_ie_j = -e_je_i$ segue que

$$(e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_k})(e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m})$$

para quaisquer m, $k \in \mathbb{N}$, e assim podemos concluir que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer b, $c \in E_1$. Observa-se que se char$\mathbb{K} = 2$, então E é uma álgebra comutativa.

Tomando agora E' como sendo a álgebra com base

$$\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k,\ k \geq 1\},$$

temos que E' não tem unidade e é chamada de álgebra exterior sem unidade.

Exemplo 1.1.5 *Seja A uma álgebra e considere o espaço vetorial*

$$\mathbb{K} \oplus A = \{(\lambda, a) \mid \lambda \in \mathbb{K},\ a \in A\}.$$

Definimos em $\mathbb{K} \oplus A$ o produto $(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2)$. Temos que $\mathbb{K} \oplus A$, munido deste produto, é uma álgebra associativa com unidade $e = (1, 0)$. Esta construção é chamada de adjunção formal da unidade a A.

Se A é uma álgebra associativa e a, $b \in A$, definimos o *comutador* $[a,b] = ab - ba$ e $a \circ b = \dfrac{1}{2}(ab + ba)$, para $char\mathbb{K} \neq 2$. Mais geralmente, definimos o *comutador de comprimento n* como sendo $[a_1, ..., a_{n-1}, a_n] = [[a_1, ..., a_{n-1}], a_n]$ onde $a_i \in A$.

Observe que

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \tag{1.1}$$

para quaisquer a, b, $c \in A$.

Se $a \in A$ e $T_a : A \to A$ é tal que $T_a(x) = [x, a]$, então, pela igualdade (1.1) temos que T_a é uma derivação, ou seja, T_a é um operador linear de A e $T_a(bc) = (T_a(b))c + b(T_a(c))$, para quaisquer $b, c \in A$. Por indução sobre n pode-se mostrar que

$$[a_1a_2...a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1...a_{i-1}[a_i, c]a_{i+1}...a_n. \tag{1.2}$$

Se A é uma álgebra, V, W subespaços vetoriais de A, definimos o produto VW como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{xy \mid x \in V,\ y \in W\}$.

Definição 1.1.6 *Um subespaço vetorial B de uma álgebra A será denomidado **subálgebra** de A se $BB \subseteq B$, ou seja, se B for fechado com relação ao produto de A, e $1 \in B$. Um subespaço vetorial I de A será denomidado **ideal** de A se $AI \subseteq I$ e $IA \subseteq I$, ou seja, se $ax, xa \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.*

Exemplo 1.1.7 *Considere a álgebra exterior E. Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos o subespaço E_n de E gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n\}$. Temos que E_n é uma subálgebra de E de dimensão 2^n e é a algebra exterior do espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.*

Exemplo 1.1.8 *Sendo A uma álgebra, o conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \ \textit{para todo } x \in A\}$$

é uma importante subálgebra de A, chamada de centro de A. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $Z(M_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$(matrizes escalares). Em relação à álgebra de Grassmann, pelo Exemplo 1.1.4 podemos concluir que $Z(E) = E_0$ (char$\mathbb{K} \neq 2$).

Exemplo 1.1.9 *Sejam A uma álgebra e $S \subseteq A$. Consideremos o subespaço B_S de A gerado pelo conjunto $\{1, s_1 s_2 ... s_k \mid k \in \mathbb{N}, \ s_i \in S\}$. Temos que B_S é multiplicativamente fechado e que $1 \in B_S$. Logo, B_S é uma subálgebra de A, chamada de subálgebra gerada por S. Observe que toda subálgebra de A que contém S deve conter B_S e assim B_S é a menor subálgebra de A que contém S.*

Definição 1.1.10 *Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \to B$ é dita um homomorfismo de álgebras se $\varphi(1_A) = 1_B$ e $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer x, $y \in A$. Dizemos que φ é um **mergulho** (ou monomorfismo) se φ é um homomorfismo injetivo, **isomorfismo** se φ é um homomorfismo bijetivo, **endomorfismo** se φ é um homomorfismo e $A = B$ e **automorfismo** se φ é um endomorfismo bijetivo.*

Denotamos por $EndA$ e $AutA$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra A. Quando existe um isomorfismo $\psi : A \to B$ dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras, **o núcleo de** φ, definido como sendo o conjunto $Ker\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ é um ideal de A, e **a imagem de** φ, definida como sendo o conjunto $Im\varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$, é uma subálgebra de B.

Sendo A uma álgebra e I um ideal de A, consideremos no espaço vetorial quociente A/I, o produto $(a+I)(b+I) = ab+I$ para a, $b \in A$. Este produto está bem definido, pois não depende da escolha dos representantes das classes laterais e torna A/I uma álgebra, conhecida por álgebra quociente de A por I. Denotaremos $a + I$ por $\overline{a}$.

Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras. A aplicação $\pi : A \to A/I$ definida por $\pi(a) = \overline{a}$ é um homomorfismo chamado de **projeção canônica**. Se I é um ideal de A e $I \subseteq Ker\varphi$, então a aplicação $\overline{\varphi} : A/I \to B$, tal que $\overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a)$ é bem definida e é um homomorfismo de álgebras. Se $I = Ker\varphi$, então $\overline{\varphi}$ é injetora e portanto $A/Ker\varphi \simeq Im\overline{\varphi} = Im\varphi$.

Definição 1.1.11 *Seja A uma álgebra. Dizemos que A é **simples** se $\{0\}$ e A são os seus únicos ideais. A será dita central simples se A é simples e $Z(A) = \mathbb{K}$.*

Dizemos que um elemento $r \in A$ é invertível se existe $r^{-1} \in A$ tal que $rr^{-1} = r^{-1}r = 1$. Vamos denotar por $U(A)$ o conjunto dos elementos invertíveis de A. Se $r \in U(A)$, a aplicação $\zeta_r : A \to A$, definida por $\zeta_r(x) = r^{-1}xr$, é um automorfismo de A, chamado de **automorfismo interno** determinado por r.

Proposição 1.1.12 *Se A é uma álgebra central simples de dimensão finita, então todo automorfismo de A é interno.*

Demonstração: Ver [18]. ∎

1.2 Identidades polinomiais

Seja $X = \{x_1, x_2, ...\}$ um conjunto não vazio e enumerável. Chamemos seus elementos de *variáveis*. Uma *palavra* em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. Denotemos por 1 a palavra vazia. Duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}$ serão ditas iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, ...,$i_n = j_m$. Como $x_ix_j \neq x_jx_i$ para $i \neq j$, temos que as variáveis de X são não comutáveis.

Consideremos $\mathbb{K}\langle X \rangle$ o espaço vetorial que tem por base o conjunto de todas as palavras em X. Com isso, os elementos de $\mathbb{K}\langle X \rangle$, que chamaremos de polinômios, são somas (formais) de termos (ou *monômios*) que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X.

Consideremos, em $\mathbb{K}\langle X \rangle$, a seguinte multiplicação:

$$(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}.$$

O espaço vetorial $\mathbb{K}\langle X \rangle$ munido deste produto é uma álgebra associativa com unidade, que é a palavra vazia 1. Sejam A uma álgebra e $h : X \to A$ uma aplicação qualquer, com $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Consideremos agora a aplicação linear $\varphi_h : \mathbb{K}\langle X \rangle \to A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_n}$. Temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. Dizemos então que $\mathbb{K}\langle X \rangle$ é a *álgebra associativa livre unitária, livremente gerada por X.*

Sendo $f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}\langle X \rangle$, denotemos por $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ a imagem de f por φ_h. Observe que $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ é o elemento de A obtido pela substituição de x_i por a_i em f.

Definição 1.2.1 *Seja A uma álgebra . Um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$) é dito uma* ***identidade polinomial da álgebra*** *A se $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.*

Observe que $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma identidade de A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ em A. Denotando por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A, dizemos que A é uma **álgebra com identidade polinomial** ou **PI-álgebra** se $T(A) \neq \{0\}$. Se A_1 e A_2 são álgebras tais que $T(A_1) = T(A_2)$, dizemos que A_1 e A_2 são **PI-equivalentes**.

Exemplo 1.2.2 *Se A for uma álgebra comutativa, então o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$(chamado de polinômio comutador) é uma identidade polinomial de A.*

Exemplo 1.2.3 *A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$ (chamado de comutador triplo) é uma identidade polinomial de E. Para ver isso basta observar que $[a, b] \in E_0 = Z(E)$ para quaisquer $a, b \in E$.*

Exemplo 1.2.4 *A álgebra $M_2(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ conhecida como identidade de Hall. Para ver isto, basta observar que:*

i) Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, então $tr([A, B]) = 0$;

ii) Se $A \in M_2(\mathbb{K})$ e $tr(A) = 0$, então $A^2 = \lambda I_2$ onde I_2 é a matriz identidade de $M_2(\mathbb{K})$.

Exemplo 1.2.5 *Considere o polinômio $s_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)}$ onde S_n é o grupo simétrico sobre n elementos, $\varepsilon_\sigma = 1$ se σ for par e $\varepsilon_\sigma = -1$ se σ for ímpar. Este é o chamado polinômio standard de grau n e $s_n(x_1, ..., x_n) \in T(A)$ para toda álgebra A com $dim A < n$.*

Os conceitos e propriedades apresentados a seguir são de grande importância na PI-teoria.

Definição 1.2.6 *Um ideal I de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é dito um* ***T-ideal*** *se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo $\varphi \in End\mathbb{K}\langle X\rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, ..., g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, ..., x_n) \in I$ e $g_1, ..., g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle$.*

Proposição 1.2.7 *Se A é uma álgebra, então o conjunto $T(A)$ das identidades de A é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ então existe alguma álgebra B tal que $T(B) = I$.*

Demonstração: É fácil ver que $T(A)$ é um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Sejam $f(x_1,...,x_n) \in T(A)$ e $\varphi \in End\mathbb{K}\langle X\rangle$, arbitrários. Se $\psi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to A$ é um homomorfismo qualquer, então $\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f) = 0$, pois $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to A$ é um homomorfismo de álgebras e $f \in T(A)$. Daí $\varphi(f) \in Ker(\psi)$ e portanto $\varphi(f) \in T(A)$.

Seja I um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Tomemos a álgebra quociente $B = \mathbb{K}\langle X\rangle / I$ e a projeção canônica $\pi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle X\rangle / I$. Se $f \in T(B)$, então $f \in Ker(\pi)$. Como $Ker(\pi) = I$, temos $T(B) \subseteq I$. Por outro lado, se $f(x_1,...,x_n) \in I$ e $g_1,...,g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, então $f(g_1,...,g_n) \in I$ e daí $f(\overline{g_1},...,\overline{g_n}) = \overline{f(g_1,...,g_n)} = \overline{0}$. Logo $f \in T(B)$, o que conclui a demonstração. ■

Não é difícil ver que a intersecção de uma família qualquer de T-ideais é ainda um T-ideal. Temos então a seguinte definição.

Definição 1.2.8 *Seja S um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Definimos o* ***T-ideal de*** $\mathbb{K}\langle X\rangle$ ***gerado por*** *S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a interseção de todos os T-ideais de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que contêm S. Assim, $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ contendo S.*

Do ponto de vista prático, o T-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto $\{h_1 f(g_1,...,g_n)h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1,...,g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle\}$. Se A é uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$ dizemos que S é uma **base de identidades de** A. Se um polinômio $f(x_1,...,x_n) \in \langle S\rangle^T$ dizemos que f **segue de** S, ou que f **é consequência de** S. Se existe S finito tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$ para uma álgebra A, dizemos que A possui propriedade de base finita para as identidades. A questão da existência de base finita para as identidades das álgebras associativas sobre corpos de característica zero é conhecida como problema de Specht e, em [23], Kemer deu uma resposta positiva para este problema.

Vejamos agora alguns exemplos de bases de identidades para algumas álgebras importantes.

Exemplo 1.2.9 *Se A é uma álgebra comutativa qualquer e $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$. Dizemos então que todas as identidades de A seguem (ou são consequências) do polinômio $[x_1, x_2]$.*

Exemplo 1.2.10 *Se $\mathbb{K}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2, então $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T$.*

O Exemplo 1.2.10 está demonstrado na Proposição 3.1.3.

Exemplo 1.2.11 *Em 1973 Razmyslov [33] provou que $T(M_2(\mathbb{K}))$ é finitamente gerado para char$\mathbb{K} = 0$, determinando uma base com 9 identidades. Posteriormente, Drensky [11] mostrou que $T(M_2(\mathbb{K})) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3]\rangle^T$, também para char$\mathbb{K} = 0$. Em 2001 Koshlukov [24] generalizou este resultado de Drensky para $\mathbb{K}$ infinito de característica diferente de 2 e 3. Quando char$\mathbb{K} = 3$ uma terceira identidade é necessária para gerar o T-ideal(veja [8]). Para char$\mathbb{K} = 2$, o problema da descrição $T(M_2(\mathbb{K}))$ ainda está em aberto.*

1.3 Variedades e álgebras livres

Definição 1.3.1 *Seja S um subconjunto de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. A classe ß de todas as álgebras que têm todos os polinômios de S como identidades é chamada de variedade (de álgebras associativas) definida por S.*

Se ß é uma classe de álgebras, seja T(ß) a interseção de todos os T-ideais $T(A)$ com $A \in$ß. A variedade de álgebras definida por T(ß) é chamada de variedade gerada por ß e denotada por *var*ß . Se ß$= \{R\}$, onde R é uma álgebra, então denotamos *var*ß simplesmente por $varR$. Observe que a variedade definida por S é igual à variedade definida por $\langle S\rangle^T$.

Teorema 1.3.2 ***(Birkhoff)*** *Uma classe não vazia de álgebras ß é uma variedade se, e somente se, é fechada a produtos diretos, subálgebras e álgebras quocientes.*

Demonstração: Veja [12], página 24. ■

Definição 1.3.3 *Seja V uma variedade de álgebras. Dizemos que uma álgebra $F \in V$ é uma **álgebra relativamente livre de** V (de posto enumerável) se existe um subconjunto Y (enumerável) gerador de F tal que para toda álgebra $A \in V$ e toda aplicação $h : Y \to A$ existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : F \to A$ estendendo h. Nessas condições, F é dita livremente gerada por Y.*

Teorema 1.3.4 *Toda variedade V possui alguma álgebra relativamente livre. Além disso, duas álgebras relativamente livres de mesmo posto em V são isomorfas.*

Demonstração: Seja $T(V) = \cap_{R\in V} T(R)$ e considere $\pi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle X\rangle / T(V)$ a projeção canônica. Mostraremos que $\pi(X)$ é enumerável. Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos de X tais que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Consideremos uma álgebra não nula A de V e um elemento não nulo $a \in A$. Então existe um homomorfismo $\psi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to A$ tal que $\psi(x_1) = a$ e $\psi(x_2) = 0$. Como $T(V) \subseteq Ker\psi$, existe um homomorfismo

$\phi : \mathbb{K}\langle X\rangle/T(V) \to A$ tal que $\phi \circ \pi = \psi$. Porém, $a = \psi(x_1) = (\phi \circ \pi)(x_1) = \phi(\pi(x_1)) = \phi(\pi(x_2)) = (\phi \circ \pi)(x_2) = \psi(x_2) = 0$, o que é uma contradição. Logo $\pi|_X$ é injetora e portanto $\pi(X)$ é enumerável.

Agora mostraremos que $\mathbb{K}\langle X\rangle/T(V)$ é livre em V. A álgebra $\mathbb{K}\langle X\rangle/T(V)$ é gerada pelo conjunto $\pi(X)$ e pertence a V. Sejam $A \in V$ e $\sigma : \pi(X) \to A$ uma aplicação. Como $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é a álgebra livre com conjunto gerador X, a aplicação $\sigma \circ \pi : X \to A$ estende-se a um homomorfismo $\theta : \mathbb{K}\langle X\rangle \to A$. Existe um homomorfismo $\rho : \mathbb{K}\langle X\rangle/T(V) \to A$ para o qual $\rho \circ \pi = \theta$, pois $T(V) \subseteq Ker\theta$. Se $x \in X$ temos que $\rho(\pi(x)) = (\rho \circ \pi)(x) = \theta(x) = (\sigma \circ \pi)(x) = \sigma(\pi(x))$ ou seja, o homomorfismo ρ estende a aplicação σ. Portanto $\mathbb{K}\langle X\rangle/T(V)$ é uma álgebra livre na variedade V.

Suponhamos agora F_1 e F_2 álgebras relativamente livres de mesmo posto em V. Sendo F_1 e F_2 livremente geradas por Y_1 e Y_2, respectivamente, tomemos uma bijeção $g : Y_1 \to Y_2$. Assim, existem homomorfismos de álgebras $\varphi_1 : F_1 \to F_2$ e $\varphi_2 : F_2 \to F_1$ estendendo g e g^{-1}, respectivamente. Logo, $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(y) = y$ e $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(z) = z$ para quaisquer $y \in Y_1$ e $z \in Y_2$. Segue então que $\varphi_2 \circ \varphi_1 = Id_{F_1}$ e $\varphi_1 \circ \varphi_2 = Id_{F_2}$, e portanto φ_1 e φ_2 são isomorfismos. ■

As ideias de variedades e álgebras livres são na verdade mais gerais do que acabamos de apresentar. Para maiores detalhes, veja [12] seções 1.2, 2.2 e 2.3.

1.4 Álgebras envolventes

Seja A uma álgebra associativa e considere em A o novo produto $[a, b] = ab - ba$ para $a, b \in A$. Com este produto temos uma nova estrutura de álgebra em A, que denotamos por $A^{(-)}$. Como $[a, a] = a - a = 0$ e $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ (identidade de Jacobi) para quaisquer $a, b, c \in A$, temos que $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie.

Se uma álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que A é uma **álgebra envolvente** de L.

Exemplo 1.4.1 *Seja L uma álgebra de Lie com base $\{u, v\}$ tal que $u * v = v$. A álgebra $M_2(\mathbb{K})$ é uma álgebra envolvente de L, pois o subespaço vetorial V de $M_2(\mathbb{K})$ gerado por $\{E_{11}, E_{12}\}$ é uma subálgebra de $M_2(\mathbb{K})^{(-)}$ e a aplicação linear $\varphi : L \to V$ que satisfaz $\varphi(u) = E_{11}$ e $\varphi(v) = E_{12}$ é um isomorfismo de álgebras de Lie.*

Definição 1.4.2 *Seja L uma álgebra de Lie. Uma álgebra associativa U é dita uma* ***álgebra universal envolvente de*** *L se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e para toda* *álgebra associativa A e todo homomorfismo $\varphi : L \to A^{(-)}$ de álgebras de Lie, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \to A$ que estende φ, ou seja, $\psi|_L = \varphi$.*

Teorema 1.4.3 ***(Poincaré, Birkhoff, Witt)*** *Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra universal envolvente $U(L)$. Se L possui uma base $\{e_i \mid i \in I\}$, sendo I totalmente ordenado, então $U(L)$ possui uma base formada pelos elementos*

$$e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_p},\ i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_p,\ i_k \in I,\ p = 0, 1, 2, ...$$

onde $p = 0$ nos dá a unidade de $U(L)$.

