



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE**  
**UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**ELTON CEZAR VASCONCELOS DE ARAÚJO**

**APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO LADRILHAMENTOS**

**CUITÉ**

**2019**

ELTON CEZAR VASCONCELOS DE ARAÚJO

APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO LADRILHAMENTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Anselmo Ribeiro Lopes

CUITÉ

2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE  
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

A663a Araújo, Elton Cezar Vasconcelos de.

Aplicações geométricas utilizando ladrilhamento. / Elton Cezar Vasconcelos de Araújo – Cuité: CES, 2019.

35 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2019.

Orientação: Anselmo Ribeiro Lopes.

1. Ladrilhamento. 2. Plano Euclidiano. 3. polígonos. I. Título.

Biblioteca do CES – UFCG

CDU 514

ELTON CEZAR VASCONCELOS DE ARAÚJO

APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO LADRILHAMENTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Aprovada em: 29 de Novembro de 2019

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Ms. Anselmo Ribeiro Lopes (Orientador)  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

---

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

---

Prof. Ms. Marciel Medeiros de Oliveira  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Dedico ao meu irmão que me inspirou a realizar este sonho que é ser professor de matemática, ter uma referência de profissional na própria casa é uma benção. Obrigado!

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus por ter proporcionado esta glória, sem a proteção dele jamais teria conseguido encerrar esta jornada.

Segundo, as duas mulheres fortes que me ajudaram tanto estruturalmente como psicologicamente em todos os sentidos, certamente seria muito mais difícil caminhar sem que vocês estivessem do meu lado. Obrigado minha mãe e minha avó.

Ao meu orientador Anselmo que sempre me ajudou tanto com o curso quanto com a vida, poder ter um amigo como orientador é outro nível. Obrigado, e que Deus o abençoe infinitamente.

A todos os familiares que apoiaram esta jornada acadêmica. Pai, tios, tias, primos, primas, noiva, cunhada, sobrinhas um forte abraço a todos.

Não posso deixar de agradecer aos verdadeiros amigos que sofreram junto comigo durante todo este tempo, tenho poucos amigos mas a dívida de agradecimento é enorme.

Agradeço a todos os professores do Centro de Educação e Saúde (CES) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Este processo passou pelas mãos de vocês e tudo que pude absorver de conhecimento devo a vocês. Obrigado!

Aos meus alunos que me proporcionaram momentos sublimes em sala, quando lecionei para vocês pude crer que de fato ser professor é meu maior talento.

A todos que contribuíram direto ou indiretamente com esse sonho, o meu muito obrigado!

“O motivo da glória muitas vezes é o motivo da guerra, porquê o gosto da vitória é saber lidar com a espera”

(Chorão)

## RESUMO

Esta monografia desenvolveu um estudo dos ladrilhados do Plano Euclidiano de maneira teórica. A abordagem escolhida irá expor os principais teoremas e proposições envolvendo ladrilhados com polígonos regulares. Ademais, aqui também serão apresentados dois tipos de polígonos que ladrilham o Plano Euclidiano de forma monoédrica. Para finalizar, verifica-se como estas podem ser observadas na natureza e como aplicações diretas da vida cotidiana das pessoas.

**Palavras-chave:** Ladrilhamento. Plano Euclidiano. Polígonos.

## **ABSTRACT**

This monograph developed a study of the Euclidean Plan tiles in a theoretical way. The chosen approach will expose the main theorems and propositions involving tiles with regular polygons. In addition, here will also be presented two types of polygons that tile the Euclidean Plane in a monohedral way. Finally, it is verified how these can be observed in nature and as direct applications of people's daily life.

**Keywords:** Tiling. Euclidean Plane. Polygons.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exemplo de linhas poligonais aberta e fechada, respectivamente . . . . .	15
Figura 2.2 – Exemplo de linha poligonal não simples . . . . .	16
Figura 2.3 – Exemplo de regiões poligonais . . . . .	16
Figura 2.4 – Polígonos com 6 e 4 lados, respectivamente . . . . .	16
Figura 2.5 – Polígonos convexo e não convexo, respectivamente . . . . .	17
Figura 2.6 – Ângulos internos e externo de um polígono, respectivamente . . . . .	18
Figura 2.7 – Polígonos congruentes . . . . .	18
Figura 2.8 – Exemplo de polígonos regulares e não regulares . . . . .	19
Figura 2.9 – Polígono convexo de $n$ lados . . . . .	20
Figura 2.10–Polígono convexo de $n$ lados dividido em $n - 2$ triângulos . . . . .	20
Figura 2.11–Polígono regular de $n$ lados . . . . .	21
Figura 2.12–Ladrilhado formado somente por quadrados . . . . .	22
Figura 3.1 – Configuração com ladrilhos não congruentes . . . . .	25
Figura 4.1 – Reflexão do ponto $B$ por $M$ gerou o ponto $B'$ . . . . .	29
Figura 4.2 – Reflexão do ponto $C$ por $M$ gerou o ponto $C'$ . A reflexão do ponto $A$ por $M$ é o próprio ponto $D$ e vice-versa . . . . .	30
Figura 4.3 – Após a reflexão dos quatro pontos $A, B, C, D$ por $M$ , tem-se um novo quadrilátero: $A'B'C'D'$ . . . . .	30
Figura 4.4 – Dois ângulos internos do quadrilátero $ABCD$ destacados em torno do vértice $D$ . . . . .	31
Figura 4.5 – Três ângulos internos do quadrilátero $ABCD$ em torno do vértice $D$ . . . . .	31
Figura 4.6 – Quatro ângulos internos do quadrilátero $ABCD$ em torno do vértice $D$ . . . . .	32
Figura 4.7 – Ladrilhado monoédrico com quadriláteros . . . . .	32
Figura 4.8 – Ladrilhado monoédrico com quadrilátero não convexo . . . . .	32
Figura 4.9 – Triângulo $ABC$ . . . . .	33
Figura 4.10–Reflexão do triângulo $ABC$ pelo ponto médio do segmento $\overline{BC}$ gerou um triângulo congruente a $ABC$ denominado $A'BC$ . . . . .	33
Figura 4.11–Ladrilhado com o triângulo $ABC$ . . . . .	34

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Denominação dos polígonos com até dez lados . . . . .	17
Tabela 3.1 – Valores de número de ladrilhos por vértice e número de lados de cada ladrilho com seus respectivos moldes e ladrilhados regulares . . . . .	24
Tabela 3.2 – Moldes, sua representação geométrica e seus respectivos ladrilhados para o caso em que há três tipos de ladrilhos regulares não todos congruentes em torno de cada vértice . . . . .	26
Tabela 3.3 – Moldes, sua representação geométrica e os respectivos ladrilhados quaserre- gulares para o caso em que há quatro tipos de ladrilhos regulares em vértices	27
Tabela 3.4 – Moldes, sua representação geométrica e seus respectivos ladrilhados para o caso em que há cinco tipos de ladrilhos regulares não congruentes em cada vértice . . . . .	28

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CES Centro de Educação e Saúde

UFCG Universidade Federal de Campina Grande

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\overline{AB}$	Segmento de extremidades $A$ e $B$
$P_1P_2P_3 \dots P_n$	Polígono de $n$ vértices
$\hat{A}_i$	Ângulo interno do vértice $A_i$ do polígono.
$\mathbb{E}$	Plano Euclidiano
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\angle MNP$	Ângulo formado entre os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ .
$\triangle ABC$	Triângulo $ABC$
$\equiv$	Congruência

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>PRÉ-REQUISITOS</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Polígonos</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Classificação de um Polígono</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.3</b>	<b>Soma dos Ângulos Internos de um Polígono</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2.4</b>	<b>Ladrilhamentos do Plano Euclidiano</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>LADRILHADOS COM POLÍGONOS REGULARES</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Ladrilhados Regulares</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>3.2</b>	<b>Ladrilhados Quaserregulares</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>LADRILHADOS MONOÉDRICOS</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>4.1</b>	<b>Ladrilhados Monoédricos com Quadriláteros</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>4.2</b>	<b>Ladrilhado Monoédricos com Triângulos</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	<b>35</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>37</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade até os dias atuais, a estética e a beleza estão presente nas atividades dos seres humanos. Profissionais tais como arquitetos, artistas, decoradores, pedreiros, estilistas e artesãos, precisam e utilizam de técnicas das mais variadas para obter bons resultados em seus trabalhos. É de senso comum que o homem modifica objetos e construções há muito tempo, não só para contar histórias e outros propósitos, mas também pela arte. Uma maneira interessante de preencher paredes, chão, pisos, tapeçarias, confecções de roupas ou obras de arte é utilizando polígonos.

