

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Identidades e polinômios centrais graduados para o produto tensorial pela álgebra de Grassmann

por

Jussê Ubaldo da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

Identidades e polinômios centrais graduados para o produto tensorial pela álgebra de Grassmann

por

Jussê Ubaldo da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva (UFCG)

Prof. Dr. Plamen Koshlukov (UNICAMP)

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior (UFCG)

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Julho de 2011

Agradecimentos

A Deus por me conceder mais uma conquista.

Aos meus pais, pelo apoio em todos os momentos difíceis que passei para chegar até aqui.

A minha esposa Laíse, pelo companheirismo, carinho e compreensão nos momentos em que estive ausente e também por ter digitado boa parte deste trabalho.

Aos professores do curso de matemática do Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco - CASVASF, instituição onde fiz graduação, pelos seus ensinamentos, em especial os professores Robson, Jurandir, Alexandre, Audo, Gercinaldo e Licínio.

Aos meus colegas de graduação, pela amizade e o apoio nos momentos de dificuldade.

Aos professores do programa de pós-graduação em matemática da UFCG, em que seus valiosos ensinamentos contribuíram de forma substancial na minha formação, em especial os professores Horácio, Fernanda, Marisa in memória, Claudianor, Aparecido, Ângelo, Henrique e Daniel Cordeiro.

Aos funcionários do departamento de matemática da UFCG pela paciência e sempre estarem prontos a nos ajudar, em especial Salete, D. Severina, D. Argentina in memória, Andressa, Suênia, Luciano e David.

Aos professores da Banca Examinadora Plamen e Diogo, por enriquecer consideravelmente este trabalho com suas sugestões.

Aos meus colegas de mestrado Marciel, Tonhaun, Anaxuel, Cláudio Odair, Kelmem, e Denilson pelas boas experiências compartilhadas e pela preciosa amizade de cada um. Em especial Hildênio, em que tive a oportunidade de dividir a mesma casa durante o mestrado e Luciano pela amizade e pela valiosa ajuda na época em que decidi estudar em Campina Grande.

Ao meu orientador Brandão, exemplo de grande profissional a ser seguido, pelos conselhos e pelas lições de matemática que tive com ele durante o mestrado, que contribuíram consideravelmente em minha formação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais, Ubaldo e Geralda
e à minha esposa Laíse.

Resumo

Sendo G um grupo abeliano e R uma álgebra G -graduada, consideramos no produto tensorial $R \otimes E$ (sendo E a álgebra exterior de dimensão infinita) a $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação natural, obtida a partir da G -gradação de R . Neste trabalho apresentamos resultados que relacionam as identidades graduadas e resultados que relacionam os polinômios centrais graduados das álgebras R e $R \otimes E$. Como aplicação obtemos a PI-equivalência entre as álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$, resultado que é parte do clássico Teorema do Produto Tensorial de Kemer. Também apresentamos descrições das identidades e dos polinômios centrais $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados da álgebra $M_n(E)$, e das identidades e dos polinômios centrais \mathbb{Z}_2 -graduados da álgebra $E \otimes E$, considerando para esta última uma graduação diferente da usual.

Palavras-chave: Identidades graduadas, Polinômios centrais graduados, Álgebra exterior, Produto tensorial.

Abstract

Let G be an abelian group and R a G -graded algebra. We consider in the tensor product $R \otimes E$, where E is the exterior algebra of infinite dimension, the natural $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -grading, obtained from G -grading of R . In this work, we present results that relates the graded identities and also relates the graded central polynomials of the algebras R and $R \otimes E$. As an application we obtain the PI-equivalence between the algebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ and $M_2(E)$, which is a part of the Tensor Product Theorem of Kemer. We also present descriptions of the $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -graded identities and central polynomials of the algebra $M_n(E)$, as well as of the \mathbb{Z}_2 -graded identities and central polynomials of the algebra $E \otimes E$. In the last case, we consider a different grading from the usual one.

Keywords: Graded identities, Graded central polynomials, Exterior algebra, Tensor product.

Conteúdo

Introdução	6
1 Conceitos básicos	10
1.1 Álgebras	10
1.2 Identidades polinomiais	21
1.3 Polinômios multihomogêneos e multilineares	25
1.4 T-espacos e polinômios centrais	29
1.5 Identidades e polinômios centrais graduados	32
2 Identidades polinomiais graduadas de produtos tensoriais pela álgebra de Grassmann	42
2.1 A aplicação ζ_J	42
2.2 Codimensões graduadas de R e $R \otimes E$	48
2.3 Identidades graduadas para $R \otimes E$	51
2.4 Aplicações	59
3 Polinômios centrais graduados para $R \otimes E$	70
3.1 Polinômios centrais de R para $R \otimes E$	70
3.2 Polinômios centrais $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados para a álgebra $M_2(K) \otimes E$	73
3.3 Polinômios centrais $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados para a álgebra $M_n(E)$	79
3.4 Polinômios centrais \mathbb{Z}_2 -graduados para $E \otimes E$	82
Bibliografia	87

Introdução

Algumas álgebras, como por exemplo as comutativas e todas as álgebras de dimensão finita, fazem parte de uma classe de álgebras que são muito interessantes e possuem boas propriedades, a saber, a classe das *álgebras com identidades polinomiais* ou *PI-álgebras*. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ em variáveis não comutativas é uma identidade para uma álgebra A se f se anula quando avaliado em quaisquer elementos de A . Se existe um polinômio não nulo f que é uma identidade para a álgebra A , dizemos que A é uma álgebra com identidade polinomial.

A PI-teoria (ou teoria das álgebras com identidades polinomiais) começou a se desenvolver mais intensamente por volta de 1950, quando foi demonstrado o Teorema de Amitsur-Levitzki (veja [17]), o qual afirma que a álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K satisfaz a identidade *standard* de grau $2n$. Antes disso, alguns matemáticos, tais como Albert, Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Malcev, Dubnov e Ivanov (veja [1], [28], [29], [36], [37], [22]), estudaram a estrutura de anéis (ou álgebras) que satisfazem alguma identidade polinomial.