Demonstração: Veja [12], página 11. ∎

Sendo $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, consideremos o conjunto

$$ComX = \left\{[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}] \mid k \geq 2, x_{i_j} \in X\right\}.$$

Sejam $B(X)$ a subálgebra (com unidade) de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerada por $ComX$ e $L(X)$ o subespaço vetorial de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por $X \cup ComX$. Os polinômios de $B(X)$ são chamados de polinômios próprios.

Consideremos agora a álgebra de Lie $\mathbb{K}\langle X\rangle^{(-)}$. Usando a identidade de Jacobi é possível mostrar que se $u, v \in X \cup ComX$, então $[u, v] \in L(X)$. Logo, $L(X)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathbb{K}\langle X\rangle^{(-)}$.

Teorema 1.4.4 ***(Witt)*** $U(L(X)) = \mathbb{K}\langle X\rangle$

Demonstração: Veja [12], página 14, Teorema 1.3.5. ∎

Observe que $L(X)$ é livre na classe das álgebras de Lie. De fato, sejam L uma álgebra de Lie e $h : X \to L$ uma aplicação qualquer. Tomemos o homomorfismo de álgebras associativas $\varphi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to U(L)$ que estende h. Esse homomorfismo existe devido ao fato de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ ser livremente gerada por X. Temos que $\varphi([x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}])$ $=[\varphi(x_{i_1}), \varphi(x_{i_2}), ..., \varphi(x_{i_k})]$ para $k \geq 2$, e assim $\varphi(L(X)) \subseteq L$. Além disso, se $f_1, f_2 \in L(X)$, então $\varphi([f_1, f_2]) = [\varphi(f_1), \varphi(f_2)]$. Logo, $\varphi|_{L(X)} : L(X) \to L$ é um homomorfismo de álgebras de Lie estendendo h. Nessas condições, dizemos que $L(X)$ é uma á**lgebra de Lie livre, livremente gerada por** X.

Consideremos agora uma base ordenada de $L(X)$ consistindo dos elementos

$$x_1, x_2, ..., x_n, ..., u_1, u_2, ..., u_m, ...$$

onde $\{u_1, u_2, ...\} \subseteq ComX$ é uma base de $[L(X), L(X)]$, o subespaço vetorial de $L(X)$ gerado por $ComX$. Segue dos Teoremas 1.4.3 e 1.4.4 que $\mathbb{K}\langle X\rangle$ possui uma base formada pelos elementos

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} ... x_{i_k}^{n_k} u_{j_1} u_{j_2} ... u_{j_q}, k, q, n_i \geq 0 \tag{1.3}$$

onde $i_1 < i_2 < ... < i_k$, $j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_q$. Observe que os elementos com $k = 0$ formam uma base para $B(X)$ e que se $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, então

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_a \alpha_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} g_a \tag{1.4}$$

onde $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_i \geq 0$, $\alpha_a \in K$ e $g_a \in B(X)$. Além disso, como os elementos de (1.3) são linearmente independentes, temos que f possui uma única expressão nesta forma.

Lema 1.4.5 *Se A for uma álgebra unitária sobre um corpo infinito $\mathbb{K}$, então todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidades polinomiais próprias.*

Demonstração: Veja [12], Proposição 4.3.3, *ii*) ∎

1.5 Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Definição 1.5.1 *Sejam $m \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um monômio e $x_i \in X$. Definimos o **grau de** m **em** x_i, denotado por $deg_{x_i}m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m. Um polinômio $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é dito **homogêneo** em x_i se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. f é dito **multi-homogêneo** quando é homogêneo em todas as variáveis e é dito **multilinear** se é multi-homogêneo e tem grau 1 em cada variável.*

Se $m = m(x_1, x_2, ..., x_k)$ é um monômio de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, definimos o **multigrau de** m como sendo a k-upla $(a_1, a_2, ..., a_k)$ onde $a_i = deg_{x_i}m$. Definimos uma **componente multi-homogênea de** $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ como sendo a soma de todos os monômios de f com um dado multigrau. Nessas condições, temos que f é multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea. Da mesma forma, temos que f é multilinear se, e somente se, é multi-homogêneo com multigrau $(1, 1, ..., 1)$.

O próximo resultado nos dá uma importante ferramenta no trabalho de determinar geradores para T-ideais quando $\mathbb{K}$ é infinito.

Proposição 1.5.2 *Sejam I um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e $f(x_1, x_2, ..., x_k) \in I$. Se $\mathbb{K}$ é infinito, então cada componente multi-homogênea de f pertence a I. Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração: Seja n o maior grau em x_1 de algum monômio de f. Para cada $i = 0, 1, ..., n$, tomemos $f_i(x_1, x_2, ..., x_k)$ como sendo a soma de todos os monômios que têm grau i em x_1 (a componente de grau i em x_1). Temos claramente $f = f_0 + f_1 + ... + f_n$. Como $\mathbb{K}$ é infinito, podemos escolher $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ todos distintos. Para cada $j = 0, 1, ..., n$, temos $g_j = f(\lambda_j x_1, x_2, ..., x_k) = f_0 + \lambda_j f_1 + ... + \lambda_j^n f_n$ e assim

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Observe que $g_0, g_1, ..., g_n \in I$, pois I é T-ideal. Além disso, a primeira matriz na igualdade acima é uma matriz de Vandermonde invertível. Logo, devemos ter $f_0, f_1, ..., f_n \in I$.

Agora, para cada $i = 0, 1, ..., n$ e cada $t = 0, 1, 2, ...$, tomemos $f_{i,t}$ como sendo a componente homogênea em f_i de grau t em x_2. Usando então os mesmos argumentos acima, concluímos que $f_{i,t} \in I$ e assim, repetindo o processo para cada variável, temos a primeira afirmação. Além disso, observando que f é a soma de suas componentes multi-homogêneas, temos a segunda afirmação, ou seja, podemos concluir que I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos. ■

Proposição 1.5.3 *Se I é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e $char\mathbb{K} = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração: Como $char\mathbb{K} = 0$, temos que $\mathbb{K}$ é infinito. Assim, pela Proposição 1.5.2, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos. Seja então $f(x_1, x_2, ..., x_k) \in I$ multi-homogêneo com $n = deg_{x_1} f$. Tomando y_1 e y_2 variáveis de X diferentes de $x_1, x_2, ..., x_n$, consideremos o polinômio $h(y_1, y_2, x_2, ..., x_k) = f(y_1 + y_2, x_2, ..., x_k)$. Sendo $h_1(y_1, y_2, x_2, ..., x_k)$ a componente homogênea de grau 1 de $h(y_1, y_2, x_2, ..., x_k)$ em y_1 temos que $deg_{y_2} h_1 = n - 1$ e que $h_1(x_1, x_1, x_2, ..., x_k) = nf(x_1, x_2, ..., x_k)$. Como $char\mathbb{K} = 0$ segue que f é consequência de $h_1(y_1, y_2, x_2, ..., x_k)$. Observemos que $deg_{y_2}h_1 = n-1$ e assim, caso seja necessário, continuamos o processo para as variáreis $y_2, x_2, ..., x_k$ em h_1. Continuando com este processo (chamado de processo de linearização), podemos concluir que f é consequência de algum polinômio multilinear de I e assim o resultado está demonstrado. ■

1.6 T-espaços e polinômios centrais

Definição 1.6.1 *Sejam A uma álgebra e $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Dizemos que f é um **polinômio central** para A se f tem termo constante nulo e $f(a_1, a_2, ..., a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.*

De acordo com essa definição, dizer que f é um polinômio central para A significa dizer que $[f, g]$ é uma identidade de A para todo polinômio $g \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Assim, temos que se duas álgebras são PI-equivalentes, então elas têm os mesmos polinômios centrais.

Exemplo 1.6.2 *Sendo A uma álgebra, toda identidade de A é um polinômio central para A. As identidades são ditas **polinômios centrais triviais**.*

Exemplo 1.6.3 *O polinômio $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$ (polinômio de Hall) é um polinômio central para a álgebra $M_2(\mathbb{K})$. Okhitin [31] descreveu os polinômios centrais para a álgebra $M_2(\mathbb{K})$, no caso de $char\mathbb{K} = 0$, e Colombo e Koshlukov [8] generalizaram esta descrição para o caso de $\mathbb{K}$ ser um corpo infinito de característica diferente de 2.*

Exemplo 1.6.4 *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo qualquer e E a álgebra exterior sobre $\mathbb{K}$. Temos que $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é um polinômio central para E. Quando $char\mathbb{K} = p > 0$, temos que $g(x) = x^p$ é um polinômio central para E.*

Definição 1.6.5 *Um subespaço V de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é chamado **T-espaço de** $\mathbb{K}\langle X\rangle$ se, para todo $\varphi \in End\mathbb{K}\langle X\rangle$, tivermos $\varphi(V) \subseteq V$.*

Proposição 1.6.6 *Um subespaço V de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é um T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ se, e somente se, $f(g_1, ..., g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1, ..., x_n) \in V$ e $g_1, ..., g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle$.*

Demonstração: Sabe-se que, dado um subconjunto $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, existe um único endomorfismo φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ tal que $\varphi(x_i) = f_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Suponhamos V um T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Dados $g_1, ..., g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, existe um endomorfismo φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ tal que $\varphi(x_i) = g_i$, para $i = 1, ..., n$, e $\varphi(x_i) = 0$ caso contrário. Como V é um T-espaço, $\varphi(f(x_1,...,x_n)) = f(\varphi(x_1),...,\varphi(x_n)) = f(g_1,...,g_n) \in V$, para qualquer $f(x_1,...,x_n) \in V$.

Por outro lado, suponhamos $f(g_1,...,g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1,...,x_n) \in V$ e $g_1,...,g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Se $\varphi \in End\mathbb{K}\langle X\rangle$, então $\varphi(f(x_1,...,x_n)) = f(\varphi(x_1),...,\varphi(x_n)) \in V$, pois $\varphi(x_1),...,\varphi(x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. ■

Exemplo 1.6.7 *Todo T-ideal de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *é um T-espaço. O subespaço* $\mathbb{K} = \{\alpha 1 \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ *é também um exemplo de T-espaço de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$*.*

Exemplo 1.6.8 *Sejam A uma* $\mathbb{K}$*-álgebra e W um subespaço de A. O conjunto*

$$\{f(x_1,...,x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle \mid f(a_1,...,a_n) \in W \text{ para quaisquer } a_1,...,a_n \in A\}$$

é um T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$*.*

No Exemplo 1.6.8, destacamos o caso particular $W = Z(A)$, no qual temos nosso maior interesse. Dessa forma, temos o T-espaço

$$\{f(x_1,...,x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle \mid f(a_1,...,a_n) \in Z(A) \text{ para quaisquer } a_1,...,a_n \in A\}$$

que é chamado de **espaço dos polinômios centrais de** A e é denotado por $C(A)$. Além disso $C(A)$ é multiplicativamente fechado, pelo fato de $Z(A)$ ser uma subálgebra de A, condição que não é satisfeita por todo T-espaço.

É importante observar que os elementos de $C(A)$ são na verdade da forma $g + c$, onde g é um polinômio central (de acordo com a Definição 1.6.1), e c é uma constante. Além disso o conjunto dos polinômios centrais de alguma álgebra pode não ser um T-espaço. No Exemplo 1.6.4, considerando $char\mathbb{K} = p$, vimos que $g(x) = x^p$ é um polinômio central para E. No entanto, $g(x+1) = x^p + 1$ possui termo constante não nulo, portanto não satisfaz a Definição 1.6.1.

É fácil ver que a interseção e a soma de uma família qualquer de T-espaços ainda são T-espaços. Dado um subconjunto S de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, o T-espaço gerado por S é definido como sendo a interseção de todos os T-espaços que contêm S. Em outras palavras, o T-espaço gerado por S é o menor T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que contém S. A próxima proposição nos dá uma caracterização do T-espaço gerado por um conjunto.

Proposição 1.6.9 *Se* $S \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$ *e V é o T-espaço de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *gerado por S, então V é exatamente o subespaço de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *gerado por*

$$\{f(g_1,...,g_n) \mid f \in S,\ g_1,...,g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle\}$$

Demonstração: Comecemos observando que este conjunto é exatamente igual a

$$(End\mathbb{K}\langle X\rangle)S = \{\varphi(f) \mid f \in S,\, \varphi \in End\mathbb{K}\langle X\rangle\}$$

Tomemos V_1 como sendo o subespaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por $(End\mathbb{K}\langle X\rangle)S$. Como $S \subseteq V$ e V é um T-espaço, temos que $\varphi(f) \in V$ para quaisquer $f \in S$ e $\varphi \in End\mathbb{K}\langle X\rangle$, ou seja, $(End\mathbb{K}\langle X\rangle)S \subseteq V$. Logo, $V_1 \subseteq V$. Observando agora que $\psi(g) \in (End\mathbb{K}\langle X\rangle)S$ para quaisquer $\psi \in End\mathbb{K}\langle X\rangle$ e $g \in (End\mathbb{K}\langle X\rangle)S$, concluímos que V_1 é um T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Além disso, $S \subseteq V_1$ e como V é o T-espaço gerado por S, temos $V \subseteq V_1$. Portanto $V = V_1$. ∎

Exemplo 1.6.10 *Sejam $S \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$ e J o T-ideal gerado por S. Tomando*

$$S_1 = \{x_{n+1}f(x_1, ..., x_n)x_{n+2} \mid f \in S\}$$

temos que J é exatamente o T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por S_1. Assim, a partir de uma base de um T-ideal é possível construir um conjunto capaz de gerá-lo como T-espaço.

Observação 1.6.11 *Sabemos que todo T-ideal é gerado por seus polinômios multi-homogêneos (ver Proposições 1.5.2 e 1.5.3) quando o corpo base é infinito, e por seus polinômios multilinares quando o corpo base tem característica zero. Através dos mesmos processos usados para T-ideais é possível mostrar que todo T-espaço é gerado por seus polinômios multilineares no caso de característica zero, e por seus polinômios multi-homogêneos no caso de corpo base infinito.*

Exemplo 1.6.12 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e consideremos a álgebra $M_n(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Sejam I o T-ideal das identidades de $M_n(\mathbb{K})$ e*

$$V = \{f(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{K}\langle X\rangle \mid tr(f(A_1, ..., A_m)) = 0 \text{ para quaisquer } A_1, ..., A_m \in M_n(\mathbb{K})\}.$$

Temos que V é um T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e que $I \subseteq V$. Ademais, $[x_1, x_2] \in V$ e daí $I + V_1 \subseteq V$, onde V_1 é o T-espaço gerado pelo polinômio $[x_1, x_2]$. Mostremos agora que quando $char\mathbb{K} = 0$ temos $V = I + V_1$. De fato, tomemos

$$f(x_1, ..., x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(m)} \in V$$

lembrando que V é gerado por seus polinômios multilineares. Observemos que, para todo $\sigma \in S_m$,

$$x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(m)} = x_1x_{\sigma(i+1)}...x_{\sigma(m)}x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(i-1)} + \left[x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(i-1)}, x_1x_{\sigma(i+1)}...x_{\sigma(m)}\right]$$

onde $\sigma(i) = 1$. Logo, $f(x_1, ..., x_m) = x_1g(x_2, ..., x_m)$ $(mod\ V_1)$, onde g é um polinômio multilinear. Como $V_1 \subseteq V$ e $f \in V$, devemos ter $x_1g(x_2, ..., x_m) \in V$, o que significa

$tr(A_1g(A_2,...,A_m)) = 0$ para quaisquer $A_1, A_2, ..., A_m \in M_n(\mathbb{K})$. Mas, isto só é possível se $g(A_2,...,A_m) = 0$ para quaisquer $A_2,...,A_m \in M_n(\mathbb{K})$. Logo, $x_1g(x_2,...,x_m)$ deve ser identidade de $M_n(\mathbb{K})$ e portanto $f \in I + V_1$.

No caso $n = 2$, temos que os polinômios $x_5s_4(x_1,x_2,x_3,x_4)x_6$, $x_4[[x_1,x_2]^2,x_3]x_5$, $[x_1,x_2]$ geram V como T-espaço (ver Exemplo 1.2.11).

Se tomarmos $x_1 = E_{12} - E_{21}$ e $x_2 = E_{22}$ podemos observar que $[x_1,x_2]^2 \notin V$. De fato, $[E_{12} - E_{21}, E_{22}]^2 = (E_{12} + E_{21})^2 = I_{2\times 2}$, onde $I_{2\times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2 com entradas em $\mathbb{K}$, e $tr(I_{2\times 2}) = 2 \neq 0$. Isso mostra que V não é multiplicativamente fechado.

Exemplo 1.6.13 *Sejam $n \geq 2$ e A uma álgebra qualquer. Temos que os únicos polinômios centrais para a álgebra $U_n(A)$ são as identidades.*

De fato, consideremos os subespaços $\boldsymbol{D}$ (matrizes diagonais) e $\boldsymbol{N}$ (matrizes com diagonal nula) de $U_n(A)$. Temos que $\boldsymbol{D}$ é uma subálgebra e $\boldsymbol{N}$ é um ideal de $U_n(A)$. Além disso, $U_n(A) = \boldsymbol{D} \oplus \boldsymbol{N}$ como espaço vetorial. Temos também que o centro de $U_n(A)$ coincide com o conjunto das matrizes da forma $aI_{n\times n}$, onde $a \in Z(A)$.

Tomemos $f(x_1,...,x_m) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um polinômio central para $U_n(A)$. Primeiramente, vejamos que f é uma identidade de $\boldsymbol{D}$. De fato, dados $a_1,...,a_m \in A$, temos que $f(a_1E_{11},...,a_mE_{11}) = f(a_1,...,a_m)E_{11}$. Mas, como f é central para $U_n(A)$, devemos ter $f(a_1,...,a_m)E_{11} = aI_{n\times n}$ para algum $a \in Z(A)$. Logo, a deve ser nulo e portanto $f(a_1,...,a_m) = 0$. Segue então que $f \in T(A)$ e daí é imediato que $f \in T(\boldsymbol{D})$. Tomando agora $X_1,...,X_m \in U_n(A)$, temos $X_i = \boldsymbol{D}_i + \boldsymbol{N}_i$, com $\boldsymbol{D}_i \in \boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{N}_i \in \boldsymbol{N}$, e assim $f(X_1,...,X_m) = f(\boldsymbol{D}_1,...,\boldsymbol{D}_m) + C = C$, onde $C \in \boldsymbol{N}$. Como $f(X_1,...,X_m)$ é diagonal, devemos ter $C = 0$ e assim f é uma identidade de $U_n(A)$.

