Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O Método de Sub e Supersolução e Aplicações a Problemas Elípticos

por

Annaxsuel Araújo de Lima †

sob orientação do

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES - REUNI

O Método de Sub e Supersolução e Aplicações a Problemas Elípticos

por

Annaxsuel Araújo de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UFPA

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2011

Resumo

Neste trabalho, apresentamos métodos envolvendo sub e supersolução para estudar a existência de solução de certas equações elípticas.

Palavras-chaves: Iteração Monotônica, Teorema do Ponto Fixo, Sub e Supersolução, Equações Elípticas.

Abstract

In this work, we present methods involving sub and supersolution to study the existence of solution of certain elliptic equations.

Keywords: Monotone Iteration, Fixed Point Theorem, Sub and Supersolution, Elliptic Equations.

Agradecimentos

- Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado a força e a coragem necessárias para enfrentar os desafios da minha longa jornada.

- Aos meus pais Antônio Gomes e Marleide Cleide por todo o amor, carinho e dedicação. Em especial agradeço a minha falecida mãe, uma mulher forte e terna que sempre me apoiou, cuidou e acreditou em mim, seguirei sempre seu exemplo. A minha irmã Monara e a tia Elza, que se tornaram uma espécie de mãe para mim, obrigado por tudo. A todos da minha família que contribuíram de forma direta ou indireta em minha formação.

- Ao meu orientador, Prof. Francisco Júlio pelo excelente trabalho de orientação e pela contribuição para o meu desenvolvimento intelectual e social.

- Aos Professores Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Angelo Roncalli Furtado de Holanda, por terem aceitado o convite para participarem da banca examinadora da minha dissertação e pelas observações endereçadas a mim.

- Agradeço aos meus professores do mestrado Horácio, Brandão, Fernanda, Claudianor e Aparecido, que contribuíram de maneira significativa na minha formação.

- Aos meus professores da graduação André Gustavo, Marcelo, Gurgel, Arlete, Rubens Leão, Ronaldo e Cláudio, que sempre foram fontes de inspiração.

- Aos colegas e amigos do mestrado Antônio Igor (Tonhaunm), Cládio (Cláudio), Denilson, Hildênio, Jussier e Kelmem pelas boas risadas e pelo companheirismo durante esses dois últimos anos. E aos colegas das outras turmas Sheyla, Jackson, Marciel, Luciano e Natan.

Aos funcionários do PPGMAT, em especial a D. Salete que sempre esteve pronta a ajudar na secretaria, a D. Argentina que sempre foi muito atenciosa na biblioteca, a D. Severina (Du) pela gentileza prestada durante todo o período do mestrado.

- Aos camaradas com quem formei um lar: Eder (O salvador), Josiluiz (Os caras), Hebber (O baitcha), Kelmem (Kelvin), Denilson (Denysson) e Alex (Cabeludo). Obrigado pela paciência que tiveram comigo.

- Aos colegas e amigos do PET de Matemática da UFRN pelo companheirismo, paciência e auxílio.

- Aos meus irmãos do peito Camilo e Tiago que apesar de distantes sempre poderemos contar um com os outros. Um abração caras!

- A Ana Paula pelo companheirismo, carinho e paciência dedicados a mim.

- Agradeço ao Eder (O salvador) meu amigo-irmão, pela paciência, companheirismo e atenção. Obrigado por tudo!

- Ao Josiluiz (Os caras) e ao Hebber (O baitcha) excelentes pessoas que tive o privilêgio de morar.

- Ao Natan pelos conselhos e ajuda neste último ano.

- A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e que infelizmente não me recordo neste momento.

- Agradeço a CAPES-REUNI pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais Antônio Gomes e Marleide Cleide e a minha irmã Monara.

Conteúdo

Introdução

Nas últimas décadas, os problemas elípticos tem chamado atenção dos pesquisadores em Equações Diferenciais Parciais pelas aplicações em diversas áreas do conhecimento humano. Em geral, a busca por soluções para as equações diferenciais parciais elípticas não é simples. Portanto mostrar a existência de soluções dessas equações é suficiente para determinados propósitos como, por exemplo, verificar se esta, de fato, modela o que se deseja. Em virtude disto, os métodos matemáticos e os argumentos de análise matemática desenvolvidos, fundamentados pela teoria elíptica, podem ser aplicados em muitos problemas. Ao longo deste trabalho destacaremos métodos envolvendo sub e supersolução para estudar a existência de solução de certas equações elípticas.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No **Capítulo 1**, estudaremos a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado e regular e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^α. Para tanto, apresentaremos o método conhecido como Iteração Monotônica cuja a idéia é baseada num resultado devido a Amann (Ver [2] e [3]) e que também é presente em de Figueiredo (Ver [17]). Além disso, veremos sob que condições o problema acima tem solução única. Faremos, também, um esboço do método quando se trata de sub e supersoluções fracas.

No **Capítulo 2**, usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para mostrar a existência de solução, entre uma sub e supersolução, de alguns problemas elípticos.

O primeiro problema considerado foi

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ são contínuas. Aqui, seguimos idéias desenvolvidas por Clément e Sweers (Ver [13]).

Em seguida, estudaremos um sistema de Neumann-Dirichlet dado por

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) - v \quad \text{em } \Omega, \\ -\Delta v &= \delta u - \gamma v + g(v) \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ é um domínio limitado e regular e $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções localmente Lipschitzianas satisfazendo a seguinte condição:

existe uma constante positiva M tal que $f(t) + Mt$ e $g(t) = (M - \gamma)t$ são ambas não-decrescentes.

Para isso, adaptaremos o Método de Sub e Supersolução usado em Hernández (Ver [20]).

Seguindo as idéias desenvolvidas em Chipot e Corrêa (Ver [15]), estudaremos um problema não-local dado por

$$\begin{cases} -\mathcal{A}(x,u)\Delta u &= \lambda f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, um domínio limitado e regular, onde $\mathcal{A} : \Omega \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfaz:

$$x \mapsto \mathcal{A}(x,u) \text{ é mensurável}, \forall u \in L^2(\Omega),$$

$$u \mapsto \mathcal{A}(x,u) \text{ é contínua de } L^2(\Omega) \text{ em } \mathbb{R}, \text{ q.s. em } x \in \Omega$$

e existem duas constantes a_0 e a_∞ tais que

$$0 < a_0 \leq \mathcal{A}(x,u) \leq a_\infty \text{ q.s. em } x \in \Omega, \forall u \in L^2(\Omega).$$

Além disso, $f:[0,\theta]\to\mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 com

$$f(0)=f(\theta)=0,$$

$$f'(0)>0,$$

$$f(t)>0, \forall t\in(0,\theta),$$

No **Capítulo 3**, tomando por base o artigo de Lee, Shivaji e Ye (Ver [26]), usaremos o Método de Sub e Supersolução apresentado no Capítulo 2, para estudar a existência de solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda f(u) \quad \text{em } \Omega,\\ \quad u &= 0 \qquad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que λ é um parâmetro positivo e $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Este tipo de problema surge no estudo de processos de reação difusão estacionário, em particular , geração de calor não-linear, teoria da combustão, teoria de reatores químicos e dinâmica populacional. Discutiremos, especificamente, o tipo semipositone (quando $f(0)<0$) deste problema que é matematicamente mais desafiador como apontado por P.L.Lions [27].

No **Apêndice A**, enunciamos os principais resultados e definições que foram utilizados nesta dissertação.

Por fim, no **Apêndice B** damos uma breve introdução aos Espaços de Sobolev.

Lista de Notações

Notações Gerais

$\blacksquare$	indica final de demonstração;
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	denota um domínio limitado e regular;
$\overline{\Omega}$	fecho do conjunto Ω;
$\partial\Omega$	fronteira de Ω;
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de u;
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u;
$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$	derivada normal exterior;
$\langle\ ,\ \rangle$	denota o produto interno;
q.s.	quase sempre;

$(-\Delta, H_0^1(\Omega))$	designa o Laplaciano sob condições de fronteira de Dirichlet;
λ_1	denota o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$;
φ_1	autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associada ao autovalor λ_1;
$dist(x, A)$	distância do ponto x ao conjunto A;
$\gg 1$	suficientemente grande;

Espaços de Funções

$L^p(\Omega)$	conjuntos das funções mensuráveis u sobre Ω tais que $\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx < \infty$, $1 \leq p < \infty$;
$L^\infty(\Omega)$	conjuntos das funções mensuráveis u sobre Ω tais que existe C satisfazendo $\lvert u(x)\rvert \leq C$ q.s. em Ω;
$W^{2,p}(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$	espaços de Sobolev;

Normas

$\lVert u\rVert_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx\right)^{1/p}$	norma no espaço $L^p(\Omega)$;
$\lVert u\rVert_\infty = \inf\{C; \lvert u(x)\rvert \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}$	norma no espaço $L^\infty(\Omega)$.

Capítulo 1

Existência de Solução para um Problema Elíptico via Método de Iteração Monotônica.

Vamos estudar, neste capítulo, a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado e regular e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^α.

Quando falamos em solução de (1.1) estamos nos referindo, a menos que se diga algo em contrário, à solução clássica, isto é, uma função $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ que satisfaz (1.1).

1.1 Preliminares Sobre Espaços de Schauder

Nesta seção, apresentaremos os principais resultados envolvendo os espaços de Schauder, que podem ser encontrados em de Figueiredo (Ver [16]).

Definição 1.1 *Uma função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é dita Hölder contínua de expoente α, $0 < \alpha < 1$, se*

$$H_\alpha[u] = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Definição 1.2 (Espaço $C\left(\overline{\Omega}\right)$) *Designamos por $C\left(\overline{\Omega}\right)$ o espaço das funções contínuas $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, munido da norma*

$$\|u\|_0 = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| \,.$$

Definição 1.3 (Espaço $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$) *Designamos por $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$, $m\in\mathbb{N}$, o espaço de todas as funções $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ que juntamente com todas as derivadas de ordem inferior ou igual a m são contínuas em $\overline{\Omega}$. Ele é um espaço de Banach se munido com a norma*

$$\|u\|_{C^m\left(\overline{\Omega}\right)} = \sum_{|\sigma|\le m} \|D^\sigma u\|_0 \,,$$

em que $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N)$, com $\sigma_i\in\mathbb{N}$, $|\sigma|=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N$ e

$$D^\sigma u(x) = \frac{\partial^{|\sigma|}u(x)}{\partial x_1^{\sigma_1}\partial x_2^{\sigma_2}\cdots\partial x_N^{\sigma_N}}.$$

Definição 1.4 (Espaço $C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$) *Designamos por $C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ o espaço das funções pertencentes a $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ cujas m-ésimas derivadas são Hölder contínuas de expoente α, $0<\alpha<1$, em $\overline{\Omega}$. Ele é um espaço de Banach se munido com a norma*

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{C^m\left(\overline{\Omega}\right)} + \sum_{|\sigma|=m} H_\alpha\left[D^\sigma u\right].$$

Denotaremos $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ por $C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ e $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)}$ por $\|\cdot\|_{C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)}$.

Teorema 1.5 (Schauder) *Sejam $f\in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ e k uma constante real não-negativa. Então o problema*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + ku &=& f & \text{em } \Omega,\\ u &=& 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

possui uma única solução $u\in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Teorema 1.6 (Estimativa de Schauder) *Sejam $f\in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ e $u\in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ a solução única de (1.2). Então existe uma constante C, que independe de f e u, tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \le C\,\|f\|_{C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)}, \forall u\in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right).$$

1.2 O Método da Iteração Monotônica

Nesta seção, apresentaremos o método conhecido como *Iteração Monotônica*. A demonstração do teorema que será enunciado adiante e que contém a idéia do método é baseada num resultado devido a Amann (vide [2] e [3]). Este resultado está, também, presente em de Figueiredo (vide [17]), onde encontramos referências para este assunto.

Antes de enunciarmos o próximo teorema, definamos sub e supersolução para o problema (1.1).

Definição 1.7 *Uma função* $\underline{U} \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *é dita uma subsolução do problema (1.1) se*

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} & \leq & f(\underline{U}) & \text{em } \Omega, \\ \underline{U} & \leq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Definição 1.8 *Uma função* $\overline{U} \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *é dita uma supersolução do problema (1.1) se*

$$\begin{cases} -\Delta \overline{U} & \geq & f(\overline{U}) & \text{em } \Omega, \\ \overline{U} & \geq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Teorema 1.9 *Suponhamos que o problema (1.1) possua uma subsolução* $\underline{U}$ *e uma supersolução* $\overline{U}$, *com* $\underline{U} \leq \overline{U}$ *em* Ω. *Suponhamos, ainda, que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *seja de classe* C^α *e*

$$f(t_1) - f(t_2) \geq -k(t_1 - t_2), \tag{1.5}$$

para alguma constante $k \geq 0$ *e para todo* $t_1 \geq t_2$, $|t_1|, |t_2| \leq \max\left\{\|\underline{U}\|_\infty, \|\overline{U}\|_\infty\right\}$. *Então o problema (1.1) possui soluções* $U, V \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *tais que* $\underline{U} \leq U \leq V \leq \overline{U}$. *Além disso, qualquer solução* u *de (1.1) com* $\underline{U} \leq u \leq \overline{U}$ *é tal que* $U \leq u \leq V$, *ou seja,* U *é solução mínima e* V *é solução máxima com respeito ao intervalo* $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$.

Demonstração. Inicialmente, demonstraremos a existência de solução para o problema em questão. Para tanto, consideremos a função

$$g(t) = f(t) + kt, \tag{1.6}$$

onde $k \geq 0$ e $|t| \leq \max\left\{\|\underline{U}\|_\infty, \|\overline{U}\|_\infty\right\}$. Note que, por (1.5), g é crescente neste intervalo. Definamos, indutivamente, uma sequência de funções $u_n \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ por $u_0 = \underline{U}$ e, para todo $n \geq 1$, u_n é a solução única do problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u_n + ku_n & = & g(u_{n-1}) & \text{em } \Omega, \\ u_n & = & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

Afirmação 1. A função $g(u_{n-1}) \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$.

Com efeito, sendo $u_n \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ temos, pela Desigualdade do Valor Médio (ver Teorema A.5 do Apêndice A), que existe $M > 0$ tal que

$$|u_{n-1}(x) - u_{n-1}(y)| \leq M\,|x - y|,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\frac{|g(u_{n-1})(x) - g(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &= \frac{|f(u_{n-1})(x) + ku_{n-1}(x) - f(u_{n-1})(y) - ku_{n-1}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\leq \frac{|f(u_{n-1})(x) - f(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^{\alpha}} + k\frac{|u_{n-1}(x) - u_{n-1}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\leq \frac{|f(u_{n-1})(x) - f(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^{\alpha}} + kM\frac{|x-y|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&= \frac{|f(u_{n-1})(x) - f(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^{\alpha}} + kM\,|x-y|^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\neq y} \frac{|g(u_{n-1})(x) - g(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &\leq \sup_{x\neq y} \frac{|f(u_{n-1})(x) - f(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&+ kM \sup_{x\neq y} |x-y|^{1-\alpha} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Uma vez que $g(u_{n-1}) \in C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, pelo Teorema de Schauder (ver Teorema 1.5), o problema (1.7) possui uma única solução $u_n \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Afirmação 2. $\underline{U} = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq \overline{U}$.

De fato, mostremos, primeiramente, que $\underline{U} = u_0 \leq u_1$ em Ω. Como $\underline{U}$ é subsolução de (1.1), temos

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} \leq f(\underline{U}) & \text{em } \Omega, \\ \underline{U} \leq 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $k \geq 0$, então

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} + k\underline{U} \leq f(\underline{U}) + k\underline{U} & \text{em } \Omega, \\ \underline{U} \leq 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} + k\underline{U} \leq g(\underline{U}) & \text{em } \Omega, \\ \underline{U} \leq 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo u_1 solução de (1.7), segue

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + ku_1 = g(\underline{U}) & \text{em } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

daí

$$\begin{cases} -\Delta\underline{U} + k\underline{U} & \leq & -\Delta u_1 + ku_1 & \text{em } \Omega, \\ \underline{U} & \leq & u_1 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

implica em

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - \underline{U}) + k(u_1 - \underline{U}) & \geq & 0 & \text{em } \Omega, \\ u_1 - \underline{U} & \geq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo (ver Teorema A.8 do Apêndice A), $u_1 - \underline{U} \geq 0$ em Ω, ou seja, $\underline{U} \leq u_1$ em Ω.

