Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e multiplicidade de solução para uma classe de Equações elípticas via teoria de Morse

por

Denilson da Silva Pereira †

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Existência e multiplicidade de solução para uma classe de Equações elípticas via teoria de Morse

por

Denilson da Silva Pereira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

12/2010

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e multiplicidade de soluções para uma certa classe de problemas elípticos. Utilizaremos métodos variacionais juntamente com a teoria de Morse em dimensão infinita.

Palavras chave: Equações elípticas, métodos variacionais e teoria de Morse em dimensão infinita.

Abstract

In this work, we study the existence and multiplicity of solution for a large class of Elliptic problems. The main tools used are variational methods together with the infinite dimensional Morse Theory.

Key words: Elliptic equations, variational methods and infinite dimensional Morse theory.

Agradecimentos

A Deus, quem me deu a vida e força para lutar por meus objetivos.

Ao prof. Claudianor Alves por orientar-me não só na matemática, mas também na vida.

Agradeço ao prof. Giovany Figueiredo pela amizade, excelente orientação por dois produtivos anos de iniciação científica na UFPA e por apresentar-me ao departamento de Matemática da UFCG.

Aos profs. Júlio Sobreira, Jefferson e Marco Aurélio por assistirem meus seminários.

Sou grato aos que compuseram minha banca, professores Marco Aurélio e Sérgio Monari, que tiveram a paciência de ler meus escritos e contribuiram com suas prestimosas sugestões.

Agradeço aos meus professores do mestrado, Brandão, Horácio, Aparecido e Henrique. Que contribuiram de maneira significativa na minha formação.

Aos funcionarios do harmonioso departamento de matemática da UFCG, em especial à Salete.

Aos meus amigos do mestrado, em especial sou grato ao Hildênio e Kelmem pela convivência em harmonia no apartamento.

Agradeço a minha família de quem apoio, incentivo e carinho sempre recebi e a minha namorada Caroline Lima pelo amor, compreensão, companheirismo e ajuda.

Aos meus amigos Davi, Bruno e Sandro de Maceió.

Dedicatória

Dona Argentina.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^n$.

A técnica usada neste trabalho será o método variacional aliado a teoria de Morse em dimensão infinita, a qual vem sendo extensivamente usada na literatura para estudar problemas elípticos, ver Chang [9], Mawhin e Willem [10]. Nesta teoria, o comportamento de um funcional de classe C^1 definido sobre um espaço de Banach próximo de um de seus pontos críticos isolados é descrito por seus grupos críticos, que são grupos de homologia de um certo par topológico. As principais ferramentas usadas para calcular os grupos críticos para um funcional energia associado ao problema (1) incluem o Lema de Morse Generalizado (ou Teorema de splitting), o Teorema de shifting e teoremas que garantem que um dado ponto crítico, em geometria de linking, possuem grupos críticos não triviais. A Relação de Morse é uma importante ferramenta no estudo de multiplicidade de pontos críticos para o funcional energia associado, e portanto, no estudo de multiplicidade de soluções de (1).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira.

No Capítulo 1, estudamos a Teoria de Homologia, enunciaremos sua construção axiomática e principais propriedades usadas ao longo deste trabalho. Faremos ainda uma construção explícita da Teoria de Homologia Singular, a qual é de importância fundamental para compreender os grupos críticos.

No Capítulo 2, mostramos alguns resultados sobre Teoria de Homotopia. A existência de tais homotopias junto com propriedades de invariância dos grupos de homologia de conjuntos que são homotópicos, são ferramentas que ajudam a simplicar o cálculo de grupos críticos.

No Capítulo 3, demonstramos o Teorema de Sard-Smale e alguns resultados de perturbação do tipo Marino-Prodi.

O Capítulo 4 é dedicado aos grupos críticos. Caracterizaremos os grupos críticos de um pontos crítico a partir de seu índice de Morse. A Relação de Morse é demonstrada.

O Capítulo 5 é dedicado ao estudo de solução para variantes do problema (1), onde iremos usar vários resultados apresentados ao longo deste trabalho.

No Apêndice A, discorremos sobre a Teoria básica de grupos, que serve como suporte básico para o entendimento do Capítulo 1.

O Apêndice B é dedicado a Teoria de Operadores de Fredholm, Lema de Morse Generalizado e o Teorema de shifting, que serão amplamente utilizados no Capítulo 4.

No Apêndice C, faremos um resumo de resultados em Análise funcional e Teoria de Pontos críticos usados ao longo desta dissertação.

Capítulo 1

Teoria de Homologia

Nosso objetivo neste capítulo, é definir os grupos de homologia e enunciar algumas de suas principais propriedades que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Uma teoria de homologia consiste em associar a cada espaço topológico uma série de grupos abelianos, chamados os grupos de homologia desse espaço, de tal maneira que espaços homeomorfos têm grupos de homologia isomorfos.

No que segue, apresentaremos algumas noções básicas e resultados em topologia algébrica. Afim de dar ao leitor uma visão geral sobre teoria de homologia, vamos introduzir os conceitos de maneira axiomática. Em seguida, faremos a construção explícita da teoria de homologia singular a qual usaremos amplamente no Capítulo 4.

Os resultados deste capítulo podem ser encontrado em [2, 3, 4]. A seção sobre homologia singular foi retirada de [6].

Definição 1.1 *Sejam $(G_i)_i$ uma sequência de grupos abelianos e $(\varphi_i)_i$ uma sequência de homomorfismos*

$$\cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Diz-se que a sequência acima é exata em G_i se

$$Ker(\varphi_i) = Im(\varphi_{i-1}).$$

A sequência é exata se é exata em todo o G_i.

Exemplo. (i) Sejam G_1 e G_2 grupos abelianos e considere a seguinte parte da sequência

$$0 \xrightarrow{0} G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{0} 0$$

A sequência acima é exata se, e somente se, φ_1 é um isomorfismo.

(ii) (Sequência exata curta) Sejam G_1, G_2 e G_3 grupos abelianos, e considere a seguinte parte de uma sequência

$$0 \xrightarrow{0} G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \xrightarrow{0} 0 \tag{1.1}$$

Se esta sequência é exata, devemos ter $\{0\} = Im(0) = Ker(\varphi_1)$, logo φ_1 é monomorfismo. Por outro lado, $Im(\varphi_2) = Ker(0) = G_3$, donde segue que φ_2 é epimorfismo.

Agora, considere G um grupo abeliano, $H \subset G$ um subgrupo e a sequência

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} G/H \longrightarrow 0, \tag{1.2}$$

onde $i : H \to G$ é a aplicação inclusão e $q : G \to G/H$ é a aplicação quociente canônica, isto é,

$$\begin{aligned} q \quad : \quad & G \longrightarrow G/H \\ & g \longmapsto q(g) = [g] \end{aligned}$$

i é injetiva e q é sobrejetiva.

Seja (1.1) exata. Considere $G \simeq G_2$, $H \equiv Im(\varphi_1) \subset G$. Note que φ_1 é injetiva, logo a mesma induz um isomorfismo $\tilde{\varphi}_1$ entre G_1 e H ($G_1 \simeq H$). Com relação à φ_2, a sobrejetividade de φ_2 induz um isomorfismo $\tilde{\varphi}_2$ entre G_3 e G/H:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 \quad : \quad & G_1 \longrightarrow H \\ & g \longmapsto \tilde{\varphi}_1(g) = \varphi_1(g) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \tilde{\varphi}_2 \quad : \quad & G/H \longrightarrow G_3 \\ & [g] \longmapsto \tilde{\varphi}_2([g]) = \varphi_2(g) \end{aligned}$$

Sendo assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\simeq"] & G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\simeq"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H \arrow[r, "i"'] & G \arrow[r, "q"'] & G/H \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1.1 A construção axiomática

Um par de espaços (X, A) é um espaço topológico X junto com um subconjunto $A \subseteq X$. Vamos escrever $(X, A) \subseteq (Y, B)$ se $X \subseteq Y$ e $A \subseteq B$. Uma aplicação de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação contínua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Duas aplicações de pares $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ são *homotópicas* se existe uma aplicação $h : [0, 1] \times (X, A) \to (Y, B)$ tal que

$$h(0, \cdot) = f_0(\cdot) \ \text{ e } \ h(1, \cdot) = f_1(\cdot).$$

Se $A \subseteq X$, uma aplicação contínua $r : X \to A$ é uma *retração* se $r(x) = x, \ \ \forall x \in A$, quando existe tal aplicação, diz-se que A é um *retrato* de X. Se além disso, existir uma homotopia $h : [0, 1] \times X \to X$ tal que $h_0(x) = x$ e $h_1(x) = r(x)$ diz-se que A é um *retrato de deformação* de X. Finalmente, A é um *retrato de deformação forte* de X se a homotopia h satisfaz também $h_t(x) = x, \ \ \forall x \in A$.

Grupos de homologia

(a) Para cada $q \in \mathbb{Z}$ e cada tripla (X, A, G), onde (X, A) é um par de espaços e G é um grupo abeliano, é associado um grupo abeliano $H_q(X, A, G)$, ou simplesmente $H_q(X, A)$, quando ficar claro no texto o grupo G fixado. No caso em que $A = \emptyset$; usamos a notação $H_q(X, \emptyset) = H_q(X)$.

(b) Para cada aplicação de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ é associado um homomorfismo

$$f_* : H_q(X, A) \to H_q(Y, B).$$

(c) Para cada $q \in \mathbb{Z}$ e cada par (X, A) é associado um homomorfismo

$$\partial : H_q(X, A) \to H_{q-1}(A).$$

Os seguintes axiomas são requeridos.

Axioma 1.1 *Se $f = Id\,|_X$, então $f_* = Id\,|_{H_q(X,A)}$.*

Axioma 1.2 *Se $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (Z, C)$ são aplicação de pares, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Axioma 1.3 *Se $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação de pares, então $\partial \circ f_* = (f\mid_A)_* \circ \partial$.*

Axioma 1.4 *Sejam $i : A \to X$ e $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ aplicações inclusões, então a sequência*

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

é exata.

Axioma 1.5 *Se $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são aplicações de pares homotópicas, então $f_* = g_*$.*

Axioma 1.6 (Excisão) *Se U é um conjunto aberto de X com $\overline{U} \subseteq int(A)$, e se*

$$i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$$

denota a inclusão, então i_* é um isomorfismo.

Axioma 1.7 *Se X consiste de um único ponto p, então*

$$H_q(\{p\}) = \begin{cases} G & se \;\; q = 0 \\ 0 & se \;\; q \neq 0. \end{cases}$$

Agora vamos listar algumas das propriedades básicas derivadas dos axiomas acima

Sejam (X, A) e (X, B) pares topológicos, usamos a notação $A \simeq B$ para indicar que $H_q(X, A) \simeq H_q(X, B)$.

Propriedade 1.1 *Se $(X, A) = \cup_{i=1}^{j}(X_i, A_i)$ com $\{X_i\}_i$ fechados e dois a dois disjuntos, então*

$$H_q(X, A) = \bigoplus_{i=1}^{j} H_q(X_i, A_i).$$

Propriedade 1.2 *Se $H_q(X) = H_q(A)$ para todo q, então $H_q(X, A) = 0$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.*

Propriedade 1.3 *Seja A um subconjunto de um espaço normado tal que $0 \in A$. Então, para todo $n \geq 0$ e $k \geq 1$, temos*

$$H_q(A \times B^k, (A \times B^k) \setminus \{0\}) \simeq H_{n-k}(A, A \setminus \{0\}).$$

Propriedade 1.4 *Considere subespaços $B \subseteq A \subseteq X$ e um inteiro arbitrário q.*

(i) *Se A é um retrato de X, então $H_q(X) \simeq H_q(A) \oplus H_q(X, A)$.*

(ii) *Se A é um retrato de deformação forte de X, então a injeção canônica induz um isomorfismo $H_q(A, B) \simeq H_q(X, B)$, em particular $H_q(X, A) = 0$.*

(iii) Se B é um retrato de deformação forte de A, então a injeção canônica induz um isomorfismo $H_q(X,B) \simeq H_q(X,A)$.

Propriedade 1.5 *Dados espaços topológicos $B \subset F \subset B' \subset A \subset E \subset A'$, suponha que para todo o $q \in \mathbb{Z}$*

$$H_q(B',B) \simeq H_q(A',A) \simeq 0.$$

Então $\dim H_q(A,B) \leq \dim H_q(E,F)$ para todo o $q \in \mathbb{Z}$.

Propriedade 1.6 *(Ver Chang [9], p. 14) Se X é um espaço de Banach imerso continuamente em um espaço de Hilbert E com X denso em E, então*

$$H_*(A,B) = H_*(A|_X, B|_X)$$

Para qualquer par (A,B) em E, onde $(A|_X, B|_X)$ é a restrição de (A,B) sobre X.

Os seguintes grupos de homologia são frequentemente utilizados:

Propriedade 1.7 *(ver Mawhin e Willem [10], p. 172) Considere E um espaço normado de dimensão infinita. Considere B^∞ a bola unitária e S^∞ a esfera unitária. Sendo B^∞ um retrato de deformação forte de E e S^∞ um retrato de deformação forte de B^∞, temos*

$$H_q(E, B^\infty \setminus \{0\}) \simeq H_q(B^\infty, B^\infty \setminus \{0\}) \simeq H_q(S^\infty, S^\infty) \simeq \{0\}.$$

Propriedade 1.8 *Se X é conexo por arcos, então $H_0(X) \simeq G$.*

Propriedade 1.9 *Se X é um espaço vetorial, então*

$$H_q(X) = \begin{cases} G, & se \;\; q = 0 \\ 0, & se \;\; q \neq 0. \end{cases}$$

Propriedade 1.10

$$H_q(S^n, G) = H_q(S^n) \simeq \begin{cases} 0, & se \;\; q \neq n, \quad quando \;\; q,n \geq 1; \\ G, & se \;\; q = n \geq 1, \quad e \;\; q = 0, \quad n \geq 1; \\ G \oplus G, & se \;\; q = n = 0. \end{cases}$$

Propriedade 1.11

$$H_q(B^n, S^{n-1}, G) = H_q(B^n, S^{n-1}) \simeq \begin{cases} 0, & se \;\; q \neq n; \\ G, & se \;\; q = n. \end{cases}$$

Propriedade 1.12

$$H_q(B^n, G) = H_q(B^n) \simeq \begin{cases} G, & se \;\; q = 0; \\ 0, & se \;\; q > 0. \end{cases}$$

onde B^n é uma bola em $\mathbb{R}^n$ e $S^{n-1} = \partial B^n$.

1.2 Homologia singular

1.2.1 Complexo singular de um espaço

A teoria de Homologia singular é construída por meio de aplicações do n-simplexo padrão Δ_n do espaço euclidiano $(n+1)$-dimensional. O n-simplexo padrão Δ_n é o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ consistindo de todos os pontos $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0. \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Sendo Δ_n fechado e limitado em $\mathbb{R}^{n+1}$, segue que Δ_n é um espaço métrico compacto.

Para cada inteiro $i = 0, 1, \cdots, n$ o ponto

$$e_i = (\delta_{i0}, \delta_{i1}, \cdots, \delta_{in})$$

de $\mathbb{R}^{n+1}$ onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j, \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$$

é um ponto de Δ_n e será chamado de i-ésimo vértice de Δ_n. O n-simplexo padrão Δ_n tem $n+1$ vértices $e_0, e_1, \cdots, e_n$ e é a envoltória convexa do conjunto $V = \{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$.

Para cada inteiro $i = 0, 1, \cdots, n$ o subespaço

$$\Delta_n^{(i)} = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) | \quad x_i = 0\}$$

do n-simplexo padrão Δ_n é chamado de i-ésima face de Δ_n ou a face de Δ_n oposta ao i-ésimo vértice e_i. Obviamente, e_i não pertence a $\Delta_n^{(i)}$.

Agora, seja $n > 0$ e considere a aplicação

$$k_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$$

para cada $i = 0, 1, \cdots, n$ definida por

$$k_i(x_0, \cdots, x_{n-1}) = (x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1})$$

para cada ponto $(x_0, \cdots, x_{n-1})$ de Δ_{n-1}. Pode-se facilmente verificar que k_i é uma aplicação contínua de Δ_{n-1} em Δ_n e sua imagem

$$k_i(\Delta_{n-1}) = \Delta_n^{(i)}$$

é a i-ésima face de Δ_n.

Seja $n > 1$ e considere as aplicações

$$\Delta_{n-2} \xrightarrow{k_j} \Delta_{n-1} \xrightarrow{k_i} \Delta_n$$

onde $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq n-1$.

Lema 1.1 *Se* $0 \leq j < i \leq n$, *então*

$$k_i \circ k_j = k_j \circ k_{i-1}.$$

Demonstração: Seja $x = (x_0, \cdots, x_{n-2})$ um ponto arbitrário do $(n-2)$-simplexo padrão Δ_{n-2}. Devemos provar que

$$k_i(k_j(x)) = k_j(k_{i-1}(x)).$$

Primeiro assuma $j \leq i-2$. Então,

$$\begin{aligned} k_i(k_j(x)) &= k_i(x_0, \cdots, x_{j-1}, 0, x_j, \cdots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \cdots, x_{j-1}, 0, x_j, \cdots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, \cdots, x_{n-2}) \\ &= k_j(x_0, \cdots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, \cdots, x_{n-2}) \\ &= k_j(k_{i-1}(x)) \end{aligned}$$

Agora assuma que $j = i-1$. Então, $i = j+1$ e

$$\begin{aligned} k_i(k_j(x)) &= k_i(x_0, \cdots, x_{j-1}, 0, x_j, \cdots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \cdots, x_{j-1}, 0, 0, x_j, \cdots, x_{n-2}) \\ &= k_j(x_0, \cdots, x_{j-1}, 0, x_j, \cdots, x_{n-2}) \\ &= k_j(k_{i-1}(x)) \end{aligned}$$

Isto completa a prova do Lema 1.1.

□

Agora, considere X um espaço topológico e n um inteiro não negativo. Um *n-simplexo singular* em X é uma aplicação contínua

$$\xi : \Delta_n \to X$$

de um n-simplexo padrão em X.

Seja $S_n(X)$ o conjunto de todos os n-simplexos singular em X. Se $m \neq n$, temos

$$S_m(X) \bigcap S_n(X) = \emptyset.$$

A união

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(X)$$

é o conjunto de todos os simplexos singulares de X.

Se $n = 0$, Δ_0 consiste de um único ponto, sendo mais preciso, $\Delta_0 = \{1\}$. Portanto, um 0-simplexo singular $\xi : \Delta_0 \to X$ em X pode ser identificado com o ponto $\xi(1) \in X$. Neste sentido,

$$S_0(X) = X.$$

Se $n = 1$, Δ_1 é homeomorfo ao intervalo unitário $I = [0,1]$ de números reais. De fato, a aplicação

$$H : I \to \Delta_1$$

definida por

$$h(t) = (1-t, t)$$

é um homeomorfismo verificando

$$h(0) = e_0 \ \text{ e } \ h(1) = e_1.$$

Portanto, um 1-simplexo singular $\xi : \Delta_1 \to X$ em X pode ser identificado com o caminho $\xi \circ h : I \to X$ em um dado espaço X. Neste sentido, temos

$$S_1(X) = P(X)$$

onde $P(X)$ representa o conjunto das curvas em X.

Agora, assuma $n > 0$ e seja $\xi : \Delta_n \to X$ um n-simplexo singular arbitrário. Para cada inteiro $i = 0, 1, \cdots, n$, a composição

$$\xi \circ k_i : \Delta_{n-1} \to X$$

de aplicações

$$\Delta_{n-1} \xrightarrow{k_i} \Delta_n \xrightarrow{\xi} X$$

é um $n-1$-simplexo singular em X, que será chamado a i-ésima face de ξ e será denotada por

$$\xi^{(i)} = \xi \circ k_i.$$

As $n+1$ faces $\xi^0, \cdots, \xi^n$ de um n-simplexo singular ξ em X podem não ser distintas. De fato, se $\xi : \Delta_n \to X$ é uma aplicação constante, todas as suas $(n+1)$ faces $\xi^0, \cdots, \xi^n$ são os mesmos $(n-1)$-simplexos singulares de X.

Para cada inteiro $n > 0$ e $i = 0, 1, \cdots, n$, definimos o i-ésimo *operador face* sobre $S(X)$ como sendo a função

$$\begin{array}{rcccl} \sigma_i & : & S_n(X) & \longrightarrow & S_{n-1}(X) \\ & & \xi & \longmapsto & \sigma_i(\xi) = \xi^{(i)}. \end{array}$$

Proposição 1.1 *Se $n > 1$ e $0 \leq j < i \leq n$, então*

$$[\xi^{(i)}]^{(j)} = [\xi^{(j)}]^{(i-1)}$$

para cada n-simplexo singular ξ em X.

Demonstração:

De acordo com a definição de face de um simplexo singular e o Lema 1.1, temos

$$\begin{aligned} [\xi^{(i)}]^{(j)} &= \xi^{(i)} \circ k_j = \xi \circ k_i \circ k_j = \xi \circ k_j \circ k_{i-1} \\ &= \xi^{(j)} \circ k_{i-1} = [\xi^{(j)}]^{(i-1)} \end{aligned}$$

□

Chamamos de *complexo singular* de um espaço X, o conjunto

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(X)$$

junto com seus operadores face.

Agora, vamos considerar um subespaço arbitrário A de um dado espaço X e a aplicação inclusão

$$\begin{array}{rcl} i & : & A \to X \\ & & x \mapsto i(x) = x \end{array}$$

Qualquer n-simplexo singular $\xi : \Delta_n \to A$ no subespaço A de X pode ser identificado com o n-simplexo singular

$$i \circ \xi : \Delta_n \to X.$$

Neste sentido, temos

$$S_n(A) \subseteq S_n(X); \quad S(A) \subseteq S(X).$$

Além disso, para qualquer n-simplexo singular ξ em X com $n > 0$, $\xi \in S_n(A)$, tem-se $\xi^{(i)} \in S_{n-1}(A)$ para cada $i = 0, 1, \cdots, n$. Por causa desta propriedade, $S(A)$ é dito ser um *subcomplexo* do complexo singular $S(X)$.

1.2.2 Complexo de cadeia singular

Seja X um espaço topológico arbitrário e considere seu complexo singular

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(X).$$

Para cada inteiro não negativo n, seja $C_n(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto $S_n(X)$ como definido no Apêndice A. Então,

$$S_n(X) \subset C_n(X).$$

Os elementos do grupo $C_n(X)$ podem ser considerados como combinações lineares finitas

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_k\xi_k,$$

onde $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k\}$ é um subconjunto finito de $S_n(X)$ e $a_1, a_2, \cdots, a_k$ são inteiros.

Para cada $n > 0$, defina a função

$$\sigma : S_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

por

$$\sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_i(\xi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \xi^{(i)}$$

para cada n-simplexo singular $\xi : \Delta_n \to X$.

Sendo $C_n(X)$ gerado por $S_n(X)$, segue que σ estende-se à um único homomorfismo

$$\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

que o chamaremos de *operador fronteira*.

Vamos definir

$$C_n(X) = 0 \text{ para } n < 0$$

e

$$\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

como sendo o homomorfismo trivial, sempre que $n \leq 0$.

Proposição 1.2 *Para cada inteiro n, a composta*

$$\partial^2 = \partial \circ \partial : C_n(X) \to C_{n-2}(X)$$

de operadores fronteira

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-2}(X)$$

é um homomorfismo trivial, em símbolos,

$$\partial^2 = 0.$$

Demonstração: Se $n < 2$, então $C_{n-2}(X) = 0$ e a proposição é trivial. Assim, podemos assumir $n \geq 2$. Seja $\xi : \Delta_n \to X$ um n-simplexo singular em X arbitrário. Então,

$$\partial(\xi) = \sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \xi^{(i)}$$

onde, para cada $i = 0, 1, \cdots, n$

$$\xi^{(i)} \in S_{n-1}(X) \subset C_{n-1}(X)$$

denota a i-ésima face de ξ. Sendo ∂ um homomorfismo,

$$\begin{aligned}
\partial^2(\xi) &= \partial[\partial(\xi)] = \partial\left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \xi^{(i)}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial[\xi^{(i)}] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j [\xi^{(i)}]^{(j)} \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} [\xi^{(i)}]^{(j)} + \sum_{0 \leq i \leq j < n} (-1)^{i+j} [\xi^{(i)}]^{(j)}
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.1,

$$\sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} [\xi^{(i)}]^{(j)} = \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} [\xi^{(j)}]^{(i-1)}.$$

Se trocarmos $i - 1$ por j e j por i, o membro esquerdo da igualdade acima torna-se

$$- \sum_{0 \leq i \leq j < n} (-1)^{i+j} [\xi^{(i)}]^{(j)}.$$

Portanto as duas somas em $\partial^2(\xi)$ cancelam uma com a outra. Isto prova que

$$\partial^2(\xi) = 0$$

para cada $\xi \in S_n(X)$. Sendo $S_n(X)$ gerador de $C_n(X)$, isto implica que

$$\partial^2 = 0$$

$\square$

A Proposição 1.2 nos diz que a sequência

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

satisfaz

$$Im\,(\partial_{n+1}) \subset Ker\,(\partial_n).$$

Vamos chamá-la de *complexo de cadeia singular* do espaço X e denotaremos pelo símbolo $C(X)$.

Os elementos do grupo $C_n(X)$ são chamados de *cadeia singular n-dimensional* no espaço X e o grupo $C_n(X)$ é chamado de *grupo de cadeia singular n-dimensional* do espaço X. Para cada cadeia $\gamma \in C_n(X)$, o elemento $\partial\gamma \in C_{n-1}(X)$ é chamado de *fronteira da cadeia* γ.

Agora, considere um subespaço arbitrário A de um dado espaço X. Sendo $S_n(A)$ um subconjunto de $S_n(X)$, segue que $C_n(A)$ é subgrupo de $C_n(X)$ gerado pelo conjunto $S_n(A)$.

O grupo quociente

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$$

é chamado de *grupo de cadeia singular n-dimensional* do par topológico (X, A).

Os elementos de $C_n(X, A)$ são chamados de *n-cadeias singulares* de (X, A) ou *n-cadeias singulares de X módulo A*. Sendo $C_n(A)$ o subgrupo de $C_n(X)$ gerado por $S_n(A)$, segue que $C_n(X, A)$ é isomorfo ao subgrupo de $C_n(X)$ gerado por $S_n(X)/S_n(A)$.

Podemos verificar, sem dificuldades, que o operador fronteira

$$\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

aplica o subgrupo $C_n(A)$ de $C_n(X)$ no subgrupo $C_{n-1}(A)$ de $C_{n-1}(X)$. Logo, ∂ induz um homomorfismo do grupo quociente $C_n(X, A)$ no grupo quociente $C_{n-1}(X, A)$ o qual ainda denotaremos por

$$\partial : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A).$$

Note que, para $z \in C_n(X)$,

$$\partial(z + C_n(A)) = \partial(z) + C_{n-1}(A)$$

Então $\partial^2 = 0$ é também satisfeita. Sendo assim, obtemos uma sequência

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial} C_n(X,A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X,A) \longrightarrow \cdots$$

a qual nos referimos como sendo o *complexo de cadeia singular* do par topológico (X, A) e denotaremos pelo símbolo $C(X, A)$. Em particular, se $A = \emptyset$

$$C_n(A) = 0, \quad C_n(X, \emptyset) = C_n(X) \;\text{ e }\; C(X, \emptyset) = C(X).$$

1.2.3 Grupos de homologia singular

Seja (X, A) um par topológico e considere $C(X, A)$ seu complexo de cadeia singular.

Para cada inteiro n, o núcleo do operador fronteira

$$\partial_n : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$$

é chamado de *grupo dos cíclos singulares* n-dimensional de (X, A) sendo denotado por $Z_n(X, A)$, isto é,

$$Z_n(X, A) = \ker(\partial_n).$$

Por outro lado, a imagem do operador

$$\partial_{n+1} : C_{n+1}(X, A) \to C_n(X, A)$$

é chamado de *grupo das fronteiras singulares* n-dimensional de (X, A) sendo denotado por $B_n(X, A)$, isto é,

$$B_n(X, A) = Im\,(\partial_{n+1}).$$

Segue, da Proposição 1.2, que a inclusão

$$B_n(X, A) \subset Z_n(X, A)$$

é valida. O grupo quociente

$$H_n(X, A) = Z_n(X, A)/B_n(X, A)$$

é chamado de *grupo de homologia singular* n-dimensional do par topológico (X, A). Em particular, se $A = \emptyset$, o complexo de cadeias $C(X, \emptyset)$ reduz-se ao complexo de cadeias $C(X)$. Neste caso especial, o grupo quociente é denotado por

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$$

sendo chamado de *grupo de homologia singular* do espaço topológico X. Desde que $C_n(X, A) = 0$ para cada $n < 0$, a seguinte proposição é óbvia

Proposição 1.3 *Para cada par topológico (X, A) e cada inteiro $n < 0$, temos $H_n(X, A) = 0$.*

Para o caso $n = 0$, $dim\, H_0(X)$ é o número de componentes conexas por arcos de X. Mais precisamente vale o seguinte.

Teorema 1.1 *(ver [6], p. 214) O grupo de homologia singular 0-dimensional $H_0(X)$ de um espaço topológico X é isomorfo ao grupo abeliano livre $Free[\pi_0(X)]$ gerado pelo conjunto $\pi_0(X)$ de todas as componentes conexas por arcos do espaço X.*

1.2.4 Homomorfismo induzido

Sejam (X, A) e (Y, B) pares topológicos e considere uma aplicação de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$.

Para cada $n \geq 0$, f induz uma função $S_n(f) : S_n(X) \to S_n(Y)$ definida por

$$[S_n(f)](\xi) = f \circ \xi : \Delta_n \to Y$$

para cada simplexo singular n-dimensional $\xi : \Delta_n \to X$ em X. Sendo $f(A) \subset B$, segue que $S_n(f)$ leva um elemento de $S_n(A)$ em um elemento de $S_n(B)$.

Sendo $C_n(X)$ o grupo abeliano livre gerado por $S_n(X)$, a função

$$S_n(f) : S_n(X) \to S_n(Y)$$

estende-se a um único homomorfismo

$$C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$$

Desde que $S_n(f)$ leva $S_n(A)$ em $S_n(B)$, então $C_n(f)$ leva $C_n(A)$ em $C_n(B)$. Para cada inteiro negativo n, temos $C_n(X) = 0$ e $C_n(Y) = 0$, neste caso $C_n(f)$ denota o homomorfismo trivial. Portanto o homomorfismo

$$C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$$

é definido para todo inteiro n.

Lema 1.2 *O retângulo*

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_X} & C_{n-1}(X) \\ {\scriptstyle C_n(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_{n-1}(f)} \\ C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_Y} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

de homomorfismos, onde ∂_X *e* ∂_Y *representam os operadores fronteira, é comutativo, isto é*

$$\partial_Y \circ C_n(f) = C_{n-1}(f) \circ \partial_X.$$

Demonstração: Se $n \leq 0$, o lema é óbvio, pois $C_{n-1}(Y) = 0$. Desta forma, podemos supor que $n > 0$. Seja $\xi : \Delta_n \to X$ um simplexo singular n-dimensional em X. Então,

$$[C_n(f)](\xi) = f \circ \xi$$

implicando que

$$[\partial_Y \circ C_n(f)](\xi) = \sum (-1)^i f \circ \xi \circ k_i.$$

Por outro lado,

$$\partial_X(\xi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\xi \circ k_i)$$

donde segue que

$$\begin{aligned} [C_{n-1}(f) \circ \partial_X](\xi) &= C_{n-1}(f) \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\xi \circ k_i) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [C_{n-1}(f)](\xi \circ k_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f \circ \xi \circ k_i \end{aligned}$$

e portanto

$$[\partial_Y \circ C_n(f)](\xi) = [C_{n-1}(f) \circ \partial_X](\xi)$$

para cada $\xi \in S_n(X)$. Sendo $S_n(X)$ gerador de $C_n(X)$, o lema está demonstrado. □

Podemos verificar, sem dificuldades, que o homomorfismo

$$C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$$

aplica o subgrupo $C_n(A)$ no subgrupo $C_n(B)$. Isto induz um homomorfismo do grupo quociente $C_n(X,A)$ no grupo quociente $C_n(Y,B)$ o qual denotamos ainda por $C_n(f)$.