Exemplo 1.6.14 *Seja V o T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios*

$$[x_1,x_2] \text{ e } [x_1,x_2][x_3,x_4].$$

Da igualdade (1.1) temos

$$[[x_1,x_2]x_4,x_3] = [x_1,x_2][x_4,x_3] + [x_1,x_2,x_3]x_4$$

e

$$[x_1,x_2,x_3x_4] = x_3[x_1,x_2,x_4] + [x_1,x_2,x_3]x_4.$$

Da primeira igualdade segue que $[x_1,x_2,x_3]x_4 \in V$ e da segunda obtemos

$$x_3[x_1,x_2,x_4]x_5 = [x_1,x_2,x_3x_4]x_5 - [x_1,x_2,x_3]x_4x_5.$$

Logo, $x_3[x_1,x_2,x_4]x_5 \in V$ e portanto o T-ideal $\langle [x_1,x_2,x_3]\rangle^T$ está contido em V. Usando agora a igualdade (1.2), podemos concluir que

$$[[x_3,x_4]...[x_{2n-2},x_{2n}],x_2] \in \langle [x_1,x_2,x_3]\rangle^T \text{ para todo } n \geq 3,$$

e assim, como

$$[x_1[x_3,x_4]...[x_{2n-1},x_{2n}],x_2] = [x_1,x_2][x_3,x_4]...[x_{2n-1},x_{2n}] + x_1\left[[x_3,x_4]...[x_{2n-1},x_{2n}],x_2\right]$$

temos que $[x_1,x_2][x_3,x_4]...[x_{2n-1},x_{2n}] \in V$ *e daí segue que* V *é multiplicativamente fechado.*

Conforme veremos no Capítulo 3, $V = C(E)$ quando $char\mathbb{K} = 0$. No caso em que $char\mathbb{K} = p > 2$, isto não acontece, de acordo com o que mostra a Proposição 1.6.15 abaixo.

No que tratamos até agora a cerca de T-espaços e polinômios centrais, vimos que o conjunto $C(A)$ é sempre um T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ para toda álgebra A. Quando falamos em descrever os polinômios centrais de A, estamos falando em determinar um subconjunto de $C(A)$ que possa gerá-lo como T-espaço. Existem T-espaços que não são multiplicativamente fechados (observe o Exemplo 1.6.12) e também T-espaços multiplicativamente fechados que não são espaços de polinômios centrais para nenhuma álgebra. O T-espaço V do Exemplo 1.6.14 satisfaz estas condições em característica positiva, conforme veremos a seguir.

Proposição 1.6.15 *Se* $char\mathbb{K} = p > 2$, *então não existe álgebra* A *tal que* $C(A) = V$.

Demonstração: Suponha, por contradição, que $C(A) = V$ para alguma álgebra associativa A. Então, $[x_1,x_2] \in C(A)$ e daí $[x_1,x_2,x_3] \in T(A)$. Usando indução é possível mostrar que

$$[y,\underbrace{x,...,x}_{n}] = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}x^jyx^{n-j} \text{ para } n \geq 1,$$

em toda álgebra associativa. Logo, para $n = p$, temos $[y,x,x,...,x] = yx^p - x^py = [y,x^p]$. Assim, concluímos que $[x_2,x_1^p] \in T(A)$ e daí $x_1^p \in C(A) = V$. Mas isto é um absurdo, pois considerando a álgebra $U_2(\mathbb{K})$ (matrizes 2×2 triangulares superiores) e o T-espaço

$$W = \{f(x_1,...,x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle \mid f(B_1,...,B_n) \text{ tem diagonal nula para } B_1,...,B_n \in U_2(\mathbb{K})\},$$

temos que $[x_1,x_2]$ e $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ estão em W, donde $V \subseteq W$, mas $x_1^p \notin W$. ■

1.7 Identidades e polinômios centrais graduados

Nesta seção vamos apresentar os conceitos de identidades e polinômios centrais para álgebras graduadas. As ideias apresentadas aqui serão fundamentais no próximo capítulo. Em toda esta seção, G denotará um grupo abeliano com notação aditiva.

Definição 1.7.1 *Seja A uma álgebra. Uma **G-graduação em** A é uma família de subespaços $\{A_g \mid g \in G\}$ de A tais que*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \ \text{ e } \ A_g A_h \subseteq A_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$.

*Uma álgebra A é dita **álgebra G-graduada** quando é munida de alguma G-graduação.*

Na definição acima, o subespaço A_g é chamado de *componente homogênea de grau* g e seus elementos de *elementos homogêneos de grau g*.

Exemplo 1.7.2 *Toda álgebra A admite uma G-graduação. Basta tomar $A_0 = A$ e $A_g = \{0\}$ para todo $g \in G - \{0\}$. Esta graduação é chamada de trivial.*

Exemplo 1.7.3 *A álgebra de Grassmann E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural: $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 é o subespaço dos elementos pares e E_1 dos elementos ímpares. Considerando agora a álgebra exterior E_n de dimensão 2^n (veja o Exemplo 1.1.7) e tomando $(E_n)_0 = E_n \cap E_0$ e $(E_n)_1 = E_n \cap E_1$, temos $E_n = (E_n)_0 \oplus (E_n)_1$ e esta decomposição define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em E_n.*

Exemplo 1.7.4 *Considere n um inteiro positivo e $M = M_n(\mathbb{K})$. Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, tomemos o subespaço $M_\gamma = \left\langle E_{ij} \mid \overline{j-i} = \gamma \right\rangle$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, tomemos*

$$M_k = \{0\}, \text{ se } |k| \geq n$$

$$\text{e}$$

$$M_k = \langle E_{ij} \mid j - i = k \rangle, \text{ se } |k| < n.$$

Observe que $M_{\overline{0}} = M_0$ é exatamente o conjunto das matrizes diagonais. Do fato do conjunto $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ ser uma base de M segue que

$$M = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} M_\gamma \quad \text{e} \quad M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k.$$

Agora, para ver que estas decomposições definem uma $\mathbb{Z}_n$-graduação e uma $\mathbb{Z}$-graduação, respectivamente, em $M_n(\mathbb{K})$, basta observar que

$$E_{ij} E_{kl} = 0, \text{ se } j \neq k$$

$$e$$

$$E_{ij}E_{kl} = E_{il},\ se\ j = k$$

donde temos $M_{\gamma_1}M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1+\gamma_2}$ *para* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_n$ *e* $M_{k_1}M_{k_2} \subseteq M_{k_1+k_2}$ *para* $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Para $n = 2$ *temos* $M_2(\mathbb{K}) = M_2(\mathbb{K})_0 \oplus M_2(\mathbb{K})_1$, *onde*

$$M_2(\mathbb{K})_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{K} \right\} \ e \ M_2(\mathbb{K})_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{K} \right\}.$$

Esta é a chamada $\mathbb{Z}_2$*-graduação natural de* $M_2(\mathbb{K})$.

Exemplo 1.7.5 *Considere a álgebra* $M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0; b, c \in E_1 \right\}$, *com* E_0 *e* E_1 *definidos no Exemplo 1.7.3. Esta álgebra é munida da seguinte* $\mathbb{Z}_2$*-graduação:*

$$M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1,$$

onde

$$(M_{1,1}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0 \right\} \ e \ (M_{1,1}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1 \right\}.$$

Exemplo 1.7.6 *A álgebra* $E \otimes E$ *também admite uma* $\mathbb{Z}_2$*-graduação:*

$$E \otimes E = ((E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1)) \oplus ((E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)),$$

com E_0 *e* E_1 *definidos no Exemplo 1.7.3, sendo* $(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1)$ *a componente homogênea de* $E \otimes E$ *de grau 0 e* $(E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$ *a componente homogênea de* $E \otimes E$ *de grau 1.*

Proposição 1.7.7 *Se* A *é uma álgebra* G*-graduada, então* $1 \in A_0$.

Demonstração: Existem $g_1, ..., g_n \in G$ tais que

$$1 = a_0 + a_{g_1} + ... + a_{g_n}$$

com $a_0 \in A_0$ e $a_{g_i} \in A_{g_i}$, para $i = 1, ..., n$. Tomando agora $h \in G$ e $a_h \in A_h$, arbitrários, temos

$$a_h = a_h a_0 + a_h a_{g_1} + ... + a_h a_{g_n}.$$

Observando que $a_h a_0 \in A_h$, $a_h a_{g_i} \in A_{h+g_i}$ e $h, h+g_1, ..., h+g_n$ são dois a dois distintos, podemos concluir que $a_h a_{g_i} = 0$ para $i = 1, ..., n$, donde $a_h a_0 = a_h$. De modo totalmente análogo mostramos que $a_0 a_h = a_h$ e assim concluímos que $a_0 = 1$. ■

Definição 1.7.8 *Sejam A e B álgebras G-graduadas com componentes homogêneas A_g e B_g, respectivamente. Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ é dito um **homomorfismo G-graduado** se $\varphi(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$.*

Vamos agora tratar de identidades e polinômios centrais G-graduados. Para isso, precisamos do conceito de álgebra associativa livre G-graduada. Para definí-lo, comecemos considerando para cada $g \in G$ um conjunto enumerável X_g, e suponhamos que X_{g_1} e X_{g_2} são disjuntos para $g_1 \neq g_2$. Tomemos então $X = \bigcup\limits_{g\in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Definimos agora

$$\omega(1) = 0 \ \text{ e } \ \omega(x_1x_2...x_m) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + ... + \omega(x_m)$$

onde $\omega(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$. Sendo então m um monômio de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, dizemos que $\omega(m)$ é o G-grau de m. Tomando para cada $g \in G$

$$\mathbb{K}\langle X\rangle_g = \langle m \mid m \text{ é monômio de } \mathbb{K}\langle X\rangle\,,\ \omega(m) = g\rangle$$

temos

$$\mathbb{K}\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{K}\langle X\rangle_g \quad \text{e} \quad \mathbb{K}\langle X\rangle_g \mathbb{K}\langle X\rangle_h \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$, assim $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é chamada de álgebra associativa livre G-graduada.

Se $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle_g$, dizemos que f é homogêneo de G-grau g e usamos a notação $\omega(f) = g$. Agora estamos prontos para definir identidade e polinômio central G-graduados.

Definição 1.7.9 *Seja $A = \bigoplus\limits_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é:*

*a) **Uma identidade G-graduada de** A se $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\omega(x_i)}$ com $i = 1, ..., n$.*

*b) **Um polinômio central G-graduado para** A se $f(a_1, a_2, ..., a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_i \in A_{\omega(x_i)}$ com $i = 1, ..., n$.*

No estudo das identidades e polinômios centrais ordinários, os conceitos de T-ideal e T-espaço têm importância fundamental, como foi visto nas seções anteriores. Para o caso de identidades e polinômios centrais G-graduados temos conceitos análogos, a saber, os de T_G-ideal e T_G-espaço, que definiremos a seguir.

Definição 1.7.10 *Seja $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada. Um ideal I de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é dito um T_G-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Um subespaço V de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é dito um T_G-espaço se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.*

Nessas condições temos que um ideal I é um T_G-ideal se e somente se $f(g_1, ..., g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, ..., x_n) \in I$ e $g_i \in \mathbb{K}\langle X\rangle_{\omega(x_i)}$ com $i = 1, ..., n$. Analogamente, para T_G-espaços.

As ideias de T_G-ideal e T_G-espaço gerados por um subconjunto S de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ são análogas às ideias de T-ideal e T-espaço gerados. Denotamos por $\langle S\rangle^{T_G}$ o T_G-ideal gerado por S.

Se A é uma álgebra G-graduada, então o conjunto $T_G(A)$ das identidades G-graduadas de A é um T_G-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e o conjunto $C_G(A)$ dos polinômios centrais G-graduados para A é um T_G-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Observe que $T_G(A) \subseteq C_G(A)$.

No caso de álgebras e polinômios $\mathbb{Z}_n$-graduados, denotaremos, por simplicidade, T_n-ideais e C_n-espaços aos invés de $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideais e $C_{\mathbb{Z}_n}$-espaços.

É importante observar que todo T_G-ideal e todo T_G-espaço é gerado por seus polinômios multi-homogêneos no caso do corpo base ser infinito, e por seus polinômios multilineares no caso do corpo base ter característica zero (as demonstrações são as mesmas feitas para T-ideais).

Exemplo 1.7.11 *Consideremos a álgebra de Grassmann E com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural (Exemplo 1.7.3). Sendo $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, temos $X = X_0 \cup X_1$. Como $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in E_1$, temos que $f(x_1, x_2) = x_1 \circ x_2$, com $\omega(x_1) = \omega(x_2) = 1$, é identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de E. Como $E_0 = Z(E)$, temos que todo polinômio $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle_0$ é um polinômio central $\mathbb{Z}_2$-graduado para E.*

O resultado a seguir mostra quais polinômios geram os T_2-ideais de 3 importantes álgebras no nosso trabalho. Para estas álgebras, consideremos as graduações definidas nos Exemplos 1.7.4, 1.7.5 e 1.7.6.

Teorema 1.7.12 *[10, 25]*

Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito tal que $char\mathbb{K} = p > 2$. Então:

1) $T_2(M_2(\mathbb{K}))$ é gerado por $x_1x_2 - x_2x_1$ e $y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1$;

2) $T_2(M_{1,1}(E))$ é gerado por $x_1x_2 - x_2x_1$ e $y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1$;

3) $T_2(E \otimes E)$ é gerado por $x_1x_2 - x_2x_1$, $y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1$ e $x_1^py_1 - y_1x_1^p$;

onde as x_i's são variáveis de grau zero (pares) e as y_j's são variáveis de grau um (ímpares). No item 3 ocorre a omissão da última identidade quando $char\mathbb{K} = 0$.

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades polinomiais ordinárias e graduadas.

Proposição 1.7.13 *Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G-graduações tais que $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$. Ademais, se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.*

Demonstração: Consideremos a álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle Y\rangle$, onde $Y = \{y_1, y_2, ...\}$ e seja $f(y_1, y_2, ..., y_n) \in T(A)$. Dados $b_1, b_2, ..., b_n \in B$, tomemos $b_{ig} \in B_g$, para $i = 1, ..., n$ e $g \in G$, tais que $b_i = \sum\limits_{g\in G} b_{ig}$. Para cada $b_{ig} \neq 0$, tomemos $x_{ig} \in X_g$ e consideremos o polinômio $f_1 = f(\sum\limits_{g\in G} x_{1g}, ..., \sum\limits_{g\in G} x_{ng}) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Como $f \in T(A)$, temos $f_1 \in T_G(A)$ e daí $f_1 \in T_G(B)$. Fazendo então as substituições $x_{ig} = b_{ig}$, para $i = 1, ..., n$ e $g \in G$, temos

$$f(b_1, b_2, ..., b_n) = f(\sum_{g\in G} b_{1g}, \sum_{g\in G} b_{2g}, ..., \sum_{g\in G} b_{ng}) = 0$$

e assim $f \in T(B)$.

Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T_G(A) \subseteq T_G(B)$ e $T_G(B) \subseteq T_G(A)$, donde temos a última afirmação. ■

É importante observar que a recíproca do resultado acima é falsa. Para ver isto tomemos n par e as álgebras E_n e E_{n+1} (sendo o corpo $\mathbb{K}$ infinito de característica diferente de 2) com suas $\mathbb{Z}_2$-graduações naturais (Exemplo 1.7.3). Temos que $T(E_n) = T(E_{n+1})$ (veja [12], página 52), mas $T_2(E_n) \neq T_2(E_{n+1})$, pois o polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = x_1x_2...x_{n+1}$, com $\omega(x_1) = \omega(x_2) = ... = \omega(x_{n+1}) = 1$, é identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para E_n, mas não é para E_{n+1}.

Capítulo 2

Polinômios centrais para álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas

Neste capítulo apresentaremos os T-espaços de polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(\mathbb{K})$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, sobre um corpo infinito $\mathbb{K}$, com $char\mathbb{K} \neq 2$. Ao longo do texto, E denotará a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e $M_{1,1}(E)$ denotará a álgebra das matrizes de ordem 2 cujos elementos da diagonal principal pertencem a E_0 e os elementos que não pertencem a diagonal principal serão elementos de E_1. As graduações que consideraremos para essas álgebras são aquelas definidas nos Exemplos 1.7.4, 1.7.5 e 1.7.6.

Considere $X = \{x_1, x_2, ...\}$, $Y = \{y_1, y_2, ...\}$ conjuntos disjuntos de variáveis e a álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ livremente gerada por $X \cup Y$. Induzimos em $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, assumindo que X é o conjunto das variáveis de grau zero (pares) e Y o conjunto das variáveis de grau um (ímpares).

De posse desses conjuntos, descreveremos sistemas de geradores para os T-espaços dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados de todas essas álgebras.

2.1 A álgebra $M_2(\mathbb{K})$

Denotamos por $I = T_2(M_2(\mathbb{K})) \subseteq \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ o ideal das identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$, considerando a graduação definida no Exemplo 1.7.4. Pelo Teorema 1.7.12, temos que I é gerado como T_2-ideal pelos polinômios

$$[x_1, x_2] \quad \text{e} \quad y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1.$$

Denotemos por V o T_2-espaço de $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ gerado pelos polinômios

$$y_1^2, \;\; z_1[x_1, x_2]z_2 \;\; \text{e} \;\; z_1(y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1)z_2,$$

onde os z_i's denotarão elementos quaisquer de $X \cup Y$.

Lema 2.1.1 *São válidas as inclusões $V \subseteq C_2(M_2(\mathbb{K}))$ e $I \subseteq V$*

Demonstração: Seja $Y \in M_2(\mathbb{K})_1$. Então $Y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Devemos mostrar que $y_1^2 \in C_2(M_2(\mathbb{K}))$. De fato,

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & cb \end{pmatrix} = bc \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (bc)\, I_n$$

é uma matriz escalar. Logo, $y_1^2 \in C_2(M_2(\mathbb{K}))$.

Como $[x_1, x_2] \in T_2(M_2(\mathbb{K}))$, temos que $z_1[x_1, x_2]z_2 \in T_2(M_2(\mathbb{K}))$, pois $T_2(M_2(\mathbb{K}))$ é um ideal. Da mesma forma, $z_1(y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1)z_2 \in T_2(M_2(\mathbb{K}))$ e, portanto, $V \subseteq C_2(M_2(\mathbb{K}))$.