Apesar de ter aparecido em lugares distantes no tempo e no espaço, a ciência envolvida em entender ladrilhamentos é recente e vem sendo desenvolvida há pouco mais de 100 anos. É comum nos esbarrarmos com ladrilhados na natureza, na arquitetura, em obras de arte, entre outros.

Em linhas gerais, se for possível encaixar polígonos, sem falhas ou sobreposições, dizemos que o Plano Euclidiano está ladrilhado. O intuito deste trabalho é fazer uma abordagem inicial de quais polígonos conseguem ladrilhar o Plano Euclidiano.

O Capítulo 2 trata de uma lista de definições sobre polígonos, suas classificações, componentes, dentre outras definições básicas, envolvendo ladrilhados para um melhor entendimento deste trabalho.

O Capítulo 3 será dedicado ao estudo de ladrilhados com polígonos regulares, que obedecem algumas condições. Neste capítulo faremos o estudo dos ladrilhados regulares e apresentaremos sem demonstrar os resultados para os ladrilhados quaserregulares. Deste estudo detalhado, ficará demonstrado o Teorema de Kepler, que caracteriza completamente os onze tipos de ladrilhados regulares e quaserregulares.

Por fim, no Capítulo 4 veremos que uma outra forma de se pensar em recobrir o Plano Euclidiano é utilizando ladrilhados monoédricos. Nele iremos demonstrar que qualquer triângulo e qualquer quadrilátero ladrilha monoedricamente o Plano Euclidiano. Existem muitas outras maneiras de se pensar em ladrilhados, e indicamos literaturas onde pode-se encontrar estudos mais avançados.

## 2 PRÉ-REQUISITOS

De forma a compreender o processo de ladrilhamento no plano, neste capítulo iremos apresentar conceitos básicos para uma melhor compreensão da figura geométrica denominada **polígono**, a qual é fundamental para se definir ladrilhamento. Além disso, vamos apresentar alguns resultados geométricos importantes sobre polígono convexo.

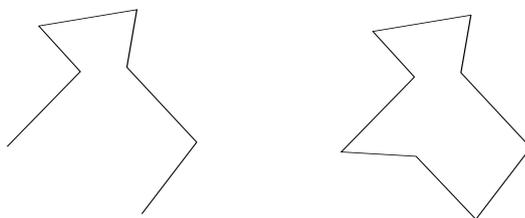
É importante dizer que este trabalho está estruturado no contexto do Plano Euclidiano, valendo salientar que para facilitar a leitura e a escrita, utilizaremos o termo *plano* para se referir ao Plano Euclidiano. Como é usual, denotaremos pontos por letras maiúsculas do alfabeto latino, como  $A$ ,  $B$ , por exemplo, e o segmento de extremidades  $A$  e  $B$  por  $\overline{AB}$ . Muitos conceitos matemáticos aqui utilizados advêm da Geometria Euclidiana e não serão enunciados, já que este não é o nosso objetivo principal.

### 2.1 Polígonos

**Definição 2.1 (Linha Poligonal)** *Dado um número finito de pontos distintos de um plano  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, P_{n+1}$ , uma **linha poligonal** é a união de um número finito de segmentos  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_nP_{n+1}}$ , tais que três pontos consecutivos  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  não são colineares. Os pontos  $P_i, i = 1, 2, 3, \dots, n, n+1$ , são os **vértices** da linha poligonal.*

**Definição 2.2 (Linha Poligonal Aberta e Fechada)** *Uma linha poligonal  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_nP_{n+1}}$  é chamada de **fechada** se  $P_{n+1} = P_1$ , caso contrário ela é dita **aberta**.*

Figura 2.1 – Exemplo de linhas poligonais aberta e fechada, respectivamente

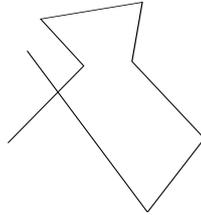


Fonte: adaptado de (SILVA, 2014).

**Definição 2.3 (Linha Poligonal Simples)** *Uma linha poligonal  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_nP_{n+1}}$  é chamada de **simples** se quaisquer dois segmentos não consecutivos que a compõem são disjuntos.*

**Observação 2.1** Das definições acima, é possível uma linha poligonal se intersectar em um ponto diferente do vértice, mas se essa linha poligonal for simples, isso não é admitido.

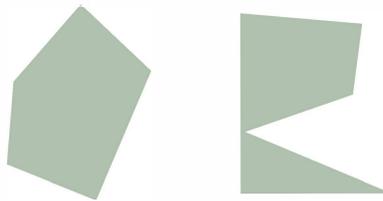
Figura 2.2 – Exemplo de linha poligonal não simples



Fonte: adaptado de (SILVA, 2014).

**Definição 2.4 (Região Poligonal)** Uma **região poligonal** é a união dos pontos interiores a uma linha poligonal fechada.

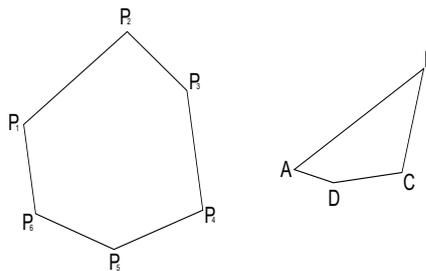
Figura 2.3 – Exemplo de regiões poligonais



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

**Definição 2.5** Um **polígono** é uma linha poligonal fechada e simples  $\overline{P_1P_2}$ ,  $\overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{i-1}P_i}$ ,  $\overline{P_iP_{i+1}}, \dots, \overline{P_nP_1}$ . Os pontos  $P_i$  são os **vértices** do polígono e os segmentos  $\overline{P_{i-1}P_i}$  são os **lados ou arestas** do polígono. Denotamos o polígono de  $n$  vértices por  $P_1P_2P_3 \dots P_n$ .

Figura 2.4 – Polígonos com 6 e 4 lados, respectivamente



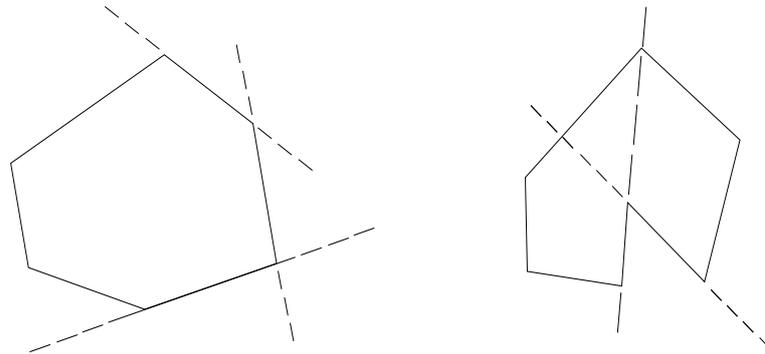
Fonte: adaptado de (SILVA, 2014).