Aplicações da PI-teoria aparecem em outros ramos da matemática, como por exemplo, as estruturas e teoria combinatória de anéis, projeções geométricas, a teoria das álgebras com divisão de dimensão infinita, etc.

Em PI-teoria, descrever as identidades polinomiais para uma certa álgebra é uma questão central. Sendo A uma álgebra, o conjunto $T(A)$ de todas as identidades polinomiais de A é normalmente chamado de *T-ideal da álgebra A*. Descrever as identidades de A significa encontrar um conjunto gerador (num certo sentido) para $T(A)$. Um tal conjunto gerador é normalmente chamado de *base das identidades de A*. Em 1950, Specht levantou o seguinte questionamento: *Toda álgebra associativa sobre um corpo*

de característica zero possui uma base finita para suas identidades polinomiais?. Este questionamento ficou conhecido como Problema de Specht, e em 1987 Kemer deu uma resposta positiva para este problema (veja [30], [31]). Por outro lado, Kemer não mostra como encontrar tal base finita e o problema continua em aberto até hoje. Atualmente, a descrição das identidades é conhecida apenas para algumas álgebras (veja, por exemplo, [17], [33], [35], [39]).

O que hoje é conhecido como Problema de Specht é algo mais geral e questiona sobre a existência de base finita para as identidades de álgebras de Lie ou álgebras associativas. Sabe-se que a resposta para esta questão é negativa para álgebras de Lie em característica positiva, sendo os primeiros contra-exemplos dados por Vaughan-Lee [46] para álgebras de Lie sobre um corpo de característica 2, e por Drensky [16] para álgebras de Lie sobre um corpo de característica positiva qualquer.

Em seus trabalhos, Kemer estudou as importantes álgebras *T-primas*, que são as álgebras cujos *T*-ideais são *T*-primos. Dizemos que um *T*-ideal I é *T*-primo se a inclusão $I_1 I_2 \subseteq I$, sendo I_1 e I_2 *T*-ideais, implicar em $I_1 \subseteq I$ ou $I_2 \subseteq I$. Kemer mostrou em seus trabalhos que os únicos *T*-ideais *T*-primos não-triviais em característica zero são os *T*-ideais das álgebras $M_n(K)$, $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$, onde E é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e $M_{a,b}(E)$ é a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ que consiste das matrizes que têm na diagonal principal um bloco $a \times a$ e outro $b \times b$ com entradas em E_0 , o centro de E , e na diagonal secundária blocos com entradas em E_1 , a parte anticomutativa de E . Também foi mostrado por Kemer que em característica zero valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} T(M_{a,b}(E) \otimes E) &= T(M_{a+b}(E)), \\ T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) &= T(M_{ac+bd, ad+bc}(E)) \quad \text{e} \\ T(E \otimes E) &= T(M_{1,1}(E)). \end{aligned}$$

Este resultado é conhecido como o *Teorema do Produto Tensorial* de Kemer e do qual segue que o produto tensorial $A \otimes B$ de álgebras *T*-primas é PI-equivalente a uma álgebra *T*-prima. Apesar de muitos trabalhos publicados, ainda pouco se sabe sobre a descrição das identidades das álgebras *T*-primas.

Um conceito muito importante em PI-teoria é o de *identidades polinomiais graduadas*. A princípio, as identidades graduadas foram usadas como uma forte ferramenta

nos trabalhos de Kemer. Por sua importância, elas se tornaram objeto de estudos independentes.

Ao longo das últimas décadas, surgiram vários trabalhos importantes no sentido de descrever as identidades de algumas álgebras T -primas. Por exemplo, Di Vincenzo [21] descreveu as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas para $M_2(K)$ e $M_{1,1}(E)$, em característica zero, e Koshlukov e Azevedo, em [7], generalizaram esta descrição para corpos infinitos e de característica diferente de 2. Em [47] e [48] Vasilovsky determinou uma base das identidades \mathbb{Z} -graduadas e \mathbb{Z}_n -graduadas para a álgebra $M_n(K)$, considerando K um corpo de característica zero. Estes resultados de Vasilovsky foram generalizados por Azevedo nos artigos [5] e [4] para um corpo K infinito.

Um outro conceito de grande importância, e de estreita relação com o de identidade polinomial, e o de *polinômio central*. Dizemos que $f(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio central para uma álgebra A , se f avaliado em quaisquer elementos de A resulta em um elemento do centro da álgebra A . Sabe-se que o espaço $C(A)$ de todos os polinômios centrais da álgebra A é um T -espaço (conceito que será apresentado no texto). Assim como a descrição das identidades polinomiais de uma álgebra, a descrição de seus polinômios centrais, ou seja, a determinação de um conjunto gerador para o T -espaço $C(A)$, é uma questão importante na PI-teoria.

Assim como temos o conceito de identidade polinomial graduada, temos naturalmente o de *polinômio central graduado*. A tarefa de descrever os polinômios centrais para as álgebras T -primas não é simples, e é conhecida apenas para $M_2(K)$ (veja Okhitin [38] e Colombo e Koshlukov [15]) e para E (veja [12]). Daí a motivação de se estudar polinômios centrais graduados, cuja descrição é mais fácil de ser feita. Por exemplo, álgebras $M_n(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ têm seus polinômios centrais graduados descritos em [10] e [11].

Além dos trabalhos de descrição das identidades e dos polinômios centrais graduados de álgebras T -primas, outros trabalhos merecem destaque, como por exemplo o artigo [20] de Di Vincenzo, onde é feito um estudo sobre codimensões e cocaracteres de álgebras graduadas. Vale também citar os artigos [21], de Di Vincenzo e Nardoza, e [2], de Alves, Brandão e Koshlukov, nos quais temos especial interesse. No primeiro, foram desenvolvidas técnicas que relacionam as identidades polinomiais e codimensões graduadas de uma álgebra com as identidades polinomiais e codimensões graduadas de

seu produto tensorial pela álgebra exterior. No segundo, foi estabelecida uma relação análoga para polinômios centrais graduados.