Observe que $I = T_2(M_2(\mathbb{K}))$ é gerado, como T_2-ideal pelos polinômios $[x_1, x_2]$, $y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1 \in V$, e assim é gerado com T_2-espaço pelos polinômios $z_1[x_1, x_2]z_2$, $z_1(y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1)z_2$. Logo $I \subseteq V$. ■

Lema 2.1.2 *Os polinômios $y_1 \circ y_2 = (y_1y_2 + y_2y_1)/2$, $y_1^2y_2^2$ e $[y_1, y_2][y_3, y_4]$ pertencem a V. Além disso, o espaço V é fechado com relação a multiplicação.*

Demonstração: Tome y_1, $y_2 \in \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle_1$. Assim $y_1 + y_2 \in \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle_1$ e, portanto, $(y_1 + y_2)^2 \in V$. Dessa forma $(y_1 + y_2)^2 = y_1^2 + y_1y_2 + y_2y_1 + y_2^2 \in V$. Logo $y_1^2 + y_1y_2 + y_2y_1 + y_2^2 - y_1^2 - y_2^2 = y_1y_2 + y_2y_1 \in V$. Como V é subespaço, $(y_1y_2 + y_2y_1)/2 = y_1 \circ y_2 \in V$.

Da mesma forma $y_1 + y_1y_2^2 \in \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle_1$ e $(y_1 + y_1y_2^2)^2 = y_1^2 + y_1^2y_2^2 + y_1y_2^2y_1 + (y_1y_2^2)^2 \in V$. Assim $y_1^2y_2^2 + y_1y_2^2y_1 \in V$. Porém, $[y_1, y_2^2] = y_1y_2y_2 - y_2y_2y_1 \in I \subseteq V$ (pelo Lema 2.1.1). Logo $y_1(y_1y_2y_2 - y_2y_2y_1) \in I$. Isto significa dizer que $y_1^2y_2^2 - y_1y_2^2y_1 \in V$. Portanto $y_1^2y_2^2 \in V$.

Como $y_2y_3y_4 - y_4y_3y_2 \in I$, temos $y_1(y_2y_3y_4 - y_4y_3y_2) = y_1y_2y_3y_4 - y_1y_4y_3y_2 \in V$. Por outro lado, como $-ab = ba - 2(a \circ b)$, temos $-y_1y_4y_3y_2 = y_2y_1y_4y_3 - 2((y_1y_4y_3) \circ y_2)$. Como $(y_1y_4y_3) \circ y_2 \in V$, $y_1y_2y_3y_4 + y_2y_1y_4y_3 \in V$. Analogamente temos $y_2y_1y_3y_4 + y_1y_2y_4y_3 \in V$. Assim $y_1y_2y_3y_4 + y_2y_1y_4y_3 - (y_2y_1y_3y_4 + y_1y_2y_4y_3) = [y_1, y_2][y_3, y_4] \in V$.

Resta agora mostrar que V é fechado com relação a multiplicação. Os elementos de V são da forma

$$\alpha_1 f_1^2 + ... + \alpha_n f_n^2 + g,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ f_i \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_1,\ g \in I.$$

Observe que como I é um T-ideal $hg, gh \in I$, para quaisquer $g \in I$ e $h \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle$. Um produto de elementos de V é então uma combinação linear de $f_i^2 f_j^2$ somado com alguma identidade graduada de $M_2(\mathbb{K})$. Logo, basta mostrar que $f_i^2 f_j^2 \in V$, pois $I = T_2(M_2(\mathbb{K}))$ e pelo Lema 2.1.1, $I \subseteq V$. Porém, pela primeira afirmação deste Lema, $f_i^2 f_j^2 \in V$. Portanto V é fechado com relação a multiplicação. ■

O seguinte teorema nos traz a descrição dos polinômios centrais graduados geradores do T$_2$-espaço $C_2(M_2(\mathbb{K}))$.

Teorema 2.1.3 *O T$_2$-espaço $C_2(M_2(\mathbb{K}))$ é gerado pelos polinômios y_1^2, $z_1[x_1, x_2]z_2$ e $z_1(y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1)z_2$, ou seja, $C_2(M_2(\mathbb{K})) = V$.*

Demonstração: É suficiente mostrar que $C_2(M_2(\mathbb{K})) \subseteq V$, pois, pelo Lema 2.1.1, $V \subseteq C_2(M_2(\mathbb{K}))$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo infinito temos que $C_2(M_2(\mathbb{K}))$ é gerado pelos seus polinômios multi-homogêneos (Proposição 1.5.2). Seja $f \in C_2(M_2(\mathbb{K}))$ multi-homogêneo.

Primeiramente assumamos que f dependa apenas das variáveis x_i's, ou seja, $f = f(x_1, ..., x_n)$. Como $[x_i, x_j] \in I$ temos que $f = \alpha x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} + g$, $g \in I$. Substituindo x_i por E_{11}, temos $f = \alpha E_{11}$. Como $f \in C_2(M_2(\mathbb{K}))$ e $E_{11} \notin Z(M_2(\mathbb{K}))$, devemos ter $\alpha = 0$. Assim $f \in I \subseteq V$.

Agora assumamos que f dependa das variáveis y_i's também. Se $f \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_1$, então os valores que f assume em $M_2(\mathbb{K})$ serão matrizes cujos elementos da diagonal principal são nulos. Como $f \in C_2(M_2(\mathbb{K}))$ então f se anula em $M_2(\mathbb{K})$, ou seja, f é uma identidade graduada de $M_2(\mathbb{K})$.

Com isso, sem perda de generalidade podemos assumir $f \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_0$. Mas isso implica que, em todo monômio de f, o número de variáveis y_i's deve ser par(contando também as repetições). Assim podemos escrever f como combinação linear de elementos $u_1u_2...u_n$ onde todo $u_i \in \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle_1$ e $n \geq 2$ par. Porém

$$u_iu_{i+1} = u_i \circ u_{i+1} + \frac{1}{2}[u_i, u_{i+1}].$$

Portanto, módulo I, podemos representar f como uma combinação linear de elementos $h_1h_2...h_mv_1v_2...v_k$, onde $m, k \geq 0$, sendo todo h_i da forma $u_j \circ u_{j+1}$ e todo v_i da forma $[u_j, u_{j+1}]$. Isto é possível desde que h_i e v_i pertençam a $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle_0$ e, portanto, comutam módulo I. Assim, módulo I, representamos $f = f_1 + f_2$, onde f_1 é uma combinação linear de termos $h_1...h_mv_1...v_k$ com k par e f_2 é uma combinação linear de termos $h_1...h_mv_1...v_k$ com k ímpar.

De acordo com o Lema 2.1.2, $f_1 \in V$. Como $f = f_1 + f_2 \in C_2(M_2(\mathbb{K}))$ e $V \subseteq C_2(M_2(\mathbb{K}))$ temos que $f_2 = f - f_1 \in C_2(M_2(\mathbb{K}))$. Porém, em $M_2(\mathbb{K})$ o polinômio f_2 assume valores que são matrizes de traço zero e assim $f_2 \in T_2(M_2(\mathbb{K})) = I \subseteq V$. Portanto $C_2(M_2(\mathbb{K})) \subseteq V$ e daí $C_2(M_2(\mathbb{K})) = V$. ∎

2.2 A álgebra $M_{1,1}(E)$

Nesta seção, considere a álgebra $M_{1,1}(E)$ munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação definida no Exemplo 1.7.5. Considere W o T_2-espaço em $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ gerado pelos polinômios

$$[y_1, y_2], \quad z_1[x_1, x_2]z_2 \quad \text{e} \quad z_1(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1)z_2,$$

onde os z_i's são elementos quaisquer de $X \cup Y$. Denotamos por J o T_2-ideal de $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ que consiste das identidades graduadas de $M_{1,1}(E)$. De acordo com o Teorema 1.7.12, J é gerado por

$$[x_1, x_2] \quad \text{e} \quad y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1,$$

e assim $J \subseteq W$.

Observe que o centro da álgebra $M_{1,1}(E)$, consiste das matrizes $\{aI \mid a \in E_0\}$, onde I é a matriz identidade de ordem 2.

Lema 2.2.1 *Os polinômios $[y_1, y_2]$, $z_1[x_1, x_2]z_2$ e $z_1(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1)z_2$ são polinômios centrais graduados de $M_{1,1}(E)$.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 1.7.12, $[x_1, x_2]$ e $y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1$ são também identidades graduadas para $M_{1,1}(E)$, logo $z_1[x_1, x_2]z_2$ e $z_1(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1)z_2$ são identidades graduadas e assim são polinômios centrais graduados para $M_{1,1}(E)$.

Sejam $A, B \in (M_{1,1}(E))_1$. Então $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & a_3 \\ a_4 & 0 \end{pmatrix}$. Observe que $[A, B] = \begin{pmatrix} a_1a_4 + a_2a_3 & 0 \\ 0 & a_1a_4 + a_2a_3 \end{pmatrix}$ e $a_1a_4 + a_2a_3 \in E_0$. Logo $[A, B]$ é central e, portanto, $[y_1, y_2]$ é um polinômio central graduado de $M_{1,1}(E)$. ■

Lema 2.2.2 *Os polinômios $(y_1 \circ y_2)(y_3 \circ y_4)$ e $[y_1, y_2][y_3, y_4]$ estão em W. Além disso W é multiplicativamente fechado.*

Demonstração: Como $y_2y_3y_4 + y_4y_3y_2 \in J$ temos que $y_1(y_2y_3y_4 + y_4y_3y_2) = y_1y_2y_3y_4 + y_1y_4y_3y_2 \in J \subseteq W$. Porém $y_1y_4y_3 \in \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle_1$ e assim $[y_1y_4y_3, y_2] \in W$. Daí, $y_1y_2y_3y_4 + y_1y_4y_3y_2 - y_1y_4y_3y_2 + y_2y_1y_4y_3 \in W$. Da mesma forma, temos $y_1y_2y_4y_3 + y_2y_1y_3y_4 \in W$ e assim $-(y_1y_2y_4y_3 + y_2y_1y_3y_4) + y_1y_2y_3y_4 + y_2y_1y_4y_3 = [y_1, y_2][y_3, y_4] \in W$ e $y_1y_2y_4y_3 + y_2y_1y_3y_4 + y_1y_2y_3y_4 + y_2y_1y_4y_3 = 4(y_1 \circ y_2)(y_3 \circ y_4) \in W$, daí $(y_1 \circ y_2)(y_3 \circ y_4) \in W$.

Além disso, todo elemento de W tem a forma

$$\alpha_1 [f_1, g_1] + ... + \alpha_n [f_n, g_n] + h,$$

onde $f_i, g_i \in \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle_1, h \in J$. Porém, como $[y_1, y_2][y_3, y_4] \in W$, concluímos que W é multiplicativamente fechado. ■

Teorema 2.2.3 *O T_2-espaço $C_2(M_{1,1}(E))$ é gerado pelos polinômios*

$$[y_1, y_2], \quad z_1[x_1, x_2]z_2 \quad e \quad z_1(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1)z_2.$$

Em outras palavras, $C_2(M_{1,1}(E)) = W$

Demonstração: Pelo Lema 2.2.1 temos que $W \subseteq C_2(M_{1,1}(E))$. Resta mostrar que $C_2(M_{1,1}(E)) \subseteq W$. Seja $f \in C_2(M_{1,1}(E))$ um polinômio multi-homogêneo (podemos supor a multi-homogeneidade de f, pois $\mathbb{K}$ é infinito). Se f depende apenas das variáveis de X, é possível mostrar que $f \in J$, como foi mostrado no Teorema 2.1.3.

Pelo Teorema 1.7.12, J é gerado por $[x_1, x_2]$ e $y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1$. Assim, sendo f multi-homogêneo, dependendo apenas das variáveis de X temos que

$$f = f(x_1, ..., x_n) = \alpha x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} + g, \text{com } g \in J.$$

Substituindo x_i por E_{11} temos $f = \alpha E_{11}$. Como $f \in C_2(M_{1,1}(E))$ e $E_{11} \notin Z(M_{1,1}(E))$ temos que $\alpha = 0$. Assim $f \in J \subseteq W$.

Suponhamos agora que f dependa também das variáveis de Y. Se $f \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_1$, então os valores de f em $M_{1,1}(E)$ serão matrizes cujos elementos da diagonal principal são nulos e os da diagonal secundária estão em E_1. Como $f \in C_2(M_{1,1}(E))$, então $f = 0$ em $M_{1,1}(E)$, e assim f é uma identidade graduada para $M_{1,1}(E)$. Logo $f \in J \subseteq W$.

Se $f \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_0$, então o número de variáveis de Y em todo monômio de f deve ser par, e f é uma combinação linear de termos $u_1u_2...u_n$, onde $n \geq 2$ é par e todo $u_i \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_1$. Análogo ao que foi feito no Teorema 2.1.3, podemos concluir que, módulo J, o polinômio f é uma combinação de termos $h_1h_2...h_mv_1v_2...v_k$, onde $m, k \geq 0$, todo h_i é da forma $[u_j, u_{j+1}]$ e todo v_i é da forma $u_j \circ u_{j+1}$. Fazendo $f = f_1 + f_2$, onde em f_1 colocamos todos os termos $h_1h_2...h_mv_1v_2...v_k$ com k par, e em f_2 todos os termos com k ímpar.

Então $f_1 \in W$, o que implica em $f_2 \in C_2(M_{1,1}(E))$. Porém os valores de f_2 em $M_2(\mathbb{K})$ são matrizes de traço zero, e assim, $f_2 \in J$. Portanto, $f \in W$. ■

2.3 A álgebra $E \otimes E$

Considere em $E \otimes E$ a $\mathbb{Z}_2$-graduação definida no Exemplo 1.7.6. Sabemos que as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades graduadas em $char\mathbb{K} = 0$. Assim, quando $char\mathbb{K} = 0$, $C_2(M_{1,1}(E)) = C_2(E \otimes E)$.

Suponhamos, então, $char\mathbb{K} = p > 2$.

Lema 2.3.1 *O polinômio x_1^p está em $C_2(E \otimes E)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.7.12 temos que $[x_1^p, y_1]$, $[x_1, x_2] \in T_2(E \otimes E)$. Observando que x_1^p é um elemento de grau zero, temos $[x_2^p, x_1] \in T_2(E \otimes E)$. Assim $b^p a = ab^p$, para todo $a \in (E \otimes E)_0 \cup (E \otimes E)_1$ e todo $b \in (E \otimes E)_0$. Dessa forma temos que $x_1^p \in C_2(E \otimes E)$. ■

Seja E' a álgebra de Grassmann sem unidade. Ela é graduada, pois $E' = E'_0 \oplus E'_1$, com $E'_1 = E_1$. Seja $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+\alpha & b \\ c & d+\alpha \end{pmatrix} ; a, d \in E'_0, b, c \in E_1, \alpha \in \mathbb{K} \right\}$. A é uma subálgebra de $M_{1,1}(E)$.

Foi provado em [25] que A e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades graduadas. Note que consideramos $A = A_0 \oplus A_1$, como álgebra graduada com a graduação herdada de $M_{1,1}(E)$. Assim, o seguinte lema está provado.

Lema 2.3.2 $C_2(A) = C_2(E \otimes E)$.

Seja U o T_2-espaço de $\mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle$ gerado pelos polinômios

$$z_1[x_1, x_2]z_2, \quad z_1 (y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1) z_2, \quad z_1 [x_1^p, y_1] z_2, \quad [y_1, y_2] \quad \text{e} \quad x_1^p$$

onde $z_i \in X \cup Y$. Observe que se U fosse um T_2-ideal, o terceiro polinômio seria consequência do quinto. Como nos referimos a T_2-espaços, não nos é permitido fazer uma multiplicação entre variáveis ou polinômios. Por outro lado, o polinômio $[x_1^p, y_1] \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_1$ enquanto $x_1^p \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_0$, portanto, nenhum endomorfismo graduado de $\mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle$ pode mandar o último polinômio no anterior.

Lema 2.3.3 $T_2(A) \subseteq U \subseteq C_2(A)$.

Lema 2.3.4 *Os polinômios* $(y_1 \circ y_2)(y_3 \circ y_4)$, $[y_1, y_2][y_3, y_4]$, $[y_1, y_2] x_1^p$, $x_1^p x_2^p$ *estão em* U. *Além disso,* U *é multiplicativamente fechado.*

Demonstração: Como $z_1 (y_2y_3y_4 + y_4y_3y_2) z_2 \in U$, tomamos $z_1 = y_1$ e $z_2 = 1$. Assim $y_1y_2y_3y_4 + y_1y_4y_3y_2 \in U$. Porém $y_1y_4y_3 \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_1$, então $[y_1y_4y_3, y_2] = y_1y_4y_3y_2 - y_2y_1y_4y_3 \in U$. Com isso $y_1y_2y_3y_4 + y_1y_4y_3y_2 - y_1y_4y_3y_2 + y_2y_1y_4y_3 = y_1y_2y_3y_4 + y_2y_1y_4y_3 \in U$. Da mesma forma, temos $y_1y_2y_4y_3 + y_2y_1y_3y_4 \in U$. Assim $-y_1y_2y_4y_3 - y_2y_1y_3y_4 + y_1y_2y_3y_4 + y_2y_1y_4y_3 = [y_1, y_2][y_3, y_4] \in U$ e $y_1y_2y_4y_3 + y_2y_1y_3y_4 + y_1y_2y_3y_4 + y_2y_1y_4y_3 = 4(y_1 \circ y_2)(y_3 \circ y_4) \in U$ e $(y_1 \circ y_2)(y_3 \circ y_4) \in U$.

Como $[x_1, x_2] \in T_2(A)$, temos $x_1^p x_2^p \equiv (x_1x_2)^p \, mod(T_2(A))$. Porém $(x_1x_2)^p \in U$, assim $x_1^p x_2^p \in U$. Temos que $[y_1, y_2] x_1^p = y_1y_2x_1^p - y_2y_1x_1^p + y_1x_1^py_2 - y_1x_1^py_2 = [y_1x_1^p, y_2] - y_1 [x_1^p, y_2] \in U$.

Todo elemento de U é uma combinação linear de termos da forma $[u_1, v_1] + ... + [u_n, v_n] + \alpha_1 f_1^p + ... + \alpha_m f_m^p + g$, onde u_i, $v_i \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_1$, $f_i \in \mathbb{K}\langle X \cup Y \rangle_0$, $g \in T_2(A)$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Segue das afirmações anteriores que U é multiplicativamente fechado. ■

Teorema 2.3.5 *O T_2-espaço $C_2(E \otimes E)$ é gerado pelos elementos*

$$z_1[x_1, x_2]z_2, \quad z_1\left(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1\right)z_2, \quad z_1\left[x_1^p, y_1\right]z_2, \quad [y_1, y_2] \quad e \quad x_1^p.$$

Em outras palavras, $C_2(E \otimes E) = U$

Demonstração: É suficiente mostrar que $C_2(A) \subseteq U$. Seja $f \in C_2(A)$ multi-homogêneo. Se f depender de alguma variável y_i, então $f \in U$ (demonstração análoga a do Teorema 2.2.3).