## 2.2 Classificação de um Polígono

Podemos classificar um polígono de acordo com sua convexidade ou não, seu número de lados e ainda segundo a congruência entre seus lados e entre seus ângulos internos.

**Definição 2.6** *Um polígono é **convexo** se cada reta determinada por dois de seus vértices consecutivos não intersecta os seus outros lados, caso contrário o polígono é **não convexo**.*

Figura 2.5 – Polígonos convexo e não convexo, respectivamente



Fonte: adaptado de (SILVA, 2014).

Os polígonos são nomeados de acordo com sua quantidade de lados, e como devemos ter no mínimo três pontos consecutivos não colineares, a quantidade mínima de lados para se ter um polígono é três. A seguir nomeamos os polígonos com até dez lados.

Tabela 2.1 – Denominação dos polígonos com até dez lados

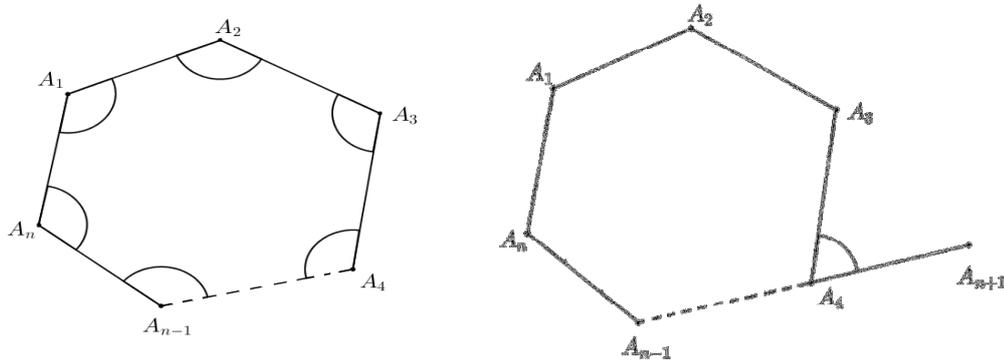
Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono

Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Na Figura 2.4 os polígonos são respectivamente o hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  e o quadrilátero  $ABCD$ .

**Definição 2.7 (Ângulos Internos e Externos)** *Os **ângulos internos** de um polígono são os ângulos formados por dois lados consecutivos e os **ângulos externos** de um polígono são os ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado a ele consecutivo.*

Figura 2.6 – Ângulos internos e externo de um polígono, respectivamente

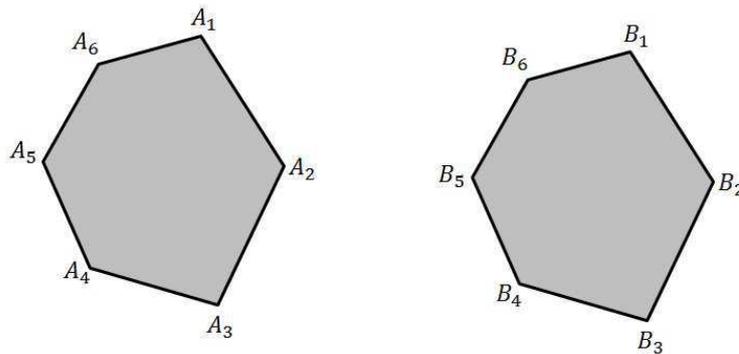


Fonte: adaptado de (COELHO, 2014).

**Observação 2.2** Para denotar o ângulo interno de um polígono utilizamos a notação  $\hat{A}_i$  de forma a indicar que se trata do ângulo interno localizado no vértice  $A_i$ .

**Definição 2.8** Dois polígonos são **congruentes** quando a medida de seus lados e seus ângulos correspondentes são iguais, ou seja, quando os lados correspondentes e também os ângulos correspondentes são congruentes.

Figura 2.7 – Polígonos congruentes

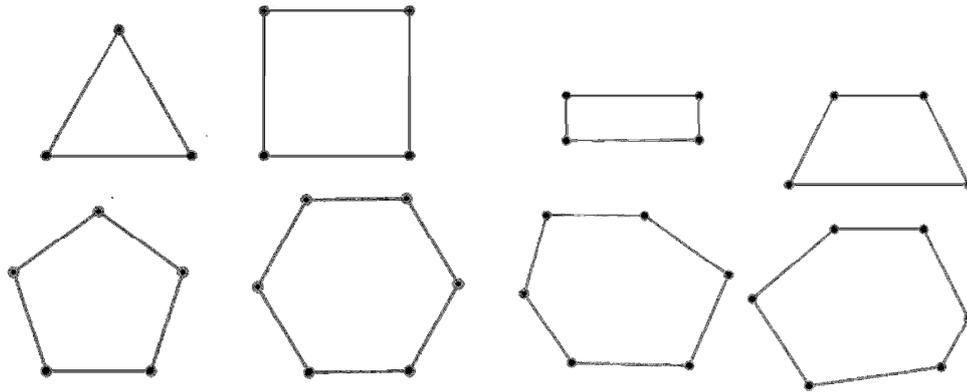


Fonte: adaptado de (COELHO, 2014)

Por exemplo, na Figura 2.7, os polígonos  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  e  $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$  são congruentes, pois os lados  $A_iA_{i+1}$  são congruentes aos lados  $B_iB_{i+1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 6$  e os ângulos  $\hat{A}_i$  são congruentes aos ângulos  $\hat{B}_i$  para  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

**Definição 2.9** Um polígono é dito **regular** se tiver todos os seus lados e ângulos congruentes, isto é, com mesma medida, sejam eles internos ou externos.

Figura 2.8 – Exemplo de polígonos regulares e não regulares



(a) Polígonos regulares

(b) Polígonos não regulares

Fonte: adaptado de (COELHO, 2014)

### 2.3 Soma dos Ângulos Internos de um Polígono

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo varia de acordo com o número  $n$  de lados. Obteremos uma fórmula para encontrar esta soma, iniciando por um resultado já conhecido e estudado em Geometria Plana referente à soma dos ângulos internos de um triângulo, que é o polígono com o menor número de lados.

**Teorema 2.1** *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$*

Não é nosso objetivo demonstrar esse resultado aqui, tendo em vista que o mesmo é estudado na disciplina de Geometria Euclidiana Plana. De qualquer forma para uma demonstração utilizando o axioma das paralelas, indicamos o capítulo 6 de (BARBOSA, 2012). Uma outra demonstração utilizando dobraduras pode ser vista em (COELHO, 2014).

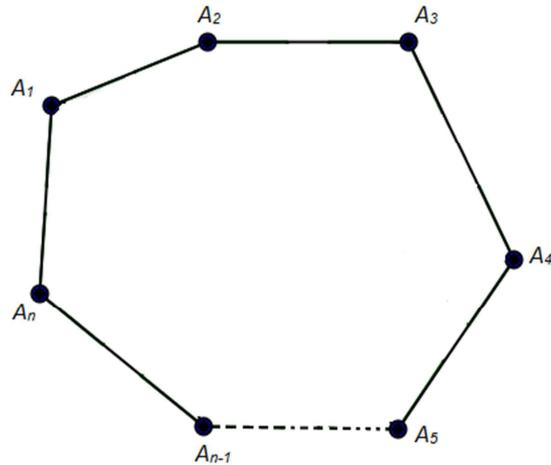
O teorema a seguir generaliza o anterior. Vamos obter uma fórmula para a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo.

