Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de solução fraca para as equações de Navier-Stokes de um fluido compressível com dados iniciais descontínuos.

por

Désio Ramirez da Rocha Silva †

sob orientação de

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

&

Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq - Edital 027/2007, Proc.556238/2008-7 e da CAPES - PROCAD/024-2007.

Existência de solução fraca para as equações de Navier-Stokes de um fluido compressível com dados iniciais descontínuos.

por

Désio Ramirez da Rocha Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Pablo Gustavo A. Braz e Silva -UFPE

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos - UNICAMP
Orientador

Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2010

Resumo

Neste trabalho, baseado numa seqüência de artigos de David Hoff , é provado um teorema sobre a existência de uma solução fraca para um problema de valor inicial envolvendo as equações de Navier-Stokes para o caso de um escoamento unidimensional de um fluido compressível. São consideradas como hipóteses básicas a ausência de forças externas e que a pressão seja uma função contínua positiva crescente da densidade, cuja derivada também seja contínua. Quanto aos dados iniciais, estes podem possuir descontinuidades do tipo salto, não necessariamente pequenos, podendo se comportar inclusive como funções constantes por partes, em particular dados de Riemann. Tal teorema é provado baseado numa seqüência de lemas e proposições que fornecem estimativas para soluções aproximadas suaves obtidas a partir de dados regularizados. A solução final é obtida por um processo de passagem ao limite das soluções aproximadas.

Palavras Chave: Equações de Navier-Stokes, Fluido compressível, Existência de solução.

Abstract

In this work, based on a serie of papers by David Hoff, it is proved a theorem on the existence of a weak solution to the initial value problem for the Navier-Stokes equations for a one space dimension flow of a compressible fluid. It is assumed the absence of external forces and that the pressure is a continuous positive increasing function of density with the derivative also continuous. Concerning the initial data, they are allowed to have large jump discontinuities, such as piecewise constant functions, in particular Riemann data. The proof of the theorem is based on a sequence of lemmas and propositions which give estimates on the approximate smooth solutions obtained under regularized data. The final solution is obtained by a limit process on the approximate solutions.

Keywords: Navier-Stokes equations, Compressible fluid, Existence of solution.

Agradecimentos

À Deus pela sua proteção e pela sua providência que me foi concedida de maneira constante, nos momentos em que mais precisei elas se tornaram mais evidentes.

À minha Mãe, Grácia pelos anos de dedicação e carinho. Ao meu irmão, Rodrigo pelo apoio.

Aos meus amigos de Natal, João e Vanessa por compartilhar experiências de vida e por estar comigo - dentro do que a distância permitia desde do inicio graduação.

Aos meus irmãos na fé da Igreja de Natal que pela comunhão com eles Deus me concedeu muitas alegrias e exemplos de amor a Ele, de ética e sabedoria.

Aos amigos que fiz em Campina Grande que estiveram comigo neste período da minha vida nos momentos difíceis e felizes. Em especial a Igreja de Campina Grande, a Igor pela convivência e a Ramon que é um bom amigo.

Aos meus professores de graduação da UFRN pela formação que me foi dada e pelo incentivo para o ingresso no mestrado.

Ao Prof. Aparecido pela disposição a ajudar, pelos conselhos e pelo respeito que foram além de suas obrigações.

Ao Prof. Marcelo pela atenção e ajuda no desenvolvimento desta dissertação, principalmente durante a minha visita à UNICAMP.

Aos demais professores que formaram a banca da examinadora de minha dissertação, Prof. Dr. Pablo Gustavo A. Braz e Silva e Prof. Dr. Severino Horácio da Silva.

Aos funcionários do Departamento de Matemática pelo carinho, em especial a Dú, a Dona Argentina e Dona Salete.

Ao Departamento de Matemática da UFCG através do PPGMAT.

Ao CNPq através do projeto Casadinho, pelo apoio de infraestrutura e pela concessão da bolsa.

À CAPES através do Projeto PROCAD 024/2007 - Equipe Associada 2 - UFCG, pelo apoio financeiro quando de meu deslocamento à UNICAMP.

Ao IMECC-UNICAMP pela hospitalidade durante o desenvolvimento de parte da dissertação.

E a todos que contribuiram de maneira direta e indireta para a realização desse trabalho.

Dedicatória

À minha Vó Dalila, à minha Mãe
e ao meu irmão.

Sumário

Introdução

As equações de Navier-Stokes formam um sistema de equações diferencias não lineares que apresenta problemas complexos, o que as torna bem relevantes do ponto de vista matemático. Elas têm a característica de necessitarem de muitas hipóteses sobre seus dados para obtenção de resultados como existência, unicidade, regularidade e solução explícita. Um exemplo clássico deste fato é que a existência de solução suave global para as equações no caso tridimensional, para fluidos incompressíveis, é um problema em aberto.

A importância física de seu estudo se dá por tais equações modelarem o comportamento de fluidos. Quando se fala em movimento de fluidos facilmente se imagina problemas envolvendo movimento de gases, massas de ar, correntes marítimas, fluxo sanguíneo, dentre outras. Consequentemente, as suas aplicações vão desde previsões meteorológicas até simulações de testes aerodinâmicos. Portanto, estas equações são de interesse de estudiosos de várias áreas.

Nesta dissertação estudaremos o problema de existência de solução global das seguintes equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis em uma dimensão

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + P(\rho)_x = \mu u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \end{cases}$$

onde as funções incógnitas são a densidade $\rho(x,t)$ e a velocidade $u(x,t)$, enquanto são consideradas como dados do problema a pressão $P(\rho)$ e a viscosidade do fluido μ. Mostraremos que com certas hipóteses o problema de valor inicial envolvendo as equações acima possui solução fraca com algumas propriedades de regularidade, como pode ser visto no enunciado do Teorema 2.1.

Usamos como base para este estudo o texto [7] mas foi de grande ajuda os trabalhos [8] e [9].

Além da introdução, esta dissertação é composta de dois outros capítulos e um apêndice.

No Capítulo 1, fazemos uma introdução ao estudo da mecânica dos fluidos começando com a apresentação das descrições euleriana e lagrangeana e enunciando o Teorema do Transporte. Neste Capítulo apresentamos também a dedução das equações de Navier-Stokes. Os trabalhos que foram estudados para a dissertação são discutidos numa seção específica deste Capítulo, onde destacamos as suas diferenças e relevâncias. Por fim, definimos alguns elementos bastante comuns no estudo que se segue e daremos algumas de suas propriedades.

O Capítulo 2 é o principal da dissertação. Nele são apresentados o teorema de existência global para o problema de valor inicial e sua demonstração. Demonstração esta que é feita após a obtenção de uma série de estimativas a priori sobre as soluções suaves obtidas a partir de uma regularização dos dados iniciais do problema original.

Por fim, o Apêndice A trata da exposição de conceitos matemáticos básicos para nosso estudo. Começamos apresentando as notações utilizadas e enunciando resultados bem conhecidos e utilizados, como o Lema de Gronwall, a desigualdade de Hölder e uma consequência do teorema da convergência dominada. Em seguida apresentamos resultados sobre convoluções e regularização de funções, dentre os quais destacamos a desigualdade de Young para convolução. Após isso, introduzimos os espaços de Sobolev via a transformada de Fourier. Por último é apresentada a integral de Bochner.

Capítulo 1

Equações de Navier-Stokes

Neste capítulo desejamos introduzir alguns elementos essenciais para o estudo da mecânica dos fluidos, utilizados no próximo capítulo. Começamos a primeira seção abordando as descrições lagrangeana e euleriana, que são duas maneiras usuais de estudar o movimento de um fluido. Enunciaremos o Teorema do Transporte, que será bastante útil. Usamos [14] como referência para esta seção. Na segunda seção, deduziremos as equações de Navier-Stokes a partir da Lei de Conservação de Massa e da Lei de Conservação do Momento. O texto base para isto foi [4]. Faremos ainda uma exposição breve sobre os textos principais que guiaram nosso estudo e concluímos com uma seção sobre algumas funções e suas propriedades que usaremos com frequência no próximo capítulo.

1.1 Descrições e o Teorema do Transporte

Estudaremos um fluido em três dimensões, nesta e na próxima seção a fim de facilitar a visualização, mas as considerações feitas nesta seção são facilmente adaptadas para o caso unidimensional.

Consideremos que o fluido, no início da observação, ocupe uma região $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ de fronteira tão suave quanto for necessário para as considerações que virão a seguir. Podemos pensar em $[0, T]$ como o intervalo de tempo em que estamos observando este fluido se movimentar e $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ como a região que ele ocupa em um tempo $t \in [0, T]$.

O movimento do fluido pode ser descrito de duas maneiras: observando o movimento de cada partícula que o compõe ou do fluido como um todo.

As *coordenadas lagrangeanas* descrevem o movimento do fluido baseado nas trajetórias das partículas, ou seja, para cada $y \in \Omega_0$ é definida uma função $c_y : [0, T] \to \mathbb{R}^3$, a qual descreve a trajetória da partícula inicialmente na posição y ($c_y(0) = y$). Desta maneira, podemos definir uma função $X : \Omega_0 \times [0, T] \to \mathbb{R}^3$ dada por $X(y, t) = c_y(t)$ que chamaremos de fluxo. Assumiremos que, para cada $t \in [0, T]$, $\Omega_t = \{X(y, t); y \in \Omega_0\}$ é um aberto do $\mathbb{R}^3$ e que X é um difeomorfismo entre Ω_0 e Ω_t.

Quando o fluido é descrito pela velocidade com que as partículas passam em pontos determinados do espaço, diremos que estamos estudando o movimento do fluido em *coordenadas eulerianas*. Para isso, tomamos uma função $u : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \to \mathbb{R}^3$ que é definida pela velocidade $u(x, t)$ com que as partículas passam pelo ponto x no tempo t.

Se pensarmos que $y \in \Omega_0$ é a partícula que passa em $x \in \Omega_t$ no tempo $t \in [0, T]$, teremos pelas definições anteriores que X satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(y,t) = u(x,t) = u(X(y,t),t), \\ X(y,0) = y. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dada qualquer função real f de classe C^1 que dependa da posição x e do tempo t, podemos calcular sua derivada ao longo de uma trajetória c_y em que $x = c_y(t) = X(y, t)$. Fazemos isso usando a Regra da Cadeia e (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(X(y,t),t) &= \nabla f(x,t) \frac{\partial}{\partial t} X(y,t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \\ &= \nabla f(x,t) u(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x,t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Esta é a chamada *derivada material* da função f, a qual denotamos-a por $\dot{f}$. Mais precisamente, definimos

$$\dot{f} = f_t + u \cdot \nabla f. \tag{1.3}$$

Aqui, e no que se segue, tomamos o gradiente $\nabla f(x, t)$ considerando apenas as derivadas de f com relação a x.

O resultado que enuciaremos a seguir é conhecido como o Teorema do Transporte. Ele será utilizado na dedução das esquações de Navier-Stokes e na compreensão de alguns resultados dos artigos estudados. Assumimos que a fronteira de Ω_t satisfaz as hipóteses do Teorema da Divergência, já que este é utilizado na demonstração de tal teorema.

Teorema 1.1 ***(Teorema do Transporte,v.[14])*** *Seja Ω_t uma região onde se pode aplicar o Teorema da Divergência. Sejam u a velocidade do fluido e f uma função qualquer, ambas de classe $C^1(\Omega_t \times [0, T])$. Então vale a seguinte igualdade:*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_t} (\dot{f} + f\text{div}\, u)(x,t)dx, \quad \forall t \in [0,T). \tag{1.4}$$

Observação 1.1 : A fórmula no Teorema do Transporte também pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f dx = \int_{\Omega_t} f_t + \text{div}\,(fu)dx.$$

De fato, pela definição da derivada material e pela regra do produto, temos que

$$\dot{f} + f\text{div}\, u = f_t + u\nabla f + f\text{div}\, u = f_t + \text{div}\,(fu).$$

1.2 Dedução das Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes para fluidos newtonianos que iremos obter são dadas por

$$\rho_t + \text{div}\,(\rho u) = 0, \tag{1.5}$$

$$(\rho u_j)_t + \text{div}\,(\rho u_j u) = \rho f + \text{div}\,(\mu \nabla u_j) + (\lambda \text{div}\, u)_{x_j} - P(\rho)_{x_j}, \tag{1.6}$$

onde $j = 1, 2, 3,\ x \in \Omega_t,\ t \in [0,T]$, ρ é a função que fornece a densidade e u_j correspondem às componentes do vetor velocidade u, μ e λ são constantes de viscosidade, f representa as forças externas e $P(\rho)$ representa a pressão, a qual é uma função suave dada. Por exemplo, em dinâmica dos gases é considerado $P(\rho) = K\rho^\gamma$, com $K > 0$ constante e $\gamma > 1$).

Tais equações são obtidas a partir da Lei de Conservação de Massa e da Lei de Conservação do Momento. Nesta seção assumiremos que as funções envolvidas são suficientemente suaves para as considerações que serão feitas. Novamente destacamos que estamos considerando $x \in \mathbb{R}^3$ mas, os resultados podem ser facilmente adaptados para $x \in \mathbb{R}$.

Seja $A \subset \Omega_0$. A Lei de Conservação de Massa diz que a massa $m(X(A,t))$ de um fluido que ocupa a região $X(A,t)$ no tempo $t \in [0,T]$ é igual a massa $m(A) = m(X(A,0))$ no instante inicial. Por definição, a massa é

$$m(X(A,t)) = \int_{X(A,t)} \rho(x,t)dx,$$

e pela lei de conservação de massa, temos que

$$\int_A \rho(x,0)dx = \int_{X(A,t)} \rho(x,t)dx$$

para qualquer região A.

Assumindo que podemos aplicar o Teorema do Transporte na região $X(A,t)$, obtemos

$$\int_{X(A,t)} \dot{\rho} + \text{div }(\rho u)dx = \frac{d}{dt}\int_{X(A,t)} \rho(x,t)dx = 0.$$

Como o fluxo X é uma bijeção, qualquer $B \subset \Omega_t$ é imagem de algum $A \subset \Omega_0$. Então, dado $t > 0$, temos

$$\int_B \dot{\rho} + \text{div }(\rho u)dx = \frac{d}{dt}\int_B \rho(x,t)dx = 0,$$

para qualquer $B \subset \Omega_t$. Por estarmos considerando que as funções são todas suaves e por B ser arbitrário, chegamos à equação (1.5) que é a primeira das equações de Navier-Stokes. A equação (1.5) também é chamada de *equação da continuidade.*

De modo similar, a Lei de Conservação do Momento nos diz que

$$\frac{d}{dt}\int_{X(A,t)} \rho(x,t)u(x,t)dx = \int_{X(A,t)} F_{ext} + F_{int},$$

ou seja, para uma porção de fluido, a derivada do momento (integral do lado esquerdo) em relação ao tempo é igual à integral da soma da força resultante externa (F_{ext}) com a força resultante interna (F_{int}) atuando na região $X(A,t)$.

Novamente aplicando o Teorema do Transporte, desta vez na Lei de Conservação do Momento, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{X(A,t)} (\rho u_j)_t + \text{div }(\rho u_j u)dx &= \frac{d}{dt}\int_{X(A,t)} \rho(x,t)u_j(x,t)dx \\ &= \int_{X(A,t)} (F_{ext})_j(x,t) + (F_{int})_j(x,t)dx,\end{aligned}$$

para cada componente u_j, com $j = 1, 2, 3$. Daí, pelo mesmo argumento utilizado para deduzir a equação da continuidade, obtemos que

$$(\rho u_j)_t(x,t) + \text{div }(\rho u_j u)(x,t) = (F_{ext})_j(x,t) + (F_{int})_j(x,t). \tag{1.7}$$

Como dito anteriormente estudaremos aqui os fluidos que são chamados de *Newtonianos*, os quais satisfazem a equação

$$(F_{int})_j = \text{div }(\mu \nabla u_j) + (\lambda \text{div } u)_{x_j} - P(\rho)_{x_j}, \tag{1.8}$$

onde μ e λ são coeficientes de viscosidade que podem depender de ρ, e $P(\rho)$ é a pressão. Além disso, escrevemos $F_{ext} = \rho(x,t)f$, onde f denota a função densidade das forças externas. Assim, ao substituirmos F_{ext} e F_{int} na equação (1.7), chegamos à segunda equação de Navier-Stokes como colocado em (1.6). Chamaremos a equação (1.6) de *equação do momento.*

Notemos que estas equações foram obtidas pelo estudo do movimento do fluido em coordenadas eulerianas.

O corolário que se segue é uma consequência do Teorema do Transporte, que utilizaremos em discussões posteriores.

Corolário 1.2 *Seja Ω_t como no Teorema do Transporte e seja (ρ, u) funções de classe C^1 satisfazendo as equações do momento e da continuidade. Se para $T > 0$ a função $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1([0, T])$ e a função $w : \Omega_t \times [0, T] :\to \mathbb{R}^3$ é de classe $C^1(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, então*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \frac{1}{2} g(t)\rho(x,t)w^2(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} g' w^2 \rho + wg\rho\dot{w}dx, \tag{1.9}$$

onde g' é a derivada usual de g.

Dem.

Pelo Teorema do Transporte temos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \frac{1}{2} g(t)\rho(x,t)w^2(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2}[(g\rho w^2)^{\cdot} + g\rho w^2 \text{div } u]dx.$$

Verifica-se facilmente que

$$(g\rho w^2)^{\cdot} = \dot{g}\rho w^2 + \dot{\rho} g w^2 + (w^2)^{\cdot} g\rho.$$

Daí, como $gw^2[(\dot{\rho}) + \rho \text{div } u] = 0$, pela equação da continuidade segue que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \frac{1}{2} g(t)\rho(x,t)w^2(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2}[\dot{g}\rho w^2 + (w^2)^{\cdot} g\rho]dx = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} g'\rho w^2 + wg\rho\dot{w}dx.$$

□

1.3 Solução Fraca e os Problemas Estudados

O objetivo dessa seção é apresentar algumas particularidades dos artigos [7], [8] e [9], os quais foram os principais artigos estudados para desenvolver essa dissertação. Porém, antes disso, vamos definir o que vem a ser uma solução fraca das equações de Navier-Stokes (1.5)-(1.6) com dados iniciais

$$(\rho(x,0), u(x,0)) = (\rho_0(x), u_0(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.10}$$

Relembramos que u_j e f_j são as coordenadas $j = 1, ..., n$ das funções u e f, respectivamente, onde n é a dimensão do $\mathbb{R}^n$ que pode ser $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$ dependendo do artigo a ser discutido.

Diremos que o par (ρ, u) é uma *solução fraca* para (1.5), (1.6), com dados iniciais (1.10), se $\rho,\ u,\ \nabla u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times [0,T))$ e para toda função teste $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T))$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_0 \varphi dx = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \rho \varphi_t(x,t) + \rho u \nabla \varphi(x,t) dx\ dt \tag{1.11}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0 u_0 \varphi dx = &-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (\rho u_j)\varphi_t(x,t) + (\rho u_j u)\nabla\varphi(x,t) dx\ dt \\ &+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mu \nabla u_j \nabla \varphi + \lambda(\text{div } u)\varphi_{x_j} - P(\rho)\varphi_{x_j} - \rho f \varphi dx\ dt, \end{aligned} \tag{1.12}$$

$j = 1,\ 2,\ 3.$

Os trabalhos [7] e [8] assumem que o problema (1.5)-(1.6), com dados iniciais (ρ_0, u_0) suaves, possuem solução local em relação ao tempo e que esta solução é suave. Um método para obter tal solução pode ser encontrado em [6]. Já [9] faz uso de um resultado encontrado em [12] e constrói uma sequência de soluções (u_n, ρ_n) para o "mesmo" problema com uma viscosidade $\mu_n(s) = \max\{\mu(s), 1/n\}$ estritamente positiva e usando sempre os mesmos dados iniciais (ρ_0, u_0) com propriedades de regularização suficientes.

No trabalho [7] é mostrado a existência global de solução fraca do problema (1.5)-(1.6) com dados iniciais (1.10) para $n = 2$ e $n = 3$ com $f \equiv 0$. Neste trabalho há a possibilidade dos dados iniciais não serem contínuos. Mas é imposta a condição deles serem "pequenos", no sentido de que $\|u_0\|_{L^2}$, $\|\rho_0 - \bar{\rho}\|_{L^2}$ e $\|\rho_0 - \bar{\rho}\|_{L^\infty}$ são tão pequenos quanto necessário, onde $\bar{\rho}$ é uma constante. Isso exclui alguns casos interessantes, como funções com descontinuidades com saltos grandes, tipo dados de Riemann. Neste artigo é considerado que a pressão é da forma $P(\rho) = K\rho$, para K constante, para garantir a convergência fraca para $P(\rho)$. O interessante nesse artigo é que nele encontramos detalhadamente algumas técnicas utilizadas para se obter estimativas sobre as soluções das equações de Navier-Stokes.

O trabalho [8] trata do problema de valor inicial para as equações de Navier-Stokes no caso unidimensional como a seguir:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \tag{1.13}$$

e

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x = \mu u_{xx} - P(\rho)_x + \rho f. \tag{1.14}$$

Apesar de ser em uma dimensão, o trabalho [8] tem a vantagem (dificuldade) de mostrar a existência de solução fraca global sem exigir que os dados iniciais sejam pequenos, além de tratar do caso em que a força externa f é não nula. A condição imposta sobre dados iniciais abrange casos em que há descontinuidade com grandes saltos, bastando apenas que a diferença entre os dados iniciais e certas funções suaves, as quais definiremos na proxima seção, estejam em $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, sobre a pressão só é exigido que ela e sua derivada sejam maiores do que zero.

Nos artigos [7] e [8] comentados acima os coeficientes de viscosidade são tomados constantes, porém em [9] é mostrada a existência global de solução forte para a equação unidimensional com viscosidade variável e força externa nula. As hipóteses sobre os dados iniciais são bem parecidas com as do trabalho [8], porém para obter a solução forte é exigido a existência de funções suaves cuja diferença pelos dados iniciais estejam no espaço de Sobolev H^1. Neste trabalho [9] há uma restrição sobre a pressão, considerando-a da forma $P(\rho) = \rho^\gamma$ com $\gamma > 1$, mas o autor observa que os seus resultados são válidos com uma pressão semelhante mais geral.

Relembramos que as equações da maneira que deduzimos estão em coordenadas eulerianas. No trabalho [8] são usadas as equações em coordenadas lagrangeanas na demonstração de um de seus resultados. No entanto, isto não é um problema, tendo em vista que as expressões

$$\begin{cases} y = \displaystyle\int_0^x \rho(\xi, t) d\xi - \int_0^t (\rho u)(0, \tau) d\tau \ , \\ s = t \ , \end{cases} \tag{1.15}$$

nos dão a transformação de coordenadas eulerianas para coordenadas lagrangeanas em uma dimensão, para funções suaves. Por exemplo, as equações (1.13) − (1.14) para força $f \equiv 0$ equivalem, às seguintes equações em coordenadas lagrangeanas para funções suaves,

$$v_s = u_y \tag{1.16}$$

$$u_s = (\mu u_y v^{-1} - P(v^{-1}))_y, \tag{1.17}$$

onde $v = \rho^{-1}$.

Os trabalhos em uma dimensão também adotam que infess $\rho_0 > 0$.

1.4 Propriedades das Funções Auxiliares

Na seção anterior, mencionamos funções que permitem considerar hipóteses mais gerais sobre os dados iniciais. A partir de agora será considerado o caso $n = 1$ e que os dados iniciais (ρ_0, u_0) satisfazem as condições especificadas a seguir. Em primeiro lugar, a densidade inicial ρ_0 satisfaz

$$\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \ \text{ e } \ \text{infess}\rho_0 > 0. \tag{1.18}$$

As funções funções auxiliares associadas aos dados iniciais (ρ_0, u_0) são funções monótonas suaves $\bar{u}$ e $\bar{\rho}$ que satisfazem

$$\bar{\rho}(x) = \begin{cases} \rho_+, & para \;\; x \geq 1 \\ \rho_-, & para \;\; x \leq -1, \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_+, & para \;\; x \geq 1 \\ u_-, & para \;\; x \leq -1 \end{cases} \tag{1.20}$$

e

$$\text{infess } \; \bar{\rho}(x) > 0 \;, \; \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.21}$$

onde $\rho_- > 0$, $\rho_+ > 0$, u_- e u_+ são constantes. Além da condição (1.21), suponhamos que

$$\rho_0 - \bar{\rho}, u_0 - \bar{u} \in L^2(\mathbb{R}). \tag{1.22}$$

Os teoremas de existência que estudamos, na sua maioria, foram demonstrados por meio de uma sequência regularizante dos dados iniciais e fazendo estimativas para as soluções com esses dados iniciais. Para dados iniciais $((\rho_0)_\delta, (u_0)_\delta) = (\rho_0 * J_\delta, u_0 * J_\delta)$, onde $\{J_\delta\}$ é um núcleo regularizante[1], definimos

$$(\bar{\rho}_\delta, \bar{u}_\delta) := (\bar{\rho} * J_\delta, \bar{u} * J_\delta). \tag{1.23}$$

Lema 1.3 *Sejam $(\rho_0)_\delta$, $\bar{\rho}_\delta$, $(u_0)_\delta$ e $\bar{u}_\delta$ como definidas acima. Então,*

$$\lim_{|x|\to\infty} \Big((\rho_0)_\delta(x) - (\bar{\rho})_\delta(x) \Big) = 0 \;\; e \;\; \lim_{|x|\to\infty} \Big((u_0)_\delta(x) - (\bar{u})_\delta(x) \Big) = 0.$$

Dem.