Seja $f = f(x_1, ..., x_n)$. Como $[x_1, x_2] \in T_2(A)$ então $f = \alpha x_1^{k_1} ... x_n^{k_n} + g$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$, $k_i \geq 1$ e $g \in T_2(A)$. Substituindo x_i por $\begin{pmatrix} e_{2i-1}e_{2i} + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$, $i = 1, ..., n$ onde e_j é gerador de E, obtemos que

$$\alpha \begin{pmatrix} (e_1e_2 + 1)^{k_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_3e_4 + 1)^{k_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} (e_{2n-1}e_{2n} + 1)^{k_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

está no centro de A. Porém $(e_{2i-1}e_{2i} + 1)^{k_i} = k_ie_{2i-1}e_{2i} + 1$. Logo isso só pode acontecer se $\alpha = 0$ ou $k_i = 0$ em $\mathbb{K}$ para todo i.

Se $\alpha = 0$, então $f = g \in T_2(A)$. Se $k_i = 0$ em $\mathbb{K}$, então p divide k_i. Assim $f = \alpha\left(x_1^{t_1}\right)^p ... \left(x_n^{t_n}\right)^p + g \in U$ e a demonstração é concluída. ■

Capítulo 3

Polinômios centrais para a álgebra de Grassmann

Neste capítulo faremos um estudo sobre o T-espaço $C(E)$ dos polinômios centrais para a álgebra de Grassmann sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Na primeira seção serão apresentados alguns resultados que dizem respeito ao T-ideal $T(E)$ das identidades polinomiais de E, feito em [1] . Ao longo da segunda seção, serão apresentados os geradores para o T-espaço $C(E)$, também feito em [1], e na terceira seção é introduzido o conceito de espaço limite. Ao final do capítulo, exibiremos alguns resultados para o caso de característica 0. Em todo este capítulo $\mathbb{K}$ denotará sempre um corpo infinito de característica diferente de 2.

3.1 Considerações iniciais

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados de grande importância neste capítulo. Sejam $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre unitária livremente gerada por X, com $X = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$, E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita definida no Exemplo 1.1.4 e T o T-ideal gerado pelo comutador triplo $[x_1, x_2, x_3]$.

Lema 3.1.1 *Para todo g, g_1, g_2, g_3, $g_4 \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ valem:*

i) *Os elementos $[g_1, g_2] + T$ são centrais em $\mathbb{K}\langle X\rangle /T$;*

ii) $[g_1, g_2][g_3, g_4] + [g_1, g_3][g_2, g_4]\,,\ [g_1, g_2][g_2, g_4] \in T$.

Se $char\mathbb{K} = p > 2$ *valem:*

iii) *Os elementos* $g^p + T$ *são centrais em* $\mathbb{K}\langle X\rangle / T$*;*

iv) $(g_1g_2)^p + T = g_1^p g_2^p + T$*;*

v) $(g_1 + g_2)^p + T = g_1^p + g_2^p + T$*.*

Demonstração: A demonstração de (i) é imediata. Para provar (ii) observe que $[g_1, g_2g_3, g_4] \in T$. Usando a igualdade $[uv, w] = u[v, w] + [u, w]v$ e observando que $[g_1, g_2] + T$ é central em $\mathbb{K}\langle X\rangle / T$, concluímos que $[g_1, g_2][g_3, g_4] + [g_1, g_3][g_2, g_4] \in T$. Tomando agora $g_2 = g_3$ e observando que $char\mathbb{K} \neq 2$ concluímos que $[g_1, g_2][g_2, g_4] \in T$. Para provar (iii) basta observar a demonstração da Proposição 1.6.15. Em (iv) usamos a Equação (1.2) para mostrar que vale a seguinte fórmula:

$$(x_1x_2)^n \equiv x_1^n x_2^n + \frac{n(n-1)}{2} x_1^{n-1} x_2^{n-1} [x_2, x_1] \ (mod\ T)$$

Como $char\mathbb{K} = p > 2$, temos que

$$(x_1x_2)^p \equiv x_1^p x_2^p \ (mod\ T)$$

e assim obtemos que $(g_1g_2)^p + T = g_1^p g_2^p + T$ para quaisquer g_1, $g_2 \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Para (v) basta usar a fórmula

$$(x_1 + x_2)^n \equiv \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_1^{n-j} x_2^j + \frac{n(n-1)}{2} (x_1 + x_2)^{n-2} [x_2, x_1] \ (mod\ T)$$

que pode ser demonstrada por indução sobre n. Com isto e como $char\mathbb{K} = p > 2$ temos

$$(x_1 + x_2)^p \equiv x_1^p + x_2^p \ (mod\ T).$$

Assim temos que a igualdade $(g_1 + g_2)^p + T = g_1^p + g_2^p + T$ é válida para quaisquer g_1, $g_2 \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. ■

Lema 3.1.2 *Seja* I *um* T*-ideal de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *tal que* $T \subsetneq I$*. Então*

$$I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}] \rangle^T,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração: Pelo Lema anterior, os polinômios

$$[x_1, x_2]\,[x_2, x_3] \text{ e } [x_1, x_2]\,[x_3, x_4] + [x_1, x_3]\,[x_2, x_4]$$

pertencem a T.

Como $\mathbb{K}$ é infinito e $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é unitária, temos que I é gerado por seus polinômios próprios multihomogêneos. Se $w = [x_{i_1}, ..., x_{i_k}] ... [x_{j_1}, ..., x_{j_l}]$ e algum desses comutadores tem comprimento maior que 2, então $w \in T$. Logo, se $w \notin \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ então $w = [x_{i_1}, x_{i_2}] ... \left[x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}\right]$. A lei anticomutativa dos comutadores e a primeira observação feita nesta demonstração nos dá que, módulo o T-ideal $T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ podemos mudar de lugar as variáveis em w. Em particular, se x_{i_p} e x_{i_q} em w são iguais, obtemos que $w \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$.

Seja $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ um polinômio próprio multihomogêneo pertencente a $I - T$. Pelas observações acima devemos ter $f = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j w_j \ (mod\ T)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e os w_j's são produtos multilineares de comutadores de grau 2, todos com o mesmo multigrau. Logo n é par. Usando novamente o fato de que $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv -[x_1, x_3][x_2, x_4] \ (mod\ T)$, concluímos que $f \equiv \alpha[x_1, x_2]...[x_{n-1}, x_n] \ (mod\ T)$ com $\alpha \neq 0$. Assim $[x_1, x_2]...[x_{n-1}, x_n] \in I$. Tomando então $n_0 = min\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ par}, [x_1, x_2]...[x_{n-1}, x_n] \in I\}$, concluímos que $\langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2]...[x_{n-1}, x_{n_0}] \rangle^T = I$ ■

Proposição 3.1.3 $T(E) = T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$.

Demonstração: Sabemos que a álgebra de Grassmann E satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3] = 0$. Assim temos $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T = T \subseteq T(E)$.

Supondo $T \subsetneq T(E)$, segue do Lema 3.1.2 que $[x_1, x_2] ... [x_{2n-1}, x_{2n}] \in T(E)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mas isto é um absurdo pois $[e_1, e_2] ... [e_{2k-1}, e_{2k}] = 2^k e_1 e_2 ... e_{2k-1} e_{2k} \neq 0$ em E. Logo $T(E) = T$ ■

A seguinte Proposição é bem conhecida e segue do Teorema 4.3.11 (i) e da demonstração do Teorema 5.1.2 (i) de [12].

Proposição 3.1.4 *O $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}\langle X\rangle / T$ tem como base*

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} ... x_{i_s}^{n_s} \,[x_{j_1}, x_{j_2}] ... \left[x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}\right] + T \tag{3.1}$$

onde s, $r \geq 0$, $i_1 < i_2 < ... < i_s$, $j_1 < j_2 < ... < j_{2r}$, $n_k \geq 0$, para todo k.

3.2 Descrição para $C(E)$ quando $char\mathbb{K} = p > 2$

Lema 3.2.1 *Seja $g = g(x_2, ..., x_l) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um polinômio que não dependa de x_1. Suponha que $x_1 g + T$ seja central em $\mathbb{K}\langle X\rangle /T$. Então $g \in T$.*

Demonstração: Supondo que $x_1 g + T$ seja central em $\mathbb{K}\langle X\rangle /T$ temos que $[x_1 g, h] \in T$, para qualquer $h \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Assim $[x_1 g, h] \in T(E)$, para qualquer $h \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Portanto $x_1 g \in C(E)$. Fazendo $x_1 = 1$, temos $g \in C(E)$. Mas, g e $x_1 g$ pertencentes a $C(E)$ só é possível se g for identidade de E. Logo, $g \in T(E) = T$. ■

Lema 3.2.2 *Seja $f = f(x_1, ..., x_l) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1. Suponha que $f + T$ seja central em $\mathbb{K}\langle X\rangle /T$. Então $f + T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle /T$ gerado por $[x_1, x_2] + T$.*

Demonstração: Seja $f = \sum\limits_i \alpha_i a_i x_1 b_i$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e a_i e b_i são monômios (alguns deles possivelmente iguais a 1) que não dependem de x_1.

Como $ax_1 b = x_1 ba + [a, x_1 b]$, para todo $a, b \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ temos

$$f = x_1 g\left(x_2, ..., x_l\right) + h\left(x_1, ..., x_l\right),$$

onde $h\left(x_1, ..., x_l\right) = \sum\limits_i \alpha_i \left[a_i, x_1 b_i\right]$ pertence ao T-espaço gerado por $[x_1, x_2]$ e $g = g\left(x_2, ..., x_l\right)$ não depende de x_1. Como $f + T$ e $h + T$ são centrais em $\mathbb{K}\langle X\rangle /T$ temos que $x_1 g + T$ também é. Assim, pelo Lema 3.2.1, $g \in T$. Daí, segue-se que $x_1 g + T = T$ e assim

$$f + T = h + T = \sum_i \alpha_i \left[a_i, x_1 b_i\right] + T.$$

Portanto $f + T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle /T$ gerado por $[x_1, x_2] + T$. ■

Lema 3.2.3 *Suponha $char\mathbb{K} = p > 2$ e seja $f = f(x_1, ..., x_l) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau m_1 em x_1. Suponha que $f + T$ seja central em $\mathbb{K}\langle X\rangle /T$ e que m_1 não seja múltiplo de p. Então $f + T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle /T$ gerado por $[x_1, x_2] + T$.*

Demonstração: Seja $m_1 = pq + m$ onde $0 < m < p$. Como $f + T$ é uma combinação linear de elementos da forma (3.1), temos que $f + T = x_1^{pq} g + T$, onde $g = g(x_1, ..., x_l)$ é de grau m em x_1.

Seja $\varphi \in End\mathbb{K}\langle X\rangle$, tal que $\varphi(x_1) = 1 + x_1$, e $\varphi(x_j) = x_j$ para todo $j \neq 1$. Assim

$$\varphi(f) \equiv (1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, x_2, ..., x_l)(mod\ T)$$

e a componente homogênea de $\varphi(f)$ de grau m em x_1 é, módulo T, $g(x_1,...,x_l)$. Segue-se daí que $g+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$, gerado por $f+T$. Como $f+T$ é central em $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$, os elementos pertencentes ao T-espaço gerado por $f+T$ também são. Assim, $g+T$, em particular, é central em $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$.

Seja $h=h\left(x_1',...,x_m',x_2,...,x_l\right)$ a linearização total de g com respeito a x_1, ou seja, $h\left(x_1',...,x_m',x_2,...,x_l\right)$ é a componente homogênea de $g\left(x_1'+...+x_m',x_2,...,x_l\right)$ que é multilinear em $x_1',...,x_m'$. Assim

$$h\left(x_1,...,x_1,x_2,...,x_l\right)=m!g(x_1,...,x_l).$$

O polinômio h é de grau 1 em x_1'. Por outro lado, $h+T$ é central em $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$, pois pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$ gerado por $g+T$. Aplicando o Lema 3.2.2, $h+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1,x_2]+T$ e vale

$$g(x_1,...,x_l)+T=(m!)^{-1}\,h\left(x_1,...,x_1,x_2,...,x_l\right)+T.$$

Assim, temos que $f+T=(x_1^p)^q\,g+T$ pertence ao T-espaço gerado por $x_0^p\,[x_1,x_2]+T$, que está contido no T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1,x_2]+T$. Logo $f+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1,x_2]+T$. ■

Considere $q(x_1,x_2)=x_1^{p-1}\,[x_1,x_2]\,x_2^{p-1}$. Para cada $n\geq 1$, defina

$$q_n=q_n(x_1,...,x_{2n})=q(x_1,x_2)q(x_3,x_4)...q(x_{2n-1},x_{2n}).$$

Observe que para cada $n\geq 1$, $q_n(x_1,...,x_{2n})$ é um polinômio central para E. Dessa forma, $x_0^pq_n$, para $n\geq 1$, também é central para E.

Teorema 3.2.4 *Sobre um corpo infinito $\mathbb{K}$ de característica $p>2$ o espaço vetorial $C(E)$ dos polinômios centrais de E é gerado, como T-espaço em $\mathbb{K}\langle X\rangle$ pelos polinômios*

$$x_1\,[x_2,x_3,x_4] \tag{3.2}$$

e

$$x_0^p\;\;,\;\;x_0^pq_1\;\;,\;\;x_0^pq_2\;\;,...,\;\;x_0^pq_n\;,... \tag{3.3}$$

Demonstração: Seja $f = f(x_1, ..., x_l) \in C(E)$ um polinômio multihomogêneo de grau m_i em x_i, $i = 1, 2, ..., l$. Então $f + T$ é central em $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$. Observe que o T-ideal T está contido no T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado pelo polinômio (3.2). Assim, se $f \in T$, então f pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por (3.2).

Suponha que $f \notin T$ e que para algum i, $1 \leq i \leq l$, m_i não seja múltiplo de p. Renomeando as variáveis x_i, podemos assumir sem perda de generalidade que $i = 1$. Então, pelo Lema 3.2.3, $f + T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1, x_2] + T$. Segue-se daí que f pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por (3.2) e $[x_1, x_2]$. Porém $[x_1, x_2]$ é a componente homogênea de multigrau $(0, 1, 1)$ do polinômio $(1 + x_0)^p (1 + x_1)^{p-1} [1 + x_1, 1 + x_2] (1 + x_2)^{p-1}$. Assim o T-espaço gerado por $[x_1, x_2]$ está no T-espaço gerado pelo polinômio $x_0^p x_1^{p-1} [x_1, x_2] x_2^{p-1}$ que é igual a $x_0^p q_1$. Desde que m_i não seja um múltiplo de p para algum i, f pertence ao T-espaço gerado por (3.2) e por $x_0^p q_1$.

Suponha agora que $f \notin T$ e que, para todo i, m_i seja múltiplo de p. Como $f + T$ é uma combinação linear dos elementos da forma (3.1) e, pelo Lema 3.1.1, os elementos $x_1^p + T$ e $[x_i, x_j] + T$ são centrais em $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$, temos que $f + T$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$x_1^{pq_1} ... x_l^{pq_l} x_{i_1}^{p-1} [x_{i_1}, x_{i_2}] x_{i_2}^{p-1} ... x_{i_{2k-1}}^{p-1} \left[x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}\right] x_{i_{2k}}^{p-1} + T \tag{3.4}$$

onde $k, l \geq 0$, $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_{2k}$. Além disso, desde que $(x_1 x_2)^p + T = x_1^p x_2^p + T$, o elemento (3.4) pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$ gerado por

$$x_0^p x_1^{p-1} [x_1, x_2] x_2^{p-1} ... x_{2k-1}^{p-1} [x_{2k-1}, x_{2k}] x_{2k}^{p-1} + T = x_0^p q_k + T.$$

Segue-se daí que f pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$ gerado pelo polinômio (3.2) e pelo conjunto de polinômios em (3.3). ■

Considere I o ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado pelos elementos f^p de todos os polinômios $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ sem o termo escalar. Considere também V_n o T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por $q_1, ..., q_n$(que foram definidos logo antes do Teorema 3.2.4). A seguinte proposição se deve a Shchigolev e é uma reformulação de [36], Lema 13.

Proposição 3.2.5 *Para cada inteiro positivo $n \geq 1$ existe $k(n) > n$ tal que $q_{k(n)} \notin V_n + T + I$.*

Seja W_n o T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por $x_0^p, x_0^p q_1, ..., x_0^p q_n$. Seja $\langle 1\rangle_{\mathbb{K}} \cong \mathbb{K}$ o subespaço gerado por 1 em $\mathbb{K}\langle X\rangle$.

Lema 3.2.6 *Para cada $n \geq 1$, $V_n + \langle 1\rangle_{\mathbb{K}} + I = W_n + I$.*

Demonstração: Como $q_i(x_1, ..., x_{2i})$ é a componente homogênea de grau 0 em x_0 de $(1+x_0)^p\, q_i\,(x_1, ..., x_{2i})$, q_i está contido no T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por $x_0^p q_i$. Assim $q_i \in W_n$, para todo $i \leq n$. Temos também que $1 \in W_n$. Logo $V_n + \langle 1\rangle_{\mathbb{K}} \subseteq W_n$ para todo n e assim $V_n + \langle 1\rangle_{\mathbb{K}} + I \subseteq W_n + I$, para $n \geq 1$.

Resta mostrar que $W_n \subseteq V_n + \langle 1\rangle_{\mathbb{K}} + I$, para todo n. Sejam $g_0, g_1, ..., g_{2i} \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ elementos arbitrários. Suponhamos que $g_0 = \alpha + f$, onde $\alpha \in \mathbb{K}$ e f é um polinômio sem termos escalar. Então

$$g_0^p = (\alpha + f)^p = \alpha^p + f^p \in \langle 1\rangle_{\mathbb{K}} + I.$$

Por outro lado

$$g_0^p q_i\,(x_1, ..., x_{2i}) = (\alpha + f)^p\, q_i\,(x_1, ..., x_{2i}) =$$

$$\alpha^p q_i\,(x_1, ..., x_{2i}) + f^p q_i\,(x_1, ..., x_{2i}) = \alpha^p q_i\,(x_1, ..., x_{2i}) + h,$$

onde $h \in I$. Assim $g_0^p q_i\,(g_1, ..., g_{2i}) \in V_i + I$, para todo i e todos $g_0, g_1, ..., g_{2i} \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Como W_n é gerado como $\mathbb{K}$-espaço vetorial por todos os elementos g_0^p e $g_0^p q_i\,(g_1, ..., g_{2i})$, para quaisquer $i \leq n$ e $g_0, g_1, ..., g_{2i} \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, temos que $W_n \subseteq V_n + \langle 1\rangle_{\mathbb{K}} + I$, para todo $n \geq 1$.

Portanto $V_n + \langle 1\rangle_{\mathbb{K}} + I = W_n + I$. ■

O Teorema a seguir é o principal resultado desta seção. Ele afirma que quando o corpo $\mathbb{K}$ tiver característica igual a $p > 2$ e for infinito, o T-espaço $C(E)$ não é finitamente gerado.