**Teorema 2.2** *A soma  $S$  dos ângulos internos de um polígono convexo com  $n$  lados é dada por:*

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

**Demonstração:** Seja  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  um polígono convexo com  $n$  lados, como na figura a seguir.

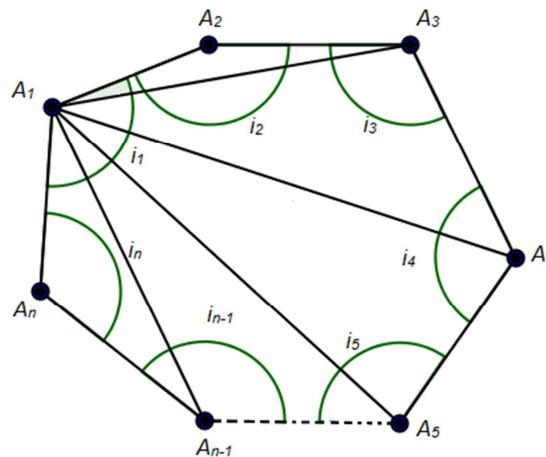
Figura 2.9 – Polígono convexo de  $n$  lados



Fonte: adaptado de (COELHO, 2014)

De qualquer vértice do polígono podemos traçar somente  $n - 3$  diagonais. Por exemplo como exibido na Figura 2.10. Logo, o polígono fica dividido em  $n - 2$  triângulos.

Figura 2.10 – Polígono convexo de  $n$  lados dividido em  $n - 2$  triângulos



Fonte: adaptado de (COELHO, 2014)

Assim, a soma  $S$  dos ângulos internos do polígono é:

$$S = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_{n-1} + i_n,$$

que é igual à soma dos ângulos internos dos  $n - 2$  triângulos formados. Logo, pelo Teorema 2.1, obtemos

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ. \quad \blacksquare$$

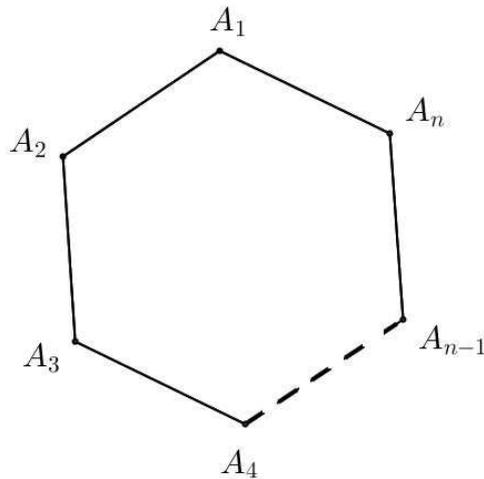
Para encerrarmos essa seção temos como consequência desse teorema um resultado sobre o valor dos ângulos internos de um polígono regular. A saber:

**Teorema 2.3** *A medida dos ângulos internos de um polígono regular de  $n$  lados é*

$$\widehat{A}_i = \frac{(n-2) \cdot 180}{n} = 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

**Demonstração:** Seja  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  um polígono regular com  $n$  lados, como na Figura 2.11 a seguir.

Figura 2.11 – Polígono regular de  $n$  lados



Fonte: adaptado de (COELHO, 2014)

Pelo Teorema 2.2, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é

$$S = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

Como todos os ângulos internos de um polígono regular possuem a mesma medida, temos

$$\widehat{A}_i = \frac{S}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180}{n} = 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right). \quad \blacksquare$$

## 2.4 Ladrilhamentos do Plano Euclidiano

Para o que segue, necessitamos formalizar o processo de ladrilhamento do Plano Euclidiano, e desta forma enunciamos a:

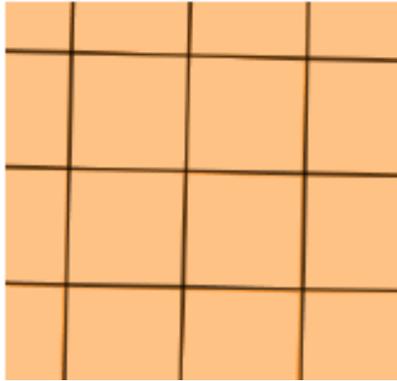
**Definição 2.10 (Ladrilhamento)** *Seja  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots\}$  um conjunto de polígonos. **Ladrilhamento** é o processo de preencher o Plano Euclidiano,  $\mathbb{E}$ , com  $\mathcal{P}$  satisfazendo:*

- (i) a interseção das regiões poligonais entre  $\mathcal{P}_i$  e  $\mathcal{P}_j$  ou é vazia ou é um vértice ou está contida em uma linha poligonal<sup>1</sup>, para todo  $i \neq j$ ,  $\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j \in \mathcal{P}$ , e
- (ii)  $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n = \mathbb{E}$ .

**Definição 2.11** *Ladrilhado* é o resultado final do ladrilhamento.

Na Figura 2.12, temos um exemplo de ladrilhado.

Figura 2.12 – Ladrilhado formado somente por quadrados



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

**Definição 2.12 (Ladrilho)** *Chama-se ladrilho qualquer polígono utilizado em um ladrilhamento.*

Ainda observando a Figura 2.12, vemos que cada ladrilho é um quadrado.

Em muitas referências, usa-se o termo *pavimentação* que é o mesmo que ladrilhamento, assim como *mosaico* que é equivalente ao ladrilhado. Estas definições podem ser encontradas em (BARBOSA, 1993). Para um aprofundamento e ampliamiento do conteúdo até aqui discutido e o que há por vir, sugerimos a leitura e estudo de (SILVA, 2014), (LEITÃO, 2015), (BARBOSA, 1993), (BARROS, 2016), (OLSSON, 1999) e (CASTRO, 2008), (OLIVEIRA, 2015).

<sup>1</sup> Intuitivamente, deve-se entender que a interseção tem **área nula**, como é o caso de vértices ou lados dos polígonos.

### 3 LADRILHADOS COM POLÍGONOS REGULARES

Os primeiros registros com tratamento matemático sobre o ladrilhamento de  $\mathbb{E}$ , foram realizadas em 1600 por Johannes Kepler (1571-1630), matemático e físico alemão. Em seu livro *Harmonia do Mundo*, lançado em 1619, Kepler apresenta algumas características de ladrilhados com polígonos regulares obtidos dos trabalhos de Platão e Arquimedes sobre poliedros.

Neste capítulo será demonstrado, com base nas referências (SILVA, 2014), (COELHO, 2014) e (OLIVEIRA, 2015), que existem apenas onze possíveis modos distintos de ladrilhar o plano, satisfazendo as seguintes condições:

- a) Os ladrilhos são polígonos regulares;
- b) A interseção de dois polígonos é um lado ou um vértice;
- c) A distribuição de polígonos ao redor de cada vértice é sempre a mesma. Esta distribuição será chamada de *molde*.

Este foi o resultado enunciado e provado por Kepler, ou seja, o que iremos fazer aqui é apresentar o:

**Teorema 3.1 (Teorema de Kepler)** *Existem somente onze tipos distintos de ladrilhados formados por polígonos regulares que obedecem as condições a), b) e c).*

Este estudo é dividido em dois casos: ladrilhados regulares e ladrilhados quaserregulares.