Usando a Desigualdade de Young (Prop. A.6), temos

$$\|(\rho_0)_\delta - \bar{\rho}_\delta\|_{L^2} = \|(\rho_0 - \bar{\rho}) * J_\delta\|_{L^2} \leq \|\rho_0 - \bar{\rho}\|_{L^2} \|J_\delta\|_{L^1} < \infty,$$

logo $(\rho_0)_\delta - \bar{\rho}_\delta \in L^2(\mathbb{R})$. Analogamente, como $D^n((\rho_0)_\delta - \bar{\rho}_\delta) = (\rho_0 - \bar{\rho}) * D^n(J_\delta)$ e $D^n(J_\delta) \in L^1(\mathbb{R})$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $((\rho_0)_\delta - \bar{\rho}_\delta) \in H^\infty(\mathbb{R}) = \cap_{s=0}^\infty H^s(\mathbb{R})$. Daí, pelo Lema de Sobolev(Teo. A.21), temos que $((\rho_0)_\delta - \bar{\rho}_\delta) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. O caso de $\lim_{|x|\to\infty} \big((u_0)_\delta - \bar{u}_\delta \big) = 0$ é análogo.

$\square$

[1] Veja seção sobre Regularização do Apêndice A

Sendo (ρ_δ, u_δ) soluções para (1.13)-(1.14) com dados iniciais $((\rho_0)_\delta, (u_0)_\delta)$, assumiremos que, para $t > 0$,

$$(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta)(\cdot, t),\ (u_\delta - \bar{u}_\delta)(\cdot, t) \in H^\infty(\mathbb{R}). \tag{1.24}$$

Novamente pelo Lema de Sobolev, segue que

$$\lim_{|x|\to\infty} \Big(\rho_\delta(x,t) - \bar{\rho}_\delta(x,t)\Big) = 0 \tag{1.25}$$

e

$$\lim_{|x|\to\infty} \Big(u_\delta(x,t) - \bar{u}_\delta(x,t)\Big) = 0. \tag{1.26}$$

Notemos ainda que

$$\bar{\rho}_\delta(x) = \bar{\rho} * J_\delta(x) \geq \text{infess } \bar{\rho} \int J_\delta(x)dx = \text{infess } \bar{\rho}. \tag{1.27}$$

A hipótese (1.24) ainda garante que $(u_\delta)_x = (u_\delta - \bar{u}_\delta)_x + (\bar{u}_\delta)_x \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, já que $(\bar{u}_\delta)_x \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ e temos os limites (1.25) e (1.26). Em particular, isto mostra que $(u_\delta)_x$ é limitada, o que será uma propriedade útil na estimativas de certas integrais.

Outra função que será útil no desenvolvimento deste trabalho é a seguinte função $G : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{P(s) - P(\rho_2)}{s^2} ds,$$

onde P é uma função de uma variável real contínua que possui derivada contínua e satisfaz

$$P(\rho), P'(\rho) > 0 \quad, \forall \rho > 0. \tag{1.28}$$

Seja P como definida acima. Como hipótese, assumiremos que existe uma constante positiva C tal que

$$\rho_1 + P(\rho_1) < C[1 + G(\rho_1, \rho_2)] \tag{1.29}$$

e

$$\varliminf_{\rho_1 \to 0} G(\rho_1, \rho_2) \geq C^{-1}, \tag{1.30}$$

para $\rho_1,\ \rho_2 \in [0,\infty)$. A função G possui as seguintes derivadas contínuas:

$$G_{\rho_1}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\rho_1}[G(\rho_1, \rho_2) + P(\rho_1) - P(\rho_2)], \tag{1.31}$$

$$G_{\rho_1\rho_1}(\rho_1, \rho_2) = \frac{P'(\rho_1)}{\rho_1}, \tag{1.32}$$

$$G_{\rho_2}(\rho_1, \rho_2) = \frac{P'(\rho_2)}{\rho_2}(\rho_2 - \rho_1). \tag{1.33}$$

Proposição 1.4 *Sejam $\bar{\rho}_\delta$ como definido em* (1.23) *e* (ρ_δ, u_δ) *solução suave do problema* (1.13)-(1.14) *com os dados iniciais suaves* $((\rho_0)_\delta, (u_0)_\delta)$. *Se* $P(\rho) > 0$ *e* $P'(\rho) > 0$ *para todo* $\rho > 0$, *então podemos afirmar que:*

i) $G(\rho_1, \rho_2) \geq 0$, *e* $G(\rho_1, \rho_2) = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$; $\forall \rho_1, \rho_2 > 0$;

ii) $G_t(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta) = -(G(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta)u_\delta)_x + (\bar{\rho}_\delta)_x u_\delta \frac{P'(\bar{\rho}_\delta)}{\bar{\rho}_\delta}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) - (P(\rho_\delta) - P(\bar{\rho}_\delta))(u_\delta)_x$;

iii) Existe uma constante $M > 0$ *tal que*

$$M^{-1}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta)^2 \leq G(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta) \leq M(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta)^2.$$

Dem.

i) Obviamente, para $\rho_1 = \rho_2$ teremos $G(\rho_1, \rho_2) = 0$. Como $G(\rho_1, \rho_2) \neq 0$ para $\rho_1 \neq \rho_2$, segue que se $G(\rho_1, \rho_2) = 0$ então $\rho_1 = \rho_2$.

Suponhamos sem perda de generalidade, que $\rho_1 < \rho_2$. Como $P'(\rho) > 0$, temos

$$P(s) - P(\rho_2) < 0$$

para todo $s \in (\rho_1, \rho_2)$ e por isso

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{P(s) - P(\rho_2)}{s^2} ds < 0.$$

Logo,

$$G(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{P(s) - P(\rho_2)}{s^2} ds = -\rho_1 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{P(s) - P(\rho_2)}{s^2} ds > 0.$$

No caso $\rho_2 < \rho_1$, teremos $P(s) - P(\rho_2) > 0$ para todo $s \in (\rho_2, \rho_1)$. Assim,

$$G(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{P(s) - P(\rho_2)}{s^2} ds > 0.$$

ii) Como (ρ_δ, u_δ) satisfaz a equação da continuidade (1.5), temos que

$$G_{\rho_\delta}(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta)[(\rho_\delta)_t + (\rho_\delta u_\delta)_x] = 0.$$

A igualdade acima implica que

$$G_{\rho_\delta}(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta)(\rho_\delta)_t + G_{\rho_\delta}(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta)(\rho_\delta u_\delta)_x = 0. \tag{1.34}$$

Usando a identidade $G_{\rho_\delta}(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta)(\rho_\delta)_t = G_t(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta) - G_{\bar{\rho}_\delta}(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta)(\bar{\rho}_\delta)_t$ no primeiro termo da equação (1.34) e usando a regra de derivação do produto no segundo termo, temos que

$$G_t(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta) - G_{\bar{\rho}_\delta}(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta)(\bar{\rho}_\delta)_t + G_{\rho_\delta}(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta)(\rho_\delta)_x u_\delta + G_{\rho_\delta}(\rho_\delta, \bar{\rho}_\delta)(u_\delta)_x \rho_\delta = 0. \tag{1.35}$$

O termo $-G_{\bar{\rho}_\delta}(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)(\bar{\rho}_\delta)_t$ se anula, já que $\bar{\rho}_\delta$ não depende de t. Agora, usando a identidade $G_{\rho_\delta}(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)(\rho_\delta)_x u_\delta = G_x(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)u_\delta - G_{\bar{\rho}_\delta}(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)(\bar{\rho}_\delta)_x u_\delta$ no terceiro termo de (1.35) e a equação (1.31) no último termo, obtemos

$$G_t(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta) + G_x(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)u_\delta - G_{\bar{\rho}_\delta}(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)(\bar{\rho}_\delta)_x u_\delta + G(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)(u_\delta)_x$$
$$+ (P(\rho_\delta) - P(\bar{\rho}_\delta))(u_\delta)_x = 0.$$

A regra do produto para a derivada e a fórmula em (1.33) nos garantem a equação

$$G_t(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta) + (G(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)u_\delta)_x - (\bar{\rho}_\delta)_x u_\delta \frac{P'(\bar{\rho}_\delta)}{\bar{\rho}_\delta}(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) + (P(\rho_\delta) - P(\bar{\rho}_\delta))(u_\delta)_x = 0.$$

iii) Pela regra de L'Hôpital e por (1.32), segue que

$$\lim_{\rho_\delta \to \bar{\rho}_\delta} \frac{G(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)}{(\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta)^2} = \frac{P'(\bar{\rho}_\delta)}{2\bar{\rho}_\delta}.$$

Definimos $g(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta) = \frac{G(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)}{(\rho_\delta-\bar{\rho}_\delta)^2}$ e $p(\bar{\rho}_\delta) = \frac{P'(\bar{\rho}_\delta)}{2\bar{\rho}_\delta}$. Como

$$\lim_{\rho_\delta \to \bar{\rho}_\delta} g(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta) = p(\bar{\rho}_\delta),$$

temos que para $\epsilon = \frac{p(\bar{\rho}_\delta)}{2}$ existe $\xi > 0$ tal que se $|\rho_\delta - \bar{\rho}_\rho| < \xi$, então

$$\frac{p(\bar{\rho}_\delta)}{2} < g(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta) < \frac{3p(\bar{\rho}_\delta)}{2}, \ \forall \bar{\rho}_\delta \in [\text{infess}\bar{\rho}, \|\bar{\rho}\|_\infty]. \tag{1.36}$$

Tendo em mente o limite em (1.25), temos que $\Delta\rho_\delta = \rho_\delta - \bar{\rho}_\delta \in C_0^0 \subset L^\infty(\mathbb{R})$. Portanto, existe $\eta > 0$ tal que $\|\Delta\rho_\rho\| \le \eta$. Note que para $\rho_\delta \neq \bar{\rho}_\rho$, g é contínua. Temos que, existe um $\xi_1 > 0$ tal que $\xi_1 < \xi$(e portanto para $\Delta\rho_\delta < \xi_1$, ρ_δ e $\bar{\rho}_\delta$ satisfazem (1.36)), $\xi_1 < \eta$ e que existem os supremos abaixo

$$m_1 = \sup_{\rho_\delta \in [\bar{\rho}_\delta - \eta, \bar{\rho}_\delta - \xi]} g(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta) \ \text{ e } \ m_2 = \sup_{\rho_\delta \in [\bar{\rho}_\delta + \eta, \bar{\rho}_\delta + \xi]} g(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)$$

para todo $\bar{\rho}_\delta \in [\text{infess}\bar{\rho}, \|\bar{\rho}\|_\infty]$.

Portanto, podemos definir uma função contínua por

$$M(\bar{\rho}_\delta) = \max\{(\frac{p(\bar{\rho}_\delta)}{2})^{-1}, \frac{3p(\bar{\rho}_\delta)}{2}), m_1, m_2\}.$$

Seja agora

$$M = \sup_{\bar{\rho}_\delta \in [\text{infess } \bar{\rho}, \|\bar{\rho}\|_\infty]} M(\bar{\rho}_\delta).$$

Logo,

$$M^{-1} \le \frac{G(\rho_\delta,\bar{\rho}_\delta)}{(\rho_\rho - \bar{\rho}_\delta)^2} \le M.$$

□

Capítulo 2

Teorema de Existência

Consideramos o seguinte problema de valor inicial

$$(PVI)\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + P(\rho)_x = \mu u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ (\rho(\cdot, 0), u(\cdot, 0)) = (\rho_0, u_0), \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

com os dados iniciais (ρ_0, u_0) satisfazendo (1.18)e (1.22) e cuja a pressão $P(\rho)$ é dada.

Nesta Dissertação temos como objetivo a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Seja o problema de valor inicial* (PVI), *sendo* $\mu > 0$ *uma constante e com* P *e* P' *funções contínuas satisfazendo as condições* (1.28) *e* (1.29) *e* (ρ_0, u_0) *satisfazendo* (1.18) *e* (1.22). *Suponhamos também que as soluções aproximadas* (ρ_δ, u_δ) *que serão dadas abaixo satisfaçam a condição*

$$\int_0^T \Big(\int ((u_\delta)_x)^4 \ dx \Big)^{1/2} \ dt \le C(T), \tag{2.1}$$

para uma constante $C(T) > 0$ *independente de* δ. *Então para qualquer* $T > 0$, *o* (PVI) *possui uma solução fraca* (ρ, u) *em* $\mathbb{R} \times [0, T]$ *com as seguintes propriedades:*

$$\rho - \bar{\rho}, \rho u - \bar{\rho}\bar{u} \in C^{1/2}([0, T]; H^{-1}(\mathbb{R})), \tag{2.2}$$

$$u - \bar{u} \in C((0, T]; L^2(\mathbb{R})). \tag{2.3}$$

A demonstração do Teorema 2.1 está baseada em uma série de estimativas *a priori* que serão feitas para uma família de funções ρ_δ e u_δ e mostrando que ela converge para funções ρ e u que são soluções no sentido fraco do (PVI). Tal sequência será obtida por meio de uma regularização dos dados iniciais. Observe que as equações do momento e da continuidade do (PVI) são as equações dadas em (1.13) e (1.14), respectivamente, para $f \equiv 0$.

2.1 Estimativas *a priori* Sobre Soluções Suaves

Seja (ρ_0, u_0) dados iniciais do (PVI). Definamos $((\rho_0)_\delta, (u_0)_\delta) = ((\rho_0) * J_\delta, (u_0) * J_\delta)$, uma regularização dos mesmos. Para os dados iniciais $((\rho_0)_\delta, (u_0)_\delta)$ existe solução suave (ρ_δ, u_δ) definida em $\mathbb{R} \times [0, T]$, com $T > 0$ qualquer, do seguinte problema de valor inicial:

$$(PVI)_\delta \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + P(\rho)_x = \mu u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ (\rho(\cdot, 0), u(\cdot, 0)) = ((\rho_0)_\delta, (u_0)_\delta), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A construção da solução do $(PVI)_\delta$ pode ser encontrada em [6]. Consideremos $(\bar{\rho}_\delta, \bar{u}_\delta)$ como definida em (1.23). Vamos assumir,

$$\rho_\delta(\cdot, t) - \bar{\rho}_\delta, u_\delta(\cdot, t) - \bar{u}_\delta \in H^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{s=0}^{\infty} H^s(\mathbb{R}),$$

para todo $t > 0$ (veja (1.24)). Como $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ e $\bar{\rho}_\delta \in L^1(\mathbb{R})$, segue-se, em particular, que $\|\rho_\delta(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = C(\delta, \ t) < \infty$ (de modo análogo para u). Nosso objetivo nessa seção é obter estimativas para (ρ_δ, u_δ) independentemente de δ para estudar a sua convergência quando $\delta \to 0$. Em toda dissertação, $C(T)$, C ou $C_j (j = 1, 2, 3, ...)$ denotará uma constante independente do parametro δ.

A condição (2.1) é satisfeita quando $\{u_\delta\}$ é limitada em $L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}))$. De fato, para $f \in H^1(\mathbb{R})$ vale que

$$f^4 = f^2 f^2 \leq \|f\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} f^2,$$

que integrando obtém-se que

$$\|f\|^4_{L^4(\mathbb{R})} \leq \|f\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Logo usando a imersão de Sobolev (Teo. A.21) segue-se que

$$\|f\|_{L^4(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{H^1}.$$

(Mais geralmente, $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{H^1}$, para qualquer $p \geq 2$.) Então,

$$\begin{aligned} \int_0^T \Big(\int (u_\delta)_x^4 dx \Big)^{1/2} dt = \int_0^T \|(u_\delta)_x\|^2_{L^4(\mathbb{R})} dt &\leq C \int_0^T \|(u_\delta)_x\|^2_{H^1(\mathbb{R})} dt \\ &\leq C \int_0^T \|u_\delta\|^2_{H^2(\mathbb{R})} dt = C \|u_\delta\|^2_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}))}. \end{aligned}$$

Veremos que $\{u_\delta - \bar{u}_\delta\}$ é limitada em $L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}))$ quando $\rho_0 - \bar{\rho} \in H^1(\mathbb{R})$ e $u_0 - \bar{u} \in H^1(\mathbb{R})$(e infess$\rho_0 > 0$).

No artigo [8](tema central desta Dissertação) a condição (2.1), no Teorema 2.1, não é assumida como hipótese, porem ela não é demonstrada no mesmo. O autor indica o artigo [7], onde se resolve a versão multidimensional ($x \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$) do (PVI), para adaptar os cálculos lá feitos a fim de obtê-la, o que também é feito em relação a várias outras estimativas que apresentamos aqui com detalhes. No entanto, a condição (2.1), mas somente ela, não é mostrada nesta Dissertação. Por isto ela é colocada como hipótese no Teorema 2.1, com a demonstração feita detalhadamente. O único lugar onde a usamos nesta Dissertação é na demonstração do Lema 2.9, somente para estimar o termo $\int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x u_x^2 \; dx \; ds$. Com efeito, usando a desigualdade de Hölder e que $\sigma \leq 1$(σ está definida no Lema 2.9) temos que este termo é majorado por

$$\int_0^t (\int \dot{u}_x^2 \; dx)^{1/2} \; ds \int_0^t (\int u_x^4 dx)^{1/2} ds$$

e o primeiro fator aqui pode ser estimado como veremos na demonstração do Lema 2.9. É interessante observar que podemos estimar um termo semelhante com potência cúbica em u_x, isto é $\int_0^t \left(\int u_x^3 dx \right)^{1/2} ds$, como pode ser visto na demonstração do Lema 2.9, mas não obtivemos sucesso com a potência quadrádica tentando argumentos semelhantes àqueles apresentados na demonstração do Lema 2.9.

A fim de não sobrecarregar a notação, escreveremos (ρ, u) quando estivermos tratando da solução do $(PVI)_\delta$ e (ρ_1, u_1) quando estivermos tratando da solução do (PVI), já que nesta seção falaremos mais sobre as soluções de $(PVI)_\delta$. Tomaremos $\mu = 1$ na segunda equação(equação do momento) do $(PVI)_\delta$ só para simplificar as contas mas, não trazendo nenhuma perda de generalidade como pode ser observado no desenvolvimento que se segue. Por fim, nesta seção também adotaremos as notações $\int \equiv \int_{\mathbb{R}}$,

$$\Delta u = u - \bar{u} \tag{2.4}$$

e

$$\Delta \rho = \rho - \bar{\rho}. \tag{2.5}$$

Chamaremos a atenção para o fato de que $\bar{u}$ e $\bar{\rho}$ são funções que dependem apenas de x, o que nos dá por exemplo, as fórmulas $(\Delta u)_t = u_t$ e $(\Delta \rho)_t = \rho_t$, as quais serão utilizadas na demonstração do resultado a seguir.

Proposição 2.2 *Seja (ρ, u) uma solução suave do problema $(PVI)_\delta$. Então, existe uma constante $C(T) > 0$ tal que*

$$\sup_{t \in [0,T]} \int [\frac{\rho(\Delta u)^2}{2} + G(\rho, \bar{\rho})] dx + \int_0^T \int (u_x)^2 \; dx \; dt \leq C(T). \tag{2.6}$$

Dem.

Definimos

$$g(x,t) = [\frac{\rho(\Delta u)^2}{2} + G(\rho,\bar{\rho})](x,t) \tag{2.7}$$

e

$$A(t) = \int g(x,t)dx \ . \tag{2.8}$$

Calculando $\int g_t(x,t)dx$, temos

$$\int g_t(x,t)dx = \int [\frac{\rho_t(\Delta u)^2}{2} + \rho u_t \Delta u + G(\rho,\bar{\rho})_t](x,t)dx \ .$$

Substituindo as equações dadas no $(PVI)_\delta$ e usando a forma de $G(\rho,\bar{\rho})_t$ dada na Proposição 1.4, obtemos:

$$\int g_t(x,t)dx = \int [(\frac{-(\rho u)_x(\Delta u)^2}{2} + (u_{xx} - \rho u u_x - P(\rho)_x)\Delta u - (\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x u\Delta\rho$$
$$- (P(\rho) - P(\bar{\rho}))u_x - (G(\rho,\bar{\rho})u)_x](x,t)dx.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\int [\frac{-(\rho u)_x(\Delta u)^2}{2}](x,t)dx = [\frac{-(\rho u)(\Delta u)^2}{2}](x,t)|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{-(\rho u)(|\Delta u|^2)_x}{2}dx$$
$$= \int [\rho u \Delta u \Delta u_x](x,t)dx,$$

já que $\lim_{|x|\to\infty} \Delta u = 0$ e $\rho(\cdot,t), u(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R})$, visto que estas funções estão em $H^1(\mathbb{R})$. Portanto,

$$\int g_t(x,t)dx = \int [\rho u \Delta u \Delta u_x - \rho u u_x \Delta u + u_{xx}\Delta u - (\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x \Delta\rho u$$
$$- P(\rho)_x \Delta u - \Delta P u_x - (G(\rho,\bar{\rho})u)_x](x,t)dx,$$

onde $\Delta P = P(\rho) - P(\bar{\rho})$. Simplificando e somando $P(\bar{\rho})_x\Delta u - P(\bar{\rho})_x\Delta u + \Delta P\bar{u}_x - \Delta P\bar{u}_x = 0$ na integral acima, obtemos que

$$\int g_t(x,t)dx = \int [-\rho u\bar{u}_x\Delta u + u_{xx}\Delta u - (\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x\Delta\rho u - \Delta P_x \Delta u$$
$$- \Delta P\Delta u_x - P(\bar{\rho})_x\Delta u - \Delta P\bar{u}_x - (G(\rho,\bar{\rho})u)_x](x,t)dx.$$

Pela regra do produto temos que $-\Delta P_x\Delta u - \Delta P\Delta u_x = -(\Delta P\Delta u)_x$. Como $P(\rho)(x,t)$ e $P(\bar{\rho})(x,t)$ são limitadas em x, temos que ΔP é limitada. Portanto, do fato que $\lim_{|x|\to\infty} \Delta u(x,t) = 0$ segue que $\int -(\Delta P\Delta u)_x dx = 0$. Usando esse fato chegamos à

$$\int g_t(x,t)dx = \int [-\rho u\bar{u}_x\Delta u + u_{xx}\Delta u - (\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x\Delta\rho u - P(\bar{\rho})_x\Delta u - \Delta P\bar{u}_x$$
$$- (G(\rho,\bar{\rho})u)_x](x,t)dx.$$

Usando novamente integração por partes, obtemos

$$\int [u_{xx}\Delta u](x,t)dx = -\int [u_x \Delta u_x](x,t)dx.$$

Logo, segue-se que

$$\begin{aligned}\int g_t(x,t)dx = \int [&-\rho u \bar{u}_x \Delta u - \Delta u_x \Delta u_x - \bar{u}_x \Delta u_x - (\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \Delta \rho u \\ &- P(\bar{\rho})_x \Delta u - \Delta P \bar{u}_x - (G(\rho,\bar{\rho})u)_x](x,t)dx.\end{aligned}$$

Fazendo $X = -(\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x \Delta\rho u - P(\bar{\rho})_x \Delta u$, temos que

$$\begin{aligned}X &= (-\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \rho u + (\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x u\bar{\rho} - (\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \bar{\rho}\Delta u \\ &= (-\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \rho u + (\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x u\bar{\rho} - (\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \bar{\rho} u + (\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \bar{\rho}\bar{u}.\end{aligned}$$

Simplificando e somando $(\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x \rho\bar{u} - (\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x \rho\bar{u} = 0$ na equação acima, obtemos que

$$\begin{aligned}X &= (-\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \rho \Delta u - (\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \rho\bar{u} + (\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \bar{\rho}\bar{u} \\ &= (-\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \rho \Delta u - (\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x \bar{u}\Delta\rho = (-\bar{\rho})^{-1} P(\bar{\rho})_x (\rho\Delta u + \bar{u}\Delta\rho).\end{aligned}$$

Substituindo X e somando $\rho\bar{u}\bar{u}_x\Delta u - \rho\bar{u}\bar{u}_x\Delta u = 0$ na última fórmula encontrada para $\int g_t(x,t)dx$, obtemos

$$\begin{aligned}\int g_t(x,t)dx = \int [&-\bar{u}_x\Delta u_x - \rho\bar{u}\bar{u}_x\Delta u - \rho\bar{u}_x(\Delta u)^2 - (\Delta u_x)^2 - (\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x(\rho\Delta u \\ &+ \bar{u}\Delta\rho) - \Delta P\bar{u}_x - (G(\rho,\bar{\rho})u)_x](x,t)dx,\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}\int g_t(x,t)dx + \int (\Delta u_x)^2(x,t)dx = \int [&-\bar{u}_x\Delta u_x - \rho\bar{u}\bar{u}_x\Delta u - \rho\bar{u}_x(\Delta u)^2 - \Delta P\bar{u}_x \\ &- (\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x(\rho\Delta u + \bar{u}\Delta\rho) - (G(\rho,\bar{\rho})u)_x](x,t)dx.\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.4, temos que $|\int (G(\rho,\bar{\rho})u)_x(x,t)dx| \leq |[uM\Delta\rho^2](x,t)|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\int g_t(x,t)dx + \int (\Delta u_x)^2 dx = \int [&-\bar{u}_x\Delta u_x - \rho\bar{u}\bar{u}_x\Delta u - \rho\bar{u}_x(\Delta u)^2 - \Delta P\bar{u}_x \\ &- (\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x(\rho\Delta u + \bar{u}\Delta\rho)](x,t)dx,\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned}\int g_t(x,t)dx + \int (\Delta u_x)^2 dx \leq \int \big[&|-\Delta u_x\bar{u}_x| + |\rho\Delta u\bar{u}\bar{u}_x| + |\rho||\Delta u|^2\bar{u}_x| + |\Delta P\bar{u}_x| \\ &+ |\bar{\rho}^{-1}P(\bar{\rho})_x(\rho\Delta u + \bar{u}\Delta\rho)|(x,t)dx.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Em seguida faremos majorações dos termos do lado direito da equação (2.9), para obtermos uma estimativa para os termos do lado esquerdo. Usaremos constantemente que $\bar{\rho}_x = \bar{u}_x = 0$ para $|x| > 1$.