Este trabalho está organizado em 3 capítulos, sendo que no primeiro capítulo são apresentados os resultados e os conceitos básicos necessários ao seu desenvolvimento. No segundo capítulo obtemos as identidades $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas da álgebra $R \otimes E$ a partir das identidades G -graduadas da álgebra R , onde E é a álgebra de Grassmann, e como aplicação obtemos a PI-equivalência das álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ em característica zero, resultado que é parte do clássico *Teorema do Produto Tensorial de Kemer*. No terceiro capítulo, apresentamos um resultado para obter polinômios centrais $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados da álgebra $R \otimes E$ a partir de polinômios centrais da álgebra G -graduada R . O método é análogo ao desenvolvido no segundo capítulo para a obtenção de identidades $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas da álgebra $R \otimes E$. Como consequência, obtemos os polinômios centrais $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados para a álgebra $M_2(E)$, quando K é infinito e $\text{char}K \neq 2$, e os polinômios centrais $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados para a álgebra $M_n(E)$, quando $\text{char}K = 0$. Determinamos também as identidades e polinômios centrais \mathbb{Z}_2 -graduados para $E \otimes E$, considerando uma \mathbb{Z}_2 -gradação diferente da usual.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Neste capítulo são dados os principais conceitos e resultados necessários ao desenvolvimento e compreensão de nosso trabalho. Primeiramente, falaremos de álgebras, como por exemplo a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) e de Lie, como também as álgebras associativas livres. Falaremos também sobre identidades polinomiais, T -ideais, polinômios centrais, T -espaços, álgebras graduadas e identidades e polinômios centrais graduados.

A menos de alguma menção em contrário, K sempre denotará um corpo e todas as álgebras e espaços vetoriais serão sobre K .

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1 *Dado um corpo K , uma K -álgebra é um par $(A, *)$, onde A é um espaço vetorial e $*$ é uma operação em A que é bilinear, ou seja, $*$: $A \times A \rightarrow A$ satisfaz:*

$$(i) \quad a * (b + c) = a * b + a * c$$

$$(ii) \quad (a + b) * c = a * c + b * c$$

$$(iii) \quad (\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Na definição acima, ” $*$ ” é chamada de *produto* ou *multiplicação*. Para simplificar a notação, vamos denotar a K -álgebra $(A, *)$ por A , ficando o produto subentendido, e para $a, b \in A$, vamos denotar $a * b$ simplesmente por ab . Também por simplicidade, vamos usar a expressão *álgebra* ao invés de K -álgebra.

Dizemos que um subconjunto β é uma base da álgebra A se β é uma base de A como espaço vetorial e definimos a *dimensão* de A como sendo a dimensão de A como espaço vetorial.

Definição 1.1.2 Dizemos que uma álgebra A é:

- (i) **Associativa** se o produto de A é associativo, ou seja, se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in A$.
- (ii) **Comutativa** se o produto é comutativo, ou seja se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$.
- (iii) **Unitária (ou com unidade)** se o produto de A possui elemento neutro, ou seja, se existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$.

Observação 1.1.3 (i) Se A é uma álgebra com unidade, identificamos naturalmente o elemento $\lambda 1$ de A com λ , para $\lambda \in K$, e o conjunto $\{\lambda 1 \mid \lambda \in K\}$ com K .

(ii) Se A é uma álgebra associativa, note que $(A, +, \cdot)$, onde ” $+$ ” e ” \cdot ” são a soma e o produto da álgebra A , respectivamente, é um anel. Se a álgebra A possui unidade, então $(A, +, \cdot)$ é um anel com unidade.

Vejamos agora alguns exemplos importantes de álgebras.

Exemplo 1.1.4 Para $n \in \mathbb{N}$, o espaço $M_n(K)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em K , munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade de dimensão n^2 . Nesta álgebra é importante destacar as **matrizes unitárias** E_{ij} , para $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é matriz cuja única entrada não nula é 1 na i -ésima linha e j -ésima coluna. É fácil ver que essas matrizes formam uma base para $M_n(K)$.

Mais geralmente, se A é uma álgebra, consideremos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas matrizes $n \times n$ com entradas em A . Considerando o produto em $M_n(A)$, análogo ao produto de matrizes com entradas em K , temos então uma estrutura de álgebra em $M_n(A)$.

Exemplo 1.1.5 *Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$. Definimos a álgebra de **Grassmann** (ou **álgebra exterior**) de V , denotada por $E(V)$ (ou simplesmente por E), como sendo a álgebra associativa e unitária com base $\{1, e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}\dots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \geq 1\}$ e cujo produto é definido pelas relações:*

$$e_i^2 = 0 \quad e \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad (1.1)$$

para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Destacamos em E os subespaços vetoriais E_0 , gerado pelo conjunto

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m} \mid \text{com } m \text{ par}\}$$

e E_1 , gerado pelo conjunto

$$\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} \mid \text{com } k \text{ ímpar}\}$$

Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. De (1.1) segue que

$$(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k})(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})$$

para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$, e assim podemos concluir que $ax = xa$, para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E_1$. Sendo $\text{char}K = 2$, vê-se facilmente que E é uma álgebra comutativa.

Tomando agora E' como sendo a álgebra com base

$$\{e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}\dots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \geq 1\}$$

temos que E' não tem unidade e é chamada de **álgebra exterior sem unidade**.