Agora, mostremos que $u_1 \leq \overline{U}$ em Ω. Sendo $\overline{U}$ supersolução de (1.1), temos

$$\begin{cases} -\Delta\overline{U} & \geq & f(\overline{U}) & \text{em } \Omega, \\ \overline{U} & \geq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $k \geq 0$, então

$$\begin{cases} -\Delta\overline{U} + k\overline{U} & \geq & f(\overline{U}) + k\overline{U} & \text{em } \Omega, \\ \overline{U} & \geq & 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta\overline{U} + k\overline{U} & \geq & g(\overline{U}) & \text{em } \Omega, \\ \overline{U} & \geq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por g ser crescente, segue que $g(\underline{U}) \leq g(\overline{U})$ e de (1.8) obtemos

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + ku_1 & \leq & g(\overline{U}) & \text{em } \Omega, \\ u_1 & = & 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e assim,

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + ku_1 & \leq & -\Delta\overline{U} + k\overline{U} & \text{em } \Omega, \\ u_1 & \leq & \overline{U} & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde,

$$\begin{cases} -\Delta(\overline{U} - u_1) + k(\overline{U} - u_1) & \geq & 0 & \text{em } \Omega, \\ \overline{U} - u_1 & \geq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, usando o princípio do máximo, $u_1 \leq \overline{U}$ em Ω.

Agora, suponhamos que $\underline{U} \leq \cdots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq \cdots \leq \overline{U}$ e mostremos $\underline{U} \leq u_{n+1} \leq \overline{U}$. Considerando as equações que definem u_n e u_{n+1}, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_n + k u_n &= g(u_{n-1}) \quad \text{em } \Omega, \\ u_n &= 0 \quad\quad\quad\;\; \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.9}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + k u_{n+1} &= g(u_n) \quad \text{em } \Omega, \\ u_{n+1} &= 0 \quad\quad\;\; \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Daí, subtraindo membro a membro as equações em (1.9) de (1.10), obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1} - u_n) + k(u_{n+1} - u_n) &= g(u_n) - g(u_{n-1}) \quad \text{em } \Omega, \\ u_{n+1} - u_n &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como g é crescente, $g(u_n) - g(u_{n-1}) \geq 0$ e, pelo princípio do máximo, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ em Ω, isto é, $u_n \leq u_{n+1}$ em Ω.

Evidentemente, $\underline{U} \leq u_{n+1}$ em Ω. Com o raciocínio análogo para mostrar que $u_1 \leq \overline{U}$ em Ω, chega-se a $u_{n+1} \leq \overline{U}$ em Ω. Portanto,

$$\underline{U} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \overline{U} \text{ em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Por (1.11) e em virtude da monotonicidade de (u_n), existe uma função U, definida em $\overline{\Omega}$, tal que $u_n \to U$ pontualmente em $\overline{\Omega}$. E uma vez que $\underline{U}, \overline{U} \in C^2(\overline{\Omega})$, temos $\underline{U}, \overline{U} \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$.

De (1.11) segue

$$|u_n| \leq \max\left\{\|\underline{U}\|_\infty, \left\|\overline{U}\right\|_\infty\right\} = K \text{ em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definamos a seguinte sequência

$$h_n = |u_n - U|^p$$

e note que

$$h_n \to 0$$

pontualmente em $\overline{\Omega}$ e

$$\begin{aligned} |h_n| &\leq 2^p(|K|^p + |K|^p) \\ &= 2^{p+1} K^p \text{ em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde $2^{p+1}K^p \in L^1(\Omega)$. Logo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema A.15 do Apêndice A), temos

$$\|u_n - U\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u_n - U|^p \, dx \to 0,$$

ou seja,

$$u_n \to U \text{ em } L^p(\Omega).$$

Da existência de uma constante real $M > 0$ tal que

$$|u_n| \leq M \text{ em } \overline{\Omega}, \forall n \in \mathbb{N},$$

e da continuidade de g, obtemos uma constante $C > 0$ de modo que

$$|g(u_n)| \leq C \text{ em } \overline{\Omega}, \forall n \in \mathbb{N},$$

donde segue que $g(u_n) \in L^p(\Omega)$. Além disso, $g(u_n) \to g(U)$ pontualmente em $\overline{\Omega}$ e, novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\|g(u_n) - g(U)\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |g(u_n) - g(U)|^p \, dx \to 0,$$

isto é,

$$g(u_n) \to g(U) \text{ em } L^p(\Omega).$$

Sendo $g(u_{n-1}) \in L^p(\Omega)$ satisfazendo (1.7), então $u_n \in W^{2,p}(\Omega)$ (ver Teorema A.19 do Apêndice A) e existe uma constante C, que não depende de n, tal que

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \, \|g(u_{n-1}) - g(u_{m-1})\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.12}$$

Logo, (u_n) é uma sequência de Cauchy em $W^{2,p}(\Omega)$, pois $(g(u_n))$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Por $W^{2,p}(\Omega)$ ser um espaço de Banach, existe $\tilde{U} \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to \tilde{U}$ em $W^{2,p}(\Omega)$. Além disso, por

$$\left\|u_n - \tilde{U}\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|u_n - \tilde{U}\right\|_{W^{2,p}(\Omega)},$$

segue que $u_n \to \tilde{U}$ em $L^p(\Omega)$. Assim, pela unicidade do limite, obtemos $U = \tilde{U}$ e daí,

$$u_n \to U \text{ em } W^{2,p}(\Omega).$$

Tomando $p > N$, tem-se a imersão compacta, $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Isso implica

$$u_n \to U \text{ em } C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Pela estimativa de Schauder, obtemos

$$\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \, \|g(u_{n-1})\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} \, , \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Consequentemente, (u_n) é limitada em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Desde que $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{2}(\overline{\Omega})$ compactamente, existe uma subsequência de (u_n) que converge para U em $C^{2}(\overline{\Omega})$. Como (u_n) é monótona, a sequência toda converge para U em $C^{2}(\overline{\Omega})$. Uma vez que

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + k u_{n+1} & = & f(u_n) + k u_n & \text{em } \Omega, \\ u_{n+1} & = & 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

passando ao limite, segue-se

$$\begin{cases} -\Delta U + kU & = & f(U) + kU & \text{em } \Omega, \\ U & = & 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e daí

$$\begin{cases} -\Delta U & = & f(U) & \text{em } \Omega, \\ U & = & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Analogamente, obtemos uma sequência não-crescente (v_n) tal que

$$\underline{U} \leq \cdots \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \cdots \leq v_0 = \overline{U}$$

de modo que $v_n \to V$ em $C^{2}(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{cases} -\Delta V & = & f(V) & \text{em } \Omega, \\ V & = & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, $\underline{U} \leq U \leq V \leq \overline{U}$ em Ω.

Mostraremos as existências das soluções minimal e maximal com respeito ao intervalo $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$. Seja u uma solução de (1.1) com $\underline{U} \leq u \leq \overline{U}$ em Ω. Considere o intervalo $[\underline{U}, u]$ e apliquemos o procedimento anterior para obter uma sequência não-decrescente em que

$$\underline{U} \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq u,$$

com $u_n \to U$. Logo, $U \leq u$ é solução mínima com respeito a $[\underline{U}, \overline{U}]$. Analogamente, demonstramos a existência da solução maximal. ■

Vejamos algumas observações relacionadas com o Teorema 1.9.

Observação 1.1 *Pode-se, eventualmente, ter $U = V$. Esse é o caso quando se tem unicidade de solução. Vide Seção 1.4.*

Observação 1.2 *A existência de solução nesse teorema, assim como a minimalidade e maximalidade devem ser entendidas com relação ao intervalo $[\underline{U}, \overline{U}]$. Eventualmente, podem existir soluções do problema fora desse intervalo.*

Observação 1.3 *A condição (1.5) será automaticamente satisfeita se f for de classe C^1.*

Observação 1.4 *A condição $\underline{U} \leq \overline{U}$ não é automaticamente satisfeita se $\underline{U}$ e $\overline{U}$ forem, respectivamente, sub e supersoluções.*

Um exemplo onde isso acontece é no problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.14}$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Toda solução de (1.14) é da forma $u = t\varphi_1$, em que t é uma constante real e $\varphi_1 > 0$ em Ω é uma autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associada ao autovalor λ_1. De fato, pois

$$-\Delta(t\varphi_1) = t(-\Delta\varphi_1) = t(\lambda_1\varphi_1) = \lambda_1(t\varphi_1) \text{ em } \Omega$$

e $t\varphi_1 = 0$ em $\partial\Omega$. Escolhamos $\underline{U} = \varphi_1$ e $\overline{U} = -\varphi_1$, então $\underline{U}$ é subsolução e $\overline{U}$ é supersolução de (1.14), mas $\underline{U} \geq \overline{U}$ em Ω.

Observação 1.5 *O Teorema 1.9 continua válido se tivermos*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

onde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^α.

1.3 Aplicações

Obviamente, a dificuldade na aplicação do Teorema 1.9 reside na descoberta de uma subsolução $\underline{U}$ e de uma supersolução $\overline{U}$ tais que $\underline{U} \leq \overline{U}$. Nesta seção, estudaremos alguns exemplos como ilustrações do método.

Exemplo 1.1 *Consideremos o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= 1 - |u| \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.16}$$

e observemos que $f(t) = 1 - |t|$ *satisfaz às condições do Teorema 1.9. Além disso, como é fácil ver, as funções* $\underline{u} = -1$ *e* $\overline{u} = 1$ *são, respectivamente, sub e supersolução do problema (1.16) satisfazendo* $\underline{u} < \overline{u}$*. Logo, existe uma solução clássica* u*, do referido problema, tal que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$*.*

Exemplo 1.2 *De maneira análoga, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= 1 - |u|^p \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.17}$$

para $p > 1$*, também satisfaz as condições do Teorema 1.9 e* $\underline{u} = -1$ *e* $\overline{u} = 1$ *são, respectivamente, sub e supersolução do problema (1.17) satisfazendo* $\underline{u} < \overline{u}$*. Logo, existe uma solução clássica* u*, do referido problema, tal que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$*.*

Exemplo 1.3 *Consideremos o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^\alpha \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.18}$$

onde $0 < \alpha < 1$*. Então existe solução de (1.18).*

Com efeito, a função $f(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < 1$, é de classe C^α e crescente. Consequentemente, ela satisfaz as condições do Teorema 1.9. Construamos uma subsolução e uma supersolução ordenadas. Seja $t > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\lambda_1 t^{1-\alpha} \left[\varphi_1(x)\right]^{1-\alpha} \leq 1, \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{1.19}$$

o que implica

$$-\Delta(t\varphi_1) = t(-\Delta\varphi_1) = t\lambda_1\varphi_1 \leq (t\varphi_1)^\alpha \text{ em } \Omega. \tag{1.20}$$

E como $t\varphi_1 = 0$ em $\partial\Omega$, $\underline{u} = t\varphi_1$ é subsolução para (1.18), $t > 0$ suficientemente pequeno.

Seja $e > 0$ a solução única do problema

$$\begin{cases} -\Delta e &= 1 \quad \text{em } \Omega, \\ e &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.21}$$

Escolhamos uma constante $M > 0$ tal que

$$M^{1-\alpha} \geq [e(x)]^{\alpha}, \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{1.22}$$

Então

$$-\Delta(Me) = M(-\Delta e) = M \geq (Me)^{\alpha} \text{ em } \Omega \tag{1.23}$$

e $Me = 0$ em $\partial\Omega$, logo $\overline{u} = Me$ é uma supersolução de (1.18). Além disso, para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\underline{u} = t\varphi_1 \leq Me = \overline{u}. \tag{1.24}$$

De fato, seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno e definamos o conjunto Ω_δ por

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; dist\,(x, \partial\Omega) \leq \delta\}.$$

Como $\varphi_1, e > 0$ em Ω e pela compacidade de $\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$, existe $c > 0$ de modo que

$$\frac{Me(x)}{\varphi_1(x)} \geq c, \forall x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}. \tag{1.25}$$

Por outro lado, sendo $\frac{\partial e}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$ e por $\partial\Omega$ ser compacto, existe $m < 0$ tal que

$$\frac{\partial e}{\partial \eta}(x) \leq m, \forall x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Do mesmo modo, sabendo que $\varphi_1 \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, existe $k > 0$ satisfazendo

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(x)\right| \leq k, \forall x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Seja

$$k_0 = \inf_{\overline{\Omega}_\delta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} < 0$$

e consideremos a função

$$h(x) = \gamma\varphi_1(x) - e(x),$$

com $\gamma > 0$, definida em $\overline{\Omega}_\delta$. Então

$$\frac{\partial h}{\partial \eta}(x) = \gamma \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(x) - \frac{\partial e}{\partial \eta}(x) \geq \gamma k_0 - m > 0, \forall x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

desde que $\gamma > \frac{m}{k_0}$.

Fixemos $x \in \overline{\Omega}_\delta$ e definamos

$$g(s) = h(x + s\eta), \forall s \in \mathbb{R}.$$

Para cada $x \in \overline{\Omega}_\delta$, escolhamos um único $\tilde{x} \in \overline{\Omega}_\delta$ tal que a reta que passa por esses dois pontos coincida com a reta suporte do vetor normal exterior $\eta = \eta(\tilde{x})$. Dessa forma, existe $\tilde{s} > 0$ de modo que $x + \tilde{s}\eta = \tilde{x} \in \partial\Omega$. Por $h(\partial\Omega) \equiv 0$ temos

$$g(\tilde{s}) = h(x + \tilde{s}\eta) = h(\tilde{x}) = 0.$$

Observe que g é a composição de funções de classe C^1, logo $g : [0, \tilde{s}] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0, \tilde{s}]$ e derivável em $(0, \tilde{s})$, e aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0, \tilde{s})$ tal que

$$g(\tilde{s}) - g(0) = g'(\xi)(\tilde{s} - 0).$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \eta}(x + \xi\eta) &= \lim_{t \to 0} \frac{h(x + \xi\eta + t\eta) - h(x + \xi\eta)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{h(x + (\xi + t)\eta) - h(x + \xi\eta)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{g(\xi + t) - g(\xi)}{t} \\
&= g'(\xi),
\end{aligned}$$

segue-se

$$-h(x) = \frac{\partial h}{\partial \eta}(x + \xi\eta)\tilde{s} > 0 \text{ em } \overline{\Omega}_\delta.$$

Consequentemente, $h(x) \leq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}_\delta$ e assim

$$\gamma\varphi_1(x) \leq e(x), \forall x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Logo

$$\frac{Me(x)}{\varphi_1} \geq M\gamma > 0 \text{ em } \Omega_\delta \tag{1.26}$$

e de (1.25) e (1.26), segue

$$\frac{Me(x)}{\varphi_1} \geq m > 0, \forall x \in \Omega,$$

onde $m = \min\{c, M\gamma\}$. Então basta que $0 < t < m$ para termos (1.24).

Portanto, pelo Teorema 1.9 o problema (1.14) possui solução u satisfazendo

$$\underline{u} = t\varphi_1 \leq u \leq Me = \overline{u}$$

■

No próximo exemplo, daremos uma condição para que o problema (1.1) possua sub e supersolução.

Exemplo 1.4 *Se*

$$a = \lim_{t\to 0^+} \inf \frac{f(t)}{t} > \lambda_1 \tag{1.27}$$

e

$$b = \lim_{t\to\infty} \sup \frac{f(t)}{t} < \lambda_1, \tag{1.28}$$

onde $\lambda_1 > 0$ *é o primeiro autovalor de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ *e* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é de classe* C^α*. Então o problema (1.1) possui sub e supersolução.*

Estas duas condições nos dizem que nas proximidades de 0 o gráfico da função f se encontra acima da reta $\lambda_1 t$, enquanto que para t suficientemente grande o gráfico da função f está abaixo do gráfico da reta $\lambda_1 t$.