Teorema 3.2.7 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito de característica $p > 2$. Então o espaço vetorial $C(E)$ dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann unitária E sobre $\mathbb{K}$ não é finitamente gerado como T-espaço em $\mathbb{K}\langle X\rangle$.*

Demonstração: De acordo com a Proposição 3.2.5, para cada $n \geq 1$, existe $k(n) > n$ tal que $V_{k(n)} \nsubseteq V_n + T + I$, ou equivalentemente $V_n + T + I \subsetneq V_{k(n)} + T + I$.

Como para cada l, nenhum elemento de $V_l + T + I$ tem termo escalar diferente de zero, $V_n + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + T + I \subsetneq V_{k(n)} + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}} + T + I$. Pelo Lema 3.2.6 temos $W_n + T + I \subsetneq W_{k(n)} + T + I$ para cada n. Assim $W_n + T \subsetneq W_{k(n)} + T$, para todo n. Logo a cadeia

$$W_1 + T \subseteq W_2 + T \subseteq ... \subseteq W_n + T \subseteq ...$$

contém uma subcadeia estritamente ascendente infinita. Pelo Teorema 3.2.4 temos

$$C(E) = \bigcup_n (W_n + T),$$

ou seja, o $C(E)$ não é finitamente gerado como T-espaço. ■

3.3 $C(E)$ como T-espaço limite

Definição 3.3.1 *Um T-espaço V em $\mathbb{K}\langle X \rangle$ é chamado **T-espaço limite** se todo T-espaço maior $W \supsetneq V$ for finitamente gerado como T-espaço, mas V não.*

Proposição 3.3.2 *Seja W um T-espaço em $\mathbb{K}\langle X \rangle$, tal que $C(E) \subsetneq W$. Então existe um T-ideal $I \supsetneq T$ em $\mathbb{K}\langle X \rangle$, tal que $W = C(E) + I$.*

Demonstração: Defina I como sendo o maior T-ideal contido em W. Temos que $I + C(E) \subseteq W$. Devemos mostrar que $W \subseteq I + C(E)$.

Seja $f = f(x_1, x_2, ..., x_l)$ um elemento arbitrário de W. Podemos assumir que f seja multihomogêneo de grau m_i em x_i. Se todo m_i for múltiplo de p, então $f + T$ é uma combinação linear sobre $\mathbb{K}$ de elementos na forma (3.4) que são centrais em $\mathbb{K}\langle X \rangle / T$. Assim $f \in C(E)$, e portanto $f \in I + C(E)$.

Suponhamos então que $f \notin C(E)$. Deve existir i, tal que m_i não seja múltiplo de p. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $i = 1$. Assim $m_1 = pq + m$, onde $0 < m < p$. Então $f + T = x_1^{pq} g(x_1, ..., x_l) + T$, onde $g = g(x_1, ..., x_l)$ é de grau m em x_1.

Seja $\varphi \in End\mathbb{K}\langle X \rangle$, tal que $\varphi(x_1) = 1 + x_1$, e $\varphi(x_j) = x_j$ para todo $j \neq 1$. Assim

$$\varphi(f) + T = (1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, x_2, ..., x_l) + T$$

e a componente homogênea de $\varphi(f)$ de grau m em x_1 é, módulo T, $g(x_1, ..., x_l)$. Segue-se daí que $g \in W$.

Seja $h = h(x'_1, ..., x'_m, x_2, ..., x_l)$ a linearização total de g com respeito a x_1, ou seja, $h(x'_1, ..., x'_m, x_2, ..., x_l)$ é a componente homogênea de $g(x'_1 + ... + x'_m, x_2, ..., x_l)$ que é multilinear em $x'_1, ..., x'_m$. Então $h \in W$ e

$$h(x_1, ..., x_1, x_2, ..., x_l) = m!g(x_1, ..., x_l).$$

O polinômio h é de grau 1 em x'_1, então, como foi feito na demonstração do Lema 3.2.2,

$$h = x'_1 h_1(x'_2, ..., x'_m, x_2, ..., x_l) + h_2(x'_1, ..., x'_m, x_2, ..., x_l),$$

onde h_1 não depende de x'_1 e $h_2 + T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1, x_2] + T$. Como $h_2 \in C(E)$, temos $x'_1 h_1 \in W$, e assim $x''_1 x'_1 h_1 \in W$. Além disso

$$x'_1 h_1 x''_1 = x''_1 x'_1 h_1 + [x'_1 h_1, x''_1] \in W,$$

em outras palavras, o T-ideal gerado por h_1 está contido em W. Portanto $h_1 \in I$. Assim $h = x'_1 h_1 + h_2 \in I + C(E)$ e $g = (m!)^{-1} h(x_1, ..., x_1, x_2, ..., x_l) \in I + C(E)$. Como $f = x_1^{pq} g + g_1$, onde $g_1 \in T + C(E)$ e $x_1^{pq}(I + C(E)) \subseteq I + C(E)$ temos que $f \in I + C(E)$. Logo $W = C(E) + I$. ■

Teorema 3.3.3 *O espaço vetorial $C(E)$ dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann sobre um corpo infinito $\mathbb{K}$ de característica $p > 2$ é um T-espaço limite em $\mathbb{K}\langle X\rangle$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.7 temos que $C(E)$ não é finitamente gerado. Então é suficiente mostrar que cada T-espaço $W \supsetneq C(E)$ é finitamente gerado como T-espaço.

Pela Proposição 3.3.2, $W = I + C(E)$ para algum T-ideal $I \supsetneq T$ em $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Pelo Lema 3.1.2, temos que I é gerado como T-ideal por

$$[x_1, x_2, x_3] \text{ e } [x_1, x_2][x_3, x_4] ... [x_{2N-1}, x_{2N}],$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. Como T-espaço, I é gerado por

$$x_0 [x_1, x_2, x_3] \tag{3.5}$$

e

$$x_0 [x_1, x_2][x_3, x_4] ... [x_{2N-1}, x_{2N}]. \tag{3.6}$$

Como o T-espaço $C(E)$ é gerado por (3.5) e pelo conjunto (3.3), o T-espaço $W = I + C(E)$ é gerado por (3.3), (3.5) e (3.6).

Observe que $x_0^p q_s \in I$ para todo $s \geq N$, pois, pelo Lema 3.1.2

$$x_0^p q_s + T = x_0^p x_1^{p-1} [x_1, x_2] x_2^{p-1} ... x_{2s-1}^{p-1} [x_{2s-1}, x_{2s}] x_{2s}^{p-1} + T =$$

$$x_0^p x_1^{p-1} x_2^{p-1} ... x_{2s-1}^{p-1} x_{2s}^{p-1} [x_1, x_2] ... [x_{2s-1}, x_{2s}] + T.$$

Daí temos que W é gerado como T-espaço pelos polinômios (3.5), (3.6) e x_0^p, $x_0^p q_1$, $x_0^p q_2$, ..., $x_0^p q_{N-1}$. Portanto W é um T-espaço finitamente gerado. ■

3.4 $C(E)$ quando $char\mathbb{K} = 0$

Conforme foi visto no Exemplo 1.6.14, considere V o T-espaço de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.

Proposição 3.4.1 *Quando $char\mathbb{K} = 0$, temos $C(E) = V + \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}}$.*

Demonstração: Como $[x_1, x_2]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ são polinômios centrais para E, temos que $V \subseteq C(E)$. Ademais, $T(E) \subseteq V$, uma vez que $T(E)$ é exatamente o T-ideal de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ gerado por $[x_1, x_2, x_3]$. Tomando agora $f(x_1, ..., x_n) \in C(E)$ multilinear (veja Observação 1.6.11) não constante e usando a mesma ideia do Exemplo 1.6.12, podemos concluir que

$$f(x_1, ..., x_n) = x_1 g(x_2, ..., x_n) \ (mod\ V),$$

onde g é multilinear. Segue então que $x_1 g(x_2, ..., x_n) \in C(E)$ e, análogo ao que foi feito na demonstração do Lema 3.2.1, concluímos que g deve ser identidade de E. Logo, $x_1 g \in T(E)$ e assim devemos ter $f(x_1, ..., x_n) \in V$. ■

No próximo resultado, veremos que $C(E)$, em característica 0, é também gerado como T-espaço pelos polinômios $x_1 [x_2, x_3, x_4]$ e $[x_1, x_2]$.

Proposição 3.4.2 *Se $char\mathbb{K} = 0$ então o T-espaço $C(E)$ é gerado por 1 e pelos polinômios $x_1 [x_2, x_3, x_4]$ e $[x_1, x_2]$.*

Demonstração: Como $char\mathbb{K} = 0$, todo T-espaço é gerado por seus polinômios multilineares. Em particular, o T-espaço $C(E)/T$ dos elementos centrais de $\mathbb{K}\langle X \rangle / T$. Além disso, pelo Lema 3.2.2, $C(E)/T$ está contido no T-espaço gerado por 1 e por

$[x_1, x_2] + T$. Como $[x_1, x_2] + T$ é central em $\mathbb{K}\langle X \rangle /T$, o T-espaço $C(E)/T$ é gerado como T-espaço por 1 e por $[x_1, x_2] + T$. Assim, $C(E)$ é gerado como T-espaço em $\mathbb{K}\langle X \rangle$ por 1, $x_1 [x_2, x_3, x_4]$ e $[x_1, x_2]$. ■

Vimos que se $char\mathbb{K} = p > 2$, o T-espaço $C(E)$ não é finitamente gerado e, se $char\mathbb{K} = 0$, foi exibido um conjunto gerador para $C(E)$ com apenas 3 elementos. Assim, é natural se perguntar o porquê de apenas a caracterísitica do corpo $\mathbb{K}$ influenciar desta forma na quantidade de geradores para $C(E)$.

Uma resposta para este questionamento é que quando a característica do corpo for zero, usamos fortemente o fato de podermos nos restringir aos polinômios centrais multilineares, uma vez que estes geram $C(E)$. No caso $char\mathbb{K} = p > 2$, não podemos lançar mão desta restrição. Alem disso, quando $char\mathbb{K} = p > 2$, o T-espaço gerado por $x_1 [x_2, x_3, x_4]$ e pelos polinômios q_n não é finitamente gerado.

Capítulo 4

Polinômios centrais com involução

Neste capítulo trataremos de álgebras com involução cujas descrições de suas identidades e polinômios centrais são de grande interesse.

No caso particular da álgebra $M_2(\mathbb{K})$ a descrição das identidades com involução já é conhecida para os casos em que $char\mathbb{K} = 0$, $\mathbb{K}$ for finito e $\mathbb{K}$ for infinito com $char\mathbb{K} \neq 2$, sendo que os dois primeiros casos foram feitos por Levchenko [28, 29] e o último feito posteriormente por Colombo e Koshlukov [9].

A descrição dos polinômios centrais com involução de $M_2(\mathbb{K})$ foi feita em [7] e será apresentada nas Seções 4.3 e 4.4. Ao longo do capítulo, veremos (como feito em [7]) que, para $M_2(\mathbb{K})$, só é necessário considerar as involuções transposta e simplética, quando se trata de identidades e polinômios centrais com involução do primeiro tipo.

Ao longo deste capítulo, $\mathbb{K}$ denotará um corpo infinito de característica diferente de 2.

4.1 Álgebras com involução

Definição 4.1.1 *Seja A uma álgebra. Uma aplicação $* : A \to A$, tal que $*(a) = a^*$, é dita uma involução se*

$$(a^*)^* = a, \ \ (a+b)^* = a^* + b^* \ \ e \ \ (ab)^* = b^*a^*$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Se $*$ for uma involução em A e $a \in A$, temos que $a1^* = ((a1^*)^*)^* = (1a^*)^* =$

$(a^*)^* = a = (a^*1)^* = ((1^*a)^*)^* = 1^*a$ e assim $1^* = 1$. Além disso, $*|_{\mathbb{K}} = Id_{\mathbb{K}}$ se, e somente se, $*$ for uma transformação linear.

Quando uma involução for também uma transformação linear dizemos que ela é do primeiro tipo. Caso contrário, dizemos que é do segundo tipo.

Neste trabalho trataremos apenas de involuções do primeiro tipo.

Exemplo 4.1.2 *A aplicação $t : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, definida por $t(A) = A^t$ (transposta de A), é uma involução do primeiro tipo em $M_n(\mathbb{K})$*

Exemplo 4.1.3 *A aplicação $s : M_{2n}(\mathbb{K}) \to M_{2n}(\mathbb{K})$, definida por*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}$$

onde $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$ é uma involução do primeiro tipo em $M_{2n}(\mathbb{K})$, chamada de involução simplética.

Exemplo 4.1.4 *Considerando $M_2(\mathbb{C})$ como $\mathbb{C}$-álgebra, temos que $* : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, definida por*

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_3} \\ \overline{z_2} & \overline{z_4} \end{pmatrix}$$

é uma involução do segundo tipo.

Definição 4.1.5 *Seja $(A, *)$ uma álgebra com involução. Dizemos que $a \in (A, *)$ é um **elemento simétrico** se $a^* = a$ e que é um **elemento anti-simétrico** se $a^* = -a$.*

Observe que $A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$ e $A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$ são subespaços de A e que $A^+ \cap A^- = \{0\}$. Além disso, se $a \in A$, então

$$a = \frac{a + a^*}{2} + \frac{a - a^*}{2}.$$

Note que

$$\left(\frac{a + a^*}{2}\right)^* = \frac{a^* + (a^*)^*}{2} = \frac{a^* + a}{2} = \frac{a + a^*}{2}$$

e

$$\left(\frac{a - a^*}{2}\right)^* = \frac{a^* - (a^*)^*}{2} = \frac{a^* - a}{2} = -\left(\frac{a - a^*}{2}\right),$$

ou seja, $\dfrac{a + a^*}{2}$ é simétrico e $\dfrac{a - a^*}{2}$ é anti-simétrico. Assim, $A = A^+ \oplus A^-$.

Observação 4.1.6 *Se $*$ for uma involução em A, então $G_* = \{x \in U(A)/x^*x = 1\}$ será um subgrupo de $U(A)$. No caso $A = M_n(\mathbb{K})$, temos $U(A) = GL_n(\mathbb{K})$, o grupo linear, e $G_t = O_n(\mathbb{K})$, o grupo ortogonal (por esta razão a involução transposta é também chamada de ortogonal). Sendo n par, temos $G_s = Sp_n(\mathbb{K})$, o grupo simplético.*

Definição 4.1.7 *Sejam $(A_1, *)$ e (A_2, η) álgebras com involução e $\varphi : A_1 \to A_2$ um homomorfismo de álgebras. Dizemos que $\varphi : (A_1, *) \to (A_2, \eta)$ é um* ***homomorfismo de álgebras com involução*** *se $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^\eta$, para todo $a \in A_1$.*

Quando existe um isomorfismo nessas condições dizemos que as álgebras com involução são isomorfas e denotamos $(A_1, *) \simeq (A_2, \eta)$.

Sejam $X = \{x_1, x_2, ...\}$ e $Y = \{y_1, y_2, ...\}$ conjuntos disjuntos de variáveis e tomemos a álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$. Consideremos $* : \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle \to \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ a aplicação linear que satisfaz

$$1^* = 1, \ \ x_i^* = x_i \ \text{ e } \ y_i^* = -y_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}$$

$$e$$

$$(z_1 z_2 ... z_k)^* = z_k^* ... z_2^* z_1^*, \text{ para quaisquer } z_1, z_2, ..., z_k \in X \cup Y.$$

Sendo $m_1 = z_1 ... z_l$ e $m_2 = z_{l+1} ... z_n$ monômios em $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ temos

$$(m_1 m_2)^* = (z_1 ... z_l z_{l+1} ... z_n)^* = z_n^* ... z_{l+1}^* z_l^* ... z_1^* = m_2^* m_1^*$$

$$e$$

$$(m_1^*)^* = (z_l^* ... z_1^*)^* = (z_1^*)^* ... (z_l^*)^* = z_1 ... z_l = m_1.$$

Logo, $*$ é uma involução.

Definição 4.1.8 $(\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle, *)$ *é uma* ***álgebra associativa livre com involução****, onde X, Y e $*$ são definidos como acima. Além disso X é o conjunto das variáveis simétricas, e Y o das variáveis anti-simétricas.*

Definição 4.1.9 *Seja $(\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle, *)$ uma álgebra associativa livre com involução nas condicões acima. Um endomorfismo φ de $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ é um* ***$*$-endomorfismo*** *se $\varphi(x_i)$ for simétrico e $\varphi(y_i)$ for anti-simétrico para todo $i \in \mathbb{N}$ (isto é equivalente a dizer que $*$ e φ comutam).*

Agora definiremos identidades e polinômios centrais para uma álgebra com involução.

Definição 4.1.10 *Sejam* $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) \in \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ *e* $(A,*)$ *uma álgebra com involução. Dizemos que* f *é uma* ***identidade de*** $(A,*)$ *se* $f(a_1,...,a_n,b_1,...,b_m) = 0$ *para quaisquer* $a_i \in A^+$ *e* $b_j \in A^-$*. Dizemos que* f *é um* ***polinômio central para*** $(A,*)$ *se* $f(a_1,...,a_n,b_1,...,b_m) \in Z(A)$ *para quaisquer* $a_i \in A^+$ *e* $b_j \in A^-$*.*

Definição 4.1.11 *Dizemos que um ideal (resp. subespaço)* J *de* $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ *é um* ***$*$-ideal*** *(resp.* ***$*$-espaço****) se* $\varphi(J) \subseteq J$ *para todo* $*$*-endomorfismo* φ *de* $K\langle X \cup Y\rangle$*, ou seja,* $f(g_1,...,g_n,h_1,...,h_m) \in J$ *para quaisquer* $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) \in J$ *e* $g_1,...,g_n$ *elementos simétricos e* $h_1,...,h_m$ *elementos anti-simétricos de* $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$*.*

Observe que o conjunto $T(A,*)$ das identidades da álgebra com involução $(A,*)$ é um $*$-ideal e que o conjunto $C(A,*)$ dos polinômios centrais para $(A,*)$ é um $*$-espaço.