Definição 1.1.6 *Dizemos que uma álgebra A é uma **álgebra de Lie** se valem:*

(i) $x^2 = xx = 0$ (anticomutatividade)

(ii) $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ (identidade de Jacobi)

Para quaisquer $x, y, z \in A$. Note que (i) implica em $xy = -yx$ para quaisquer $x, y \in A$. De fato,

$$0 = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = xy + yx$$

e daí obtemos $xy + yx = 0$.

Dizemos que uma álgebra de Lie é **abeliana** se $xy = 0$ para quaisquer $x, y \in A$.

Exemplo 1.1.7 Seja $Sl_n(K) = \{X \in M_n(K) \mid \text{tr}X = 0\}$. Temos que $Sl_n(K)$ é um subespaço de dimensão $n^2 - 1$ de $M_n(K)$. Considerando agora o produto

$$\begin{aligned} [,] : Sl_n(K) \times Sl_n(K) &\longrightarrow Sl_n(K) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = XY - YX \end{aligned}$$

temos que $(Sl_n(K), [,])$ é uma álgebra de Lie. De fato, veja que $[X, X] = 0$ e

$$\begin{aligned} &[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = \\ &= [X, Y]Z - Z[X, Y] + [Y, Z]X - X[Y, Z] + [Z, X]Y - Y[Z, X] = \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + \\ &\quad + XZY + ZXY - XZY - YZX + YXZ = 0 \end{aligned}$$

Proposição 1.1.8 Sejam A uma álgebra, $a, b \in A$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Então:

(i) $0a = a0 = 0$.

(ii) $(-a)b = a(-b) = -ab$ e $(-a)(-b) = ab$.

(iii) $(\lambda_1 a)(\lambda_2 b) = \lambda_1 \lambda_2 ab$.

(iv) Se $A \neq \{0\}$ e A possui unidade, então $1 \neq 0$.

Prova. Os itens (i), (ii) e (iii), provam-se facilmente usando a Definição 1.1.1. Provaremos apenas o item (iv). Como $A \neq \{0\}$, existe $a \in A$ tal que $a \neq 0$. Suponhamos por contradição que $1=0$. Então $0 = 0a = 1a = a$, contradição! Portanto $1 \neq 0$. ■

Dados uma certa álgebra A e os subespaços vetoriais V e W de A , definimos o produto VW como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{xy \mid x \in V, y \in W\}$. Se $a \in A - \{0\}$, dizemos que a é um *divisor de zero* em A se existe algum elemento não nulo $b \in A$ tal que $ab = 0$ ou $ba = 0$. Dizemos que um elemento $x \in A$ é *idempotente* se $x^2 = x$. Note que se A possui unidade e $x \in A - \{0, 1\}$ é um elemento idempotente, então x é um divisor de zero em A , pois $x^2 = x$ implica em $x(x - 1) = 0$.

Sendo A uma álgebra associativa e $a, b \in A$, definimos o *comutador* $[a, b]$ e o *produto de Jordan* $a \circ b$ como sendo

$$[a, b] = ab - ba \quad e \quad a \circ b = ab + ba.$$

Definimos também o *comutador de comprimento n* como sendo $[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$ para $a_i \in A$. Para quaisquer $a, b, c \in A$ vale

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \quad (1.2)$$

De fato,

$$\begin{aligned} [ab, c] &= (ab)c - c(ab) = \\ &= (ab)c - a(cb) + (ac)b - c(ab) = \\ &= a(bc - cb) + (ac - ca)b = a[b, c] + [a, c]b \end{aligned}$$

Mais geralmente usando indução e (1.2), é possível mostrar que

$$[a_1 a_2 \dots a_n, c] = \sum_{i=1}^n a_1 \dots a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} \dots a_n \quad (1.3)$$

De fato, segue de (1.2) que para $n = 2$ é válido. Supondo verdade para n , temos

$$\begin{aligned} [(a_1 a_2 \dots a_n) a_{n+1}, c] &= \\ &= a_1 a_2 \dots a_n [a_{n+1}, c] + [a_1 a_2 \dots a_n, c] a_{n+1} = \\ &= a_1 a_2 \dots a_n [a_{n+1}, c] + \sum_{i=1}^n a_1 \dots a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} \dots a_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_1 \dots a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} \dots a_n a_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora definimos o *comutador* de A , denotado por $[A, A]$, como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{[x, y] \mid x, y \in A\}$. Observe que A é comutativa se, e somente se, $[A, A] = 0$.

Definição 1.1.9 *Seja A uma álgebra associativa. Dizemos que:*

- (i) *Um elemento $a \in A$ é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. O menor $n \in \mathbb{N}$ que satisfaz $a^n = 0$ é chamado de índice de nilpotência de a .*

- (ii) A é uma álgebra nil se todo elemento de A é nilpotente.
- (iii) A é uma álgebra nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^{n+1} = 0$, ou seja, $x_1 x_2 \dots x_{n+1} = 0$ para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in A$. O menor $n \in \mathbb{N}$ que satisfaz $A^{n+1} = 0$ é chamado de índice de nilpotência de A .

Observe que se A é uma álgebra nilpotente, então A é nil. A recíproca, porém, não é verdadeira, e para ver isto basta observar a álgebra exterior sem unidade E' (Veja o Exemplo 1.1.5). Claramente uma álgebra nil não pode ter unidade.

Exemplo 1.1.10 Considere a K -álgebra

$$\mathcal{N}_3(K) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid a, b, c \in K \right\}$$

Não é difícil ver que esta álgebra é nilpotente de índice 2. Em geral, a álgebra $\mathcal{N}_m(K)$ de todas as matrizes $m \times m$ triangulares superiores com diagonal nula é nilpotente de índice $m - 1$.

Definição 1.1.11 Seja A uma álgebra. Dizemos que:

- (i) Um subespaço vetorial B de A é uma **subálgebra** de A se $1 \in B$ e B é multiplicativamente fechado, ou seja, se $b_1 b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$.
- (ii) Um subespaço vetorial I de A é um **ideal** (bilateral) de A se $ax, xa \in I$ para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$.