A seguinte proposição é uma consequência direta do Lema 1.2.

Proposição 1.4 *O retângulo*

$$\begin{array}{ccc} C_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_X} & C_{n-1}(X,A) \\ {\scriptstyle C_n(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_{n-1}(f)} \\ C_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial_Y} & C_{n-1}(Y,B) \end{array}$$

de homomorfismos, onde ∂_X *e* ∂_Y *representam os operadores fronteira, é comutativo, isto é*

$$\partial_Y \circ C_n(f) = C_{n-1}(f) \circ \partial_X$$

Portanto, obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(X,A) & \xrightarrow{\partial_X} & C_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_X} & C_{n-1}(X,A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle C_{n+1}(f)}\downarrow & & {\scriptstyle C_n(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_{n-1}(f)} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y,B) & \xrightarrow{\partial_Y} & C_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial_Y} & C_{n-1}(Y,B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Aqui as duas linhas horizontais são os complexos de cadeia $C(X,A)$ e $C(Y,B)$. De acordo com a Proposição 1.4, os retângulos acima são comutativos. Por este motivo, a sequência de homomorfismos

$$C(f) := \{C_n(f)/ \;\; n \in \mathbb{Z}\}$$

é chamado de *Transformação de Cadeia* induzida pela aplicação $f : (X,A) \to (Y,B)$.

Proposição 1.5 *Para cada inteiro* n*, o homomorfismo*

$$C_n(f) : C_n(X,A) \to C_n(Y,B)$$

leva $Z_n(X,A)$ *em* $Z_n(Y,B)$ *e* $B_n(X,A)$ *em* $B_n(Y,B)$.

Demonstração: Seja $z \in Z_n(X,A)$, isto é, $\partial_X(z) = 0$. Assim,

$$\partial_Y[C_n(f)(z)] = C_{n-1}(f)[\partial_X(z)] = 0,$$

implicando que $C_n(f)(z) \in Z_n(Y,B)$. Isto prova que $C_n(f)$ leva $Z_n(X,A)$ em $Z_n(Y,B)$.

Agora, considere $w \in B_n(X, A)$. Por definição, existe um elemento $v \in C_{n+1}(X, A)$ tal que

$$\partial_X(v) = w.$$

Seja

$$u = [C_{n+1}(f)](v) \in C_{n+1}(Y, B).$$

Note que,

$$\begin{aligned} \partial_Y(u) &= \partial_Y[C_{n+1}(f)(v)] \\ &= C_n(f)[\partial_X(v)] = C_n(f)(w). \end{aligned}$$

Consequentemente $C_n(f)(w) \in B_n(Y, B)$, mostrando que $C_n(f)$ leva $B_n(X, A)$ em $B_n(Y, B)$.

□

Segue da Proposição 1.5 que $C_n(f)$ induz um homomorfismo

$$f_* = H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B),$$

definido, para $z \in Z_n(X, A)$, por

$$f_*(z + B_n(X, A)) = C_n(f)(z) + B_n(Y, B),$$

e chamado de *homomorfismo induzido* pela aplicação $f : (X, A) \to (Y, B)$ sobre o grupo de homologia singular n-dimensional $H_n(X, A)$.

As seguintes propriedades dos homomorfismos induzidos seguem diretamente da definição.

Proposição 1.6 *Se $i : (X, A) \to (X, A)$ é a aplicação identidade sobre o par topológico (X, A), então o homomorfismo induzido*

$$i_* = H_n(i) : H_n(X, A) \to H_n(X, A)$$

é o automorfismo identidade sobre $H_n(X, A)$, para cada inteiro n.

Proposição 1.7 *Para aplicações arbitrárias*

$$f : (X, A) \to (Y, B) \quad e \quad g : (Y, B) \to (Z, C)$$

de pares topológicos (X, A), (Y, B) e (Z, C), temos

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f),$$

para cada inteiro n.

1.2.5 Operador fronteira

Seja (X, A) um par topológico. Nosso objetivo nesta seção é construir para cada inteiro n um homomorfismo

$$\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$$

o qual chamaremos de *operador fronteira* sobre $H_n(X, A)$.

Para tal propósito, vamos considerar o grupo de cadeia singular n-dimensional

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$$

e a projeção natural

$$\pi_n : C_n(X) \to C_n(X, A).$$

Em seguida, para construir tal operador fronteira, vamos definir a função

$$\phi : Z_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$$

da seguinte maneira. Seja $z \in Z_n(X, A)$. Desde que π_n leva $C_n(X)$ em $C_n(X, A)$ o qual contém $Z_n(X, A)$, então existe um elemento u de $C_n(X)$ satisfazendo $\pi_n(u) = z$. Considere o elemento

$$\partial(u) \in C_{n-1}(X)$$

onde $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ denota o operador fronteira sobre $C_n(X)$.

Lema 1.3 *O elemento $\partial(u)$ pertence ao subgrupo $C_{n-1}(A)$ de $C_{n-1}(X)$.*

Demonstração: Considere o retângulo comutativo

$$\begin{tikzcd}
C_n(X) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\partial"'] & C_n(X, A) \arrow[d, "\partial"] \\
C_{n-1}(X) \arrow[r, "\pi_{n-1}"] & C_{n-1}(X, A)
\end{tikzcd}$$

de homomorfismos. Por causa desta comutatividade,

$$\pi_{n-1}[\partial(u)] = \partial[\pi_n(u)] = \partial(z) = 0,$$

mostrando que $\partial(u) \in C_{n-1}(A)$. $\square$

Lema 1.4 *O elemento $\partial(u)$ pertence ao subgrupo $Z_{n-1}(A)$ de $C_{n-1}(A)$.*

Demonstração: Como o operador fronteira sobre $C_{n-1}(A)$ é a restrição do operador fronteira sobre $C_{n-1}(X)$, temos

$$\partial[\partial(u)] = \partial \circ \partial(u) = 0.$$

Logo $\partial(u) \in Z_{n-1}(A)$. $\square$

Considere a projeção natural

$$p : Z_{n-1}(A) \to H_{n-1}(A)$$

de $Z_{n-1}(A)$ sobre seu quociente

$$H_{n-1}(A) = Z_{n-1}(A)/B_{n-1}(A).$$

Lema 1.5 *O elemento $p[\partial(u)]$ de $H_{n-1}(A)$ é independente da escolha de $u \in C_n(X)$ e portanto depende somente do elemento $z \in Z_n(X, A)$.*

Demonstração: Sejam u e v elemetos de $C_n(X)$ satisfazendo

$$\pi_n(u) = z = \pi_n(v).$$

O nosso objetivo é mostrar que

$$p[\partial(u)] = p[\partial(v)].$$

Para tal propósito, note que $(u - v) \in C_n(X)$ e

$$\pi_n(u - v) = \pi_n(u) - \pi_n(v) = z - z = 0,$$

logo $u - v$ pertence ao subgrupo $C_n(A)$ de $C_n(X)$.

Isto implica que o elemento $\partial(u - v)$ pertence a $B_{n-1}(A)$ e então

$$p[\partial(u)] - p[\partial(v)] = p[\partial(u - v)] = 0,$$

mostrando que $p[\partial(u)] = p[\partial(v)]$ $\square$

Segue do Lema 1.5, que podemos definir a função

$$\begin{array}{rcl} \phi : Z_n(X, A) & \to & H_{n-1}(A) \\ z & \longmapsto & \phi(z) = p[\partial(u)] \end{array}$$

para qualquer $u \in C_n(X)$ satisfazendo $\pi_n(u) = z$.

Lema 1.6 *A função ϕ é um homomorfismo de $Z_n(X, A)$ em $H_{n-1}(A)$.*

Demonstração: Sejam $y, z \in Z_n(X, A)$. Escolha dois elementos $u, v \in C_n(X)$ satisfazendo $\pi_n(u) = y$ e $\pi_n(v) = z$. Por definição,

$$\phi(y) = p[\partial(u)] \ \text{ e } \ \phi(z) = p[\partial(v)].$$

Desde que $\pi_n(u + v) = y + z$,

$$\phi(y + z) = p[\partial(u + v)] = p[\partial(u)] + p[\partial(v)] = \phi(y) + \phi(z).$$

Portanto ϕ é um homomorfismo.

□

Lema 1.7 *O núcleo de ϕ contém o subgrupo $B_n(X, A)$ de $Z_n(X, A)$.*

Demonstração: Seja $z \in B_n(X, A)$. Pela definição de $B_n(X, A)$, existe um elemento $y \in C_{n+1}(X, A)$ com $\partial(y) = z$. Desde que π_{n+1} leva $C_{n+1}(X)$ em $C_{n+1}(X, A)$, existe um elemento $w \in C_{n+1}(X)$ satisfazendo $\pi_{n+1}(w) = y$. Seja $u = \partial(w)$, por causa da comutatividade do retângulo

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}(X) \arrow[r, "\pi_{n+1}"] \arrow[d, "\partial"'] & C_{n+1}(X, A) \arrow[d, "\partial"] \\
C_n(X) \arrow[r, "\pi_n"] & C_n(X, A)
\end{tikzcd}$$

temos

$$\pi_n(u) = \pi_n(\partial(w)) = \partial[\pi_{n+1}(w)] = \partial(y) = z.$$

De acordo com a definição de ϕ,

$$\phi(z) = p[\partial(u)] = p[\partial^2(w)] = p(0) = 0.$$

Isto completa a prova do Lema 1.7. □

Por causa do Lema 1.7, o homomorfismo

$$\phi : Z_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$$

induz um homomorfismo

$$\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$$

o qual é chamado de *operador fronteira* sobre o grupo de homologia singular $H_n(X, A)$.

Agora, vamos considerar uma aplicação de pares arbitrária

$$f : (X, A) \to (Y, B) \ \text{ e } \ g = f|_A : A \to B.$$

Temos a seguinte proposição.

Proposição 1.8 *Para cada inteiro n, o retângulo*

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ H_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

é comutativo, isto é,

$$\partial \circ f_* = g_* \circ \partial$$

Demonstração: Seja x um elemento arbitrário do grupo $H_n(X, A)$ e a projeção natural

$$p : Z_n(X, A) \to H_n(X, A).$$

Então, existe um elemento $z \in Z_n(X, A)$ com $p(z) = x$. Desde que o homomorfismo π_n leva $C_n(X)$ em $C_n(X, A)$ e que $Z_n(X, A)$ está contido em $C_n(X, A)$, existe um elemento $u \in C_n(X)$ tal que $\pi_n(u) = z$. Sejam

$$v = [C_n(h)](u) \ \text{ e } \ w = [C_n(f)](z)$$

onde $h : X \to Y$ denota a aplicação definida por f. Por causa da comutatividade do retângulo

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\pi_n} & C_n(X,A) \\ {\scriptstyle C_n(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_n(f)} \\ C_n(Y) & \xrightarrow{\omega_n} & C_n(Y,B) \end{array}$$

onde ω_n denota a projeção natural, temos

$$\begin{aligned} \omega_n(v) &= \omega_n[C_n(h)(u)] \\ &= C_n(f)[\pi_n(u)] \\ &= [C_n(f)](z) = w \end{aligned}$$

Por outro lado, da comutatividade do retângulo

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "C_n(h)"'] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "C_{n-1}(h)"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

obtemos

$$C_{n-1}(h)[\partial(u)] = \partial[C_n(h)(u)] = \partial(v).$$

Desde que $\partial(u) \in C_{n-1}(A)$, pelo Lema 1.3

$$\partial(v) = C_{n-1}(g)[\partial(u)].$$

Agora, por definição, $\partial(x)$ é o elemento de $H_{n-1}(A)$ que contém o ciclo singular

$$\partial(u) \in Z_{n-1}(A).$$

Portanto, segue que $g_*[\partial(x)]$ é o elemento de $H_{n-1}(B)$ que contém o ciclo singular

$$[C_n(f)](z) = w \in Z_n(Y, B).$$

Desde que $\omega_*(v) = w$, segue da definição que $\partial[f_*(x)]$ é o elemento de $H_{n-1}(B)$ que contém o ciclo singular

$$\partial(v) = C_{n-1}(g)[\partial(u)],$$

isto prova que $g_*[\partial(x)] = \partial[f_*(x)]$. Como x é um elemento arbitrário de $H_n(X, A)$, fica completa a prova da Proposição 1.8. $\square$

1.2.6 Sequência de homologia singular

Seja (X, A) um par topológico. Considere as aplicações inclusões

$$i : A \to X \quad \text{e} \quad j : X \to (X, A).$$

De acordo com a Seção 1.2.4, estas inclusões induzem homomorfismos

$$i_* : H_n(A) \to H_n(X)$$

e

$$j_* : H_n(X) \to H_n(X, A),$$

para cada inteiro n. Temos também o operador fronteira

$$\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$$

definido, na seção anterior, para cada inteiro n.

Obtemos a seguinte sequência

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

chamada de *sequência de homologia singular do par* (X, A).

Teorema 1.2 *A sequência de homologia singular do par* (X, A) *é exata.*

Demonstração: Vamos dividir a prova em seis partes:

(1) $Im(i_*) \subset Ker(j_*)$;

(2) $Im(j_*) \subset Ker(\partial)$;

(3) $Im(\partial) \subset Ker(i_*)$;

(4) $Ker(j_*) \subset Im(i_*)$

(5) $Ker(\partial) \subset Im(j_*)$

(6) $Ker(i_*) \subset Im(\partial)$

Prova de (1). Estamos interessados na seguinte parte

$$H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A)$$

da sequência. Seja α um elemento de $H_n(X)$ na imagem $Im(i_*)$ do homomorfismo induzido i_*. Então, pela definição de $Im(i_*)$, existe um elemento β de $H_n(A)$ satisfazendo

$$i_*(\beta) = \alpha.$$

Escolha um ciclo singular

$$z \in \beta \subset C_n(A).$$

Pela definição de i_*,

$$[C_n(i)](z) \in \alpha \subset C_n(X).$$

Então, pela definição de j_*,

$$C_n(j)[C_n(i)(z)] \in j_*(\alpha) \subset C_n(X, A).$$

Agora, desde que

$$C_n(i) : C_n(A) \to C_n(X)$$

é o homomorfismo inclusão e

$$C_n(j) : C_n(X) \to C_n(X, A)$$

é a projeção natural, segue que

$$C_n(j)[C_n(i)(z)] = 0 \in C_n(X, A)$$

Isto implica que

$$j_*(\alpha) = 0 \in H_n(X, A)$$

e então $\alpha \in Ker(j_*)$. Sendo α um elemento arbitrário de $Im(i_*)$, isto prova (1).

Prova de (2). Estamos interessados na seguinte parte

$$H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$$

da sequência. Seja α um elemento de $H_n(X, A)$ na imagem $Im(j_*)$ do homomorfismo induzido j_*. Então, pela definição de $Im(\partial_*)$, existe um elemento β de $H_n(X)$ com

$$j_*(\beta) = \alpha.$$

Escolha um ciclo singular

$$z \in \beta \subset C_n(X).$$

Pela definição de j_*,

$$[C_n(j)](z) \in \alpha \subset C_n(X, A).$$

Sendo $C_n(j) : C_n(X) \to C_n(X, A)$ a projeção natural, segue da definição de operador fronteira $\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ que

$$\partial(z) \in \partial(\alpha) \subset C_{n-1}(A).$$

Sendo $z \in Z_n(X)$, temos $\partial(z) = 0$. Isto implica

$$\partial(\alpha) = 0 \in H_{n-1}(A),$$

e então $\alpha \in Ker\partial$. Sendo α um elemento arbitrário de $Im(j_*)$, isto prova (2).

Prova de (3). Estamos interessados na seguinte parte

$$H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X)$$

da sequência. Seja α um elemento de $H_{n-1}(A)$ na imagem $Im(\partial)$ do operador fronteira ∂. Então, pela definição de $Im(\partial)$, existe um elemento $\beta \in H_n(X, A)$ satisfazendo

$$\partial(\beta) = \alpha.$$

Escolha um ciclo singular

$$z \in \beta \subset C_n(X, A).$$

Sendo a projeção natural

$$\pi_n = C_n(j) : C_n(X) \to C_n(X, A)$$

um epimorfismo, existe um elemento u de $C_n(X)$ satisfazendo

$$\pi_n(u) = z.$$

Pela definição do operador fronteira ∂

$$\partial(u) \in \alpha \subset C_{n-1}(A).$$

Sendo

$$C_{n-1}(i) : C_{n-1}(A) \to C_{n-1}(X)$$

o homomorfismo inclusão, segue da definição de i_* que

$$\partial(u) \in i_*(\alpha) \subset C_{n-1}(X).$$

Sendo $\partial(u) \in B_{n-1}(X)$,

$$i_*(\alpha) = 0 \in H_{n-1}(X).$$

Prova de (4). Estamos interessados na seguinte parte

$$H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A)$$

da sequência. Seja α um elemento de $H_n(X)$ pertencendo ao $Ker(j_*)$. Escolha um ciclo singular

$$z \in \alpha \subset C_n(X).$$

Sendo $j_*(\alpha) = 0$,

$$\pi_n(z) = [C_n(j)](z) \in B_n(X, A).$$

Assim, existe um elemento $y \in C_{n+1}(X, A)$ satisfazendo

$$\partial(y) = \pi_n(z)$$

onde ∂ denota o operador fronteira

$$\partial : C_{n+1}(X, A) \to C_n(X, A).$$

Sendo

$$\pi_{n+1} = C_{n+1}(j) : C_{n+1}(X) \to C_{n+1}(X, A)$$

um epimorfismo, existe um elemento $x \in C_{n+1}(X)$ com

$$\pi_{n+1}(x) = y.$$

Então

$$\begin{aligned} \pi_n(z - \partial(x)) &= \pi_n(z) - \pi_n[\partial(x)] \\ &= \pi_n(z) - \partial[\pi_{n+1}(x)] \\ &= \pi_n(z) - \partial(y) = 0. \end{aligned}$$

Isto implica

$$z - \partial(x) \in Z_n(A)$$

Seja β o elemento de $H_n(A)$ o qual contém o ciclo singular $z - \partial(x)$.

Sendo $z \in \alpha$ e $\partial(x) \in B_n(X)$, temos

$$z - \partial(x) \in \alpha \subset C_n(X).$$

Isto implica

$$i_*(\beta) = \alpha,$$

logo $\alpha \in Im(i_*)$. Sendo α um elemento arbitrário de $Ker(j_*)$, isto prova (4).

Prova de (5). Estamos interessados na seguinte parte

$$H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$$

da sequência. Seja α um elemento de $H_n(X, A)$ no kernel $Ker(\partial)$ do operador fronteira ∂. Escolha um ciclo singular

$$z \in \alpha \subset C_n(X, A)$$

Sendo

$$C_n(j) = \pi_n : C_n(X) \to C_n(X, A)$$

um epimorfismo, existe um elemento $u \in C_n(X)$ com

$$\pi_n(u) = z.$$

De acordo com a definição do operador fronteira

$$\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A),$$

temos

$$\partial(u) \in \partial(\alpha) \subset C_{n-1}(A).$$

Sendo $\partial(\alpha) = 0 \in H_{n-1}(A)$, existe um elemento $v \in C_n(A)$ com

$$\partial(u) = \partial(v).$$

Seja

$$y = u - v \in C_n(X).$$

Então,

$$\partial(y) = \partial(u) - \partial(v) = 0.$$

Isto implica $y \in Z_n(X)$. Seja β o elemento de $H_n(X)$ o qual contém o ciclo singular y. Sendo $v \in C_n(A)$, temos

$$\pi_n(y) = \pi_n(u) - \pi_n(v) = \pi_n(u) = z.$$

Isto implica

$$j_*(\beta) = \alpha$$

e então $\alpha \in Im(j_*)$. Sendo α um elemento arbitrário de $Ker(\partial)$, isto prova (5)

Prova de (6). Estamos interessados na seguinte parte

$$H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X)$$

da sequência. Seja α um elemento de $H_{n-1}(A)$ no kenel $Ker(i_*)$ do homomorfismo i_*. Escolha um ciclo singular

$$z \in \alpha \subset C_{n-1}(A).$$

Sendo $i_*(\alpha) = 0$, existe um elemento $u \in C_n(X)$ satisfazendo

$$\partial(u) = z.$$

Seja $y = \pi_n(u) \in C_n(X, A)$. Então,

$$\partial(y) = \partial[\pi_n(u)] = \pi_{n+1}[\partial(u)] = \pi_{n+1}(z) = 0.$$

Isto implica $y \in Z_n(X, A)$. Seja β o elemento de $H_n(X, A)$ o qual contém o ciclo singular y.

Sendo

$$\pi_n(u) = y,$$

segue da definição de $\partial(\beta)$ que

$$z = \partial(u) \in \partial(\beta) \subset C_{n-1}(A).$$

Isto implica

$$\partial(\beta) = \alpha$$

e então $\alpha \in Im(\partial)$. Sendo α um elemento arbitrário de $Ker(i_*)$, isto prova (6). $\square$

Agora, suponha que $B \subset A \subset X$. Considere as aplicações inclusões

$$\bar{i} : (A, B) \to (X, B), \quad \bar{j} : (X, B) \to (X, A), \quad k : A \to (A, B)$$

e o operador fronteira

$$\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A).$$

Definição 1.2 *O homomorfismo $\overline{\partial} = k_* \circ \partial$ é chamado o operador fronteira da tripla (X, A, B):*

$$\overline{\partial} : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B).$$

A sequência

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{\bar{i}_*} H_n(X, B) \xrightarrow{\bar{j}_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\overline{\partial}} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

é chamada *sequência de homologia singular* da tripla (X, A, B).

Usando, como no Teorema 1.2, os três primeiros axiomas da teoria de homologia (que deduzimos acima para a homologia singular), obtemos

Teorema 1.3 *A sequência de homologia da tripla (X, A, B) é exata.*

Finalizamos este capítulo com a seguinte aplicação do Teorema 1.3.

Teorema 1.4 *Sejam $Y \subset B \subset A \subset X$ espaços topológicos e $q \in \mathbb{Z}$. Se*

$$H_q(A, B) \neq 0 \quad e \quad H_q(X, Y) = 0,$$

então

$$H_{q+1}(X, A) \neq 0 \quad ou \quad H_{q-1}(B, Y) \neq 0.$$

Demonstração: Suponha que $H_{q+1}(X, A) = 0$. Como $H_q(X, Y)$ é também trivial, da seguinte porção da sequência exata da tripla (X, A, Y)

$$H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A, Y) \xrightarrow{i_*} H_q(X, Y)$$

segue que

$$H_q(A, Y) = 0.$$

Sendo $H_q(A, B) \neq 0$, da seguinte porção da sequência exata da tripla (A, B, Y)

$$H_q(A, Y) \xrightarrow{j_*} H_q(A, B) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(B, Y)$$

segue que

$$H_{q-1}(B, Y) \neq 0.$$

$\square$

Capítulo 2

Homotopia entre conjuntos de nível

Seja $f \in C^1(X;\mathbb{R})$ uma aplicação definida num aberto X de um espaço de Banach E. Neste capítulo, vamos estudar a existência de homotopias que permitem deformar conjuntos de níveis da função f. Na primeira seção mostra-se como se pode associar a f um campo vetorial regular de modo a se poder resolver o problema de Cauchy associado. Na seção seguinte são recordados alguns fatos sobre equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach e nas demais seções estudamos a existência de tais homotopias, que constituem uma importante ferramentas para o cálculo dos grupos críticos, estudados no Capítulo 4. Os resultados desta seção foram retirados de [11] com exceção do Teorema 2.8, que é devido a Kanishka [20].

2.1 Campos pseudo-gradientes

Uma aplicação h definida em X e com valores num espaço métrico (X_1, d_1) é dita *localmente lipschitziana* se para cada ponto $u \in X$ existirem uma constante $L > 0$ e uma vizinhança U de u tais que $d_1(h(x), h(y)) \leq Ld(x, y)$ para todo $x, y \in U$.

Proposição 2.1 *Sejam $F, G : X \to \mathbb{R}$, $V : X \to E$ aplicações localmente lipschitzianas e $A, B \subseteq X$ subconjuntos fechados, disjuntos e não-vazios. Então,*

(i) as aplicações $F.V$, $F + G$, $F.G$ e F/G são localmente lipschitzianas (esta última, se G nunca se anula);

(ii) a aplicação $\chi : E \to [0, 1]$ dada por $\chi(u) = \dfrac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}$ é localmente lipschitziana;

(iii) se A é compacto, então V é lipschitziana e limitada numa vizinhança de A.

Demonstração: (i) Basta notar que toda aplicação localmente lipschitziana é localmente limitada. Desta forma

$$| F(u)G(u) - F(v)G(v) | \leq | F(u) || G(u) - G(v) | + | G(v) || F(u) - F(v) |$$

e

$$\left| \frac{1}{| G(u) |} - \frac{1}{| G(v) |} \right| \leq \frac{| G(u) - G(v) |}{| G(u) || G(v) |}$$

de onde resultam as conclusões.

(ii) Como χ é quociente de aplicações localmente lipschitzianas, a conclusão segue do item anterior.

(iii) Fixemos uma cobertura finita de bolas abertas, $A \subset U := \cup_i B_{r_i}(u_i)$ e constantes K_i tais que, para todo $u, v \in B_{2r_i}(u_i)$,

$$\|V(u)\| \leq K_i \;\; e \;\; \|V(u) - V(v)\| \leq K_i \|u - v\|.$$

Considere $0 < r < \min_i \{r_i\}$, $\;r < 2$, $\;K_0 := \max_i \{K_i\}$ e $K := 2K_0/r > K_0$. Então, se $u \in U$, tem-se $\|u - u_i\| \leq r_i$ para algum i, pelo que $\|V(u)\| \leq K_0 < K$. Além disso, se $v \in U$ é tal que $\|v - u\| \leq r_i$, vem $\|v - u_i\| \leq 2r_i$ e $\|V(u) - V(v)\| \leq K_i \|u - v\| \leq K\|u - v\|$; por outro lado, se $\|u - v\| \geq r_i \geq r$, vem

$$\|V(u) - V(v)\| \leq 2K_0 = Kr \leq K\|u - v\|,$$

e isto mostra que V é limitada e lipschitziana em U. $\square$

Observe que a aplicação χ construida acima não é, em geral, lipschitziana; isto ocorre se, e somente se, $d(A, B) := \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y) > 0$.

Convém também ter presente o seguinte fato, dados dois subconjuntos fechados e disjuntos $A, B \subseteq X$, é sempre possível encontrar um conjunto fechado $\tilde{A}$ tal que

$$A \subseteq int(\tilde{A}) \subseteq \tilde{A} \subseteq X \setminus B.$$

Basta escolher $\tilde{A} := \{u : d(u, A) \leq d(u, B)\}$.

Agora, vamos construir aplicações localmente lipschitzianas definidas no aberto $X \setminus K$ e suas extensões a todo o aberto X. Designaremos por K o conjunto dos pontos críticos de f.

Proposição 2.2 *Considere uma aplicação localmente lipschitziana $G : X \setminus K \to E$ e dois subconjuntos fechados e disjuntos $A, B \subseteq X$ com $K \subseteq A$. Então, para cada fechado $\tilde{A}$ tal que $A \subseteq int(\tilde{A}) \subseteq \tilde{A} \subseteq X \setminus B$, existem duas aplicações localmente lipschitzianas $\chi : X \to [0,1]$ e $F : X \to E$ tais que*

(i) $\chi|_{\tilde{A}} \equiv 0, \quad \chi|_B \equiv 1$;

(ii) $F(u) = \begin{cases} \chi(u)G(u) & se \quad u \in X \setminus \tilde{A} \\ 0 & se \quad u \in \tilde{A}. \end{cases}$

Demonstração: Seja χ a aplicação dada pela Proposição 2.1 (ii), associada aos dois conjuntos fechados e disjuntos $\tilde{A}$ e B. Vamos fixar $u_0 \in X$ e provar que F é lipschitziana numa vizinhança de u_0. Pela Proposição 2.1 (i), podemos supor que u_0 é um ponto de fronteira de $\tilde{A}$. De acordo com a mesmo proposição, podemos fixar uma bola $B_r(u_0) \subset X \setminus K$ na qual a aplicação χG é lipschitziana. Sendo $F = \chi G$, isto completa a demonstração.

Na demonstração acima, consideramos os conjuntos A e B não vazios, caso $A = \emptyset = B$ ou $A = \emptyset \neq B$, o resultado é trivial se escolhermos $\chi \equiv 0$ ou $\chi \equiv 1$, respectivamente. $\square$

No que segue, vamos usar o fato que todo espaço métrico X é *paracompacto*, isto é, toda cobertura aberta $X = \cup_{i \in I} X_i$ admite um refinamento localmente finito, ou melhor, $X = \cup_{j \in J} W_j$ onde cada aberto W_j está contido em algum X_i e cada ponto de X admite uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de conjuntos W_i.

Lema 2.1 *sejam $\alpha, \beta \in C(X \setminus K; \mathbb{R})$ e suponha que para cada $x \in X \setminus K$ existe um vetor $V_x \in X$ tal que*

$$\alpha(x) < \langle f'(x), V_x \rangle \leq \|f'(x)\| \|V_x\| < \beta(x).$$

Então, existe uma aplicação localmente lipschitziana $V : X \setminus K \to E$ tal que

$$\alpha(u) < \langle f'(u), V(u) \rangle \leq \|f'(u)\| \|V(u)\| < \beta(u)$$

para todo $u \in X \setminus K$.

Demonstração: Por continuidade, existe uma vizinhança U_x de x tal que

$$\alpha(y) < \langle f'(y), V_x \rangle \leq \|f'(y)\| \|V_x\| < \beta(y)$$

para todo o $y \in U_x$. Seja (W_i) um refinamento localmente finito da família $(U_x)_x$ e considere, para cada i, a aplicação lipschitziana $\rho_i(u) := d(u, X \setminus W_i)$. Para cada $u \in X \setminus K$, $\sum_i \rho_i(u)$ é uma soma finita e não nula.

Para cada i, fixemos x_i tal que $W_i \subseteq U_{x_i}$ e seja $v_i = V_{x_i}$ o vetor dado na hipótese do lema. Definimos então

$$V(u) := \frac{1}{\sum_i \rho_i(u)} \sum_i \rho_i(u) v_i.$$

Para cada u, a restrição de V a uma vizinhança pequena de u é uma combinação convexa (finita) de vetores v_i. Pela Proposição 2.1 (i), conclui-se que V é localmente lipschitziana. Para cada um desses vetores v_i, tem-se

$$\alpha(u) < \langle f'(u), v_i \rangle \leq \|f'(u)\| \|v_i\| < \beta(u),$$

donde

$$\alpha(u) \leq \langle f'(u), V(u) \rangle \leq \|f'(u)\| \|V(u)\| \leq \beta(u).$$

□

Proposição 2.3 *Dadas duas constantes $0 < \alpha < \beta$, existe uma aplicação localmente lipschitziana $V : X \setminus K \to E$ tal que*

$$\alpha \|f'(u)\|^2 \leq \langle f'(u), V(u) \rangle \leq \|f'(u)\| \|V(u)\| \leq \beta \|f'(u)\|^2,$$

para todo $u \in X \setminus K$.