Como já foi comentado antes do enunciado desta Proposição, desejamos que a constante $C(T) > 0$ aqui encontrada não dependa do parametro δ.

Afirmamos que existe uma constante $C > 0$ que independe do parametro δ, tal que $\sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}_x(x)| \leq C$. De fato, da desigualdade de Young temos que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}_x|(x) = \|(\bar{u}_1)_x * (J_\delta)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|(\bar{u}_1)_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|(J_\delta)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|(\bar{u}_1)_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = C,$$

onde $\bar{u}_1$ é definida pelos dados iniciais do (PVI). A mesma desigualdade é válida se u estiver no lugar de u_x.

Passamos às estimativas de (2.9):

- $\displaystyle\int |\Delta u_x \bar{u}_x| dx = \int_{-1}^{1} |\Delta u_x||\bar{u}_x| dx \leq \sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}_x| \int_{-1}^{1} |\Delta u_x| dx.$

Daí, pela Desigualdade de Hölder

$$\int |[\Delta u_x \bar{u}_x](x,t)| dx \leq \sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}_x|(x) (\int_{-1}^{1} |\Delta u_x|^2(x,t) dx)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}},$$

e por (A.4) com $\xi = 1$,

$$\int |[\Delta u_x \bar{u}_x](x,t)| dx \leq (\sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}_x|(x))^2 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |\Delta u_x|^2(x,t) dx.$$

Logo para $C_1 > (\sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}_x|(x))^2$, temos que

$$\int |\Delta u_x \bar{u}_x| dx \leq \frac{1}{2}\int |\Delta u_x|^2(x,t) dx + C_1 \leq \frac{1}{2}\int |\Delta u_x|^2(x,t) dx + C_1(A(t)+1).$$

- $\displaystyle\int |\rho \Delta u \bar{u} \bar{u}_x|(x,t) dx \leq \sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}_x|(x) \sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}|(x) \int_{-1}^{1} |\rho \Delta u|(x,t) dx.$

Pela desigualdade de Hölder e como já foi observado que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}|(x) \sup_{x\in[-1,1]} |\bar{u}_x|(x) \leq C_2,$$

para alguma constante $C_2 > 0$, temos que

$$\int |\rho \Delta u \bar{u} \bar{u}_x|(x,t) dx \leq C_2 (\int_{-1}^{1} \rho(x,t) dx)^{1/2} (\int_{-1}^{1} [\rho|\Delta u|^2](x,t) dx)^{1/2}.$$

Por (A.4) com $\xi = 1$ segue que

$$\int |\rho \Delta u \bar{u} \bar{u}_x|(x,t)dx \leq \frac{C_2}{2} \int_{-1}^{1} \rho dx + \int_{-1}^{1} [\rho |\Delta u|^2](x,t)dx.$$

Usando agora a constante $C > 0$ dada em (1.29) e que $P(\rho) \geq 0$, obtemos

$$\int |\rho \Delta u \bar{u} \bar{u}_x|(x,t)dx \leq C_2 C \int_{-1}^{1} [1 + G(\rho, \bar{\rho}) + \rho |\Delta u|^2](x,t)dx.$$

Logo,

$$\int |\rho \Delta u \bar{u} \bar{u}_x|(x,t)dx \leq C_2 C \int_{-1}^{1} [2 + 2G(\rho, \bar{\rho}) + \rho |\Delta u|^2](x,t)dx,$$

e daí,

$$\int |\rho \Delta u \bar{u} \bar{u}_x|(x,t)dx \leq C_2 C(1 + A(t)).$$

- $\displaystyle\int |\rho||\Delta u|^2 |\bar{u}_x|(x,t)dx \leq \sup_{x \in [-1,1]} |\bar{u}_x| \int_{-1}^{1} \rho(\Delta u)^2 dx.$

Como $G(\rho, \bar{\rho}) + 1 \geq 0$, temos que

$$\int |\rho |\Delta u|^2 \bar{u}_x|(x,t)dx \leq C_1(2 + \int_{-1}^{1} 2G(\rho, \bar{\rho}) + \rho |\Delta u|^2 dx),$$

donde segue que,

$$\int |\rho |\Delta u|^2 \bar{u}_x|(x,t)dx \leq 2C_1(1 + A(t)).$$

- $\displaystyle\int |\Delta P \bar{u}_x|(x,t)dx = \int_{-1}^{1} |\Delta P \bar{u}_x|(x,t)dx \leq \sup_{x \in [-1,1]} |\bar{u}_x|(x) \int_{-1}^{1} [|P(\rho)| + |P(\bar{\rho})|](x,t)dx.$

Como $P(\rho)$ é crescente e $\bar{\rho}$ é monótona temos que

$$\int |\Delta P \bar{u}_x|(x,t)dx \leq C_1 \int_{-1}^{1} |P(\rho)|(x,t) + \max\{P(\rho_-), P(\rho_+)\}dx.$$

Do fato de que $\rho(x,t) > 0$, temos que

$$\int |\Delta P \bar{u}_x|(x,t)dx \leq C_1 \int_{-1}^{1} [\rho + P(\rho)](x,t)dx + 2\max\{P(\rho_-), P(\rho_+)\}.$$

Como

$$\int_{-1}^{1} [\rho + P(\rho)](x,t)dx \leq \int_{-1}^{1} [C(1 + G(\rho, \bar{\rho})) + C(\rho |\Delta u|^2)](x,t)dx,$$

segue que

$$\int |\Delta P \bar{u}_x|(x,t)dx \leq 2C_1(T)C(1 + A(t)) + 2C_2(T),$$

e daí,

$$\int |\Delta P \bar{u}_x|(x,t)dx \leq C(T)(1 + A(t)).$$

$$\bullet \int |(\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x(\rho\Delta u + \bar{u}\Delta\rho)|(x,t)dx = \int_{-1}^{1} |(\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x(\rho\Delta u + \bar{u}\Delta\rho)|(x,t)dx,$$

já que $P(\bar{\rho})_x(x) = 0$ para $|x| > 1$. Logo,

$$\int |(\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x(\rho\Delta u + \bar{u}\Delta\rho)|(x,t)dx \leq (\text{infess } \bar{\rho})^{-1}(\text{ supess}_{x\in[-1,1]}|P(\bar{\rho})_x|)\int_{-1}^{1}|\rho\Delta u|dx$$
$$+ (\text{infess } \rho_0)^{-1}(\text{ supess}_{x\in[-1,1]}|P(\bar{\rho})_x\bar{u}|)\int_{-1}^{1}|\Delta\rho|dx.$$

Como sabemos que $\int_{-1}^{1}|\rho\Delta u|dx \leq C(1 + A(t))$ e $\Delta\rho = \rho - \bar{\rho}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int |(\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x(\rho\Delta u + \bar{u}\Delta\rho)|(x,t)dx \leq & C_1(T)(A(t)+1) \\ & + C_2(T)(\int_{-1}^{1}\rho dx + 2\text{ supess}_{x\in[-1,1]}\bar{\rho}).\end{aligned}$$

Introduzindo $C_3 > 0$ independente de δ tal que $2C_2 \text{ supess}_{x\in[-1,1]}\bar{\rho} \leq C_3$, concluimos que

$$\begin{aligned}\int |(\bar{\rho})^{-1}P(\bar{\rho})_x(\rho\Delta u) + \bar{u}\Delta\rho|(x,t)dx \leq & C_1(A(t)+1) + C_2(1 + A(t)) \\ & + C_3 \leq C_4(A(t)+1).\end{aligned}$$

Usando todas as majorações obtidas acima, voltamos à desigualdade em (2.9) e obtemos a existência de uma constante $C(T) > 0$ tal que:

$$\int g_t(x,t)dx + \int |\Delta u_x|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int |\Delta u_x|^2 dx + C(T) + C(T)A(t),$$

ou então,

$$\int g_t(x,t)dx + \frac{1}{2}\int |\Delta u_x|^2 dx \leq C(T) + C(T)A(t), \tag{2.10}$$

onde $A(t)$ foi definida em (2.8). Como o termo $\frac{1}{2}\int |\Delta u_x|^2 dx$ é não-negativo, a seguinte desigualdade é verdadeira:

$$\int g_t(x,t)dx \leq C(T) + C(T)A(t). \tag{2.11}$$

Daí, pelo lema de Gronwall (p. 68) segue que

$$\int g(x,t) \leq \int g(x,0)dx \quad e^{\int_0^t C(T)d\tau} + \int_0^t C(T)e^{\int_s^t C(T)d\tau}ds,$$

para qualquer $t \in [0,T]$. Considerando $0 \leq s \leq t \leq T$, temos que

$$e^{\int_s^t C(T)d\tau} \leq e^{\int_0^t C(T)d\tau} \leq e^{\int_0^T C(T)d\tau} \leq C_5(T),$$

para alguma constante $C_5(T) > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\int g(x,t)dx &\leq C_5(T)\int g(x,0)dx + \int_0^t C(T)C_5(T)ds \\ &\leq C_5(T)\int g(x,0)dx + TC(T)C_5(T).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Para concluir que $\int g(x,t) \leq C_6(T)$ falta verificar que existe uma constante que limita $\int g(x,0)dx = \int \left[\frac{\rho_0(u_0-\bar{u})^2}{2} + G(\rho_0,\bar{\rho})\right] dx$. Para este fim, sejam $(\rho_0)_\delta$, $(u_0)_\delta$ e $\bar{u}_\delta$ os dados iniciais e a função auxiliar referentes ao $(PVI)_\delta$ e ρ_0, u_0, $\bar{u}$ referentes ao (PVI). Da Desigualdade de Young temos que

$$\|(\rho_0)_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|\rho_0 * J_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|J_\delta\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = C$$

e

$$\begin{aligned}\|(u_0)_\delta - \bar{u}_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} =& \|(u_0-\bar{u}) * J_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|(u_0-\bar{u})\|_{L^2(\mathbb{R})}\|J_\delta\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|(u_0-\bar{u})\|_{L^2(\mathbb{R})} = C,\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ já que $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u_0 - \bar{u} \in L^2(\mathbb{R})$ por hipótese. Da Proposição 1.4 temos que existe $M > 0$ tal que $M^{-1}(\rho_0-\bar{\rho})^2 \leq G(\rho,\bar{\rho}) \leq M^{-1}(\rho_0-\bar{\rho})^2$, donde segue que

$$\int g(x,0)dx \leq \int G(\rho_0,\bar{\rho})dx + \text{ supess } \rho_0 \int \frac{(u_0-\bar{u})^2}{2}dx \leq C(T) + M\int(\rho_0-\bar{\rho})^2dx.$$

Usando a hipótese de que $\rho_0 - \bar{\rho} \in L^2(\mathbb{R})$, obtemos $\int g(x,0)dx \leq C_4(T)$. Portanto, para $t > 0$, obtemos que

$$\int g(x,t)dx \leq C(T).$$

Em particular

$$\sup_{t\in[0,T]} \int g(x,t)dx \leq C(T), \tag{2.13}$$

que é a majoração desejada para o primeiro termo em (2.6).

Voltando a (2.10) e integrando dos dois lados, obtemos que

$$\int_0^T \int g_t(x,t)\ dx\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int |\Delta u_x|^2(x,t)\ dx\ dt \leq C(T)T \equiv C_5(T).$$

Portanto, invertendo a ordem de integração do primeiro termo, obtemos que

$$A(T) - A(0) + \frac{1}{2}\int_0^T \int |\Delta u_x|^2\ dx\ dt \leq C_5(T).$$

Como $A(T) > 0$ e $A(0) < C_4(T)$, segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int |\Delta u_x|^2\ dx\ dt \leq C_5(T) + C_4(T) \equiv C(T).$$

Notemos agora que

$$(\Delta u_x)^2 = u_x^2 - 2u_x\bar{u}_x + \bar{u}_x^2,$$

donde,

$$u_x^2 = (\Delta u_x)^2 + 2u_x\bar{u}_x - \bar{u}_x^2,$$

e portanto,

$$u_x^2 \leq \Delta u_x^2 + 2|u_x||\bar{u}_x| + \bar{u}_x^2.$$

Como para $a, b > 0$, da desigualdade (A.4) com $\xi = 2$, temos que $ab \leq \frac{1}{4}a^2 + b^2$, obtemos

$$u_x^2 \leq \Delta u_x^2 + \frac{1}{2}|u_x|^2 + 3|\bar{u}_x|^2,$$

donde segue que

$$u_x^2 \leq 2\Delta u_x^2 + 6\bar{u}_x^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int u_x^2 \; dx \; dt &\leq 2\int_0^T \int \Delta u_x^2 \; dx \; dt + 6\int_0^T \int \bar{u}_x^2 \; dx \; dt \\ &\leq 4(C_5(T) + C_4(T)) + 6T \sup_{x\in[-1,1]} \bar{u}_x^2 \equiv C(T). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Portanto, das equações (2.13) e (2.14) e renomeando a constante podemos concluir que, existe $C(T) > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int g(x,t)dx + \int_0^T \int u_x^2 \; dx \; dt < C(T),$$

o que conclui a demonstração da Proposição 2.2.

$\square$

O próximo Lema será utilizado para obter uma limitação pontual para a função ρ na Proposição 2.5 a ser enunciada mais à frente (p. 26).

Lema 2.3 *Existe uma constante $C(T) > 0$ tal que para todo $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ existem pontos (x_1, t_0), (x_2, t_0) em $\mathbb{R} \times [0, T]$ tais que*

$$|x_1 - x_0| < C(T), \quad |x_2 - x_0| < C(T), \quad \rho(x_1, t_0) \geq C^{-1}(T) \;\; e \;\; \rho(x_2, t_0) \leq C(T).$$

Dem.

Sem perda de generalidade podemos supor em (1.19) que $\rho_- \leq \rho_+$. Da hipótese (1.30) existe $C \equiv C_1$ tal que $\underline{\lim}_{\rho\to 0} G(\rho, \rho') \geq C_1^{-1}$ para todo $\rho' > 0$. Daí podemos garantir a existência de uma constante $\delta > 0$ tal que se $\rho \in (0, \delta)$ então

$$G(\rho, \rho_-) \geq C_1^{-1}/2 \tag{2.15}$$

e, consequentemente,
$$G(\rho,\bar{\rho}) \geq C_1^{-1}/2. \tag{2.16}$$
Notemos que de (1.33) temos que $G_{\rho_2} \geq 0$. Como $\bar{\rho} \geq \rho_-$ segue que $G(\rho,\bar{\rho}) \geq G(\rho,\rho_-)$. Além disso, pela Proposição 2.2, existe uma constante $C_2(T) > 0$ tal que
$$\int G(\rho,\bar{\rho})dx < C_2(T). \tag{2.17}$$

Provaremos agora a existência do ponto $x_1 \in \mathbb{R}$ e da constante $C(T) > 0$ tais que $|x_1 - x_0| < C(T)$ e $\rho(x_1,t_0) \geq C^{-1}(T)$.

Seja $r = 2C_1C_2(T)$. Suponhamos por absurdo que $\rho(x,t_0) < \delta$ para todo x no intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$. Por (2.16) e (2.17), segue que
$$C_2(T) > \int G(\rho,\bar{\rho})dx \geq \int_{x_0-r}^{x_0+r} G(\rho,\bar{\rho})dx \geq rC_1^{-1} = 2C_2(T),$$
o que é uma contradição, já que $C_2(T) > 0$. Portando, existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\delta \leq \rho(x_1,t_0)$ e $|x_1 - x_0| \leq r$. Logo, basta tomar $C_3(T) = \max\{\delta^{-1}, r\}$ que teremos $C_3(T)^{-1} \leq \rho(x_1,t_0)$ e $|x_1 - x_0| \leq C_3(T)$.

Observação: Uma observação pertinente é que qualquer constante $C > C_3(T)$ ainda nos serve para termos $C^{-1} \leq \rho(x_1,t_0)$ e $|x_1 - x_0| \leq C$.

Para concluir a demonstração do Lema 2.3 mostraremos a existência de $x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $|x_2 - x_0| < C(T)$ e $\rho(x_2,t_0) \leq C(T)$, para algum $C(T) > 0$ (independente de (x_0,t_0), x_1, x_2 e δ). Pelo teorema do valor médio para integrais, dado $C_4 > 0$ existe $x_2 \in [x_0 - C_4(T), x_0 + C_4(T)]$ tal que
$$\int_{x_0-C_4(T)}^{x_0+C_4(T)} G(\rho(x,t_0),\bar{\rho}(x))dx = 2C_4(T)G(\rho(x_2,t_0),\bar{\rho}(x_2)). \tag{2.18}$$

Observamos aqui que a constante $C_4(T) > 0$ será escolhida convenientemente mais adiante.

Das equações (2.17) e (2.18) temos que
$$2C_4(T)G(\rho(x_2,t_0),\bar{\rho}(x_2)) \leq \int G(\rho(x,t_0),\bar{\rho}(x))dx \leq C_2(T),$$
donde segue que
$$G(\rho(x_2,t_0),\bar{\rho}(x_2)) \leq \frac{C_2(T)}{2C_4(T)}. \tag{2.19}$$
Se $\rho(x_2,t_0) \leq \rho_+$, basta tomarmos $C_4(T) = \max\{C_3(T),\rho_+\}$ para concluimos a demonstração. Suponhamos então que $\rho(x_2,t_0) > \rho_+$. Como $\bar{\rho}(x)$ é não-decrescente,

concluimos que $\rho(x_2,t_0) > \rho_+ \geq \bar{\rho}(x_2)$. Como $G(\rho(x_2,t_0),\ \cdot\ )$ é decrescente na segunda variável no intervalo $(0,\rho(x_2,t_0))$ (veja a derivada de G em (1.33)), da estimativa (2.19) temos que

$$G(\rho(x_2,t_0),\rho_+) \leq \frac{C_2(T)}{2C_4(T)}. \tag{2.20}$$

Seja $C_4(T) > C_3(T)$ tal que

$$\frac{C_2(T)}{2C_4(T)} \leq G(2\rho_+,\rho_+). \tag{2.21}$$

Daí, de (2.20) temos que

$$G(\rho(x_2,t_0),\rho_+) \leq \frac{C_2(T)}{2C_4(T)} \leq G(2\rho_+,\rho_+).$$

Como G é contínua, podemos garantir a existência de uma constante $C_5(T)$ tal que $G(C_5(T),\rho_+) = \frac{C_2(T)}{2C_4(T)}$. Por $G(\cdot,\rho_+)$ ser crescente na primeira variável no intervalo (ρ_+,∞)(veja a derivada de G em (1.31)), segue que $\rho(x_2,t_0) \leq C_5(T)$. Portanto tomando $C(T) = \max\{C_4(T),C_5(T)\}$ obtemos que $\rho(x_2,t_0) \leq C(T)$, o que conclui a demonstração do Lema 2.3.

$\square$

O objetivo da próxima Proposição é encontrar uma limitação para a função ρ. Notemos que se for possivel encontrar alguma constante $C_2(T) > 0$, tal que

$$(C_2(T))^{-1}\rho(x_1,t_0) \leq \rho(x_0,t_0) \leq C_2(T)\rho(x_2,t_0), \tag{2.22}$$

para (x_1,t_0) e (x_2,t_0) como no Lema 2.3, teremos uma limitação para ρ ao trocarmos $C_2(T)^{-1}\rho(x_1,t_0)$ e $C_2(T)\rho(x_1,t_0)$ por $[C_2(T)C(T)]^{-1}$ e $C_2(T)C(T)$, respectivamente.

Observemos agora que $C_2(T)$ satisfazendo (2.22) equivale a

$$(C_2(T))^{-1} \leq \frac{\rho(x_0,t_0)}{\rho(x_1,t_0)} \quad e \quad \frac{\rho(x_0,t_0)}{\rho(x_2,t_0)} \leq C_2(T),$$

ou, aplicando o logaritmo,

$$\ln(C_2(T))^{-1} \leq \ln\rho(x_0,t_0) - \ln\rho(x_1,t_0) \quad e \quad \ln\rho(x_0,t_0) - \ln\rho(x_2,t_0) \leq \ln C_2(T).$$

Portanto, basta mostrarmos que para qualquer x tal que $|x - x_0| \leq C(T)$ teremos

$$|\ln\rho(x_0,t_0) - \ln\rho(x,t_0)| \leq \ln C_2(T).$$

Na demonstração da Proposição 2.5 que se segue. Usaremos o fluxo $X \equiv X_\delta$ de $u \equiv u_\delta$, dado pelo problema de valor inicial (1.1). Antes disto enunciaremos outro Lema cuja a demonstração daremos posteriormente.

Lema 2.4 *Dado (x_0, t_0), seja $\bar{x}$ tal que*

$$0 < |x_0 - \bar{x}| < C_1$$

e

$$\rho(\bar{x}, t_0) \leq C_1 \quad ou \quad \rho(\bar{x}, t_0) \geq C_1,$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Para $y_0 = X^{-1}(x_0, 0)$ e $\bar{y} = X^{-1}(\bar{x}, 0)$, sejam $X_0(t) = X(y_0, t)$ e $X_1(t) = X(\bar{y}, t)$, os fluxos que passam por x_0 e $\bar{x}$, respectivamente, no instante t_0. Então,

$$|X_1(t) - X_0(t)| \leq C_2(T),$$

para algum $C_2(T) > 0$. Mais ainda, se $\bar{y} > y_0$ então $X_1(t) > X_0(t)$ para todo $t > 0$.

Proposição 2.5 *Seja (ρ, u) solução do $(PVI)_\delta$ definida em $\mathbb{R} \times [0, T]$. Então existe uma constante $C(T) > 0$ tal que*

$$C(T)^{-1} \leq \rho(x, t) \leq C(T), \; x \in \mathbb{R}, \; t \in [0, T].$$

Dem.

Definimos a função $\Delta L(t) = \ln[\rho(X_1(t), t)] - \ln[\rho(X_0(t), t)]$.

Ao derivarmos $\Delta L(t)$ em relação a t obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta L(t) =& \frac{1}{\rho(X_1(t), t)}\big(\rho_x(X_1(t), t)\dot{X}_1(t) + \rho_t(X_1(t), t)\big) \\ &- \frac{1}{\rho(X_0(t), t)}\big(\rho_x(X_0(t), t)\dot{X}_0(t) + \rho_t(X_0(t), t)\big).\end{aligned}$$

Por (1.1), temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta L(t) =& \frac{1}{\rho(X_1(t), t)}\big(\rho_x(X_1(t), t)u(X_1(t), t) + \rho_t(X_1(t), t)\big) \\ &- \frac{1}{\rho(X_0(t), t)}\big(\rho_x(X_0(t), t)u(X_0(t), t) + \rho_t(X_0(t), t)\big).\end{aligned}$$

Usando as equações da continuidade (1.13) e do momento (1.14) (para $f \equiv 0$), temos que para qualquer $t > 0$ vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta L =& - u_x(X_1(t), t) + u_x(X_0(t), t) \\ =& \int_{X_0}^{X_1} -u_{xx}dx = -\int_{X_0}^{X_1} [(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + P(\rho)_x]dx.\end{aligned}$$

Usando a definição de derivada material dada em (1.3) (p. 4) temos que

$$\begin{aligned}\rho\dot{u} =& \rho u_t + uu_x\rho = (\rho u)_t - \rho_t u + \frac{(u^2)_x\rho}{2} \\ =& (\rho u)_t + u^2\rho_x + \frac{(u^2)_x\rho}{2} + \frac{(u^2)_x\rho}{2} \\ =& (\rho u)_t + (u^2\rho)_x.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\Delta L = -\int_{X_0}^{X_1} \rho\dot{u} + P(\rho)_x dx.$$

Seja

$$I = \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} \rho u \quad dx.$$

Derivando esta expressão em relação a t e usando (1.1), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I &= \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (\rho u)_t dx + (\rho u)(X_1(t),t)\dot{X}_1(t) - (\rho u)(X_0(t),t)\dot{X}_0(t)\\ &= \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (\rho u)_t dx + (\rho u^2)(X_1(t),t) - (\rho u^2)(X_0(t),t)\\ &= \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (\rho u)_t dx + \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (\rho u^2)_x dx = \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} \rho\dot{u} \quad dx.\end{aligned}$$

Se fizermos $\Delta P = P(\rho(\cdot,t))|_{X_0}^{X_1}$, então obtemos que

$$\frac{d}{dt}\Delta L = -\frac{d}{dt}I - \Delta P. \tag{2.23}$$

Como $X_1(t) - X_0(t) \neq 0$, então $\Delta L \neq 0$. Como $P'(\rho) > 0$, então a função $\alpha(t) = \frac{\Delta P(t)}{\Delta L(t)}$ é tal que $\alpha(t) > 0, \quad \forall t \in [0,T]$. Assim podemos escrever (2.23) como a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d}{dt}\Delta L + \alpha(t)\Delta L(t) = -\frac{d}{dt}I,$$

cuja solução é dada implicitamente por

$$\Delta L = -\int_0^t e^{\int_t^s \alpha(\tau)d\tau}\frac{d}{dt}I(s)ds + \Delta L(0)e^{-\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}.$$

Integrando por partes, obtemos que

$$\int_0^t e^{\int_t^s \alpha(\tau)d\tau}\frac{d}{dt}I(s)ds = e^0 I(t) - e^{\int_t^0 \alpha(\tau)d\tau}I(0) - \int_0^t e^{\int_t^s \alpha(\tau)d\tau}\alpha(s)I(s)ds.$$

Portanto,

$$|\Delta L(t)| \leq |\Delta L(0)| + |I(t)| + |I(0)| + \int_0^t e^{-\int_s^t \alpha(\tau)d\tau}\alpha(s)|I(s)|ds. \tag{2.24}$$

Mostraremos que $|I(t)| \leq C_3(T)$. De fato, por (1.29) temos que

$$\begin{aligned}|I| &\leq \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} \rho|\Delta u|dx + \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} \rho|\bar{u}|dx\\ &\leq C\int_{X_0(t)}^{X_1(t)} \sqrt{(1+G(\rho,\bar{\rho}))}\sqrt{\rho}|\Delta u|dx + \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} \rho|\bar{u}|dx.\end{aligned}$$

Por (A.4), segue que

$$|I(t)| \leq C \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (1 + G(\rho, \bar{\rho})) + \rho|\Delta u|^2 dx + C \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (1 + G(\rho, \bar{\rho}))|\bar{u}| dx,$$

logo,

$$\begin{aligned}
|I(t)| &\leq C(X_1(t) - X_0(t)) + C \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} G(\rho, \bar{\rho}) + \rho|\Delta u|^2 dx + CC_4(T) \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (1 + G(\rho, \bar{\rho})) dx \\
&\leq C(X_1(t) - X_0(t)) + C \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} G(\rho, \bar{\rho}) + \rho|\Delta u|^2 dx \\
&+ CC_4(T) \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (1 + G(\rho, \bar{\rho}) + \rho|\Delta u|^2) dx \\
&\leq (C + CC_4(T))(X_1(t) - X_0(t) + \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} 2G(\rho, \bar{\rho}) + \rho|\Delta u|^2 dx).
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.2 e como $|X_1(t) - X_0(t)| \leq C_2(T)$, obtemos que

$$|I(t)| \leq (C + CC_4(T))(C_2(T) + C_4(T)) \equiv C_3(T).$$

Usamos esta estimativa no último termo de (2.24), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau} \alpha(s)|I| ds &\leq C_3(T) \int_0^t e^{-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau} \alpha(s) ds \\
&= C_3(T) \int_0^t \frac{d}{ds} e^{-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau} ds \\
&\leq C_3(T)(1 - e^{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau}).
\end{aligned}$$

Como $\alpha(t) > 0$, temos $1 - e^{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} < 1$. Assim,

$$\int_0^t e^{-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau} \alpha(s)|I| ds \leq C_3(T).$$

Logo é possível encontrar uma constante $C_7(T) > 0$ tal que a equação (2.24) fornece

$$|\Delta L(t)| \leq C_7(T), \ \forall t \in [0, T].$$

Em particular, para $t = t_0$, temos que

$$|\Delta L(t_0)| = |\ln \rho(\bar{x}, t_0) - \ln \rho(x_0, t_0)| \leq C_7(T),$$

donde segue que

$$e^{-C_7(T)} \rho(\bar{x}, t_0) \leq \rho(x_0, t_0) \leq e^{C_7(T)} \rho(\bar{x}, t_0),$$

o que conclui a demonstração da Proposição 2.5.