Observação 1.1.12 Sendo A uma álgebra, temos que uma subálgebra B de A é por si uma álgebra, cuja multiplicação é a restrição da multiplicação de A a B .

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 1.1.13 Considere a álgebra exterior E (Exemplo 1.1.5). Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos o subespaço E_n de E gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$. Temos que E_n é uma subálgebra de E chamada álgebra exterior do espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Observe que $\dim E_n = 2^n$.

Exemplo 1.1.14 Dada uma álgebra A , considere o conjunto

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}.$$

$Z(A)$ é chamado de **centro** de A e é um subespaço vetorial de A . Quando A é associativa temos que $Z(A)$ é uma subálgebra de A . É sabido que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n \times n} \mid \lambda \in K\}$ (matrizes escalares).

Quanto à álgebra de Grassmann (ver Exemplo 1.1.5) podemos dizer que se $\text{char}K \neq 2$, tem-se $Z(E) = E_0$.

Vamos definir agora *álgebra quociente*. Sejam A uma álgebra e I um ideal de A . Consideremos o espaço vetorial quociente A/I . Temos $A/I = \{a + I \mid a \in A\}$, sendo $a + I = \{a + x \mid x \in I\}$. Para cada $a \in A$, vamos denotar o elemento $a + I$ por \bar{a} . Temos que as operações de soma e produto por escalar são definidas por

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad e \quad \lambda \bar{a} = \overline{\lambda a}$$

para $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Consideremos agora o produto

$$\begin{aligned} \cdot : A/I \times A/I &\longrightarrow A/I \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} \end{aligned}$$

Este produto está bem definido e é bilinear. Portanto A/I , munido dele, é uma álgebra chamada de **álgebra quociente de A por I** .

Daremos agora a definição de subálgebra gerada.

Definição 1.1.15 Seja A uma álgebra associativa com unidade e S um subconjunto de A . Definimos:

- (i) A subálgebra de A gerada por S , denotada por $K\langle S \rangle$, como sendo a intersecção de todas as subálgebras de A que contêm $S \cup \{1\}$.
- (ii) O ideal de A gerado por S como sendo a intersecção de todos os ideais de A que contêm S

Se $A = K\langle S \rangle$, então dizemos que S gera A como álgebra ou que S é um conjunto gerador de A como álgebra. Uma caracterização de subálgebra gerada e ideal gerado por um conjunto de uma algebra associativa com unidade é dada a seguir.

Observação 1.1.16 *Sejam A uma álgebra associativa com unidade e S um subconjunto não vazio de A . Então:*

- (i) *A subálgebra de A gerada por S coincide com o subespaço de A gerado pelo conjunto $\{1, s_1, s_2, \dots, s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$.*
- (ii) *O ideal de A gerado por S coincide com o subespaço de A gerado por $\{asb \mid s \in S, a, b \in A\}$.*

Exemplo 1.1.17 *Considere a subálgebra E_n (veja o Exemplo 1.1.13), da álgebra exterior E . Temos que $E_n = K\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$.*

Vamos definir agora *homomorfismo de álgebras*.

Definição 1.1.18 *Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \rightarrow B$ é um **homomorfismo de álgebras** se*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

para todo $x, y \in A$. Quando A e B possuírem unidade, vamos exigir também que $\varphi(1_A) = 1_B$.

Se $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, dizemos que φ é:

- Um **mergulho** (ou **imersão**, ou ainda **monomorfismo**), se φ é injetora.
- Um **epimorfismo**, se φ é sobrejetiva.
- Um **isomorfismo**, se φ é biunívoca. Quando existe um isomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$, dizemos que A e B são álgebras **isomorfas** e denotamos por $A \simeq B$. Observe também que $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ também é um isomorfismo.
- Um **endomorfismo** de A , se φ é um homomorfismo de A em A .
- Um **automorfismo** de A , se φ é um endomorfismo bijetivo de A .

E ainda, denotamos por:

- (i) $\text{End } A$ o conjunto de todos os endomorfismos de A .

- (ii) $\text{Aut } A$ o conjunto de todos os automorfismos de A .
- (iii) $\ker\varphi$ o núcleo de φ , ou seja, $\ker\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$.
- (iv) $\text{Im}\varphi$ a imagem de φ , ou seja, $\text{Im}\varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$.

Não é difícil ver que $\ker\varphi$ é um ideal de A e que $\text{Im}\varphi$ é uma subálgebra de B .

Exemplo 1.1.19 *Seja A uma álgebra com unidade, consideremos a aplicação*

$$\begin{aligned}\psi : K &\longrightarrow A \\ \lambda &\longmapsto \psi(\lambda) = \lambda 1_A\end{aligned}$$

Temos que ψ é um mergulho de K em A e assim K é isomorfo a $\text{Im}\psi = \{\lambda 1_A \mid \lambda \in K\}$, donde $\text{Im}\psi$ é um corpo. Daí, a identificação natural entre K e $\{\lambda 1_A \mid \lambda \in K\}$

Exemplo 1.1.20 *Seja A uma álgebra e I um ideal de A . A aplicação*

$$\begin{aligned}\psi : A &\longrightarrow A/I \\ a &\longmapsto \bar{a} = a + I\end{aligned}$$

*que é chamada de **projeção canônica**, é um epimorfismo de álgebras.*

Exemplo 1.1.21 (Teorema Fundamental dos Homomorfismos) *Sejam A e B álgebras e $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo, então a aplicação*

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} : A/\text{Ker}\varphi &\longrightarrow \text{Im}\varphi \\ \bar{a} &\longmapsto \bar{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a)\end{aligned}$$

é bem definida e é um isomorfismo de álgebras.