De (1.27), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(a-\epsilon)t < f(t) < (a+\epsilon)t \text{ quando } 0 < t < \delta.$$

Consideremos

$$f(t) > (a-\epsilon)t, \forall t \in (0,\delta).$$

Desde que $a > \lambda_1$, podemos tomar ϵ suficientemente pequeno tal que $a - \epsilon > \lambda_1$ e assim $f(t) > \lambda_1 t$, onde $t \in (0,\delta)$. Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada à λ_1. Se $t > 0$, t suficientemente pequeno, temos

$$t\varphi_1(x) < \delta, \forall x \in \Omega. \tag{1.29}$$

Portanto $\underline{u} = t\varphi_1$ é subsolução de (1.1), pois

$$-\Delta(t\varphi_1) = t(-\Delta\varphi_1) = t\lambda_1\varphi_1 = \lambda_1(t\varphi_1) < f(t\varphi_1) \text{ em } \Omega, \tag{1.30}$$

e $t\varphi_1 = 0$ em $\partial\Omega$.

Por (1.28), segue que dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$(b-\epsilon)t < f(t) < (b+\epsilon)t \text{ se } t \geq M.$$

Consideremos a desigualdade

$$f(t) < (b+\epsilon)t, \forall t \geq M.$$

Como f é contínua, existe $c > 0$ de modo que $f(t) \leq c$, com $0 \leq t \leq M$. Assim

$$f(t) \leq (b+\epsilon)t + c, \forall t \geq 0.$$

Consideremos ϵ suficientemente pequeno, para que $b + \epsilon < \lambda_1$. Seja $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ a solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v & = & (b+\epsilon)\, v + c & \text{em } \Omega, \\ v & = & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.31}$$

Pelo Princípio do Máximo, $v \geq 0$ em Ω. Segue-se que $\overline{u} = v$ é uma supersolução de (1.1), pois

$$-\Delta v = (b+\epsilon)\, v + c \geq f(v) \text{ em } \Omega \tag{1.32}$$

e $v = 0$ em $\partial\Omega$. Mostrando, assim, a existência de sub e supersolução de (1.1). Além disso, podemos tomar $t > 0$, suficientemente pequeno, de modo que $\underline{u} = t\varphi_1 \leq v = \overline{u}$ (ver exemplo 1.3). Logo, usando o Teorema 1.9, existe solução u do problema (1.1) em que

$$\underline{u} = t\varphi_1 \leq u \leq v = \overline{u}.$$

■

1.4 Unicidade

Observemos que o problema (1.1) pode possuir multiplicidade de soluções. Isso é o que mostra o exemplo a seguir:

$$\begin{cases} -\Delta u &= -2|u| \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.33}$$

em que $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$. Como é fácil ver, para cada $k \leq 0$, a função

$$u(x, y) = k(sen\, x)(sen\, y), 0 < x, y < \pi,$$

é solução do problema (1.33). Assim, o problema (1.33) possui uma infinidade de soluções.

Nesta seção, discutiremos algumas questões relacionadas à unicidade. Antes disso, porém, estabeleceremos resultados sobre minimalidade e maximalidade de soluções as quais serão utilizadas nesse estudo.

Observamos que, no Teorema 1.9, as soluções minimal e maximal o eram em relação ao intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$. Mostraremos, no próximo resultado, que, sob determinadas condições, obtém-se soluções minimal e maximal globais. Isso acontece se tivermos um controle conveniente da sublinearidade. Para isso, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.34}$$

em que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é de classe C^α e (1.27)-(1.28) ocorrem.

Notemos que, de (1.28), temos a existência de constantes positivas $a < \lambda_1$ e $C > 0$ tais que

$$f(t) \leq at + C, \forall t \geq 0.$$

Seja $\overline{U}$ a solução única e positiva do problema

$$\begin{cases} -\Delta \overline{U} &= a\overline{U} + C \quad \text{em } \Omega, \\ \overline{U} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.35}$$

Teorema 1.10 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^α satisfazendo (1.27) e (1.28). Então existem uma solução mínima e máxima globais para o problema (1.34).*

Demonstração. Seja u uma solução do problema (1.34). Consideremos $\underline{U} = t\varphi_1$ e $\overline{U}$ dada na equação (1.35). Como vimos anteriormente, $\underline{U} = t\varphi_1$ é subsolução se $t > 0$ for suficientemente pequeno e $\overline{U} > 0$ é supersolução. Além disso, nestas condições,

$$\underline{U} = t\varphi_1 < \overline{U} \text{ em } \Omega.$$

Daí, pelo Teorema 1.9, existe uma solução mínima $\underline{u}$ e uma solução máxima $\overline{u}$ com

$$\underline{U} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{U} \text{ em } \Omega.$$

Assim, é suficiente mostrar que

$$\underline{U} \leq u \leq \overline{U} \text{ em } \Omega.$$

Provemos que $u \leq \overline{U}$. Para isso, calculemos

$$\begin{aligned} -\Delta\left(\overline{U} - u\right) - a\left(\overline{U} - u\right) &= -\Delta\overline{U} - a\overline{U} - [-\Delta u - au] \\ &= C - [f(u) - au] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Pelo Princípio do Máximo $\overline{U} - u \geq 0$ em Ω, provando que $u \leq \overline{U}$ em Ω. Desse modo, usando o Teorema 1.9, a solução $\overline{u}$ máxima no intervalo $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$, onde $v_0 = \overline{U}$, satisfaz

$$u \leq \overline{u} \leq \overline{U} \text{ em } \Omega.$$

Agora, usemos o par de sub e supersolução $(\underline{U}, u)$. Observemos que $u > 0$ em Ω e $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$ e como $\underline{U} = t\varphi_1$, podemos considerar $t > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\underline{U} = t\varphi_1 < u \text{ em } \Omega.$$

Assim, a solução $\underline{u}$, obtida por iteração monotônica, onde $u_0 = \underline{U}$ é solução mínima no intervalo $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$, satisfaz

$$\underline{U} \leq \underline{u} \leq u \text{ em } \Omega.$$

Logo,

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ em } \Omega$$

e daí $\underline{u}$ é solução mínima global e $\overline{u}$ é solução máxima global. ■

O teorema a seguir, nos mostra sob que condições a solução do problema (1.34) é única.

Teorema 1.11 *Sob as hipótese (1.27), (1.28) e*

$$t \to \frac{f(t)}{t}, t > 0, \text{ é decrescente,} \tag{1.36}$$

então o problema (1.34) possui solução única.

Demonstração. Adaptaremos a demonstração presente em Brezis-Oswald (ver [8]).

Sejam u_1 e u_2 soluções de (1.34). Desde que, sob as hipóteses assumidas, o problema (1.34) possui solução mínima global, pelo Teorema 1.10, daí podemos supor $u_1 \leq u_2$. Desse modo,

$$-\Delta u_1 = f(u_1) \text{ em } \Omega$$

e

$$-\Delta u_2 = f(u_2) \text{ em } \Omega,$$

implica em

$$(-\Delta u_1)u_2 = f(u_1)u_2 \text{ em } \Omega$$

e

$$(-\Delta u_2)u_1 = f(u_2)u_1 \text{ em } \Omega.$$

Com isso,

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 = \int_\Omega f(u_1)u_2$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_1 = \int_\Omega f(u_2)u_1,$$

donde

$$\int_\Omega [f(u_1)u_2 - f(u_2)u_1] = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\int_{\Omega} u_1 u_2 \left[\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2}\right] = 0 \tag{1.37}$$

De (1.36) e $0 < u_1(x) \leq u_2(x), \forall x \in \Omega$, temos

$$\frac{f(u_1(x))}{u_1(x)} \geq \frac{f(u_2(x))}{u_2(x)}, \forall x \in \Omega,$$

isto é,

$$\frac{f(u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(u_2(x))}{u_2(x)} \geq 0, \forall x \in \Omega.$$

No entanto $u_1 u_2 > 0$ e para ocorrer (1.37), devemos ter

$$\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{f(u_1)}{u_1} = \frac{f(u_2)}{u_2}.$$

Mas por (1.36), segue que $u_1(x) = u_2(x), \forall x \in \Omega$, o que conclui a demonstração. ■

A seguir, como mais uma ilustração do que foi feito até agora com relação à existência e unicidade de solução, estudaremos a *Equação Logística* que, além de interessante do ponto de vista matemático, possui motivações relacionadas com a Biologia, mormente com questões associadas à dinâmica populacional. Para mais informações sobre esse problema veja Chipot [12], Sattinger [28] e suas referências.

Se $a > 0$ é uma constante positiva, a equação logística é dada por

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & u(a-u) & \text{em } \Omega, \\ u & > & 0 & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{1.38}$$

Caso não imponhamos a condição $u > 0$ em Ω a função $u \equiv 0$ é solução da equação (1.38). A unicidade a que nos referiremos será com respeito à classe de funções positivas em Ω.

Teorema 1.12 *Designemos por λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. O problema (1.38) possui solução se, e somente se, $a > \lambda_1$. Além disso, tal solução é única.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que $a \leq \lambda_1$. Assim, se considerarmos $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ como função teste na equação (1.38) e integrarmos por partes, teremos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - a \int_\Omega u\varphi = -\int_\Omega u^2 \varphi.$$

Fazendo $\varphi = u$ nessa última igualdade, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - a \int_\Omega u^2 = -\int_\Omega u^3.$$

Desde que $a \leq \lambda_1$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - a \int_\Omega u^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda_1 \int_\Omega u^2 \geq 0$$

em que na última desigualdade utilizamos a caracterização variacional de λ_1, isto é,

$$\lambda_1 = \inf_{H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx}{\int_\Omega v^2 dx}.$$

Em vista de

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - a \int_\Omega u^2 = -\int_\Omega u^3$$

concluímos que

$$\int_\Omega u^3 \leq 0$$

donde segue-se que $u \equiv 0$, pois u é não-negativa. Conclusão: o problema (1.38) não possui solução se $a \leq \lambda_1$.

Suponhamos, a partir daqui, que $\lambda_1 < a$ e observemos que estamos trabalhando com soluções clássicas. Na verdade, desde que $f(t) = t(a-t)$ é de classe C^1, segue-se que toda solução fraca do problema (1.38) é clássica.

Inicialmente, observemos que $\overline{u} = a$ é uma supersolução do problema (1.38). Isso vem do fato de que $-\Delta \overline{u} = 0 = \overline{u}(a - \overline{u})$ em Ω e $\overline{u} > 0$ em $\partial\Omega$.

Para construir uma subsolução, sejam $t > 0$ e $\varphi_1 > 0$ em Ω uma autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associada ao autovalor λ_1. Consideremos $\underline{u} = t\varphi_1$ e observemos que

$$-\Delta(t\varphi_1) = \lambda_1 t\varphi_1 \leq (t\varphi_1)(a - t\varphi_1)$$

se

$$\lambda_1 \leq a - t\varphi_1$$

e isso acontece se, e somente se,

$$t\varphi_1 \leq a - \lambda_1.$$

Desde que $a - \lambda_1 > 0$ e φ_1 é positiva e regular, para $t > 0$ suficientemente pequeno teremos $t\varphi_1 \leq a - \lambda_1$ e daí

$$\underline{u} = t\varphi_1$$

é uma subsolução positiva com $\underline{u} < \overline{u} = a$. Portanto, pelo Teorema 1.9 o problema (1.38) possui uma solução u tal que

$$t\varphi_1 \leq u \leq a.$$

Observemos que toda solução u da equação logística (1.38) satisfaz $u \leq a$. Com efeito, se u for uma solução (clássica) de (1.38), suponhamos que u atinja máximo, que é positivo, em um ponto $x_0 \in \Omega$. Assim,

$$0 \leq -\Delta u(x_0) = u(x_0)(a - u(x_0)) < 0$$

o que é uma contradição. Na verdade, se u for solução de (1.38), teremos $\|u\|_\infty < a$. De fato, desde que, pela observação precedente temos $\|u\|_\infty \leq a$, consideremos a função $a - u$.

Vejamos a questão de unicidade. Observemos que se considerarmos $f(t) = t(a-t)$ e em virtude do fato de que toda solução u da equação logística (1.38) satisfaz $u \leq a$ é suficiente observar que a condição (1.36), ou seja,

$$\frac{f(t)}{t} = a - t > 0 \ \text{ é decrescente}$$

é satisfeita em $0 < t < a$. Assim, a equação logística (1.38) possui uma única solução.

■

1.5 Iteração Monotônica via Sub e Supersolução Fraca

O *Método da Iteração Monotônica* descrito na Seção 1.2, referente à solução clássica, aplica-se, também, quando trabalha-se com sub e supersoluções fracas. Nesta seção, descreveremos, de maneira suscinta, haja vista que o procedimento é bem semelhante àquele desenvolvido na Seção 1.2, essa técnica remetendo o(a) leitor(a) à referência Chipot [12] para os detalhes.

Estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + f(u) = g \text{ em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.39}$$

em que $g \in H^{-1}(\Omega)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitziana, isto é, existe uma constante positiva L tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.13 *Diz-se que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (1.39) se*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega f(u) v \, dx = \langle g, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o par de dualidade entre $g \in H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Antes de introduzirmos as definições de sub e supersoluções fracas, relembremos que, dadas $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$, diz-se que $u_1 \leq u_2$ em $\partial\Omega$ se $(u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(\Omega)$, onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ é a parte positiva de u.

Definição 1.14 *Diz-se que $\overline{u}$ é uma* supersolução fraca *do problema (1.39) se*

$$\overline{u} \in H_0^1(\Omega), \, \overline{u} \geq 0 \, em \, \partial\Omega,$$

$$-\Delta\overline{u} + f(\overline{u}) \geq g \textit{ no sentido fraco, isto é,}$$

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega f(\overline{u}) v \, dx \geq \langle g, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0.$$

Definição 1.15 *Diz-se que $\underline{u}$ é uma* subsolução fraca *do problema (1.39) se*

$$\underline{u} \in H_0^1(\Omega), \, \underline{u} \leq 0 \, em \, \partial\Omega,$$

$$-\Delta\underline{u} + f(\underline{u}) \leq g \textit{ no sentido fraco, isto é,}$$

$$\int_\Omega \nabla\underline{u} \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega f(\underline{u}) v \, dx \leq \langle g, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0.$$

Antes de enunciarmos o teorema central desta seção, introduziremos o *Princípio do Máximo Fraco.* Veja Teorema 4.4 em Chipot [12].

Teorema 1.16 *Seja $a \in L^\infty(\Omega)$ uma função não-negativa. Sejam $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ tais que*

$$-\Delta u_1 + a(x)u_1 \leq -\Delta u_2 + a(x)u_2, \textit{ no sentido fraco, e}$$

$$u_1 \leq u_2 \textit{ em} \, \partial\Omega.$$

Então

$$u_1 \leq u_2 \textit{ em} \, \Omega.$$

A seguir, enunciaremos e daremos um breve esboço da demonstração do teorema que traduz o método da iteração monotônica envolvendo sub e supersolução fracas.

Teorema 1.17 *Seja $g \in H^{-1}(\Omega)$. Suponhamos que existam $\underline{u}$ e $\overline{u}$, respectivamente, sub e supersolução fracas do problema (1.39) tais que*

$$\underline{u} \leq \overline{u} \textit{ em} \, \Omega.$$

Então existem u_m e u_M soluções do problema (1.39) tais que qualquer que seja a solução u de (1.39) satisfazendo $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ teremos

$$\underline{u} \leq u_m \leq u \leq u_M \leq \overline{u}.$$

Demonstração. Suponhamos $\lambda \geq L$ onde L é a constante de Lipischitz da função f. Para cada $v \in L^2(\Omega)$ seja $u = S(v) \in H_0^1(\Omega)$ a única solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = \lambda v - f(v) + g \text{ em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.40}$$

Em virtude da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, S é uma aplicação de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Além disso,

1. $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é contínua e compacta;

2. S é monotônica, isto é, $v_1 \leq v_2$ implica $S(v_1) \leq S(v_2)$. Esse fato segue-se da definição de S e do princípio de máximo fraco.