□

Demonstração do Lema 2.4

Como X_0 e X_1 são curvas integrais distintas do campo u temos que para todo $t > 0$, $X_0(t) \neq X_1(t)$ e se supormos que $\bar{y} > y_0$ então $X_1(t) > X_0(t)$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $X_1(t) > X_0(t)$ para todo $t > 0$. De (1.1) temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(X_1(t) - X_0(t)) &= \dot{X}_1(t) - \dot{X}_0(t) = u(X_1(t), t) - u(X_0(t), t) \\ &= u(x,t)|_{X_0(t)}^{X_1(t)} = \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} u_x(x,t)dx.\end{aligned}$$

Nesse ponto vamos usar a desigualdade

$$a \geq \frac{-1 - a^2}{2}, \ \forall a \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(X_1(t) - X_0(t)) &\geq \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} -\frac{1}{2} - \frac{(u_x)^2}{2}(x,t)dx \geq \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} -1 - (u_x)^2(x,t)dx \\ &= -(X_1(t) - X_0(t)) - \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (u_x)^2(x,t)dx.\end{aligned}$$

Multiplicando por e^t, temos que

$$e^t \frac{d}{dt}(X_1(t) - X_0(t)) \geq -e^t(X_1(t) - X_0(t)) - e^t \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (u_x)^2(x,t)dx,$$

donde segue que

$$\frac{d}{dt} e^t(X_1(t) - X_0(t)) \geq -e^t \int_{X_0(t)}^{X_1(t)} (u_x)^2(x,t)dx.$$

Integrando em τ, de $\tau = t$ a $\tau = t_0$

$$e^{t_0}(\bar{x} - x_0) - e^t(X_1(t) - X_0(t)) \geq -\int_t^{t_0} e^\tau \int_{X_0(\tau)}^{X_1(\tau)} (u_x)^2 dx d\tau.$$

Daí,

$$-e^t(X_1(t) - X_0(t)) \geq \int_0^t e^\tau \int_{X_0(\tau)}^{X_1(\tau)} (u_x)^2 dx d\tau - e^{t_0}(\bar{x} - x_0),$$

logo,

$$e^t(X_1(t) - X_0(t)) \leq -\int_0^T e^\tau \int_{X_0(\tau)}^{X_1(\tau)} (u_x)^2 dx d\tau + e^{t_0}(\bar{x} - x_0),$$

e daí,

$$\begin{aligned}(X_1(t) - X_0(t)) &\leq \frac{1}{e^t}\Big[\int_0^T e^\tau \int_{X_0(\tau)}^{X_1(\tau)} (u_x)^2 dx d\tau + e^{t_0}(\bar{x} - x_0)\Big] \\ &\leq e^T \Big[\int_0^T e^\tau \int_{X_0(\tau)}^{X_1(\tau)} (u_x)^2 dx d\tau + (\bar{x} - x_0)\Big].\end{aligned}$$

Como $\bar{x} - x_0 \leq C_1(T)$, pela Proposição 2.2 temos que $|X_1(t) - X_0(t)| < C_2(T)$, para algum $C_2(T) > 0$.

□

As Proposições 2.2 e 1.4 são importantes porque com elas mostramos facilmente que as funções u e ρ possuem limitações no $L^2(\mathbb{R})$ independentemente de δ. Com efeito, pelas Proposições anteriores temos constantes $M, C_1(T)$ *e* $C_2(T)$ tais que

$$\int (\Delta u)^2 dx \leq C_2(T) \int \rho(\Delta u)^2 dx \leq C_1(T)$$

e

$$\int (\Delta \rho)^2 dx \leq MG(\rho, \bar{\rho}) \leq C_1(T),$$

para todo $t \in [0, T]$. A Proposição 2.2 ainda nos fornece que $\int_0^T \int (u_x)^2 \ dx \ dt \leq C_1(T)$, ou seja, $\int (u_x)^2 dx \leq C_1(T)$ para quase todo $t \in [0, T]$. Resumimos estas três estimativas escrevendo que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int [(\Delta u)^2 + (\Delta \rho)^2] dx + \int_0^T \int (u_x)^2 \ dx \ dt \leq C_3(T), \tag{2.26}$$

para alguma constante $C_3(T) > 0$.

Os Lemas 2.6 e 2.7 e a Proposição 2.8 a seguir estão no trabalho [9]. Colocamos os mesmos nesta Dissertação para obtermos uma estimativa para a derivada de u, de primeira ordem em relação a t e de segunda ordem em relação a x, quando os dados iniciais satisfazem $\rho_0 - \bar{\rho}, u_0 - \bar{u} \in H^1(\mathbb{R})$. Neles voltamos a denotar a viscosidade por μ, pois, embora não apresentemos exatamente como eles estão em [9], eles valem para uma viscosidade $\mu = \mu(\rho)$(não constante, dependente da densidade) satisfazendo certas propriedades (ver [9].)

Lema 2.6 *Suponhamos que* $\rho_0 - \bar{\rho}, u_0 - \bar{u} \in H^1(\mathbb{R})$ *e que* $\inf\ \rho_0 > 0$. *Sejam* (ρ, u) *a solução do* $(PVI)_\delta$ *e* φ *uma função tal que* $\varphi'(\rho) = \frac{\mu}{\rho^2}$. *Então existe uma constante* $C(T) > 0$ *(independente de* δ*)tal que*

$$\sup_{t \in [0,T]} \int [\frac{1}{2}\rho|\Delta u + \partial_x(\varphi(\rho))|^2] dx + \int_0^T \int \partial_x(\varphi(\rho)) P(\rho)_x \ dx \ dt \leq C(T). \tag{2.27}$$

Dem.

Da equação $\rho_t + (\rho u)_x = 0$, temos que

$$\varphi'(\rho)\rho_t + \varphi'(\rho)(\rho u)_x = 0,$$

donde segue que

$$\varphi(\rho)_{tx} + (\varphi'(\rho)(\rho u)_x)_x = 0. \tag{2.28}$$

Multiplicando a equação (2.28) por $\rho\varphi(\rho)_x$ obtemos

$$\rho\frac{1}{2}\partial_t(\varphi(\rho)_x)^2 + (\varphi'(\rho)(\rho u)_x)_x\rho\varphi(\rho)_x = 0,$$

e daí,

$$\frac{1}{2}\partial_t(\rho(\varphi(\rho)_x)^2) - \frac{1}{2}\rho_t(\varphi(\rho)_x)^2 + (\varphi'(\rho)(\rho u)_x)_x\rho\varphi(\rho)_x = 0.$$

Denotando $(\varphi'(\rho)(\rho u)_x)_x\rho\varphi(\rho)_x$ por I, temos que

$$\begin{aligned}
I &= (\varphi'(\rho)\rho_x u)_x\rho\varphi(\rho)_x + (\varphi'(\rho)\ \rho\ u_x)_x\rho\varphi(\rho)_x \\
&= (\varphi(\rho)_x u)_x\rho\varphi(\rho)_x + (\varphi'(\rho)_x\ \rho\ u_x)\rho(\varphi(\rho)_x) + u_x\rho(\varphi(\rho)_x)^2 + (\varphi'(\rho)\ \rho\ u_{xx})\rho\varphi(\rho)_x \\
&= \varphi(\rho)_{xx}\varphi(\rho)_x u\rho + (\varphi(\rho)_x)^2\rho u_x + \varphi''(\rho)\rho_x\rho^2 u_x\varphi(\rho)_x + (\varphi(\rho)_x)^2\rho u_x + \varphi'(\rho)\rho^2 u_{xx}\varphi(\rho)_x \\
&= \frac{((\varphi(\rho)_x)^2\rho u)_x}{2} + \frac{(\varphi(\rho)_x)^2\rho_t}{2} + \varphi''(\rho)\rho_x\rho^2 u_x\varphi(\rho)_x + 2(\varphi(\rho)_x)^2\rho u_x + \varphi'(\rho)\rho^2 u_{xx}\varphi(\rho)_x.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t(\rho(\varphi(\rho)_x)^2) + \varphi'(\rho)\rho^2 u_{xx}\varphi(\rho)_x + \varphi''(\rho)\rho_x\rho^2 u_x\varphi(\rho)_x \\
+ (\varphi(\rho)_x)^2\rho u_x + \frac{((\varphi(\rho)_x)^2 u\rho)_x}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Assumindo que $\rho - \bar{\rho} \equiv \rho_\delta - \bar{\rho}_\delta \in H^2(\mathbb{R})$ e notando que $\varphi(\rho)_x = \varphi'(\rho)\rho_x = \mu\frac{\rho_x}{\rho^2}$, temos que

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\varphi(\rho)_x)^2 u\rho = \mu^2\frac{(u_\pm)^2}{(\rho_\pm)^3}\lim_{x\to\pm\infty}\rho_x^2 = 0,$$

logo,

$$\int((\varphi(\rho)_x)^2 u\rho)_x dx = 0.$$

Portanto, integrando a equação (2.29), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int\frac{1}{2}\rho(\varphi(\rho)_x)^2 dx = -\int\rho^2\varphi'(\rho)u_{xx}\varphi(\rho)_x dx - \int(2\varphi'(\rho)\rho + \varphi''(\rho)\rho^2)\varphi(\rho)_x\rho_x u_x dx. \tag{2.30}$$

Agora calculamos

$$I = \frac{d}{dt}\int\rho\Delta u\partial_x(\varphi(\rho))dx = \int\partial_x(\varphi(\rho))\partial_t(\rho\Delta u)dx + \int\rho(\Delta u)\partial_t\partial_x(\varphi(\rho))dx.$$

Usando integração por partes, obtemos que

$$I = \int\partial_x(\varphi(\rho))\partial_t(\rho(u-\bar{u}))dx - \int(\rho\Delta u)_x\varphi'(\rho)\partial_t\rho dx.$$

Das equações do momento e da continuidade, segue que

$$\begin{aligned}\int \partial_x\varphi(\rho)\partial_t(\rho\Delta u)dx &= \int \partial_x\varphi(\rho)\partial_t(\rho u)dx - \int \partial_x\varphi(\rho)\partial_t(\rho)\bar{u}dx \\ &= -\int \partial_x\varphi(\rho)(\rho u^2)_x dx - \int \partial_x\varphi(\rho)P(\rho)_x dx \\ &+ \int \partial_x\varphi(\rho)(\mu u_{xx})dx + \int \partial_x\varphi(\rho)(\rho u)_x\bar{u}dx - \int \partial_x\varphi(\rho)\varphi_x P(\rho)dx,\end{aligned} \tag{2.31}$$

e que

$$-\int(\rho\Delta u)_x\varphi'(\rho)\partial_t\rho dx = \int((\rho u)_x)^2\varphi'(\rho)dx - \int(\rho\bar{u})_x(\rho u)_x\varphi'(\rho)dx.$$

Da definição de φ, temos que

$$\begin{aligned}\int(\varphi(\rho))_x(\mu_x)_x dx &= \int \rho^2\varphi'(\rho)(\varphi(\rho))_x u_{xx}dx \\ &+ \int(2\rho\varphi'(\rho) + \rho^2\varphi''(\rho))\rho_x(\varphi(\rho))_x u_x dx.\end{aligned}$$

Portanto, de (2.30) e (2.31) obtemos que

$$\begin{aligned}A(t) &:= \frac{d}{dt}\Big\{\int \rho\Delta u\partial_x\varphi(\rho) + \rho\frac{(\partial_x\varphi(\rho))^2}{2}dx\Big\} + \int \partial_x\varphi(\rho)\partial_x P(\rho)dx \\ &= -\int \partial_x\varphi(\rho)(\rho u^2)_x dx + \int \partial_x\varphi(\rho)(\mu u_{xx})dx + \int \partial_x\varphi(\rho)(\rho u)_x\bar{u}dx \\ &+ \int((\rho u)_x)^2\varphi'(\rho)dx - \int(\rho\bar{u})_x(\rho u)_x\varphi'(\rho)dx - \int \rho^2\varphi'(\rho)u_{xx}\varphi(\rho)_x dx \\ &- \int(2\varphi'(\rho)\rho + \varphi''(\rho)\rho^2)\varphi(\rho)_x\rho_x u_x dx.\end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}A(t) &= -\int \partial_x\varphi(\rho)(\rho u^2)_x dx + \int \partial_x\varphi(\rho)(\rho u)_x\bar{u}dx \\ &+ \int((\rho u)_x)^2\varphi'(\rho)dx - \int(\rho\bar{u})_x(\rho u)_x\varphi'(\rho)dx.\end{aligned}$$

Calculando as derivadas e usando a definição de φ mais uma vez, obtemos que

$$\begin{aligned}A(t) &= -\int \rho_x\varphi'(\rho)\rho\bar{u}_x u dx + \int \varphi'(\rho)\rho^2(u_x)^2dx - \int \rho^2\varphi'(\rho)u_x\bar{u}_x dx \\ &= \int \mu(u_x)^2dx - \int \mu u_x\bar{u}_x dx - \int \rho\varphi(\rho)_x u\bar{u}_x.\end{aligned}$$

Assim,

$$|A| \leq \int \mu|u_x|^2dx + \|\bar{u}_x\|_{L^\infty}\int_{-1}^{1}\mu u_x dx + \int \rho|\partial_x\varphi(\rho)|^2dx + \|\bar{u}_x\|_{L^\infty}\int_{-1}^{1}\rho u^2dx.$$

Pela desigualdade de Hölder, segue que

$$
\begin{aligned}
|A|(t) &\leq C(T)\int |u_x|^2dx + C(T)\int_{-1}^{1}(u_x)^2dx + C(T)\int \rho(\Delta u+\bar{u})^2+\rho|\partial_x\varphi(\rho)|^2dx\\
&\leq C(T)\int |u_x|^2dx + C(T)\int \rho((\Delta u)^2+|\partial_x\varphi(\rho)|^2)+\rho\bar{u}^2dx,
\end{aligned}
$$

e daí,

$$
|A|(t) \leq C(T)\int |u_x|^2dx + C(T)\int \rho(\Delta u+\partial_x\varphi(\rho))^2dx. \tag{2.32}
$$

Como $P'>0$ e $\varphi'>0$, temos que $\partial_x\varphi(\rho)\varphi_xP(\rho)=\rho_x^2\varphi'(\rho)P'(\rho)\geq 0$, logo, desprezando o termo $\partial_x\varphi(\rho)\varphi_xP(\rho)$ em (2.32), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big\{\int[|\rho\Delta u\partial_x\varphi(\rho)|+\rho\frac{|\partial_x\varphi(\rho)|^2}{2}]dx\Big\} &\leq C(T)\int |u_x|^2dx + C(T)\int \rho(\Delta u+\partial_x\varphi(\rho))^2dx\\
&\leq C(T)\int |u_x|^2dx + C(T)\int \rho(\Delta u)^2dx\\
&+C(T)\int |\rho\Delta u\partial_x\varphi(\rho)|+\rho\frac{|\partial_x\varphi(\rho)|^2}{2}dx.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema de Gronwall, segue que

$$
\begin{aligned}
\int[|\rho\Delta u\partial_x\varphi(\rho)|+\rho\frac{|\partial_x\varphi(\rho)|^2}{2}]dx &\leq C(T)\int_0^T\int[|u_x|^2+\rho(\Delta u)^2]dxe^{\int_s^T C(T)d\tau}ds\\
&+e^{C(T)}\int[|\rho_0\Delta u_0\partial_x\varphi(\rho_0)|+\rho_0\frac{|\partial_x\varphi(\rho_0)|^2}{2}dx].
\end{aligned}
$$

A primeira integral do lado direito acima é limitada pelas constantes da Proposição 2.2. A segunda integral é limitada graças a hipótese (1.18) e que $C(T)>0$ não depende de δ. Logo,

$$
\int[|\rho\Delta u\partial_x\varphi(\rho)|+\rho\frac{|\partial_x\varphi(\rho)|^2}{2}]dx \leq C(T).
$$

Consequentemente, a desigualdade acima e a Proposição 2.2 garantem que

$$
\begin{aligned}
\int \rho(\Delta u+\partial_x\varphi(\rho))^2dx &= \int \rho|\Delta u+\partial_x\varphi(\rho)|^2dx\\
&\leq \int \rho|\Delta u|^2|\rho\Delta u\partial_x\varphi(\rho)|+\rho\frac{|\partial_x\varphi(\rho)|^2}{2}dx\} \leq C(T).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\sup_{t\in[0,T]}\int \rho(\Delta u+\partial_x\varphi(\rho))^2dx \leq C(T).
$$

Finalmente usando (2.32), obtemos que $\int_0^T A(t)dt$ é limitada por $C(T) > 0$ e portanto

$$\int_0^T \int \partial_x \varphi(\rho)\partial_x P(\rho)dx \leq C(T),$$

o que conclui a demonstração do Lema 2.6.

□

Lema 2.7 *Nas condições do Lema 2.6, existe uma constante $C(T) > 0$ tal que*

$$\|\rho(x,t) - \bar{\rho}\|_{H^1} \leq C(T)$$

para todo $t \in [0,T]$.

Dem.

De (2.26) com $C(T) = C_3(T)$ temos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int (\rho - \bar{\rho})^2 dx \leq C(T).$$

Usando integração por partes, temos a seguinte relação auxiliar

$$|\int \rho_x \bar{\rho}_x dx| = |\int_{-1}^1 \rho \bar{\rho}_{xx} dx| \leq \sup|\bar{\rho}_{xx}| \int_{-1}^1 \rho dx \leq C(T),$$

já que $\|\bar{\rho}_{xx}\|_{L^\infty} \equiv \|(\bar{\rho}_\delta)_{xx}\|_{L^\infty} \leq C(T)\|J_\delta\|_{L^1} = C(T)$. Desta relação temos que,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \int (\rho_x - \bar{\rho}_x)^2 dx &\leq \sup_{t\in[0,T]} \int (\rho_x)^2 dx + 2\int |\rho_x \bar{\rho}_x| dx + \sup_{x\in[-1,1]} (\bar{\rho}_x)^2 \int_{-1}^1 dx \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} \int (\rho_x)^2 dx + C(T).\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\int (\rho_x)^2 dx \leq C(T)$. Da definição de φ e da Proposição 2.5 segue-se que

$$\int (\rho_x)^2 dx \leq \frac{C(T)^4}{\mu^2} \int \frac{\mu^2}{\rho^4} (\rho_x)^2 dx = \frac{C(T)^4}{\mu^2} \int (\varphi'(\rho))^2 (\rho_x)^2 dx,$$

ou seja,

$$\int (\rho_x)^2 dx \leq C(T) \int (\partial_x \varphi)^2 \rho dx.$$

Pelo Lema 2.6, obtemos que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \int (\partial_x \varphi)^2 \rho dx &\leq C \sup_{t\in[0,T]} \int \rho(\partial_x \varphi)^2 + (\Delta u)^2 \rho dx \\ &\leq C \sup_{t\in[0,T]} \int \rho |\Delta u + \partial_x \varphi|^2 dx \leq C(T).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \rho_x^2 dx \leq C(T).$$

Assim temos que $\|\Delta \rho\|_{H^1} = \|\Delta \rho\|_{L^2} + \|\Delta \rho_x\|_{L^2} \leq C(T)$.

$\square$

Proposição 2.8 *Sejam u e $\bar{u}$ como definidas anteriormente. Nas condições do Lema 2.6 existe uma constante $C(T)$ tal que*

$$\|u-\bar{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}))} \leq C(T)$$

e

$$\|\partial_t u\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))} \leq C(T).$$

Dem.

Vamos demonstrar esta Proposição somente no caso μ constante (Para o caso μ dependente da densidade, veja a Proposição 4.7 de [9]) A mesma pode ser vista como um resultado de regularidade para equações parabólicas, o que pode ser constatado na demonstração a seguir (ou em [9]):

Notemos que, usando a equação da conservação de massa, a equação do momento (com $\mu = 1$) pode ser escrita como

$$\rho u_t - u_{xx} = -\rho u u_x - P(\rho)_x. \tag{2.33}$$

Para simplificar o argumento, vamos supor que $\bar{\rho} = \bar{u} = 0$. (Quanto a isto, veja as demonstrações dos resultados que se seguem, onde damos mais detalhes dos cálculos). Multiplicando a equação acima por u_t e notando que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int u_{xx} u_t dx ds &= -\int_0^t \int u_x u_{xt} dx ds \\
&= \frac{-1}{2} \int_0^t \partial_t \int u_x^2 dx ds \\
&= \frac{1}{2} \int (u_0)_x^2 dx - \frac{1}{2} \int u_x^2 dx,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
C^{-1} \int_0^t \int u_t^2 dx\ ds + \frac{1}{2} \int u_x^2 dx \leq \frac{1}{2} \int (u_0)_x^2 dx + C \int_0^t \int (u u_x)^2 dx ds \\
+ C \int_0^t \int P(\rho)_x^2 dx\ ds + \frac{C^{-1}}{2} \int_0^t \int u_t^2 dx\ ds.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{C^{-1}}{2} \int_0^t \int u_t^2 dx\ ds + \frac{1}{2} \int u_x^2 dx \leq&\ C + C \int_0^t \int (u u_x)^2 dx\ ds \\
\leq&\ C + C \int_0^t \|u(\cdot,s)\|_{H^1}^2 \int u_x^2 dx\ ds.
\end{aligned}$$

Daí, em particular, temos que

$$\int u_x^2 dx \leq C + C\int_0^t \|u(\cdot,s)\|_{H^1}^2 \int u_x^2 dx\ ds,$$

e portanto, pelo Lema de Gronwall, segue-se que

$$\int u_x^2 dx \leq C e^{\int_0^t \|u(\cdot,s)\|_{H^1} ds}.$$

O lado direito desta desigualdade é limitado, em virtude da Proposição 2.2. Então, voltando à desigualdade acima, obtemos a limitação de u_t em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$. Usando esta limitação e a limitação de u_x em $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}))$ (acima), a equação (2.33) e estimativas anteriores nos dão a limitação de u em $L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}))$.

□

Os Lemas seguintes são dados no artigo [8] como um único lema, mas optamos por dividi-lo para facilitar a exposição e a leitura.

Lema 2.9 *Sejam (ρ,u) e T como nas Proposições 2.2 e 1.4, e seja $\sigma(t)=\min\{1,t\}$. Então existe uma constante $C(T)>0$ tal que vale a seguinte estimativa*

$$\sup_{0<t\leq T}\int \sigma(t)(u_x)^2 + \sigma(t)^2\dot{u}^2 dx + \int_0^T\int \sigma\dot{u}^2\ dx\ dt + \int_0^T\int \sigma^2\dot{u}_x^2\ dx\ dt \leq C(T). \tag{2.34}$$

Dem.