Demonstração: Dado $x \in X \setminus K$, uma vez que $2\alpha/(\alpha + \beta) < 1$ e $\|f'(x)\| \neq 0$, existe $w_x \in E$ com norma $\|w_x\| = 1$ verificando

$$\langle f'(x), w_x \rangle > \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} \|f'(x)\|.$$

Seja $V_x := \frac{\alpha+\beta}{2} \|f'(x)\| w_x$. Então,

$$\alpha \|f'(x)\|^2 < \langle f'(x), V_x \rangle \quad e \quad \|V_x\| < \beta \|f'(x)\|.$$

A conclusão resulta então do Lema 2.1, com $\alpha(x) := \alpha \|f'(x)\|^2$ e $\beta(x) := \beta \|f'(x)\|^2$. □

Chamamos *campo pseudo-gradiente* (associado a f, α, β) a uma aplicação localmente lipschitziana V satisfazendo as desigualdades anteriores. Observe-se que se X é um aberto de um espaço de Hilbert e $f \in C^2(X;\mathbb{R})$, podemos considerar V a aplicação $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\nabla f$ (onde ∇f é o gradiente de f). Será conveniente no entanto utilizar uma variante da proposição anterior, que corresponde no quadro Hilberteano a tomar o campo $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}$.

Proposição 2.4 *Dadas duas constantes $0 < \alpha < \beta$ existe uma aplicação localmente lipschitziana $V : X \setminus K \to E$ tal que*

$$\alpha \leq \langle f'(u), V(u)\rangle \leq \|f'(u)\|\|V(u)\| \leq \beta,$$

para todo o $u \in X \setminus K$.

Demonstração: Para cada $x \in X \setminus K$ considere um vetor $w_x \in E$, como na demonstração da Proposição 2.3. Então, o vetor $V_x := \dfrac{\alpha+\beta}{2}\|f'(x)\|^{-1}w_x$ satisfaz

$$\alpha < \langle f'(x), V_x\rangle \quad e \quad \|V_x\| < \beta\|f'(x)\|^{-1}.$$

A conclusão resulta do Lema 2.1, com $\alpha(x) := \alpha$ e $\beta(x) := \beta$. □

A construção anterior pode ser adaptada a situação particulares, em que seja conhecida informações adicionais sobre o funcional:

Proposição 2.5 *Sejam E um espaço de Hilbert, $g \in C^1(X;\mathbb{R})$, $A \subseteq E$ um subconjunto fechado e $\theta < 1$ uma constante positiva, tais que*

$$g'(u) \neq 0 \quad e \quad \langle f'(u), g'(u)\rangle \leq \theta\|f'(u)\|\|g'(u)\|, \quad \forall u \in A.$$

Então, existem uma aplicação localmentte lipschitziana $V : X \setminus K \to E$ e uma constante $\alpha \in]0,1[$ tais que

$$\alpha \leq \langle f'(u), V(u)\rangle \leq \|f'(u)\|\|V(u)\| \leq 1, \quad \forall u \in X \setminus K$$

e

$$\langle g'(u), V(u)\rangle < 0, \quad \forall u \in A \setminus K.$$

Demonstração: Para cada $x \in X \setminus K$, seja

$$V_x := \frac{1}{2}\frac{f'(x)}{\|f'(x)\|^2} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\|f'(x)\|}\frac{g'(x)}{\|g'(x)\|}$$

onde β é uma constante, $\beta \in]\theta, 1[$ (convenciona-se $\beta = 0$, se $g'(x) = 0$) e se identificou $f'(x)$ e $g'(x)$ com os gradientes $\nabla f(x)$ e $\nabla g(x)$. Um cálculo simples mostra que

$$\langle g'(x), V_x \rangle < 0, \quad \forall x \in A \setminus K$$

e que

$$\frac{1-\beta}{2} \leq \langle f'(x), V_x \rangle \leq \|f'(x)\| \|V_x\| \leq \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Pode-se então proceder como na demostração do Lema 2.1, com o cuidado de se escolher a vizinhança U_x disjunta de A, para cada $x \notin A$. $\square$

A proposição anterior contém, como caso particular interessante, a situação em que $0 \notin A$ e

$$\langle f'(u), u \rangle \geq -\theta \|u\| \|f'(u)\|, \quad \forall u \in A.$$

Para a escolha da função $g(u) = -\|u\|^2/2$ conclui-se que, neste caso, f admite um campo V satisfazendo $\langle V(u), u \rangle > 0, \quad \forall u \in A \setminus K$.

2.2 O problema de Cauchy

No que segue, enunciamos uma versão do Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach, cuja demonstração pode ser encontrada em [11].

Seja $F : X \to E$ uma aplicação contínua definida num aberto X de um espaço de Banach E e fixemos $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$ e $r > 0$ tal que $B_r(u_0) := \{u \in E : \|u - u_0\| < r\} \subseteq X$. Definimos

$$M := \sup_{u \in B_r(u_0)} \|F(u)\| \quad e \quad K := \sup_{u,v \in B_r(u_0)} \frac{\|F(u) - F(v)\|}{\|u - v\|}$$

Teorema 2.1 *Se $Ml < r$ e $K < +\infty$ então o problema de Cauchy*

$$\dot{\sigma}(t) = F(\sigma(t)), \quad \sigma(t_0) = u_0 \tag{2.1}$$

tem uma solução única $\sigma(\cdot)$ definida em $I := [t_0 - l, t_0 + l]$ e com imagem em $B_r(u_0)$.

Proposição 2.6 *Seja $F : X \to E$ uma aplicação localmente lipschitziana definida num aberto $X \subset E$. Então, para cada $u \in X$, o problema de Cauchy*

$$\dot{\sigma}(t) = F(\sigma(t)), \quad \sigma(0) = u$$

tem uma solução única definida num intervalo maximal $]\omega_-(u), \omega_+(u)[$ com $\omega_-(u) < 0 < \omega_+(u)$.

O conjunto $\Omega := \{(t,u) : u \in X, t \in]\omega_-(u), \omega_+(u)[\}$ *é aberto e a aplicação* $\sigma : \Omega \to X$ *é localmente lipschitziana. Além disso, se para algum* $u \in X$ *o conjunto* $\sigma(\cdot, u)$ *varia num fechado de* X*, então*

$$\omega_+(u) < +\infty \Rightarrow \int_0^{\omega_+(u)} \|F(\sigma(s))\| ds = +\infty.$$

Demonstração: Do Teorema 2.1 resulta que para cada $u \in X$ existe uma solução única do problema $\dot{\sigma} = F(\sigma), \quad \sigma(0) = u$, definida numa vizinhança fechada de 0 , $]-l(u), l(u)[$ com $l(u) > 0$. Definindo

$$\omega_+(u) := \sup\{t : \quad (2.1) \text{ admite solução em } \ [0,t]\},$$

$$\omega_-(u) := \sup\{t : \quad (2.1) \text{ admite solução em } \ [t,0]\},$$

obtém-se facilmente a primeira afirmação da proposição.

Fixemos agora $(t_0, u_0) \in \Omega$ com $t_0 > 0$ e $t_1 \in]t_0, \omega_+(u_0)[$. No que segue, vamos mostrar que se u está suficientemente próximo de u_0, então $t_1 < \omega_+(u)$. Um argumento semelhante aplica-se ao intervalo $]\omega_-(u_0), t_0[$ e isto prova em particular que o conjunto Ω é aberto.

Considere o conjunto compacto $C := \sigma([0,t_1] \times \{u_0\})$. De acordo com a Proposição 2.1 (iii), podemos fixar constantes positivas r, K, com $r < 1$, de tal modo que

$$u, v \in U := \{u : d(u, C) < 2r\} \Rightarrow \|F(u)\| \leq K, \quad \|F(u) - F(v)\| \leq K\|u - v\|.$$

Fixe $l < r/(2K)$ tal que $t_1/l \in \mathbb{N}$. Do Teorema 2.1 resulta que, se $\|u - \sigma(\alpha, u_0)\| < r$ para algum $\alpha \leq t_1$, o problema

$$\dot{\eta}(t) = F(\eta(t)), \quad \eta(\alpha) = u$$

admite uma solução única, definida no intervalo $[\alpha - l, \alpha + l]$ e com imagem em U (note que $B_r(u) \subset B_{2r}(\sigma(\alpha, u_0)) \subset U$).

Seja então $k := t_1/l \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\|u - u_0\| \leq r/2^k$. De acordo com a observação anterior, $\sigma(t,u)$ está bem definida em $[0,l]$, tem imagem em U e, para todo o $t \in [0,l]$,

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(t,u_0)\| = \left\| u - u_0 + \int_0^t (F(\sigma(s,u)) - F(\sigma(s,u_0)))ds \right\|.$$

Assim,

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(t,u_0)\| \leq \|u - u_0\| + lK \sup_s \|\sigma(s,u) - \sigma(s,u_0)\|,$$

desde que $lK < 1/2$, temos

$$\|\sigma(l,u)) - \sigma(l,u_0)\| \leq \sup_s \|\sigma(s,u)) - \sigma(s,u_0)\| \leq 2\|u-u_0\| \leq 2r/2^k \leq r.$$

Nesse caso, podemos construir uma solução do problema $\dot{\eta} = F(\eta), \quad \eta(l) = \sigma(l,u)$, definida em $[0,2l]$ e com imagem em U. Por unicidade, tem-se $\eta(t) \equiv \sigma(t,u)$, donde segue que $2l < w_+(u)$. Por recorrência, é possivel construir $\sigma(\cdot,u)$ em $[(p-1)l, pl]$ com valores em U e satisfazendo

$$\|\sigma(pl,u)) - \sigma(pl,u_0)\| \leq 2^p\|u-u_0\| \leq 2^{p-k}r \leq r.$$

Quando $p = k$, conclui-se que $t_1 = kl < \omega_+(u)$, mostrando que Ω é aberto.

O argumento anterior mostrou, em particular, que para $u, v \in B_\epsilon(u_0)$ com $\epsilon := r/2^k$, temos

$$\|F(\sigma(s,u))\| \leq K \text{ e } \|F(\sigma(s,u)) - F(\sigma(s,v))\| \leq K\|u-v\|,$$

para todo o $s \in [0,t_1]$. Portanto, para todo $t, t' \in [0,t_1]$,

$$\|\sigma(t',v) - \sigma(t,v)\| \leq \left| \int_t^{t'} \|\dot{\sigma}(s,v)\| ds \right| = \left| \int_t^{t'} \|F(\sigma(s,v))\| ds \right| \leq K \mid t - t' \mid .$$

Por outro lado,

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(t,v)\| \leq \|u-v\| + \int_0^t \|F(\sigma(s,u)) - F(\sigma(s,v))\| ds,$$

logo

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(t,v)\| \leq \|u-v\| + K \int_0^t \|\sigma(s,u) - \sigma(s,v)\| ds$$

e a desigualdade de Gronwall (ver Teorema $C.5$ do Apêndice C) implica

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(t,v)\| \leq \|u-v\| e^{Kt} \leq \|u-v\| e^{Kt_1}.$$

Consequentemente,

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(t',v)\| \leq \|\sigma(t,u) - \sigma(t,v)\| + \|\sigma(t,v) - \sigma(t',v)\|$$

e então

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(t',v)\| \leq e^{Kt_1}\|u-v\| + K \mid t - t' \mid,$$

isto prova que σ é localmente lipschitziana.

Por fim, suponhamos que $\sigma \equiv \sigma(t,u)$ varia num fechado e, por contradição, que

$$\int_0^{\omega_+(u)} \|F(\sigma(s))\|ds = \lim_{t\to\omega_+(u)} \int_0^t \|F(\sigma(s))\|ds < +\infty$$

com $\omega_+(u) < +\infty$. Como

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(s,u)\| \leq \left| \int_s^t \|F(\sigma(\tau))\|d\tau \right|$$

então

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(s,u)\| \leq \left| \int_0^t \|F(\sigma(\tau))\|d\tau - \int_0^s \|F(\sigma(\tau))\|d\tau \right| \to 0$$

quando $s,t \to \omega_+(u)$, existe o limite $\lim\limits_{t\to\omega_+(u)} \sigma(t)$ em X, e isto contradiz a definição de $\omega_+(u)$.

A aplicação σ construída acima é chamada de *fluxo* associado ao campo F.

$\square$

Proposição 2.7 *Seja $F : X \to E$ uma aplicação localmente lipschitziana num aberto $X \subseteq E$. Se o fluxo σ está definido em $\mathbb{R} \times X$, temos:*

(i) *$\sigma(t,\cdot)$ é uma homeomorfismo de X para todo t, e a aplicação $(t,u) \mapsto \sigma^{-1}(t,u) := \sigma_t^{-1}(u)$ é contínua;*

(ii) *para cada compacto $I \subset \mathbb{R}$ e cada fechado $A \subset X$, $\sigma(I \times A)$ é fechado em X.*

Demonstração: A unicidade do problema de Cauchy, implica que $\sigma^{-1}(t,u) = \sigma(-t,u)$ para todo t,u,o que prova (i).

Quanto a (ii), suponhamos que $\sigma(t_n,u_n) \to v \in X$, para alguma sequência $(t_n,u_n) \in I \times A$. Se necessário, passando a uma subsequência, temos $t_n \to t \in I$. Sendo

$$u_n = \sigma(t_n, \sigma(t_n,u_n)) \to \sigma^{-1}(t,v),$$

concluimos que $\sigma^{-1}(t,v) \in A$. Portanto $v = \sigma(t,\sigma(-t,v)) \in \sigma(I \times A)$. $\square$

Proposição 2.8 *Seja $F : X \to E$ uma aplicação localmente lipschitziana definida num aberto $X \subseteq E$ e considere o fluxo $\sigma \equiv \sigma(t,u)$ definido na Proposição* (2.6)*. Se existirem constantes positivas A,B tais que*

$$\|F(u)\| \leq A\|u\| + B, \quad \forall u \in X$$

e o fluxo variar sempre em completos de X, então $\omega_+(u) = +\infty$ para todo $u \in X$, $\sigma(t,\cdot)$ é um homeomorfismo de X para todo t, e $\sigma : [0,+\infty[\times X \to X$ é localmente lipschitziana e transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Demonstração: Seja $u \in X$. Suponhamos, por contradição, que $\omega_+(u) < +\infty$. No intervalo $[0, \omega_+(u)[$, o fluxo $\sigma(\cdot) \equiv \sigma(t, u)$ satisfaz

$$\|\sigma(t)\| \leq \|u\| + \int_0^t \|\dot{\sigma}(s)\| ds \leq \|u\| + A \int_0^t \|\sigma(s)\| ds + B\omega_+(u).$$

Pela desigualdade de Gronwall (ver Teorema $C.5$ do Apêndice C), concluimos que σ tem imagem limitada. Consequentemente, pela hipótese feita, também $F(\sigma)$ tem imagem limitada, e isto contradiz a Proposição 2.6.

Concluimos assim que $\omega_+ = +\infty$, para todo $u \in X$. Do mesmo modo, mostra-se que $\omega_- = -\infty$. Das proposições anteriores resulta que $\sigma : \mathbb{R} \times X \to X$ é localmente lipschitziana, $\sigma(t, \cdot)$ é um homeomorfismo, e o cálculo anterior nos mostra que, para todo o $s \in [0, t]$,

$$\|\sigma(s, u)\| \leq (\|u\| + Bt)e^{At}$$

donde segue que σ transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados. $\square$

2.3 Deformação do tipo gradiente

Uma *homotopia* é uma aplicações contínua $h : [0, 1] \times X \to X$ satisfazendo $h_0(u) = u$, para todo $u \in X$. Dizemos que h é uma *homotopia de homeomorfismos* se $h_t(\cdot) = h(t, \cdot)$ for um homeomorfismo para todo o $t \in [0, 1]$ e a aplicação $(t, u) \mapsto h_t^{-1}(u)$ for contínua.

No que segue, vamos considerar uma aplicação $f \in C^1(X; \mathbb{R})$, onde X é um aberto de um espaço de Banach E. Uma homotopia h_t diz-se *f-decrescente* se, para todo o $u \in X$, a aplicação $f(h(\cdot, u)) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ for decrescente.

Teorema 2.2 *Sejam $a < b$, $\delta > 0$ e $S \subseteq X$ um subconjunto fechado. Suponhamos que*

$$\|f'(u)\| \geq \frac{2(b-a)}{\delta}, \quad \forall u \in S \cap f^{-1}(a, b).$$

Então, dados $\epsilon > 0$ e um subconjunto fechado $S' \subseteq X$ tais que $S \cap S' = \emptyset$ e $f^{-1}([a-\epsilon, b+\epsilon])$ é completo, existe uma homotopia de homeomorfismo f-decrescente e localmente lipschitziana $h_t : X \to X$ tal que

(i) se $u \in f^b$ e $h(t, u) \in S$ para todo $t \in [0, 1]$, então $h_1(u) \in f^a$. Mais geralmente, se $u \in f^b$ e $h(t, u) \in S \cap \{f > a\}$ para todo $t \in [0, s]$, então

$$f(h(s, u)) \leq f(u) - (b-a)s.$$

(ii) $h_t(u) = u$ *se* $u \in A$*, onde*

$$A := \{f \leq a - \epsilon\} \cup \{f \geq b + \epsilon\} \cup \{u : \|f'(u)\| \leq \frac{b-a}{\delta}\} \cup S'.$$

(iii) $d(h_t(u), u) \leq 2\delta t$ *para todo* t, u.

Demonstração: Sejam A o conjunto definido acima, $B := f^{-1}((a,b)) \cap S$ e $V : X \setminus K \to E$ o campo dado pela Proposição 2.4, com $\alpha = 1$ e $\beta = 2$. Considere o fluxo construído a partir do problema de Cauchy

$$\dot{\sigma} = -F(\sigma), \quad \sigma(0) = u \in X,$$

onde $F = \chi V$ é o campo associado a $G = V$ dado pela Proposição 2.2. Da definição de χ, segue que $\|F(u)\| \leq \frac{2\delta}{b-a}$ em X, e a Proposição 2.8 mostra que a aplicação $\sigma : [0, +\infty[\times X \to X$ é localmente lipschitziana, transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados e, para cada $t \geq 0$, $\sigma(t, \cdot)$ é um homeomorfismo em X. Além disso, a aplicação $(t, u) \mapsto \sigma_t^{-1}(u)$ é contínua.

Portanto, a aplicação $\sigma(t, u)$ satisfaz

$$\frac{d}{dt} f(\sigma(t,u)) = \langle f'(\sigma(t,u)), \dot{\sigma}(t,u) \rangle = \langle f'(\sigma(t,u)), -\chi(\sigma(t,u)) V(\sigma(t,u)) \rangle,$$

para cada $u \in X$, ou ainda,

$$\frac{d}{dt} f(\sigma(t,u)) = -\chi(\sigma(t,u)) \langle f'(\sigma(t,u)), V(\sigma(t,u)) \rangle,$$

usando a Proposição 2.4 (com $\alpha = 1$ e $\beta = 2$), obtemos

$$\frac{d}{dt} f(\sigma(t,u)) \leq -\chi(\sigma(t,u)). \tag{2.2}$$

Note que, pela unicidade do problema de Cauchy,

$$u \in \tilde{A} \Leftrightarrow \exists t : \sigma(t,u) \in \tilde{A} \Leftrightarrow \forall t : \sigma(t,u) = u$$

e $f(\sigma(\cdot, u))$ é estritamente decrescente para cada $u \in X \setminus \tilde{A}$.

Observe que , se $\sigma(t,u) \in B$ para todo $t \in [0, s]$, então $\chi(\sigma(t,u)) = 1$. Nessas condições, a desigualdade em (2.2) torna-se

$$\frac{d}{dt} f(\sigma(t,u)) \leq -1,$$

integrando sobre $[0, s]$ e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$f(\sigma(s,u)) - f(\sigma(0,u)) \leq s,$$

ou ainda

$$f(\sigma(s,u)) \leq f(u) - s.$$

Por outro lado, sendo

$$d(\sigma(t,u),u) = \|\sigma(t,u) - \sigma(0,u)\| = \left\| \int_0^t \dot{\sigma}(s,u)ds \right\| \leq \int_0^t \|\dot{\sigma}(s,u)\| ds,$$

sendo $\dot{\sigma} = F(\sigma)$, temos

$$\begin{aligned} d(\sigma(t,u),u) &\leq \int_0^t \|F(\sigma(s,u))\| ds \\ &\leq \frac{2\delta}{b-a} \int_0^1 \chi(\sigma(s,u)) \leq \frac{2\delta}{b-a} t \end{aligned}$$

basta tomar $h(t,u) := \sigma((b-a)t,u)$. □

No que segue, vamos supor que $f^{-1}([a-\epsilon, b+\epsilon])$ é completo, para algum $\epsilon > 0$.

Se, no teorema anterior, considerarmos

$$S := \left\{ u : \|f'(u)\| \geq \frac{2(b-a)}{\delta} \right\}, \quad b = c+\epsilon, \quad a = c-\epsilon \ \text{ e } \ \delta = \sqrt{\epsilon},$$

obtemos

Corolário 2.1 *Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Então, existe uma homotopia de homeomorfismo f-decrescente $h_t : X \to X$ tal que*

(i) se $u \in f^{c+\epsilon}$ e $\|f'(h(t,u))\| \geq 4\sqrt{\epsilon}$ para todo $t \in [0,1]$, então $h_1(u) \in f^{c-\epsilon}$. Mais geralmente, se $c-\epsilon \leq f(h(t,u)) \leq c+\epsilon$ e $\|f'(h(t,u))\| \geq 4\sqrt{\epsilon}$ para todo $t \in [0,s]$, então

$$f(h(s,u)) \leq f(u) - 2\epsilon s;$$

(ii) $h_t(u) = u$, se $\|f'(u)\| \leq 2\sqrt{\epsilon}$ ou $u \notin f^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

(iii) $d(h_t(u),u) \leq 2\sqrt{\epsilon}t$, para todo t, u.

Corolário 2.2 *Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $0 < \epsilon < 1/2$. Então existe uma homotopia de homeomorfismos f-decrescente $h_t : X \to X$ tal que* *(i)* *se* $u \in f^{c+\epsilon}$ *e* $\|f'(h(t,u))\| \geq 4\sqrt{\epsilon}$ *para todo* $t \in [0,1]$, *então* $h_1(u) \in f^{c-\epsilon}$. *Mais geralmente, se* $c-\epsilon \leq f(h(t,u)) \leq c+\epsilon$ *e* $\|f'(h(t,u))\| \geq 4\sqrt{\epsilon}$ *para todo* $t \in [0,s]$, *então*

$$f(h(s,u)) \leq f(u) - s;$$

(ii) $h_t(u) = u$, *se* $\|f'(u)\| \leq 2\sqrt{\epsilon}$ *ou* $u \notin f^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

(iii) $d(h_t(u), u) \leq \min\{t/\sqrt{\epsilon}, 4\sqrt{\epsilon}\}$, *para todo* t, u.

Demonstração: Considere o fluxo σ construído na demonstração do Teorema 2.2, com $a = c-\epsilon$, $b = c+\epsilon$ e $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Temos

$$d(\sigma(t,u),u) \leq \frac{2\sqrt{\epsilon}}{2\epsilon}t = \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Desde que

$$d(\sigma(t,u),u) \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\int_0^1 \chi(\sigma(s,u))ds \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(f(u) - f(\sigma(t,u))) \leq \frac{4\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} = 4\sqrt{\epsilon},$$

podemos definir $h(t,u) := \sigma(t,u)$. □

Para cada $F \subseteq X$ não vazio e $\delta > 0$, denotamos por F_δ a vizinhança

$$F_\delta := \{u \in X : d(u,F) \leq \delta\}.$$

Corolário 2.3 *Sejam* $a < b$, $\delta > 0$ *e dois subconjuntos fechados* $F, G \subseteq X$ *com* $F_\delta \cap G = \emptyset$, *suponhamos que*

$$\|f'(u)\| \geq 4(b-a)/\delta, \quad \forall u \in F_\delta \cap f^{-1}([a,b]).$$

Então, para cada $\epsilon > 0$, *existe uma homotopia de homeomorfismos* f*-decrescente* $h_t : X \to X$ *tal que*

(i) $h_1(f^b \cap F) \subseteq f^a$;

(ii) $h_t(u) = u$, *se* $u \in G$ *ou* $u \notin f^{-1}([a-\epsilon, b+\epsilon])$;

(iii) $d(h_t(u), u) \leq \delta t$, *para todo* t, u.

Demonstração: Aplicando o Teorema 2.2 com $S := F_\delta$ e $S' := G$, se $u \in f^b \cap F$, então de (iii) segue que $h(t,u) \in S$ para todo $t \in [0,1]$, portanto $h_1(u) \in f^a$.

□

Corolário 2.4 *Dadas constantes $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon_0 > 0$ e dois subconjuntos fechados $F, G \subseteq X$ com $d_0 := d(F,G) > 0$, suponhamos que*

$$\|f'(u)\| \geq \eta > 0, \quad \forall u \in F_{\epsilon_0} \cap f^{-1}([c-\epsilon_0, c+\epsilon_0]).$$

Então, existem $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e uma homotopia de homeomorfismos f-decrescente $h_t : X \to X$ tais que

(i) $h_1(f^{c+\epsilon} \cap F) \subseteq f^{c-\epsilon}$;

(ii) $h_t(u) = u$, *se* $u \in G$ *ou* $u \notin f^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

(iii) $d(h_t(u), u) \leq \sqrt{\epsilon}t$, *para todo* t, u.

Demonstração: Note que podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\sqrt{\epsilon} < d_0$ e

$$\|f'(u)\| \geq \frac{8\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}, \quad \forall u \in F_{\sqrt{\epsilon}} \cap f^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]).$$

□

Recordamos a hipótese considerada no Corolário 2.3 (ou Corolário 2.4), segundo a qual $f^{-1}([a-\epsilon, b+\epsilon])$ é completo. Deste modo se garante que a homotopia h toma efetivamente valores em X.

Proposição 2.9 *Sejam $f \in C^1(X;\mathbb{R})$, constantes $a < b$, $\delta > 0$ e $F \subseteq X$. Se*

(a) $d(u,F) \leq 2\delta \Rightarrow u \in X$;

(b) $\|f'(u)\| \geq 4(b-a)/\delta$, *para todo* $u \in f^{-1}([a,b])$ *tal que* $d(u,F) \leq \delta$.

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe uma homotopia de homeomorfismos f-decrescente $h_t : X \to X$ tal que

(i) $h_1(f^b \cap F) \subseteq f^a$;

(ii) $h_t(u) = u$, *se* $u \notin f^{-1}([a-\epsilon, b+\epsilon])$;

(iii) $d(h_t(u), u) \leq \delta t$, *para todo* t, u.

Demonstração: O conjunto $S := \{u \in E : \ d(u,F) \leq \delta\} \subset X$ é fechado em E. Fixemos uma aplicação localmente lipschitziana $\eta : E \to [0,1]$ tal que $\eta|_S \equiv 1$ e $\eta(u) = 0$ para todo o $u \in E$

tal que $d(u, F) \geq 2\delta$. Nas notações do Teorema 2.2, considere o fluxo associado ao problema de Cauchy

$$\dot{\sigma} = -\chi(\sigma)\eta(\sigma)V(\sigma), \quad \sigma(0) = u \in E.$$

Verifica-se que $h(t, u) := \sigma((b-a)t, u)$ satisfaz as propriedades em (ii) e (iii). A conclusão em (i) decorre novamente desta última propriedade.

□

2.4 Homotopia e compacidade

Nesta seção, Vamos considerar novamente uma aplicação $f \in C^1(X; \mathbb{R})$ definida num aberto X de um espaço de Banach E. Continuamos assumindo a hipótese de completude nos níveis de f, enunciado na seção anterior.

Estudaremos a seguir algumas versões úteis do Teorema 2.2 e seus corolários. A condição sobre $\|f'\|$ enunciada no Teorema 2.2 será agora assegurada por hipóteses de compacidade sobre f e E, hipóteses conhecidas como do tipo Palais-Smale.

2.4.1 A condição de Palais-Smale

Do Teorema 2.2, segue a

Proposição 2.10 *Dadas constantes $a < b$. Suponhamos que, para nenhum ponto $c \in [a, b]$, existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que $f(u_n) \to c$ e $\|f'(u_n)\| \to 0$. Então, existem $\epsilon > 0$ e uma homotopia de homeomorfismos f-decrescente $h_t : X \to X$ tais que*

$$h_1(f^b) \subseteq f^a \quad e \quad h_t(u) = u, \quad \forall u \in X \setminus f^{-1}([a-\epsilon, b+\epsilon]).$$

Demonstração: Podemos fixar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\|f'(u)\| \geq 2\epsilon(b-a), \quad \forall u \in f^{-1}([a, b]).$$

De fato, pois caso contrário, dado um $c \in (a, b)$, existe $u_n \in f^{-1}([c - 1/n, c + 1/n])$ tal que $\|f'(u_n)\| < 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Assim, existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que $f(u_n) \to c$ e $\|f'(u_n)\| \to 0$, o que contradiz a hipótese desta Proposição. A conclusão resulta do Teorema 2.2 com $S := X$. □

Dizemos que f satisfaz a condição de *Palais-Smale fraca* no nível c, se a existência de uma sequência $\{u_n\}$ satisfazendo $f(u_n) \to c$ e $\|f'(u_n)\| \to 0$, implicar que c for um valor crítico de f. Por exemplo, a função seno, definida sobre os reais, satisfaz esta condição para todo $c \in \mathbb{R}$. Portanto, a existência de uma homotopia f-decrescente fica estabelecida se f satisfaz a condição Palais-Smale fraca e o intervalo $[a, b]$ não contém valores críticos de f.

Para lidar com situação em que o intervalo $[a, b]$ contém valores críticos, introduzimos uma condição mais forte sobre a função f.

Definição 2.1 *Dado $c \in \mathbb{R}$, diz-se que f satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, abreviadamente, a condição $(PS)_c$, se toda a sucessão $(u_n) \subset X$ tal que $f(u_n) \to c$ e $\|f'(u_n)\| \to 0$ admitir uma subsucessão convergente em X.*

Definição 2.2 (Condição (PS)) *Sejam $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. A função f satisfaz a condição Palais-Smale no nível c (condição $(PS)_c$) se toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que*

$$f(u_n) \to c \quad em \quad \mathbb{R}$$

e

$$f'(u_n) \to 0 \quad em \quad X',$$

chamada sequência (PS), possui uma subsequência convergente. Diz-se que f satisfaz a condição (PS) se satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente, se toda sequência $\{u_n\}$ tal que

$$\{f(u_n)\}_n \quad é \ limitada$$

e

$$f'(u_n) \to 0 \quad em \quad X',$$

possui uma subsequência convergente.

Em particular, o conjunto K_c dos pontos críticos de f é compacto. Observe que a função seno, definida sobre os reais, não satisfaz esta condição para $c = \pm 1$. Por outro lado, a função exponencial satisfaz a condição $(PS)_c$ se, e somente se, $c \neq 0$. A proposição seguinte ilustra, sob a condição (PS), o comportamento da deformação construída no Corolário 2.1.

Proposição 2.11 *Dado $c \in \mathbb{R}$, suponhamos que f satisfaz a condição $(PS)_c$. Então, para cada $\epsilon_0 > 0$, existem $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e uma homotopia de homeomorfismos f-decrescente $h_t : X \to X$ como no Corolário 2.1 (ou 2.2) satisfazendo*

$$se \quad u \in f^{c+\epsilon} \quad e \quad \|f'(h(t, u))\| \geq \epsilon_0 \quad para\ algum \quad t \in [0, 1] \quad então \quad h_1(u) \in f^{c-\epsilon}.$$

Demonstração: Da condição $(PS)_c$ resulta que podemos fixar $\epsilon > 0$ de modo que

$$| f(u) - c | \leq 2\epsilon, \quad \|f'(u)\| \leq 4\sqrt{\epsilon}, \quad \|u - v\| \leq 4\sqrt{\epsilon} \Longrightarrow \|f'(v)\| < \epsilon_0.$$

A conclusão segue do Corolário 2.1. $\square$

O teorema seguinte é uma extenção da Proposição 2.10.