#### 3.1 Ladrilhados Regulares

**Definição 3.1 (Ladrilhado Regular)** *Um ladrilhado que obedece os itens a), b) e c), formado por polígonos regulares congruentes entre si é denominado **ladrilhado regular**.*

**Teorema 3.2** *Existem apenas três tipos de ladrilhados regulares.*

**Demonstração:** Considere  $m$  polígonos regulares em torno de um vértice, todos congruentes entre si, de  $n$  lados, em que  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 3$ . Para que qualquer ladrilhado exista, é necessário (mas não suficiente) que a soma dos ângulos ao redor de cada vértice seja igual a  $360^\circ$ . Pelo

Teorema 2.3, sabemos que cada ângulo interno mede  $180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ , donde:

$$m \cdot 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 360 \iff m \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{360}{180} \iff \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{m} \iff$$

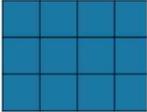
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \iff \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{m} \iff m = \frac{2n}{n-2} \iff m-2 = \frac{4}{n-2}.$$

Desde que  $m-2 \in \mathbb{N}$ , segue que  $n-2$  deve ser divisor de 4. Logo,  $n-2$  só pode ser igual a 1, 2 ou 4. Assim, as únicas possibilidades com  $m$  ladrilhos regulares congruentes com  $n$  lados, por vértice, são:

- $n-2 = 1 \Rightarrow n = 3$  e então  $m-2 = \frac{4}{1} \Rightarrow m = 6$ ;
- $n-2 = 2 \Rightarrow n = 4$  e então  $m-2 = \frac{4}{2} \Rightarrow m = 4$ ;
- $n-2 = 4 \Rightarrow n = 6$  e então  $m-2 = \frac{4}{4} \Rightarrow m = 3$ . ■

A Tabela 3.1, nos mostra quais são os ladrilhos regulares, os moldes a serem utilizados e qual é o ladrilhado obtido.

Tabela 3.1 – Valores de número de ladrilhos por vértice e número de lados de cada ladrilho com seus respectivos moldes e ladrilhados regulares

nº de ladrilhos por vértice (m)	nº de lados do ladrilho (n)	Ladrilho regular	Molde	Ladrilhado
6	3	Triângulo		
4	4	Quadrado		
3	6	Hexágono		

Fonte: elaborado pelo autor (2019).

### 3.2 Ladrilhados Quaserregulares

Nesta seção iremos exibir as outras oito possibilidades de ladrilhar o plano com polígonos regulares não todos congruentes, que verificam os itens a), b) e c).

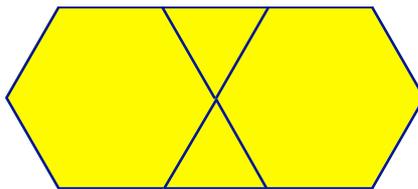
**Definição 3.2 (Ladrilhado Quaserregular)** *Um ladrilhado que satisfaz a), b) e c), formado por ladrilhos regulares, em que ladrilhos de mesmo tipo são congruentes, é denominado **ladrilhado quaserregular**.*

**Definição 3.3 (Configuração)** *A **configuração dos vértices** de um ladrilhado é uma sequência do tipo  $(l_1, l_2, \dots, l_m)$ , indicando que cada vértice tem  $m$  ladrilhos e cada um com  $l_i$  lados, com  $l_i \geq 3$  e  $3 \leq i \leq m$ .*

Por exemplo uma sequência do tipo  $(6, 6, 6)$  indica 3 ladrilhos em torno de um vértice, cada um com 6 lados, como já foi visto na terceira linha da Tabela 3.1 e neste caso todos os ladrilhos são congruentes.

Um exemplo de configuração com ladrilhos não necessariamente todos congruentes, é  $(3, 6, 3, 6)$ , o qual indica dois ladrilhos de 3 lados e dois ladrilhos de 6 lados em torno de cada vértice. Como pode ser visto na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Configuração com ladrilhos não congruentes



3.6.3.6

Fonte: adaptado de (OLIVEIRA, 2015).

Entendido todos esses conceitos podemos então enunciar o:

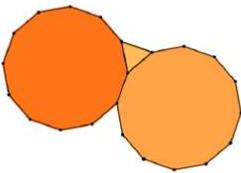
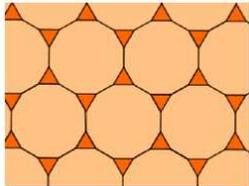
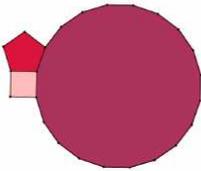
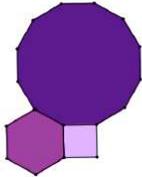
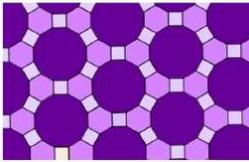
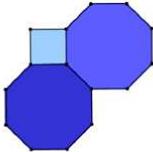
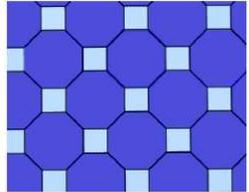
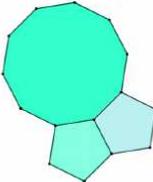
**Teorema 3.3** *Existem apenas oito tipos de ladrilhados quaserregulares.*

A demonstração se faz por uma análise quantitativa de polígonos que estão dispostos ao redor de um vértice do ladrilhado, partindo do princípio de que todos os vértices tem a mesma configuração. Aqui iremos mostrar apenas os oito ladrilhados prontos com suas respectivas

configurações. Para ver como se demonstra este resultado indicamos quaisquer das seguintes referências: (OLIVEIRA, 2015), (SILVA, 2014), (LEITÃO, 2015) e (BARROS, 2016).

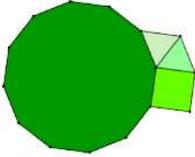
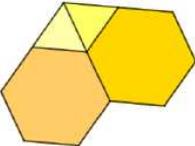
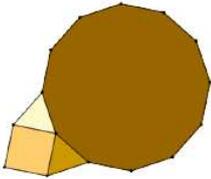
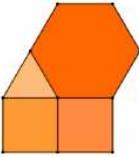
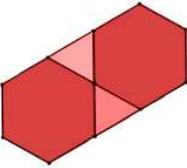
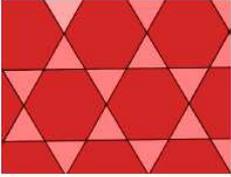
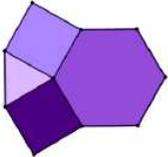
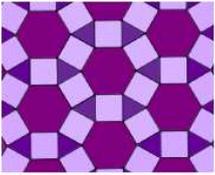
Quando se faz toda essa análise quantitativa, o que se obtém é que a possibilidade se restringe aos casos em que as configurações tem três, quatro ou cinco ladrilhos regulares. De onde se obtém as seguintes possibilidades:

Tabela 3.2 – Moldes, sua representação geométrica e seus respectivos ladrilhados para o caso em que há três tipos de ladrilhos regulares não todos congruentes em torno de cada vértice

Configuração	Molde	Ladrilhado
3.12.12		
4.5.20		Não há.
4.6.12		
4.8.8		
5.5.10		Não há.

Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Tabela 3.3 – Moldes, sua representação geométrica e os respectivos ladrilhados quaserregulares para o caso em que há quatro tipos de ladrilhos regulares em vértices

Configuração	Molde	Ladrilhado
3.3.4.12		Não há.
3.3.6.6.		Não há.
3.4.3.12		Não há.
3.4.4.6		Não há.
3.6.3.6		
3.4.6.4		

Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Tabela 3.4 – Moldes, sua representação geométrica e seus respectivos ladrilhados para o caso em que há cinco tipos de ladrilhos regulares não congruentes em cada vértice

Configuração	Molde	Ladrilhado
3.3.3.3.6		
3.3.3.4.4		
3.3.4.3.4		

Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Do exposto aqui, observamos das tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 que as configurações: (6.6.6); (4.8.8); (4.6.12); (3.12.12); (4.4.4.4); (3.6.3.6); (3.4.6.4); (3.3.4.3.4); (3.3.3.4.4); (3.3.3.3.6) e (3.3.3.3.3.3) são os onze moldes enunciados no Teorema 3.1, deixando-o assim demonstrado.

## 4 LADRILHADOS MONOÉDRICOS

Neste capítulo iremos abordar outra forma com que se pode fazer um ladrilhamento de  $\mathbb{E}$ . Na verdade, existem muitas formas e um relativo avanço matemático no que diz respeito ao ladrilhamento em geral.

Vimos no capítulo anterior que existem exatamente onze ladrilhados que usam polígonos regulares em sua configuração. Aqui iremos introduzir os ladrilhados formados por cópias de um único ladrilho. Faremos a construção para um triângulo e um quadrilátero qualquer. Até os dias atuais sabemos que existem quinze tipos de pentágonos convexos e três de hexágonos convexos, que são ladrilhamentos de  $\mathbb{E}$ . Para maiores detalhes indicamos a literatura (SILVA, 2014), (CASTRO, 2008) e (OLSSON, 1999).

**Definição 4.1 (Ladrilhado Monoédrico)** *Um ladrilhado é dito **monoédrico** quando ele é composto exclusivamente por polígonos que sejam todos congruentes entre si.*

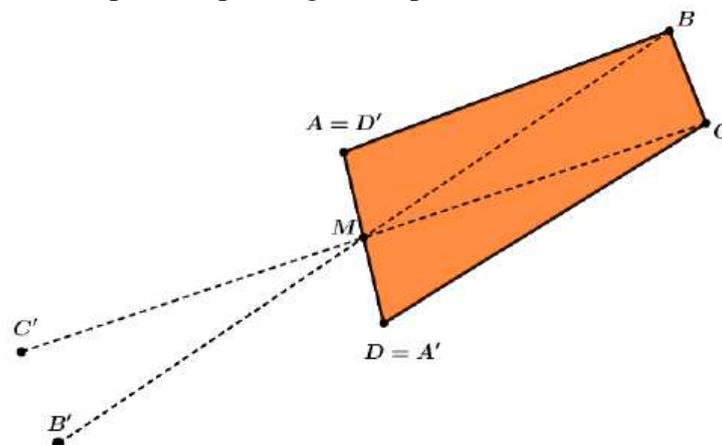
### 4.1 Ladrilhados Monoédricos com Quadriláteros

**Teorema 4.1** *Qualquer quadrilátero, convexo ou não, ladrilha o plano.*

**Demonstração:** Seja  $ABCD$  um quadrilátero e  $M$  ponto médio do lado  $AD$ . A ideia é colocar todos os ângulos de um quadrilátero em torno de um fixado vértice, em nosso caso em torno de  $D$ .

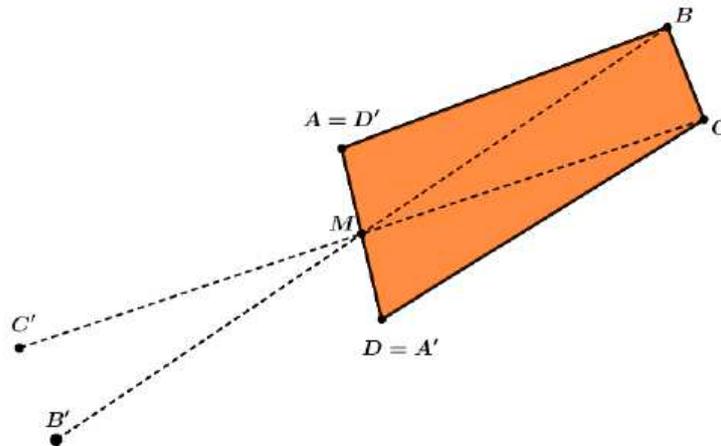
Ao refletir cada um dos vértices  $A, B, C, D$  do quadrilátero por  $M$ , é gerado um novo quadrilátero  $A'B'C'D'$ . Vejamos a construção deste quadrilátero observando as figuras abaixo.

Figura 4.1 – Reflexão do ponto  $B$  por  $M$  gerou o ponto  $B'$



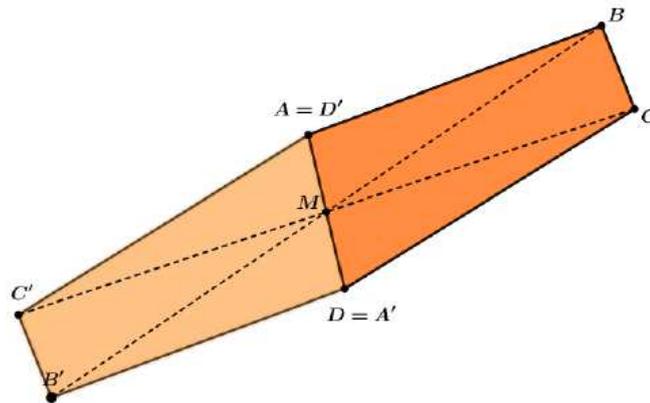
Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Figura 4.2 – Reflexão do ponto  $C$  por  $M$  gerou o ponto  $C'$ . A reflexão do ponto  $A$  por  $M$  é o próprio ponto  $D$  e vice-versa



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Figura 4.3 – Após a reflexão dos quatro pontos  $A, B, C, D$  por  $M$ , tem-se um novo quadrilátero:  $A'B'C'D'$



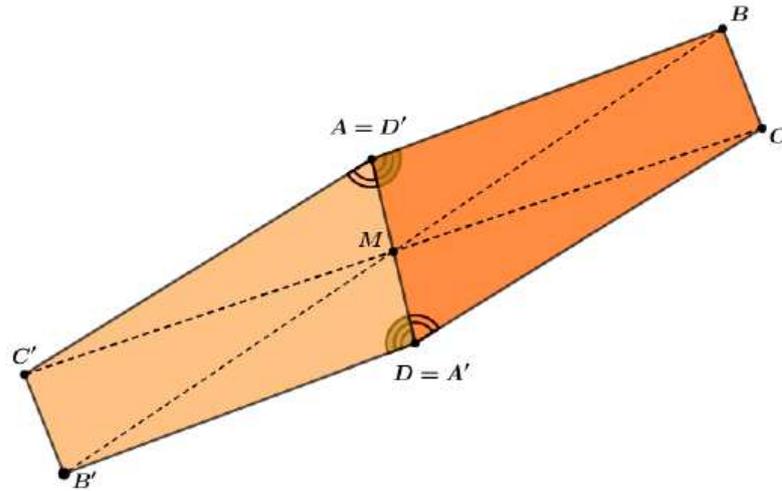
Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Notemos que observando a Figura 4.3:

- (i)  $\overline{CM} \equiv \overline{C'M}$  por construção, assim como  $\overline{BM} = \overline{B'M}$ . Além disso,  $\angle CMB \equiv \angle C'MB'$ , por serem ângulos opostos pelo vértice  $M$ . Logo,  $\triangle CMB \equiv \triangle C'MB'$  pelo caso Lado-Ângulo-Lado;
- (ii) Como,  $M$  é ponto médio de  $\overline{AD}$ , temos que,  $\overline{AM} \equiv \overline{DM}$ . Os ângulos  $\angle BMA$  e  $\angle B'MD$  são opostos pelo vértice e então  $\angle BMA \equiv \angle B'MD$ . Por construção, como já visto, temos que  $\overline{BM} \equiv \overline{B'M}$ . Portanto, pelo caso Lado-Ângulo-Lado,  $\triangle B'MD \equiv \triangle BMA$ ;
- (iii) De modo análogo,  $\triangle DMC \equiv \triangle A'MB'$ .