Denotaremos a quantidade que será estimada por $A(T)$, isto é,

$$A(T)=\sup_{0<t\leq T}\{\sigma(t)\int[(u_x)^2+\sigma(t)\dot{u}^2]dx\}+\int_0^T\int\sigma\dot{u}^2\ dx\ dt+\int_0^T\int\sigma^2\dot{u}_x^2\ dx\ dt. \tag{2.35}$$

Queremos limitar $A(T)$ por uma constante independente de δ (implícito em u, $u\equiv u_\delta$). Vamos estimar cada parcela em $A(T)$, chegando a uma desigualdade do tipo $A(T)\leq C+CA(T)^{1/2}$, com C independente de δ, donde segue-se o resultado desejado. Para isto, uma quantidade muito útil, introduzida por D. Hoff numa série de seus artigos(denominada em alguns deles de "effective viscous flux") é a seguinte:

$$F := u_x - \Delta P,$$

onde $\Delta P = P(\rho)-P(\bar{\rho})$. Deste modo a equação do momento pode ser reescrita como

$$\rho\dot{u} = F_x - P(\bar{\rho})_x. \tag{2.36}$$

Multiplicando (2.36) por $\sigma\dot{u}$ e integrando em relação às duas variáveis, obtemos

$$\int_0^t\int\sigma\dot{u}\rho\dot{u}\ dxds = \int_0^t\int\sigma\dot{u}F_x dxds - \int_0^t\int\sigma\dot{u}P(\bar{\rho})_x\ dxds.$$

Reescrevendo a integral do lado esquerdo e usando a definição da derivada material na primeira integral do lado direito, obtemos

$$\int_0^t \int \sigma(\dot{u})^2 \rho dxds = \int_0^t \int \sigma u_t F_x dxds + \int_0^t \int \sigma u u_x F_x dxds - \int_0^t \int \sigma \dot{u} P(\bar{\rho})_x dxds. \tag{2.37}$$

Seja $I = \int_0^t \int \sigma u_t F_x dxds$. Desejamos encontrar uma estimativa para I e para isto começamos aplicando integração por partes na variável s para obter,

$$I = \int \sigma F_x u\ dx - \int_0^t \int (\sigma F_x)_t u\ dxds.$$

Integrando por partes também em relação a x obtemos

$$I = -\int \sigma u_x^2 dx + \int \sigma \Delta P u_x dx - \int_0^t \int (\sigma F_x)_t u\ dxds.$$

Usando a desigualdade (A.4), para um $\xi > 0$ que escolheremos posteriormente de forma conveniente, temos que

$$I \leq -\int \sigma u_x^2 dx + \sigma\xi \int \Delta P^2 dx + \frac{\sigma}{4\xi} \int u_x^2 dx - \int_0^t \int (\sigma F_x)_t u\ dxds.$$

Da continuidade de P e P', do Teorema do Valor Médio e da Proposição 2.5 segue-se que existe $C > 0$ tal que

$$I \leq -\sigma(1 - \frac{1}{4\xi}) \int u_x^2 dx + \sigma\xi C \int (\Delta\rho)^2 dx - \int_0^t \int (\sigma F_x)_t u dxds.$$

Daí e da Proposição 2.2 existe uma constante $C_1(T) > 0$ tal que

$$I \leq -\sigma(1 - \frac{1}{4\xi}) \int u_x^2 dx + \xi C C_1(T) - \int_0^t \int (\sigma F_x)_t u dxds.$$

A integral $\int_0^t \int (\sigma F_x)_t u\ dxds = \int_0^t \int \sigma F_{xt} u\ dxds + \int_0^t \int \sigma' F_x u\ dxds$ pode ter cada uma de suas parcelas estimadas como faremos a seguir.

Por integração por partes temos que

$$\begin{aligned} -\int_0^t \int \sigma F_{xt} u\ dxds &= -\int_0^t \int \sigma(u_{xxt} - \Delta P_{xt}) u\ dxds \\ &= \int_0^t \int \sigma u_x u_{xt}\ dxds - \int_0^t \int \sigma \Delta P_t u_x\ dxds \\ &= \int_0^t \int \frac{\sigma}{2} (u_x^2)_t dxds - \int_0^t \int \sigma \Delta P_t u_x dxds \\ &= \frac{\sigma}{2} \int u_x^2 dx - \int_0^t \int \sigma' u_x^2 dxds - \int_0^t \int \sigma \Delta P_t u_x dxds. \end{aligned}$$

Como $\int_0^t \int \sigma' u_x^2 dxds \geq 0$, segue-se que

$$-\int_0^t \int \sigma F_{xt} u \; dxds \leq \frac{\sigma}{2} \int u_x^2 dx - \int_0^t \int \sigma \Delta P_t u_x dxds.$$

Quanto ao termo $\int_0^t \int \sigma' F_x u dxds$, temos:

$$\begin{aligned}
-\int_0^t \int \sigma' F_x u dxds &= -\int_0^t \int \sigma'(u_{xx} - \Delta P_x) u dxds \\
&\leq |\int_0^t \int (u_{xx} - \Delta P_x) u dxds| \\
&\leq |\int_0^t \int u_{xx} u dxds| + |\int_0^t \int \Delta P_x u dxds| \\
&\leq |\int_0^t \int u_x^2 dxds| + |\int_0^t \int \Delta P u_x dxds| \\
&\leq C_1(T) + \int_0^t \int \Delta P^2 dxds + \int_0^t \int u_x^2 dxds \leq C_2(T),
\end{aligned}$$

onde, nas duas últimas estimativas, usamos a Proposição 2.2. Assim chegamos a seguinte estimativa:

$$I \leq -\sigma(1 - \frac{1}{4\xi}) \int u_x^2 dx + \xi C C_1(T) + \frac{\sigma}{2} \int u_x^2 dx - \int_0^t \int \sigma \Delta P_t u_x dxds + C_2(T).$$

Usando a desigualdade acima em (2.37), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int \sigma(\dot{u})^2 \rho dxds \leq &-\sigma(1 - \frac{1}{4\xi}) \int u_x^2 dx + \xi C C_1(T) + \frac{\sigma}{2} \int u_x^2 dx \\
&- \int_0^t \int \sigma \Delta P_t u_x dxds + C_2(T) \\
&+ \int_0^t \int \sigma u u_x F_x dxds - \int_0^t \int \sigma \dot{u} P(\bar{\rho})_x dxds.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Façamos agora na equação (2.38),

$$II = -\int_0^t \int \sigma \Delta P_t u_x dxds + \int_0^t \int \sigma u u_x F_x dxds.$$

Como $P(\bar{\rho})_t = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
II = &-\int_0^t \int \sigma P'(\rho) \rho_t u_x dxds + \int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds \\
&- \int_0^t \int \sigma u u_x P'(\rho) \rho_x - \sigma u u_x P(\bar{\rho})_x dxds.
\end{aligned}$$

Daí e da equação da continuidade, segue-se que

$$\begin{aligned}
II = &\int_0^t \int \sigma P'(\rho) \rho_x u u_x dxds + \int_0^t \int \sigma P'(\rho) \rho u_x u_x dxds + \int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds \\
&- \int_0^t \int \sigma u u_x P'(\rho) \rho_x - \sigma u u_x P(\bar{\rho})_x dxds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$II = \int_0^t \int \sigma P'(\rho)\rho(u_x)^2 dxds + \int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds + \int_0^t \int_{-1}^1 \sigma u u_x P(\bar{\rho})_x dxds.$$

Pela Proposição 2.5, por P' ser contínua e positiva e da definição da $\bar{\rho}$, segue-se que

$$\begin{aligned}
II &\leq \int_0^t \int \sigma C(T)(u_x)^2 dxds + \int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds + C(T)\int_0^t \int_{-1}^1 |u u_x| dxds \\
&\leq C(T) + C(T)\int_0^t \int_{-1}^1 ((\Delta u + \bar{u})^2 dxds + \int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds \\
&\leq C(T) + C(T)\int_0^t \int_{-1}^1 (\Delta u)^2 dxds + C(T)\int_0^t \int_{-1}^1 \bar{u}^2 dxds + \int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds \\
&\leq C(T) + C(T)\int_0^t \|\bar{u}\|_{L^\infty}^2 ds + \int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$II \leq C(T) + \int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds.$$

Sobre o termo $-\int_0^t \int \sigma \dot{u} P(\bar{\rho})_x dxds$ na equação (2.38) temos que

$$-\int_0^t \int \sigma \dot{u} P(\bar{\rho})_x dxds \leq |\int_0^t \int \sigma \dot{u} P(\bar{\rho})_x dxds| \leq \int_0^t \int |\sigma \dot{u} P(\bar{\rho})_x| dxds.$$

Usando a desigualdade (A.4) com $\xi > 0$ para $a = \sqrt{\sigma}\dot{u}$ e $b = \sqrt{\sigma}P(\bar{\rho})_x$, obtemos

$$-\int_0^t \int \sigma \dot{u} P(\bar{\rho})_x dxds \leq \int_0^t \int \sigma \frac{\dot{u}^2}{4\xi} dxds + \int_0^t \int_{-1}^1 \xi \sigma P(\bar{\rho})_x^2 dxds.$$

Usando que $\sigma < 1$ e que P é limitada, temos que

$$-\int_0^t \int \sigma \dot{u} P(\bar{\rho})_x dxds \leq \frac{1}{4\xi}\int_0^t \int \sigma \dot{u}^2 dxds + 2\xi C_3^2(T).$$

Portanto, voltando à (2.38) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int \sigma(\dot{u})^2 \rho dxds \leq -\sigma(1 - \frac{1}{4\xi})\int u_x^2 dx + \xi CMC_1(T) + \frac{\sigma}{2}\int u_x^2 dx \\
+ C_2(T) + C(T) + \int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds \\
+ \frac{1}{4\xi}\int_0^t \int \sigma \dot{u}^2 dxds + 2\xi C_3^2(T).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Escolhendo $\xi > \frac{1}{4}$, torna-se possível encontrar $C(T) > 0$ tal que

$$\int_0^t \int \sigma \dot{u}^2 dxds + \sigma \int u_x^2 dx \leq C(T) + C(T)\int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds. \tag{2.40}$$

Usando integração por partes no último termo da equação (2.40) obtemos que

$$|\int_0^t \int \sigma u u_x u_{xx} dxds| = |\frac{1}{2}\int_0^t \int \sigma u (u_x^2)_x dxds| = |\frac{1}{2}\int_0^t \int \sigma u_x^3 dxds|.$$

Escrevendo $\Delta P = \Delta\rho \frac{\Delta P}{\Delta \rho}$ e usando que ρ é limitado, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \int |\Delta P|^3 dxds &\leq \int_0^t \int C(T)|\Delta\rho|^2|\Delta P| dxds \\ &\leq \int_0^t C(T)\int |\Delta\rho|^2 dxds \leq C(T).\end{aligned}$$

Portanto, lembrando que $u_x = F + \Delta P$ e utilizando o Lema A.2 (p. 67) e a desigualdade acima teremos

$$\begin{aligned}|\int_0^t \int \sigma u_x^3 dxds| \leq \int_0^t \int \sigma(|F| + |\Delta P|)^3 dxds &\leq C\int_0^t \int \sigma|F|^3 + \sigma|\Delta P|^3 dxds \\ &\leq C\int_0^t \int \sigma|F|^3 dxds + C(T).\end{aligned}$$

Portanto, de (2.39) temos que

$$\int_0^t \int \sigma \dot{u}^2 dxds + \sigma \int u_x^2 dx \leq C(T) + C(T)\int_0^t \sigma \int |F|^3 dxds. \tag{2.41}$$

Notemos que

$$\int_0^t \int \sigma F^3 dxds = \int_0^t \int \sigma F \ F^2 dxds \leq \int_0^t \sigma \|F\|_\infty \int F^2 dxds.$$

Do Lema de Sobolev, Teorema A.21(p. 75), temos que

$$\|F\|_\infty \leq C\|F\|_{H^1} \leq C(\|F\|_{L^2} + \|F_x\|_{L^2}).$$

Portanto,

$$\int_0^t \int \sigma F^3 dxds \leq \int_0^t \sigma C(\|F\|_{L^2} + \|F_x\|_{L^2})\int F^2 dxds,$$

(ou seja, usamos a desigualdade de interpolação $\|\cdot\|_{L^3}^3 \leq C\|\cdot\|_{H^1}\|\cdot\|_{L^2}^2$.)

Consideremos agora as estimativas sobre o termo

$$III = \int_0^t \sigma C(\int F^2 dx)^{\frac{1}{2}} \int F^2 dxds:$$

Usando que $\sigma \leq 1$, temos que

$$III = \int_0^t \sigma^{\frac{1}{2}} C(\sigma \int F^2 dx)^{\frac{1}{2}} \int F^2 dxds \leq C(\sup_{t\in[0,T]} \sigma \int F^2 dx)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \int F^2 dxds.$$

Usando que

$$F^2 = (u_x - \Delta P)^2 \leq Cu_x^2 + C\Delta P^2$$

e que

$$\int \Delta P^2 dx \leq C \int (\Delta\rho)^2 dx \leq C_1(T),$$

da Proposição 2.2 (p.16), segue que

$$\int_0^T \int F^2 dxds \leq CTC_1(T) + C\int_0^T \int u_x^2 dxds \leq C_2(T).$$

Portanto, para uma constante $C(T) > 0$, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \int \sigma F^3 dxds &\leq C(T)(\sup_{t\in[0,T]} \sigma \int F^2 dx)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t C\sigma(\int F_x^2 dx)^{\frac{1}{2}} \int F^2 dxds \\ &\leq C(T)(\sup_{t\in[0,T]} \sigma \int 2u_x^2 dx + 2C_1(T))^{\frac{1}{2}} + \int_0^t C\sigma(\int F_x^2 dx)^{\frac{1}{2}} \int F^2 dxds.\end{aligned}$$

Como todas as parcelas de $A(T)$ são não-negativas, qualquer parcela é menor ou igual do que $A(T)$. Assim,

$$\int_0^t \int \sigma F^3 dxds \leq CC(T)(A(T) + 2C_1(T))^{\frac{1}{2}} + \int_0^t C\sigma(\int F_x^2 dx)^{\frac{1}{2}} \int F^2 dxds. \quad (2.42)$$

Aplicando a desiguadade (A.3)(p. 67) em (2.42) com $a = A(T)$ e $b = 2C_1(T)$, temos, para alguma constante $C(T) > 0$, que

$$\int_0^t \int \sigma F^3 dxds \leq C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + C(T)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t C\sigma(\int F_x^2 dx)^{\frac{1}{2}} \int F^2 dxds.$$

Como $F_x = \rho\dot{u} + P(\bar{\rho})_x \leq |\rho\dot{u}| + |P(\bar{\rho})_x|$, segue-se que

$$\int_0^t \int \sigma F^3 dxds \leq C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t C\sigma(\int (|\rho\dot{u}| + |P(\bar{\rho})_x|)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \int F^2 dxds.$$

Novamente pela desigualdade (A.3), com a e b convenientes, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \int \sigma F^3 dxds \leq C(T)\int_0^t C\sigma[(\int |\rho\dot{u}|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int |P(\bar{\rho})_x|^2 dx)^{\frac{1}{2}}](\int F^2 dx)ds \\ +C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + C(T)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Usando que $\sigma(t) \leq 1$ e $\bar{\rho} = 0$ para $-1 \leq x \leq 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^t \int \sigma F^3 dxds \leq C(T)\int_0^t C[C(T)(\int |\sigma\dot{u}|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_{-1}^1 |P(\bar{\rho})_x|^2 dx)^{\frac{1}{2}}](\int F^2 dx)ds \\ +C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + C(T)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Tomando o supremo em t da quantidade $[\int |\sigma\dot{u}|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_{-1}^{1} |P(\bar{\rho})_x|^2 dx)^{\frac{1}{2}}]$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \int \sigma F^3 dx ds \le C(T)C[C(T)(\sup_{t\in[0,T]} \int |\sigma\dot{u}|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + C(T)](\int_0^t \int F^2 dx)ds \\ + C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + C(T)^{\frac{1}{2}} \\ \le [C(T)(A(T)^{1/2} + C(T)](\int_0^t \int F^2 dx)ds + C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + C(T)^{\frac{1}{2}} \\ \le [C(T)(A(T)^{1/2} + C(T)](\int_0^T \int F^2 dx)ds + C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + C(T)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Portanto, para alguma constante $C(T) > 0$, temos que

$$\int_0^t \int \sigma F^3 dx ds \le C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + C(T).$$

Por fim, aplicando a desigualdade acima em (2.9), chegamos a estimativa

$$\int_0^T \int \sigma \dot{u}^2 dx ds + \sigma \int u_x^2 dx \le C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + C(T). \tag{2.43}$$

Assim, estimamos duas das quatro parcelas em $A(T)$ definida na página 36. Para estimar as duas parcelas restantes, começamos aplicando o operador $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u) \equiv \partial_t + u\partial_x + (\partial_x u)$ na equação $\rho\dot{u} + P_x = u_{xx}$ obtendo

$$(\rho\dot{u})_t + (u\rho\dot{u})_x + (P_x)_t + (uP_x)_x = (u_{xx})_t + (uu_{xx})_x.$$

Daí, obtemos

$$\rho\ddot{u} = u_{xxt} + (uu_{xx})_x - P_{xt} - (uP_x)_x.$$

Fazendo $w = \dot{u}$, $h = \rho\dot{w} = u_{xxt} + (uu_{xx})_x - P_{xt} - (uP_x)_x$ e $g = \sigma^2$ temos, pelo Teorema do Transporte, Corolário 1.2 (p. 7), que

$$\int \frac{1}{2} g(t)\rho(x,t)w^2(x,t) - g(0)\rho(x,0)w^2(x,0)dx = \int_0^t \int (\frac{1}{2} g'\rho w^2 + gwh)\; dx ds,$$

ou seja,

$$\frac{\sigma^2}{2} \int \rho\dot{u}^2 dx = \int_0^t \int \sigma\sigma'\rho\dot{u}^2 + \sigma^2\dot{u}(u_{xxt} + (uu_{xx})_x - P_{xt} - (uP_x)_x)\; dx ds.$$

Usando que $\sigma'(t) \le 1$ e (2.43), segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{2} \int \rho\dot{u}^2 dx \le C(T)A(T)^{\frac{1}{2}} + C(T) \\ + \int_0^t \int \sigma^2\dot{u}(u_{xxt} + (uu_{xx})_x - P_{xt} - (uP_x)_x) dx ds.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Para estimar (2.44), fazemos

$$IV = \int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}(u_{xxt} + (uu_{xx})_x) dxds$$

e

$$V = \int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}(-P_{xt} - (uP_x)_x) dxds.$$

Para estimar IV, fazemos integração por partes, obtendo

$$IV = -\int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x(u_{xt} + uu_{xx}) dxds = -\int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x(u_{xt} + uu_{xx} + u_x^2 - u_x^2)\ dx\ dt.$$

Como $\dot{u}_x = u_{xt} + uu_{xx} + u_x^2$, chegamos em

$$IV = -\int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x(\dot{u}_x - u_x^2) dxds = -\int_0^t \int \sigma^2 (\dot{u}_x)^2 dxds + \int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x u_x^2 dxds.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos que

$$IV \leq -\int_0^t \int \sigma^2 (\dot{u}_x)^2 dxds + \int_0^t (\int \sigma^2 (\dot{u}_x)^2 dx)^{1/2} ds \int_0^t (\int \sigma^2 u_x^4 dx)^{1/2} ds.$$

Por (2.1) e pelo fato que todos os termos de $A(T)$ são não-negativos, temos que

$$IV \leq -\int_0^t \int \sigma^2 (\dot{u}_x)^2 dxds + C(T)A(T)^{\frac{1}{2}}.$$

Passaremos agora à estimar o termo V de (2.44). Começando da mesma maneira que fizemos para estimar IV e lembrando que $P = P(\rho)$ temos que

$$V = -\int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x(-P_t - (uP_x)) dxds = -\int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x P'(-\rho_t - u\rho_x) dxds.$$

Pela equação da continuidade, segue-se que

$$V = -\int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x P' u_x \rho\ dxds \leq \int_0^t \int |\sigma^2 \dot{u}_x P' u_x \rho| dxds.$$

Pela Proposição 2.5 e por P' ser contínua, temos que

$$\begin{aligned} V &\leq C(T) \int_0^t \int |\sigma^2 \dot{u}_x u_x| dxds \\ &\leq C(T) (\int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x^2 dxds)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T \int u_x^2 dxds)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da Proposição 2.2 e da definição de $A(T)$ temos que

$$V \leq C(T) (\int_0^t \int \sigma^2 \dot{u}_x^2)^{\frac{1}{2}} \leq C(T)A(T)^{1/2}.$$

Portanto, por (2.44), existe uma constante $C_1(T) > 0$ tal que

$$\sigma^2 \int \rho \dot{u}^2 dx \leq C_1(T)A^{1/2} + C_1(T) - \int_0^t \int \sigma^2 (\dot{u}_x)^2 \; dx \; dt.$$

Pela Proposição 2.5 e reorganizando os termos, obtemos

$$C(T)\sigma^2 \int \dot{u}^2 dx + \int_0^t \int \sigma^2 (\dot{u}_x)^2 \; dx \; dt \leq C_1(T)A^{1/2} + C_1(T).$$

Logo, para alguma constante $C(T) > 0$, temos

$$\sigma^2 \int \dot{u}^2 dx + \int_0^t \int \sigma^2 (\dot{u}_x)^2 \; dx \; dt \leq C(T)A^{1/2} + C(T).$$

Combinando (2.43) e a desigualdade acima podemos garantir que existe $C(T) > 0$ tal que para todo $t \in [0, T]$ vale

$$\begin{aligned} \int \sigma^2 \dot{u}^2 + \sigma u_x^2 dx + \int_0^t \int \sigma^2 (\dot{u}_x)^2 + \sigma \dot{u}^2 \; dx \; dt &\leq C(T)A^{1/2} + C(T) \\ &\leq \frac{C(T)^2 + A(T)}{2} + C(T) \leq \frac{A(T)}{2} + \frac{2C(T) + C(T)^2}{2}. \end{aligned}$$

Como $A(T)$ é o supremo do lado esquerdo da primeira desigualdade acima, podemos concluir que

$$A(T) \leq \frac{A(T)}{2} + C(T),$$

ou seja,

$$A(T) \leq C(T).$$

e portanto o Lema 2.9 está demonstrado.

□

Lema 2.10 *Sob as mesmas hipóteses do Lema 2.9, existe $C(T) > 0$ tal que*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C(T)\sigma(t)^{-1/2}, \tag{2.45}$$

para todo $t > 0$.

Dem.

Sabemos de propriedades de espaços de Sobolev (ver (A.12), p.75) que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\Delta u(\cdot,t)\|_{H^1} \leq C(\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2} + \|\Delta u(\cdot,t)_x\|_{L^2}).$$

Da Proposição2.2 sabemos que existe uma constante $C(T) > 0$ tal que

$$\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq C(T).$$

Por (2.34),

$$\|\Delta u(\cdot,t)_x\|_{L^2} \leq \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2} + \|\bar{u}_x\|_{L^2} \leq C(T)\sigma(t)^{-1/2} + C(T).$$

Daí usando a imersão de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ obtemos

$$\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C\|\Delta u(\cdot,t)\|_{H^1} \leq C(C(T) + \sigma(t)^{-1/2}).$$

Logo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(T)\sigma(t)^{-1/2} + C(T).$$

Como, pela definição, temos que $\sigma(t) \leq 1$, segue-se que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(T)\sigma(t)^{-1/2} + C(T)\sigma(t)^{-1/2} \leq C(T)\sigma(t)^{-1/2}.$$

$\square$

Lema 2.11 *Sob as mesmas hipóteses do Lema 2.9, existe uma constante $C(T)$ tal que*

$$\langle u\rangle^{1/2,1/4}_{\mathbb{R}\times[\tau,T]} \leq C(T)\sigma(\tau)^{-1/4}, \tag{2.46}$$

para todo $\tau \in (0,T]$ onde $\langle u\rangle^{1/2,1/4}_{\mathbb{R}\times[\tau,T]}$ está definida na página 71.

Dem.