Teorema 2.3 *Se f satisfaz a condição $(PS)_c$ e $\mathcal{N}$ é uma vizinhança aberta de K_c, existem $\epsilon > 0$ e uma homotopia de homeomorfismo f-decrescente $h_t : X \to X$ tais que*

$$h_1(f^{c+\epsilon} \setminus \mathcal{N}) \subseteq f^{c-\epsilon} \quad e \quad h_t(u) = u, \quad \forall u \in X \setminus f^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]).$$

Além disso, h é localmente lipschitziana e satisfaz $d(h_t(u), u) \leq \sqrt{\epsilon}t$ para todo t, u.

Demonstração: Denote por $F := X \setminus \mathcal{N}$. Da condição $(PS)_c$ resulta que existem constantes positivas η e ϵ_0 de tal modo que

$$\|f'(u)\| \geq \eta \quad \forall u \in F_{\epsilon_0} \cap f^{-1}([c - \epsilon_0, c + \epsilon_0]),$$

a conclusão resulta do Corolário 2.4, escolhendo para G o compacto K_c. $\square$

Voltamos a considerar um aberto X. Dada uma homotopia h em X, um subconjunto A de X é dito *invariante* para h se $h_t(A) \subseteq A$, para todo $t \in [0, 1]$.

O resultado seguinte difere dos anteriores na medida em que se consegue deformar um conjunto de nível f^b num outro f^a (com $a < b$) permanecendo, este último, invariante ao longo da homotopia. No Teorema 2.4 admitimos $b = +\infty$, neste caso, definimos $f^b = X$ e $K_b = \emptyset$.

Teorema 2.4 (Teorema do intervalo não crítico) *(ver M. Ramos [11], p. 26) Dadas constantes $a < b$, suponha que f não admite valores críticos no intervalo $]a, b[$ e que $f^{-1}(\{a\})$ contém no máximo um número finito de pontos críticos de f. Então, se f satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo o $c \in [a, b[$, existe uma homotopia f-decrescente $h_t : f^b \setminus K_b \to X$ tal que*

$$h_1(f^b \setminus K_b) \subseteq f^a \quad e \quad h_t(u) = u, \quad \forall u \in f^a.$$

Agora, vamos estudar algumas variações do Teorema 2.4. Fixemos uma aplicação V dada pela Proposição 2.4 (com $\alpha = 1, \quad \beta = 2$). Para cada $u \in X \setminus K$, o problema de Cauchy

$$\dot{\sigma(t)} = -V(\sigma(t)), \quad \sigma(0) = u$$

admite uma única solução definida num intervalo $[0, \omega_+(u)[$. Então, podemos enunciar o seguinte.

Teorema 2.5 *Dadas constantes $a < b$ e um subconjunto W fechado em X, suponhamos que*

(a) f não admite pontos críticos em $f^{-1}(]a, b[) \cap W$ e $f^{-1}(\{a\}) \cap W$ contém no máximo um número finito de pontos críticos;

(b) $f^{-1}([a, b]) \cap W$ é completo e f satisfaz a condição (PS) neste conjunto;

(c) se $u \in (f^{-1}(]a, b]) \cap W) \setminus K_b$ é tal que $a < f(\sigma(t, u))$ para algum $t < \omega_+(u)$, então $\sigma(t, u) \in W$.

Então existe uma homotopia f-decrescente $h_t : (f^b \cap W) \setminus K_b \to X$ tal que

(i) $h_1((f^b \cap W) \setminus K_b) \subseteq f^a \cap W$;

(ii) $h_t(u) = u$ se $u \in f^a \cap W$;

(iii) $(f^b \cap W) \setminus K_b$ é invariante para h.

Daí resulta o seguinte corolário.

Teorema 2.6 *Seja u_0 um ponto crítico isolado de f e $c = f(u_0)$. Suponhamos que f satisfaz a condição (PS) numa vizinhança $\mathcal{V}$ de u_0. Então, existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança fechada W de u_0 e uma homotopia f-decrescente $h_t : f^{c+\epsilon} \cap W \to X$ tais que*

(i) $h_1(f^{c+\epsilon} \cap W) \subseteq f^c \cap W$;

(ii) $h_t(u) = u$ *se* $u \in f^c \cap W$*;*

(iii) $f^{c+\epsilon} \cap W$ *é invariante para* h*;*

(iv) $f^{-1}([c+\epsilon, c-\epsilon]) \cap W \subseteq \mathcal{V}$.

Demonstração: Se necessário diminuindo a vizinhança, podemos supor que $\mathcal{V}$ é uma bola fechada $B_r(u_0)$ que não contém pontos críticos de f distintos de u_0. Considere-se o conjunto $\mathcal{A} := \{u : \; r/2 \leq d(u, u_0) \leq r\}$ e defina-se

$$\delta := \inf\{\|f'(u)\| : u \in \mathcal{A}\} > 0.$$

Para cada $\epsilon > 0$, considere $\Omega_\epsilon := \{\sigma(t, u) : u \in B_\epsilon(u_0) \setminus \{u_0\}, t \in [0, \omega_+(u)[\}$, onde σ é o fluxo definido acima. Mostraremos que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\Omega_\epsilon \cap f^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \subseteq B_r(u_0). \tag{2.3}$$

De fato, caso contrário, existem sequências $(u_n) \subset X$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}$ com $u_n \to u_0$, $f(\sigma(t_n, u_n)) \to c$ e $d(\sigma(t_n, u_n), u_0) \geq r$. Consequentemente, existem pontos α_n e β_n com $0 \leq \alpha_n < \beta_n \leq t_n$ tais que

$$d(\sigma(\alpha_n, u_n), u_0) = r/2 < r = d(\sigma(\beta_n, u_n), u_0)$$

e

$$\sigma(\cdot, u_n) \in \mathcal{A} \;\text{ em }\; [\alpha_n, \beta_n].$$

Temos

$$\begin{aligned} r/2 \leq d(\sigma(\alpha_n, u_n), \sigma(\beta_n, u_n)) &\leq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \|\dot{\sigma}(s, u_n)\| ds \\ &\leq 2\int_{\alpha_n}^{\beta_n} (1/\|f'(\sigma(s, u_n))\|) ds \\ &\leq 2(\beta_n - \alpha_n)/\delta \end{aligned}$$

logo

$f(\sigma(t_n, u_n)) \leq f(\sigma(\beta_n, u_n)) \leq f(\sigma(\alpha_n, u_n)) - (\beta_n - \alpha_n) \leq f(u_n) - \delta r/4.$

Sendo $c = \lim f(\sigma(t_n, u_n)) = \lim f(u_n)$, chegamos em uma contradição.

Fixe $\epsilon > 0$ dado por (2.3) e considere W o fecho de Ω_ϵ em X. Desde que W contém $B_\epsilon(u_0)$, então W é uma vizinhança de u_0. De (2.3), resulta que $f^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap W$ está contido em $B_r(u_0)$, é completo e f satisfaz a condição (PS) neste conjunto. A condição (a) no teorema anterior (com $a = c$ e $b = c+\epsilon$) é também satisfeita. A condição (c) resulta da continuidade do fluxo. Podemos então concluir a prova, devido ao Teorema 2.5. $\square$

A demonstração anterior pode ser adaptada para a situação seguinte:

Teorema 2.7 *Seja u_0 um ponto crítico isolado de f e $c = f(u_0)$. Suponhamos que f satisfaz a condição (PS) numa vizinhança $\mathcal{V}$ de u_0, e sejam W e ϵ dados pelo Teorema 2.6. Então, existe uma homotopia f-decrescente $\tilde{h}_t : (f^c \setminus \{u_0\}) \cap W \to X$ tal que*

(i) $\tilde{h}_1((f^c \setminus \{u_0\}) \cap W) \subseteq f^{c-\epsilon} \cap W$;

(ii) $\tilde{h}_t(u) = u$ *se* $u \in f^{c-\epsilon} \cap W$;

(iii) $(f^c \setminus \{u_0\}) \cap W$ *é invariante para* $\tilde{h}$.

Vamos concluir este capítulo demonstrando um resultado de deformação envolvendo uma geometria de linking local na origem (K. Perera [20]).

Teorema 2.8 *Seja $H = V \oplus W$ um espaço de Hilbert e f' Lipschitziana em uma vizinhança da origem. Suponha que f satisfaça a condição de linking local*

(i) $f(u) \leq 0, \quad u \in V, \quad \|u\| \leq \rho,$

(ii) $f(u) \geq 0, \quad u \in W, \quad \|u\| \leq \rho,$

com $\dim V = j < +\infty$. *Então, existe uma bola fechada B centrada na origem e um homeomorfismo $h : H \to H$ tal que*

1. 0 *é o único ponto crítico de f em $h(B)$;*
2. $h|_{B\cap V} = Id_{B\cap V}$;
3. $f(u) > 0$ *para* $u \in h(B \cap W \setminus \{0\})$.

Demonstração:

Sejam B' e B'' bolas centradas na origem, com $\bar{B}' \subset B''$, tal que 0 é o único ponto crítico de f em B' e df é lipschitziana em B'', e seja $B \subset B'$ uma bola fechada centrada na origem com raio menor do que ou igual a ρ (como no Teorema 4.9). Sendo B e $(B')^c$ conjuntos fechados e disjuntos, existe uma função não negativa e localmente lipschitziana $g \leq 1$ satisfazendo

$$g = \begin{cases} 1 & \text{sobre } B \\ 0 & \text{fora de } B'. \end{cases}$$

Considere o campo de vetores

$$V(u) = g(u)\|Pu\|f'(u)$$

onde P é a projeção ortogonal sobre W. Claramente V é localmente lipschitziano e limitado sobre H. Considere o fluxo $\eta(t) = \eta(t, u)$ definido por

$$\frac{d\eta}{dt} = V(\eta), \quad \eta(0, u) = u.$$

Claramente, η é definida para $t \in [0, 1]$. Considere $h = \eta(1, \cdot)$. Sendo $h|_{(B')^c} = Id_{(B')^c}$ e h injetiva, $h(B) \subset B'$ e o resultado em *1* fica provado.

Para $u \in B \cap W \setminus \{0\}$,

$$f(h(u)) = f(u) + \int_0^1 g(\eta(t))\|P\eta(t)\|\|f'(\eta(t))\|^2 dt > 0$$

pois $f(u) \geq 0$ para $u \in W$ e $g(u)\|Pu\|\|f'\|^2 > 0$. $\square$

Capítulo 3

O Teorema de Sard-Smale e Perturbação de Marino-Prodi

Os resultados deste capítulo são amplamente utlizados no Capítulo 4. Essencialmente, pretende-se provar um teorema de perturbação do tipo Marino-Prodi; a saber, que se um funcional f tiver derivada de segunda ordem de Fredholm então pode ser aproximado por uma função que só admite pontos críticos não degenerados, pelo menos numa vizinhança de um dado ponto crítico de f. Além disso, a perturbação preserva a condição de Palais-Smale. Este teorema permite reduzir o cálculo dos grupos críticos e do índice de Morse à situação em que f só admite pontos críticos não degenerados (ver Apêndice B).

A demonstração baseia-se no Teorema de Sard-Smale que é provado na primeira seção.

3.1 O Teorema de Sard-Smale

Considere dois espaços de Banach X e Y e uma aplicação de classe C^1, $F : U \subseteq X \to Y$ definida em um aberto U de X. Um ponto $u_0 \in U$ diz-se um *ponto regular* se a derivada $F'(u_0) : X \to Y$ for sobrejetiva e se for possível decompor X numa soma direta do tipo $X = \ker(F'(u_0)) \oplus X_2$. O ponto u_0 é *singular* se não for regular.

Um ponto $y_0 \in Y$ é um *valor regular* se a sua imagem inversa $F^{-1}(\{y_0\})$ só for formada por pontos regulares ou se for o conjunto vazio. Um ponto $y_0 \in Y$ é um *valor singular* se não for regular, ou seja, se for imagem de um ponto singular.

Designa-se por $reg(F)$ e $sing(F)$ o conjunto dos valores regulares e o conjunto dos valores singulares de F, respectivamente. Note-se que $sing(F)$ é precisamente a imagem por F do conjunto dos pontos singulares; no entanto, em geral vale apenas uma inclusão

$$reg(F) \subseteq F(ptos.regulares) \cup (Y \setminus F(X)).$$

Note que, se $F'(u_0)$ for um operador de Fredholm, então o ponto u_0 é regular se a aplicação $F'(u_0)$ for sobrejetiva. Se além disso, $F'(u_0)$ tiver índice zero, ou seja,

$$\dim \ker F'(u_0) = codimIm(F'(u_0))$$

então a derivada $F'(u_0)$ é um isomorfismo.

O exemplo seguinte ilustra o Teorema 3.1 que se segue. Suponha que F é uma aplicação linear em $\mathbb{R}^n$, $F(x) = Ax$. Se o determinante da matriz A for não nulo, tem-se $sing(F) = \emptyset$; e se ele for nulo, $sing(F) = F(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Se μ designa a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, tem-se em qualquer dos casos que $reg(F)$ é denso em $\mathbb{R}^n$ e $\mu(sing(F)) = 0$.

No teorema seguinte, usaremos o Teorema de Lindelöf (toda cobertura aberta de $\mathbb{R}^n$, possui uma subcobertura enumerável).

Teorema 3.1 (Sard) *Se $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 e S é o conjunto dos pontos singulares de F $(F(S) = sing(F))$, então $\mu(F(S)) = 0$. Em particular, $reg(F)$ é denso em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Considere um cubo fechado C contido em U de lado a. Vamos dividir C em k^n cubos de lado $\dfrac{a}{k}$.

A aplicação F' é uniformemente contínua sobre C. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\forall x, y \in C, \quad |x - y| < \alpha \Longrightarrow |F'(x) - F'(y)| < \epsilon.$$

Escolha $k \in \mathbb{N}$ de forma que o diâmetro de cada subcubo seja menor do que α $\left(\sqrt{n}\dfrac{a}{k} < \alpha\right)$.

Além disso, sobre C a função F é lipschitziana, ou seja,

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|, \quad \forall x, y \in C$$

onde

$$M = \max_{x \in C} |F'(x)|.$$

Seja $x \in C \cap S$, então existe $\tilde{C} \subset C$ com $x \in \tilde{C}$. Note que

$$\forall y \in \tilde{C}, \quad |F(x) - F(y)| \leq M|x - y| \leq Md_{\tilde{C}},$$

onde $d_{\tilde{C}}$ é o diâmetro do cubo $\tilde{C}$.

Portanto

$$F(\tilde{C}) \subset B(F(x), Md_{\tilde{C}}).$$

Por outro lado

$$F(y) - F(x) - F'(x)(y - x) = \int_0^1 \left[F'(x + t(y - x)) - F'(x)\right](y - x)dt,$$

donde segue que

$$|F(y) - F(x) - F'(x)(y - x)| \leq \epsilon|y - x| \leq \epsilon d_{\tilde{C}}.$$

Sendo, por hipótese $x \in S$, sabemos que $F'(x)$ não é invertível, portanto $F'(x)(\mathbb{R}^n)$ está contido em um hiperplano H, e assim

$$\rho[F(y), F(x) + H] \leq \epsilon d_{\tilde{C}}, \quad \forall y \in \tilde{C},$$

onde ρ é a distância entre conjuntos.

Consequentemente

$$m^*(F(\tilde{C})) \leq 2\epsilon d_{\tilde{C}}.(2Md_{\tilde{C}})^{n-1} = 2^n \epsilon M^{n-1} d_{\tilde{C}}^n,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} m^*(F(C \cap S)) &\leq \sum_{\tilde{C} \cap S \neq \emptyset} m^*(F(\tilde{C} \cap S)) \\ &\leq \sum_{\tilde{C} \cap S \neq \emptyset} m^*(F(\tilde{C})) \\ &\leq 2^n \epsilon M^{n-1} d_{\tilde{C}}^n . k^n, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$m^*(f(C \cap S)) = 0.$$

Agora, considere uma família de cubos abertos $\{C_\lambda\}$ contidos em U verificando

$$S \subset \bigcup_{S \cap C_\lambda \neq \emptyset} C_\lambda.$$

Usando o Teorema de Lindelöf

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$$

logo

$$F(S) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F(\overline{C}_j \cap S).$$

Recordando que

$$m^*(F(S \cap \overline{C}_j)) = 0,$$

podemos concluir que

$$m^*(F(S)) = 0.$$

$\square$

O Teorema 3.1 pode ser estendido a espaços de dimensão infinita no quadro das *aplicações de Fredholm* (ver Apêndice B). Considere dois espaços de Banach X e Y e um aberto $U \subseteq X$. Um conjunto $A \subseteq Y$ é dito *residual* se é uma interseção enumerável de abertos densos em Y. Visto que Y é completo, resulta do Teorema de Baire (Em todo espaço métrico completo E, qualquer interseção enumerável de abertos densos em E é um subconjunto denso em E) que A é denso em Y.

Teorema 3.2 (Smale) *Se $F \in C^1(U;Y)$ é uma aplicação de Fredholm de índice zero, então $reg(F)$ é residual em Y.*

A demonstração do teorema baseia-se no lema seguinte, que mostra que os operadores de Fredholm de índice zero comportam-se localmente como projeções. Por hipótese, para cada $u_0 \in U$ valem duas somas diretas topológicas

$$X = N \oplus \tilde{X} \quad \text{e} \quad Y = \tilde{Y} \oplus R$$

onde $N := Ker(F'(u_0))$, $R := Im(F'(u_0))$ e os espaços de dimensão finita N e $\tilde{Y}$ são isomorfos. Além disso, a restrição $F'(u_0) \mid_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to R$ é um isomorfismo.

Lema 3.1 *Dado $u_0 \in U$, existem duas vizinhanças de 0, $U_N(0)$ e $U_R(0)$ em N e em R, uma vizinhança W de u_0 e duas aplicações de classe C^1*

$$h : U_N(0) \times U_R(0) \to W \quad e \quad g : U_N(0) \times U_R(0) \to \tilde{Y}$$

tais que

$$h(0,0) = u_0, \quad g(0,0) = g'(0,0) = 0,$$

h é um difeomorfismo e

$$F(h(n,r)) = F(u_0) + g(n,r) + r$$

para todo o $(n,r) \in U_N(0) \times U_R(0)$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_0 = 0$ e $F(u_0) = 0$; caso contrário, consideramos a aplicação $\tilde{F}(u) = F(u_0 + u) - F(u_0)$.

Para cada $u \in X$ escrevemos $u = u_1 + u_2$, onde $u_1 \in N$ e $u_2 \in \tilde{X}$. Fixemos a projeção $Q : Y \to R$ e considere-se a aplicação $\chi : U \to N \times R$, dada por

$$\chi(u_1 + u_2) = (u_1, QF(u_1, u_2)).$$

Então χ é de classe C^1, $\chi(0) = 0$ e a derivada $\chi'(0) = (Id, QF'(0))$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da função inversa, existe um difeomorfismo h como no enunciado do teorema, tal que

$$h(0,0) = 0 \ \text{ e } \ \chi(h(n,r)) = (n,r).$$

Tem-se portanto

$$F(h(n,r)) = (Id - Q)F(h(n,r)) + r$$

e a aplicação,

$$g(n,r) := (Id - Q)F(h(n,r))$$

é de classe C^1 com $g(0,0) = 0$ e

$$g'(0,0) = (Id - Q)F'(0)h'(0,0) = 0.$$

□

Do lema anterior resulta

Lema 3.2 *O conjunto dos pontos singulares de F é fechado em U.*

Demonstração: Provamos que o conjunto dos pontos regulares de F é um conjunto aberto. Seja u_0 um ponto regular de F. Como a conclusão do Lema 3.2 não é afetada por composição com difeomorfismos, o lema anterior mostra que podemos supor que, numa vizinhança de u_0, F é da forma

$$F(n, r) = F(u_0) + r,$$

mas neste caso a derivada $F'(n, r)$ é uma projeção em particular é sobrejetiva. □

Demonstração: **do Teorema** 3.2. Provaremos que cada ponto u_0 admite uma vizinhança aberta W de tal modo que o conjunto $reg(F|_W)$ é aberto e denso em Y. Visto que U admite uma base enumerável de abertos, podemos deste modo cobrir U com uma quantidade enumerável de vizinhanças $(W_i)_i$ e verifica-se facilmente que um ponto $y \in Y$ é valor regular para F se, e somente se, y é valor regular para todas as restrições $F|_{W_i}$. Consequentemente,

$$reg(F) = \cap_i reg(F|_{W_i})$$

e $reg(F)$ é residual.

Fixemos então $u_0 \in U$. Visto que a composição com difeomorfismos não altera o conjunto dos valores regulares, podemos supor que $u_0 = 0$ e $F(u_0) = 0$. Pelo Lema 3.1 podemos supor sem perda de generalidade que valem decomposições em soma direta $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$ e

$$F(u, v) = g(u, v) + v$$

onde $u \in X_1$ e $v \in X_2$ variam numa vizinhança limitada W de 0. A aplicação g toma valores num subespaço Y_1 de Y de dimensão finita isomorfo a X_1, e $g(0) = g'(0) = 0$. Tendo em conta as considerações anteriores, continuamos a designar por F a restrição $F|_W$.

O ponto essencial da demonstração é o seguinte: Dado $y_2 \in X_2$, se y_1 é um valor regular da aplicação

$$g(\cdot, y_2) : X_1 \to Y_1,$$

então $y := y_1 + y_2$ é valor regular de F.

De fato, suponha-se que $F(u, v) = y$ (ou seja, $v = y_2$ e $g(u, y_2) = y_1$). Vamos mostrar que a derivada $F'(u, y_2) : X \to Y$ é sobrejetiva. Dados $(w_1, w_2) \in Y$, vamos resolver em $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ a equação

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, y_2)(\tilde{x}_1) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, y_2)(\tilde{x}_2) + \tilde{x}_2 = w_1 + w_2.$$

Escolhendo $\tilde{x}_2 := w_2$, vamos encontrar $\tilde{x}_1 \in X_1$ de modo que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, y_2)(\tilde{x}_1) = w_1 - \frac{\partial g}{\partial v}(u, y_2)(w_2) \in Y_1.$$

E esta equação tem sempre solução em virtude da hipótese feita e porque $y_1 = g(u, y_2)$.

Vamos provar que $reg(F)$ é denso em Y. Dado $y = y_1 + y_2$, a aplicação $g(\cdot, y_2)$ está nas condições do Teorema 3.1. Consequentemente, y_1 é limite de uma sucessão $(y_1^n)_{n\geq 1}$ de valores regulares de $g(\cdot, y_2)$. Para concluir basta notar que y é limite da sucessão $(y_1^n + y_2)_{n\geq 1}$ e que, pela observação anterior, estes são valores regulares de F.

Para provar que $reg(F)$ é aberto em Y, mostremos que o seu complementar $sing(F)$ é fechado. Segue do Lema 3.2, que basta mostrar que a aplicação F é fechada. Suponha então que $F(u_n, v_n) \to w = w_1 + w_2 \in Y$, ou seja, que $g(u_n, v_n) \to w_1$ e $v_n \to w_2$. Visto que X_1 tem dimensão finita e que W é limitado, existem uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) e u tal que $u_{n_j} \to u$. Por um argumento de continuidade concluimos que $w = F(u, w_2)$ e isto prova que F é fechada e termina a demonstração. $\square$

3.2 Perturbação de Marino-Prodi

Considere um aberto X de um espaço de Hilbert E e uma aplicação $f \in C^2(X; \mathbb{R})$.

No lema seguinte supomos que o operador $L = D^2 f(u_0)$ é um operador de Fredholm. Neste caso, podemos decompor cada vetor u na forma $u = x + y$, onde $x \in Ker(L)$ e $y \in R(L)$.

Lema 3.3 *Suponha que $u_0 \in X$ é tal que $L := D^2 f(u_0)$ é um operador de Fredholm. Então existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\|\nabla f(u_1) - \nabla f(u_2)\| + \|x_1 - x_2\| \geq \alpha \|y_1 - y_2\|$$

para todo $u_i = x_i + y_i$ $(i = 1, 2)$ numa vizinhança de u_0.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que $u_0 = 0$. Sendo L um isomorfismo em $R(L)$, podemos fixar uma constante $\beta > 0$ tal que $\|Ly\| \geq \beta \|y\|$ para todo $y \in R(L)$. A aplicação

$$r(u) := Lu - \nabla f(u)$$

é de classe C^1 e $r'(0) = 0$. Consequentemente,

$$\|r(u) - r(v)\| \leq \beta \|u - v\|/2$$

numa vizinhança de 0. Resulta que

$$\begin{aligned}\beta\|y_1 - y_2\| \leq \|L(y_1 - y_2)\| &= \|L(u_1) - L(u_2)\| \\ &\leq \|r(u_1) - r(u_2)\| + \|\nabla f(u_1) - \nabla f(u_2)\|\end{aligned}$$

onde

$$\|r(u_1) - r(u_2)\| \leq \frac{\beta}{2}\|u_1 - u_2\| \leq \frac{\beta}{2}\|x_1 - x_2\| + \frac{\beta}{2}\|y_1 - y_2\|,$$

o que permite concluir a prova do lema. $\square$

Dados um subconjunto $C \subset X$ e $\delta > 0$, denotamos por C_δ a vizinhança fechada

$$C_\delta = \{u \in U : d(u, C) \leq \delta\}.$$

Diz-se que a aplicação ∇f é *própria* em C_δ se toda sequência $(u_n) \subset C_\delta$ tal que $(\nabla f(u_n))$ é convergente admitir uma subsequência convergente em X. Em particular, f satisfaz a condição (PS) em C_δ.

Denotamos por $\|\cdot\|_{C^2}$ a norma no espaço das funções de classe C^2 dada por

$$\|f\|_{C^2} := \sup_E(|\ f(u)\ | + \|\nabla f(u)\| + \|D^2 f(u)\|),$$

onde as normas são tomadas nos espaços respectivos.

Lema 3.4 *Suponha que ∇f é uma aplicação de Fredholm num compacto $C \subset X$. Então, dadas constantes positivas ϵ_0 e δ_0, existem $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ e $\delta \in]0, \delta_0[$ de modo que toda aplicação g de classe C^2 com $\|f - g\|_{C^2} \leq \epsilon$ é tal que ∇g é própria em C_δ.*

Demonstração: Sendo C um compacto, basta mostrar que ∇g é própria numa vizinhança de cada ponto $u_0 \in C$; o caso geral reduz-se a este, por meio de um argumento com coberturas finitas.

Fixe $u_0 \in C$ e considere $\alpha > 0$ dado no Lema 3.3. Se ϵ é suficientemente pequeno

$$\alpha\|y_1 - y_2\|/2 \leq \|x_1 - x_2\| + \|\nabla g(u_1) - \nabla g(u_2)\|$$

numa vizinhança de u_0. Suponha então que uma sequência $\{u_n\}$ varia numa vizinhança limitada de u_0 e é tal que $\{\nabla g(u_n)\}$ é convergente. Escrevendo $u_n = x_n + y_n$, visto que $Ker(L)$ tem dimensão finita, existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ convergente. A desigualdade anterior implica que $\{y_{n_k}\}$ é uma sequência de Cauchy, e portanto convergente. Sendo assim, $\{u_{n_k}\}$ é convergente. □

No que segue, vamos supor que ∇f é uma aplicação de Fredholm de índice zero. Na demonstração do teorema seguinte faremos uso do fato que o espaço dos operadores de Fredholm de índice zero é aberto em $L(E;E)$ (ver Teorema $B.1$ no Apêndice B). observamos que em aplicações dos resultados deste capítulo se lida frequentemente com funções f cuja derivada de segunda ordem $D^2f(u)$ é de Fredholm para todo $u \in X$; neste caso, não precisamos passar por este resultado.

Teorema 3.3 (Perturbação de Marino-Prodi) *Suponha que ∇f é uma aplicação de Fredholm num compacto $C \subset X$. Então, dadas constantes positivas ϵ_0 e δ_0, existem $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, $\delta \in]0, \delta_0[$ e uma aplicação $g \in C^2(X;\mathbb{R})$ tais que*

(i) $\|f - g\|_{C^2} \leq \epsilon$;

(ii) $g = f$ *em* $X \setminus C_{2\delta}$;

(iii) em C_δ, a função g só tem um número finito de pontos críticos, todos não degenerados;

(iv) g satisfaz a condição (PS) em $C_{2\delta}$.

Demonstração: Segue do lema anterior que podemos fixar constantes ϵ e δ de modo que (iv) seja uma consequência de (i). Além disso, δ é escolhido suficientemente pequeno de modo que D^2f seja um operador de Fredholm em $C_{2\delta}$. Seja $\chi : X \to [0,1]$ uma aplicação de classe C^∞ com todas as derivadas limitadas, e tal que

$$\chi|_{C_\delta} = 1 \ \text{ e } \ \chi|_{X \setminus C_{2\delta}} = 0.$$

Podemos construir tal aplicação χ da seguinte maneira: Fixe um número finito de pontos $x_1, x_2, \cdots, x_m \in C$ tais que

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \frac{\delta}{2}).$$

Considere funções $\chi_i \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ com derivadas limitada tais que

$$\chi_i(x) = 1, \quad \text{se} \ \ x \in B(x_i, \frac{3}{2}\delta)$$

$$\chi_i(x) = 0, \quad \text{se} \ \ x \notin B(x_i, 2\delta).$$

Para construir as funções $\chi_i \quad (i = 1, \cdots, m)$, considere a aplicação $\alpha : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por

$$\alpha(s) = 1, \quad \text{se} \quad s \leq \frac{9}{4}$$

$$\alpha(s) = 0, \quad \text{se} \quad s \geq 4$$

e defina

$$\chi_i(x) := \alpha\left(\frac{\|x - x_i\|^2}{\delta^2}\right).$$

Agora, considere $\beta : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que

$$\beta(s) = 0, \quad \text{se} \quad s \leq 0$$

$$\beta(s) = 1, \quad \text{se} \quad s \geq 1.$$

A função $\chi : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi(x) := \beta\left(\sum_{i=1}^{m} \chi_i(x)\right)$$

é a função requerida.

Pelo Teorema 3.2, podemos escolher um vetor $y \in X$, não nulo e de norma arbitrariamente pequena, de tal modo que $-y$ seja um valor regular de $(\nabla f)|_{C_{2\delta}}$. Sendo ∇f uma aplicação própria em $C_{2\delta}$ de índice zero, segue que a imagem inversa

$$(\nabla f|_{C_{2\delta}})^{-1}(\{-y\})$$

é um conjunto finito. Consequentemente, podemos escolher para g a função

$$g(u) := f(u) + \chi(u)\langle y, u\rangle$$

desde que a norma de y seja suficientemente pequena de modo que (i) se verifique. $\square$

No que segue, demonstramos algumas variantes do teorema anterior. Denotamos por K o conjunto dos pontos críticos de f e $K_c := \{u \in K : f(u) = c\}$.