Consideremos as sequências dadas por

$$\underline{u}_0 = \underline{u}, \ \underline{u}_k = S(\underline{u}_{k-1}), \ k \geq 1$$

e

$$\overline{u}_0 = \overline{u},\ \overline{u}_k = S(\overline{u}_{k-1}),\ k \geq 1.$$

Novamente, usando a definição de S e o princípio de máximo fraco, obtém-se

$$\underline{u} \leq \underline{u}_{k-1} \leq \underline{u}_k \leq \overline{u}_k \leq \overline{u}_{k-1} \leq \overline{u}.$$

Tomando limites nessas sequências, usando o Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue, encontramos funções u_m e u_M tais que

$$\underline{u}_k \to u_m,\ \overline{u}_k \to u_M \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Pelas definições de $\underline{u}_k, \overline{u}_k$ e da continuidade de S em $L^2(\Omega)$, verifica-se facilmente que u_m e u_M são pontos fixos de S e, consequentemente, soluções fracas de (1.39) que satisfazem

$$\underline{u}_0 = \underline{u} \leq u \leq \overline{u} = \overline{u}_0.$$

Aplicando S^k a essa última desigualdade, obtemos

$$\underline{u}_k \leq u = S^k(u) \leq \overline{u}_k$$

e passando ao limite

$$u_m \leq u \leq u_M$$

o que conclui o esboço da demonstração do teorema. ■

Observação 1.6 *O Método da Iteração Monotônica também se aplica em várias outras situações que não abordaremos aqui para não tornar este trabalho demasiado longo. Citemos duas situações em que tal método pode ser aplicado.*

Comecemos com o caso do p-Laplaciano. Em Cuesta Leon [21] a autora estuda o problema

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & f(x,u,\nabla u) \quad em\ \Omega, \\ u & = & 0 \quad em\ \partial\Omega,\ u > 0\ em\ \Omega. \end{cases} \tag{1.41}$$

em que $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano. Usando definições adequadas de sub e supersolução e princípios de comparação convenientes, a autora usa o Método da Iteração Monotônica para demonstrar a existência de soluções para o problema (1.41). Veja [21] para os detalhes.

Já em Wang [29], o autor considera um problema com condição de fronteira não-local da forma

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u(x) &= \int_\Omega K(x,y)u(y)\,dy & \text{em } \partial\Omega, \text{em } u > 0\ \Omega. \end{cases} \tag{1.42}$$

e, usando princípios de comparação e crescimentos adequados na função f, consegue-se aplicar o Método da Iteração Monotônica ao problema (1.42) e assim mostrar a existência de soluções para o referido problema.

Capítulo 2

O Método de Sub e Supersolução via Teorema do Ponto Fixo

Neste capítulo, usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para mostrar a existência de solução, entre uma sub e uma supersolução, de alguns problemas elípticos. A primeira classe de problemas que estudaremos é dada por

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ satisfazem algumas condições que serão explicitadas na seção 2.2.

Em seguida, estudaremos um sistema de Neumann-Dirichlet dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) - v & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v + g(v) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ é um domínio limitado e regular e $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazem algumas hipóteses a serem dadas na seção 2.3.

Por fim, estudaremos um problema não-local dado por

$$\begin{cases} -\mathcal{A}(x, u)\Delta u = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, um domínio limitado e regular, onde $\mathcal{A} : \Omega \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $f : [0, \theta] \to \mathbb{R}$ satisfazem as condições dadas na seção 2.4.

2.1 Resultados Preliminares

Nesta seção, apresentaremos o *Teorema do Ponto Fixo de Schauder* e uma proposição a serem usadas no teorema que será enuciado adiante.

Teorema 2.1 (do Ponto Fixo de Schauder - 1ª Versão) *Sejam Y um subconjunto convexo de um espaço de Banach X, $A \subset Y$ compacto e $T : Y \to A$ uma aplicação contínua. Então T possui ponto fixo em Y.*

Demonstração. Ver [6], p. V-25, Teorema V.4.

Teorema 2.2 (do Ponto Fixo de Schauder - 2ª Versão) *Sejam Y um subconjunto convexo, limitado, fechado de um espaço de Banach X e $T : Y \to Y$ um operador compacto. Então T tem um ponto fixo em Y.*

Demonstração. Ver [16], p. 60, Proposição 2.4.

Proposição 2.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e regular e $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Então existe um único $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfazendo*
i) $\displaystyle\int_\Omega [u\,(-\Delta\varphi) + f\varphi]\,dx = 0$ *para toda* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,
ii) $u = 0$ *em* $\partial\Omega$.
Além disso, a aplicação $f \to u$ é compacta em $C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstração: Inicialmente, mostremos a unicidade. Para isso, suponhamos que u e v satisfazem (i) e (ii). Desse modo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u-v)\,(-\Delta\varphi)\,dx &= \int_\Omega u\,(-\Delta\varphi)\,dx - \int_\Omega v\,(-\Delta\varphi)\,dx \\ &= -\int_\Omega f\varphi dx + \int_\Omega f\varphi dx \\ &= 0,\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Logo, $u - v \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ é harmônica e pelo princípio do máximo para funções harmônicas, $u - v$ assume máximo em $\partial\Omega$. Porém $u - v = 0$ na fronteira de Ω, donde segue $u - v = 0$ em Ω, ou seja, $u = v$ em Ω.

Para a existência, estendemos f de modo que seja 0 em $\overline{\Omega}^c$ e consideremos

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)f(y)dy, \tag{2.1}$$

o potencial Newtoniano de f. Uma vez que $w \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ (ver Lema A.1 do Apêndice A) definamos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} H : C\left(\overline{\Omega}\right) & \to & C^1\left(\overline{\Omega}\right) \\ f & \mapsto & Hf = w \end{array}$$

e mostremos sua continuidade. Mais precisamente, mostremos que

$$f_n \to f \text{ em } C\left(\overline{\Omega}\right) \Rightarrow w_n = Hf_n \to Hf = w \text{ em } C^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

Seja (f_n) uma sequência em $C\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que

$$f_n \to f \text{ em } C\left(\overline{\Omega}\right)$$

então

$$\|f_n - f\|_0 \to 0 \text{ em } \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \|Hf_n - Hf\|_{C^1\left(\overline{\Omega}\right)} &= \|w_n - w\|_{C^1\left(\overline{\Omega}\right)} \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) f_n(y) dy - \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) f(y) dy \right\|_{C^1\left(\overline{\Omega}\right)} \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)[f_n(y) - f(y)] dy \right\|_{C^1\left(\overline{\Omega}\right)} \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)[f_n(y) - f(y)] dy \right\|_0 \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)[f_n(y) - f(y)] dy \right\|_0 . \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)[f_n(y) - f(y)] dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)[f_n(y) - f(y)] dy$$

(ver Lema A.2 do Apêndice A) temos

$$\begin{aligned}
\|Hf_n - Hf\|_{C^1(\overline{\Omega})} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)[f_n(y)-f(y)]dy \right\|_0 \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \left\| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)[f_n(y)-f(y)]dy \right\|_0 \\
&= \sup \left| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)[f_n(y)-f(y)]dy \right| \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \sup \left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)[f_n(y)-f(y)]dy \right| \\
&\leq \sup \int_{\mathbb{R}^N} |\Gamma(x-y)|\,|f_n(y)-f(y)|\,dy \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \sup \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \right| |f_n(y)-f(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

Como a sequência (f_n) converge uniformemente para f, segue do Teorema A.6 do Apêndice A e de (2.2) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Gamma(x-y)|\,|f_n(y)-f(y)|\,dy \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \right| |f_n(y)-f(y)|\,dy \to 0.$$

Sendo assim, obtemos

$$\|Hf_n - Hf\|_{C^1(\overline{\Omega})} \to 0$$

mostrando a continuidade de H.

Desde que a imersão $C^1\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$ é compacta, a aplicação

$$\begin{aligned}
\tilde{H} := i \circ H : C\left(\overline{\Omega}\right) &\to C\left(\overline{\Omega}\right) \\
f &\mapsto w
\end{aligned}$$

também o é.

Seja $h \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ a única função harmônica satisfazendo $h = w$ em $\partial\Omega$. Então, usando as identidades de Green e o Lema A.2 (Ver Apêndice A), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}[(w-h)(-\Delta\varphi)]dx &= \int_{\Omega} w(-\Delta\varphi)dx - \int_{\Omega} h(-\Delta\varphi)dx \\
&= -\int_{\partial\Omega} w\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}ds + \int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial w}{\partial\eta}ds - \int_{\Omega}\varphi\Delta w dx \\
&- \left\{-\int_{\partial\Omega} h\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}ds + \int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial h}{\partial\eta}ds - \int_{\Omega}\varphi\Delta h dx\right\} \\
&= -\int_{\partial\Omega} w\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}ds - \int_{\Omega}\varphi\Delta w dx + \int_{\partial\Omega} h\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}ds \\
&= -\int_{\partial\Omega} w\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}ds - \int_{\Omega}\varphi\Delta w dx + \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}ds \\
&= -\int_{\Omega}\varphi\Delta w dx \\
&= -\int_{\Omega}\varphi f dx
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Portanto, $u = w - h$ é uma solução de (i) e (ii). Uma vez que a aplicação

$$\begin{aligned}
J : C\left(\overline{\Omega}\right) &\to C\left(\overline{\Omega}\right) \\
w &\mapsto h
\end{aligned}$$

é contínua, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{J} := J \circ \tilde{H} : C\left(\overline{\Omega}\right) &\to C\left(\overline{\Omega}\right) \\
f &\mapsto h
\end{aligned}$$

é compacta e assim aplicação

$$\begin{aligned}
A := \tilde{H} - \tilde{J} : C\left(\overline{\Omega}\right) &\to C\left(\overline{\Omega}\right) \\
f &\mapsto w - h = u
\end{aligned}$$

é compacta. ■

2.2 O Método de Sub e Supersolução via Teorema do Ponto Fixo: Um Problema Escalar

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad\quad\ \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, hipóteses essas que serão sempre admitidas ao longo de toda esta seção.

Quando (2.3) possui sub e supersoluções ordenadas e f satisfaz, por exemplo, uma condição da forma

$$t \longmapsto f(t) + at$$

é crescente, para algum $a > 0$, então usamos a iteração monotônica para demonstrar a existência de solução. Nesta seção, relaxaremos essa última condição e utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder e uma versão do princípio do máximo forte para obter a existência de uma solução para o problema, onde basta ter a continuidade no segundo membro, com a existência de C-sub e C-supersolução, conforme definições a seguir.

Definição 2.4 *Dizemos que $\underline{u} \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ é C-subsolução de (2.3) se*

$$\int_\Omega \left[\underline{u}\left(-\Delta\varphi\right) - f\left(\underline{u}\right)\varphi\right] \leq 0, \tag{2.4}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega)$, onde $\mathcal{D}^+(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,;\varphi \geq 0 \text{ em } \Omega\}$, e

$$\underline{u} \leq g \text{ em } \partial\Omega. \tag{2.5}$$

Definição 2.5 *Dizemos que $\overline{u} \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ é C-supersolução de (2.3) se*

$$\int_\Omega \left[\overline{u}\left(-\Delta\varphi\right) - f\left(\overline{u}\right)\varphi\right] \geq 0, \tag{2.6}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega)$, e

$$\overline{u} \geq g \text{ em } \partial\Omega. \tag{2.7}$$

Definição 2.6 *Uma função $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ é uma C-solução de (2.3) se*

$$\int_\Omega \left[u\left(-\Delta\varphi\right) - f\left(u\right)\varphi\right] = 0, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.8}$$

e

$$u = g \text{ em } \partial\Omega. \tag{2.9}$$

Teorema 2.7 *Sejam* $\underline{u}$ *e* $\overline{u}$ *C-sub e C-supersolução, respectivamente, de (2.3) satisfazendo* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *em* $\overline{\Omega}$*. Então o problema (2.3) possui uma C-solução* u *com* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *em* $\overline{\Omega}$*.*

Demonstração. A demonstração se dará em quatro passos.

Passo 1. Redução do problema (2.3) a um problema homogêneo.

Seja h a única função satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta h &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ h &= g \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Notemos que $h \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Seja $v = u - h$.

Afirmamos que u é C-solução de (2.3) se, e somente se, $v = u - h$ é C-solução de

$$\begin{cases} -\Delta v &= f(h+v) \quad \text{em } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

De fato, $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ é C-solução de (2.3) se, e somente se,

$$\int_\Omega [u(-\Delta\varphi) - f(u)\varphi] = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

e $u = g$ em $\partial\Omega$ se, e somente se, $v \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ e

$$\int_\Omega [(v+h)(-\Delta\varphi) - f(v+h)\varphi] = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

se, e somente se,

$$\int_\Omega [v(-\Delta\varphi) + h(-\Delta\varphi) - f(v+h)\varphi] = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

se, e somente se,

$$\int_\Omega [v(-\Delta\varphi) + \varphi(-\Delta h) - f(v+h)\varphi] = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

se, e somente se,

$$\int_\Omega [v(-\Delta\varphi) - f(v+h)\varphi] = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

e $v(x) = u(x) - h(x) = g(x) - g(x) = 0, \forall\, x \in \partial\Omega$ se, e somente se, $v \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ é C-solução de (2.11).

Observemos que $f(h+v)$ é uma função real contínua. Desde que $\underline{u} - h$ e $\overline{u} - h$ são C-sub e C-supersolução, respectivamente, para o problema modificado (2.11) e são ordenadas, podemos supor que $g = 0$ em $\partial\Omega$.

Passo 2. A modificação de f.

Definamos

$$f^*(u) = \begin{cases} f\left(\underline{u}(x)\right) & \text{se } u < \underline{u}(x), \\ f(u) & \text{se } \underline{u}(x) \leq u \leq \overline{u}(x), \\ f\left(\overline{u}(x)\right) & \text{se } \overline{u}(x) < u, \qquad\qquad \text{em } x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Então $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada. Notemos que, se u é uma C-solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = f^*(u) & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

e $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$, então u é uma C-solução de (2.3) com $g = 0$. De fato, toda C-solução de (2.12) satisfaz $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. Isso será demonstrado usando o princípio do máximo no próximo passo.

Passo 3. O uso do princípio do máximo.

Seja u uma solução de (2.12) e definamos

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega;\ \overline{u}(x) < u(x)\}.$$

Como $u, \overline{u} \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, então Ω^+ é aberto. Provemos que $\Omega^+ = \emptyset$. Suponhamos $\Omega^+ \neq \emptyset$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} (u - \overline{u})(-\Delta\varphi)dx &= \int_{\Omega^+} u(-\Delta\varphi)dx - \int_{\Omega^+} \overline{u}(-\Delta\varphi)dx \\ &= \int_{\Omega^+} f^*(u)\varphi dx - \int_{\Omega^+} \overline{u}(-\Delta\varphi)dx \\ &\leq \int_{\Omega^+} f^*(u)\varphi dx - \int_{\Omega^+} f(\overline{u})\varphi dx \\ &= \int_{\Omega^+} (f^*(u) - f(\overline{u}))\varphi dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in D^+\left(\overline{\Omega^+}\right)$, pois em Ω^+ $f^*(u) = f(\overline{u})$.

Assim, $u - \overline{u} \in C\left(\overline{\Omega^+}\right)$ é subharmônica e não-negativa em Ω^+. Pelo princípio do máximo para funções subharmônicas, $u - \overline{u}$ atinge máximo na fronteira de Ω^+. Mas, $u - \overline{u} = 0$ em $\partial\Omega^+$ e daí $u - \overline{u} = 0$ em Ω^+, isto é, $u = \overline{u}$ em Ω^+ o que é um absurdo. Logo, $\Omega^+ = \emptyset$.