Por definição temos que

$$\langle u\rangle^{1/2,1/4}_{\mathbb{R}\times[\tau,T]} = \sup\{\frac{|u(x_1,t_1) - u(x_2,t_2)|}{|x_1 - x_2|^{1/2} + |t_1 - t_2|^{1/4}}; (x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \mathbb{R}\times[\tau,T] \text{ e } (x_1,t_1) \neq (x_2,t_2)\}$$

Da desigualdade triangular temos que

$$\frac{|u(x_1,t_1) - u(x_2,t_2)|}{|x_1 - x_2|^{1/2} + |t_1 - t_2|^{1/4}} \leq \frac{|u(x_1,t_2) - u(x_2,t_2)|}{|x_1 - x_2|^{1/2}} + \frac{|u(x_1,t_1) - u(x_1,t_2)|}{|t_1 - t_2|^{1/4}}. \tag{2.47}$$

Vamos encontrar majorações para

$$I = \frac{|u(x_1,t_1) - u(x_1,t_2)|}{|t_1 - t_2|^{1/4}}, \text{ com } t_1 \neq t_2$$

e

$$II = \frac{|u(x_1,t_2) - u(x_2,t_2)|}{|x_1 - x_2|^{1/2}} \text{ com } x_1 \neq x_2.$$

Para majorar II, observamos inicialmente que

$$|u(x_1,t_2) - u(x_2,t_2)| = |\int_{x_2}^{x_1} u_x(y,t_2)dy|.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_2 < x_1$. Aplicando a Desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\begin{aligned}|u(x_1,t_2) - u(x_2,t_2)| &\leq \|u_x(\cdot,t_2)\|^{1/2}_{L^2([x_2,x_1])}(\int_{x_2}^{x_1} dy)^{1/2} \leq \|u_x(\cdot,t_2)\|^{1/2}_{L^2([x_2,x_1])}(x_1 - x_2)^{1/2}\\ &\leq \|u_x(\cdot,t_2)\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}(x_1 - x_2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade (2.34), e para qualquer $\tau > 0$, temos que

$$\begin{aligned}|u(x_1,t_2) - u(x_2,t_2)| &\leq \sup_{t\in[\tau,T]} \{\sigma^{1/4}(t)\sigma^{-1/4}(t)\|u_x(\cdot,t_2)\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}\}(x_1 - x_2)^{1/2}\\ &\leq \sigma^{-1/4}(\tau)(x_1 - x_2)^{1/2}C(T).\end{aligned}$$

Portanto, dividindo por $(x_1 - x_2)^{1/2}$, obtemos que

$$I \leq \sigma^{-1/4}(\tau)C(T).$$

Usando a majoração acima, para $t \in [\tau, T]$ e $r > 0$, que será escolhido convenientemente, temos que

$$\begin{aligned}|u(x_1,t) - \frac{1}{2r}\int_{x_1-r}^{x_1+r} u(y,t)dy| &\leq \int_{x_1-r}^{x_1+r} \frac{|u(x_1,t) - u(y,t)|}{2r}dy\\ &\leq C(T)\sigma^{-1/4}(\tau)\int_{x_1-r}^{x_1+r} \frac{1}{2r^{1/2}}dy.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|u(x_1,t) - \frac{1}{2r}\int_{x_1-r}^{x_1+r} u(y,t)|dy \leq C(T)\sigma^{-1/4}(\tau)r^{1/2}.$$

Usando este fato, supondo sem perda de generalidade que $t_2 < t_1$,usando a desigualdade triangular e somando e subtraindo termos convenientes, obtemos

$$\begin{aligned}|u(x_1,t_1) - u(x_1,t_2)| \leq |u(x_1,t_1) - \frac{1}{2r}\int_{x_1-r}^{x_1+r} u(y,t_1)dy| + |\frac{1}{2r}\int_{x_1-r}^{x_1+r}\int_{t_2}^{t_1} u_t(y,s)dsdy|\\ + |u(x_1,t_2) - \frac{1}{2r}\int_{x_1-r}^{x_1+r} u(y,t_2)dy|,\end{aligned}$$

donde segue-se que

$$|u(x_1,t_1)-u(x_1,t_2)| \leq C(T)\sigma^{-1/4}(\tau)r^{1/2} + |\frac{1}{2r}\int_{x_1-r}^{x_1+r}\int_{t_2}^{t_1} u_t(y,s)dsdy|. \qquad (2.48)$$

Usando no último termo do lado direito da desigualdade acima a desigualdade de Hölder, temos que

$$|\int_{x_1-r}^{x_1+r}\int_{t_2}^{t_1} u_t(y,s)dsdy| \leq (t_1-t_2)^{1/2}(2r)^{1/2}(\int_{x_1-r}^{x_1+r}\int_{t_2}^{t_1} |u_t^2(y,s)|dsdy)^{1/2}.$$

Usando a definição de derivada material $\dot{u} = u_t + u_x u$, a desigualdade triangular e as desigualdades (A.2) e (A.3)(nesta ordem) na página 67, obtemos que

$$\begin{aligned}|\int_{x_1-r}^{x_1+r}\int_{t_2}^{t_1} u_t(y,s)dsdy| \leq{}& (t_1-t_2)^{1/2}(2r)^{1/2}[(\int_{x_1-r}^{x_1+r}\int_{t_2}^{t_1} |\dot{u}^2(y,s)|dsdy)^{1/2} \\ &+ (\int_{t_2}^{t_1} \|u(\cdot,s)\|_{L^\infty}^2 \int_{x_1-r}^{x_1+r} |u_x^2(y,s)|dyds)^{1/2}].\end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 2.10 vem que

$$\begin{aligned}|\int_{x_1-r}^{x_1+r}\int_{t_2}^{t_1} u_t(y,s)dsdy| \leq{}& (t_1-t_2)^{1/2}(2r)^{1/2}[\sigma^{-1/2}(\tau)(\int_{t_2}^{t_1}\int_{x_1-r}^{x_1+r} \sigma|\dot{u}^2(y,s)|dyds)^{1/2} \\ &+ \sigma^{-1/2}(\int_{t_2}^{t_1} C(T)\int_{x_1-r}^{x_1+r} |u_x^2(y,s)|dyds)^{1/2}],\end{aligned}$$

e, de (2.34) e de (2.26), que

$$|\int_{x_1-r}^{x_1+r}\int_{t_2}^{t_1} u_t(y,s)dsdy| \leq (t_1-t_2)^{1/2}r^{1/2}\sigma^{-1}(\tau)C(T).$$

Aplicando este resultado em (2.48), temos que

$$|u(x_1,t_1)-u(x_1,t_2)| \leq C(T)\sigma^{-1/2}(\tau)(r^{1/2} + r^{1/2}(t_1-t_2)^{1/2}).$$

Escolhendo $r = (t_1-t_2)^{1/2}$ (o ponto de mínimo da função $r \in (0,\infty) \mapsto r^{1/2} + (t_1-t_2)^{1/2}r^{-1/2}$) obtemos

$$|u(x_1,t_1)-u(x_1,t_2)| \leq C(T)\sigma^{-1/2}|t_1-t_2|^{1/4}.$$

Portanto, voltando a desigualdade (2.47) e tomando o supremo, a demonstração do Lema 2.11 está concluida.

□

Lema 2.12 *Sob as mesmas hipóteses do Lema 2.9, vale a estimativa*

$$\|u(\cdot,t_2)-u(\cdot,t_1)\|_{L^2}\le C(T)\sigma(t_1)^{-1/2}(t_2-t_1)^{1/2}, \tag{2.49}$$

para $0<t_1\le t_2\le T$.

Dem.

Sejam t_1,t_2 com $0\le t_1\le t_2\le T$. Então usando a desigualdade de Hölder temos que,

$$|u(x,t_2)-u(x,t_1)|\le\int_{t_1}^{t_2}|u_t(x,t)dt|\le(t_2-t_1)^{1/2}(\int_{t_1}^{t_2}|u_t(x,t)|^2dt)^{1/2}.$$

Usando a expressão da derivanda material segue que

$$|u(x,t_2)-u(x,t_1)|\le(t_2-t_1)^{1/2}(C(T)\int_{t_1}^{t_2}[|\dot{u}(x,t)|^2+|u(x,t)u_x(x,t)|^2]dt)^{1/2}.$$

Multiplicando e dividindo a primeira parcela do lado direito por σ e tomando o supremo de u na segunda parcela, temos

$$|u(x,t_2)-u(x,t_1)|^2\le(t_2-t_1)C(T)\int_{t_1}^{t_2}[\sigma^{-1}(t)\sigma(t)|\dot{u}(x,t)|^2+\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|u(x,t)|^2\}|u_x(x,t)|^2]dt.$$

Daí usando o Lema 2.10, obtemos

$$|u(x,t_2)-u(x,t_1)|^2\le(t_2-t_1)C(T)\int_{t_1}^{t_2}\sigma^{-1}(t)(\sigma(t)|\dot{u}(x,t)|^2+C(T)|u_x(x,t)|^2)dt.$$

Como σ^{-1} é decrescente, segue-se que

$$|u(x,t_2)-u(x,t_1)|^2\le(t_2-t_1)C(T)\sigma^{-1}(t_1)\int_{t_1}^{t_2}\sigma(t)|\dot{u}(x,t)|^2+C(T)|u_x(x,t)|^2dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t_2)-u(\cdot,t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}&=\int|u(x,t_2)-u(x,t_1)|^2dx\\&\le(t_2-t_1)C(T)\sigma^{-1}(t_1)\int_{t_1}^{t_2}\int\sigma(t)|\dot{u}(x,t)|^2+C(T)|u_x(x,t)|^2\ dx\ dt\\&\le(t_2-t_1)\big(C(T)\sigma^{-1}(t_1)\int_0^T\int\sigma(t)|\dot{u}(x,t)|^2\ dx\ dt\\&+C(T)\int_0^T\int|u_x(x,t)|^2\ dx\ dt\big).\end{aligned}$$

Logo de (2.34) e da Proposição 2.2, temos que existe uma constante $C(T)>0$ tal que

$$\|u(\cdot,t_2)-u(\cdot,t_1)\|_{L^2(R)}\le(t_2-t_1)^{1/2}C(T)\sigma^{-1/2}(t_1).$$

$\square$

Lema 2.13 *Sob as mesmas hipóteses do Lema 2.9, vale a estimativa*

$$\|\rho(\cdot,t_2)-\rho(\cdot,t_1)\|_{H^{-1}}+\|(\rho u)(\cdot,t_2)-(\rho u)(\cdot,t_1)\|_{H^{-1}}\leq C(T)(t_2-t_1)^{1/2}, \tag{2.50}$$

para $0\leq t_1\leq t_2\leq T$.

Dem.

Da equação da continuidade, $\rho_t+(u\rho)_x=0$, temos que

$$\rho_t+(u\Delta\rho)_x+(\Delta u\bar{\rho})_x+(\bar{\rho}\bar{u})_x=0.$$

Sejam $\varphi\in H^1(\mathbb{R})$, com $\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq 1$, e $0<t_1\leq t_2\leq T$. Como

$$|\int(\rho(x,t_1)-\rho(x,t_2))\varphi(x)dx|=|\int_{t_1}^{t_2}\int\rho_t(x,t)\varphi(x)\ dx\ dt|,$$

temos que

$$|\int(\rho(x,t_1)-\rho(x,t_2))\varphi(x)dx|=|\int_{t_1}^{t_2}\int((u\Delta\rho)_x+(\bar{u}\bar{\rho})_x+(\bar{\rho}\Delta u)_x)\varphi\ dx\ dt|.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}|\int(\rho(x,t_1)-\rho(x,t_2))\varphi(x)dx|=|&\int_{t_1}^{t_2}\int(u\Delta\rho+\bar{\rho}\Delta u)\varphi_x\ dx\ dt|\\&+\int_{t_1}^{t_2}(\bar{u}\bar{\rho})_x\varphi\ dx\ dt.\end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.2, o Lema 2.10 e a Desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned}|\int(\rho(x,t_1)-\rho(x,t_2))\varphi(x)dx|\leq|&C(T)\int_{t_1}^{t_2}t^{-1/2}\Big(\int\Delta\rho^2dx\Big)^{1/2}\Big(\int(\varphi_x)^2dx\Big)^{1/2}dt\\&+(t_2-t_1)^{1/2}\|(\bar{\rho}\bar{u})_x\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big(\int\varphi^2dx\Big)^{1/2}\\&+C(T)\|\bar{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(t_2-t_1)^{1/2}\Big(\int\varphi_x^2dx\Big)^{1/2}|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}|\int(\rho(x,t_1)-\rho(x,t_2))\varphi(x)dx|\leq|&C(T)(t_2^{1/2}-t_1^{1/2})\|\varphi_x\|_{L^2(\mathbb{R})}\\&+(t_2-t_1)^{1/2}\|(\bar{\rho}\bar{u})_x\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big(\int\varphi^2dx\Big)^{1/2}\\&+C(T)\|\bar{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(t_2-t_1)^{1/2}\Big(\int\varphi_x^2dx\Big)^{1/2}|.\end{aligned}$$

De $\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\varphi_x\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$, temos que

$$|\int (\rho(x,t_1) - \rho(x,t_2))\varphi(x)dx| \leq C(T)(t_2 - t_1)^{1/2}.$$

Logo, por H^{-1} ser o dual topológico de H^1, temos que

$$\sup_{\|\varphi\|_{H^{-1}} \leq 1} |\int (\rho(x,t_1) - \rho(x,t_2))\varphi(x)dx| = \|\rho(\cdot,t_1) - \rho(\cdot,t_2)\|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq C(T)(t_2 - t_1)^{1/2}.$$

Agora verificaremos que $\|(u\rho(\cdot,t_2) - u\rho(\cdot,t_1))\|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq C(T)(t_2 - t_1)^{1/2}$. Para isto, usaremos a equação do momento do $(PVI)_\delta$ para obter que

$$\begin{aligned}
|\int (u\rho(x,t_2) - u\rho(x,t_1))\varphi \; dx| &= |\int\int_{t_1}^{t_2} u_{xx}\varphi - (u^2\rho)_x\varphi - P(\rho)_x\varphi \; dt \; dx| \\
&\leq |\int\int_{t_1}^{t_2} u_{xx}\varphi \; dt \; dx| + |\int\int_{t_1}^{t_2} (u^2\rho)_x\varphi \; dt \; dx| \\
&+ |\int\int_{t_1}^{t_2} P(\rho)_x\varphi \; dt \; dx| \\
&= I + II + III. \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

Façamos a majoração de cada um dos termos do lado direito de (2.51). Usando integrações por partes e, após isso, a desigualdade de Hölder, temos

$$I = |\int_{t_1}^{t_2}\int u_{xx}\varphi \; dx \; dt| = |\int_{t_1}^{t_2}\int u_x\varphi_x \; dx \; dt| \leq \int_{t_1}^{t_2} \Big(\int u_x dx\Big)^{1/2} \|\varphi_x\|_{L^2(\mathbb{R})} dt.$$

Como $\|\varphi_x\|_{L^2} \leq 1$, segue-se que

$$I \leq C(T)(t_2 - t_1)^{1/2}.$$

Para o segundo termo da última desigualdade de (2.51), utilizaremos novamente integração por partes, a desigualdade de Hölder, a Proposição 2.5 e o Lema 2.9 para obter

$$\begin{aligned}
II = |\int_{t_1}^{t_2}\int (u^2\rho)\varphi_x \; dx \; dt| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| C(T) |\int u\varphi_x \; dx| \; dt \\
&\leq C(T)\int_{t_1}^{t_2} t^{-1/2} |\int \Delta u\varphi_x + \bar{u}\varphi_x \; dx| dt \\
&\leq C(T)\int_{t_1}^{t_2} t^{-1/2} \Big(\|\Delta u\|_{L^2}\|\varphi_x\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\bar{u}_x\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\Big) dt \\
&\leq C(T)(t_2 - t_1)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
III &= |\int\int_{t_1}^{t_2} P(\rho)_x\varphi \; dt \; dx| = |\int_{t_1}^{t_2}\int \Delta P_x\varphi \; dx \; dt + \int_{t_1}^{t_2}\int P(\bar{\rho})_x\varphi \; dx \; dt| \\
&= |\int_{t_1}^{t_2}\int \Delta P\varphi_x \; dx \; dt + \int_{t_1}^{t_2}\int P(\bar{\rho})_x\varphi \; dx \; dt| \\
&\leq C(T)(t_2-t_1)\|\varphi_x\|_{L^2} + \|P(\bar{\rho})_x\|_{L^2}(t_2-t_1)\|\varphi\|_{L^2} \\
&\leq C(T)(t_2-t_1).
\end{aligned}
$$

Logo, usando as estimativas obtidas para I, II e III em (2.51), segue-se que

$$
\|\rho(\cdot,t_1)-\rho(\cdot,t_2)\|_{H^{-1}(\mathbb{R})} + \|(u\rho(\cdot,t_2)-u\rho(\cdot,t_1))\|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq C(T)(t_2-t_1)^{1/2}
$$

como queriamos, o que conclui a demonstração do Lema 2.13.

□

2.2 Prova do Teorema Principal

Tendo obtido as estimativas necessárias, passemos ao principal objetivo da Dissertação que é a demonstração do Teorema 2.1.

Nesta seção, denotaremos a solução do $(PVI)_\delta$, com dados regularizados, por (ρ_δ, u_δ) e a solução do (PVI) original, à ser mostrada a existência, por (ρ, u).

Na seção anterior provamos que as soluções suaves (ρ_δ, u_δ) do $(PVI)_\delta$, definidas para $t \in [0,T]$ com dados iniciais $((\rho_0)_\delta, (u_0)_\delta)$ suaves, satisfazem todas as estimativas, desde a Proposição 2.2 até o Lema 2.13 com constantes $C(T) > 0$ que são independentes do parametro δ. Aplicaremos estas estimativas para obter uma solução do (PVI). Em primeiro lugar, observamos que delas obtemos uma função $u : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

i) $u_\delta \to u$ uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}\times(0,T]$;

ii) $u_\delta(\cdot,t) - u(\cdot,t) \to 0$ fortemente em $L^2(\mathbb{R})$, $t \in [0,T]$ e

iii) $(u_\delta)_x(\cdot,t) - u_x(\cdot,t) \to 0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R})$, $t \in (0,T]$,

passando-se a uma sequência de $\delta \to 0$.

Podemos também obter uma subsequência de ρ_δ que converge fracamente, digamos para uma função ρ. Isto, entretanto, não garante que $P(\rho_\delta)$ convirja fracamente para $P(\rho)$. Por esta razão, não podemos concluir que (ρ, u) é uma solução fraca da equação do momento. No entanto, contornaremos este probema mostrando a convergência forte da familia $\rho_\delta(\cdot, t)$ para uma função $\rho(t)$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.14 *Sejam ρ_δ, u_δ soluções suaves do $(PVI)_\delta$ e u satisfazendo as condições i), ii) e iii) listadas acima. Então existe uma subsequência de $\delta \to 0$ e para cada $t \geq 0$, uma função $\rho(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ (com $\rho(0) \equiv \rho_0$) tal que*

$$\rho_\delta(\cdot, t) - \rho(t) \to 0 \ \text{em} \ L^2_{loc}(\mathbb{R}), \ \ t \in [0, T]; \tag{2.52}$$

e

$$(u_\delta)_x(\cdot, t) - P(\rho_\delta(\cdot, t)) \to u_x(\cdot, t) - P(\rho(t)) \ \text{em} \ L^2_{loc}(\mathbb{R}), \ \ t \in (0, T]. \tag{2.53}$$

Obs.: Aqui, e no que se segue, por convergência em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ queremos dizer convergência em $L^2(K)$ para qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}$.

Demonstração da Proposição 2.14

Iniciamos mostrando (2.52). Para tanto, seja a trajetória de partícula $X_\delta(y, t)$ definida como sendo a solução de

$$\begin{cases} X_\delta' = u_\delta(X_\delta(y,t), t), \\ X(y, 0) = y, \end{cases}$$

onde $X_\delta' = \frac{d}{dt} X_\delta$. Como $(X_\delta)_{yt} = (X_\delta)_{ty} = (X_\delta')_y$, temos da regra da cadeia que $(X_\delta)_y$ satisfaz a equação

$$(X_\delta)_{yt} = (u_\delta)_x(X_\delta(y,t), t)(X_\delta)_y(y, t).$$

Portanto,

$$(X_\delta)_y(y, t) = e^{\int_0^t (u_\delta)_x(X_\delta(y,s),s)ds}.$$

Ao calcularmos a derivada de ρ_δ ao longo da trajetória X_δ, obtemos a derivada material

$$\dot{\rho}_\delta = \frac{d}{dt}\rho_\delta = -\rho_\delta (u_\delta)_x.$$

Dividindo por ρ_δ os dois lados desta última equação, obtemos

$$\frac{\dot{\rho}_\delta}{\rho_\delta} = \frac{1}{\rho_\delta}\frac{d}{dt}\rho_\delta(X_\delta(y,t),t) = -(u_\delta)_x,$$

ou seja,

$$(\log[\rho_\delta(X_\delta(y,t),t)])_t = -(u_\delta)_x(X_\delta(y,t),t). \tag{2.54}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(X_\delta)_y(y,t) &= \exp\Big\{-\int_0^t \{\log[\rho_\delta(X_\delta(y,s),s)]\}_s ds\Big\}\\ &= \exp\Big\{\log[(\rho_0)_\delta(y)/(\rho_\delta(X(y,s),s))]\Big\}\\ &= (\rho_0)_\delta(y)/(\rho_\delta(X(y,s),s)).\end{aligned}$$

Da Proposição 2.5 segue-se que, para $t \in [0,T]$ e $y \in \mathbb{R}$, temos $C^{-1}(T) \leq (\rho_0)_\delta, (\rho)_\delta \leq C(T)$. Daí,

$$C^{-2}(T) \leq \frac{(\rho_0)_\delta}{\rho_\delta} \leq C^2(T).$$

Renomeando a constante, obtemos então

$$C^{-1}(T) \leq (X_\delta)_y(y,t) \leq C(T),\ t \in [0,T],\ y \in \mathbb{R}. \tag{2.55}$$

A função X_δ também é uniformemente Hölder contínua em t, devido à limitação dada em (2.45), ou seja,

$$|X_\delta(x,t_2) - X_\delta(x,t_1)| \leq C|t_2 - t_1|^{1/2},\ \forall\ \delta > 0. \tag{2.56}$$

De (2.55) e de (2.56) segue-se que

$$\begin{aligned}|X_\delta(x_2,t_2) - X_\delta(x_1,t_1)| &\leq |X_\delta(x_2,t_2) - X_\delta(x_2,t_1)| + |X_\delta(x_2,t_1) - X_\delta(x_1,t_1)|\\ &\leq C|t_2 - t_1|^{1/2} + |\int_{x_1}^{x_2} (X_\delta)_y(y,t_1)dy|\\ &\leq C(T)(|t_2 - t_1|^{1/2} + |x_2 - x_1|).\end{aligned}$$

Logo, X_δ é equicontínua em $\mathbb{R} \times [0,T]$ e pontualmente equilimitada. Logo pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência de X_δ que converge uniformente em compactos de $[0,T] \times \mathbb{R}$ para uma função $X : \mathbb{R} \times [0,T]$.

Da desigualdade (2.55) também temos que, para cada $t \in [0,T]$, a função $X_\delta(\cdot,t)$ é um difeomorfismo (crescente) de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com a inversa, a qual denotaremos por $Y_\delta(\cdot,t)$, satisfazendo também a desigualdade (2.57), o que pode ser visto pelo Teorema da Função Inversa. Então, existe Y tal que $Y_\delta \to Y$ uniformemente em compactos de $[0,T]\times\mathbb{R}$ para cada t e $Y(\cdot,t)$ é a inversa de $X(\cdot,t)$.

Definamos agora as funções

$$L_\delta(y,t) = \log\Big(\rho_\delta(X_\delta(y,t),t)\Big)$$

e

$$F_\delta(y,t) = \Big((u_\delta)_x - P(\rho_\delta)\Big)(X_\delta(y,t),t).$$

Desejamos mostrar que $F_\delta(\cdot,t)$ e $L_\delta(\cdot,t)$ convergem fortemente em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ quando $\delta\to 0$ (passando-se a uma nova subsequência de $\delta \to 0$) para certas funções F e L, respectivamente, para cada $t>0$ fixado.

Começamos com F_δ. Como

$$(F_\delta(y,t))^2 = \Big((u_\delta)_x - P(\rho_\delta)\Big)^2(X_\delta(y,t),t) \le \Big((u_\delta)_x^2 + P^2(\rho_\delta)\Big)(X_\delta(y,t),t),$$

das Proposições 2.2 e 2.5, temos

$$\|F_\delta\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R}\times[0,T])} \le C(T).$$

Por outro lado, calculando a derivada de F_δ em relação a y, temos que

$$\begin{aligned}
(F_\delta)_y &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[\big((u_\delta)_x - P(\rho_\delta)\big)(X_{\delta(y,t),t})\Big]\\
&= \Big[(u_\delta)_{xx} - P(\rho_\delta)_x\Big]\frac{\partial}{\partial y}X_\delta\\
&= \Big[(\rho_\delta u_\delta)_t + (\rho_\delta u_\delta^2)_x\Big]\frac{\partial}{\partial y}X_\delta\\
&= (\rho_\delta \dot{u}_\delta)\frac{\partial}{\partial y}X_\delta.
\end{aligned}$$

Usando (2.55) e a Proposição 2.5, segue-se que

$$(F_\delta)_y(y,t) \le C(T)\dot{u}_\delta(X_\delta(y,t),t).$$

Calculando a norma L^2 de $(F_\delta)_y$, fazendo a mudança de variável $x = X_\delta(y,t)$ e usando (2.55), obtemos

$$\int [(F_\delta(y,t))_y]^2 dy \le C(T)\int (\dot{u}_\delta)^2 dy.$$

Daí e do Lema 2.9, para cada $t > 0$ fixado, temos que

$$\int [(F_\delta(y,t))_y]^2 dy \leq C(T)\sigma^{-1/2}(t) \int \sigma^2 (\dot{u}_\delta)^2 dy \leq C(T)\sigma^{-2}(t).$$

Calculamos agora a derivada de F_δ em relação à t para obtermos

$$\begin{aligned}(F_\delta)_t(y,t) &= \Big[\big((u_\delta)_{xx}\frac{\partial}{\partial t}X_\delta(y,t) + (u_\delta)_{xt}\big) - P'(\rho_\delta)\big((\rho_\delta)_x\frac{\partial}{\partial t}X_\delta(y,t) + (\rho_\delta)_t\big)\Big](X_\delta(y,t),t)\\ &= \Big[\big((u_\delta)_{xx}u_\delta + (u_\delta)_{xt}\big) - P'(\rho_\delta)\big((\rho_\delta)_x u_\delta + (\rho_\delta)_t\big)\Big](X_\delta(y,t),t).\end{aligned}$$

Portanto, usando que $(\dot{u}_\delta) = (u_\delta)_{xx}(u_\delta) + (u_\delta)_x(u_\delta)_x + (u_\delta)_{xt}$ e a Proposição 2.5 obtemos que

$$\begin{aligned}(F_\delta)_t(y,t) &= \Big[\big((\dot{u}_\delta\big)_x - ((u_\delta)_x)^2) + P'(\rho_\delta)(\rho_\delta(u_\delta)_x)\Big](X_\delta(y,t))\\ &= \Big[(\dot{u}_\delta)_x + ((u_\delta)_x^2) - C(T)(u_\delta)_x\Big](X_\delta(y,t)).\end{aligned}$$

Logo,

$$\|(F_\delta)_t\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(T)\|(\dot{u}_\delta)_x\|_{L^2(\mathbb{R})} + C(T)\|(u_\delta)_x^2\|_{L^2(\mathbb{R})} + C(T)\|(u_\delta)_x)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Daí, pelo Lema 2.9, temos que $\|(F_\delta)_t\|_{L^2(\mathbb{R})}$ é limitado uniformemente, em relação a δ.