Exemplo 1.1.22 *Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão finita n e o espaço $\mathcal{L}(V)$ de todos os operadores lineares de V em V . O espaço vetorial $\mathcal{L}(V)$, munido da composição, é uma álgebra associativa e unitária sobre K . Fixada um base ordenada β de V , temos que a aplicação*

$$\begin{aligned}\psi_\beta : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow M_n(K) \\ T &\longmapsto \psi_\beta(T) = [T]_\beta\end{aligned}$$

é um isomorfismo de álgebras. Sabe-se que todo isomorfismo de $\mathcal{L}(V)$ em $M_n(K)$ é desta forma, sendo este fato consequência do Teorema Skolem-Noether (ver [27], Teorema 4.3.1).

Sejam V e W K -espaços vetoriais. Definimos o **produto tensorial** de V e W , denotado por $V \otimes W$, como sendo o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$, onde os elementos $v \otimes w$ são chamados de **tensores** e satisfazem

$$(v_1 + v_2) \otimes w = (v_1 \otimes w) + (v_2 \otimes w)$$

$$v \otimes (w_1 + w_2) = (v \otimes w_1) + (v \otimes w_2)$$

$$(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w)$$

$$v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w)$$

para quaisquer $v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W$ e $\lambda \in K$. Concluimos então que todos os elementos de $V \otimes W$ são da forma $\sum_{i=1}^n (v_i \otimes w_i)$, com $v_i \in V$ e $w_i \in W$.

Teorema 1.1.23 (Propriedade universal) *Sejam V, W e U espaços vetoriais sobre o corpo K e $f : V \times W \rightarrow U$ uma aplicação bilinear. Então existe uma única transformação linear $T_f : V \otimes W \rightarrow U$ tal que $T_f(v \otimes w) = f(v, w)$ para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.*

Observação 1.1.24 *Sejam V, W e U espaços vetoriais sobre o corpo K , valem:*

(i) $K \otimes V \simeq V$.

(ii) $K^n \otimes V \simeq V^n$.

(iii) $V \otimes W \simeq W \otimes V$.

(iv) Se $v \in V$ e $w \in W$, então: $v \otimes w \neq 0 \iff v \neq 0$ e $w \neq 0$.

(v) $(V \otimes W) \otimes U \simeq V \otimes (W \otimes U)$.

(vi) Se $S_1 = \{v_i \mid i \in I\}$ e $S_2 = \{w_j \mid j \in J\}$ são subconjuntos LI de V e W , respectivamente, então $S = \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ é um conjunto LI de $V \otimes W$.

(vii) Sejam $X_1 = \{v_i \mid i \in I\}$ e $X_2 = \{w_i \mid i \in I\}$ subconjuntos de vetores não nulos de V e W , respectivamente. Se X_1 ou X_2 é LI, então $X = \{v_i \otimes w_i \mid i \in I\}$ é um subconjunto LI de $V \otimes W$.

(viii) Se $\beta_1 = \{v_i \mid i \in I\}$ e $\beta_2 = \{w_j \mid j \in J\}$ são bases de V e W , respectivamente, então $\beta = \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ é uma base de $V \otimes W$.

(ix) se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, então $\dim (V \otimes W) = nm$.

Estas propriedades são clássicas e podem ser demonstradas com o uso da propriedade universal.

Sejam A e B K -álgebras e considere o produto bilinear definido por

$$\begin{aligned} \cdot : (A \otimes B) \times (A \otimes B) &\longrightarrow A \otimes B \\ ((a_1 \otimes b_1), (a_2 \otimes b_2)) &\longmapsto (a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{aligned}$$

Segue da propriedade universal que esse produto é bem definido. O espaço vetorial $A \otimes B$, munido deste produto, é uma álgebra chamada de **produto tensorial das álgebras** A e B . Para maiores detalhes sobre o estudo de produto tensorial de espaços vetoriais e de álgebras, veja [14], Capítulo 2.

Exemplo 1.1.25 Sendo A uma K -álgebra, a transformação linear $T : M_n(K) \otimes A \longrightarrow M_n(A)$ tal que $T(E_{ij} \otimes a) = E_{ij}(a)$, onde $E_{ij}(a)$ é a matriz de $M_n(A)$ que tem a na entrada ij e 0 nas demais, é um isomorfismo de álgebras. De fato, primeiramente note que $\{E_{ij}(a) \mid 1 \leq i, j \leq n, a \in \beta\}$, onde β é uma base de A , é uma base de $M_n(A)$ como espaço vetorial. Considere agora a transformação linear

$$\begin{aligned} S : M_n(A) &\longrightarrow M_n(K) \otimes A \\ E_{ij}(a) &\longmapsto S(E_{ij}(a)) = E_{ij} \otimes a \end{aligned}$$

Note que

$$S(T(E_{ij} \otimes a)) = S(E_{ij}(a)) = E_{ij} \otimes a$$

e

$$T(S(E_{ij}(a))) = T(E_{ij} \otimes a) = E_{ij}(a).$$

Daí, $S = T^{-1}$ e assim T é bijetiva.

Mostremos agora que T é um homomorfismo de álgebras. Primeiramente note que

$$E_{ij}(a)E_{st}(b) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq s \\ E_{it}(ab), & \text{se } j = s \end{cases}$$

Se $j \neq s$ temos

$$\begin{aligned} T((E_{ij} \otimes a)(E_{st} \otimes b)) &= T(E_{ij}E_{st} \otimes ab) = T(0 \otimes ab) = 0 = \\ &= E_{ij}(a)E_{st}(b) = T(E_{ij}(a))T(E_{st}(b)) \end{aligned}$$

Se $j = s$ tem-se que,

$$\begin{aligned} T((E_{ij} \otimes a)(E_{st} \otimes b)) &= T(E_{ij}E_{st} \otimes ab) = T(E_{it} \otimes ab) = \\ &= E_{it}(ab) = E_{ij}(a)E_{st}(b) = T(E_{ij}(a))T(E_{st}(b)) \end{aligned}$$

Portanto $M_n(K) \otimes A \simeq M_n(A)$ como álgebras .