Mostremos, agora, que $\underline{u} \leq u$ em $\overline{\Omega}$. Definamos

$$\Omega^{-} = \{x \in \Omega;\ u(x) < \underline{u}(x)\}.$$

Observemos que Ω^{-} é aberto, pois $u, \underline{u} \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Queremos mostrar que $\Omega^{-} = \emptyset$. Suponhamos, por contradição, que $\Omega^{-} \neq \emptyset$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{-}} (\underline{u} - u)(-\Delta\varphi)dx &= \int_{\Omega^{-}} \underline{u}(-\Delta\varphi)dx - \int_{\Omega^{+}} u(-\Delta\varphi)dx \\
&= \int_{\Omega^{-}} \underline{u}(-\Delta\varphi)dx - \int_{\Omega^{-}} f^{*}(u)\varphi dx \\
&\leq \int_{\Omega^{-}} f(\underline{u})\varphi dx - \int_{\Omega^{-}} f^{*}(u)\varphi dx \\
&= \int_{\Omega^{-}} (f(\underline{u}) - f^{*}(u))\varphi dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\forall \varphi \in D^{+}\left(\overline{\Omega^{-}}\right)$, uma vez que $f^{*}(u) = f(\underline{u})$ em Ω^{-}. Desse modo, $\underline{u} - u \in C\left(\overline{\Omega^{-}}\right)$ é subharmônica e não-negativa em Ω^{-}. Usando o princípio do máximo para funções subharmônicas, obtemos que $\underline{u} - u$ assume máximo em $\partial\Omega^{-}$. Contudo, $\underline{u} - u = 0$ em $\partial\Omega^{-}$ e assim $\underline{u} = u$ em Ω^{-}, o que contraria a hipótese. Portanto, $\Omega^{-} = \emptyset$.

Passo 4. Aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Observemos que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

com $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, possui uma única solução $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Seja $K : C\left(\overline{\Omega}\right) \to C\left(\overline{\Omega}\right)$ o operador solução de (2.14), isto é, $u = K(f)$. Como sabemos, K é linear e compacto em $C\left(\overline{\Omega}\right)$ equipado com a norma da convergência uniforme. (Ver Proposição 2.3).

Seja $F : C\left(\overline{\Omega}\right) \to C\left(\overline{\Omega}\right)$ o operador de Niemytski associado à f^{*}, ou seja,

$$F(u)(x) = f^{*}(u(x)), u \in C\left(\overline{\Omega}\right).$$

Então F é contínua e existe $M > 0$ tal que $\|F(u)\|_{\infty} \leq M$, para toda $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Desse modo, $F\left(C\left(\overline{\Omega}\right)\right) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$ é limitado e por K ser compacto, segue que

$$\overline{KF\left(C\left(\overline{\Omega}\right)\right)} \tag{2.15}$$

é compacto.

Seja A a envoltória convexa de (2.15) e consideremos a aplicação contínua

$$KF : C\left(\overline{\Omega}\right) \to A.$$

Finalmente, notemos que u é C-solução de (2.13) se , e somente se,

$$u = KF(u).$$

Uma aplicação direta do Teorema do Ponto Fixo de Schauder (1ª Versão) mostra que KF possui um ponto fixo u que, pelo passo 3, satisfaz $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ e assim é C-solução do problema original. ■

2.3 Um Sistema de Neumann-Dirichlet

No que segue estudaremos o problema de Neumann-Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) - v & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v &= \delta u - \gamma v + g(v) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.16}$$

adaptando o Método de Sub e Supersolução usado em Hernández (ver [20]). Inicialmente, fixaremos algumas notações e introduziremos definições.

Definição 2.8 *Um par da forma $(u_0, v_0) - (u^0, v^0)$ é chamado uma sub-supersolução para o problema (2.16) se $u_0 \leq u^0, v_0 \leq v^0$ e*

$$u_0, v_0, u^0, v^0 \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_0 - f(u_0) + v \leq 0 \leq -\Delta u^0 - f(u^0) + v \ \textit{em } \Omega, \\ \\ \textit{para toda } v \in [v_0, v^0] \ \textit{e} \ \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta} \leq 0 \leq \dfrac{\partial u^0}{\partial \eta} \ \textit{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} -\Delta v_0 - \delta u + \gamma v_0 - g(v_0) \leq 0 \leq -\Delta v^0 - \delta u + \gamma v^0 - g(v^0) \ \textit{em } \Omega, \\ \\ \textit{para toda } u \in [u_0, u^0] \ \textit{e} \ v_0 \leq 0 \leq v^0 \ \textit{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

No próximo teorema, adaptaremos um resultado de Hernández (ver Teorema 2.1 de [20]) para o nosso problema específico. Nesta seção, sempre suporemos que:

> $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções localmente Lipschitzianas satisfazendo: existe uma constante positiva M tal que $f(t) + Mt$ e $g(t) = (M - \gamma)t$ são ambas não-decrescentes.

Nas desigualdades precedentes $u \leq v$ significa $u(x) \leq v(x)$ quase sempre em Ω ou em $\partial\Omega$ e $[u, v] = \{z \in L^2(\Omega)\, ; u(x) \leq z(x) \leq v(x) \text{ q.s. em } \Omega\}$.

Teorema 2.9 *Se $(u_0, v_0) - (u^0, v^0)$ é uma sub-supersolução de (2.16), então existe uma solução (u, v) de (2.16) satisfazendo $u_0 \leq u \leq u^0$ e $v_0 \leq v \leq v^0$.*

Demonstração. Usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para mostrar a existência de um ponto fixo que será solução clássica de (2.16). Antes disso, consideremos o espaço de Hilbert $E = [L^2(\Omega)]^2$ constituido pelas funções (u, v) com $u, v \in L^2(\Omega)$, munido como produto interno

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{[L^2(\Omega)]^2} = \int_\Omega u_1 u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 dx,$$

cuja norma associada é

$$\|u\|_{[L^2(\Omega)]^2} = \left(\int_\Omega u_1^2 dx + \int_\Omega v_1^2 dx \right)^{1/2}.$$

Seja $K = [u_0, u^0] \times [v_0, v^0]$ o retângulo contido em $[L^2(\Omega)]^2$.

Afirmação 1. O conjunto K é fechado, convexo e limitado.

De fato, seja $(u_n, v_n) \in K$ tal que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em E. Então, $u_n \to u$ e $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$. Ora, em particular, $u_n \to u$ q.s. em Ω e $v_n \to v$ q.s. em Ω. Ademais,

$$u_0 \leq u_n \leq u^0 \text{ e } v_0 \leq v_n \leq v^0,$$

daí tomando o limite em n, obtemos

$$u_0 \leq u \leq u^0 \text{ e } v_0 \leq v \leq v^0 \text{ q.s. em } \Omega.$$

Logo $(u, v) \in K$ e portanto K é fechado. Agora, sejam $u_1, u_2 \in [u_0, u^0]$, temos

$$u_0 \leq u_1 \leq u^0 \text{ e } u_0 \leq u_2 \leq u^0.$$

Assim, para $t \in [0,1]$,

$$(1-t)u_0 \leq (1-t)u_1 \leq (1-t)u^0 \text{ e } tu_0 \leq tu_2 \leq tu^0$$

implica que

$$(1-t)u_0 + tu_0 \leq (1-t)u_1 + tu_2 \leq (1-t)u^0 + tu^0$$

donde segue

$$tu_0 \leq (1-t)u_1 + tu_2 \leq u^0.$$

Logo $[u_0, u^0]$ é convexo. De maneira análoga, chegamos na convexidade de $[v_0, v^0]$. Como o produto cartesiano de conjuntos convexos é convexo, concluímos que K é convexo. Temos, ainda, que se $u \in [u_0, u^0]$, então $u_0(x) \leq u(x) \leq u^0(x)$ q.s. em Ω e uma vez que $u_0, u^0 \in L^\infty(\Omega)$, segue

$$-u_0(x) \leq |u_0(x)| \leq \|u_0\|_\infty$$

e

$$u^0(x) \leq \left|u^0(x)\right| \leq \left\|u^0\right\|_\infty,$$

isto é,

$$-\|u_0\|_\infty \leq u_0(x) \text{ e } u^0(x) \leq \left\|u^0\right\|_\infty.$$

Consideremos $c_1 = \text{máx}\{\|u_0\|_\infty, \|u^0\|_\infty\}$. Portanto $|u(x)| \leq c_1$ e assim $u \in [-c_1, c_1]$, donde segue $[u_0, u^0] \subset [-c_1, c_1]$. Do mesmo modo, tomando $c_2 = \text{máx}\{\|v_0\|_\infty, \|v^0\|_\infty\}$, obtemos $[v_0, v^0] \subset [-c_2, c_2]$. Logo, sendo $c = \text{máx}\{c_1, c_2\}$, chegamos em $K \subset [-c, c]^2$ e daí K é limitado.

Definamos o operador não-linear $T : K \to E$ por: para $(\overline{u}, \overline{v}) \in K$, $(u, v) = T(\overline{u}, \overline{v})$ é a solução única dos problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + Mu &= f(\overline{u}) - \overline{v} + M\overline{u} \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v + Mv &= \delta\overline{u} + (M-\gamma)\overline{v} + g(\overline{v}) \quad \text{em } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

Note que existe $k_1, k_2 > 0$ tais que $|f(\overline{u})| \leq k_1$ e $|g(\overline{v})| \leq k_2$ donde

$$\begin{aligned} |f(\overline{u}) - \overline{v} + M\overline{u}| &\leq |f(\overline{u})| + |\overline{v}(x)| + M\,|\overline{u}(x)| \\ &\leq k_1 + \|\overline{v}\|_\infty + M\,\|\overline{u}\|_\infty \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\delta\overline{u} + (M-\gamma)\overline{v} + g(\overline{v})| &\leq \delta\,|\overline{u}(x)| + |M-\gamma|\,|\overline{v}(x)| + |g(\overline{v})| \\ &\leq \delta\,\|\overline{u}\|_\infty + |M-\gamma|\,\|\overline{v}\|_\infty + k_2. \end{aligned}$$

Logo

$$\|f(\overline{u}) - \overline{v} + M\overline{u}\|_\infty\,, \ \|\delta\overline{u} + (M-\gamma)\overline{v} + g(\overline{v})\|_\infty < \infty,$$

ou seja,

$$f(\overline{u}) - \overline{v} + M\overline{u},\ \delta\overline{u} + (M-\gamma)\overline{v} + g(\overline{v}) \in L^\infty(\Omega)$$

daí

$$f(\overline{u}) - \overline{v} + M\overline{u},\ \delta\overline{u} + (M-\gamma)\overline{v} + g(\overline{v}) \in L^p(\Omega), \forall p \geq 1.$$

Portanto, existem $u, v \in H^2(\Omega)$ soluções únicas, respectivamente, de (2.20) e (2.21), e assim T está bem definida.

Afirmação 2. T é compacto.

Para mostrarmos isso, consideremos o operador solução $S : K \to [H^2(\Omega)]^2$ do sistema (2.20)-(2.21), isto é, para cada $(\overline{u}, \overline{v}) \in K$ temos que $(u, v) = S(\overline{u}, \overline{v})$ é solução de (2.20) e (2.21). Naturalmente, estamos considerando K munido com a topologia induzida pela topologia de E. Seja $(\overline{u}_n, \overline{v}_n)$ uma sequência tal que

$$(\overline{u}_n, \overline{v}_n) \to (\overline{u}, \overline{v}) \text{ em } E,$$

onde $(\overline{u}_n, \overline{v}_n), (\overline{u}, \overline{v}) \in K$. Mostremos que

$$(u_n, v_n) = S(\overline{u}_n, \overline{v}_n) \to (u, v) = S(\overline{u}, \overline{v}) \text{ em } \left[H^2(\Omega)\right]^2.$$

Com efeito, de (2.20) segue-se

$$\begin{aligned} -\Delta(u - u_n) + M(u - u_n) &= f(\overline{u}) - \overline{v} + M\overline{u} - f(\overline{u}_n) + \overline{v}_n - M\overline{u}_n \qquad (2.22) \\ &= f(\overline{u}) - f(\overline{u}_n) - (\overline{v} - \overline{v}_n) + M(\overline{u} - u_n). \end{aligned}$$

Como $(\overline{u}_n, \overline{v}_n) \to (\overline{u}, \overline{v})$ em E então, a menos de subsequência,

$$(\overline{u}_n(x), \overline{v}_n(x)) \to (\overline{u}(x), \overline{v}(x)) \text{ q.s. em } \Omega$$

o que implica

$$f(\overline{u}_n(x)) \to f(\overline{u}(x)) \text{ q.s. em } \Omega,$$

pois f é contínua. Daí, visto que $(\overline{u}_n, \overline{v}_n), (\overline{u}, \overline{v}) \in K$, temos $f(\overline{u}_n)$ e $f(\overline{u})$ limitados. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$(\overline{u}_n, \overline{v}_n) \to (\overline{u}, \overline{v}) \text{ em } L^p(\Omega), p \geq 1$$

e

$$f(\overline{u}_n) \to f(\overline{u}) \text{ em } L^p(\Omega), p \geq 1.$$

Chamando A_n o membro direito de (2.22), obtemos

$$|A_n| \leq |f(\overline{u}) - f(\overline{u}_n)| - |\overline{v} - \overline{v}_n| + M|\overline{u} - u_n| \to 0 \text{ em } L^2(\Omega),$$

portanto por (2.22) teremos

$$u_n \to u \text{ em } H^2(\Omega).$$

Fazendo o análogo para

$$\begin{aligned} -\Delta(v - v_n) + M(v - v_n) &= \delta\overline{u} + (M-\gamma)\overline{v} + g(\overline{v}) - \delta\overline{u}_n - (M-\gamma)\overline{v}_n - g(\overline{v}_n) \\ &= \delta(\overline{u} - \overline{u}_n) + (M-\gamma)(\overline{v} - \overline{v}_n) + g(\overline{v}) - g(\overline{v}_n) \end{aligned}$$

chegamos em

$$v_n \to v \text{ em } H^2(\Omega).$$

Logo,

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \text{ em } \left[H^2(\Omega)\right]^2$$

mostrando assim a continuidade de S.

Agora, em virtude da compacidade da imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, a aplicação $K \xrightarrow{S} [H^2(\Omega)]^2 \xrightarrow{i} E$ é compacta o que implica $T : K \to E$ é compacto.

Afirmação 3. $T(K) \subset K$.

Demonstraremos que $u_0 \leq u$. Observemos, primeiramente, que $u_0 \leq u$ é equivalente a $(u_0 - u)^+ = 0$. Com efeito, supondo que $u_0 \leq u$ é equivalente a $u_0 - u \leq 0$ e por $(u_0 - u)^+ = \max\{u_0 - u, 0\}$, obtemos $(u_0 - u)^+ = 0$. Reciprocamente, supondo $(u_0 - u)^+ = 0$, teremos $\max\{u_0 - u, 0\} = 0$ e assim $u_0 - u \leq 0$.

Tomando $(u, v) = T(\overline{u}, \overline{v})$, para $(\overline{u}, \overline{v}) \in K$, temos que a equação (2.20) é satisfeita e

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + M u_0 & \leq & f(u_0) - \overline{v} + M u_0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta} & \leq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

Logo, subtraindo (2.23) de (2.20), obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(u_0 - u) + M(u_0 - u) & \leq & f(u_0) + M u_0 - [f(\overline{u}) + M\overline{u}] & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial (u_0 - u)}{\partial \eta} & \leq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Visto que $f(t) + Mt$ é não-decrescente, segue-se

$$f(u_0) + M u_0 - [f(\overline{u}) + M\overline{u}] \leq 0 \text{ em } \Omega$$

e assim

$$-\Delta(u_0 - u) + M(u_0 - u) \leq 0 \text{ em } \Omega.$$

Desse modo, multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(u_0 - u)^+$, obtemos

$$-\Delta(u_0 - u)(u_0 - u)^+ + M(u_0 - u)(u_0 - u)^+ \leq 0 \text{ em } \Omega$$

e chamando o membro esquerdo da desigualdade acima de w segue, usando a identidade de Green, que

$$\begin{aligned} \int_\Omega w &= \int_\Omega \nabla (u_0 - u) \nabla (u_0 - u)^+ - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (u_0 - u)}{\partial \eta} (u_0 - u)^+ \\ &+ M \int_\Omega \left[(u_0 - u)^+ - (u_0 - u)^-\right] (u_0 - u)^+ \\ &= \int_\Omega \nabla \left[(u_0 - u)^+ - (u_0 - u)^-\right] \nabla (u_0 - u)^+ - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (u_0 - u)}{\partial \eta} (u_0 - u)^+ \\ &+ M \left\{ \int_\Omega \left[(u_0 - u)^+\right]^2 - \int_\Omega (u_0 - u)^- (u_0 - u)^+ \right\} \\ &= \int_\Omega \left|\nabla (u_0 - u)^+\right|^2 - \int_\Omega \nabla (u_0 - u)^- \nabla (u_0 - u)^+ \\ &+ M \int_\Omega \left[(u_0 - u)^+\right]^2 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (u_0 - u)}{\partial \eta} (u_0 - u)^+ \\ &= \int_\Omega \left|\nabla (u_0 - u)^+\right|^2 + M \int_\Omega \left[(u_0 - u)^+\right]^2 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (u_0 - u)}{\partial \eta} (u_0 - u)^+ \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial\left(u_0-u\right)}{\partial\eta}\leq 0 \text{ e } \left(u_0-0\right)^+\geq 0,$$

segue que

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\left(u_0-u\right)}{\partial\eta}\left(u_0-u\right)^+ \quad\leq\quad 0$$

donde

$$-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\left(u_0-u\right)}{\partial\eta}\left(u_0-u\right)^+\geq 0,$$

o que nos dá

$$\int_{\Omega}\left|\nabla\left(u_0-w\right)^+\right|^2+M\int_{\Omega}\left[\left(u_0-w\right)^+\right]^2\leq 0.$$

Sendo $M>0$, concluimos que $(u_0-u)^+=0$, logo $u_0\leq u$. Procedendo de maneira análoga, provamos que $u\leq u^0$ é válido.