Definição 4.1.12 *Dizemos que um polinômio* $f \in \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ *é* ***$*$-próprio*** *se* f *for uma combinação linear de produtos de variáveis anti-simétricas seguidas por comutadores de grau maior ou igual a 2.*

Observando o que foi desenvolvido na Seção 1.4, consideremos uma base ordenada de $L(X \cup Y)$ formada por

$$x_1, x_2, x_3..., y_1, y_2, y_3, ..., u_1, u_2, u_3, ...$$

onde $u_i = [z_{i_1}, z_{i_2}..., z_{i_k}]$, com $z_{i_j} \in X \cup Y$ e $k \geq 2$. Temos então que existe uma base de $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ formada pelos elementos

$$x_{i_1}^{n_1}x_{i_2}^{n_2}...x_{i_p}^{n_p}y_{j_1}^{m_1}y_{j_2}^{m_2}...y_{j_q}^{m_q}...u_{l_1}u_{l_2}...u_{l_k}\ ,\ p,\ q,\ k,\ n_i,\ m_j \geq 0.$$

Definição 4.1.13 *Seja* f *um polinômio multi-homogêneo em* $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$*. Escrevendo*

$$f = \sum_a \alpha_a x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}g_a$$

onde g_a *é um polinômio* $*$*-próprio, definimos o* ***posto de*** f*, denotado por* $r(f)$*, como sendo a maior* n*-upla* $a = (a_1, a_2, ...a_n)$ *na ordem lexicográfica.*

Como f possui uma única expressão na forma acima, temos que $r(f)$ está bem definido. Observemos que, de acordo com esta definição, f é $*$-próprio se, e somente se, $r(f) = (0,0,...,0)$. É importante observar também que a ordem lexicográfica é uma boa ordem no conjunto $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times ... \times \mathbb{N}_0 (\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$ e assim o princípio da indução é válido, sendo portanto possível fazer indução em $r(f)$.

Considere um polinômio multi-homogêneo

$$f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = \alpha x_1^{b_1}x_2^{b_2}...x_n^{b_n}g + \sum_a \alpha_a x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}g_a \tag{4.1}$$

onde $\alpha, \alpha_a \in \mathbb{K} - \{0\}$, g e g_a são $*$-próprios e $a = (a_1, a_2, ...a_n) < (b_1, b_2, ...b_n) = r(f)$ (na ordem lexicográfica). Observe que quanto maior a entrada a_1 na n-upla a, menor é o grau de x_1 em g_a.

Como em g e em g_a não aparecem variáveis simétricas fora dos comutadores, a substituição de x_i por $x_i + 1$ não altera estes polinômios e assim

$$f(x_1+1,x_2,...,x_n,y_1,...,y_m) = \alpha\,(x_1+1)^{b_1}\,x_2^{b_2}...x_n^{b_n}g + \sum_a \alpha_a\,(x_1+1)^{a_1}\,x_2^{a_2}...x_n^{a_n}g_a.$$

Observe que a componente de menor grau em x_1 deste polinômio é

$$f_1 = \alpha x_2^{b_2}...x_n^{b_n}g + \sum_a \alpha_a x_2^{a_2}...x_n^{a_n}g_a$$

onde o somatório é sobre todos os a's tais que $a_1 = b_1$. Observe também que para $a_1 = b_1$, temos $(b_2, ..., b_n) > (a_2, ..., a_n)$.

Consideremos agora o polinômio $f_1(x_1, x_2 + 1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ e tomemos a sua componente de menor grau em x_2, que é

$$f_2 = \alpha x_3^{b_3}...x_n^{b_n}g + \sum_a \alpha_a x_3^{a_3}...x_n^{a_n}g_a$$

onde o somatório é sobre todos os a's tais que $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. Temos que para $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ vale $(b_3, ..., b_n) > (a_3, ..., a_n)$.

Substituindo x_3 por $x_3 + 1$ em f_2 e continuando com esse processo, vamos chegar ao polinômio $f_n = \alpha g$. A partir dessas ideias, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.1.14 *Sejam V um $*$-espaço de $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ e $f \in V$ (f como em (4.1)). Então $g \in V$. Ademais, se V for um $*$-ideal, então os polinômios g_a's também estão em V. Consequentemente, todo $*$-ideal é gerado por seus polinômios $*$-próprios.*

Demonstração: Como 1 é simétrico, temos que $x_1 + 1$ é simétrico e daí o polinômio $f(x_1+1, x_2..., x_n, y_1, ..., y_m)$ pertence a V. Como $\mathbb{K}$ é infinito, temos $f_1 \in V$ (veja a Seção 1.5) e assim, como x_2+1 é simétrico, temos $f_1(x_1, x_2+1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \in V$.

Novamente usando o fato de $\mathbb{K}$ ser infinito, concluímos que $f_2 \in V$. Seguindo assim chegamos a $f_n \in V$ e daí $g \in V$.

Se V é um $*$-ideal, temos $\alpha x_1^{b_1}...x_n^{b_n} g \in V$ e portanto o somatório em (4.1) também pertence a V . Usando então indução no posto, concluímos que os g_a's também estão em V, donde segue a última afirmação. ■

Observemos que este processo de "eliminação" de variáveis simétricas fora de comutadores usado na proposição anterior não funciona para variáveis anti-simétricas, pois a substituição de y_i por $y_i + 1$ não define um $*$-endomorfismo de $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$, uma vez que $y_i + 1$ não é anti-simétrico.

4.2 Involuções em álgebras centrais simples

Seja A uma álgebra central simples de dimensão finita. Nosso objetivo nesta seção é estudar a ideia de equivalência de involuções em A (na Seção 1.1 apresentamos conceitos e resultados que são importantes aqui). Como resultado deste estudo, teremos a classificação das involuções do primeiro tipo na álgebra $M_n(\mathbb{K})$.

Denotaremos por $Inv(A)$, o conjunto das involuções do primeiro tipo em A e ζ_r o automorfismo interno de A determinado por r, como visto no final da Seção 1.1. Sejam $*, J \in Inv(A)$.

Lema 4.2.1 *Se $* = J\zeta_r$ para algum $r \in U(A)$, então $r^* = r^J = \pm r$.*

Demonstração: Temos $r^{J*} = r^{\zeta_r} = r$ e daí $r^J = r^*$. Para x qualquer em A temos $x = x^{**} = (x^{J\zeta_r})^* = (r^{-1}x^J r)^* = r^* x^{J*} (r^*)^{-1} = r^* r^{-1} x r (r^*)^{-1}$ e assim $r^* r^{-1} \in Z(A)$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $r^* = \lambda r$. Como $r^{**} = r$, temos que $\lambda^2 r = r$ e portanto $\lambda^2 = 1$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo, devemos ter $\lambda = \pm 1$, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 4.2.2 *Existe $r \in U(A)$ com $r^J = r^* = \pm r$, tal que $* = J\zeta_r$. Reciprocamente, se $r \in U(A)$ e $r^J = \pm r$, então $J\zeta_r \in Inv(A)$.*

Demonstração: Como $J*$ é um automorfismo de A, temos, pela proposição 1.1.12, que $J*$ é interno, ou seja, $J* = \zeta_r$ para algum $r \in U(A)$, e daí $* = J\zeta_r$. Pelo lema anterior temos $r^J = r^* = \pm r$.

Reciprocamente, tomando $J_1 = J\zeta_r$, com $r \in U(A)$ e $r^J = \pm r$, temos:

i) $a^{J_1 J_1} = r^{-1}(r^{-1}a^J r)^J r = r^{-1} r^J a (r^J)^{-1} r = a$;

ii) $(ab)^{J_1} = r^{-1}(ab)^J r = r^{-1}b^J a^J r = r^{-1}b^J r r^{-1} a^J r = b^{J_1}a^{J_1}$;

iii) J_1 é linear pois é a composição de duas aplicações lineares, pois J é uma involução e ζ_r é composição de duas involuções. Assim valem $(a+b)^{J_1} = a^{J_1} + b^{J_1}$ e $(\lambda a)^{J_1} = \lambda\left(a^{J_1}\right)$;

para quaisquer $a, b \in A$. Portanto $J\zeta_r \in Inv(A)$. ■

Definição 4.2.3 *Diremos que $*$ e J são **equivalentes** se existir $r \in U(A)$ $*$-simétrico tal que $* = J\zeta_r$.*

Observemos que a Definição 4.2.3 nos dá uma relação de equivalência em $Inv(A)$. De fato, a reflexividade é imediata. Para ver a simetria, basta observar que $* = J\zeta_r$ implica em $J = *\zeta_{r^{-1}}$ e aplicar o Lema 4.2.1. Quanto a transitividade, supondo $J_1, J_2, J_3 \in Inv(A)$ e $r_1, r_2 \in U(A)$, com $r_1^{J_1} = r_1$, $r_2^{J_2} = r_2$ tais que $J_1 = J_2\zeta_{r_1}$ e $J_2 = J_3\zeta_{r_2}$, temos $J_1 = J_3\zeta_{r_2}\zeta_{r_1} = J_3\zeta_{r_2 r_1}$ e $(r_2r_1)^{J_1} = r_1^{J_1} r_2^{J_1} = r_1 r_2^{J_2\zeta_{r_1}} = r_1 r_1^{-1} r_2 r_1 = r_2 r_1$. Logo, J_1 e J_3 são equivalentes.

Teorema 4.2.4 *A relação dada na Definição 4.2.3 determina, no máximo, duas classes de equivalência em $Inv(A)$. Ademais, se $* = J\zeta_r$ para algum $r \in U(A)$ $*$-anti-simétrico, então $*$ e J não são equivalentes.*

Demonstração: Sejam $J_1, J_2, * \in Inv(A)$, com J_1 e J_2 não equivalentes e $*$ não equivalente a J_2. Existem então $r_1, r_2 \in U(A)$, com $r_1^{J_1} = r_1^{J_2} = -r_1$ e $r_2^{J_2} = r_2^* = -r_2$ tais que $J_1 = J_2\zeta_{r_1}$ e $J_2 = *\zeta_{r_2}$. Daí, $J_1 = *\zeta_{r_2r_1}$ e $(r_2r_1)^{J_1} = {r_1}^{J_1}{r_2}^{J_1} = -r_1{r_2}^{J_2\zeta_{r_1}} = -r_1r_1^{-1}{r_2}^{J_2}\, r_1 = r_2\, r_1$. Logo $*$ é equivalente a J_1.

Supondo agora $* = J\zeta_r$ e $* = J\zeta_{r_1}$, com $r^* = -r$ e $r_1^* = r_1$, temos $\zeta_r = \zeta_{r_1}$ e daí $r_1r^{-1} \in Z(A)$. Logo, $r_1 = \lambda r$ para algum $\lambda \in \mathbb{K}$, o que nos dá $r_1^* = -r_1$. Mas, isto é uma contradição e assim $*$ e J não podem ser equivalentes. ■

Consideremos agora a álgebra $M_n(\mathbb{K})$. Sendo $n = 2m$ e $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ com X_1, X_2, X_3, $X_4 \in M_m(\mathbb{K})$, temos $X^t = \begin{pmatrix} X_1^t & X_3^t \\ X_2^t & X_4^t \end{pmatrix}$ e $X^s = \begin{pmatrix} X_4^t & -X_2^t \\ -X_3^t & X_1^t \end{pmatrix}$. Podemos observar que $t = s\zeta_C$ onde $C = \begin{pmatrix} 0 & I_{m\times m} \\ -I_{m\times m} & 0 \end{pmatrix}$. Como $C^t = -C$ temos que t e s não são equivalentes e assim há duas classes de equivalência em $Inv(M_n(\mathbb{K}))$.

Supondo agora n ímpar e $*$ uma involução qualquer em $M_n(\mathbb{K})$, temos $t = *\zeta_B$ para algum $B \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que $B^t = \pm B$. Mas, se $B^t = -B$, então $detB = det(-B) = -detB$ e assim $detB = 0$, o que é um absurdo. Logo, $B^t = B$ e portanto $*$ é equivalente a t.

A seguir, definiremos identidade estável e enuciaremos dois resultados que serão muito importantes na demonstração do próximo teorema.

Considere A uma $\mathbb{K}$-álgebra e f uma identidade polinomial para A.

Definição 4.2.5 *Diremos que f é uma* ***identidade estável para*** *A, se para qualquer $\mathbb{K}$-álgebra comutativa B, f for ainda identidade para $A \otimes_{\mathbb{K}} B$.*

Lema 4.2.6 *Se $\mathbb{K}$ é um corpo infinito e A é uma $\mathbb{K}$-álgebra, então toda identidade polinomial para A é estável.*

Demonstração: Ver [16], página 10. ■

Seja F uma extensão de $\mathbb{K}$. Considerando a álgebra $A_F = A \otimes_{\mathbb{K}} F$ e $f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ segue do lema anterior que se f é uma identidade de A então f é identidade para A_F. Pode-se mostrar que isto também vale para álgebras com involução.

Lema 4.2.7 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $char\mathbb{K} \neq 2$, e $a \in GL_n(\mathbb{K})$. Se $\mathbb{K}$ contem as raízes quadradas de todos os autovalores de a, então existe $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $a = p(a)^2$.*

Demonstração: Ver [16], página 79. ■

Teorema 4.2.8 *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo infinito com $char\mathbb{K} \neq 2$ e $*$ uma involução de $M_n(\mathbb{K})$. Então*

$$T(M_n(\mathbb{K}), *) = T(M_n(\mathbb{K}), t)$$

ou

$$T(M_n(\mathbb{K}), *) = T(M_n(\mathbb{K}), s).$$

A segunda possibilidade podendo ocorrer apenas quando n for par.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $\mathbb{K}$ seja algebricamente fechado. Pelo Teorema 4.2.2, existe $r \in GL_n(\mathbb{K})$ com $* = t\zeta_r$ tal de r é simétrico ou anti-simétrico. Suponhamos que r seja simétrico, ou seja, $r^t = r$. Como $\mathbb{K}$ contem as raízes quadradas dos autovalores de r, pelo Lema 4.2.7, existe $v \in M_n(\mathbb{K})$ expressão polinomial em r, tal que $r = v^2$. Como $r^t = r$ temos que $v^t = v$.

Considere a aplicação $\zeta_v : (M_n(\mathbb{K}), t) \to (M_n(\mathbb{K}), *)$. Temos que ζ_v é um isomorfismo de álgebras com involução. De fato, para $a \in M_n(\mathbb{K})$, e sabendo que $* = t\zeta_r$, temos $\zeta_v(a^*) = v^{-1}a^*v = v^{-1}(r^{-1}ar)^t v = v^{-1}ra^tr^{-1}v = va^tv^{-1} = (v^{-1}av)^t = (\zeta_v(a))^t$. Isto prova o teorema no caso em que r for um elemento simétrico.

Suponhamos agora que r seja um elemento anti-simétrico. Se n for ímpar, $\det(r) = 0$. Como $r \in GL_n(\mathbb{K})$, n deve ser par. Lembrando que $t = s\zeta_C$, segue-se que $* = t\zeta_r = s\zeta_C\zeta_r = s\zeta_{Cr}$. Como $C^t = -C$ e $r^t = -r$, temos $(Cr)^s = t\zeta_C^{-1}(Cr) = (CCrC^{-1})^t = C^tr^t = Cr$. Em outras palavras, temos que Cr é um elemento s-simétrico. Como na primeira parte da demonstração, pode-se construir um isomorfismo $(M_n(\mathbb{K}), s) \to (M_n(\mathbb{K}), *)$ de álgebras com involução. E isto completa a demonstração quando $\mathbb{K}$ for algebricamente fechado.

Agora seja $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário infinito e $\bar{\mathbb{K}}$ seu fecho algébrico. Como $\mathbb{K}$ é infinito, tendo em vista a observação feita após o Lema 4.2.6 temos que toda $*$-identidade é estável. Portanto, $(M_n(\mathbb{K}), *)$ e $\left(M_n(\bar{\mathbb{K}}), *\right)$ têm as mesmas $*$-identidades sobre $\mathbb{K}$. Analogamente $(M_n(\mathbb{K}), j)$ e $\left(M_n(\bar{\mathbb{K}}), j\right)$ tem as mesmas $*$-identidades sobre $\mathbb{K}$ onde $j = t$ ou $j = s$.

Pela primeira parte $\left(M_n(\bar{\mathbb{K}}), *\right) \simeq \left(M_n(\bar{\mathbb{K}}), j\right)$, onde $j = t$ ou $j = s$. Portanto, $\left(M_n(\bar{\mathbb{K}}), *\right)$ tem as mesmas $*$-identidades que $\left(M_n(\bar{\mathbb{K}}), j\right)$ sobre $\mathbb{K}$. Assim, $(M_n(\mathbb{K}), *) \simeq (M_n(\mathbb{K}), t)$ ou $(M_n(\mathbb{K}), *) \simeq (M_n(\mathbb{K}), s)$. ■

4.3 A involução transposta

A involução transposta na álgebra $M_2(\mathbb{K})$ é a aplicação $t : M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$, definida por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Observemos que os elementos simétricos de $(M_2(\mathbb{K}), t)$ são as matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ e os anti-simétricos são as da forma $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. O seguinte teorema apresenta a descrição das identidades de $(M_2(\mathbb{K}), t)$ para $\mathbb{K}$ infinito, com $char\mathbb{K} \neq 2$. Considere $A = M_2(\mathbb{K})$.

Teorema 4.3.1 *O $*$-ideal $I = T(A, t)$ é gerado pelos polinômios*

$$[y_1y_2, x_1], \quad [y_1, y_2], \quad [y_1x_1y_2, x_2] - y_1y_2[x_2, x_1]$$

$$e$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_1, x_3][x_2, x_4] + [x_1, x_4][x_2, x_3].$$

Demonstração: Ver [9] ■

Seja V o $*$-espaço de $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ gerado pelos polinômios

$$y_1y_2, \quad z_1[y_1y_2, x_1]z_2, \quad z_1[y_1, y_2]z_2, \quad z_1\left([y_1x_1y_2, x_2] - y_1y_2[x_2, x_1]\right)z_2$$

e

$$z_1\left([x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_1, x_3][x_2, x_4] + [x_1, x_4][x_2, x_3]\right)z_2$$

com $z_1, z_2 \in X \cup Y$.

Lema 4.3.2 *$I \subseteq V \subseteq C(A, t)$.*

Demonstração: Claramente temos $I \subseteq V$. Para mostrar que $V \subseteq C(A, t)$, basta mostrar que $y_1y_2 \in C(A, t)$. De fato, sejam $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$. Então $Y_1Y_2 = \begin{pmatrix} -b_1b_2 & 0 \\ 0 & -b_1b_2 \end{pmatrix} = -b_1b_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C(A, t)$.