Teorema 1.1.26 *Se A e B são duas álgebras com unidade, então*

$$Z(A \otimes B) = Z(A) \otimes Z(B).$$

Prova. É imediato que $Z(A) \otimes Z(B) \subseteq Z(A \otimes B)$, pois, dado $a \in Z(A) \otimes Z(B)$ com $a = a_1 \otimes a_2$, temos $a_1 \in Z(A)$ e $a_2 \in Z(B)$. Considerando agora $w \in A \otimes B$ tal que $w = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, temos

$$\begin{aligned} aw &= (a_1 \otimes a_2) \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n (a_1 \otimes a_2)(x_i \otimes y_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_1 x_i \otimes a_2 y_i = \sum_{i=1}^n x_i a_1 \otimes y_i a_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) (a_1 \otimes a_2) = wa. \end{aligned}$$

Assim $Z(A) \otimes Z(B) \subseteq Z(A \otimes B)$.

Seja $\alpha \in Z(A \otimes B)$, com $\alpha \neq 0$. Existem $a_1, \dots, a_n \in A$ não nulos e $b_1, \dots, b_n \in B$ linearmente independentes, tais que $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$. Dado $a \in A$, temos que $(a \otimes 1_B)\alpha = \alpha(a \otimes 1_B)$, e daí $(a \otimes 1_B)(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i) = (\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i)(a \otimes 1_B)$. Logo, $\sum_{i=1}^n a a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i a \otimes b_i$. Portanto, $\sum_{i=1}^n [a, a_i] \otimes b_i = 0$. Pela Observação 1.1.24 (item-(vii)), temos $[a, a_i] = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Daí, temos $a_i \in Z(A)$ e portanto $\alpha \in Z(A) \otimes B$. Analogamente tomando $x_1, \dots, x_m \in Z(A)$, linearmente independentes, e $y_1, \dots, y_m \in B$, não nulos, tais que $\alpha = \sum_{i=1}^m x_i \otimes y_i$, concluímos o resultado. ■

1.2 Identidades polinomiais

De agora em diante, a menos de menção em contrário, as álgebras consideradas são todas associativas e unitárias.

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. Uma **palavra** em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, com $n \geq 0$, sendo n o **tamanho** da palavra. Dizemos que $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}$ quando $n = m$ e $x_{i_1} = x_{j_1}, x_{i_2} = x_{j_2}, \dots, x_{i_n} = x_{j_n}$. Denote por 1 a **palavra vazia** (palavra de tamanho zero) e por $S(X)$ o conjunto de todas as palavras em X e considere $S_0(X) = S(X) - \{1\}$.

Vamos considerar agora $K\langle X \rangle$ como sendo o K -espaço vetorial com base X . Assim, os elementos de $K\langle X \rangle$ que são chamados de **polinômios**, são somas (formais) de **monômios**, que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X .

Consideremos agora em $K\langle X \rangle$ a multiplicação definida por

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}.$$

Munido deste produto, $K\langle X \rangle$ é uma álgebra associativa, pois este produto é associativo e com elemento neutro, que é a palavra vazia 1 .

Sejam A uma álgebra e $h : X \rightarrow A$ uma aplicação arbitrária, de modo que $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Considerando a aplicação linear $\varphi_h : K\langle X \rangle \rightarrow A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$, temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. Dizemos então que $K\langle X \rangle$ é a **álgebra associativa livre com unidade, livremente gerada por X** .

Dado $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$, denotemos por $f(a_1, \dots, a_n)$ a imagem de f por φ_h . Note que $f(a_1, \dots, a_n)$ é um elemento de A , obtido substituindo-se x_i por a_i em f .

Definição 1.2.1 *Seja A uma álgebra. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ (ou a expressão $f(x_1, \dots, x_n) = 0$) é dito ser uma **identidade polinomial** (ou simplesmente **identidade**) de A se, $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \dots, a_n \in A$.*

Observamos então que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é uma identidade de A se, e somente se, f pertence ao núcleo de todos os homomorfismos de $K\langle X \rangle$ em A . De fato, primeiramente suponha que f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X \rangle$ em A . Então dados $a_1, \dots, a_n \in A$ e uma aplicação $h : X \rightarrow A$ tal que $h(x_i) = a_i$, para $i = 1, \dots, n$, como $K\langle X \rangle$ é livremente gerada por X , existe um único homomorfismo $\varphi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ tal que $\varphi|_X = h$, e daí temos

$$f(a_1, \dots, a_n) = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = \varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Logo $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é uma identidade de A . Reciprocamente, suponha que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é uma identidade de A . Então dado um homomorfismo arbitrário $\varphi : K\langle X \rangle \rightarrow A$, temos

$$\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = 0$$

pois $\varphi(x_i) \in A$, para $i = 1, \dots, n$, e assim, como φ foi tomado arbitrário, temos que f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X \rangle$ em A .

Denotando por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A , dizemos que A é uma **álgebra com identidade polinomial** ou **PI-álgebra** se $T(A) \neq \{0\}$. Considerando as álgebras A_1 e A_2 , dizemos que A_1 e A_2 são **PI-equivalentes** se $T(A_1) = T(A_2)$.

Exemplo 1.2.2 *Considerando A uma álgebra comutativa, não é difícil ver que o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade de A .*

Exemplo 1.2.3 *O polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann E . Para verificar isso, basta observar que $[a, b] \in E_0 = Z(E)$, para quaisquer $a, b \in E$.*

Exemplo 1.2.4 *Considere o polinômio*

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$$

onde S_n é o grupo simétrico sobre n elementos, $\varepsilon_\sigma = 1$ se σ é par, e $\varepsilon_\sigma = -1$ se σ é ímpar. $s_n(x_1, \dots, x_n)$ é chamado de **polinômio standard de grau n** . Em [3] foi provado que $s_{2n} = (x_1, \dots, x_{2n}) \in T(M_n(K))$, fato conhecido como teorema de **Amitsur-Levitzki**. Posteriormente, foram apresentadas outras demonstrações deste teorema, ver [34], [45], [40], [41].