Mostremos, agora, que $v_0\leq v$. Em virtude de (2.21) e usando (2.19), temos

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta(v_0-v)-Mv & \leq & -\gamma v_0+g(v_0)-[(M-\gamma)\overline{v}+g(\overline{v})] & \text{em } \Omega, \\ v_0-v & \leq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

donde, por $g(t)+(M-\gamma)t$ ser não-decrescente, vemos que

$$\begin{aligned} -\Delta(v_0-v)-Mv & \leq -\gamma v_0+g(v_0)-[(M-\gamma)\overline{v}+g(\overline{v})] \\ & \leq -\gamma v_0+g(v_0)-[(M-\gamma)v_0+g(v_0)] \\ & = -Mv_0 \text{ em } \Omega \end{aligned}$$

e assim

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta(v_0-v)-M(v_0-v) & \leq & 0 & \text{em } \Omega, \\ v_0-v & \leq & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Logo, pelo Princípio do Máximo, obtemos $v_0-v\leq 0$ em Ω, ou seja, $v_0\leq v$ em Ω. Analogamente, mostra-se que $v\leq v^0$ em Ω.

Portanto, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder (2ª Versão) nos dá a existência de um ponto fixo de T ou, equivalentemente, uma solução fraca (i.e., em $H^2\left(\Omega\right)$) de (2.16). Finalmente, usando o fato de que f,g são localmente Lipschitzianas, juntamente com a Teoria da Regularidade Elíptica (Ver [16]), mostra-se que $(u,v) \in \left[C^2\left(\overline{\Omega}\right)\right]^2$, ou seja, (u,v) é solução clássica de (2.16) satisfazendo $u_0 \leq u \leq u^0$ e $v_0 \leq v \leq v^0$. ■

A seguir, veremos sob que condições o problema (2.16) possui uma sub e uma supersolução.

Exemplo 2.1 *Suponhamos que $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sejam funções localmente Lipschitzianas satisfazendo: existem constantes a_0, a^0, b_0 e b^0 tais que*

(f_1) $f(a_0) \geq f\left(a^0\right)$ *e* $f\left(a^0\right) \leq 0$

(f_2) $f(a_0) \geq b^0$

(g_1) $g\left(b^0\right) = 0$ *para algum* $b^0 > 0$

(g_2) $\liminf_{t\to 0^+} \dfrac{g(t)}{t} > \lambda_1 + \gamma.$

Suporemos, também, que $\gamma b^0 \geq \delta a^0$.

Sob essas hipóteses, mostraremos que o problema (2.16) possui uma sub e uma supersolução.

Observemos que a condição (g_2) implica que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$g(t) > (\lambda_1+\gamma)t \text{ para } 0 < t < \epsilon.$$

Seja $r > 0$ de modo que $0 < r\varphi_1(x) < \epsilon$ para todo $x \in \Omega$, onde $\varphi_1 > 0$ é uma autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associada à λ_1.

Façamos

$$0 < u_0 = a_0 < u^0 = a^0 \text{ e } v_0 = r\varphi_1(x) < v^0 = b^0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\Delta u_0 - f(u_0) + v &= -f(a_0) + v \\ &\leq 0 \\ &\leq -f\left(a^0\right) + v \\ &= -\Delta u^0 - f\left(u^0\right) + v \text{ em } \Omega, \end{aligned}$$

para toda $r\varphi_1 \leq v \leq b^0$ e

$$\begin{aligned}
-\Delta v_0 - \delta u + \gamma v_0 - g(v_0) &= r\lambda_1\varphi_1 - \delta u + \gamma r\varphi_1 - g\left(r\varphi_1\right) \\
&\leq (\lambda_1 + \gamma)(r\varphi_1) - g(r\varphi_1) \\
&\leq 0 \\
&\leq -\delta a^0 + \gamma b^0 \\
&\leq -\Delta v^0 - \delta u + \gamma v^0 - g\left(v^0\right) \text{ em } \Omega, \forall u \in \left[a_0, a^0\right].
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.9, existe uma solução (u, v) de (2.16) satisfazendo

$$0 < a_0 \leq u \leq a^0 \text{ e } 0 < r\varphi_1 \leq v \leq b^0.$$

Como uma ilustração do que vimos até agora, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases}
-\Delta u = u(u-a)(1-u) - v & \text{em } \Omega, \\
-\Delta v = \delta u - \gamma v + (\lambda_1 + \gamma)\,\mathrm{sen}(\alpha v) & \text{em } \Omega, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = v = 0 & \text{em } \partial\Omega,
\end{cases} \tag{2.24}$$

onde $\gamma\pi \geq \delta\alpha$ e $0 < a < 1/2$.

Notemos que a função dada por

$$f(t) = t(t-a)(1-t),\ t \in \mathbb{R},$$

em que $0 < a < 1/2$, possui um único ponto de máximo a_0. Daí, tomando $a^0 = 1$ temos

$$u_0 = a_0 < a^0 = 1 = u^0.$$

Seja g a função dada por

$$g(t) = (\lambda_1 + \gamma)\,\mathrm{sen}(\alpha t), t \in \mathbb{R}.$$

Então, para $b^0 = \pi/\alpha$, segue-se

$$f(a_0) > \frac{\pi}{\alpha} = b^0$$

se α for suficientemente grande. Além disso,

$$g(b^0) = (\lambda_1 + \gamma)\,\mathrm{sen}\left(\alpha\frac{\pi}{\alpha}\right) = 0$$

e

$$\frac{g(t)}{t} = \alpha(\lambda_1 + \gamma)\frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha t} > \lambda_1 + \gamma$$

se $t \to 0^+$, ou seja,

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t} > \lambda_1 + \gamma.$$

Uma vez que f, g satisfazem as condições do exemplo anterior, obtemos uma solução (u, v) de (2.24) tal que

$$0 < a_0 \leq u \leq a^0 \text{ e } 0 < r\varphi_1 \leq v \leq b^0.$$

2.4 Um Problema Não-local

Nesta seção usaremos o método de sub e supersolução para estudar um problema não-local. Para isso, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, um domínio limitado e regular, e seja

$$\mathcal{A} : \Omega \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R},$$

$p \geq 1$, satisfazendo

$$x \mapsto \mathcal{A}(x, u) \text{ é mensurável}, \forall u \in L^2(\Omega), \tag{2.25}$$

$$u \mapsto \mathcal{A}(x, u) \text{ é contínua de } L^2(\Omega) \text{ em } \mathbb{R}, \text{ q.s. em } x \in \Omega \tag{2.26}$$

e existem duas constantes a_0 e a_∞ tais que

$$0 < a_0 \leq \mathcal{A}(x, u) \leq a_\infty \text{ q.s. em } x \in \Omega, \forall u \in L^2(\Omega). \tag{2.27}$$

Seguindo Chipot-Corrêa [15], estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\mathcal{A}(x, u)\Delta u &= \lambda f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\ \ \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.28}$$

em que $f : [0, \theta] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 com

$$f(0) = f(\theta) = 0, \tag{2.29}$$

$$f'(0) > 0, \tag{2.30}$$

$$f(t) > 0, \forall t \in (0, \theta), \tag{2.31}$$

e $\lambda > 0$ é um parâmetro.

Designaremos por λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ satisfazendo

$$\lambda_1 = \inf_{H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx}. \tag{2.32}$$

Temos o seguinte teorema:

Teorema 2.10 *Sob as hipóteses (2.25) - (2.27), (2.29) - (2.31) e*

$$\lambda > \frac{\lambda_1 a_\infty}{f'(0)}, \tag{2.33}$$

existe uma solução não-trivial do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda f(u)}{\mathcal{A}(x,u)} \ \text{em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.34}$$

tal que $u(x) \in (0, \theta)$ q.s. em $x \in \Omega$.

Demonstração. Seja φ_1 uma autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 \text{ em } \Omega, \\ \varphi_1 \in H_0^1(\Omega), \ \int_\Omega \varphi_1^2 = 1, \ \varphi_1 > 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.35}$$

A demonstração se dará em vários passos, a fim de que se torne mais clara.

Passo 1. Escolhamos $t_0 > 0$ tal que $\underline{u} = t_0 \varphi_1$ satisfaz, para toda $w \in L^p(\Omega)$,

$$-\Delta \underline{u} \leq \frac{\lambda f(\underline{u})}{\mathcal{A}(x,w)} \text{ em } \Omega. \tag{2.36}$$

Com efeito, devido a (2.35) temos

$$-\Delta \underline{u} = \lambda_1 t_0 \varphi_1 \text{ em } \Omega. \tag{2.37}$$

Tomemos $t_0 > 0$, suficientemente pequeno, tal que $0 \leq t_0 \varphi_1 \leq \theta$ em Ω. Para cada $w \in L^p(\Omega)$ teremos

$$\frac{\lambda f(t_0 \varphi_1)}{a_\infty} \leq \frac{\lambda f(\underline{u})}{\mathcal{A}(x,w)}.$$

Em virtude da condição (2.33), escolhendo $t_0 > 0$ teremos

$$\lambda_1 a_\infty \leq \frac{\lambda f(t_0 \varphi_1)}{t_0 \varphi_1} \text{ em } \Omega.$$

De (2.37) e das desigualdades anteriores, obtemos

$$-\Delta \underline{u} = \lambda_1 t_0 \varphi_1 \leq \frac{\lambda f(t_0\varphi_1)}{a_\infty} \leq \frac{\lambda f(\underline{u})}{\mathcal{A}(x,w)} \text{ em } \Omega.$$

A partir daqui, fixemos $t_0 > 0$ de modo que (2.36) se verifique e definamos

$$K = \left\{ v \in L^2(\Omega) ; t_0\varphi_1 \leq v \leq \theta \text{ q.s. em } \Omega \right\}.$$

Notemos que $K \subset L^2(\Omega)$ é convexo e fechado. De fato, seja (v_n) uma sequência em K tal que $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$, em particular $v_n \to v$ q.s. em Ω. Como $v_n \in K$ temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $t_0\varphi_1 \leq v_n \leq \theta$ e passando o limite em n segue que

$$t_0\varphi_1 \leq v \leq \theta \text{ q.s. em } \Omega.$$

Mostrando que K é fechado. Agora, sejam $v_1, v_2 \in K$, então $t_0\varphi_1 \leq v_1 \leq \theta$ e $t_0\varphi_1 \leq v_2 \leq \theta$ q.s. em Ω. Assim, para $t \in [0,1]$,

$$(1-t)t_0\varphi_1 \leq (1-t)v_1 \leq (1-t)\theta \text{ e } tt_0\varphi_1 \leq tv_2 \leq t\theta$$

donde segue

$$t_0\varphi_1 = (1-t)t_0\varphi_1 + tt_0\varphi_1 \leq (1-t)v_1 + tv_2 \leq (1-t)\theta + t\theta = \theta.$$

Logo K é convexo.

Passo 2. Existe $\mu > 0$ tal que

$$g(t) = \lambda f(t) + \mu t \text{ é não-decrescente em } (0,\theta). \tag{2.38}$$

Com efeito, desde que f é de classe C^1 em $[0,\theta]$, existe $\mu > 0$ tal que

$$\inf_{0\leq t\leq\theta} f'(t) \geq -\frac{\mu}{\lambda}. \tag{2.39}$$

Portanto,

$$g'(t) = \lambda f'(t) + \mu \geq \lambda \inf_{0\leq t\leq\theta} f'(t) + \mu \geq 0. \tag{2.40}$$

Com isso fica mostrado que g é não-decrescente.

No que segue, suporemos que (2.38) seja válido.

A seguir, para $w \in K$ consideremos

$$u = Tw, \tag{2.41}$$

em que u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{\mu u}{\mathcal{A}(x,w)} = \dfrac{g(w)}{\mathcal{A}(x,w)} \text{ em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.42}$$

Observemos que em virtude de $w \in K$, temos $w \in L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 1$, e assim (2.42) possui uma única solução $u \in H_0^1(\Omega)$. Outro fato que deve ser enfatizado é que pontos fixos de T serão soluções de (2.34).

Passo 3. $u = Tw \in K$

Devido à monotonocidade de g, teremos

$$-\Delta u + \frac{\mu u}{\mathcal{A}(x,w)} = \frac{g(w)}{\mathcal{A}(x,w)} \leq \frac{g(\theta)}{\mathcal{A}(x,w)} = -\Delta\theta + \frac{\mu\theta}{\mathcal{A}(x,w)} \text{ em } \Omega$$

e assim $u \leq \theta$. Também,

$$-\Delta u + \frac{\mu u}{\mathcal{A}(x,w)} = \frac{g(w)}{\mathcal{A}(x,w)} \geq \frac{g(\underline{u})}{\mathcal{A}(x,w)} = \frac{\lambda f(\underline{u})}{\mathcal{A}(x,w)} + \frac{\mu\underline{u}}{\mathcal{A}(x,w)} \geq -\Delta\underline{u} + \frac{\mu\underline{u}}{\mathcal{A}(x,w)} \text{ em } \Omega,$$

daí $\underline{u} \leq u$ e consequentemente $\underline{u} \leq u \leq \theta$ q.s. em Ω, isto é, $u \in K$.

Passo 4. Existe uma constante $C > 0$, independente de $w \in K$, tal que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

isto é, u é limitada em $H_0^1(\Omega)$, independente de $w \in K$. De fato, em virtude da formulação fraca de (2.42), teremos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx + \int_\Omega \frac{\mu u^2}{\mathcal{A}(x,w)}\ dx = \int_\Omega \frac{g(w)}{\mathcal{A}(x,w)} u\ dx. \tag{2.43}$$

Designemos por M o seguinte

$$M = \sup_{t\in[0,\theta]} |g(t)|. \tag{2.44}$$

A partir de (2.43), da desigualdade de Hölder e de (2.32) obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx &\leq \frac{M}{a_0}\int_\Omega u\ dx \\ &\leq \frac{M}{a_0}\left(\int_\Omega u^2\ dx\right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} \\ &\leq \frac{M}{a_0}\frac{|\Omega|^{1/2}}{\sqrt{\lambda_1}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx\right)^{1/2} \leq \frac{M}{a_0}\frac{|\Omega|^{1/2}}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

Passo 5. A aplicação $T : K \to K$ é contínua.