Corolário 3.1 *Nas condições do teorema anterior,*

(i) g pode ser escolhida de modo que $f \leq g$ (ou $g \leq f$) em X;

(ii) *se f satisfaz a condição (PS) em X, também g satisfaz esta condição;*

(iii) *se $C = K$, então g só admite um número finito de pontos críticos, todos não degenerados e contidos em C_δ;*

(iv) *se $C = K_c$ e f satisfaz a condição $(PS)_c$ então g satisfaz a condição $(PS)_{c'}$ para todo c' tal que $\mid c - c' \mid \leq \epsilon$ e todos os pontos críticos de g em $g^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ estão contidos em C_δ;*

(v) *se C é isolado em K_c então g não tem pontos críticos em $(C_{2\delta} \setminus C_\delta) \cap g^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$.*

Demonstração: Para provar (i) retome a construção na demonstração anterior e defina

$$M := \sup_{u \in C_{2\delta}} \|u\| \;\text{ e }\; u_0 := -\frac{2M}{\|y\|} y.$$

As conclusões do Teorema 3.3 continuam válidas para a função

$$g(u) := f(u) + \chi(u)\langle y, u - u_0 \rangle$$

por outro lado,

$$f(u) - g(u) \leq \chi(u)(M\|y\| - 2M\|y\|) \leq 0.$$

A afirmação em (ii) é uma consequência de (ii) e (iv) no Teorema 3.3.

Quanto a (iii), note que, sendo $\nabla f|_{K_{2\delta}}$ própria, temos

$$\inf_{K_{2\delta} \setminus K_\delta} \|\nabla f\| > 0.$$

O mesmo ocorre para a função g se o número ϵ for suficientemente pequeno, a conclusão resulta de (ii) e (iii) no Teorema 3.3.

Provemos (iv). Naquelas hipóteses, tem-se

$$\inf_{u \in X \setminus C_\delta} (\|\nabla f(u)\| + |f(u) - c|) > 0$$

donde segue que, se ϵ é suficientemente pequeno,

$$\inf_{u \in X \setminus C_\delta} (\|\nabla g(u)\| + |g(u) - c|) > \epsilon.$$

Consequetemente, se $(u_n) \subset X$ é tal que

$$\nabla g(u_n) \to 0 \;\text{ e }\; g(u_n) \to c'$$

com $|c - c'| \leq \epsilon$, vem que $(u_n) \subset C_\delta$ para n grande; desde que g satisfaz a condição (PS) neste conjunto, a sequência (u_n) admite uma subsequência convergente.

Quanto a (v), observe que, pela hipótese feita, δ pode ser escolhido de modo que $C_{2\delta} \setminus C_\delta$ não contenha pontos críticos de f no nível c. Consequentemente,

$$\inf_{u \in C_{2\delta} \setminus C_\delta} (\|\nabla f(u)\| + |f(u) - c|) > 0,$$

e concluimos como em (iv).

$\square$

Uma versão útil do teorema de perturbação é a seguinte.

Teorema 3.4 *Dados $f \in C^2(X; \mathbb{R})$ e $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, suponhamos que*

(a) $D^2 f(u)$ *é um operador de Fredholm para todo* $u \in K \cap f^{-1}([a, b])$*;*

(b) $K \cap f^{-1}([a, b])$ *é compacto;*

(c) $K_a = K_b = \emptyset$.

Então, dadas constantes positivas ϵ e δ, existe uma aplicação $g \in C^2(X; \mathbb{R})$ tal que

(i) $\|f - g\|_{C^2} \leq \epsilon$*;*

(ii) $g(u) = f(u)$ *se* $d(u, K) \geq \delta$ *ou* $u \notin f^{-1}(]a, b[)$*;*

(iii) $g^a = f^a$ *e* $g^b = f^b$*;*

(iv) em $f^{-1}([a, b])$ $(= g^{-1}([a, b]))$, a função g só admite um número finito de pontos críticos, todos não degenerados;

(v) g não tem pontos críticos em $g^{-1}(\{a\}) \cup g^{-1}(\{b\})$;

(vi) se f satisfaz a condição (PS) em $f^{-1}([a, b])$, o mesmo ocorre com g.

Demonstração: Fixemos δ, ϵ e g dados pelo Teorema 3.3, com $C := K \cap f^{-1}([a, b])$. Resulta de (b) e (c) que o conjunto imagem $f(C)$ está contido num subintervalo compacto de $]a, b[$. Consequentemente, δ pode ser escolhido de modo que

$$f(C_{2\delta}) \subset]a, b[.$$

Por outro lado, existe $\eta > 0$ (dependendo de δ) tal que

$$\|\nabla f(u)\| \geq \eta$$

para todo $u \in f^{-1}([a,b]) \cap (C_{2\delta} \setminus C_\delta)$. Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, temos

$$\nabla g(u) \neq 0 \quad \forall u \in f^{-1}([a,b]) \cap (C_{2\delta} \setminus C_\delta).$$

Com esta escolha das constantes δ e ϵ resulta que

$$X \setminus f^{-1}([a,b]) \subseteq X \setminus C_{2\delta}$$

e que C_δ contém todos os pontos críticos de g que estão em $f^{-1}([a,b])$. As conclusões decorrem então do Teorema 3.3. $\square$

Capítulo 4

Grupos críticos

Considere um aberto X de um espaço de Banach E e uma aplicação $f \in C^1(X;\mathbb{R})$. Na teoria de Morse, o comportamento local de f próximo de um ponto crítico isolado u é descrito pela sequência de seus grupos críticos.

No que segue, vamos utilizar homologia singular sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Definição 4.1 *Se u é um ponto crítico isolado de f e $c := f(u)$, define-se os grupos críticos de u como sendo*

$$C_n(f,u) := H_n(f^c, f^c \setminus \{u\}), \quad n \geq 0.$$

Segue da propriedade de excisão para a homologia singular (ver Axioma 1.6) que, se V é uma vizinhança fechada de u, então

$$C_n(f,u) \simeq H_n(f^c \cap V, (f^c \setminus \{u\}) \cap V).$$

Para funções f satisfazendo a condição (PS), temos a seguinte caracterização dos grupos críticos.

Proposição 4.1 *Suponha que f satisfaz a condição (PS) numa vizinhança de um ponto crítico isolado u_0. Então, existem $\epsilon > 0$ e uma vizinhança fechada W de u_0 tais que*

$$C_n(f,u_0) \simeq H_n(f^{c+\epsilon} \cap W, f^{c-\epsilon} \cap W).$$

Demonstração:

Sob a hipótese de que f satisfaz a condição (PS) numa vizinhança de u_0, os Teorema 2.6 e 2.7 nos garante a existência de $\epsilon > 0$ e W vizinhança de u_0 tais que

(a) $f^c \cap W$ é um retrato de deformação forte de $f^{c+\epsilon} \cap W$ e;

(b) $f^{c-\epsilon} \cap W$ é um retrato de deformação forte de $(f^c \setminus \{u_0\}) \cap W$.

De (a) e do ítem (ii) da Propriedade 1.4 dada no Capítulo 1 com

$$A = f^c \cap W, \quad X = f^{c+\epsilon} \cap W \quad \text{e} \quad B = (f^c \setminus \{u_0\}) \cap W$$

obtemos

$$H_n(f^c \cap W, (f^c \setminus \{u_0\}) \cap W) \simeq H_n(f^{c+\epsilon} \cap W, (f^c \setminus \{u_0\}) \cap W). \tag{4.1}$$

De (b) e do ítem (iii) da Proposição 1.4 dada no Capítulo 1 com

$$A = (f^c \setminus \{u_0\}) \cap W, \quad X = f^{c+\epsilon} \cap W \quad \text{e} \quad B = f^{c-\epsilon} \cap W$$

obtemos

$$H_n(f^{c+\epsilon} \cap W, f^{c-\epsilon} \cap W) \simeq H_n(f^{c+\epsilon} \cap W, (f^c \setminus \{u_0\}) \cap W). \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2), concluimos que

$$\begin{aligned} C_n(f, u_0) &= H_n(f^c \cap W, (f^c \setminus \{u_0\}) \cap W) \\ &\simeq H_n(f^{c+\epsilon} \cap W, f^{c-\epsilon} \cap W). \end{aligned}$$

$\square$

A Proposição 4.1 pode ser generalizada para o caso em que $K_c = \{u_1, \cdots, u_j\}$, com j finito.

Proposição 4.2 *Suponha que f satisfaz a condição (PS) e que c é um valor crítico de f com $K_c = \{u_1, \cdots, u_j\}$. Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos*

$$H_n(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) \simeq H_n(f^c, f^c \setminus K_c) \simeq \bigoplus_{i=1}^{j} C_n(f, u_i).$$

Demonstração: O Teorema 2.4 implica

$$H_n(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) \simeq H_n(f^c, f^{c-\epsilon}) \simeq H_n(f^c, f^c \setminus K_c).$$

Vamos fixar vizinhanças fechadas e disjuntas $\mathcal{U}_i$ $(i = 1, \cdots, j)$. Defina $\mathcal{U} := \cup_i \mathcal{U}_i$, pela Propriedade de excisão para homologia singular (ver Axioma 1.6), temos

$$H_n(f^c, f^c \setminus K_c) \simeq H_n(f^c \cap \mathcal{U}, (f^c \cap \mathcal{U}) \setminus K_c)$$

Usando a Propriedade 1.1 dada no Capítulo 1,

$$H_n(f^c \cap \mathcal{U}, (f^c \cap \mathcal{U}) \setminus K_c) = \bigoplus_{i=1}^{j} H_n(f^c \cap \mathcal{U}_i, (f^c \cap \mathcal{U}_i) \setminus \{u_i\}).$$

Donde concluimos que

$$H_n(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) \simeq H_n(f^c, f^c \setminus K_c) \simeq \bigoplus_{i=1}^{j} C_n(f, u_i).$$

□

4.1 Máximos e mínimos

Nesta seção, vamos caracterizar os grupos críticos do tipo máximo e mínimo de f, no caso em que E tem dimensão finita. Utilizaremos o símbolo de Kronecker, $\delta_{n,k} = 1$ se $n = k$ e $\delta_{n,k} = 0$ se $n \neq k$ $(n, k \in \mathbb{Z})$.

Teorema 4.1 *Suponha que f satisfaz a condição (PS) nos limitados de X e seja u_0 um ponto crítico isolado de f. Então*

$$u_0 \quad \textit{é mínimo local de} \quad f \Longleftrightarrow C_0(f, u_0) \neq 0.$$

Além disso, temos $C_n(f, u_0) \simeq \delta_{n,0}\mathbb{R}$.

Demonstração: Denote por $c = f(u_0)$. Se u_0 é mínimo local, existe uma vizinhança fechada $\mathcal{V}$ de u_0 tal que $f(u) > f(u_0)$ sempre que $u \in \mathcal{V} \setminus \{u_0\}$. Daí e do Axioma 1.7

$$C_n(f, u_0) \simeq H_n(\{u_0\}, \emptyset) \simeq \delta_{n,0}\mathbb{R}, \quad n = 0, 1, ...$$

Reciprocamente, suponhamos que u_0 não é um mínimo local e sejam W e ϵ dados pela Proposição 4.1. Fixemos uma bola $B_\rho(u_0) \subset f^{c+\epsilon} \cap W$ e um ponto $v \in B_\rho(u_0)$ tal que $f(v) < c$. Pela construção de W, todo ponto $u \in f^{c+\epsilon} \cap W$ pode ser unido por meio de uma homotopia a um ponto de $f^c \cap W$ que ou é u_0 ou está em $f^c \setminus \{u_0\}$. Como $B_\rho(u_0)$ é conexo por arcos, concluimos que todo ponto $u \in f^{c+\epsilon} \cap W$ pode ser unido a um ponto de $(f^c \cap W) \setminus \{u_0\}$ por um caminho contido em $f^{c+\epsilon} \cap W$. Portanto

$$C_0(f, u_0) \simeq H_0(f^{c+\epsilon} \cap W, (f^c \cap W) \setminus \{u_0\}) = 0$$

□

Apesar de não o demonstrarmos na íntegra, enunciamos o seguinte.

Teorema 4.2 *Seja u_0 um ponto crítico isolado de uma aplicação $f \in C^2(X;\mathbb{R})$ onde X é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Então*

(i) *u_0 é mínimo local se, e somente se, $C_0(f,u_0) \neq 0$. Além disso, $C_i(f,u_0) \simeq \delta_{i,0}\mathbb{R}, \quad \forall i \geq 0$;*

(ii) *u_0 é máximo local se, e somente se, $C_n(f,u_0) \neq 0$. Além disso, $C_i(f,u_0) \simeq \delta_{i,n}\mathbb{R} \quad \forall i \geq 0$;*

(iii) *tem-se $\dim C_i(f,u_0) < \infty$ para todo i e $C_i(f,u_0) = 0$ para todo $i > n$.*

Demonstração: As afirmações em (i) foram provadas no Teorema 4.1. Remetemos a demonstração de (iii) para a seção seguinte (Corolário 4.3). Quanto a (ii), suponhamos que u_0 é um máximo local de f. Então, existe uma bola fechada $B = B_\delta(u_0)$ tal que $f(u) \leq c := f(u_0)$ sempre que $u \in B$. Daí e da Propriedade 1.11 dada no Capítulo 1, concluimos que

$$C_i(f,u_0) \simeq H_i(B, B \setminus \{u_0\}) \simeq H_i(B^n, S^{n-1}) \simeq \delta_{i,n}\mathbb{R}.$$

$\square$

4.2 Grupos críticos e índice de Morse

Nesta seção, vamos estender o Teorema 4.2 ao quadro das aplicações de Fredholm (ver Apêndice B). Em particular procuram-se condições sob as quais os grupos críticos tenham dimensão finita e se anulem para dimensões grandes, fazendo-se para isso uso do Lema de Morse Generalizado para funcionais de Classe C^2 (ver Apêndice B). Antes, porém, precisamos de uma propriedade de caráter geral que relaciona os grupos críticos correspondentes a valores críticos $c \in]a,b[$ com os grupos de homologia do par (f^b, f^a).

Definição 4.2 *Dados $f \in C^1(X;\mathbb{R})$ e $-\infty < a < b \leq +\infty$, definimos os* **números de Betti** *do par (f^b, f^a),*

$$B_n(f^b, f^a) := dim H_n(f^b, f^a), \quad n = 0, 1, ...$$

Se $f^{-1}([a,b])$ contém apenas um número finito de pontos críticos $u_1, ..., u_j$ e os escalares a, b não são valores críticos, define-se os **números de Morse** *do par (f^b, f^a),*

$$M_n(f^b, f^a) := \sum_{i=1}^{j} dim C_n(f, u_i), \quad n = 0, 1, ...$$

No que segue, dadas constantes a e b, iremos sempre supor que $f^{-1}([a-\epsilon, b+\epsilon])$ é completo para algum $\epsilon > 0$.

Teorema 4.3 *Dados $f \in C^1(X;\mathbb{R})$ e $-\infty < a < b \leq +\infty$, suponha que*

$$K \cap f^{-1}([a,b]) \ \ \text{é finito e} \ \ K_a = K_b = \emptyset.$$

Se f satisfaz a condição (PS) em $f^{-1}([a,b])$, então

$$M_n(f^b, f^a) \geq B_n(f^b, f^a), \quad \forall n \geq 0.$$

Em particular, se $]a,b[$ contém um único valor crítico de f, então

$$M_n(f^b, f^a) = B_n(f^b, f^a), \quad \forall n \geq 0.$$

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidades, que os números de Morse $M_n(f^b, f^a)$ são todos finitos.

Vamos considerar primeiro o caso em que $c \in]a,b[$ é o único valor crítico de f com $K_c = \{u_1, ..., u_j\}$. O Teorema 2.4 implica

$$H_n(f^b, f^a) \simeq H_n(f^c, f^a) \simeq H_n(f^c, f^c \setminus K_c).$$

Usando a Proposição 4.2, temos

$$H_n(f^c, f^c \setminus K_c) \simeq \oplus_{i=1}^{j} C_n(f, u_i),$$

donde segue que

$$B_n(f^b, f^a) = \sum_{i=1}^{j} \dim\, C_n(f, u_i) = M_n(f^b, f^a).$$

Suponhamos agora que $]a,b[$ contém um número finito de valores críticos c_i, $i = 1, ..., j$, e fixemos números reais a_i tais que

$$a = a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < \cdots < a_{j-1} < c_j < a_j = b.$$

Aplicando o Teorema 1.3 dado no Capítulo 1 para a tripla $(f^{a_2}, f^{a_1}, f^{a_0})$, segue que a sequência

$$H_n(f^{a_1}, f^{a_0}) \to H_n(f^{a_2}, f^{a_0}) \to H_n(f^{a_2}, f^{a_1}).$$

é exata. Consequentemente,

$$B_n(f^{a_2}, f^{a_0}) \leq B_n(f^{a_1}, f^{a_0}) + B_n(f^{a_2}, f^{a_1}).$$

Iterando este argumento para as triplas $(f^{a_{i+1}}, f^{a_i}, f^{a_0})$ e utilizando o resultado anterior, conclui-se que

$$B_n(f^b, f^a) \leq \sum_{i=0}^{j-1} B_n(f^{a_{i+1}}, f^{a_i}) = \sum_{i=0}^{j-1} M_n(f^{a_{i+1}}, f^{a_i}) = M_n(f^b, f^a).$$

□

Observações.

1. A segunda conclusão do teorema é falsa no caso em que a é valor crítico. Suponha-se por exemplo que $a = f(u)$ em que u é um mínimo local isolado. Neste caso, $B_0(f^b, f^a) = B_0(f^a, f^a) = 0$ mas $M_0(f^b, f^a) = dimC_0(f, u) \neq 0$.

2. No teorema anterior, suponha que f é de classe C^2 e considere o fluxo σ associado a ∇f, dado por

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{\nabla f(\sigma(t))}{\|\nabla f(\sigma(t))\|^2}, \quad \sigma(0) = u$$

para cada $u \in X \setminus K$. Seja W um fechado de X tal que $\sigma(t, u) \in W$ sempre que u está em $(f^{-1}(]a, b]) \setminus K) \cap W$ e $t < \omega_+(u)$ é tal que $f(\sigma(t, u)) > a$. Se W contiver apenas um número finito de pontos críticos em $f^{-1}([a, b]) \cap W$, todos incluídos no seu interior, e $K_a \cap W = K_b \cap W = \emptyset$, decorre do Teorema 2.5 que se tem ainda $M_n(f^b \cap W, f^a \cap W) \geq B_n(f^b \cap W, f^a \cap W)$ (desde que f satisfaça a condição (PS) em $f^{-1}([a, b]) \cap W$).

No teorema seguinte, mostramos uma certa estabilidade dos números de Betti para pequenas perturbações na norma de C^0, estabilidade esta que se traduz por uma propriedade de semi-continuidade inferior com respeito a topologia de C^0.

Teorema 4.4 *Dados $f \in C^1(E; \mathbb{R})$ e números $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, suponha que*

(i) f satisfaz a condição (PS) em $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$;

(ii) c é o único valor crítico no intervalo $[c - \epsilon, c + \epsilon]$;

Então, para toda aplicação $g : E \to \mathbb{R}$ tal que

(iii) $\|f - g\|_\infty = \sup_{u \in E} |f(u) - g(u)| \leq \epsilon/3$,

tem-se

$$B_n(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) \leq B_n(g^{c+(\epsilon/2)}, g^{c-(\epsilon/2)}), \quad \forall n.$$

Demonstração: Da hipótese (iii), resulta

$$f^{c-\epsilon} \subset g^{c-(\epsilon/2)} \subset f^{c-(\epsilon/6)} \subset f^{c+(\epsilon/6)} \subset g^{c+(\epsilon/2)} \subset f^{c+\epsilon}.$$

O Teorema 2.4 implica que para todo n

$$H_n(f^{c-(\epsilon/6)}, f^{c-\epsilon}) \simeq H_n(f^{c+\epsilon}, f^{c+(\epsilon/6)}) \simeq 0.$$

Usando a Propriedade 1.5 do Capítulo 1, obtemos

$$B_n(f^{c+(\epsilon/6)}, f^{c-\epsilon}) \leq B_n(g^{c+(\epsilon/2)}, g^{c-(\epsilon/2)})$$

usando novamente o Teorema 2.4,

$$B_n(f^{c+(\epsilon/6)}, f^{c-\epsilon}) = B_n(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}),$$

o que completa a prova. □

Note que na situação acima, se $B_n(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) \neq 0$ para algum n e $g \in C^1(X;\mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS) em E, então g tem um valor crítico no intervalo $[c-(\epsilon/2), c+(\epsilon/2)]$.

Agora, vamos supor que E é um espaço de Hilbert e que f é de classe C^2 na vizinhança de cada ponto crítico. Neste caso, os grupos críticos podem ser calculados através do índice de Morse (ver Apêndice B):

Lema 4.1 *Seja u_0 um ponto crítico isolado de $f \in C^2(X;\mathbb{R})$ e suponha que $f''(u_0)$ é um operador de Fredholm. Denote por n e k a nulidade e o índice de Morse de u_0, respectivamente. Então, existem uma vizinhança fechada W de 0 em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $\tilde{f} \in C^2(W;\mathbb{R})$ admitindo 0 como ponto crítico isolado tais que, para todo $i \geq 0$,*

$$C_i(f, u_0) \simeq H_i(B^k \times (\tilde{f}^c \cap W), (B^k \times (\tilde{f}^c \cap W)) \setminus \{0\})$$

onde $c := f(u_0) = \tilde{f}(0)$.

Demonstração:

Sem perda de generalidades podemos supor que $u_0 = 0$. Designe $L := f''(u_0)$ e decomponha-se o espaço numa soma ortogonal

$$E = N \oplus V_- \oplus V_+,$$

onde $N = Ker(L) \simeq \mathbb{R}^n$ e $dim(V_-) = k$. Para cada $u \in E$ escrevemos $u = w + v = w + v_- + v_+$, com $w \in N$, $v_- \in V_-$, $v_+ \in V_+$.

Tendo em conta o Lema de Morse Generalizado, podemos supor que f é da forma

$$f(u) = \frac{1}{2}\langle Lv, v\rangle + \tilde{f}(w)$$

numa vizinhança $\mathcal{A}$ da origem, onde $\tilde{f}$ é uma função de classe C^2 numa vizinhança de 0 em N e $\tilde{f}(0) = c$. Além disso, 0 é um ponto crítico isolado de $\tilde{f}$.

De acordo com o Teorema 2.6, existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança fechada W de 0 em N (que podemos supor contido em $\mathcal{A}$) e uma homotopia $\tilde{f}$-decrescente $h_t : \tilde{f}^{c+\epsilon} \to N$ tais que

$$h_1(\tilde{f}^{c+\epsilon} \cap W) \subset \tilde{f}^c \cap W \quad \text{e} \quad h_t(u) = u \quad \text{se} \quad u \in \tilde{f}^c \cap W.$$

Se necessário diminuindo $\mathcal{A}$, podemos supor que $\mathcal{A} = W \oplus B$, onde B é uma bola em V centrada na origem; além disso,

$$\tilde{f}(w) \leq c + \epsilon, \quad \forall u = w + v \in \mathcal{A} \cap f^c.$$

Denote $B_- := V_- \cap B$. Pela definição de V_- tem-se

$$(\tilde{f}^c \cap W) \oplus B_- \subset f^c \cap \mathcal{A}.$$

Por outro lado, $\mathcal{A}$ é invariante para a homotopia

$$H(t, u) = h(t, w) + v_- + (1 - t)v_+$$

definida em $f^c \cap \mathcal{A}$, isto é, $H_t(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ para todo o $t \in [0, 1]$, e isto mostra que $(\tilde{f}^c \cap W) \oplus B_-$ é um retrato de deformação forte de $f^c \cap A$. Além disso,

$$u \neq 0 \Longrightarrow H(1, u) \neq 0.$$

Com efeito, se $u = w + v_- + v_+$ é tal que $H(1, u) = 0$ então $v_- = 0$ e

$$\tilde{f}(w) \leq f(w) + \langle Lv_+, v_+\rangle \leq c.$$

Consequentemente, $h(1,w) = w$ pelo que $w = 0$ e também $v_+ = 0$.

Concluimos que $((\tilde{f}^c \cap W) \oplus B_-) \setminus \{0\}$ é um retrato de deformação forte de $f^c \cap \mathcal{A} \setminus \{0\}$, donde segue que

$$\begin{aligned} C_i(f,0) &\simeq H_i(f^c \cap \mathcal{A}, (f^c \cap \mathcal{A}) \setminus \{0\}) \\ &\simeq H_i((\tilde{f}^c \cap W) \oplus B_-, ((\tilde{f}^c \cap W) \oplus B_-) \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

□

Vejamos algumas consequências dos resultados anteriores. O teorema seguinte pode ser visto como uma extensão do Teorema 4.1.

Corolário 4.1 *Seja u_0 um ponto crítico não degenerado de $f \in C^2(X;\mathbb{R})$ e designe k o seu índice de Morse. Então*

$$C_n(f,u_0) \simeq \delta_{n,k}\mathbb{R}, \quad n = 0,1,...$$

Demonstração: Do Lema 4.1, temos

$$C_n(f,u_0) \simeq H_n(B^k, B^k \setminus \{0\}) \simeq \delta_{n,k}\mathbb{R}$$

□

O teorema acima é ilustrado pela função $f(x,y) = x^2 - y^2$ em $\mathbb{R}^2$. A origem é o único ponto crítico da função, tem índice de Morse 1 e $C_i(f,0) \simeq \delta_{i,1}\mathbb{R}$. A situação não é a mesma se o ponto crítico é degenerado. De fato, considere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Verifica-se que a origem é um ponto crítico degenerado de g com índice de Morse nulo e nulidade igual a 2, no entanto $C_i(f,0) \simeq \delta_{i,1}\mathbb{R}^2$ (ver M. Ramos [11], p. 153).

O Teoremas 4.3 e o Corolário 4.1 implicam o seguinte

Corolário 4.2 *Dados $f \in C^1(X;\mathbb{R})$ e $-\infty < a < b \leq +\infty$, suponhamos que*

$$K \cap f^{-1}([a,b]) \ \ \textit{é finito e} \ \ K_a = K_b = \emptyset.$$

Se f for de classe C^2 numa vizinhança de cada ponto crítico $u \in f^{-1}([a,b])$ e estes forem todos pontos críticos não degenerados, então

$$M_n(f^b, f^a) = \textit{número de pontos críticos em } \ f^{-1}([a,b]) \ \textit{ com índice de Morse } \ n.$$

para cada n. Em particular, se f satisfaz a condição (PS) em $f^{-1}([a,b])$, existe n_0 tal que

$$H_n(f^b, f^a) = 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

Podemos agora completar a demonstração do Teorema 4.2.

Corolário 4.3 *Suponhamos que* $E = \mathbb{R}^n$ *e que* u_0 *é um ponto crítico isolado de* $f \in C^2(X;\mathbb{R})$. *Então*

$$dimC_i(f,u_0) < \infty \quad \forall i \quad e \quad C_i(f,u_0) = 0, \quad \forall i > n.$$

Demonstração: Denote por $c = f(u_0)$. Se necessário diminuindo X, podemos supor que X é limitado e que u_0 é o único ponto crítico de f em X. De acordo com a Proposição 4.1, existem $\epsilon > 0$ e uma vizinhança W de u_0 tais que

$$dimC_i(f,u_0) = B_i(f^{c+\epsilon} \cap W, f^{c-\epsilon} \cap W).$$

De acordo com o Teorema de Perturbação do tipo Marino-Prodi dado no Teorema 3.4, existe uma aplicação $g \in C^2(X;\mathbb{R})$ que só admite um número finito de pontos críticos, não degenerados e contidos no interior de W, e tal que $g^{c\pm\epsilon} = f^{c\pm\epsilon}$. Recorde que, por construção, W é invariante para o fluxo associado a ∇f, no sentido descrito na obsevação que segue o Teorema 4.3 (com $a = c - \epsilon, \quad b = c + \epsilon$). Visto que $g = f$ numa vizinhança de u_0 contida no interior de W, deduz-se que W é também invariante para o fluxo σ definido por

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = -\dfrac{\nabla g(\sigma(t))}{\|\nabla g(\sigma(t))\|^2}, \\ \\ \sigma(0) = u. \end{cases}$$

Sendo $g^{-1}([a,b]) \cap W$ compacto, deduzimos daquela observação que

$$B_i(f^{c+\epsilon} \cap W, f^{c-\epsilon} \cap W) = B_i(g^{c+\epsilon} \cap W, g^{c-\epsilon} \cap W) \leq M_i(g^{c+\epsilon} \cap W, g^{c-\epsilon} \cap W).$$

Do Teorema 4.1, podemos concluir o seguinte. □

Teorema 4.5 *Seja* u_0 *um ponto crítico isolado de uma aplicação* $f \in C^2(X;\mathbb{R})$. *Se* $f''(u_0)$ *é um operador de fredholm, então existe* i_0 *tal que*

$$dimC_i(f,u_0) < \infty \quad \forall i \quad e \quad C_i(f,u_0) = 0 \quad \forall i > i_0.$$

Denote por n *e* k *respectivamente a nulidade e o índice de Morse de* u_0. *Temos ainda*

$$C_i(f,u_0) = 0 \quad \forall i \notin \{k, ..., k+n\}.$$

Demonstração: O caso em que $n = 0$ está contido no Teorema 4.1.

Suponhamos então que $n > 0$. Se k é finito, o Lema 4.1 e Propriedade 1.3 dada no Capítulo 1, mostram que

$$C_i(f, u_0) \simeq H_{i-k}(\hat{f}^c \cap W, (\hat{f}^c \cap W) \setminus \{0\}) \simeq C_{i-k}(\hat{f}, 0),$$

pelo que se pode concluir graças ao Corolário 4.3. Resta então mostrar que $C_i(f, u_0) \simeq 0, \quad \forall i$ se k não for finito. O caso não degenerado já foi tratado no Corolário 4.1. O caso geral se reduz a este por um argumento de perturbação como no Corolário 4.3. □

Teorema 4.6 *Dados $f \in C^2(X; \mathbb{R})$ e $-\infty < a < b \leq +\infty$, suponhamos que*

(a) $D^2 f(u)$ é um operador de Fredholm para todo $u \in K \cap f^{-1}([a, b])$;

(b) $K \cap f^{-1}([a, b])$ é compacto e $K_a = K_b = \emptyset$;

(c) f satisfaz a condição (PS) em $f^{-1}([a, b])$.

Então, existe n_0 tal que

$$B_n(f^b, f^a) < \infty \quad \forall n \quad e \quad B_n(f^b, f^a) = 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Além disso, se $K \cap f^{-1}([a, b])$ é finito, então

$$M_n(f^b, f^a) < \infty \quad \forall n \quad e \quad M_n(f^b, f^a) = 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Demonstração:

De acordo com o Teorema de Perturbação do tipo Marino-Prodi dado no Teorema 3.4, existe uma aplicação $g \in C^2(X; \mathbb{R})$ satisfazendo (b) e (c), possuindo apenas um número finito de pontos críticos em $g^{-1}([a, b])$, não degenerados, e tal que $f^a = g^a$ e $f^b = g^b$. A primeira conclusão decorre portanto do Teorema 4.3 e do Corolário 4.2, já que

$$B_n(f^b, f^a) = B_n(g^b, g^a) \leq M_n(g^b, g^a).$$

Por outro lado, no caso em que $K \cap f^{-1}([a, b]) = \{u_1, ..., u_j\}$, tem-se $M_n(f^b, f^a) = \sum_{i=1}^{j} dim\, C_i(f, u_0)$ e o resultado segue do Teorema 4.5. □

Resultados de multiplicidade podem ser obtidos combinando teoremas de minimax e a teoria de Morse. Nas aplicações, Vamos ilustrar este fato na situação do Teorema do Passo da Montanha. No que segue, vamos caracterizar os grupos críticos de um ponto crítico proveniente do Teorema do Passo da Montanha.