O termo $\|(u_\delta)_x^2\|_{L^2(\mathbb{R})}$ pode ser limitado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\int_\tau^T \int (u_\delta)_x^4 \, dx \, dt &\leq C \int_\tau^T \int \Big((u_\delta)_x - \Delta P_\delta\Big)^4 + (\Delta P_\delta)^4 dx \, dt\\ &\leq C(T) + C\int_\tau^T \int \Big((u_\delta)_x - \Delta P_\delta\Big)^4 dx \, dt\\ &\leq C(T) + C\int_\tau^T \|(u_\delta)_x - \Delta P_\delta\|_{H^1}^2 \int \Big((u_\delta)_x - \Delta P_\delta\Big)^2 dx \, dt\\ &\leq C(T) + C\sigma(\tau)^{-1}\int_\tau^T \|(u_\delta)_x - \Delta P_\delta\|_{H^1}^2 \, dt\\ &\leq C(T) + C_\tau \int_\tau^T \Big(\|(u_\delta)_x - \Delta P_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|((u_\delta)_x - \Delta P_\delta)_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\Big) \, dt\\ &= C(T) + CC_\tau + C_\tau \int_\tau^T \|((u_\delta)_x - \Delta P_\delta)_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt\\ &\leq C(T) + CC_\tau + C_\tau \int_\tau^T \|\rho\dot{u}_\delta + P(\bar{\rho}_\delta)_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, dt\\ &\leq C(T) + CC_\tau 2T\|P(\bar{\rho}_\delta)_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + CC_\tau\sigma(\tau)^{-1} \leq C_\tau,\end{aligned}$$

onde C_τ denota uma constante dependente de τ, mas independente de δ.

Então, dado $\tau \in (0,T]$, arbitrário, pelo Teorema de Bochner(p. 77), ou pela desigualdade de Minkowski para Integrais (veja por exemplo [5]), temos

$$\|F_\delta(\cdot,t_2)-F_\delta(\cdot,t_1)\|_{L^2} = \|\int_{t_1}^{t_2}(F_\delta)_t(\cdot,s)ds\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \int_{t_1}^{t_2}\|(F_\delta)_t(\cdot,s)\|_{L^2}ds \le C_\tau(t_2-t_1),$$

para quaisquer $t_1,t_2 \in [\tau,T]$. As estimativas acima sobre F_δ e suas derivadas, nos permitem concluir que existe uma subsequência de $\delta \to 0$ e uma determinada função $F \in C((0,T];L^2_{loc}(\mathbb{R}))$ tal que $F_\delta(\cdot,t) \to F(\cdot,t)$ em $L^2(K)$, para todo $t>0$ e qualquer subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$. Com efeito, para $K=[-m,m]$, $m \in \mathbb{N}$, pelas estimativas acima, podemos afirmar que $\{F_\delta\}$ é equicontínua em $C((0,T];L^2(K))$ e, fixado $t \in (0,T]$, o conjunto $\{F_\delta(t)\}$ é compacto em $L^2(K)$ (pois pelo que vimos, $F_\delta(t) \equiv F_\delta(\cdot,t)$ é limitado em $H^1(K)$ e, sendo K limitado, sabemos que a inclusão $H^1(K) \hookrightarrow L^2(K)$ é compacta pelo Teorema de Rellich-Kondrachov,[2].) Então, pelo Teorema de Ascoli existe uma subsequência $\delta^m \to 0$ e uma função $F^{(m)}$ tal que $F_{\delta^m} \to F^{(m)}$ em $C([\tau,T];L^2(K))$, para todo $\tau>0$. Daí, por diagonalização, podemos obter a sequência de $\delta \to 0$ e a função F desejada.

Agora falta provar que L_δ converge fortemente. De (2.54), da definição de F_δ e da definição de L_δ temos que

$$(L_\delta)_t = -(u_\delta)_x = -(F_\delta + P_\delta),$$

onde $P_\delta = P(\rho_\delta)$. Fixados δ_1 e δ_2, definimos

$$\alpha = \frac{P_{\delta_1}-P_{\delta_2}}{L_{\delta_1}-L_{\delta_2}}.$$

No quociente acima α é não negativo, pois $L_{\delta_1} \le L_{\delta_2}$ se, e somente se, $\rho_{\delta_1} \le \rho_{\delta_2}$ e, como $P, P' > 0$, temos a mesma desigualdade entre P_{δ_1} e P_{δ_2}. Podemos então afirmar que $\Delta L = L_{\delta_1} - L_{\delta_2}$ satisfaz a seguinte EDO

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta L + \alpha\Delta L = -\Delta F,$$

com $\alpha \ge 0$ e $\Delta F = F_{\delta_1} - F_{\delta_2}$. Portanto, para cada y real e $t>0$, $\Delta L(y,t)$ satisfaz

$$\Delta L(y,t) = -\int_0^t \Delta F(y,s)e^{-\int_s^t \alpha(\tau)d\tau}ds + \Delta L(y,0)e^{-\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}.$$

Como $e^{-\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}$ e $e^{-\int_s^t \alpha(\tau)d\tau}$ são limitadas por 1, obtemos

$$|\Delta L(y,t)| \le \int_0^t |\Delta F(y,s)|ds + |\Delta L(y,0)|.$$

Aplicando a desigualdade triangular e o Teorema de Bochner ou a Desigualdade de Minkowski para integrais no primeiro termo do lado direito da desigualdade acima, obtemos

$$\|\Delta L(\cdot,t)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} \leq \int_0^t \|\Delta F(\cdot,s)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} ds + \|\Delta L(\cdot,0)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})}.$$

Usando a definição de ΔL temos que

$$\begin{aligned}
\|\Delta L(\cdot,t)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} &\leq \int_0^T \|\Delta F(\cdot,s)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} ds \\
&\quad + \|\log\rho_{\delta_1}(X_{\delta_1}(0,y),0) - \log\rho_{\delta_2}(X_{\delta_2}(0,y),0)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} \\
&\leq \int_0^T \|\Delta F(\cdot,s)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} ds + \|\log\rho_{\delta_1}(y,0) - \log\rho_{\delta_2}(y,0)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} \\
&\leq \int_0^T \|\Delta F(\cdot,s)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} ds + \|\log(\rho_0)_{\delta_1}(y) - \log(\rho_0)_{\delta_2}(y)\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Da convergência de F_δ e do fato que $(\rho_0)_\delta \to \rho_0$, segue que L_δ é de Cauchy em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ uniformente em relação a t. Logo, L_δ converge fortemente em $L^2_{loc}(\mathbb{R} \times [0,T])$, existindo assim uma função $L \in L^2_{loc}(\mathbb{R} \times [0,T])$ tal que $\lim_{\delta \to 0} L_\delta = L$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R} \times [0,T])$.

Agora definimos a função

$$\rho(t) = \mathrm{e}^{L(Y(\cdot,t),t)} \equiv \mathrm{e}^{L \circ Y(t)}$$

e vamos mostrar que

$$\rho_\delta(t) = \mathrm{e}^{L_\delta(Y_\delta(\cdot,t),t)} \equiv \mathrm{e}^{L_\delta \circ Y_\delta(t)} - \rho(t)$$

converge fortemente para zero em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ (quando $\delta \to 0$, passando-se a subsequências.) Antes vejamos que a função $\rho(t)$ satisfaz a estimativa pontual dada na Proposição 2.5 e que $\rho(t) - \bar{\rho} \in L^2(\mathbb{R})$. Em primeiro lugar, mostremos que $\rho(t)$ está bem definida, como uma função mensurável. Para isto, basta verificar que a composição $L(t) \circ Y(t)$ resulta numa função mensurável, já que a função exponencial é contínua. A função $L(t)$ é mensurável, pois, da forma como ela foi obtida, é possível concluir que ela é um limite q.t.p. de funções suaves, $L_\delta(t)$, mas, não podemos concluir daí que a composição acima é uma função mensurável, uma vez que $L(t)$ é a "função externa" na composição. Precisamos mostrar que a imagem inversa de um conjunto mensurável qualquer de medida nula, pela "função interna" mensurável $Y(t)$ é um conjunto mensurável. (Com efeito, um conjunto mensurável (a Lebesgue) qualquer é da forma $E \cup N$, onde E é um boreliano e N é um conjunto mensurável de medida nula [1]. Logo, para funções mensuráveis $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $(g \circ f)^{-1}((\alpha, \infty)) = f^{-1}(g^{-1}(\alpha, \infty)) \equiv f^{-1}(E \cup N) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(N))$.

A função $Y(t)$ é bastante razoável. De fato, como veremos abaixo, ela é bi-Lipschitziana, i.e. um homeomorfismo Lipschiziano com inversa também Lipschitziana. É conhecido que funções Lipschitzianas levam conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula (a medida da imagem de um conjunto por uma função Lipschitziana não "cresce mais" do que a constante de Lipschitz). Para verificarmos que $Y(t)$ é bi-Lipschitziana, i.e. que $Y(t)$ e $X(t) = Y(t)^{-1}$ são Lipschitzianas, notemos que (2.55) implica em $C(T)^{-1}|y_1 - y_2| \leq |X_\delta(y_1, t) - X_\delta(y_2, t)| \leq C(T)|y_1 - y_2|$ para todo $\delta > 0$, e vale, dai também o mesmo para Y_δ, logo, X, e também Y, satisfazem esta desigualdade, para quaisquer $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, uma vez que X e Y são limites pontuais de X_δ e Y_δ, respectivamente.

Vejamos agora que $\rho(t)$ satisfaz a estimativa dada para ρ_δ na Proposição 2.5 e que $\rho(t) - \bar{\rho} \in L^2(\mathbb{R})$. Quanto a esta última propriedade, veremos, mais precisamente, que $\rho(t) - \bar{\rho}$ também satisfaz a estimativa dada para $\rho(\cdot, t) - \bar{\rho}$ na Proposição 2.2, para alguma constante $C(T)$. Uma vez que sabemos que $X(t) = Y(t)^{-1}$ leva conjuntos de medida zero em conjuntos de medida zero, e que $L_\delta(t) \to L(t)$ q.t.p. (passando-se a uma subsequência de $\delta \to 0$) podemos concluir que $\rho(t) = \lim_{\delta \to 0} \mathrm{e}^{L_\delta \circ Y(t)}$ q.t.p., ou seja,

$$\rho(t) = \lim_{\delta \to 0} \rho_\delta(X_\delta(Y(t), t), t) \; q.t.p.,$$

onde para a última igualdade usamos a definição de L_δ. Daí, como $\rho_\delta(\cdot, t)$ satisfaz a estimativa pontual dada na Proposição 2.5, uniformente em relação a δ, obtemos a mesma estimativa para $\rho(t)$. Para obtemos que $\rho(t) - \bar{\rho} \in L^2(\mathbb{R})$, vamos usar o limite q.t.p. acima junto com o fato de que funções bi-Lipschitzianas definem mudanças de variáveis, para as quais vale o "Teorema de Mudança de Variável." Com efeito, pelo Lema de Fatou(v. [5]), temos

[1] A σ-álgebra de Lebesgue é o completamento da σ-álgebra de Borel.

$$\begin{aligned}
\int |\rho(t) - \bar{\rho}|^2 dx &\leq \varliminf_{\delta \to 0} \int |\rho_\delta(X_\delta(Y(x,t),t),t) - \bar{\rho}|^2 dx \\
&\leq \varliminf_{\delta \to 0} C_1(T) \int |\rho_\delta(X_\delta(y,t),t) - \bar{\rho}|^2 dx \\
&= \varliminf_{\delta \to 0} C_1(T) C_2(T) \int |\rho_\delta(X_\delta(x,t) - \bar{\rho}|^2 dx \\
&\leq C_1(T) C_2(T) C(T).
\end{aligned}$$

Para mostrarmos que $\rho_\delta(t) - \rho(t)$ é fortemente convergente para zero em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ basta mostrarmos que $\rho^k_\delta(\cdot,t) - \rho^k(\cdot,t) \to 0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R})$ para $k = 1, 2$. Com efeito,

$$\|\rho_\delta - \rho\|^2_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} = \|\rho_\delta\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} - 2(\rho_\delta|\rho)_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} + \|\rho\|^2_{L^2_{loc}(\mathbb{R})} \to 0$$

quando $\delta \to 0$. Para isto, fixamos uma função teste suave $\varphi = \varphi(x)$ de suporte compacto em $\mathbb{R}$ e calculamos para um t fixo (que será omitido dos argumentos das funções) o produto interno

$$\left\langle (\rho_\delta)^k - \rho^k, \varphi \right\rangle = \int (e^{kL_\delta(Y_\delta(x))} - e^{kL(Y(x))})\varphi(x) dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = X_\delta(y)$, obtemos que

$$\left\langle (\rho_\delta)^k - \rho^k, \varphi \right\rangle = \int e^{kL_\delta(y)} \varphi(X_\delta(y)) \frac{\partial}{\partial y} X_\delta(y) - e^{kL(y)} \varphi(X(y)) \frac{\partial}{\partial y} X(y) dy.$$

Somando e subtraindo termos convenientemente, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle (\rho_\delta)^k - \rho^k, \varphi \right\rangle &= \int \Big[e^{kL_\delta(y)} - e^{kL(y)} \Big] \varphi(X_\delta(y)) \frac{\partial}{\partial y} X_\delta(y) dy \\
&+ \int e^{kL(y)} \Big[\varphi(X_\delta(y)) - \varphi(X(y)) \Big] \frac{\partial}{\partial y} X_\delta dy \\
&+ \int e^{kL(y)} \varphi(X(y)) \Big[-\frac{\partial}{\partial y} X(y) + \frac{\partial}{\partial y} X_\delta(y) \Big] dy.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial y} X_\delta$ é limitada e L_δ converge fortemente em $L^2(\mathbb{R})$, a primeira integral do lado direito tende a zero quando δ tende a zero. (Notemos que, aplicando o Teorema do valor Médio à função exponencial e usando as limitações pontuais para L e L_δ, pela desigualdade de Hölder, podemos limitá-la por uma constante multiplicada por $\|L_\delta - L\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}$.) Novamente pela limitação de $\frac{\partial}{\partial y} X_\delta$ e usando agora a convergência uniforme de X_δ para X temos que a segunda integral do lado direito tende a zero também quando δ tende a zero. Quanto à terceira integral, como $\frac{\partial}{\partial y} X_\delta$ é limitada em

L^2_{loc}, pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (veja [2]) e pelo fato de L^2_{loc} ser reflexivo, existe uma subsequência, a qual também será denotada por $\frac{\partial}{\partial y}X_\delta$, que converge fracamente em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Digamos então que $\frac{\partial}{\partial y}X_\delta$ converge fracamente para alguma $z \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, assim $\int \phi(y)\frac{\partial}{\partial y}X_\delta(y)dy \to \int \phi(y)z(y)dy$ para toda função teste ϕ em $\mathbb{R}$. Por outro lado, sabemos que para toda função teste ϕ vale a igualdade,

$$\lim_{\delta\to 0}\int \phi(y)\frac{\partial}{\partial y}X_\delta(y)dy = -\lim_{\delta\to 0}\int \phi'(y)X_\delta(y)dy = \int \phi'(y)X(y)dy.$$

Portanto, pela unicidade da derivada fraca, temos que $z = \frac{\partial}{\partial y}X$, ou seja, $\frac{\partial}{\partial y}X_\delta \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial y}X$. Logo, a terceira integral também tende a zero. Para concluirmos que $\rho_\delta^k - \rho^k$ converge fracamente para zero em $L^2(\mathbb{R})$, escrevemos

$$\rho_\delta - \rho = (\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta) - (\rho - \bar{\rho}) + (\bar{\rho}_\delta - \bar{\rho}).$$

Daí, vemos que $\rho_\delta - \rho \in L^2(\mathbb{R})$(notemos que $\bar{\rho}_\delta - \bar{\rho} = 0$ se $|x| \geq 2$ e $\delta < 1$) e dados $\psi \in L^2(\rho)$ e $\epsilon > 0$, tomando $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\|\varphi - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \epsilon$, e usando as estimativas em $L^2(\mathbb{R})$, uniformes em relação a δ, obtemos que

$$|\int(\rho_\delta - \rho)\psi dx| \leq |\int(\rho_\delta - \rho)\varphi dx| + C(T)\epsilon.$$

Logo,

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}|\int(\rho_\delta - \rho)dx| \leq C(T)\epsilon,$$

e como ϵ é arbitrário, temos que $\lim_{\delta\to 0}\int(\rho_\delta - \rho)\psi dx = 0$, i.e. $\rho_\delta^k - \rho^k \to 0$ em $L^2(\mathbb{R})$, para $k = 1$. Para $k = 2$, podemos proceder de forma análoga, observando que um termo do tipo $|\int(\rho_\delta^2 - \bar{\rho}_\delta^2)(\psi - \varphi)dx|$ pode ser estimado por $\|\rho_\delta + \bar{\rho}_\delta\|_{L^\infty}\ \|\rho_\delta - \bar{\rho}_\delta\|_{L^2}\ \|\psi - \varphi\|_{L^2}$ e $\|\rho_\delta\|_{L^\infty}$, $\|\bar{\rho}_\delta\|_{L^\infty} \leq C(T)$.

Observando que

$$(u_\delta)_x \rightharpoonup u_x$$

e que $\rho_\rho \to \rho$ implica que

$$P(\rho_\delta) \to P(\rho),$$

obtemos que,

$$(u_\delta)_x - P(\rho_\delta) + P(\bar{\rho}) \rightharpoonup u_x - P(\rho) + P(\bar{\rho})$$

em $L^2(\mathbb{R})$. Por outro lado, para cada $t > 0$ fixado, usando a equação do momento $\rho_\delta\dot{u}_\delta = (u_\delta)_{xx} - P(\rho_\delta)_x$, temos que

$$\int \Big((u_\delta)_x - P(\rho_\delta)\Big)_x^2 dx = \int(\rho_\delta)^2(\dot{u}_\delta)^2dx \leq C(T)^2\int(\dot{u}_\delta)^2dx.$$

Daí, fazendo $C(T) \equiv C(T)^2$, obtemos que

$$\int \Big((u_\delta)_x - P(\rho_\delta)\Big)_x^2 dx \leq C(T)\sigma(t)^{-2}\int \sigma(t)^2(\dot{u}_\delta)^2 dx.$$

Usando agora (2.34), temos então que

$$\int \Big((u_\delta)_x - P(\rho_\delta)\Big)_x^2 dx \leq C(T)\sigma(t)^{-2}.$$

Portanto, para cada $t > 0$ fixado, a função diferença $\Big((u_\delta)_x(\cdot,t) - P(\rho_\delta(\cdot,t)\Big)_x$ é um elemento de $L^2(\mathbb{R})$, limitada de modo uniforme para δ. Logo,

$$(u_\delta)_x - P(\rho_\delta) + P(\bar{\rho}) \to u_x - P(\rho) + P(\bar{\rho})$$

fortemente em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$, já que temos ai a convergência fraca em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ e a inclusão $H^1_{loc}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2_{loc}(\mathbb{R})$ é compacta. Com isto concluimos a demonstração da Proposição 2.14.

$\square$

Agora, vamos encerrar esta Dissertação, pela conclusão da demonstração do Teorema 2.1.

Em primeiro lugar, notamos que a função u obtida acima, satisfaz as condições de integrabilidade imposta na definição de solução fraca (p.12) i.e. $u, u_x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[0,T])$. De fato, isto segue-se da Proposição 2.2 (onde $u = u_\delta$) e da definição de u, dada na página 51 satisfazendo i), ii) e ii)(na verdade, daí obtemos $u \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e $u_x \in L^2(\mathbb{R}\times[0,T])$). Quanto a função ρ, pela Proposição 2.14, para cada $t \geq 0$, existe uma função $\rho(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $\rho(t) = \lim_{\delta\to 0}\rho_\delta(t)$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Daí e da Proposição 2.2, podemos provar que $\{\rho_\delta\}$ é de Cauchy em $L^2_{loc}(\mathbb{R}\times[0,T])$. Com efeito, dado $K \subset \mathbb{R}$, um compacto qualquer, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para concluir que

$$\lim_{\delta_1,\delta_2\to 0}\int_0^T\int_K |\rho_{\delta_1}(x,t) - \rho_{\delta_2}(x,t)|^2 dxdt = 0,$$

pois, pela Proposição 2.2, temos que

$$\begin{aligned}\int_K |\rho_{\delta_1}(x,t) - \rho_{\delta_2}(x,t)|^2 dx \leq C(&\int_K |\rho_{\delta_1}(x,t) - \bar{\rho}_{\delta_2}|^2 dx + \int_K |\rho_{\delta_2}(x,t) - \bar{\rho_{\delta_2}}|^2 dx \\ &+ \int_K |\bar{\rho}_{\delta_1} - \bar{\rho}_{\delta_2}|^2 dx) \leq C(T)\end{aligned}$$

com $C(T)$ independente de δ_1 e δ_2. Além disso, para cada $t \geq 0$ fixado, temos que

$$\int_K |\rho_{\delta_1}(x,t) - \rho_{\delta_2}(x,t)|^2 dx \leq 2(\int_K |\rho_{\delta_1}(x,t) - \rho(t)|^2 dx + \int_K |\rho_{\delta_2}(x,t) - \rho(t)|^2 dx).$$

Logo,

$$\lim_{\delta_1,\delta_2 \to 0} \int_K |\rho_{\delta_1}(x,t) - \rho_{\delta_2}(x,t)|^2 dx = 0.$$

Portanto, existe uma função $\widetilde{\rho} \in L^2_{loc}(\mathbb{R} \times [0,T])$ tal que $\rho_\delta \to \widetilde{\rho}$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R} \times [0,T])$ e, assim, $\widetilde{\rho}(\cdot,t) = \rho(t)$ como elemento de $L^2_{loc}(\mathbb{R})$, para quase todo $t \in [0,T]$. Para esta última afirmação, notemos que da convergência $\rho_\delta \to \widetilde{\rho}$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0.T])$, fixado um representante de $\widetilde{\rho}$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R} \times [0,T])$, existe um conjunto N de medida nula em $\mathbb{R} \times [0,T]$ tal que $\rho_\delta \to \widetilde{\rho}(x,t)$ para todo $(x,t) \in N^c$. Como para quase todo $t \in [0,T]$, a seção $N_t = \{x \in \mathbb{R}; (x,t) \in N\}$ tem medida nula, fixado um t destes, temos $\rho_\delta(,t) \to \widetilde{\rho}(\cdot,t)$ q.t.p. em $\mathbb{R}$(mais precisamente, $\rho_\delta(x,t) \to \widetilde{\rho}(x,t)$ para todo $x \in N^c_t$) e, passando-se a subsequência (que pode depender de t) temos também $\rho_\delta(t) \to \rho(t)$ q.t.p.. Logo, $\widetilde{\rho}(\cdot,t) = \rho(t)$ q.t.p.. Consequentemente, $\rho(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

No que se segue, passamos a denotar $\widetilde{\rho}$ também por ρ e observamos que mantemos as propriedades

$$C(T)^{-1} \leq \rho \leq C(T) \text{ q.t.p. (em } \mathbb{R} \times [0,T])$$

e

$$\int |\rho(x,t) - \bar{\rho}|^2 \leq C(T) \text{ q.t.p. (em } [0,T]).$$

A primeira é consequência de que ρ_δ a satisfaz para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, uniformemente em relação a δ, e $\rho_\delta \to \rho$ q.t.p. (em $\mathbb{R} \times [0,T]$, passando-se a uma subsequência de $\delta \to 0$). A segunda já foi obtida acima para $\rho(\cdot,t) = \rho(t)$.

As equações (1.23)-(1.12), na página 10, as quais no nosso caso, reduzem-se às seguintes,

$$\int \rho_0 \varphi(x,0) dx = -\int_0^T \int \rho_t + \rho u \varphi_x dx\ dt$$

e

$$\int \rho_0 u_0 \varphi(x,0) dx = -\int_0^T \int \rho u \varphi_t + \rho u^2 \varphi_x - (u_x - P(\rho)) \varphi_x dx\ dt,$$

para toda $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R} \times [0,T])$, vêm, como usual, da multiplicação das equações do (PVI) por φ e de uma integração formal por partes. Elas são válidas, rigorosamente, para as nossas soluções aproximadas (ρ_δ, u_δ) e daí, obtê-las para (ρ, u) é uma questão de poder passar o limite nas equações com δ, quando $\delta \to 0$, passando-se a tantas subsequências de $\delta \to 0$ quanto se fizer necessário. Todas as estimativas, uniformes em relação a δ, e consequentemente, as convergências obtidas, especialmente as da Proposição 2.14, mas, não menos importantes, também as mencionadas para u na página 51 (vide itens i) -iii) na página 51) foram elaboradas para atingir este objetivo. Tendo estas convergências, é facil ver que podemos obter as equações acima para (ρ, u) a partir das mesmas com (ρ_δ, u_δ) no lugar de (ρ, u), usando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Hölder) no L^2 ou o Teorema da Convergência Dominada. Encerramos assim a demonstração da afirmação feita no Teorema 2.1 sobre a existência de uma solução fraca para o problema (PVI). Para concluirmos a demonstração do Teorema 2.1, falta apenas então mostramos as propriedades (2.2) e (2.3), na página 14.