Assim, de (i), (ii) e (iii), todos os lados e todos os ângulos do quadrilátero  $ABCD$  são congruentes aos lados e aos ângulos correspondentes do quadrilátero  $A'B'C'D'$  e portanto  $ABCD \equiv A'B'C'D'$ , como pode ser visualizado na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Dois ângulos internos do quadrilátero  $ABCD$  destacados em torno do vértice  $D$

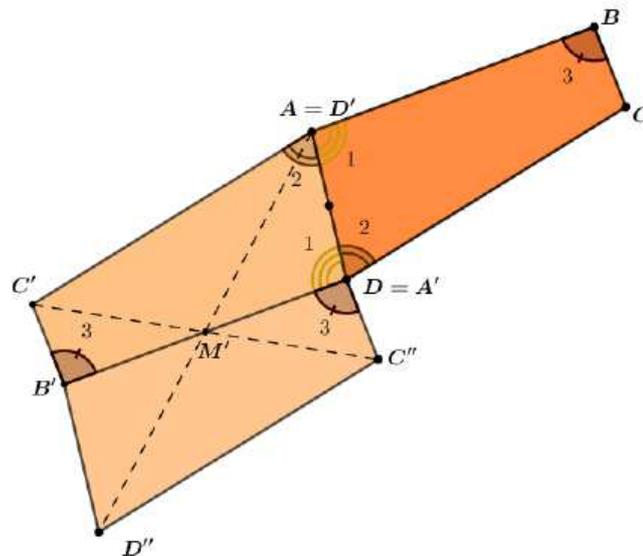


Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Agora, tomemos  $M'$  o ponto médio do segmento  $B'A'$  e façamos reflexão de todos os vértices do quadrilátero  $A'B'C'D'$ , obtendo o quadrilátero  $A''B''C''D''$ , cujo ponto  $B''$  coincide com o ponto  $D$  e  $A''$  coincide com o ponto  $B'$ .

$A''B''C''D''$  é congruente ao quadrilátero  $A'B'C'D'$  pois a argumentação é análoga a anterior. Como a relação de congruência é transitiva, temos que  $A''B''C''D''$  é congruente ao quadrilátero original. Em particular  $\angle C'B'M' \equiv \angle M'B''C'' = \angle M'DC''$ , que denominamos por 3, como pode se ver na Figura 4.5.

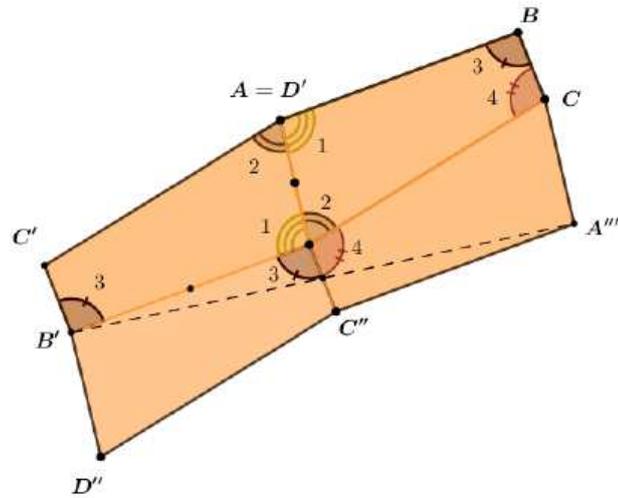
Figura 4.5 – Três ângulos internos do quadrilátero  $ABCD$  em torno do vértice  $D$



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

De modo análogo, é construído o último quadrilátero  $A'''B'''C'''D'''$ , congruente a todos os outros com  $\angle BCD \equiv \angle C'''DC$ , que será denominado 4, conforme a figura Figura 4.6.

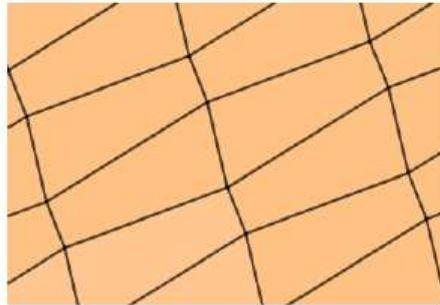
Figura 4.6 – Quatro ângulos internos do quadrilátero  $ABCD$  em torno do vértice  $D$



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Assim, conseguimos colocar todos os ângulos de um quadrilátero incidindo em um mesmo vértice, em nosso caso  $D$  e a soma desses ângulos é  $360^\circ$ . Logo, repetindo esse processo em qualquer vértice, obtemos um ladrilhado do plano como o da Figura 4.7.

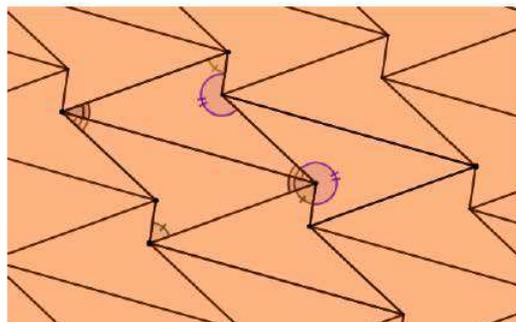
Figura 4.7 – Ladrilhado monoédrico com quadriláteros



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Esta justificativa também é válida para os quadriláteros não convexos. Como pode ser visto na Figura 4.8, podemos construir quadriláteros não convexos congruentes ao inicial.

Figura 4.8 – Ladrilhado monoédrico com quadrilátero não convexo



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

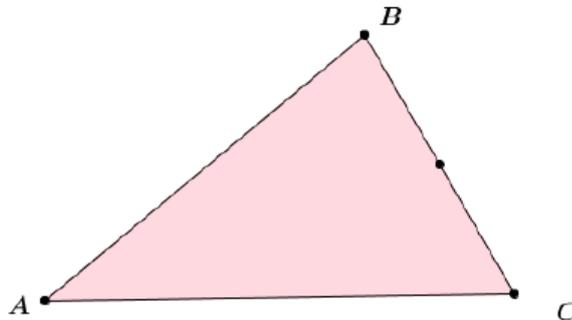
## 4.2 Ladrilhado Monoédricos com Triângulos

**Teorema 4.2** *Qualquer triângulo ladrilha o plano.*

A ideia para demonstrar esse teorema é replicar o triângulo de modo que dois triângulos justapostos formem um quadrilátero.

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer, como ilustrado na Figura 4.9.

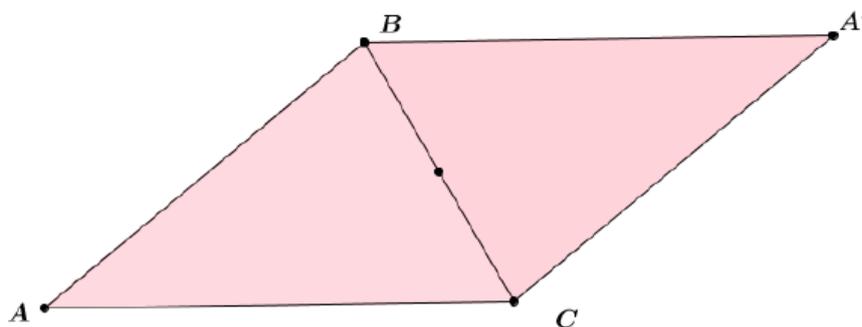
Figura 4.9 – Triângulo  $ABC$



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Rotacionando a figura em torno do ponto médio de um dos lados e uma vez que a rotação preserva os lados e os ângulos de uma figura, são obtidos dois triângulos congruentes. Estes dois triângulos congruentes e justapostos,  $ABC$  e  $A'B'C'$  formam um quadrilátero, como pode ser visto na Figura 4.10.