Teorema 4.7 (Teorema do Passo da Montanha) *(Mawhin e Willem [10], p. 195)*

Sejam E um espaço de Hilbert e $f \in C^2(E, \mathbb{R})$ verificando a condição (PS) com $f(0) = 0$. Suponha que

(H_1) *Existem $\alpha, r > 0$ tais que $f(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in E$ tal que $\|u\| = r$.*

(H_2) *Existe $e \in E$ tal que $\|e\| > r$ e $f(e) < 0$.*

Defina

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} f(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = e\}.$$

Se cada ponto crítico de f em K_c é isolado em X, então existe $u \in K_c$ tal que $\dim\, C_1(f, u) \geq 1$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ tal que $c - \epsilon > \max\{f(0), f(e)\}$ e c é o único valor crítico de f em $[c - \epsilon, c + \epsilon]$. Considere a seguinte parte

$$\cdots \longrightarrow H_1(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) \xrightarrow{\partial} H_0(f^{c-\epsilon}) \xrightarrow{i_*} H_0(f^{c+\epsilon}) \longrightarrow \cdots$$

da sequência dos grupos de homologia do par $(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon})$.

A definição de c implica que 0 e e são conectados por arcos em $f^{c+\epsilon}$, mas não em $f^{c-\epsilon}$. Então, $\ker(i_*) \neq \{0\}$. De fato, note que $H_0(f^{c-\epsilon}) \neq \{0\}$, pois $f^{c-\epsilon}$ possui mais de uma componente conexa por arcos. Suponha por contradição que $\ker(i_*) = \{0\}$, então i_* seria isomorfismo sobre sua imagem $Im(i_*) \subset H_0(f^{c+\epsilon})$, mas $f^{c+\epsilon}$ é conexo por arcos, logo

$$\dim\, H_0(f^{c+\epsilon}) = 1 \geq \dim\, Im(i_*) \geq 2,$$

o que é um absurdo. Portanto $\ker(i_*) \neq \{0\}$.

Segue do Teorema 4.3 que

$$M_1(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) = B_1(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) = \dim\, H_1(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) \geq 1.$$

Mas,

$$M_1(f^{c+\epsilon}, f^{c-\epsilon}) = \sum_i \dim\, C_1(f, u_i) \geq 1,$$

onde u_i são os pontos críticos de f em $f^{-1}([c + \epsilon, c - \epsilon])$. Note que, necessariamente, $u_i \in K_c$. Portanto, existe $u \in K_c$ tal que

$$\dim\, C_1(f, u) \geq 1.$$

□

Sob certas condições adicionais no teorema acima podemos caracterizar, de forma precisa, os grupos críticos de um ponto crítico proveninte do Teorema do passo da montanha.

Teorema 4.8 *Suponha que $f \in C^2(E, \mathbb{R})$ tem um ponto crítico u tal que $C_1(f,u) \neq 0$ e que $f''(u)$ é um operador de Fredholm com índice de Morse finito, satisfazendo*

$$(\Psi) \quad f''(u) \geq 0 \quad e \quad 0 \in \sigma(f''(u)) \Longrightarrow dim\,[Ker(f''(u))] = 1.$$

Então

$$C_q(f,u) = \delta_{q1} \cdot \mathbb{R}$$

Demonstração: Seja $j = m(f,u)$. Se u é não degenerado, pelo Corolário 4.1, temos $C_q(f,u) = \delta_{qj} \cdot \mathbb{R}$. Sendo $C_1(f,u) \neq 0$, temos $j = 1$ e $C_q(f,u) = \delta_{q1} \cdot \mathbb{R}$.

Caso contrário, do Corolário $B.2$ dado no Apêndice C,

$$C_q(f,u) = C_{q-j}(\tilde{f}, 0),$$

obtemos $j \leq 1$.

No caso em que $j = 1$, $C_1(f,u) = C_0(\tilde{f}, 0) \neq 0$. Logo 0 é um mínimo local de $\tilde{f}$, e

$$C_q(f,u) = C_{q-1}(\tilde{f}, 0) = \delta_{q1} \cdot \mathbb{R}.$$

No caso em que $j = 0$,

$$C_1(f,u) = C_1(\tilde{f}, 0) \neq 0.$$

Agora, $dim[Ker(f''(u))] = 1$, logo 0 é um máximo local de $\tilde{f}$. Portanto

$$C_q(f,u) = C_q(\tilde{f}, 0) = \delta_{q1} \cdot \mathbb{R}.$$

A prova está completa. □

Corolário 4.4 *Sejam $f \in C^2(E, \mathbb{R})$ e $u \in K_c$ dados no Teorema do passo da montanha. Se $f''(u)$ é um operador de Fredholm com índice de Morse finito e se vale a condição (Ψ), então*

$$C_q(f,u) = \delta_{q1} \cdot \mathbb{R}, \quad q \geq 0$$

O próximo teorema, encontrado em Kanishka [20], estabelece um importante resultado envolvendo grupos críticos quando temos uma geometria de linking.

Teorema 4.9 *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Hilbert e f' Lipschitziana em uma vizinhança da origem. Suponha que f' satisfaça a condição de linking local*

(i)' $f(u) \leq 0, \quad u \in V, \quad \|u\| \leq \rho,$

(ii)' $f(u) \geq 0, \quad u \in W, \quad \|u\| \leq \rho,$

com $\dim V = j$. *Então* $C_j(f, 0) \neq 0$.

Demonstração:

Para demonstrar o Teorema 4.9, vamos usar o resultado de deformação dado no Teorema 2.8 do Capítulo 2.

Pelo item *1*. do Teorema 2.8,

$$C_j(f, 0) = H_j(f^0 \cap h(B), f^0 \cap h(B) \setminus \{0\}).$$

Pela condição de linking local dada no Teorema 4.9 e *2*. e *3*. do Teorema 2.8,

$$\partial B \cap V \subset f^0 \cap h(B) \setminus \{0\} \subset h(B \setminus W)$$

e

$$B \cap V \subset f^0 \cap h(B).$$

Sendo $h|_{\partial B \cap V} = Id_{\partial B \cap V}$, a inclusão $\partial B \cap V \hookrightarrow h(B \setminus W)$ pode também ser escrita como a composição das inclusões $i' : \partial B \cap V \to B \setminus W$ e a restrição de h a $B \setminus W$. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo induzido pelas inclusões e h:

$$\begin{tikzcd}
H_{j-1}(B \setminus W) \arrow[d, "h_*"] & H_{j-1}(\partial B \cap V) \arrow[l, "i'_*"'] \arrow[r] \arrow[d, "i''_*"] & H_{j-1}(B \cap V) \arrow[d] \\
H_{j-1}(h(B \setminus W)) & H_{j-1}(f^0 \cap h(B) \setminus \{0\}) \arrow[l] \arrow[r, "i_*"] & H_{j-1}(f^0 \cap h(B))
\end{tikzcd}$$

A aplicação $(t, x) \longmapsto tx_1 + (1 - t)x$, nos mostra que $\partial B \cap V$ é um retrato de deformação de $B \setminus W$, com isto, e com o fato de que h é um homeomorfismo, i'_* e h_* são isomorfismos, logo i''_* é um monomorfismo.

Da caracterização dos grupos de homologia de bolas e esferas dadas no Capítulo 1, temos

$$dim H_{j-1}(B \cap V) < dim H_{j-1}(\partial B \cap V)$$

de onde segue que i_* não é um monomorfismo.

Agora, da seguinte porção de sequência exata do par $(f^0 \cap h(B), f^0 \cap h(B) \setminus \{0\})$

$$C_j(f,0) \xrightarrow{\partial_*} H_{j-1}(f^0 \cap h(B) \setminus \{0\}) \xrightarrow{i_*} H_{j-1}(f^0 \cap h(B))$$

segue que $C_j(f,0) = H_j(f^0 \cap h(B), f^0 \cap h(B) \setminus \{0\}) \neq 0$. □

4.3 As desigualdades de Morse

Considere uma aplicação $f \in C^1(X;\mathbb{R})$ onde X é um aberto de um espaço de Banach E.

Definição 4.3 *Dados $-\infty < a < b \leq +\infty$, diz-se que o par (f^b, f^a) é admissível se*

(a) f satisfaz a condição (PS) em $f^{-1}([a,b])$;

(b) $K \cap f^{-1}([a,b])$ é finito e $K_a = K_b = \emptyset$;

(c) os números de Morse $M_n(f^b, f^a)$ são finitos, e nulos para n grande.

Por exemplo, se E for um espaço de Hilbert, $f \in C^1(X;\mathbb{R})$ tiver derivada de segunda ordem de Fredholm e satisfizer (a) e (b), resulta do Teorema 4.6 que o par (f^b, f^a) é admissível.

A fórmula que aparece no teorema seguinte é conhecida pelo nome *relação de Morse* e relaciona de uma maneira precisa a topologia do par (f^b, f^a) com a estrutura local dos pontos críticos da função.

Teorema 4.10 *Dada $f \in C^1(X;\mathbb{R})$, suponhamos que o par (f^b, f^a) é admissível. Então, existe um polinômio $Q(t)$ com coeficientes inteiros e não negativos tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(f^b, f^a)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(f^b, f^a)t^n + (1+t)Q(t).$$

Demonstração: O Teorema 4.3 implica que os números de Betti $B_n(f^b, f^a)$ são todos finitos e são nulos a partir de certa ordem. Em particular, as séries na identidade acima são somas finitas.

Nas notações da demonstração do Teorema 4.3, temos

$$M_n(f^b, f^a) = \sum_{i=0}^{j-1} B_n(f^{a_{i+1}}, f^{a_i}).$$

Para cada i, considere a sequência exata de homologia

$$H_{n+1}(f^b, f^{a_{i+1}}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(f^{a_{i+1}}, f^{a_i}) \xrightarrow{i_n} H_n(f^b, f^{a_i}) \xrightarrow{j_n} H_n(f^b, f^{a_{i+1}}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(f^{a_{i+1}}, f^{a_i}).$$

Denote por $R_n(a_i) := dim(Im(\partial_n))$. Por exatidão, tem-se

$$\begin{aligned} B_n(f^b, f^{a_{i+1}}) &= dim(Im(j_n)) + R_n(a_i); \\ B_n(f^{a_{i+1}}, f^{a_i}) &= dim(Im(i_n)) + R_{n+1}(a_i); \\ B_n(f^b, f^{a_i}) &= dim(Im(j_n)) + dim(Im(i_n)), \end{aligned}$$

donde concluimos que

$$B_n(f^b, f^{a_{i+1}}) + B_n(f^{a_{i+1}}, f^{a_i}) = B_n(f^b, f^{a_i}) + R_n(a_i) + R_{n+1}(a_i).$$

Adicionando-se as identidades anteriores e tendo em conta que $B_n(f^b, f^b) = 0$, obtemos

$$M_n(f^b, f^a) = B_n(f^b, f^a) + \sum_{i=0}^{j-1}(R_n(a_i) + R_{n+1}(a_i)).$$

Denote por $Q(t, a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{n+1}(a_i)t^n$. Desde que $R_0(a_i) = 0$, temos

$$tQ(t, a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(a_i)t^n.$$

Consequentemente, multiplicando os dois membros da identidade anterior por t^n e somando, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(f^b, f^a)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(f^b, f^a)t^n + (1 + t)Q(t)$$

onde

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{j-1} Q(t, a_i).$$

□

Corolário 4.5 *Nas condições do Teorema 4.10,*

(i) $M_n(f^b, f^a) \geq B_n(f^b, f^a) \quad \forall n$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n M_n(f^b, f^a) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n(f^b, f^a)$;

(iii) se $M_n(f^b, f^a) \cdot M_{n+1}(f^b, f^a) = 0 \quad \forall n$ *então* $M_n(f^b, f^a) = B_n(f^b, f^a) \quad \forall n$.

Demonstração: A conclusão em (ii) obtemos fazendo $t = -1$ na identidade do Teorema 4.10. Por outro lado, escrevendo $Q(t) = \sum \alpha_n t^n$ com $\alpha_n \geq 0$, temos $M_0 = B_0 + \alpha_0$ e

$$M_n = B_n + \alpha_n + \alpha_{n-1}$$

para todo $n > 0$, o que implica (i). Além disso, temos $\alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$, sempre que $M_n = 0$, donde segue que a hipótese em (iii) implica $Q(t) \equiv 0$.

$\square$

O número

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n(f^b, f^a)$$

é chamado a *característica de Euler-Poincaré* do par (f^b, f^a). Observemos ainda que a conclusão em (i) foi provada no Teorema 4.3 sob hipóteses ligeiramente mais gerais.

A título de ilustração do Teorema 4.10 demonstramos o seguinte resultado.

Proposição 4.3 *Seja E um espaço de Hilbert. Assuma que $f \in C^2(E; \mathbb{R})$ é limitada inferiormente. Se f tem apenas um número finito de pontos críticos todos não degenerados, então f tem um número ímpar de pontos críticos.*

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que f tem um número par de pontos críticos. Vamos fixar $b = +\infty$ e $a < f(u_0)$. Note que $(f^b, f^a) = (E, \emptyset)$. Sendo assim,

$$B_n(f^b, f^a) = B_n(E, \emptyset) \simeq B_n(E)$$

e pela Propriedade 1.9 do Capítulo 1, temos

$$B_n(E) = dim\, H_n(E) = \delta_{n,0}.$$

Usando (ii) do Corolário 4.5, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n M_n(E) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n(E) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta_{n0},$$

o que implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n M_n(E) = 1. \tag{4.3}$$

Por outro lado, o Corolário 4.2 nos diz que

$$M_n(E) \;=\; \text{número de pontos críticos de } \; f \; \text{ com índice de Morse } \; n.$$

Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(E) \;=\; \text{número de pontos críticos de } \; f,$$

que supomos (por contradição) ser par, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(E) = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Somando (4.3) e (4.4), obtemos

$$2\sum_{j=0}^{\infty} M_{2j}(E) = 2k+1,$$

o que é um absurdo. Portanto f tem um número ímpar de pontos críticos. $\square$

Teorema 4.11 *Seja $f \in C^2(E;\mathbb{R})$ limitado inferiormente. Assuma que f satisfaz a condição (PS) e que u_1 é um ponto crítico não degenerado de f que não é ponto de mínimo com índice de Morse finito. Então f tem pelo menos três pontos críticos.*

Demonstração: O Teorema $C.12$ do Apêndice C nos garante a existência de um ponto de mínimo $u_0 \in E$, logo

$$C_n(f, u_0) = \delta_{n,0} \cdot \mathbb{R}.$$

Seja $k_1 = m(f, u_1)$ o índice de Morse de u_1. Sendo u_1 um ponto crítico não degenerado de f, segue do Corolário 4.1 que

$$C_n(f, u_1) = \delta_{n,k_1} \cdot \mathbb{R}.$$

Suponhamos por contradição que u_0 e u_1 são os únicos pontos críticos de f. Considerando $b = +\infty$ e $a < \inf_E f$. Os números de Betti do par (f^b, f^a), são

$$B_n(f^b, f^a) = B_n(E) = \dim\, H_n(E) = \delta_{n,0}$$

e os números de Morse são

$M_0(f^b, f^a) = \dim\, C_0(f, u_0) = 1;$

$M_{k_1}(f^b, f^a) = \dim\, C_{k_1}(f, u_1) = 1;$

$M_n(f^b, f^a) = 0$, se $n \neq 0,\ k_1$.

Daí e da relação de Morse, existe um polinômio $Q(t)$ com coeficientes inteiros e não negativos tal que

$$1 + t^{k_1} = 1 + (1+t)Q(t),$$

ou seja

$$t^{k_1} = (1+t)Q(t).$$

Substituindo $t = 1$, na expressão acima, obtemos

$$1 = 2Q(1),$$

o que é um absurdo. Portanto f tem pelo menos três pontos críticos. $\square$

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo, apresentamos alguns exemplos de como o método variacional aliado a teoria de Morse pode ser aplicada no estudo de existência e multiplicidade de soluções para algumas classes de equações elípticas.

5.1 Um teorema de três pontos críticos

Nesta seção, seguindo os passos de [18], vamos aplicar o Teorema 4.11 do Capítulo 4 para mostrar existência de pelo menos três soluções para o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave. Assumiremos que

(f_1) $f \in C^1(\mathbb{R})$ e

$$|f'(t)| \leq c_1(1 + |t|^{p-2}), \quad 2 \leq p < 2^*,$$

onde $2^* = +\infty$ se $N = 2$, $2^* = 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$.

Sejam $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Assumiremos também que

(f_2) $F(t) \leq c_2(1 + t^2)$, $c_2 < \lambda_1/2$, onde $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$,

(f_3) $f(0) = 0$ e $\lambda_j < f'(0) < \lambda_{j+1}$, para algum $j \geq 1$.

Segue de (f_1) que as soluções de (5.1) são pontos críticos do funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)dx.$$

Mostra-se que $\Phi \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(u)v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\Phi''(u)(v, w) = \int_\Omega \nabla v \nabla w dx - \int_\Omega f'(u)vw, \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega).$$

O nosso principal resultado nesta seção é o seguinte:

Teorema 5.1 *Sob as hipóteses* $(f_1) - (f_3)$, *o problema* (5.1) *tem pelo menos três soluções.*

Para demonstrar o Teorema 5.1, precisamos dos seguintes resultados.

Lema 5.1 *O funcional* Φ *é limitado inferiormente.*

Demonstração: Usando a hipótese (f_2),

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_2 \int_\Omega (1 + |u|^2)dx,$$

o que implica

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_2|\Omega| - c_2|u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Agora, usando a desigualdade de Poincaré

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1}\|u\|^2,$$

ficamos com

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_2|\Omega| - \frac{c_2}{\lambda_1}\|u\|^2,$$

donde segue que

$$\Phi(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{c_2}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - c_2|\Omega|.$$

Sendo $c_2 < \dfrac{\lambda_1}{2}$, concluimos que Φ é coercivo, e portanto, limitado inferiormente. $\square$

Lema 5.2 *O funcional* Φ *satisfaz a condição* (PS).

Demonstração:

Seja $\{u_n\}$ uma sequência (PS) para Φ, isto é,

$$\{\Phi(u_n)\} \text{ é limitada}$$

e

$$\Phi'(u_n) \to 0 \text{ em } X'.$$

Afirmação 5.1 *A sequência* $\{u_n\}$ *é limitada.*

Suponhamos, por contradição, que $\{u_n\}$ não seja limitada. Então, existe uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$ tal que $\|u_{n_j}\| \to +\infty$. Da coercividade de Φ, temos $\Phi(u_{n_j}) \to +\infty$, mas $\Phi(u_n) \to c$, o que é uma contradição. Portanto $\{u_n\}$ é limitada.

A hipótese (f_1) implica que os funcionais

$$\psi(u) = \int_\Omega F(u)dx \quad e \quad \varphi(u) = \int_\Omega f(u)udx$$

definidos em $H_0^1(\Omega)$ são completamente contínuos, isto é,

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} \psi(v_n) \to \psi(v) \\ \quad e \\ \varphi(v_n) \to \varphi(v). \end{cases}$$

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert, e portanto reflexivo, existem $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Usando as imersões compacta de Rellich dadas no Teorema $C.15$ do Apêndice C, a menos de subsequência

$$u_{n_j} \to u \text{ em } L^s(\Omega)$$

para $1 \leq s < 2^*$ se $N \geq 3$ e $s \geq 1$ se $N = 1, 2$.

Usando o Teorema $C.2$ do Apêndice C, podemos supor que a menos de subsequência

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \tag{5.2}$$

e

$$|u_{n_j}(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \tag{5.3}$$

com $h \in L^s(\Omega), \quad s \geq 1$.

Agora, note que

$$\begin{aligned} \|u_{n_j} - u\|^2 &= \langle u_{n_j} - u, u_{n_j} - u \rangle \\ &= \langle u_{n_j}, u_{n_j} - u \rangle - \langle u, u_{n_j} - u \rangle \\ &= \|u_{n_j}\|^2 - \langle u_{n_j}, u \rangle + o_n(1), \end{aligned}$$

onde

$$o_n(1) = -\langle u, u_{n_j} - u \rangle = \|u\|^2 - \langle u_{n_j}, u \rangle,$$

pois $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ implica $\langle u_{n_j}, u \rangle \to \langle u, u \rangle = \|u\|^2$.

Observe que

$$\|u_{n_j}\|^2 = \Phi'(u_{n_j})u_{n_j} + \int_\Omega f(u_{n_j})u_{n_j}$$

e

$$-\langle u_{n_j}, u \rangle = -\Phi'(u_{n_j})u - \int_\Omega f(u_{n_j})u.$$

Sendo $\{u_{n_j}\}$ uma sequência Palais-Smale limitada e $\Phi'(u_n)$ contínuo (limitado), temos

$$|\Phi'(u_{n_j})u_{n_j}| \leq \|\Phi'(u_{n_j})\| \|u_{n_j}\| \leq K \|\Phi'(u_{n_j})\| \to 0$$

e

$$|\Phi'(u_{n_j})u| \leq \|\Phi'(u_{n_j})\| \|u\| \to 0,$$

mostrando que

$$\Phi'(u_{n_j})u_{n_j} = o_n(1) \text{ e } \Phi'(u_{n_j})u = o_n(1).$$

Sendo assim, podemos escrever

$$\|u_{n_j}\|^2 = \int_\Omega f(u_{n_j})u_{n_j} + o_n(1)$$

e

$$-\langle u_{n_j}, u \rangle = -\int_\Omega f(u_{n_j})u + o_n(1).$$

Desde que

$$\|u_{n_j} - u\|^2 = \|u_{n_j}\|^2 - \langle u_{n_j}, u \rangle + o_n(1),$$

Concluimos que

$$\|u_{n_j} - u\|^2 = \int_\Omega f(u_{n_j})u_{n_j} - \int_\Omega f(u_{n_j})u + o_n(1).$$

Usando (5.2), (5.3), a condição de crescimento sobre f dada em (f_1) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue dado no Teorema $C.1$ do Apêndice C, mostra-se que

$$\int_\Omega f(u_{n_j})u_{n_j} \longrightarrow \int_\Omega f(u)u$$

e

$$\int_\Omega f(u_{n_j})u \longrightarrow \int_\Omega f(u)u.$$

Portanto

$$\|u_{n_j} - u\|^2 \to 0 \text{ em } \mathbb{R},$$

ou seja,

$$u_{n_j} \to u \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

mostrando que o funcional Φ verifica a condição (PS).

$\square$

Lema 5.3 *A origem de $H_0^1(\Omega)$ é um ponto crítico não degenerado de Φ.*

Demonstração: Para o funcional $\Phi \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx,$$

temos

$$\Phi''(0)(v, w) = \int_\Omega \nabla v \nabla w dx - \int_\Omega f'(0)vwdx.$$

Para mostrar que 0 é ponto crítico não degenerado (ver Apêndice B), devemos mostrar que

$$L = \Phi''(0) : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

dado por

$$\Phi''(0)(v, w) = \langle Lv, w\rangle$$

é invertível.

O Teorema da Representação de Riesz dado no Teorema $C.4$ do Apêndice C garante a existência de uma aplicação linear e contínua $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle Tv, w\rangle = \int_\Omega f'(0)vwdx.$$

Assim, se indicarmos por I a aplicação identidade de $H_0^1(\Omega)$, podemos escrever

$$\Phi''(0)(v, w) = \langle Iv, w\rangle - \langle Tv, w\rangle,$$

ou melhor

$$\Phi''(0)(v, w) = \langle (I - T)v, w\rangle.$$

Portanto $L = I - T$. Claramente o operador $I - T$ é linear contínuo e simétrico. Vamos mostrar que T é um operador compacto:

Seja $\{v_n\}$ uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$. Pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, existem uma subsequência $\{v_{n_j}\}$ de $\{v_n\}$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_{n_j} \to v \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Vamos mostrar que $Tv_{n_j} \to Tv$ em $H_0^1(\Omega)$. Note que

$$\begin{aligned}
\|Tv_{n_j} - Tv\|^2 &= \langle Tv_{n_j} - Tv, Tv_{n_j} - Tv\rangle \\
&= \langle Tv_{n_j}, Tv_{n_j} - Tv\rangle - \langle Tv, Tv_{n_j} - Tv\rangle \\
&= \int_\Omega f'(0)v_{n_j}(Tv_{n_j} - Tv)dx - \int_\Omega f'(0)v(Tv_{n_j} - Tv)dx,
\end{aligned}$$

ou melhor

$$\|Tv_{n_j} - Tv\|^2 = \int_\Omega f'(0)(v_{n_j} - v)(Tv_{n_j} - Tv)dx.$$

Usando a Desigualdade de Hölder dada no Teorema $C.3$ do Apêndice C, obtemos

$$\|Tv_{n_j} - Tv\|^2 \leq f'(0)|v_{n_j} - v|_{L^2(\Omega)}|Tv_{n_j} - Tv|_{L^2(\Omega)}.$$

Pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|Tv_{n_j} - Tv\|^2 \leq \frac{f'(0)}{\lambda_1}|v_{n_j} - v|_{L^2(\Omega)}\|Tv_{n_j} - Tv\|,$$

de onde segue que

$$\|Tv_{n_j} - Tv\| \leq \frac{f'(0)}{\lambda_1}|v_{n_j} - v|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

logo $Tv_{n_j} \to Tv$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto T é um operador compacto.

Pela alternativa de Fredholm (ver Apêndice B, Teorema $B.1$), para mostrar que $I - T$ é bijetivo, basta mostrar que o mesmo é injetivo, isto é, $Ker(I - T) = 0$. Se $v \in Ker(I - T)$, temos

$$\langle (I - T)v, w\rangle = 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

implicando que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w dx = \int_\Omega f'(0) v w dx, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

donde segue que $v \in Ker(I - T)$ é solução do problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta v = f'(0)v, & \Omega \\ \quad v = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue da hipótese em (f_3) que $v = 0$. Logo $L = I - T$ é linear contínuo e bijetivo. Além disso, pelo Teorema da Aplicação Aberta, $L = I - T$ é isomorfismo linear. Portanto 0 é ponto crítico não degenerado de Φ. $\square$

Lema 5.4 *O índice de Morse de Φ em $u = 0$ é maior do que ou igual a 1, ou seja, $m(\Phi, 0) \geq 1$.*

Demonstração:

O índice de Morse de Φ em 0 é o supremo das dimensões de subespaços de $H_0^1(\Omega)$, sobre os quais $\Phi''(0)$ é negativa definida, isto é, $\Phi''(0)(v, v) < 0$, conforme definimos no Apêndice B. Sabemos que

$$\Phi''(0)(v, v) = \langle Lv, v\rangle = \int_\Omega |\nabla v|^2 - f'(0)\int_\Omega |v|^2.$$

Assim, se φ_i é uma autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associado ao autovalor λ_i, temos

$$\Phi''(0)(\varphi_i, \varphi_i) < \int_\Omega |\varphi_i|^2 \left[\lambda_i - f'(0)\right] < 0$$

para todo $1 \leq i \leq j$, onde j é dado na hipótese (f_3). Portanto $m(0, J) \geq j \geq 1$. $\square$

Prova do Teorema 5.1

Segue dos Lemas 5.1 e 5.2 e do Teorema $C.12$ do Apêndice C que Φ tem um ponto crítico de mínimo u_0. Pelo Lema 5.3, $u_1 = 0$ é ponto crítico não degenerado com índice de Morse j finito e sendo $j \geq 1$ segue que $u_1 = 0$ não é ponto de mínimo, em particular $u_1 = 0 \neq u_0$. Pelo Teorema 4.11, Φ tem pelo menos três pontos críticos, mostrando que o Problema (5.1) tem pelo menos duas soluções não triviais.

5.2 Problema de Dirichlet superlinear.

Nesta seção, seguindo os passos de [19], usaremos a teoria de linking aliada a teoria de Morse para estabelecer a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.4}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave. Assumiremos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento subcrítico, ou seja,

(F1) A desigualdade $|f(x,t)| \leq C(1 + |t|^{q-1})$ vale para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, e para alguma constante positiva C, onde $1 \leq q < 2^* = 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$, e $1 \leq q < \infty$ se $N = 1, 2$.

Sabemos que soluções fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ de (5.4) são pontos críticos do funcional de classe C^1

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$.

Sejam λ_1 e λ_2 o primeiro e segundo autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Sabemos que $\lambda_1 > 0$ é um autovalor simples, e que $\sigma(-\Delta) \cap (\lambda_1, \lambda_2) = \emptyset$, onde $\sigma(-\Delta)$ é o espectro de $-\Delta$.

Vamos assumir as seguintes hipóteses:

(F2) Existem $r > 0$ e $\hat{\lambda} \in (\lambda_1, \lambda_2)$ tais que

$$\lambda_1 |t|^2 \leq 2F(x,t) \leq \hat{\lambda}|t|^2 \quad \text{para} \quad |t| \leq r.$$

(F3) Existem $\theta > 2$ e $M > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x,t) \leq t f(x,t) \quad \text{para} \quad |t| \geq M.$$

O principal resultado desta seção é o seguinte.

Teorema 5.2 *Sob as hipóteses* $(F1)-(F3)$*, o problema* (5.4) *tem uma solução fraca não trivial em* $H_0^1(\Omega)$*.*

Para provar o Teorema 5.2, primeiro vamos demonstrar alguns lemas.