Evidentemente, estamos considerando K munido com a topologia induzida pela topologia de $L^2(\Omega)$. Seja (w_n) uma sequência tal que

$$w_n \to w \text{ em } L^2(\Omega)\,, \ w_n, w \in K. \tag{2.45}$$

Mostraremos que

$$u_n = Tw_n \to u = Tw \text{ em } L^2(\Omega)\,. \tag{2.46}$$

De (2.42), obtemos

$$-\Delta(u-u_n) + \frac{\mu u}{\mathcal{A}(x,w)} - \frac{\mu u_n}{\mathcal{A}(x,w)} = \frac{g(w)}{\mathcal{A}(x,w)} - \frac{g(w_n)}{\mathcal{A}(x,w_n)},$$

ou seja,

$$-\Delta(u-u_n) + \frac{\mu(u-u_n)}{\mathcal{A}(x,w)} = \mu u_n\left\{\frac{1}{\mathcal{A}(x,w_n)} - \frac{1}{\mathcal{A}(x,w)}\right\} + \left\{\frac{g(w)}{\mathcal{A}(x,w)} - \frac{g(w_n)}{\mathcal{A}(x,w_n)}\right\} \tag{2.47}$$

Desde que $w_n \to w$ em $L^2(\Omega)$, então, a menos de subsequência, $w_n \to w$ q.s. em Ω. Como $w_n, w \in K$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$w_n \to w \text{ em } L^p(\Omega)\,,\ p \geq 1. \tag{2.48}$$

Designemos por A_n o membro direito de (2.47). Logo

$$|A_n| \leq \mu\theta\left|\frac{1}{\mathcal{A}(x,w_n)} - \frac{1}{\mathcal{A}(x,w)}\right| + \left|\frac{g(w)}{\mathcal{A}(x,w)} - \frac{g(w_n)}{\mathcal{A}(x,w_n)}\right|.$$

De (2.26) e (2.48) temos

$$\mathcal{A}(x,w_n) \to \mathcal{A}(x,w) \text{ q.s. em } \Omega.$$

Usando, novamente, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue-se que

$$A_n \to 0 \text{ em } L^2(\Omega)\,.$$

Por (2.47) teremos

$$u_n \to u \text{ em } H_0^1(\Omega)\,.$$

Isso mostra a continuidade de T pois o possível limite é único.

Passo 6. Conclusão.

Pela compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, T é uma aplicação compacta de K em K. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder, existe $u \in K$ tal que $Tu = u$, isto é,

$$t_0\varphi_1(x) \leq u(x) \leq \theta \text{ q.s. em } \Omega,$$

e u é solução fraca do problema em estudo.

$\blacksquare$

Capítulo 3

O Método de Sub e Supersolução Aplicado a Problemas do Tipo Semipositone

Neste capítulo, discutiremos o problema do tipo semipositone

$$\begin{cases} -\Delta u & = & \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que λ é um parâmetro positivo e $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1.

Estaremos interessados em soluções clássicas de (3.1), isto é, soluções $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

3.1 Introdução

Cohen e Keller em [14] iniciaram o estudo do problema (3.1) para f positiva e monótona, e introduziram a terminologia problemas "positone". Na literatura, os problemas "semipositone"se referem a busca de soluções positivas para o problema (3.1) quando $f(0) < 0$. Este tipo de problema surge na flambagem de sistemas mecânicos, no design de pontes suspensas, nas reações químicas, na astrofísica, na combustão e gestão dos recursos naturais.

Como apontado por Lions em [27], os problemas semipositone são matematicamente muito desafiadores, do ponto de vista de muitas aplicações importantes, interessantes, especialmente para soluções positivas. De fato, durante as últimas décadas, encontrar soluções positivas para os problemas da forma (3.1) com $f(0) < 0$ tem sido bastante estudado. A dificuldade de encontrar soluções positivas para tais problemas, foi encontrado pela primeira vez por Brown e Shivaji em [9], quando estudaram o problema de bifurcação perturbado

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda(u-u^3)-\epsilon \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\epsilon > 0$. No entanto, o estudo dos problemas semipositone foi formalmente apresentado por Castro e Shivaji em [10]. Para mais informções sobre este assunto veja Castro, Maya e Shivaji [11] e suas referências.

3.2 Problema do Tipo Semipositone

Nesta seção, usaremos o Teorema 2.7, apresentado no Capítulo 2, para mostrar a existência de solução do problema (3.1) em que $f(0) < 0$. Antes disso, façamos algumas considerações.

Definição 3.1 *Uma subsolução de (3.1) é uma função $\psi \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ que satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta\psi &\leq \lambda f(\psi) \quad \text{em } \Omega, \\ \psi &\leq 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Definição 3.2 *Uma supersolução de (3.1) é uma função $Z \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ que satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta Z &\geq \lambda f(Z) \quad \text{em } \Omega, \\ Z &\geq 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Suponhamos que $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^1 e satisfaça

$$f(0) < 0 \tag{3.4}$$

e

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = \infty. \tag{3.5}$$

Como consequência de (3.5) temos:

$$\text{existe } k_0 > 0 \text{ tal que } f(s) \geq -k_0, \forall\ s > 0. \tag{3.6}$$

Observemos que (3.6) inclui o caso $f(0) < 0$. Por exemplo, funções definidas por $f(x) = x^\alpha - a$, onde $\alpha \in (0,1)$ e $a > 0$, satisfazem essas condições.

Teorema 3.3 *Suponhamos que* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *seja uma função de classe* C^1 *satisfazendo (3.5), (3.6) e*

$$\lim_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s} = 0. \tag{3.7}$$

Então (3.1) possui uma solução positiva para $\lambda \gg 1$.

Demonstração. Seja $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $\varphi_1 > 0$ em Ω, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$, uma correspondente autofunção com $\|\varphi_1\|_\infty = 1$, ou seja, φ_1 satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 &= \lambda_1\varphi_1 \quad \text{em } \Omega, \\ \varphi_1 &= 0 \quad\quad\;\, \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para $\delta > 0$, suficientemente pequeno, consideremos o conjunto

$$\overline{\Omega}_\delta = \{x \in \Omega; dist\,(x, \partial\Omega) \leq \delta\}.$$

Sejam $\delta > 0, \mu > 0$ e $m > 0$ tais que

$$|\nabla\varphi_1|^2 - \lambda_1\varphi_1^2 \geq m \text{ em } \overline{\Omega}_\delta \tag{3.8}$$

e

$$\mu \leq \varphi_1 \leq 1 \text{ em } \Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta. \tag{3.9}$$

Notemos que (3.8) é possível pois $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} = \nabla\varphi_1.\frac{\eta}{\|\eta\|} < 0$ em $\partial\Omega$ e assim $|\nabla\varphi_1| > 0$ em $\partial\Omega$.

Seja $\psi = \frac{k_0\lambda}{2m}\varphi_1^2$. Então

$$\nabla\psi = \frac{k_0\lambda}{m}\varphi_1\nabla\varphi_1$$

donde

$$\begin{aligned} -\Delta\psi = -div\,(\nabla\psi) &= -div\left(\frac{k_0\lambda}{m}\varphi_1\nabla\varphi_1\right) \\ &= -\frac{k_0\lambda}{m}div\,(\varphi_1\nabla\varphi_1) \\ &= -\frac{k_0\lambda}{m}\{\varphi_1 div\,(\nabla\varphi_1) + \nabla\varphi_1\nabla\varphi_1\} \\ &= -\frac{k_0\lambda}{m}\left\{\varphi_1\Delta\varphi_1 + |\nabla\varphi_1|^2\right\} \\ &= -\frac{k_0\lambda}{m}\left\{\varphi_1(-\lambda_1\varphi_1) + |\nabla\varphi_1|^2\right\} \\ &= -\frac{k_0\lambda}{m}\left\{|\nabla\varphi_1|^2 - \lambda_1\varphi_1^2\right\}. \end{aligned}$$

De (3.8) temos

$$\frac{1}{m}\left\{|\nabla\varphi_1|^2 - \lambda_1\varphi_1^2\right\} \geq 1 \text{ em } \overline{\Omega}_\delta,$$

donde

$$-\frac{k_0\lambda}{m}\left\{|\nabla\varphi_1|^2 - \lambda_1\varphi_1^2\right\} \leq -k_0\lambda \text{ em } \overline{\Omega}_\delta.$$

Assim,

$$-\Delta\psi \leq -k_0\lambda \leq \lambda f(\psi) \text{ em } \overline{\Omega}_\delta. \tag{3.10}$$

Vejamos o que acontece em $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta$. Da condição (3.5), se $\lambda \gg 1$, teremos

$$\frac{k_0\lambda_1}{m} \leq f\left(\frac{k_0\lambda}{2m}\mu^2\right).$$

Daí em $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta$, em virtude de (3.9), temos

$$\begin{aligned} -\Delta\psi &= \frac{k_0\lambda}{m}\left\{\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2\right\} \\ &\leq \frac{k_0\lambda}{m}\lambda_1\varphi_1^2 \\ &\leq \frac{k_0\lambda\lambda_1}{m} \\ &\leq \lambda f\left(\frac{k_0\lambda}{2m}\varphi_1^2\right) \\ &= \lambda f(\psi). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Das desigualdades (3.10) e (3.11), segue-se

$$\begin{cases} -\Delta\psi \leq \lambda f(\psi) & \text{em } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Isso mostra que ψ é uma subsolução positiva de (3.1).

Construamos uma supersolução. Para isso, comecemos definindo

$$\tilde{f}(s) = \max_{t\in[0,s]} f(t).$$

Claramente $f(s) \leq \tilde{f}(s)$.

Afirmação. $\tilde{f}$ é não-decrescente e $\lim_{s\to\infty}\frac{\tilde{f}(s)}{s} = 0$.

De fato, se $s_1 < s_2$, então

$$\tilde{f}(s_1) = \max_{t\in[0,s_1]} f(t) \leq \tilde{f}(s_2) = \max_{t\in[0,s_2]} f(t) = \tilde{f}(s_2)$$

e assim $\tilde{f}$ é não-decrescente. De (3.7) segue que dado $\epsilon > 0$, existe $s_\infty > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| < \epsilon, \text{ se } s \geq s_\infty,$$

isto é,

$$-\epsilon < \frac{f(s)}{s} < \epsilon \Rightarrow -\epsilon s < f(s) < \epsilon s, \text{ quando } s \geq s_\infty.$$

Se $0 \leq s \leq s_\infty$, então existe $c_\epsilon > 0$ de modo que $f(s) \leq c_\epsilon$ e assim $f(s) \leq \epsilon s + c_\epsilon, \forall\ s > 0$. Dessa maneira

$$\tilde{f}(s) = \max_{t\in[0,s]} f(t) \leq \max_{t\in[0,s]}(\epsilon t + c_\epsilon) = \max_{t\in[0,s]}(\epsilon t) + c_\epsilon$$

implica que

$$\tilde{f}(s) \leq \epsilon s + c_\epsilon.$$

Como $f(s) \leq \tilde{f}(s)$, temos

$$\frac{f(s)}{s} \leq \frac{\tilde{f}(s)}{s} \leq \epsilon + \frac{c_\epsilon}{s}$$

logo

$$0 \leq \lim_{s\to\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} \leq \epsilon$$

e portanto $\lim_{s\to\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} = 0$.

Em vista disso, existe $m(\lambda) > 0$ tal que

$$\frac{1}{\|e\|_\infty \lambda} \geq \frac{\tilde{f}\left(m(\lambda)\|e\|_\infty\right)}{m(\lambda)\|e\|_\infty}$$

em que e é a solução única de

$$\begin{cases} -\Delta e &=& 1 \text{ em } \Omega, \\ e &=& 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definamos $Z = m(\lambda)e$. Então

$$-\Delta Z = -\Delta(m(\lambda)e) = m(\lambda)(-\Delta e) = m(\lambda) \geq \lambda\tilde{f}(m(\lambda)\|e\|_\infty) \geq \lambda f(m(\lambda)e).$$

Portanto, Z é uma supersolução de (3.1). Escolhendo $m(\lambda)$ suficientemente grande teremos $\psi \leq Z$. Isso é possível, pois $e > 0$ em Ω e $\frac{\partial e}{\partial\eta} < 0$ em $\partial\Omega$. Então, existe uma solução $u \in [\psi, Z]$ se $\lambda \gg 1$. ■

3.3 Problema do Tipo Semipositone com $f(t) < 0$ se $t \gg 1$

Nesta seção discutiremos um problema em que $f(t) < 0$ se $t \gg 1$. Neste caso, a condição (3.5) não é satisfeita.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= au - bu^2 - c \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\; \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

onde a, b e c são constantes reais satisfazendo hipóteses convenientes.

Como no problema anterior, seja $\varphi_1 > 0$ em Ω, $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} < 0$ em $\partial\Omega$ e $\|\varphi_1\|_\infty = 1$ uma autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ correspondente ao primeiro autovalor λ_1. Desse modo, existem constantes positivas k, ρ e μ tais que

$$\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2 \leq -k, \forall\ x \in \overline{\Omega}_\rho \tag{3.13}$$

e

$$\varphi_1 \geq \mu, \forall\ x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho \tag{3.14}$$

com $\overline{\Omega}_\rho = \{x \in \Omega; dist\,(x, \partial\Omega) \leq \rho\}$ em que $\rho > 0$ é suficientemente pequeno.

Desse modo, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4 *Suponhamos que $a < 2k$ e $2\lambda_1 < a\mu^2$. Então existe $c_0 = c_0(a, b)$ tal que se $0 < c < c_0$, então o problema (3.12) possui uma solução positiva u.*

Demonstração. Construiremos uma sub e supersolução ordenadas. Para tanto, seja $\underline{u} = \delta\varphi_1^2$ e mostremos que se $\delta > 0$ for suficientemente pequeno $\underline{u}$ será uma subsolução. Observemos que $\|\underline{u}\|_\infty \leq \delta$. Além disso, temos

$$\nabla\underline{u} = 2\delta\varphi_1\nabla\varphi_1$$

e daí

$$
\begin{aligned}
-\Delta \underline{u} = -div(\nabla \underline{u}) &= -div(2\delta\varphi_1\nabla\varphi_1) \\
&= -2\delta div(\varphi_1\nabla\varphi_1) \\
&= -2\delta\left\{\varphi_1 div(\nabla\varphi_1) + \nabla\varphi_1\nabla\varphi_1\right\} \\
&= -2\delta\left\{\varphi_1\Delta\varphi_1 + |\nabla\varphi_1|^2\right\} \\
&= -2\delta\left\{-\lambda_1\varphi_1^2 + |\nabla\varphi_1|^2\right\} \\
&= 2\delta\left\{\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Então $\underline{u} = \delta\varphi_1^2$ será subsolução de (3.12) se

$$2\delta\left(\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2\right) \leq a(\delta\varphi_1^2) - b(\delta\varphi_1^2)^2 - c.$$

Analisemos o que acontece em $\overline{\Omega}_\rho$. Nesse conjunto, temos $\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2 \leq -k$ e daí

$$2\delta\left(\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2\right) \leq -2k\delta.$$

Como $2k - a > 0$, façamos

$$0 < \delta < \frac{2k - a}{b}$$

e escolhendo

$$0 < c < \delta(2k - a - b\delta),$$

segue-se

$$c < 2k\delta - a\delta - b\delta^2$$

implica que

$$-2k\delta < -a\delta - b\delta^2 - c.$$

Uma vez que $\underline{u} = \delta\varphi_1^2 \leq \delta$, temos

$$-a\delta \leq -a\underline{u} \leq a\underline{u}$$

e

$$\underline{u}^2 \leq \delta^2 \Rightarrow -b\delta^2 \leq -b\underline{u}^2.$$

Logo, nas condições acima

$$-\Delta \underline{u} = 2\delta\left(\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2\right) \leq -2k\delta < -a\delta - b\delta^2 - c \leq a\underline{u} - b\underline{u}^2 - c \text{ em } \overline{\Omega}_\rho.$$

Vejamos o que acontece em $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho$. Sabemos que $\|\varphi_1\|_\infty = 1$, assim

$$2\delta\left(\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2\right) \leq 2\lambda_1\delta.$$

Visto que $a\mu^2 - 2\lambda_1 > 0$, tomemos $0 < \delta < \frac{a\mu^2 - 2\lambda_1}{b}$ e escolhamos $0 < c < \delta(a\mu^2 - 2\lambda_1 - b\delta)$. Por (3.14) temos $a\delta\mu^2 \leq a\delta\varphi_1^2 = a\underline{u}$ e assim

$$c < a\delta\mu^2 - 2\lambda_1\delta - b\delta^2$$

implica que

$$-\Delta \underline{u} = 2\delta\left(\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2\right) \leq 2\lambda_1\delta < a\delta\mu^2 - b\delta^2 - c \leq a\underline{u} - b\underline{u}^2 - c \text{ em } \Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho.$$

Logo, tomando $0 < \delta < \min\left\{\frac{2k-a}{b}, \frac{a\mu^2-2\lambda_1}{b}\right\}$ e fazendo $0 < c < c_0$, onde $c_0 = \min\left\{\delta(2k - a - b\delta), \delta(a\mu^2 - 2\lambda_1 - b\delta)\right\}$, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} & \leq & a\underline{u} - b\underline{u}^2 - c & \text{em } \Omega, \\ \underline{u} & = & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostrando assim que $\underline{u} = \delta\varphi_1^2$ é uma subsolução positiva de (3.12).