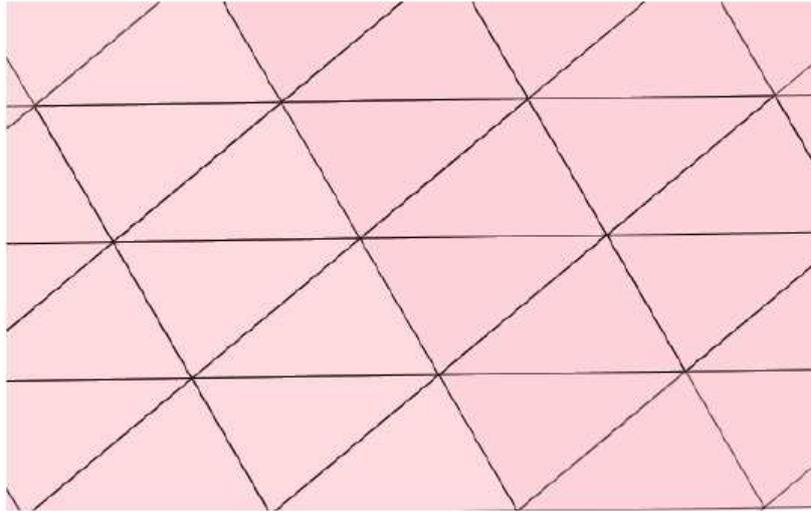
Figura 4.10 – Reflexão do triângulo  $ABC$  pelo ponto médio do segmento  $\overline{BC}$  gerou um triângulo congruente a  $ABC$  denominado  $A'BC$



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Como visto na seção 4.1, todo quadrilátero ladrilha o plano. Como é possível obter um quadrilátero da junção de duas cópias de um triângulo qualquer  $ABC$ , temos que qualquer triângulo, também, ladrilha o plano. desta forma construímos um ladrilhado de  $\mathbb{E}$ , como apresentado na Figura 4.11.

Figura 4.11 – Ladrilhado com o triângulo  $ABC$



Fonte: elaborado pelo autor (2019).

Há muito que se possa estudar sobre ladrilhamentos monoédricos. Sabe-se que é possível ladrilhar monoédricamente  $\mathbb{E}$  com apenas três tipos de hexágonos, além dos regulares. O enunciado e sua respectiva demonstração encontra-se na tese de doutorado de Karl Reinhardt do ano de 1918, escrita em alemão. Parte dos resultados encontrados por Karl foram reescritos, em inglês, por Bellá Bollobás ((CASTRO, 2008), p. 16). Além disso, tão importante quanto saber quais são as possibilidades de ladrilhamento, é saber quando isso não é possível. Uma abordagem matemática sobre polígonos convexos que não podem ladrilhar  $\mathbb{E}$  também é feita em um estudo mais avançado.

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho abordamos o ladrilhamento do plano euclidiano  $\mathbb{E}$  principalmente com polígonos regulares, congruentes ou não. Através de cálculos e observações geométricas, demonstramos um resultado devido a Kepler, que nos diz ser possível ladrilhar  $\mathbb{E}$  exatamente de 11 formas. Além disso, apresentamos dois casos de ladrilhamento do plano que podem ser feitas utilizando apenas triângulos, ou apenas quadriláteros, convexos ou não. Para tal, foram feitas reflexões para se obter congruências. Este estudo introdutório, nos auxilia principalmente a compreender o processo de pavimentações que é comumente utilizado na arquitetura, em obras de arte, além dos mosaicos encontrados na natureza, como escamas de peixes, penas de aves, casco da tartaruga, colmeias de abelhas, abacaxi, pinha, girafas e etc.

O conteúdo aqui desenvolvido propicia o entendimento e aplicação dos conceitos geométricos e algébricos envolvidos no ladrilhamento de  $\mathbb{E}$ , ampliando a ideia de congruência, ângulos de polígonos, isometrias, entre outros. Utilizando conceitos geométricos e cálculos pudemos construir a formalização matemática necessária para compreender esta arte desenvolvida pelo ser humano a mais de 5000 anos. O estudo dos ladrilhamentos pode levar a lugares inimagináveis à primeira vista. Por exemplo, pode-se utilizar o aspecto construtivo do ladrilhamento para que haja uma melhor aprendizagem dos conceitos geométricos, principalmente nos anos finais do ensino fundamental, os quais irão ajudar e auxiliar quando abordados novamente no ensino médio.

Neste trabalho apresentamos parte de possíveis formas de ladrilhar o plano  $\mathbb{E}$ , porém outras possibilidades de ladrilhamentos são estudadas. Muitos resultados matemáticos neste sentido ainda continuam como problemas em aberto. Sabe-se que estes estão intimamente ligados a equações diofantinas, grupos de simetrias, grupos cíclicos, cristalografia, transformações como isometrias e rotações, decodificação criptográfica, etc. Além disso, do ponto de vista abstrato, há uma abordagem sobre ladrilhamentos em geometria não-euclidiana, por exemplo a hiperbólica. São muitas as possibilidades tendo em vista que esse estudo é recente. Para se ter uma ideia, em 2015 dois professores da Universidade de Washington encontraram o décimo quinto tipo de pentágono convexo capaz de ladrilhar o plano de maneira monoédrica, e fizeram isso com o auxílio de computadores. O professor Michaël Rao, do Centro Nacional Francês de Pesquisas Científicas, publicou em seu site uma prévia de demonstração que tenta afirmar, computacionalmente, que existem apenas os quinze ladrilhados conhecidos de  $\mathbb{E}$  por pentágonos convexos. Em dezembro de 2017, a demonstração ainda não tinha sido completamente verificada.

O caminho para o aprendizado passa obrigatoriamente pela vivência e exploração de conceitos, primeiramente de forma concreta (lúdica), posteriormente de forma abstrata. Assim, este trabalho possibilitou o desenvolvimento crítico e investigativo, fomentando e perpetuando a busca por novos conhecimentos.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimo padrões em mosaicos**. 3. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- BARROS, F. C. **Pavimentações do Plano: propostas lúdicas de aula**. 2016. 96 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2016.
- CASTRO, R. F. C. R. **Pavimentações no Plano Euclidiano**. 2008. 52 p. Monografia (Especialista em Matemática) — Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.
- COELHO, A. **Estudo dos Polígonos por Intermédio da Pavimentação do Plano**. 2014. 78 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Departamento de Matemática, Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2014.
- LEITÃO, M. R. **Tesselações no Ensino de Geometria Euclidiana**. 2015. 58 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Departamento de Matemática, Centro de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Juazeiro do Norte, 2015.
- OLIVEIRA, J. F. M. **Pavimentações do Plano Euclidiano**. 2015. 62 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.
- OLSSON, S. M. **Mosaicos**. 1999. 65 p. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.
- SILVA, R. N. **Sobre Pavimentações do Plano Euclidiano**. 2014. 62 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Departamento de Matemática, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2014.