Lema 5.5 *Sob as condições* $(F1)$ *e* $(F3)$*, o funcional* Φ *satisfaz a condição* (PS)*.*

Demonstração:

Seja $(u_n) \in H_0^1(\Omega)$ uma sequência (PS) para Φ, ou seja,

$$\{\Phi(u_n)\} \text{ é limitada}$$

e

$$\Phi'(u_n) \to 0.$$

Considere $d := \sup_n \Phi(u_n)$. Por $(F3)$,

$$\begin{aligned}
\theta d + \|u_n\| &\geq \theta\Phi(u_n) + \langle \Phi'(u_n), u_n\rangle \\
&= \left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 - \int_{|u_n|\geq M|} [\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n] \\
&\quad - \int_{|u_n|\leq M} [\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n] \\
&\geq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 - \int_{|u_n|\leq M} [\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n] \\
&\geq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 - D, \quad \text{para algum} \quad D \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

donde segue que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert, e portanto reflexivo, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ a menos de subsequência. Agora, por causa da condição $(F1)$, o mesmo argumento usado na demonstração do Lema 5.2 mostra que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Seja $V = \langle \phi_1 \rangle$ o autoespaço de dimensão 1 associado ao autovalor λ_1, onde $\phi_1 > 0$ em Ω e $\|\phi_1\| = 1$. Considere o subespaço $W = V^\perp$ em $H_0^1(\Omega)$, logo

$$H_0^1(\Omega) = V \oplus W.$$

No que segue, usaremos a seguinte caracterização de λ_2

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \lambda_2 \int_\Omega |u|^2, \quad \forall u \in W.$$

Lema 5.6 *Sob a hipótese* $(F2)$*, o funcional* Φ *tem um linking local na origem com respeito a* $H_0^1(\Omega) = V \oplus W$*, isto é, existe* $\rho > 0$ *tal que*

(i) $\Phi(u) \leq 0, \quad u \in V, \quad \|u\| \leq \rho,$

(ii) $\Phi(u) > 0, \quad u \in W, \quad 0 < \|u\| \leq \rho.$

Demonstração: (i) Fixe $v \in V$. Então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $v = t\phi_1$. Assim,

$$\|v\| = \|t\phi_1\| \leq \rho \Longleftrightarrow |t| \leq \rho.$$

Sendo $\phi_1 \in L^\infty(\Omega)$, podemos fixar $0 < \rho \approx 0$ de modo que

$$|t\phi_1(x)| \leq r, \quad \text{para} \quad |t| \leq \rho \quad \text{e} \quad x \in \Omega.$$

Desta forma

$$\Phi(v) = \Phi(t\phi_1) = \frac{1}{2}\|t\phi_1\| - \int_\Omega F(x, t\phi_1(x))dx.$$

Por $(F2)$,

$$\lambda_1 |t\phi_1(x)|^2 \leq 2F(x, t\phi_1(x)),$$

logo

$$\Phi(v) \leq \frac{t^2}{2}\|\phi_1\|^2 - \frac{\lambda_1 t^2}{2}\int_\Omega |\phi_1| dx$$

ou melhor

$$\Phi(v) \leq \frac{t^2}{2}\left[\|\phi_1\|^2 - \lambda_1 \int_\Omega |\phi_1| dx\right] = 0.$$

Portanto

$$\Phi(v) \leq 0, \quad \|v\| \leq \rho, \quad v \in V = \langle \phi_1 \rangle.$$

(ii) De $(F1)$ e $(F2)$,

$$F(x, u) \leq \frac{\hat{\lambda}}{2}|u|^2 + C|u|^s$$

para cada $u \in W$, $q < s < 2^*$ e para alguma constante $C > 0$. Usando a caracterização de λ_2 e as imersões de Sobolev, segue que

$$
\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u) \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\hat{\lambda}}{2}\int_\Omega |u|^2 - C\int_\Omega |u|^s \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\hat{\lambda}}{2\lambda_2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \tilde{C}\left(\int_\Omega |\nabla u|\right)^s,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_2}\right)\|u\|^2 - C\|u\|^s$$

Fixando $0 < \rho$ suficientemente pequeno, e sendo $\hat{\lambda} < \lambda_2$, concluimos que

$$\Phi(u) > 0, \quad u \in W, \quad 0 < \|u\| \leq \rho.$$

$\square$

Sendo $dimV = 1$, do Lema 5.6 e do Teorema 4.9, obtemos

Lema 5.7 *Sob a hipótese $(F2)$, 0 é um ponto crítico de Φ e $C_1(\Phi, 0) \neq 0$.*

Para encontrar pontos críticos de Φ, vamos investigar o comportamento de Φ próximo do infinito

Lema 5.8 *Sob a hipótese $(F3)$, existe uma constante $A > 0$ tal que*

$$\Phi^a \simeq S^\infty, \quad \textit{para} \quad a < -A,$$

onde S^∞ é a esfera unitária em $H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$H_n(H_0^1(\Omega), \Phi^a) \simeq H_n(H_0^1(\Omega), S^\infty), \quad n \geq 0.$$

Demonstração:

Da condição (F3), segue que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$F(x,t) \geq C_1|t|^\theta, \quad \text{para} \quad |t| \geq M. \tag{5.5}$$

Afirmação 5.2 *Para $u \in S^\infty$, temos $\Phi(tu) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$.*

Prova da afirmação. Para $u \in S^\infty$,

$$\begin{aligned}\Phi(tu) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,tu)dx \\ &= \frac{t^2}{2} - \int_{|tu|\geq M} F(x,tu)dx - \int_{|tu|<M} F(x,tu)dx.\end{aligned}$$

Usando (5.5)

$$\Phi(tu) \leq \frac{t^2}{2} - C|t|^\theta \int_\Omega |u|^\theta dx - \int_{|tu|<M} F(x,tu)dx.$$

Daí e do fato que $\theta > 2$, obtemos

$$\Phi(tu) \leq \frac{t^2}{2} - \tilde{C}|t|^\theta + K \to -\infty, \quad \text{quando} \quad |t| \to +\infty.$$

Afirmação 5.3 *Existe $A > 0$ tal que, para $a < -A$ e $\Phi(tu) \leq a$, tem-se*

$$\frac{d}{dt}\Phi(tu) < 0.$$

Prova da afirmação. Defina

$$A := \left(1 + \frac{1}{2}\right) M|\Omega| \max_{\bar{\Omega}\times[-M,M]} |f(x,u)| + 1.$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,v) - \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,v)v &= \int_{|v|\geq M} F(x,v) + \int_{|v|\leq M} F(x,v) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{|v|\geq M} f(x,v)v - \int_{|v|\leq M} f(x,v)v \\ &\leq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\int_{|v|\geq M} f(x,v)v + \int_{|v|\leq M} F(x,v) - \frac{1}{2}\int_{|v|\leq M} f(x,v)v.\end{aligned}$$

Para $|t| \leq M$,

$$-\frac{1}{2}f(x,t)t \leq \left|\frac{1}{2}f(x,t)t\right| \leq \frac{|t|}{2}|f(x,t)| \leq \frac{M}{2}|f(x,t)|$$

logo

$$-\frac{1}{2}f(x,t)t \leq \frac{M}{2}\max_{\bar{\Omega}\times[-M,M]} |f(x,t)|.$$

Para $0 < t \leq M$,

$$\begin{aligned}|F(x,t)| &= \left|\int_0^t f(x,s)ds\right| \leq \int_0^t |f(x,s)|ds \\ &\leq t\max|f(x,t)| \leq M\max|f(x,t)|.\end{aligned}$$

Então,

$$\int_\Omega F(x,v) - \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,v)v \leq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\int_{|v|\geq M} f(x,v)v + \left(1+\frac{1}{2}\right)|\Omega| M \max|f(x,t)|$$

ou melhor

$$\int_\Omega F(x,v)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,v)vdx \leq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\int_{|v|\geq M} f(x,v)vdx + A - 1 \tag{5.6}$$

Assim, para $a < -A$ e $u \in S^\infty$,

$$\Phi(tu) = \frac{t^2}{2} - \int_\Omega F(x,tu)dx < a$$

e

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\Phi(tu) &= \Phi'(tu)u = t - \int_\Omega f(x,tu)u \\
&= \frac{2t^2}{2t} - \frac{2}{t}\int_\Omega F(x,tu) + \frac{2}{t}\int_\Omega F(x,tu) - \frac{1}{t}\int_\Omega f(x,tu)tu \\
&= \frac{2}{t}\left\{\frac{t^2}{2} - \int_\Omega F(x,tu) + \int_\Omega F(x,tu) - \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,tu)tu\right\} \\
&= \frac{2}{t}\left\{\Phi(tu) + \int_\Omega F(x,tu) - \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,tu)tu\right\}
\end{aligned}$$

Usando (5.6) e o fato que $\Phi(tu) \leq a$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\Phi(tu) \leq \frac{2}{t}\left\{a + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\int_{|tu|\geq M} f(x,tu)(tu) + A - 1\right\}.$$

Sendo $a + A < 0$,

$$\frac{d}{dt}\Phi(tu) \leq \frac{2}{t}\left\{\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\int_{|tu|\geq M} f(x,tu)(tu) - 1\right\} < 0 \quad (t>0).$$

Assim, para $u \in S^\infty$ com $\Phi(tu) \leq a$,

$$\frac{d}{dt}\Phi(tu) < 0.$$

Logo, a aplicação $t \longmapsto \Phi(tu)$ é monótona decrescente. Consequentemente, para $u \in S^\infty$, existe um único $T(u) > 0$ tal que $\Phi(T(u)u) = a$. Portanto, podemos definir uma função contínua $T : S^\infty \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\Phi(T(u)u) = a$.

Considere

$$\begin{aligned}
\tilde{T} \; &: \; H_0^1(\Omega)\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto \tilde{T}(u) = \frac{1}{\|u\|}T\left(\frac{u}{\|u\|}\right).
\end{aligned}$$

Então, $\tilde{T} \in C(H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ e para todo $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, temos

$$\Phi(\tilde{T}(u)u) = a.$$

Além disso, se $\Phi(u) = a$, então

$$\tilde{T}(u) = 1.$$

Agora, definamos a função

$$\hat{T}(u) := \begin{cases} \tilde{T}(u), & \text{se } \Phi(u) \geq a, \\ 1, & \text{se } \Phi(u) \leq a. \end{cases}$$

Como $\Phi(u) = a$ implica em $\tilde{T}(u) = 1$, concluimos que $\hat{T} \in C(H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, \mathbb{R})$.

Finalmente, definimos a aplicação $\eta : [0,1] \times (H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}) \to (H_0^1(\Omega) \setminus \{0\})$ por

$$\eta(s,u) = (1-s)u + s\hat{T}(u)u.$$

Facilmente, vê-se que η é um retração de deformação forte de $H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ em Φ^a, ou seja,

$$\eta(0,\cdot) = Id(\cdot);$$

$$\eta(1, (H_0^1(\Omega) \setminus \{0\})) \subset \Phi^a$$

e

$$\eta(t,\cdot)|_{\Phi^a} = Id|_{\Phi^a}(\cdot).$$

Portanto

$$\Phi^a \simeq H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \simeq S^\infty,$$

fica assim provado o Lema 5.8. □

Prova do Teorema 5.2

Pelo Lema 5.5, Φ satisfaz a condição Palais-Smale. Note que $\Phi(0) = 0$, da Proposição 4.1 do Capítulo 4, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$H_1(\Phi^\epsilon, \Phi^{-\epsilon}) = C_1(\Phi, 0).$$

Usando o Lema 5.7, segue que

$$H_1(\Phi^\epsilon, \Phi^{-\epsilon}) \neq 0$$

Pelo Lema 5.8, para $a < -A$, temos $\Phi^a \simeq S^\infty$. Sendo $dim\, H_0^1(\Omega) = +\infty$, pela Propriedade 1.7 dada no Capítulo 1

$$H_1(H_0^1(\Omega), \Phi^a) = H_1(H_0^1(\Omega), S^\infty) = 0.$$

Aplicando o Teorema 1.4 dado no final do Capítulo 1, para os conjuntos

$$\Phi^a \subset \Phi^{-\epsilon} \subset \Phi^\epsilon \subset H_0^1(\Omega),$$

obtemos

$$H_2(H_0^1(\Omega), \Phi^\epsilon) \neq 0 \;\text{ ou }\; H_0(\Phi^{-\epsilon}, \Phi^a) \neq 0.$$

Consequentemente, Φ tem um ponto crítico u verificando

$$\Phi(u) > \epsilon \;\text{ ou }\; a < \Phi(u) < -\epsilon,$$

mostrando que $u \neq 0$. Portanto o problema em (5.4) tem uma solução não trivial.

5.3 Ainda sobre o problema elíptico superlinear

Nesta seção, seguindo os passos de [9], vamos estudar novamente o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.7}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave. Mas agora, vamos assumir que

$(F1)$ $|f(x,t)| \leq C(1 + |t|^{q-1})$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$,

onde $C > 0$ e $1 \leq q < 2^* = 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$, e $1 \leq q < \infty$ se $N = 1, 2$;

$(F2)$ Existem $\theta > 2$ e $M > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x,t) \leq t f(x,t) \;\; \forall |t| \geq M;$$

$(F3)$ $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ com $f(x,0) = f_t(x,0) = 0$.

Sabemos que soluções fracas do problema em (5.7) são pontos críticos do funcional de classe $C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x, u(x))dx.$$

O nosso principal resultado nesta seção é o seguinte.

Teorema 5.3 *Sob as hipóteses* $(F1)-(F3)$ *o problema em* (5.7) *possui pelo menos três solucões não triviais.*

Para provar o Teorema 5.3, primeiros vamos demonstrar os seguintes lemas.

Lema 5.9 *Sob as hipóteses* $(F1)$, $(F2)$ *e* $(F3)$, *existe uma constante* $A > 0$, *tal que*

$$\Phi^a \simeq S^\infty \quad para \quad a < -A,$$

onde S^∞ *é a esfera unitária em* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Ver Seção 5.2, Lema 5.8. □

Lema 5.10 0 *é um mínimo local do funcional* Φ *em* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Segue de $(F3)$ que

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - o(\|u\|^2), \tag{5.8}$$

portanto, 0 é um mínimo local. □

Agora, considere a aplicação

$$f_+(x,t) := \begin{cases} f(x,t), & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

e o funcional

$$\Phi_+(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F_+(x,u)dx,$$

onde

$$F_+(x,t) := \int_0^t f_+(x,s)ds.$$

Lema 5.11 *O funcional* Φ_+ *possui um ponto crítico* $u_+ \in H_0^1(\Omega)$ *satisfazendo*

$$u_+(x) > 0 \quad em \quad \Omega.$$

Demonstração: Novamente, $\Phi_+ \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. O mesmo argumento usado no Lema 5.5, nos mostra que Φ_+ satisfaz a condição (PS). Observe que na demonstração do Lema 5.6, existe $e = t_0\phi \in H_0^1(\Omega)$ com $t_0 > 0$ tal que

$$\|e\| > \delta \ \text{ e } \ \Phi_+(e) < 0,$$

onde $\phi_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Por outro lado, de (5.8), existe $\delta > 0$ tal que

$$\Phi_+(u) \geq \frac{1}{4}\delta^2 > 0,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $\|u\| = \delta$.

Segue do Teorema do passo da montanha (Teorema 4.7 do Capítulo 4), que existe um ponto crítico $u_+ \in H_0^1(\Omega)$ de Φ_+. Assim, u_+ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_+ = f_+(x, u_+) & \text{em } \Omega \\ u_+ = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando a desigualdade de Harnack (Teorema $C.8$ do Apêndice C), obtemos

$$u_+(x) > 0 \text{ em } \Omega.$$

□

Logo, $f_+(x, u_+) = f(x, u_+)$, de onde segue que u_+ é também um ponto crítico de Φ.

Analogamente, definindo

$$f_-(x,t) := \begin{cases} f(x,t), & t \leq 0 \\ 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

e o funcional

$$\Phi_-(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F_-(x, u) dx,$$

onde

$$F_-(x,t) := \int_0^t f_-(x,s) ds,$$

obtemos um ponto crítico $u_- < 0$ de Φ_-, que também é ponto crítico de Φ.

Do Lema $C.12$, 0 é um mínimo local do funcional Φ, usando o Teorema 4.1 dado no Capítulo 4, obtemos

$$C_q(\Phi, 0) = \delta_{q0} \cdot \mathbb{R}.$$

Por outro lado, assumindo por um momento que os funcionais $\Phi_\pm$ satisfazem a condição (Ψ) dada no Teorema 4.8, podemos usar o Corolário 4.4 para concluir que

$$C_q(\Phi_\pm, u_\pm) = \delta_{q1} \cdot \mathbb{R}.$$

Usando a Propriedade 1.6 dada no Capítulo 1 com $E = H_0^1(\Omega)$ e $X = C_0^1(\overline{\Omega})$, obtemos

$$C_q(\Phi_\pm, u_\pm) = C_q(\tilde{\Phi}_\pm, u_\pm),$$

onde

$$\tilde{\Phi}_\pm = (\Phi_\pm)|_{C_0^1(\overline{\Omega})}.$$

Segue do Lema de Hopf (Teorema $C.9$ do Apêndice C) que

$$\frac{\partial u_+}{\partial \eta}(x) < 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

e sendo $u_+(x) > 0$ em Ω e $u_+(x) = 0$ em $\partial\Omega$, segue que existe $\tau > 0$ tal que

$$\varphi \in B_\tau(u_+) = \{v \in C_0^1(\overline{\Omega}) \, : \, \|v - u_+\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} < \tau\}$$

então

$$\varphi(x) > 0 \ \text{ em } \ \Omega.$$

Analogamente, se $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ é tal que $\varphi \in B_\tau(u_-)$, então

$$\varphi(x) < 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

logo

$$\tilde{\Phi}_\pm(v) = \tilde{\Phi}(v),$$

para todo $v \in B_\tau(u_\pm)$, onde

$$\tilde{\Phi} = \Phi|_{C_0^1(\overline{\Omega})}.$$

Consequentemente,

$$C_q(\tilde{\Phi}_\pm, u_\pm) = C_q(\tilde{\Phi}, u_\pm).$$

Usando novamente a Propriedade 1.6, obtemos

$$C_q(\tilde{\Phi}, u_\pm) = C_q(\Phi, u_\pm).$$

Do exposto acima, podemos concluir que

$$C_q(\Phi, u_\pm) = C_q(\Phi_\pm, u_\pm) = \delta_{q1} \cdot G$$

Suponhamos, por contradição, que não existam mais pontos críticos de Φ. Então, os números de Morse do par $(H_0^1(\Omega), \Phi^a)$ são

$$M_0 = 1, \quad M_1 = 2, \quad M_q = 0, \quad \forall q \geq 2,$$

e os números de Betti

$$\beta_q = 0, \quad \forall q \geq 0,$$

pois, conforme o Lema 5.9, temos

$$H_q(H_0^1(\Omega), \Phi^a) \simeq H_q(H_0^1(\Omega), S^\infty) \simeq 0,$$

isto contradiz a relação de Morse dada no Teorema 4.10.

Verificação de que o funcional Φ *satisfaz a condição* (Ψ).

Seja $m(x) = f'(x, u(x))$, onde u é um ponto crítico de Φ. Assuma que

$$\langle \Phi''(u)v, v\rangle = \int_\Omega |\nabla v|^2 - mv^2 \geq 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e que existe $v_0 \in \sigma(\Phi''(u)) \setminus \{0\}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = mv_0, & \Omega \\ v_0 = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{5.9}$$

Então, para o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda mv, & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{5.10}$$

o primeiro autovalor λ_1 verifica a seguinte desigualdade

$$\lambda_1 = \inf \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2}{\displaystyle\int_\Omega mv^2} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_0|^2}{\displaystyle\int_\Omega mv_0^2} = 1.$$

Mas, pela não negatividade de $\Phi''(u)$, temos

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v^2|}{\displaystyle\int_\Omega mv^2} \geq 1, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Mostrando que todo autovalor de (5.10) deve ser maior do que ou igual a 1, consequentemente $\lambda_1 = 1$. Além disso, segue de (5.9) que

$$\sup m(x) > 0.$$

Pelo Teorema $C.10$ dado no Apêndice C, concluimos que

$$dim[Ker(\Phi''(u))] = 1.$$

5.4 O caso ressonante

Nesta seção, seguindo os passos de [20], usaremos os argumentos das aplicações anteriores para mostrar um resultado de multiplicidade de soluções para o problema ressonante

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.11}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo

(f_1) $|f(u)| \leq C(1 + |u|^{p-1})$ com $2 < p < \dfrac{2n}{n-2}$, para algum $C > 0$;

(f_2) $f(0) = 0 = f(a)$ para algum $a > 0$;

(f_3) Existem constantes $\mu > 2$ e $A > 0$ tais que

$$0 < \mu F(u) \leq u f(u), \quad \text{para} \quad |u| \geq A,$$

onde $F(u) := \displaystyle\int_0^u f(t)dt$.

Sejam $\lambda = f'(0)$ e $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ a sequência de autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

O nosso principal resultado nesta seção é o seguinte.

Teorema 5.4 *Assuma que f satisfaça $(f_1) - (f_3)$ e*

(f_0) $\lambda_j < \lambda = \lambda_{j+1}$ *e, para algum* $\delta > 0$,

$$F(u) \leq \frac{1}{2}\lambda u^2 \quad \textit{para} \quad |u| \leq \delta$$

Se $j \geq 3$, o problema (5.11) tem pelo menos quatro soluções não triviais.

Soluções de (5.11) são pontos críticos do funcional de classe C^2

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)dx$$

definido sobre $H_0^1(\Omega)$.

Para demonstrar o Teorema 5.4 vamos precisar dos seguintes lemas.

Lema 5.12 *O funcional Φ satisfaz a condição Palais-Smale.*

Demonstração: Ver Seção 5.1, Lema 5.2. □

Defina

$$f_a(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \le u \le a \\ 0, & \text{se } u > a \end{cases}$$

e considere o funcional

$$\Phi_a(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F_a(u)dx$$

onde $F_a(u) = \displaystyle\int_0^u f_a(t)dt$

Lema 5.13 *O funcional Φ_a tem um ponto de mínimo local u_0 com $0 < u_0 < a$ e*

$$C_q(\Phi_a, u_0) = \delta_{q0} \cdot \mathbb{R}.$$

Demonstração:

Sendo Φ_a coercivo e fracamente semi-contínuo inferiormente, pelo Teorema C.11 dado no Apêndice C, existe um ponto de mínimo u_0 de Φ_a em $H_0^1(\Omega)$.

Pela Desigualdade de Harnack (Teorema C.8 do Apêndice C),

$$u_0(x) > 0 \ \text{ em } \ \Omega.$$

Agora, vamos mostrar que $u_0(x) < a$ em Ω.

Desde que $u_0 \in H^1(\Omega)$, temos $u_0^+ = \max\{u_0, 0\} \in H^1(\Omega)$, sendo Ω limitado, temos $(u_0 - a) \in H^1(\Omega)$, logo $(u_0 - a)^+ \in H_0^1(\Omega)$, pois $(u_0 - a)^+ = (-a)^+ = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto, podemos usar $(u_0 - a)^+$ como função teste e obter

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla (u_0 - a)^+ = \int_\Omega f_a(u_0)(u_0 - a)^+,$$

ou equivalentemente

$$\int_\Omega \nabla(u_0 - a)\nabla(u_0 - a)^+ = \int_\Omega f_a(u_0)(u_0 - a)^+,$$

ou ainda

$$\int_\Omega \nabla(u_0 - a)^+\nabla(u_0 - a)^+ = \int_\Omega f_a(u_0)(u_0 - a)^+.$$

Desde que o lado direito da última igualdade é nulo, temos

$$\|(u_0 - a)^+\| = 0,$$

donde segue que

$$u_0 - a = (u_0 - a)^- \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Portanto $u_0 \leq a$ em Ω. Usando novamente a Desigualdade de Harnack, concluimos que

$$u_0 < a \quad \text{em} \quad \Omega.$$

□

Sendo $0 < u_0 < a$ em Ω, segue que u_0 é também um ponto crítico de Φ.

Novamente, existe $\tau > 0$ tal que se $\varphi \in B_\tau(u_0) = \{v \in C_0^1(\overline{\Omega}) \,:\, \|v - u_0\| \leq \tau\}$,

$$0 < \varphi(x) < a \quad \text{em} \quad \Omega.$$

De maneira análoga a seção anterior, temos

$$C_q(\Phi_a, u_0) = C_q(\tilde{\Phi}_a, u_0) = C_q(\tilde{\Phi}, u_0) = C_q(\Phi, u_0).$$

Portanto,

$$C_q(\Phi, u_0) = \delta_{q,0} \cdot \mathbb{R}.$$

Sendo $\lim_{t\to\infty} \Phi(\pm t\phi_1) = -\infty$, onde ϕ_1 é a primeira autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, segue que Φ satisfaz a segunda geometria do passo da montanha. A primeira geometria do passo da montanha pode ser obtida do corolário seguinte devido a Marco A. S. Souto [12]:

Corolário 5.1 *Nas hipóteses do Teorema de Splitting (Teorema B.2 do Apêndice B), se u_0 é um ponto de mínimo local isolado e $\Phi''(u_0) = I - K$, onde K é um operador compacto, então existem $\rho > 0$, $\delta > 0$, tal que:*

$$\Phi \circ h(v) \geq \rho + \Phi(u_0), \quad \forall \|v\| = \delta,$$

onde h é a aplicação do Teorema de Splitting.

Demonstração: Primeiramente, sendo u_0 ponto de mínimo local de Φ implica que $\langle \Phi''(u_0)v, v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in E$. Sendo $\Phi''(u_0) = I - K$ simétrico no espaço de Hilbert E, pelo Teorema da decomposição espectral do operador K, existe $\rho_1 > 0$, tal que

$$\langle \Phi''(u_0)z, z\rangle \geq \rho_1 \|z\|^2, \quad \forall z \in W = N^{\perp}.$$

Lembre-se que $N = ker\Phi''(u_0)$ tem dimensão finita.

Vamos mostrar a desigualdade para $\delta > 0$ tal que $B_{2\delta}(u_0) \subset h(\mathcal{A})$ e tal que

$$\Phi(v) > \Phi(u_0), \quad \forall v \in E, \quad 0 < \|v\| \leq 2\delta.$$

Caso a desigualdade requerida no corolário não ocorra, existe $u_n = y_n + z_n$, $y_n \in N$ e $z_n \in W$ com $\|u_n\| = \delta$ satisfazendo $\Phi \circ h(u_n) \to \Phi(u_0)$ quando $n \to +\infty$. Pela igualdade do Teorema de Splitting, temos

$$\Phi \circ h(y_n + z_n) \geq \frac{\rho_1 \|z_n\|^2}{2} + \Phi(y_n + g(y_n) + u_0),$$

onde g é a aplicação do Teorema de Splitting. Consequentemente, $z_n \to 0$ e $\|y_n\| \to \delta$. Desde que N possui dimensão finita, a menos de subsequência, podemos considerar $y_n \to y_0$ tal que $\|y_0\| = \delta$ e assim, $u_n \to y_0$ e assim $\Phi \circ h(y_0) = \Phi(u_0)$, logo $u_0 = h(0) = h(y_0)$, sendo h um homeomorfismo local segue que $y_0 = 0$, o que contradiz o fato que $\|y_0\| = \delta > 0$. □

Sendo assim, segue do Teorema do Passo da Montanha (Teorema 4.7 do Capítulo C) que Φ também tem dois pontos $u_{\pm}$ satisfazendo dim $C_q(\Phi, u_{\pm}) \geq 1$.

De maneira análoga a seção anterior, mostra-se que o funcional Φ satisfaz a condição (Ψ):

$$\Phi''(u) \geq 0 \;\text{ e }\; 0 \in \sigma(\Phi''(u)) \Longrightarrow dim\,[Ker(\Phi''(u))] = 1, \tag{5.12}$$

então, o Corolário 4.4 dado no Capítulo 4 nos permite concluir que

$$C_q(\Phi, u_{\pm}) = \delta_{q1} \cdot \mathbb{R}.$$

Seja V o subespaço j-dimensional de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelas correspondentes autofunções de $\lambda_1, \cdots, \lambda_j$ e seja $W = V^{\perp}$ em $H_0^1(\Omega)$. Então Φ tem um linking local na origem com respeito a decomposição $H_0^1(\Omega) = V \oplus W$, ver Seção 5.2 (Lema 5.6), nesta mesma seção, obtivemos

$$C_j(\Phi, 0) \neq 0.$$

Também, como no Lema 5.8, para $a < 0$ com $|a|$ suficientemente grande,

$$H_q(H_0^1(\Omega), \Phi^a) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, pelo Lema 1.4, Φ tem um ponto crítico não trivial u_1 com

$$C_{j+1}(\Phi, u_1) \neq 0 \;\text{ ou }\; C_{j-1}(\Phi, u_1) \neq 0.$$

Sendo $j \geq 3$, comparando os grupos críticos, segue que $u_0, \;\; u_\pm, \;\; u_1$ são pontos críticos não triviais e distintos de Φ em $H_0^1(\Omega)$.

Apêndice A

Teoria de grupo

Neste apêndice, estudamos os resultados básicos de teoria de grupo que são usados no Capítulo 1. Estes resultados podem ser encontrados em [7]. A noção de base de um grupo abeliano e de grupo abeliano livre foram retiradas de [4].

1.1 Definições e propriedades

Definição A.1 *Um grupo é um par $(G,+)$, onde G é um conjunto não vazio e $+: G \times G \to G$ é uma operação binária, denominada adição, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) A operação $+$ é associativa, isto é,

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \forall a, b, c \in G;$$

(ii) Existe um elemento neutro, isto é,

$$\exists e \in G \quad : \quad e + a = a + e = a, \quad \forall a \in G;$$

(iii) Todo elemento de G possui um elemento inverso, isto é,

$$\textit{para cada} \;\; a \in G, \quad \exists b \in G \quad : \quad a + b = b + a = e$$

O grupo é abeliano ou comutativo se

$$a + b = b + a, \quad \forall a, b \in G$$

Notação:

1. $e = 0_G = 0 :$ elemento neutro;

2. $-g$: elemento inverso de g.

Exemplo 1. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ e $(\mathbb{C},+)$ são grupos abelianos.

Exemplo 2. $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ e $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ são grupos abelianos.

Exemplo 3. Seja $n \geq 2$ e $\mathbb{Z}_n = \{0,1,...,n-1\}$. Definimos a soma módulo n, como sendo a operação $\oplus : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ que associa ao par (a,b) o elemento $a \oplus b =$ resto da divisão de $a+b$ por n. O par $(\mathbb{Z}_n,\oplus)$ é um grupo abeliano finito.

Exemplo 4. O conjunto das matrizes invertíveis

$$GL_n = \{X \in M_n(\mathbb{R});\quad detX \neq 0\}$$

com a operação de produto de matrizes é um grupo não abeliano chamado de *grupo linear* de grau n sobre $\mathbb{R}$.

Sendo G um grupo, $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$, definimos

$$ng = \begin{cases} 0_G & se \quad n = 0 \\ \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}} & se \quad n > 0 \\ \mid n \mid (-g) & se \quad n < 0. \end{cases}$$

Sejam H um subconjunto de G, dizemos que H é um subgrupo de G se valem as seguintes condições:

(i) Dados $g_1, g_2 \in H$, tem-se $g_1 + g_2 \in H$;

(ii) Dados $g \in H$, tem-se $-g \in H$.

Em particular $\{0_G\}$ e G são subgrupos de G. Observe que se H é um subgrupo de G, então $0_G \in H$ e $(H,+)$ é um grupo.

Definição A.2 *Sejam $(G,+)$ e $(H,+)$ grupos e $\varphi : G \to H$ uma função. Dizemos que φ é um homomorfismo quando*

$$\varphi(g_1 + g_2) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Se $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos, definimos:

- *O núcleo de φ: $Ker(\varphi) = \{g \in G : \quad \varphi(g) = 0_H\}$*

- *A imagem de φ: $Im(\varphi) = \{h \in H: \quad h = \varphi(g), \quad$ para algum $\; g \in G\}$.*

Observe que $Ker(\varphi)$ e $Im(\varphi)$ são subgrupos de G e H, respectivamente.

Tipos de homomorfismos

- **Monomorfismo**: φ é injetora;
- **Epimorfismo**: φ é sobrejetora;
- **Isomorfismo**: φ é bijetora;
- **Endomorfismo**: $G = H$;
- **Automorfismo**: $G = H$ e φ é isomorfismo.

Notação: Quando existir um isomorfismo $\varphi : G \to H$ diremos que G e H são *isomorfos* e escreveremos $G \simeq H$.

Definição A.3 *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e $g \in G$. Definimos*

(a) A classe lateral à direita de H determinada por g como sendo

$$H + g = \{h + g; \quad h \in H\}$$

(b) A classe lateral à esquerda de H determinada por g como sendo

$$H + g = \{g + h; \quad h \in H\}$$

Observações:

(a) $g \in (H + g) \cap (g + H)$;

(b) $g + \{0_G\} = \{g\} = \{0_G\} + g$ e $g + G = G = G + g$;

(c) Se G é abeliano, tem-se $g + H = H + g$ para todo subgrupo H e todo elemento $g \in G$.

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Definimos a *relação de congruência módulo H à direita*, denotada por $\sim_H$, da seguinte forma:

$$a \sim_H b \ \ se \ \ a - b \in H.$$

Esta relação é de equivalência. Se $g \in H$, então a classe de equivalência de g com respeito a esta relação é exatamente a classe lateral a direita $\bar{g} = H + g$. Assim, pelo fato que $\sim_H$ é uma relação de equivalência, as seguintes propriedades são válidas:

(i) $\displaystyle\bigcup_{g \in G} (H + g) = G$;

(ii) Se $g_1, g_2 \in G$ e $H + g_1 \neq H + g_2$, então $(H + g_1) \cap (H + g_2) = \emptyset$;

(iii) Se $g_1, g_2 \in G$, valem:

$$g_1 \sim_H g_2 \Longleftrightarrow g_1 \in (H + g_2) \Longleftrightarrow g_2 \in (H + g_1) \Longleftrightarrow H + g_1 = H + g_2$$

(iv) Se $g \in G$, então valem

$$H + g = H \Longleftrightarrow g \in H$$

Observação: Define-se, de maneira análoga, relação de equivalência módulo H à esquerda.

Definição A.4 *Seja H um subgrupo de G. Dizemos que H é subgrupo normal em G se $H + g = g + H$, para todo $g \in G$.*

Notação: $H \trianglelefteq G$

Exemplo 5. Se G é um grupo, então $\{0_G\}$ e G são subgrupos normais de G.

Exemplo 6. Se G é abeliano, então todo subgrupo de G é normal em G.