Portanto $V \subseteq C(A, t)$. ■

Lema 4.3.3 *Para todo $n \geq 1$ temos que $y_1y_2...y_{2n} \in V$.*

Demonstração: Vamos usar indução em n. Para $n = 1$ o resultado é imediato. Suponhamos então que seja válido para $n \geq 1$. Observe que $(y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1})^* = y_{2n+1}^*y_{2n}^*y_{2n+1}^* = (-y_{2n+1})(-y_{2n})(-y_{2n+1}) = -(y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1})$, ou seja, $y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1}$ é anti-simétrico. Assim trocando y_{2n} por $y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1}$ em $y_1y_2...y_{2n}$(que pertence a V), temos $y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1} \in V$. Como $[y_1, y_2] \in I$, para quaisquer y_1 e y_2 variáveis anti-simétricas, temos $a[y_1, y_2]b \in I$, onde a e b são polinômios quaisquer. Assim, fazendo $a = y_1y_2...y_{2n-1}$, $b = y_{2n+1}$, $y_1 = y_{2n+1}$ e $y_2 = y_{2n}$ temos

$$y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1} - y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n}y_{2n+1}^2 \in I$$

e assim

$$y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n+1}y_{2n}y_{2n+1} \equiv y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n}y_{2n+1}^2 (mod\ I).$$

Como $I \subseteq V$ e $y_{2n+1} + y_{2n+2}$ é anti-simétrico, podemos afirmar que

$$y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n}\left(y_{2n+1} + y_{2n+2}\right)^2 \in V.$$

Porém este último polinômio é congruente a

$$y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n}y_{2n+1}^2 + 2y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n}y_{2n+1}y_{2n+2} + y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n}y_{2n+2}^2$$

módulo V, e como $y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n}y_{2n+1}^2$, $y_1y_2...y_{2n-1}y_{2n}y_{2n+2}^2 \in V$, temos o resultado. ■

Lema 4.3.4 *Todo comutador v de grau $n \geq 2$ em $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ pode ser representado módulo I como combinação linear de produtos de elementos dos tipos*

$$y_i,\ \left[y_i, x_{i_1}, ..., x_{i_k}\right](k \geq 1),\ \left[x_{i_1}, ..., x_{i_l}\right](\ l \geq 2). \tag{4.2}$$

Demonstração: Vamos usar indução no grau do comutador. Se v for um comutador de grau 2, então $v = [x_i, x_j]$, $v = [x_i, y_j] = -[y_j, x_i]$ ou $v = [y_i, y_j]$. Como $[y_i, y_j] \in I$ e os demais têm uma das formas em (4.2), temos o resultado válido para comutadores de grau 2.

Suponhamos agora que o resultado seja válido para comutadores de grau $n \geq 2$ e tomemos v um comutador de grau $n+1$. Temos que $v = [w, x]$ ou $v = [w, y]$, onde w é um comutador de grau n. Por hipótese de indução, w é uma combinação linear de produtos $w_1w_2...w_l$, onde cada w_i tem uma das formas em (4.2). No caso $v = [w, x]$, observemos que

$$[w_1w_2...w_l, x] = \sum_{i=1}^{l} w_1...w_{i-1}\left[w_i, x\right]w_{i+1}...w_l.$$

Como $[w_i, x]$ tem necessariamente uma das formas em (4.2), este caso está concluído. Já no caso $v = [w, y]$, basta observar que

$$[w_1w_2...w_l, y] = w_1w_2...w_ly - yw_1w_2...w_l$$

e que ambos os termos no segundo membro têm a forma desejada. ■

Lema 4.3.5 *$y_1 \circ [y_2, x_1]$ é uma identidade para $(M_2(\mathbb{K}), t)$.*

Demonstração: Primeiramente observemos que dois elementos anti-simétricos y_1 e y_2 comutam em $(M_2(\mathbb{K}), t)$ e que $y_1 \circ x_1$ é um elemento anti-simétrico, onde y_1 é elemento anti-simétrico e x_1 é elemento simétrico de $(M_2(\mathbb{K}), t)$. Assim $y_1 \circ [y_2, x_1] = 0 + y_1 \circ [y_2, x_1] = [y_2, y_1] \circ x_1 + y_1 \circ [y_2, x_1] = [y_2, y_1 \circ x_1] = 0$ ■

Lema 4.3.6 *Seja* $f \in \mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ *multihomogêneo e* $*$*-próprio. Então, módulo* I*,* f *se escreve como uma soma* $f_1 + f_2 + f_3$*, onde* f_1*,* f_2 *e* f_3 *são combinações lineares de polinômios das formas*

$$u_1u_2...u_{2n},\ u_1u_2...u_{2n}u_{2n+1}, u_1...u_mw$$

respectivamente, onde cada u_i *é um comutador anti-simétrico de grau maior ou igual a* 1 *e* w *é um comutador simétrico de grau maior ou igual a* 2*.*

Demonstração: Sendo f $*$-próprio, temos que f é uma combinação linear de produtos de comutadores, sendo os comutadores de grau 1 variáveis anti-simétricas. Assim, pelo Lema 4.3.4, f é congruente módulo I a uma combinação linear de produtos $w_1w_2...w_l$, onde cada w_i tem uma das formas em (4.2). Analisemos, então, estes produtos.

Se para algum i tivermos w_i simétrico e w_{i+1} anti-simétrico, então necessariamente $w_i = [v, x]$, onde v é um comutador anti-simétrico e x é uma variável simétrica (observe (4.2)). Logo, pelo Lema 4.3.5, segue-se que $w_iw_{i+1} \equiv -w_{i+1}w_i(mod\ I)$.

Considerando agora a situação w_i e w_{i+1} simétricos para algum i, temos $w_i = [v_1, x_{i_1}]$ e $w_{i+1} = [v_2, x_{i_2}]$, onde v_1 e v_2 são comutadores anti-simétricos. Usando a identidade $[y_1, x_1][y_2, x_2] - 2y_1y_2[x_2, x_1] + [y_1, x_1, x_2]y_2$ de $(M_2(\mathbb{K}), t)$, concluímos que

$$w_iw_{i+1} = [v_1, x_{i_1}][v_2, x_{i_2}] \equiv 2v_1v_2[x_{i_2}, x_{i_1}] - [v_1, x_{i_1}, x_{i_2}]v_2\ (mod\ I).$$

Tendo em vista que os elementos $[x_{i_2}, x_{i_1}]$ e $[v_1, x_{i_1}, x_{i_2}]$ são anti-simétricos, a demonstração está concluída. ∎

Proposição 4.3.7 *Se* $f \in C(A, t)$ *for* $*$*-próprio, então* f *é congruente a* f_1 *módulo* I*, onde* f_1 *é uma combinação linear de produtos de um número par de comutadores anti-simétricos. Consequentemente,* $f \in V$ *.*

Demonstração: Sejam f_1, f_2 e f_3 como no lema anterior. Pelo Lema 4.3.3, $f_1 \in V$ e assim $f - f_1 \in C(A, t)$. Logo, $f_2 + f_3 \in C(A, t)$. Como toda matriz anti-simétrica em (A, t) tem traço zero e $u_1...u_{2n}$ é central, temos que f_2 sempre resulta numa matriz de traço zero em (A, t). Para ver que f_3 resulta em matriz de traço zero, basta observar que w (que é comutador de grau maior ou igual a 2) resulta em matriz de traço zero e que o produto de uma matriz anti-simétrica por uma simétrica também tem traço zero. Segue então que $f_2 + f_3$ resulta em matriz de traço zero, além de ser central. Logo, temos $f_2 + f_3 \in I$, o que nos dá $f \equiv f_1(mod\ I)$. Como $f_1 \in V$ e $I \subseteq V$, segue que $f \in V$. ■

Definição 4.3.8 *Sejam $z_0, z_1, z_2, ...$ variáveis em $X \cup Y$. Definimos $h_1(z_1, z_0) = z_1 \circ z_0$, $h_2(z_2, z_1, z_0) = z_2 \circ (z_1 \circ z_0)$ e, indutivamente,*

$$h_{n+1}(z_{n+1}, z_n, ..., z_1, z_0) = z_{n+1} \circ h_n(z_n, ..., z_1, z_0).$$

Como $(x_1 \circ y_1)$ é um polinômio anti-simétrico, podemos concluir que se u_0 é anti-simétrico e $v_1, ..., v_n$ são simétricos, então $h_n(v_n, ..., v_1, u_0)$ é anti-simétrico para todo $n \geq 1$.

Lema 4.3.9 *Sejam $u_1, ..., u_m$ comutadores anti-simétricos de graus maiores ou iguais a 1, com m par, e $x_1, x_2, ..., x_n$ variáveis simétricas. Então*

$$x_n x_{n-1} ... x_2 x_1 u_1 u_2 ... u_m = h_n(x_n, ..., x_1, u_1) u_2 ... u_m + s$$

onde s é uma soma de polinômios da forma $x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k} g$, onde $0 \leq k < n$ e g é um polinômio $*$-próprio. Ademais, $x_n ... x_1 u_1 u_2 ... u_m \equiv s(mod\ V)$.

Demonstração: Vamos usar indução em n. Como $x_1 u_1 = \frac{1}{2}[x_1, u_1] + x_1 \circ u_1$, temos

$$x_1 u_1 ... u_m = \frac{1}{2}[x_1, u_1] u_2 ... u_m + h_1(x_1, u_1) u_2 ... u_m.$$

Mas, $[x_1, u_1] u_2 ... u_m$ é $*$-próprio (podemos ordenar os termos usando a relação $ab = ba + [a, b]$), donde temos que o resultado é válido para $n = 1$.

Supondo agora que o resultado seja válido para $n \geq 1$, temos

$$x_{n+1} x_n ... x_1 u_1 u_2 ... u_m = x_{n+1} h_n(x_n, ..., x_1, u_1) u_2 ... u_m + x_{n+1} s.$$

Observemos que

$$x_{n+1} h_n(x_n, ..., x_1, u_1) = \frac{1}{2}[x_{n+1}, h_n(x_n, ..., x_1, u_1)] + h_{n+1}(x_{n+1}, x_n, ..., x_1, u_1)$$

e que $h_n(x_n, ..., x_1, u_1)$ é uma combinação linear de produtos de $u_1, x_1, ..., x_n$. Pela igualdade (1.2) podemos ver que $[x_{n+1}, h_n(x_n, ..., x_1, u_1)]$ é uma combinação linear de produtos nos quais aparecem no máximo n variáveis simétricas (que estão em $\{x_1, ..., x_n\}$) fora de comutadores. Assim, usando a relação $ab = ba + [a, b]$ para reordenar os termos, mostramos que $[x_{n+1}, h_n(x_n, ..., x_1, u_1)] u_2 ... u_m$ é um somatório de produtos da forma

$x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}g$, onde $0 \leq k < n+1$ e g é um polinômio $*$-próprio. Observando agora que $x_{n+1}s$ também é um somatório de produtos da forma apresentada, temos a primeira parte do resultado.

A última afirmação se verifica facilmente, pois $h_n(x_n, ..., x_1, u_1)u_2...u_m \in V$, uma vez que m é par e $h_n(x_n, ..., x_1, u_1)$ é anti-simétrico. ■

Teorema 4.3.10 *$C(A,t) = V$.*

Demonstração: Como a inclusão $V \subseteq C(A,t)$ já foi verificada, basta mostrar a inclusão contrária. Seja então $f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \in C(A,t)$ multi-homogêneo. Vamos usar indução no posto de f. Se $r(f) = (0, 0, ..., 0)$, então f é $*$-próprio e assim, pela Proposição 4.3.7, $f \in V$. Suponhamos então que $r(f) = (b_1, b_2, ..., b_n) > (0, 0, ..., 0)$ e que o resultado seja válido para todos os polinômios em $C(A,t)$ de posto menor que $r(f)$. Temos

$$f = \alpha x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n} g + \sum_a \alpha_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} g_a$$

onde g e g_a são polinômios $*$-próprios e $a = (a_1, a_2, ..., a_n) < r(f)$. Pela Proposição 4.1.14, g pertence a $C(A,t)$ e assim, pela Proposição 4.3.7, g deve ser congruente módulo I a uma combinação linear de produtos da forma $u_1u_2...u_l$, onde l é par e u_i é um comutador anti-simétrico de grau maior ou igual a 1. Segue então que

$$f \equiv v + \sum_a \alpha_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} g_a \ (mod\ I)$$

onde v é uma combinação linear de termos da forma $x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n} u_1 u_2 ... u_l$. Vamos então analisar esses termos. Usando o Lema 4.3.9 (e a relação $ab = ba + [a,b]$ para reordenar termos) podemos afirmar que $x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n} u_1 u_2 ... u_l \equiv s \ (mod\ V)$ onde s é uma combinação linear de polinômios da forma $x_1^{c_1} x_2^{c_2} ... x_n^{c_n} q$ onde q é $*$-próprio, $c_i \leq b_i$ e $c_1 + ... + c_n < b_1 + ... + b_n$. Temos então $(c_1, ..., c_n) < (b_1, ..., b_n) = r(f)$ e portanto f é congruente módulo V a um polinômio $\overline{f}$ de posto menor que $r(f)$. Mas, como f é central, devemos ter $\overline{f}$ também central e daí, por hipótese de indução, $\overline{f} \in V$, o que nos dá $f \in V$. ■

4.4 A involução simplética

A involução simplética na álgebra $M_2(\mathbb{K})$ é a aplicação $s : M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$, definida por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Observemos que os elementos simétricos de $(M_2(\mathbb{K}), s)$ são exatamente as matrizes escalares e os anti-simétricos são as matrizes de traço zero.

Em [9] foi provado que o $*$-ideal J das identidades de $(M_2(\mathbb{K}), \mathrm{s})$ é gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $[x_1, y_1]$. Consideremos agora o $*$-espaço de $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ gerado pelos polinômios

$$x_1, \quad z_1[x_1, x_2]z_2, \quad z_1[x_1, y_1]z_2. \tag{4.3}$$

Denotando por W este $*$-espaço, temos $J \subset W \subseteq C(M_2(\mathbb{K}), s)$. Para ver isso, basta observar que todo elemento simétrico de $(M_2(\mathbb{K}), s)$ é central e assim todo polinômio simétrico de $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$ é central para $(M_2(\mathbb{K}), s)$. Ademais, os outros dois polinômios em (4.3) são identidades e portanto centrais para $(M_2(\mathbb{K}), s)$.

Teorema 4.4.1 *$C(M_2(\mathbb{K}), s) = W$.*

Demonstração: Como já vimos que $W \subseteq C(M_2(\mathbb{K}), s)$, basta mostrar a inclusão contrária. Seja então $f \in C(M_2(\mathbb{K}), s)$. Temos

$$f = \frac{f + f^*}{2} + \frac{f - f^*}{2}$$

onde $\frac{f + f^*}{2}$ é simétrico e $\frac{f - f^*}{2}$ é anti-simétrico em $\mathbb{K}\langle X \cup Y\rangle$. Como f e $\frac{f + f^*}{2}$ são centrais, temos que $\frac{f - f^*}{2}$ deve ser central. Mas, $\frac{f - f^*}{2}$ resulta em matriz de traço zero, pois todo elemento anti-simétrico em $(M_2(\mathbb{K}), s)$ é uma matriz de traço zero. Assim, $\frac{f - f^*}{2} \in J$. Logo, como $J \subseteq W$ e $\frac{f + f^*}{2} \in W$, devemos ter $f \in W$. ■

Bibliografia

[1] E. Alves, A. Brandão, P. Koshlukov, A. Krasilnikov, *The central polynomials for the Grassmann algebra*, Israel J. Math. a aparecer.

[2] N. Anisimov, *Z_p-codimensions of Z_p-identities of Grassmann algebra*, Special issue dedicated to Alexei Ivanovich Kostrikin. Commun. Algebra **29 (9)**, 4211–4230 (2001).

[3] S. S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra **30 (12)**, 5849–5860 (2002).

[4] S. S. Azevedo, *A basis for $\mathbb{Z}$-graded identities of matrices over infinite fields*, Serdica Math. Journal **29 (2)**, 149–158 (2003).

[5] C. Bekh-Ochir, D. Riley *On the Grassmann T-space*, J. Algebra Appl. 7 (2008), 319–336.

[6] A. Belov, *No associative PI algebra coincides with its commutant*, Siberian Math. J. **44 (6)**, 969–980 (2003).

[7] A. Brandão, P. Koshlukov, *Central polynomials for $\mathbb{Z}_2$-graded algebras and for algebras with involution*, J. Pure Appl. Algebra, **208**, 877–886 (2007).

[8] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. **377**, 53–67 (2004).

[9] J. Colombo, P. Koshlukov, *Identities with involution for the matrix algebra of order two in characteristic p*, Israel J. Math. **146**, 337–355 (2005).

[10] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$*, Israel J. Math. **80 (3)**, 323–335 (1992).

[11] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic **20 (3)**, 188–194 (1981).

[12] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[13] J. Dubnov, V. Ivanov, *Sur l'abaissement du degré des polynômes en affineurs*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR **41**, 96–98 (1943).

[14] E. Formanek, *Central polynomials for matrix rings*, J. Algebra **23**, 129–132 (1972).

[15] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic* $p > 0$, Israel J. Math. **122**, 305–316 (2001).

[16] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomials Identities and Asymptotic Methods*, Mathematical Surveys and Monographs **122**, Amer. Math. Soc.,(2005).

[17] A. V. Grishin, V. V. Shchigolev, *T-spaces and their applications*, J. Math. Sci. **134 (1)**, 1789–1878 (2006).

[18] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Math. Monographs **15**, Math. Assoc. Amer., New York, 1968.

[19] N. Jacobson, *Structure theory of algebraic algebras of bounded degree*, Annals of Math. **46**, 695–707 (1945).

[20] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 575–580, (1948).

[21] I. Kaplansky, *Problems in the theory of rings*, Report of a Conference on Linear Algebras, June, 1956, in National Acad. of Sci. - National Research Council, Washington, Publ. **502**, 1–3 (1957).

[22] A. Kemer, *Varieties and* $\mathbb{Z}_2$*-graded algebras*, Math. USSR, Izv. **25**, 359–374 (1985).

[23] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic **26**, 362–397 (1987).

[24] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$, J. Algebra **241**, 410–434 (2001).

[25] P. Koshlukov, S. S. Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. **128**, 157–176 (2002).

[26] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Transactions of the American Mathematical Society **181**, 429–438 (1973).

[27] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a T-ideal* (Russo), Sibirskii Matematicheskii Zhurnal **4 (5)**, 1122–1126 (1962).

[28] D. Levchenko, *Finite basis property of identities with involution of a second-order matrix algebra* (Russo), Serdica **8 (1)**, 42–56 (1982).

[29] D. Levchenko, *Bases of identities with involution of second-order matrix algebra over finite fields* (Russo), Serdica **10 (1)**, 55–67 (1984).

[30] J. Levitzki, *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 1033–1035, (1946).

[31] S. Okhitin, *Central polynomials of the algebra of second order matrices*, Moscow Univ. Math. Bull. **43 (4)**, 49–51 (1988).

[32] A. Popov, *Identities of the tensor square of a Grassmann algebra*, Algebra and Logic **21**, 296–316 (1982).

[33] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic **12**, 47–63 (1973).

[34] Yu. P. Razmyslov, *On a problem of Kaplansky*, Math. USSR, Izv. **7**, 479–496 (1973).

[35] Yu. P. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Translations Math. Monographs, **138**, AMS, Providence, RI, 1994.

[36] V. V. Shchigolev, *Examples of infinitely baseble T-spaces*, (Russian), Mat. Sb. **191**, 143–160. English translation: Sb. Math. **191** (2000), 459–476.

[37] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}$-graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Commun. Algebra **26 (2)**, 601–612 (1998).

[38] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n*, Proc. Amer. Math. Soc. **127 (12)**, 3517–3524 (1999).