A propriedade (2.2) vem do Lema 2.9 (onde $\rho = \rho_\delta$, $u = u_\delta$ e $C(T)$ não depende de δ). Como efeito, pelo Lema 2.9, temos

$$|\int [\rho_\delta(x,t_2) - \rho_\delta(x,t_1)]\varphi(x)dx| + |\int [(\rho_\delta u_\delta)(x,t_2) - (\rho_\delta u_\delta)(x,t_1)]\varphi(x)dx| \\ \leq C(T)(t_2 - t_1)^{1/2},$$

para quaisquer $\delta > 0$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, e $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ com $\|\varphi\|_{H^1} \leq 1$. Mas, como vimos acima, para todo $t \in [0,T]$, existe uma função $\rho(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $\rho_\delta(\cdot,t) \to \rho(t)$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Além disso, $u_\delta \to u$ uniformente nos compactos contidos em $\mathbb{R} \times (0,T]$, e daí $u_\delta(\cdot,t) \to u(\cdot,t)$ uniformente nos compactos de $\mathbb{R}$, para qualquer $t \in (0,T]$. Então, tomando o limite quando $\delta \to 0$ na desigualdade acima, obtemos que a mesma também vale com $(\rho(t), u)$ no lugar de $(\rho_\delta(\cdot,t), u)$, exceto para $t_1 = 0$ na segunda parcela. Mas, das convegência $(\rho_0)_\delta \to \rho_0$ e $(u_\delta)_0 \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R})$, temos $(\rho_0)_\delta(u_0)_\delta \to \rho_0 u_0$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, e isto é suficiente para obter a desigualdade com $t_1 = 0$ na segunda parcela, ou seja,

$$|\int [\rho(t_2) - \rho(t_1)]\varphi\ dx| + |\int [\rho(t_2)u(\cdot,t_2) - \rho(t_1)u(\cdot,t_1)]\varphi\ dx| \leq C(T)(t_2 - t_1)^{1/2},$$

para quaisquer $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ e $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ com $\|\varphi\|_{H^1} \leq 1$. Não podemos dizer daí que $\rho(t) \in H^{-1}(\mathbb{R})$, pois temos apenas que $\rho(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ (analogamente para $(\rho u)(t)$), mas sim, que $\rho(t) - \bar{\rho} \in H^{-1}(\mathbb{R})$ analogamente para $(\rho u)(t)$, já que $u(\cdot,t)$ é limitada veja Lema 2.10). Assim, da desigualdade acima, podemos dizer que as funções

$$t \in [0,T] \to \rho(t) - \bar{\rho},\ (\rho u)(t) - \bar{\rho}\bar{u} \in H^{-1}(\mathbb{R})$$

são Hölder contínuas com expoente 1/2. Como $\rho(\cdot,t) = \rho(t)$ para quase todo $t \in [0,T]$, provamos a propriedade (2.2), no sentido de que $\rho - \bar{\rho}$, $\rho u - \bar{\rho}\bar{u}$ têm representantes Hölder contínuas como funções de $[0,T]$ em $H^{-1}(\mathbb{R})$.

A propriedade (2.3) vem do Lema 2.12 (onde $u = u_\delta$) e da convergência localmente uniforme de $u_\delta(\cdot,t)$ para $u(\cdot,t)$, qualquer que seja $t \in (0,T]$.

$\square$

Vale ressaltar que $u(\cdot,t) \notin L^2(\mathbb{R})$, mas $u(\cdot,t) - \bar{u} \in L^2(\mathbb{R})$. Daí, a razão de escrevemos $u - \bar{u}$ na condição(1.22) no Teorema 2.1 e não simplesmente u como na condição (1.15) do Teorema principal do artigo [8].

Apêndice A

Resultados Básicos

Neste apêndice apresentamos os fundamentos matemáticos necessários para nosso estudo. Usamos como referências principais os livros [5], [3] e [15]. Mas também foi de muita importância os livros [11], [2] e [1]. Escolhemos omitir as demonstrações da maioria dos resultados por serem bem conhecidos, mas são fornecidas as referências.

A.1 Noções Básicas

Denotaremos neste apêndice por A um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Um ponto do $\mathbb{R}^n$ será denotado por x, com componentes $x_1, x_2, ..., x_n$.

Para A aberto, usaremos as notações $\frac{\partial}{\partial x_i} f$, $D_{x_i} f$ ou f_{x_i} para denotar a derivada clássica de primeira ordem da função f em relação a variável x_i. O vetor gradiente de f em $x \in A$ será denotado por

$$\nabla f(x) = (D_{x_1} f(x), D_{x_2} f(x), ..., D_{x_n} f(x))$$

e

$$\text{div}\, f(x) = \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} f(x).$$

Chamaremos de multi-índice uma n-upla de inteiros não negativos da forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{e} \quad x^\alpha = \prod_{j=1}^{n} (x_j)^{\alpha_j}.$$

As derivadas de ordem $|\alpha|$ de f serão denotadas por,

$$D^{\alpha}f = D^{\alpha_1}_{x_1}D^{\alpha_2}_{x_2}...D^{\alpha_n}_{x_n}f.$$

Denotamos por $C^0(A)$ o conjunto das funções contínuas em A.

Para $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definimos os seguintes conjuntos de funções:

$$C^k(A) := \{f \in C^0(A); D^{\alpha}f \in C^0(A) \ , \forall \ |\alpha| \leq k\},$$

o conjunto as funções contínuas de classe C^k em A;

$$C^k_c(A) := \{f \in C^k(A); \exists K \subset A \text{ compacto tal que } f(x) = 0, \forall x \notin K\},$$

o conjunto das **funções de suporte compacto** de classe C^k ;

$$C^k_0(A) := \{f \in C^k(A); \lim_{\|x\| \to \pm\infty} D^{\alpha}f(x) = 0, \text{ com } |\alpha| \leq k\}$$

o conjunto das funções de classe C^k **que se anulam no infinito**. Os dois últimos espaços de funções estão munidos com a norma da convergência uniforme definida como

$$\|f\|_u := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Definimos tambem o espaço das **funções Hölder contínuas** em A com expoente $\gamma \in [0, 1]$, por

$$C^{\gamma}(A) = \{f : A \to \mathbb{R}; |f(u) - f(y)| \leq C|x - y|^{\gamma}, \text{ para algum } C > 0\}.$$

O problema que estudamos nesta dissertação lida com funções do tipo $f : A \subset \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}$. Para funções desse tipo e $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$, definimos a semi-norma de Hölder com expoentes γ_1 e γ_2 por

$$\langle f \rangle^{\gamma_1,\gamma_2}_A := \sup\{\frac{|f(x_2, t_2) - f(x_1, t_1)|}{|x_2 - x_1|^{\gamma_1} + |t_2 - t_1|^{\gamma_2}}; (x_1, t_1), (x_2, t_2) \in A \ e \ (x_1, t_1) \neq (x_2, t_2)\}.$$

Sempre quando usarmos a notação $\int_A f dx$ nesta seção para a integral de Lebesgue em um conjunto qualquer $A \subset \mathbb{R}^n$ da função f, a menos que seja mencionado o contrário. Para os conhecidos espaços

$$L^p(A) = \{f : A \subset \mathbb{R}^n :\to \mathbb{R} \ \text{ mensurável; } \|f\|_{L^p(A)} = (\int_A |f|^p dx)^{1/p} < \infty\}$$

onde $p \in [0, \infty]$, temos o seguinte resultado:

Teorema A.1 *(Desigualdade de Hölder)([5], p.182) Sejam $p,\ q \in [1,\infty]$ tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Se $f \in L^p(A)$ e $g \in L^q(A)$, então $fg \in L^1(A)$*

$$\|fg\|_{L^1(A)} \leq \|f\|_{L^p(A)}\|g\|_{L^q(A)}.$$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo de extremos $a < b$ e X um espaço normado de funções com a norma $\|\ \cdot\ \|_X$. Para $p \in [1,\infty]$ definimos a norma

$$\|f\|_{L^p(I;X)} = \begin{cases} (\int_a^b \|f(\cdot,t)\|_X^p dt)^{1/p}, \ se\ 1 \leq p < \infty; \\ \mathrm{supess}_{t\in I}\|f(\cdot,t)\|_X, se\ p=\infty, \end{cases}$$

e o espaço de funções

$$L^p(I;X) = \{f : I \times [0,T] \to \mathbb{R}; \|f\|_{L^q(I;X)} < \infty\}. \tag{A.1}$$

De modo semelhante, definimos o seguinte espaço:

$$C(I;X) = \{f : I \times [0,T] \to \mathbb{R}; \|f\|_{C(I;X)} < \infty\}$$

onde

$$\|f\|_{C(I;X)} = \mathrm{supess}_{t\in I}\|f(\cdot,t)\|_X.$$

Frequentemente, usamos as seguintes desigualdades numéricas as quais damos no lema a seguir, que são facilmente verificadas.

Lema A.2 *Para $n \in \mathbb{N}$ temos que existe $C > 0$ tal que*

$$C^{-1}(a^n+b^n) \leq (a+b)^n \leq C(a^n+b^n), \tag{A.2}$$

$$C^{-1}(a^{1/2}+b^{1/2}) \leq (a+b)^{1/2} \leq C(a^{1/2}+b^{1/2}) \tag{A.3}$$

e

$$ab \leq \frac{a^2}{2\xi}+\frac{\xi b^2}{2}, \tag{A.4}$$

para quaisquer $a,b,\xi > 0$.

Um resultado bastante utilizado é o Lema de Gronwall, cuja forma integral pode ser encontrada em [13], na página 37. Utilizamos a seguinte versão na forma diferencial.

Lema A.3 *(**Lema de Gronwall**) ([10], p.3)Seja $u(t)$ uma função não negativa e diferenciável em $[0,T]$, que satisfaz:*

$$u'(t) \leq w(t)u(t) + v(t)$$

onde $w(t)$ e $v(t)$ são funções integráveis em $[0,T]$. Então:

$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t w(\tau)d\tau} + \int_0^t v(s)e^{\int_s^t w(\tau)d\tau}ds$$

para todo $t \in [0,T]$.

O resultado que se segue é consequência do Teorema da Convergência Dominada.

Proposição A.4 *([5], p.56) Considere uma função $g : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que $g(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja integrável para cada $t \in [0,T]$. Seja $F(t) = \int g(x,t)dx$.*

(i) Suponhamos que exista uma função $h \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $|g(x,t)| \leq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,T]$. Se $\lim_{t\to t_0} g(x,t) = g(x,t_0)$, então $\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0)$. Em particular, se $g(x,\cdot)$ for contínua para cada x, então F tambem será continua.

(ii) Suponhamos que $\frac{\partial g}{\partial t}$ esteja definida e que exista uma função $h \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $|\frac{\partial g}{\partial t}|(x,t) \leq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,T]$. Então F é diferenciável e $F'(t) = \int (\frac{\partial g}{\partial t})(x,t)dx$.

A.2 Convoluções

No que se segue, e em toda a Dissertação, usamos o símbolo de integral "$\int$", sem domínio de integração para denotar a integração sobre todo o espaço $\mathbb{R}^n$. Seja $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. A *convolução* de duas funções mensuráveis f e $g : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$, denotada por $f * g$, é a função definida por

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy \tag{A.5}$$

para os pontos x tais que a integral exista, i. e., a função $y \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x-y)g(y)$ seja integrável.

Se a integral existe, fazendo a mudança de variável $z = x - y$, temos

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int f(z)g(x-z)dz = g * f(x).$$

Além disso, dada $h : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ se $f(z)g(x-y-z)h(y)$ for integrável em relação a $(y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pelo Teorema de Fubini, temos também que

$$\begin{aligned}(f*g)*h(x) &= \int (f*g)(x-y)h(y)dy = \int\int f(z)g(x-y-z)dzh(y)dy \\ &= \int f(z)\int g(x-y-z)h(y)dydz,\end{aligned}$$

ou seja,

$$(f*g)*h(x) = f*(g*h)(x).$$

Estas são propriedades elementares da convolução. Dois resultados essenciais nesta Dissertação são os seguintes:

Proposição A.5 *([5], p.242)Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha g$ for limitada para $|\alpha| \leq k$, então $f * g \in C^k(\mathbb{R})$ e $D^\alpha(f*g) = f*(D^\alpha g)$.*

Proposição A.6 ***(Desigualdade de Young)****([5], p.241) Sejam $1 \leq p,q,r \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

A.3 Regularizações

Fixada uma função não negativa de valores reais $J \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que supp$J \subset [-1,1]$ e $\int J(x)dx = 1$, chamamos de *núcleo regularizante* a família de funções $\{J_\delta\}$, para $\delta \in \mathbb{R}$, definida por $J_\delta(x) = \delta^{-n}J(x/\delta)$. O núcleo regularizante $\{J_\delta\}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$J_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n); \tag{A.6}$$

$$J_\delta(x) = 0, \ \textit{se} \ |x| \geq \delta; \tag{A.7}$$

e

$$\int J_\delta(x)dx = 1. \tag{A.8}$$

A importância do núcleo regularizante é que através da convolução com uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, não necessáriamente suave, podemos obter uma família de funções suaves f_δ que se aproximam de f. Mais precisamente, damos a seguinte definição:

Definição A.7 *Sejam $\{J_\delta\}$ um núcleo regularizante e f uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. A família de funções $\{f_\delta\}$, dadas por*

$$f_\delta := f * J_\delta$$

*é dita uma **regularização** de f.*

Definição A.8 *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Diremos que $x \in \mathbb{R}^n$ é um **ponto de Lebesgue** de f se*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^n} \int_{B(x,\delta)} |f(y) - f(x)|dy = 0. \tag{A.9}$$

Proposição A.9 *([3], p.630) Sejam $\{J_\delta\}$ um núcleo regularizante e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então valem as seguintes propriedades:*

i) $f * J_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$;

ii) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$, então $f * J_\delta \to f$ na norma de $L^p(\mathbb{R}^n)$, quando $\delta \to 0$, e $\|f * J_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$;

iii) Se f é contínua, então $f * J_\delta \to f$ uniformemente em compactos quando $\delta \to 0$;

iv) Se x é um ponto de Lebesgue de f, então $f * J_\delta(x) \to f(x)$.

A.4 O Espaço de Schwartz

No que se segue α denotará um multi-índice e N um inteiro não negativo.

Definição A.10 *Definimos o **Espaço de Schwartz** por*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^k(\mathbb{R}^n); \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{(1 + \|x\|)^N |D^\alpha f(x)|\} < \infty, \forall N, \alpha\}.$$

Definimos $\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^N|D^\alpha f(x)|$. É facil ver que $\|\cdot\|_{(N,\alpha)}$ é uma semi-norma para todo (N,α) e que dada uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|D^\alpha f(x)| \leq (1+\|x\|)^{-N}C,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde segue que $\lim_{\|x\|\to\infty}|D^\alpha f| = 0,\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Também temos as seguintes inclusões:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n),$$

para qualquer $p \in [1,\infty]$. A primeira inclusão é trivial. E a segunda pode ser mais abrangente, no sentido de que para qualquer $f \in \mathcal{S}$, temos que

$$\int |D^\alpha f(x)|^p dx \leq C\int(1+\|x\|)^{-Np}dx < \infty, \tag{A.10}$$

se $N > \frac{2n}{p}$. Portanto, $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R})$ para qualquer $p \in [1,\infty)$.

Diremos que uma sequência $\{f_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quando $\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_{(N,\alpha)} = 0$, para quaisquer N e α. Mostra-se que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é completo com essa seminorma.

Proposição A.11 *([5], p.237) Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se e somente se,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\beta||D^\alpha f(x)| < \infty,$$

para quaisquer multi-indices β e α.

Definição A.12 *Para qualquer $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ por*

$$\mathcal{F}[f](\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi,x\rangle}f(\xi)d\xi$$

e sua transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}[f]$ por

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{i\langle\xi,x\rangle}f(x)dx,$$

onde $\langle\xi,x\rangle$ significa o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Observe que do fato que $|e^{-i\langle\xi,x\rangle}| = |e^{i\langle\xi,x\rangle}| = 1$, segue que $\mathcal{F}[f]$ e $\mathcal{F}^{-1}[f]$ estão bem definidas para qualquer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, dada uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$\mathcal{F}[f]$ pode não pertencer a $L^1(\mathbb{R}^n)$. O que se mostra é que se $f \in \mathcal{S}$, então $\mathcal{F}[f]$ e também $\mathcal{F}^{-1}[f]$ pertencem a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e neste caso $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$. (v. [15], p.146)

Proposição A.13 *([5], na seção 8.3.) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e α um multi-indice.*

(i) Se $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, então $\mathcal{F}[f] \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[(-2\pi x i)^\alpha f]$;

(ii) Se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in L^1$ para $|\alpha| \leq k$ e $D^\alpha f \in C_0$ para $|\alpha| \leq k-1$, então $\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)$;

*(iii) **(Lema de Riemann-Lebesgue)** As aplicações $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ são contínuas;*

(iv) A aplicação $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua;

*(v) **(Identidade de Plancherel)** Para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tem-se $\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2}$.*

Definição A.14 *O dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ isto é, o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é chamado de espaço das distribuições temperadas e o denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.*

A topologia usual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ é a da convergência pontual em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (topologia fraca-*). Quando uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição temperada $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ por

$$T(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

diremos que T provém de f. É importante observar que existem funções $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que não definem distribuições temperadas e distribuições temperadas que não provém de funções em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Porém, se $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e ambas definem $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, então temos que

$$T(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx = \int g(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in C_c^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

e portanto $f(x) = g(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$. Logo, no caso de $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definir $T_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos fazer a identificação $f = T_f$.

Usaremos a notação $\langle f, \varphi \rangle$ tanto para indicar $f(\varphi)$ ou $T_f(\varphi)$, quando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quanto $\int f(x)\varphi(x)dx$ se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Definição A.15 *Para um multi-indice α e $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, diremos que $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é a α-ésima derivada no sentido fraco ou no sentido das distribuições de T quando*

$$\langle v, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle v, D^\alpha \varphi \rangle\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n)$$

e denotamos $v = \partial^\alpha T$.

A transformada de Fourier e a transformada inversa de Fourier de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ podem ser definidas como,

$$\mathcal{F}[f](\varphi) = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\varphi) = \left\langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \right\rangle\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Segue portanto que:

Proposição A.16 *([5], pgs. 293-298) Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ e α um multi-indice.*

(i) Se $x^\alpha f \in L^1$ para $|\alpha| \leq k$, então $\mathcal{F}[f] \in C^k$ e $D^\alpha \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[(-2\pi x i)^\alpha f]$.

(ii) Se $f \in C^k$, $D^\alpha f \in L^1$ para $|\alpha| \leq k$ e $D^\alpha f \in C_0$ para $|\alpha| \leq k-1$, então $\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)$.

(iii) $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ são contínuos e bijetivos.

A.5 Espaços de Sobolev

Nesta seção vamos introduzir os espaços de Sobolev via transformada de Fourier, seguindo a abordagem de [5].

Definição A.17 *Dado $s \in \mathbb{R}$, definimos o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ por*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'; (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

O espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ está munido naturalmente da norma

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = [\int |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi]^{1/2}$$

e do produto interno,

$$\langle f, g\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int \mathcal{F}[f](\xi)(1+|\xi|^2)^s\overline{\mathcal{F}[g]}(\xi)d\xi.$$

Pela identidade de Plancherel, temos que $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, fazendo a identificação comentada anteriormente.

Sabemos que para $t < s$, tem-se

$$(1+|\xi|^2)^t \leq (1+|\xi|^2)^s.$$

Portanto, se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int (1+|\xi|^2)^t(\mathcal{F}[f](\xi))^2 d\xi \leq \int (1+|\xi|^2)^s(\mathcal{F}[f](\xi))^2 d\xi < \infty.$$

Logo, temos as seguintes inclusões,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^t(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$$

para $s > t > 0$.

Definição A.18 *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados. Diremos que X está imerso continuamente em Y ou que a imersão de X em Y é contínua, quando $X \subset Y$ e exista uma constante existir $C > 0$ tal que*

$$\|v\|_Y \leq C\|v\|_X, \;\; \forall v \in X.$$

Neste caso usamos a notação $X \hookrightarrow Y$.

Denotaremos μ_s a medida definida por $\mu_s(A) = \int_A (1+|\xi|^2)^s d\xi$ onde a integral em questão é a de Lebesgue. Deste modo,

$$L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s) = \{f; \int f^2(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi < \infty\}.$$

Sobre o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ temos os seguintes resultados.

Lema A.19 *([5], p.302) O operador linear $\mathcal{F} : H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ é um isomorfismo unitário.*

Lema A.20 *([5], p.302)O operador $\partial^\alpha : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo para todo s e α.*

Teorema A.21 *(**Lema de Sobolev**)([5], p.303) Seja $s \in \mathbb{R}$ e $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Se $s > \frac{n}{2} + k$ então $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0^k(\mathbb{R}^n)$, onde $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ é munido da norma $\|f\|_{C_0^k} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_u$.*

Como consequência, fazendo no Teorema A.21 $k = 0$ e $n = 1$, temos que existe $C > 0$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \ \forall f \in H^1(\mathbb{R}), \tag{A.11}$$

ou seja,

$$H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}).$$

A desigualdade acima tambem é chamada de Desigualdade de Morrey.

Proposição A.22 *([5], p.302)Se $s \in \mathbb{R}$, então $(H^s)'(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com $H^{-s}(\mathbb{R})^n$ e feita a identificação $\|f\|_{(H^s)'(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}$, $\forall f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição A.23 *([5], p.302) O espaço de Schwartz é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Sejam $p \in [1, \infty]$ e $k \in \mathbb{N}$. Definimos o espaço

$$W^{k,p}(A) = \{f \in L^p(A); \ \partial^\alpha f \in L^p(A), \ |\alpha| \leq k\}.$$

O espaço $W^{k,p}(A)$ está munido da norma:

$$\|f\|_{W^{k,p}(A)} = \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq k} (\int_A |\partial^\alpha f|)^p dx)^{1/p}, & se \ 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} (\text{supess}_A |\partial^\alpha f|), & se \ p = \infty. \end{cases}$$

Mostra-se que $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ equivale ao $H^k(\mathbb{R}^n)$ e temos assim que para alguma constante $C > 0$,

$$C^{-1}\|f\|_{L^2} + \sum_{|\alpha|=1}^{k} C^{-1}\|\partial^\alpha f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^k} \leq C\|f\|_{L^2} + \sum_{|\alpha|=1}^{k} C\|\partial^\alpha f\|_{L^2}. \tag{A.12}$$

Os espaços $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ também são chamados de espaços de Sobolev.

A.6 Integral de Bochner

Seja X um espaço de Banach e $f : [0, T] \to X$ uma função qualquer.

A função f é dita fracamente mensurável se para qualquer funcional φ no dual de X, a função $\varphi \circ f : [0, T] \to X$ é mensurável.

Diremos que f é uma função simples quando ela puder ser representada por $f(s) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{E_i} f_i$, para $f_1, f_2, ..., f_n \in X$ e $\mathcal{X}_{E_1}, \mathcal{X}_{E_2}, ..., \mathcal{X}_{E_n}$ as respectivas funções características de conjuntos mensuráveis e disjuntos $E_1, E_2, ..., E_n \subset [0,T]$.

Quando existir uma sequência de funções simples $\{f_n\}$ tal que $f_n(t)$ convirja para $f(t)$, para quase todo t em $[0,T]$, diremos que f é fortemente mensurável. Por fim, f será quase separável quando existir um conjunto $B \subset [0,T]$ mensurável de medida nula tal que $f([0,T]-B)$ é separável. No caso de $f([0,T])$ ser separável, diremos apenas que f é separável.

Teorema A.24 ***(Pettis)****([15], p.132) Seja X um espaço de Banach. A função $f : [0,T] \to X$ é fortemente mensurável se, e somente se, ela for fracamente mensurável e quase separável.*

Para uma função simples $g : [0,T] \to X$, dada por $g(s) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{E_i} g_i$, definimos sua integral por

$$\int_0^T g(s)ds = \sum_{i=1}^{n} g_i |E_i|,$$

onde $|E_i|$ denota a medida (de Lebesgue) do conjunto E_i.

Definição A.25 *Seja X um espaço de Banach.*

i) Uma função $f : [0,T] \to X$ é dita integrável a Bochner, se existir uma sequência $\{f_n\}$ de funções simples tais que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|f(s) - f_n(s)ds\|_X ds \to 0,$$

onde $\| \ \|_X$ é a norma em X.

ii) Para qualquer $I \subset [0,T]$ mensurável, definimos a integral de Bochner de f em I por

$$\int_I f(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathcal{X}_I(s) f_n(s)ds,$$

onde f_n são funções simples e integráveis.

Observação A.1 *Se f for integrável a Bochner, então a integral de Bochner $\int_I f(s)ds$ está bem definida. Uma justificativa é encontrada em [15] na página 132.*

Teorema A.26 ***(Bochner)****([15], p.133) Uma função $f : [0,T] \to X$ é integrável a Bochner se, e somente se, $\|f(s)\|_X$ é integrável. Além disso,*

$$\|\int_I f(s)ds\|_X \leq \int_I \|f(s)\|_X ds$$

para qualquer intervalo mensurável $I \subset [0,T]$.

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.

[2] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Dunod, 2002

[3] L. C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, vol 19. American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.

[4] E. Feireisl, Dynamics of Viscous Compressible Fluids, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 26, 2004.

[5] G. B. Folland, Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications. Jonh Wiley 2^a Edição, New York, 1999.

[6] D.Hoff, Global Existence for 1D, Compressible Isentropic Navier-Stokes Equations with Large Initial Data, American Math. Society 303(1987), 169-181.

[7] D. Hoff, Global Solutions of The Navier-Stokes Equations for Multidimensional Compressible Flow with Discontinuous Initial Data, Journal of Differential Equations 120(1995), 215-254.

[8] D. Hoff, Global Solutions of The Equations of One-dimensional, Compressible Flow With Large Data and Forces, and with Differing End States, Z. angew. Math. Phys. 49(1998), 774-785.

[9] A. Mellet e A. Vasseur, Existence and Uniqueness of Global Strong Solutions for One-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations, SIAM J. Math. Anal. 39(2008), 1344-1365.

[10] J. A. Oguntuase, On A Inequality of Gronwall, J. of Inequalities in Pure and Applied Math., http://jipam.vu.edu.au/, vol.2, Issue 1, Article 9, (2001).

[11] M.Reed & B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 1: Functional Analysis; Academic Press, New York, 1972.

[12] V. A. Solonnikov, The Solvability of the Initial-Boundary-Value Problems for the Equations of Motion of a Viscous Compressible Fluid, Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov.(LOMI),56 (1976), 128-142.

[13] J. Sotomayor, Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, IMPA 1979.

[14] S. Toscano Melo e F. Moura N., Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais, 18º Congresso Brasileiro de Matemática, 1999 .

[15] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, 1968.