Observe que se $H \trianglelefteq G$, então as relações de congruência módulo H à esquerda e à direita coincidem e a recíproca é verdadeira.

Agora, seja $N \trianglelefteq G$. Denote por G/N o conjunto

$$G/N = \{N + g; \quad g \in G\}.$$

Defina

$$+ : G/N \times G/N \to G/N$$

que associa ao par $(N + g_1, N + g_2)$ a classe $(N + g_1) + (N + g_2) := N + (g_1 + g_2)$. O fato de N ser subgrupo normal em G garante que a operação acima está bem definida, isto é, não depende do representante da classe. Verifica-se que o par $(G/N, +)$ é um grupo chamado de *grupo quociente* de G por N.

Propriedades:

(i) $N = N + 0$ é o elemento neutro de G/N;

(ii) $-(N + g) = N + (-g), \quad \forall g \in G$;

(iii) $G/G = \{\bar{0}\}$;

(iv) $G/\{0\} = \{\{g\}; \quad g \in G\} \simeq G$;

(v) Se G é finito, então

$$| G/N | = \frac{| G |}{| N |},$$

onde $| A |$ representa o número de elementos do conjunto A;

(vi) Se G é *cíclico*, isto é, existe $g \in G$ tal que $\langle g \rangle = \{ng; \quad n \in \mathbb{Z}\} = G$, então G/N é cíclico;

(vii) Se G é abeliano, então G/N é abeliano;

(viii) Se G é finitamente gerado, então G/N é finitamente gerado;

(ix) Se $n \in \mathbb{Z}$, então $n(N + g) = N + ng, \quad \forall g \in G$.

Exemplo 7. Seja $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Fixando $\overline{x} = x + n\mathbb{Z}$, temos

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}.$$

A menos de isomorfismo, temos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

Teorema A.1 *Seja $\varphi : G_1 \to G_2$ um homomorfismo de grupos. Então $Ker(\varphi) \trianglelefteq G_1$ e*

$$\frac{G_1}{Ker(\varphi)} \simeq Im(\varphi).$$

Definição A.5 (Soma direta de grupos) *Um grupo G é chamado a soma direta dos subgrupos $H_1, H_2, \cdots, H_n$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) Os elementos de dois quaisquer subgrupos H_i e H_j, com $i \neq j$ comutam,isto é

$$se \quad h_i \in H_i \quad e \quad h_j \in H_j, \quad então \quad h_i + h_j = h_j + h_i \quad (i \neq j);$$

(ii) Qualquer elemento $g \in G$ tem uma única representação como uma soma

$$g = h_1 + h_2 + \cdots + h_n,$$

onde $h_i \in H_i, \quad i = 1, 2, ..., n$.

Notação. $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$.

1.2 Grupo abeliano livre sobre um grupo G

Agora, introduziremos o conceito de **posto (rank) de um grupo abeliano** G. Um elemento $g \in G$ é dito uma combinação linear dos elementos $g_1, g_2, \cdots, g_k$ se existir números inteiros $n_1, n_2, \cdots, n_k$ tais que

$$g = n_1 g_1 + n_2 g_2 + \cdots + n_k g_k.$$

Um conjunto finito de elementos $\{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ de G é chamado *linearmente dependente* se existir números inteiros $n_1, n_2, \cdots, n_k$ não todos nulos tais que

$$n_1 g_1 + n_2 g_2 + \cdots + n_k g_k = 0.$$

Um conjunto que não tem esta propriedade é chamado de *linearmente independente*. Um elemento $g \in G$ é dito linearmente dependente sobre o conjunto $\{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ se existe um múltiplo inteiro $n_0 g$ de g que é combinação linear dos elementos $g_1, g_2, \cdots, g_k$. Diremos que o conjunto $\{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ é um *gerador* de G quando todo elemento de G pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos deste conjunto.

Dois subcojuntos $\{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ e $\{h_1, h_2, \cdots, h_l\}$ de G são ditos *equivalentes* se qualquer elemento do primeiro conjunto é linearmente dependente sobre o segundo conjunto, e reciprocamente. Todo elemento $g \in G$ que é linearmente dependente sobre o primeiro conjunto também é sobre o segundo.

Se um grupo G tem um conjunto que é linearmente independente, finito e maximal, então todos estes conjuntos são equivalentes e possuem o mesmo número de elementos. Este número é chamado de **posto** ou **rank** do grupo abeliano G e será denotado por $rank(G)$.

Teorema A.2 *Qualquer subgrupo A e qualquer grupo quociente G/A de um grupo abeliano G de posto finito é também de posto finito, e a soma destes dois postos é igual ao posto de G, isto é,*

$$rank(A) + rank(G/A) = rank(G).$$

Definição A.6 *Diremos que $\{g_i\}_i \subset G$ é uma base do grupo G quando*

(i) *$\{g_i\}_i$ é gerador de G;*

(ii) *$\{g_i\}_i$ é linearmente independente.*

Quando um grupo abeliano G tem uma base, dizemos que o mesmo é **Livre**.

Proposição A.1 *Dados uma base $\{g_i\}_{i=1}^k$ de G e uma família $\{h_i\}_{i=1}^k$ de H, existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que*

$$\varphi(g_i) = h_i, \quad \forall i = 1, \cdots, k.$$

A proposição acima implica que toda função $\varphi_0 : A \to H$, onde $A = \{g_1\}_{i=1}^k$ é uma base de G pode ser prolongada de forma única para um homomorfismo $\varphi : G \to H$, isto é,

$$\varphi\mid_A = \varphi_0.$$

Basta considerar $h_i = \varphi_0(g_i) \ \ (i = 1, \cdots, k)$ e aplicar a proposição acima.

Sejam G um grupo abeliano e A um conjunto qualquer (não necessariamente subconjunto de G). Desejamos encontrar um grupo abeliano que contém A, de maneira que A seja uma base para este grupo.

Uma aplicação $f : A \to G$ é dita *essencialmente zero* quando $\{a \in A : \ \ f(a) \neq 0\}$ é finito.

Definição A.7 *Dados um grupo abeliano G e um conjunto A. O* **grupo abeliano livre gerado por A com coeficientes em G**, *o qual denotamos por $Free[A]$, é o grupo consistindo de todas as aplicações $f : A \to G$ que são essencialmente zero.*

A operação de grupo em $Free[A]$ é a soma pontual de funções, isto é, $(f_1 + f_2)(a) = f_1(a) + f_2(a), \ \ \forall a \in A$ e $\forall f_1, f_2 \in Free[A]$. Devemos pensar A como um subconjunto de $Free[A]$ da seguinte forma: Cada elemento $a \in A$ é identificado com a aplicação

$$f_a(b) = \begin{cases} 1 & se \quad b = a \\ 0 & se \quad b \neq a. \end{cases}$$

Sendo assim, todo elemento $f \in Free[A]$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de A, isto é,

$$f = \sum_{a \in A} f(a) f_a = \sum_{a \in A} f(a) a.$$

De fato,

$$f(b) = \sum_{a\in A} f(a)f_a(b) = \sum_{a\in A} f(a)a = f(b).$$

Obeservamos assim que A é uma base para $Free[A]$.

Importante.

No Capítulo 1, usamos extensivamente esta noção de grupo abeliano livre para definir os grupos de homologia singular $H_q(X, A, G)$. É importante observar que na construção de tais grupos de homologia singular, feita no Capítulo 1, consideramos simplesmente o caso em que $G = \mathbb{Z}$. Já no Capítulo 4, consideramos o grupo de homologia singular sobre o corpo $\mathbb{R}$, neste caso os grupos de homologia são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e a noção de posto (rank) de um grupo abeliano coincide com a noção de base de um espaço vetorial da álgebra linear.

Apêndice B

Operadores de Fredholm e o Lema de Morse

Neste apêndice, enunciamos os conceitos de ponto crítico não degenerado e de índice de Morse, algumas propriedades de Operadores de Fredholm e também enunciamos o Lema de Morse Generalizado e o Teorema de Shifting. Os resultados deste apêndice serve de base para os Capítulos 3 e 4 e podem ser encontrado em [11] e [10].

Um operador linear contínuo L entre dois espaços de Banach E e F diz-se um *operador de Fredholm* se o seu núcleo $Ker(L)$ tiver dimensão finita e se a sua imagem $R(L)$ tiver codimensão finita. Note que, neste caso, $R(L)$ é um subespaço fechado de F.

Define-se ainda o *índice* de L, $i(L) = dim(ker(L)) - dim(E/R(L))$. Diz-se que L é um operador de Fredholm de *índice zero* se $i(L) = 0$. No caso em que $E = F$, incluem-se nessa classe os operadores da forma $I - T$, onde I é a aplicação identidade em E e T designa um operador compacto (Ver Brézis [14]):

Proposição B.1 *Sejam E um espaço de Banach e $T : E \to E$ um operador compacto. Então*

(i) $Ker(I - T)$ *tem dimensão finita;*

(ii) $R(I - T)$ *é fechado em* E *e* $R(I - T) = Ker(I - T^*)^{\perp}$*;*

(iii) $Ker(I - T) = \{0\} \iff R(I - T) = E$*;*

(iv) $dim(Ker(I - T)) = dim(Ker(I - T^*))$.

No que segue, denotaremos por $L(E, F)$ o espaço dos operadores lineares e limitados, $Fred(E, F)$ o subespaço de $L(E, F)$ formado pelos operadores de Fredholm e $K(E, F)$ o subespaço de $L(E, F)$ formado pelos operadores compactos.

Se L é um operador de Fredholm e denotamos por N o seu núcleo e por R sua imagem. Então, podemos escrever $E = N \oplus E_0$ e $F = R \oplus F_0$, onde $E_0 = N^{\perp}$ em E e $F_0 = R^{\perp}$ em F, além disso $dim\, F_0 = codim\, R$.

Lema B.1 *Seja $M \subset E$ de dimensão finita e $M_0 = M^{\perp}$. Existe uma aplicação linear e contínua $P : E \to E$ verificando*

$$Px = \begin{cases} x, & se \quad x \in M \\ 0, & se \quad x \in M_0. \end{cases}$$

Demonstração: Seja $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base ortonormal para M. Defina

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j.$$

A linearidade é trivial e a continuidade segue da desigualdade triangular.

$\square$

Dessa forma, temos o seguinte resultado.

Proposição B.2 *Sejam $L \in Fred(E, F)$ e N, R, E_0, F_0 como acima. Então, existe $L_0 : F \to E$ linear e contínuo com*

1. $Ker(L_0) = F_0$;
2. $Im(L_0) = E_0$;
3. $L_0 \circ L|_{E_0} = I$ *e* $L \circ L_0|_R = I$
4. $L_1 = I - L_0 \circ L$ *e* $L_2 = I - L \circ L_0$ *são tais que* $Im(L_1) = N$ *e* $Im(L_2) = F_0$.

Demonstração: Use o Lema $B.1$. $\square$

Observação: Note que L_1, L_2 são compactos, pois N e R têm dimensão finita. De fato, se E ou F for de dimensão finita, então qualquer operador linear contínuo de E em F é compacto.

O nosso objetivo agora é mostrar que $Fred(E, F)$ é aberto em $L(E, F)$.

Teorema B.1 *Fred(E,F) é aberto em* $L(E,F)$ *e a função*

$$\begin{aligned} i \ : \ Fred(E,F) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ L &\longmapsto i(L) \end{aligned}$$

é contínua.

para tanto, usaremos o seguinte lema.

Lema B.2 *Seja* $G \in L(E,F)$ *e suponha que existem operadores* $G_1, G_2 \in L(E,F)$, $K_1 \in K(E,E)$ *e* $K_2 \in K(F,F)$ *tais que*

$$G_1 \circ G = I - K_1 \quad e \quad G \circ G_2 = I - K_2. \tag{B.1}$$

Então G *é de Fredholm.*

Demonstração:

Sendo $ker(G) \subset Ker(G_1 \circ G)$, segue que

$$dim(ker(G)) \leq dim(ker(I - K_1)) < \infty.$$

Também temos $Im(I - K_2) = Im(G \circ G_2) \subset Im(G)$, então

$$codim(Im(G)) \leq codim(Im(I - K_2)) < \infty.$$

□

Prova do Teorema $B.1$.

Seja $L \in Fred(E,F)$ e $G \in L(E,F)$. Considere $T = G - L$ e tome L_0, L_1, L_2 como na Proposição $B.2$. Então valem

$$L_0 \circ G = I - L_1 + L_0 \circ T \ \text{ e } \ G \circ L_0 = I - L_2 + T \circ L_0.$$

Seja $\epsilon = \min\{\|L\|^{-1}, \|L_0\|^{-1}\}$ e tome G tal que

$$\|G - L\| < \epsilon.$$

Assim, $\|L_0 \circ T\| \leq \|L_0\|\|T\| < 1$ e $\|T \circ L\| < 1$, donde segue que $I + L_0 \circ T$ e $I + T \circ L_0$ possuem inversas contínuas. Então vale

$$\underbrace{(I+L_0\circ T)^{-1}\circ L_0}_{G_1}\circ G = I-\underbrace{(I+L_0\circ T)^{-1}L_1}_{K_1} \text{ e } G\circ\underbrace{L_0(I+T\circ L_0)^{-1}}_{G_2} = I-\underbrace{L_2(I+T\circ L_0)^{-1}}_{K_2},$$

que é a equação $(B.1)$ do Lema $B.2$. Portanto G é de Fredholm e $Fred(E,F)$ é aberto.

Mais ainda, segue da Proposição $B.2$ (3) que (usando a notação da Proposição $B.2$) $L_0\circ G|_{E_0} = I + L_0\circ T$, donde segue que $G|_{E_0}$ é injetivo e, portanto, $ker(G)\cap E_0 = \{0\}$. Como $E = ker(L)\oplus E_0$, segue que $dim(ker(G)) \leq dim(ker(L))$. Também segue que $codim(Im(L)) - codim(Im(G)) = dim(ker(L)) - dim(ker(G))$, logo $i(L) = i(G)$, portanto i é contínua.

Observação: Na demonstração acima, obtivemos um resultado que vale a pena ser frisado: se L é de Fredholm e G está suficientemente próximo de L, então $ker(G)\subset ker(L)$.

Corolário B.1 *Se $T\in K(E,F)$, então $i(I-T)=0$. Em particular, se $L\in Fred(E,F)$ e L_0 é a aplicação da Proposição $B.2$, $i(L_0) = -i(L)$.*

Demonstração: Dado $t\in\mathbb{R}$, o operador $tT : E\to F$ é compacto e $t\mapsto tT$ é uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $L(E,F)$. Consequentemente, $t\mapsto i(I-tT)$ é contínua e, como $i(I-tT)=0$ em $t=0$, segue que $i(I-tT)=0$, para todo t. A segunda afirmação segue da Proposição $B.2$ (4) e da observação logo após. $\square$

A definição de operador de Fredholm estende-se naturalmente aos operadores diferenciáveis não necessariamente lineares. Se $F: E_1\to E_2$ é diferenciável num ponto $u_0\in E_1$, diz-se que F é uma aplicação de Fredholm em u_0 se $F'(u_0)\in\mathcal{L}(E_1;E_2)$ for um operador de Fredholm. Diremos ainda que F é uma aplicação de Fredholm num subconjunto $\mathcal{A}$ de E_1 se o for em todo o ponto $u\in\mathcal{A}$.

Interessa-nos o seguinte caso particular. Dada $f\in C^2(X;\mathbb{R})$ uma aplicação definida num aberto X de um espaço de Hilbert E, a derivada de segunda ordem $D^2f(u) = f''(u)$ é uma aplicação bilinear *simétrica* de $E\times E$ em $\mathbb{R}$, isto é, $f''(u)(v,w) = f''(u)(w,v)$ para todo $v,w\in E$. Por outro lado, para cada $v\in E$, o Teorema da Representação de Riesz mostra que existe um único vetor $Lv\in E$ tal que

$$f''(u)(v,w) = \langle Lv, w\rangle, \quad \forall w\in E.$$

Isto define uma aplicação linear contínua $L : E \to E$ que é simétrica, ou seja,

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle, \quad \forall v, w \in E.$$

Frequentemente identifica-se $f''(u)$ com L.

Se u_0 é um ponto crítico de f, Define-se ainda o *índice de Morse* de f no ponto u_0, denotado por $m(f, u)$, como sendo o supremo das dimensões dos subespaços de E onde o operador $D^2f(u_0)$ é definido negativo. A *nulidade* $\nu(u_0)$ é a dimensão (finita) do núcleo daquele operador. Um ponto crítico u_0 diz-se *não degenerado* se $\nu(u_0) = 0$, ou seja, se $L = D^2f(u)$ for um isomorfismo. Define-se ainda o *índice de Morse ampliado* $m^*(u_0) := m(u_0) + \nu(u_0)$, isto é, o supremo das dimensões dos subespaços de E onde $D^2f(u_0)$ é definido não positivo.

Suponha-se que $\nabla f(u)$ é uma aplicação de Fredholm (ou seja, que o operador L é de Fredholm). Então L tem necessariamente índice zero e vale uma soma ortogonal

$$E = Ker(L) \oplus R(L).$$

Com efeito, tem-se $E = Ker(L) \oplus (Ker(L))^{\perp}$. Mas da simetria de L resulta que $Ker(L) = R(L)^{\perp}$; e como, por hipótese, $R(L)$ é fechado, tem-se $((R(L))^{\perp})^{\perp} = R(L)$.

Se u_0 é um ponto crítico de f, designa-se $L := f''(u_0)$ e escreve-se $u = n + r$ para cada $u \in E$ de acordo com a decomposição ortogonal $E = N \oplus R$, onde $N := Ker(L)$ e $R := R(L)$.

2.1 Lema de Morse em dimensão infinita

Seja $f \in C^2(X; \mathbb{R})$ uma aplicação definida num aberto X de um espaço de Hibert E. Para ilustrar o Lema de Morse, considere-se $u_0 \in X$ tal que $f(u_0) = 0$ e $\nabla f(u_0) = 0$ (ou seja, u_0 é um ponto crítico de f). Suponha-se que $f''(u_0)$ é um isomorfismo em E. Veremos a seguir que, neste caso, existe um difeomorfismo local $h : \mathcal{A} \to X$ definido numa vizinhança $\mathcal{A}$ de 0 tal que $h(0) = 0$ e

$$f(h(u)) = \frac{1}{2}\langle f''(u_0)u, u\rangle,$$

para todo o $u \in \mathcal{A}$. A idéia da demostração consiste em considerar a homotopia

$$\phi(t, u) = (1 - t)\frac{1}{2}\langle f''(u_0)u, u\rangle + tf(u)$$

com $t \in [0,1]$, e construir um campo vetorial F de tal modo que o fluxo associado

$$\dot{\sigma}(t) = F(t, \sigma(t)), \quad \sigma(0) = u$$

satisfaça

$$\frac{d}{dt}\phi(t, \sigma(t,u)) = 0.$$

Nessa altura

$$\frac{1}{2}\langle f''(u_0)u, u\rangle = \phi(0,u) = \phi(1, \sigma(1,u)) = f(\sigma(1,u)),$$

pelo que se pode definir $h(u) := \sigma(1,u)$.

Pode-se demostrar um resultado análogo numa situação degenerada em que $f''(u_0)$ não é invertível, desde que este seja um operador de Fredholm. Este resultado é conhecido na literatura como *Lema de Morse Generalizado*, também chamado de *Teorema de Splitting*:

Teorema B.2 *Sejam X um aberto de um espaço de Hilbert E e $f \in C^2(X;\mathbb{R})$. Suponha-se que $u_0 \in X$ é um ponto crítico isolado de f tal que $L := f''(u_0)$ é um operador de Fredholm. Então existem uma vizinhança $\mathcal{A}$ de 0 em E e duas aplicações $h \in C(\mathcal{A}; X)$ e $\tilde{f} \in C^2(\mathcal{A} \cap N; \mathbb{R})$ tais que*

$$h(0) = u_0, \quad \tilde{f}(0) = f(u_0), \quad \tilde{f}'(0) = 0, \quad \tilde{f}''(0) = 0$$

e

$$f(h(u)) = \frac{1}{2}\langle Lr, r\rangle + \tilde{f}(n)$$

para todo o $u = n + r \in \mathcal{A}$. A aplicação h é um homeomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre uma vizinhança de u_0 e a sua restrição $h|_{\mathcal{A}\cap R}$ é um difeomorfismo local. Tem-se além disso

$$\tilde{f}(n) = f(n + g(n) + u_0)$$

onde $g \in C^1(\mathcal{A} \cap N; \mathbb{R})$ é tal que $g(0) = g'(0) = 0$, e 0 é um ponto crítico isolado de $\tilde{f}$.

Demonstração: Ver M. Ramos [11] ou Mawhin and Willen [10]. □

Como uma consequência do Teorema de Splitting, temos

Teorema B.3 (Shifting) *(ver [10], p. 190) Suponha que o índice de Morse de f em um ponto crítico isolado p é $j < +\infty$. Sob as hipóteses do Teorema de Splitting, temos*

$$C_q(f, p) = C_{q-j}(\tilde{f}, 0),$$

onde $\tilde{f}(n) = f(n + g(n) + u_0)$ como no Teorema de Splitting.

Como consequência deste Teorema, temos

Corolário B.2 *(ver [10], p. 194) Sob as hipóteses do Teorema de Shifting com* $dimN = k$*, se* p *for:*

(1) *um ponto de mínimo local de* $\tilde{f}$*, então*

$$C_q(f,p) = \delta_{qj} \cdot G;$$

(2) *um ponto de máximo local de* $\tilde{f}$*, então*

$$C_q(f,p) = \delta_{q(j+k)} \cdot G;$$

(3) *ponto crítico que não é máximo local e nem mínimo local, então*

$$C_q(f,p) = 0, \quad \textit{para} \;\; q \leq j \quad \textit{e} \quad q \geq j+k.$$

Apêndice C

Resultados Básicos

3.1 Análise funcional

Neste apêndice reunimos os principais resultado utilizados ao longo deste trabalho.

Teorema C.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *(ver [14], p. 54)*
Seja $\{f_n\}$ *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$. *Suponha que*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(b) *Existe uma função* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p. \ em \ \ \Omega.$$

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $|f_n - f|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Teorema C.2 *(ver [14], p. 58)*
Sejam $\{f_n\}$ *uma sequência em* $L^s(\Omega)$ *e* $f \in L^s(\Omega)$, *tais que*

$$f_n \to f \quad em \quad L^s(\Omega), \quad s \geq 1.$$

Então, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ *e uma função* $h \in L^s(\Omega)$ *tais que*

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad q.t.p. \ em \ \ \Omega$$

e

$$|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad q.t.p. \ em \ \ \Omega.$$

Teorema C.3 (Desigualdade de Hölder) *(ver [14], p. 56)*
Sejam $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $1/p + 1/q = 1$. *Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int |fg| \leq |f|_{L^p(\Omega)} |g|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema C.4 (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet) *(ver [14], p. 81)*

Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H'$, existe $u \in H$ tal que

$$f(v) = \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso

$$|f|_{H'} = \|u\|_H.$$

Teorema C.5 (Desigualdade de Gronwall) *(ver [8], p. 37)*

Sejam u, v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que, para $\alpha \geq 0$, satisfazem

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Então

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $u \equiv 0$.

Teorema C.6 (Princípio de Máximo Forte) *(ver [15], p. 15)*

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ em Ω e suponha que existe um ponto $y \in \Omega$ tal que

$$u(y) = \sup_\Omega u \left(\inf_\Omega u \right).$$

Então u é constante.

Teorema C.7 (Princípio de Máximo Fraco) *(ver [15], p. 15)*

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ em Ω. Então

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Teorema C.8 (Desigualdade de Harnack) *(ver [15], p. 250)*

Seja $u \in W^{2,n}(\Omega)$ satisfazendo a equação

$$\begin{cases} -\Delta + a(x)u = 0 & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $a \in L^\infty(\Omega)$. Então, para qualquer bola $B_{2R}(y) \subset \Omega$, temos

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u,$$

para alguma constante $C > 0$.

Teorema C.9 (Lema de Hopf) *(ver [15], p. 34) Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *satisfazendo a equação*

$$\begin{cases} -\Delta + Ku \geq 0 & em \;\; \Omega \\ \\ u > 0 & sobre \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

com $K \geq 0$ *e seja* $x_0 \in \partial\Omega$ *satisfazendo* $u(x_0) = 0$. *Então a derivada normal exterior de* u *em* x_0*, se existir, satisfaz a desigualdade estrita*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0.$$

Teorema C.10 (Manes-Micheletti) *(Ver Chang [9], p. 144)*
Suponha que $m \in C(\overline{\Omega})$ *satisfaz* $\sup\{m(x) : x \in \Omega\} > 0$. *Então a equação*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda m u, \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega \end{cases}$$

admite um menor autovalor positivo λ_1*, associado a uma autofunção positiva. Além disso*

$$dim[Ker(-\Delta - \lambda_1 m)] = 1.$$

Definição C.1 (Condição (PS)) *Sejam* X *um espaço de Banach e* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Diz-se que o funcional* J *satisfaz a condição Palais-Smale no nível* c*, abreviadamente, a condição* $(PS)_c$*, se toda sequência* $\{u_n\} \subset X$ *tal que*

$$J(u_n) \to c \quad em \;\; \mathbb{R}$$

e

$$J'(u_n) \to 0 \quad em \;\; X',$$

chamada sequência (PS)*, possui uma subsequência convergente. Diz-se que* J *satisfaz a condição* (PS) *se satisfaz* $(PS)_c$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$*, ou equivalentemente, se toda sequência* $\{u_n\}$ *tal que*

$$\{J(u_n)\}_n \quad \text{é limitada}$$

e

$$J'(u_n) \to 0 \quad em \;\; X',$$

possui uma subsequência convergente.

Teorema C.11 *(ver [13], p. 2) Seja* E *um espaço de Hilbert (ou Banach reflexivo) e suponha que um funcional* $f : E \to \mathbb{R}$ *é*

(*i*) *fracamente semicontínuo inferiormente;*

(ii) coercivo, isto é, $f(u) \to +\infty$ *quando* $\|u\| \to \infty$.

Então f *é limitado inferiormente e existe* $u_0 \in E$ *tal que*

$$f(u_0) = \inf_E f.$$

Teorema C.12 *(ver [13], p. 20)*
Sejam E *um espaço de Banach e* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. *Se*

(i) f *é limitado inferiormente, com* $c = \inf_E f$;

(ii) f *satisfaz* $(PS)_c$.

Então existe $u_0 \in E$ *tal que* $f(u_0) = c = \inf_E f$, *ou seja,* c *é um valor crítico de* f.

3.2 O espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$. O espaço

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega);\ i = 1, \cdots, N \right\}$$

com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv]$$

e a norma correspondente

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 \right)^{1/2}$$

é um espaço de Hilbert.

Agora, considere

$$C_0^\infty(\Omega) := \{ u \in C^\infty : \mathit{supp}\, u \subset\subset \Omega \}.$$

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$. De fato, temos que a inclusão é própria, por exemplo, a aplicação $u \equiv 1$ sobre $\Omega = (0,1)$ pertence à $H^1(\Omega)$, no entanto $u \notin C_0^\infty(\Omega)$.

O espaço $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na topologia de $H^1(\Omega)$, isto é,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Assim, se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\varphi_n \to u \ \text{ em } \ H^1(\Omega).$$

Teorema C.13 (Desigualdade de Poincaré) *(ver [14], p.174)*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado em relação a alguma direção do $\mathbb{R}^N$. Então, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Seja λ_1 o primeiro autovalor associado a $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Mostra-se que $C = 1/\lambda_1$ é a melhor constante que podemos usar na Desigualdade de Poincaré, ou seja,

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2}.$$

A Desigualdade de Poincaré implica que

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente a norma $\|\cdot\|_{H^1}$ e é conhecida como a *norma usual* em $H_0^1(\Omega)$.

Definição C.2 (Imersão Contínua) *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados. Diz-se que $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso continuamente em $(Y, \|\cdot\|_Y)$ quando*

(i) X é subespaço vetorial de Y;

(ii) A identidade $i : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ é linear limitada, isto é,

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

para alguma constante C positiva.

Teorema C.14 (Imersões de Sobolev) *(ver [16], p. 9)*

As seguintes imersões são contínuas

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \begin{cases} 2 \leq p < +\infty, & se \quad N = 1, 2; \\ 2 \leq p \leq 2^*, & se \quad N \geq 3, \end{cases}$$

onde $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev.

Definição C.3 (Imersão Compacta) *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados. Diz-se que $(X, \|\cdot\|_X)$ está imerso compactamente em $(Y, \|\cdot\|_Y)$ quando*

(i) X é subespaço vetorial de Y;

(ii) A identidade $i : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ *é linear compacta.*

Observação. Dizer que $i : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ é compacta é equivalente a afirmar o seguinte: se $\{x_n\}$ é uma sequência limitada em $(X, \|\cdot\|_X)$, então existem uma subsequência $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ e $y \in Y$ tais que $\|x_{n_k} - y\|_Y \to 0$, ou seja, $x_{n_k} \to y$ em Y.

Teorema C.15 (Imersões de Rellich) *(ver [16], p. 9)*

Se $|\Omega| < +\infty$, *as seguintes imersões são compactas*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < 2^*.$$

Bibliografia

[1] Wallace, A.H., *Introduction to Algebraic Topology*, Pergamon Press, New York, 1957.

[2] Wallace, A.H., *Algebraic Topology*, Benjamin, New York, 1970.

[3] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundation of Algebraic Topology.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.

[4] Francesco Mercuri, Paolo Piccione, Daniel Tausk. *Notes on Morse Theory.*

[5] Elon Lages Lima. Homologia básica, Projeto Euclides, IMPA, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2009.

[6] Sze-Tsen Hu. *Homology theory: A First Course in Algebraic Topology.* Holden-Day Inc., California, 1966.

[7] Arnaldo Garcia, Yves Lequain. *Elementos de álgebra.* Projeto Euclides, IMPA, 3ª edição, Rio de Janeiro, 2005.

[8] Sotomayor, J. M. T. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[9] K. C. Chang, *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*, Progress in nonlinear differential equation and their applications; v.6. Birkhäuser Boston Inc., MA, 1993.

[10] Jean Mawhin and Willem. *Critical point theory and Hamiltonian sistems*, v.74, Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1989.

[11] Miguel P. N. Ramos. *Teoremas de Enlace na Teoria dos Pontos Críticos*. Textos de Matemática, v.2. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, 1993.

[12] Marco A. S. Souto. *Homologia e pontos críticos.* Notas de seminários. Pós-doutorado USP-São Carlos, SP. 2010.

[13] D. G. Costa. *Tópicos em análise não-linear e aplicações às equações diferenciais.* VIII escola latino-americana de matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[14] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.

[15] D. Gilbart & N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[16] Willem, M. *Minimax Theorems*. Birkhäuser, 1996.

[17] Kesavan, S. *Nonlinear Functional Analysis*. Texts and readings in Mathematics n. 28. H.B.A.(Índia), 2004.

[18] Bartsch, T.; Szulkin, A.; Willem, M. *Morse theory and nonlinear differential equations*. Handbook of global analysis, 41–73, 1211, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2008.

[19] Shibo Liu. *Existence of solution to a superlinear p-laplacian equation.*EJDE. Vol. 2001(2001), Nº 66, pp 1-6.

[20] Kanishka Perera. *Critical groups of critical points produced by local linking with applications*. Abstract and Applied Analysis, 3(1998), 437-446.

[21] J. Q. Liu and J. B. Su. *Remarks on multiple nontrivial solutions for quasilinear resonant problems*. J. Math. Anal Appl., 258(2001),209-222

[22] J. Liu. *The Morse index of a saddle point*. Systems Sci. Math. Sci. 2(1989),32-39.

[23] Z. Q. Wang. *On a superlinear elliptic equation*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 8(1991), 43-58.