Para construirmos a supersolução, devemos observar que a função

$$f(t) = at - bt^2 - c \to -\infty$$

se $t \to +\infty$. Desse modo, escolhendo $N > 0$ suficientemente grande tal que $f(N) < 0$ teremos que $\overline{u} = N$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} = 0 & > & a\overline{u} - b\overline{u}^2 - c & \text{em } \Omega, \\ \overline{u} & > & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

E se $\overline{u} = N > \underline{u} = \delta\varphi_1^2$, obtemos a sub e supersolução ordenadas $\underline{u} < \overline{u}$. Portanto, existe uma solução u com $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, o que conclui a demonstração.

■

Apêndice A

Alguns Resultados Utilizados

Neste apêndice, enunciaremos algumas definições e alguns teoremas utilizados no decorrer desta dissertação.

Teorema A.1 *(Teorema de Weierstrass)(Ver [22]) Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^N$ possui uma subsequência convergente.*

Definição A.2 *(Ver [22]) Dado $X \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^N$ diz-se Lipschitziana quando existe $k > 0$ (constante de Lipschitz de f) tal que, para quaisquer $x, y \in X$, tem-se*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| .$$

Definição A.3 *(Ver [22]) Dado $X \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^N$ chama-se localmente Lipschitziana quando, para todo $x \in X$, existe uma bola aberta B, de centro x, tal que $f\,|(B \cap X)$ é Lipschitziana.*

Teorema A.4 *(Teorema do Valor Médio)(Ver [22]) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ um caminho contínuo, diferenciável no intervalo aberto (a, b). Se $|f'(t)| \leq M$ para todo $t \in (a, b)$, então*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Teorema A.5 *(Desigualdade do Valor Médio)(Ver [22]) Dado $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto $(a, a + v)$ e tal que sua restrição ao segmento fechado $[a, a + v] \subset U$ seja contínua. Se $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, a + v)$, então*

$$|f(a + v) - f(a)| \leq M|v|.$$

Teorema A.6 *(Ver [22]) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Se uma sequência de funções integráveis* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente para uma função* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, *então* f *é integrável e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Teorema A.7 *(As Identidades de Green)(Ver [19]) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam* $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. *Então valem as seguintes identidades:*

(i) Primeira Identidade de Green

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla v \nabla u)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} ds \tag{A.1}$$

(ii) Segunda Identidade de Green

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) ds, \tag{A.2}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \eta}$ *é a derivada direcional na direção da normal unitária exterior* η.

Teorema A.8 *(Princípio do Máximo)(Ver [18]) Seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= h \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.3}$$

onde $h \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma = \frac{2N}{N+2}$, λ *um parâmetro real não-negativo e* $h \geq 0$ *em* Ω. *Então* $u \geq 0$ *em* Ω. *Além disso, se* $h > 0$ *em um conjunto de medida positiva, então* $u > 0$ *em* Ω.

Se $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, *então a derivada normal exterior* $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0$, *para todo* $x \in \Omega$.

Teorema A.9 *(Princípio do Máximo Forte)(Ver [19]) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *com* $\Delta u \geq 0(\Delta u \leq 0)$ *em* Ω *e suponha que existe um ponto* $y \in \Omega$ *tal que*

$$u(y) = \sup_\Omega u \left(\inf_\Omega u\right).$$

Então u *é constante.*

Teorema A.10 *(Princípio do Máximo Fraco)(Ver [19]) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *com* $\Delta u \geq 0(\Delta u \leq 0)$ *em* Ω. *Então*

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u\right).$$

Definição A.11 *(Potencial Newtoniano)(Ver [19]) Para uma função integrável f num domínio Ω, o potencial Newtoniano de f é a função w definida em $\mathbb{R}^N$ por*

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy,$$

onde Γ é a solução fundamental da equação de Laplace dada por

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{N(2-N)\omega_N}|x-y|^{2-N}, & N > 2 \\ \frac{1}{2\pi} log|x-y|, & N = 2. \end{cases}$$

Lema A.1 *(Ver [19]) Sejam f limitada e integrável em Ω e w o potencial Newtoniano de f. Então $w \in C^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.*

Lema A.2 *(Ver [19]) Seja f limitada e localmente Hölder contínua (com expoente $\alpha \leq 1$) em Ω, e seja w o potencial Newtoniano de f. Então $w \in C^2(\Omega)$ e $\Delta w = f$ em Ω.*

Definição A.12 *(Ver [4]) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Diz-se que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory se:*

(i) $f(\cdot, s)$ é mensurável em Ω, qualquer que seja $s \in \mathbb{R}$ fixado;

(ii) $f(x, \cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$, q.s. em Ω.

Teorema A.13 *(Ver [4]) Suponha que existam constantes $c, r > 0$ e uma função $b(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq +\infty$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq c|s|^r + b(x), \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Então,

(i) $N_f : L^{rq} \to L^q$;

(ii) N_f é contínua e limitada (mais ainda, leva conjunto limitado em conjunto limitado).

N é chamado Operador de Niemytski.

Teorema A.14 *(Teorema da Convergência Monótona)(Ver [5]) Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas na qual converge para f, então*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema A.15 *(Teorema da Converência Dominada de Lebesgue)(Ver [5]) Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis, as quais convergem em quase toda parte para uma função mensurável* f *a valores reais. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* n*, então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema A.16 *(Desigualdade de Hölder)(Ver [5]) Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, onde* $p \geq 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e* $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Teorema A.17 *(Ver [7]) Seja* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$*, tais que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$*. Então, existe uma subsequência* (f_{n_k}) *tal que*

(i) $f_{n_k} \to f$ *q.t.p em* Ω

(ii) $|f_{n_k}| \leq h$ *q.t.p. em* Ω*, para todo* k*, com* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Teorema A.18 *(Ver [7]) Seja* H *um espaço de Banach reflexivo. Se* (u_n) *é uma sequência limitada em* H*, então existem uma subsequência* $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ *e* $u \in H$ *tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H.$$

Teorema A.19 *(Ver [24] p.46) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *com* $1 < p < +\infty$ *e* k *uma constante real não-negativa. Então existe uma única* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u + ku &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.4}$$

além disso, existe uma constante C *independente de* f *e* u *tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{A.5}$$

Em particular, se $p > \frac{N}{2}$ *e* $\varphi \in C(\overline{\Omega})$*, então existe uma única* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ *solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + ku &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.6}$$

Definição A.20 *(Ver [23]) Seja* X *um conjunto não-vazio. A envoltória convexa de* X *é o menor conjunto convexo contendo* X*.*

Apêndice B

Introdução aos Espaços de Sobolev

Neste apêndice vamos apresentar alguns resultados sobre Espaços de Sobolev que foram utilizados nesta dissertação. Para tanto, antes veremos alguns resultados sobre a Teoria das Distribuições. Mais informações sobre este conteúdo veja [1].

B.1 Resultados sobre Distribuições

Apresentaremos nesta seção a definição de Distribuição sobre Ω.

Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^N$ define-se $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Por D^α, denotaremos o operador de derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

e para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ definimos $D^0 u = u$ para toda função u. Por D_i, para $i = 1, 2, \ldots, N$, representaremos a derivação parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

B.1.1 Suporte de Funções

Sejam $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ a família de todos os abertos $\mathcal{O}_i \subset \Omega$ tais que $u = 0$ q.s. em $\mathcal{O}_i$. Consideremos $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, então $u = 0$ q.s. em $\mathcal{O}$. Desse modo, o suporte de u, denotado por *supp* u, é definido como sendo

$$supp\ u = \Omega \setminus \mathcal{O}.$$

Note que se u é uma função contínua, então o suporte de u é dado por

$$supp\ u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$$

B.1.2 Espaço das Funções Testes

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e por $C_0^\infty(\Omega)$ denotaremos o espaço vetorial de todas as funções númericas em Ω, com suporte compacto em Ω, possuindo aí derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes. Observe que $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ no sentido de que se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Diremos que $(\phi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para 0 quando:

(i) Os suportes de todas as funções testes (ϕ_n), da sequência dada, estão contidos num compacto fixo K.

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$, a sequência $(D^\alpha \phi_n)$ converge para 0 uniformemente em K.

Se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, dizemos que a sequência $(\phi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando a sequência $(\phi_n - \phi)$ converge para 0 no sentido dado acima.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω

B.1.3 Distribuições sobre Ω

Uma distribuição sobre sobre Ω, é uma transformação linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que é contínua segundo a convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é,

(i) $\langle T, \varphi + \lambda\psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \lambda \langle T, \psi \rangle$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. (Note que $\langle T, \varphi \rangle$ é o valor de T em φ).

(ii) $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ implicar em $\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial o qual representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Sejam $(T_n) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, diremos que (T_n) converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, e denotamos por

$$T_n \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

quando, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tivermos

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}.$$

Quando $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, é comum dizer que u é uma distribuição, neste caso, devemos perceber que estamos identificando u com Tu. Toda distribuição tem derivada de todas as ordens. Assim, todas as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ tem derivada de todas as ordens no sentido das distribuições.

Consideremos $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ uma distribuição e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Definimos a derivada de ordem α de T, $D^\alpha T$, como sendo a seguinte distribuição

$$\begin{aligned} D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \end{aligned}$$

B.2 Espaços de Sobolev

Esta é a seção fundamental para este apêndice, nela apresentaremos os resultados mais usados sobre Espaços de Sobolev desta dissertação.

Sejam $p \in [1, +\infty]$, $m \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Definimos o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ com } |\alpha| \leq m \right\}$$

cuja norma é definida por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty .$$

Chamamos os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ de espaços de Sobolev.

Proposição B.1 *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

No caso em que $p = 2$, denotamos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H^m(\Omega)$, e é denominado espaço de Sobolev de ordem m.

Definição B.2 *(O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$) Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}.$$

Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W^{m,2}(\Omega)$.

B.2.1 Imersões nos Espaços de Sobolev

Apresentaremos os teoremas de imersões dos espaços de Sobolev.

Definição B.3 *(Imersão Contínua) Dizemos que o espaço normado $(X, \| \ . \ \|_X)$ está imerso continuamente no espaço $(Y, \| \ . \ \|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

(i) X for subespaço vetorial de Y,

(ii) A aplicação identidade

$$\begin{array}{rcl} i : X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|i(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$, $\forall \ x \in X$.

Definição B.4 *(Operador Linear Compacto)(Ver [25]) Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é dito compacto, se toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ é levada em uma sequência $T(x_n)$ que admite uma subsequência convergente em Y.*

Definição B.5 *(Imersão Compacta) Dizemos que o espaço normado $(X, \| \ . \ \|_X)$ está imerso compactamente no espaço $(Y, \| \ . \ \|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

$$\begin{array}{rcl} i : X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é um operador linear compacto.

Teorema B.6 *(Teorema das Imersões Contínuas) Sejam Ω um domínio regular, $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$ as imersões abaixo são contínuas:*

(i) *Se* $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$

(ii) *Se* $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q < \infty$

(iii) *Se* $m > \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$

(iv) *Se* $m - 1 < \frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq m - \frac{N}{p}$.

Observação B.1 $C_B^j(\Omega)$ *é o espaço das funções* $u \in C^j(\Omega)$ *tais que* $D^\alpha u$*, para* $|\alpha| \leq j$*, é limitada em* Ω*, cuja norma é*

$$\|u\|_{C_B^j(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

Teorema B.7 *(Teorema de Rellich-Kondrachov) Seja* Ω *um domínio regular limitado,* $j \geq 0$*,* $m \geq 1$ *e* $1 \leq p < \infty$*. Então, as imersões abaixo são compactas:*

(i) *Se* $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \frac{Np}{N-mp}$

(ii) *Se* $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$

(iii) *Se* $m > \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$ *e* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$

(iv) *Se* $m - 1 < \frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.

Bibliografia

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975

[2] Amann, H., *On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 21, 125-146 (1971).

[3] Amann, H., *Fixed Point Equation and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces*, SIAM Review 18 (1976), 620-709.

[4] Ambrosetti, A. e Prodi, G., *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1993.

[5] Bartle, Robert G., *Elements of Integration and Lebesgue Measuare*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[6] Berestycki, H., *Methodes Topologiques et Problemes aux Limites non Lineaires*, (Tese de Doutorado de Berestycki), Soutenue, These de Docteur, França, 1975.

[7] Brézis, H., *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[8] Brézis, H. e Oswald, L., *Remarks on Sublinear Elliptic Equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 10, no. 1, pp. 55–64, 1986.

[9] Brown, K.J. e Shivaji, R., *Simple Proofs of some Results in Perturbed Bifucation Theory*, Proc. Roy. Soc. Edin., 93(A)(1982), pp. 71-82.

[10] Castro, A. e Shivaji, R., *Nonnegative Solutions for a Class of Nonpositone Problems*, Proc. Roy. Soc. Edin., 108(A)(1988), pp. 291-302.

[11] Castro, A., Maya, C. e Shivaji, R., *Nonlinear Eigenvalue Problems with Semipositone Structure*, Electron. J. Diff. Eqns., Conf. 05, 2000, pp. 33-49.

[12] Chipot, M., *Elliptic Equations: An Introductory Course*, Birkhäuser Adavanced Texts, Germany, 2009.

[13] Clément, P. e Sweers, G., *Getting a Solution between Sub - and Supersolutions without Monotone Iteration*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 19 (1987), 189–194.

[14] Cohen, D.S. e Keller, H.B., *Some Positone Problems Suggested by Nonlinear Heat Generation*, Journal of Math. Mech., 16 (1967), pp. 1361-1376.

[15] Chipot, M. e Corrêa, F.J.S.A, *Boundary Layer Solutions to Functional Elliptic Equations*, Bull Braz Math Soc, New Series 40(3), 381-393 (2009), Sociedade Brasileira de Matemática.

[16] de Figueiredo, D. G., *Equações Elípticas não Lineares*, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[17] de Figueiredo, D. G., *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems*, Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais, IME-USP, São Paulo, 1981.

[18] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations*, Vol. 19, American Mathematical Society, U.S.A., 1998.

[19] Gilbarg, David e Trundinger Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer, 3ª Edição, New York, 2001.

[20] Hernández, J. *Some Existence ana Stability Results for Solutions of Reaction-diffusion Systems with Nonlinear Boundary conditions*, Nonlinear Differential Equations: Invariance, Stability and Bifurcation, 1981, 161-173.

[21] Leon, Mabel C., *Existence results for quasilinear problems via ordered sub and supersolutions*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 6 Série, tome 6, N. 4, (1997), 591-608.

[22] Lima, Elon L., *Análise Real Vol. 2*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[23] Lima, Elon L., *Homologia Básica*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[24] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problémes Elliptiques*, Springer-Verlag, (1993)

[25] Kreyszig, Erwin, *Introductory Funtional Analysis: A First Course*, Narosa Publishing House, 1999.

[26] Lee, E. K., Shivaji, R. e Ye, J., *Subsolutions: A journey from positone to infinite semipositone problems*, Seventh Mississippi State - UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations, Electronic journal of Differential Equations, Conf. 17 (2009), pp.123-131.

[27] Lions, P.L., *On the Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations*,SIAM Rev. 24 (1982), 441-467.

[28] Sattinger, D.H., *Topics in Stability and Bifurcation Theory*, Lecture Notes in Mathematics 309, Springer, New York, 1973.

[29] Wang, Y., *Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary condition*, Eletronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002, N. 5, (2002), 1-16.