O conceito que apresentaremos agora e suas propriedades são de extrema importância na PI-teoria.

Definição 1.2.5 *Dizemos que um ideal I de $K\langle X \rangle$ é um T -ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo $\varphi \in \text{End}K\langle X \rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \dots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$*

Proposição 1.2.6 *Se A é uma álgebra, então $T(A)$ é um T -ideal de $K\langle X \rangle$. Reciprocamente, se I é um T -ideal de $K\langle X \rangle$, então existe alguma álgebra B tal que $T(B) = I$.*

Prova. Primeiramente, é fácil ver que $T(A)$ é um ideal de $K\langle X \rangle$. Agora, sejam $f = f(x_1, \dots, x_n) \in T(A)$ e $\varphi \in \text{End}K\langle X \rangle$, arbitrários. Provemos que $\varphi(f) \in T(A)$. De fato, se $\psi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ é um homomorfismo qualquer de álgebras, então $\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f) = 0$, pois $\psi \circ \varphi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ é um homomorfismo de álgebras e $f \in T(A)$. Assim, $\varphi(f) \in \ker \psi$ e daí $\varphi(f) \in T(A)$.

Reciprocamente, sendo I um T -ideal de $K\langle X \rangle$ tomemos a álgebra quociente $B = K\langle X \rangle/I$ e a projeção canônica $\pi : K\langle X \rangle \rightarrow K\langle X \rangle/I$ ($\pi(f) = \bar{f}$). Se $f \in T(B)$, então f deve pertencer a $\ker \pi$. Como $\ker \pi = I$, devemos ter $T(B) \subseteq I$. Por outro lado, se $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$, então $f(g_1, \dots, g_n) \in I$ e daí $f(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n) = \overline{f(g_1, \dots, g_n)} = \bar{0}$. Logo, $f(x_1, \dots, x_n) \in T(B)$, o que conclui a demonstração. ■

Não é difícil ver que a interseção de uma família qualquer de T -ideais de $K\langle X \rangle$ é ainda um T -ideal. Logo, dado um subconjunto S qualquer de $K\langle X \rangle$, podemos definir o **T -ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por S** , denotado por $\langle S \rangle^T$, como sendo a **interseção de todos os T -ideais de $K\langle X \rangle$ que contêm S** . Assim, $\langle S \rangle^T$ é o menor T -ideal de $K\langle X \rangle$ contendo S .

Do ponto de vista prático, o T -ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $K\langle X \rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1, \dots, g_n) h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle\}.$$

Se A é uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S \rangle^T$, dizemos que S é uma **base das identidades de A** . Se existe S finito nestas condições, dizemos que A possui a **propriedade da base finita**. A questão da existência de base finita para as identidades das álgebras associativas sobre corpos de característica zero é conhecida como problema de Specht (W. Specht), e em [30] Kemer deu uma resposta positiva para esta questão. Vejamos agora alguns exemplos de bases de identidades de algumas álgebras importantes.

Exemplo 1.2.7 *Se A é uma álgebra associativa comutativa e unitária qualquer e K*

é um corpo infinito, então é um fato bem conhecido que $T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$. Dizemos então que todas as identidades de A seguem (ou são consequências) do polinômio $[x_1, x_2]$.

Exemplo 1.2.8 Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ (veja em [35] e [26]). No caso de K ser finito Stojanova-Venkova em [44], descreveu as identidades da álgebra exterior não-unitária e de dimensão finita, e Chiripov e Siderov [13] descreveram as identidades quando a dimensão é infinita.

Exemplo 1.2.9 Em 1973 Razmyslov [39] provou que $T(M_2(K))$ é finitamente gerado quando $\text{char}K = 0$, determinando uma base com 9 identidades. Posteriormente, Drensky [17] mostrou que $T(M_2(K)) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3] \rangle^T$, também para $\text{char}K = 0$. Em 2001 Koshlukov [33] generalizou este resultado de Drensky para K infinito de característica diferente de 2 e 3. Quando $\text{char}K = 3$, uma terceira identidade é necessária para gerar o T -ideal (veja em [15]). Para $\text{char}K = 2$, o problema da descrição de $T(M_2(K))$ ainda está em aberto.

1.3 Polinômios multihomogêneos e multilineares

Encontrar geradores para T -ideais de $K\langle X \rangle$ não é uma tarefa simples, pois muitos fatores influenciam na determinação desses geradores, como por exemplo o corpo base K da álgebra $K\langle X \rangle$, onde sua cardinalidade e sua característica são de grande relevância. Nesta seção apresentaremos dois resultados importantes na determinação desses geradores.

Definição 1.3.1 Sejam $m \in K\langle X \rangle$ um monômio e $x_i \in X$. Definimos o **grau** de m em x_i , denotado por $\text{deg}_{x_i} m$ ou $\partial_{x_i}(m)$ como sendo o número de ocorrências de x_i em m .

Exemplo 1.3.2 Considerado o monômio $m(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 x_1$ de $K\langle X \rangle$, temos que $\partial_{x_1}(m) = 2$, $\partial_{x_2}(m) = 0$ e $\partial_{x_3}(m) = 1$.

Definição 1.3.3 Um polinômio $f \in K\langle X \rangle$ é dito **homogêneo em x_i** se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i . f é dito **multi-homogêneo** quando é homogêneo em todas as variáveis.

Exemplo 1.3.4 Considere os polinômios $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3 x_2 + x_3 x_2^2$ e $g(x_1, x_2) = x_2 x_1^2 + x_1 x_2 x_1$ de $K\langle X \rangle$. Note que f é homogêneo em x_2 mas não é multi-homogêneo. Por outro lado, g é multi-homogêneo.

Se $m = m(x_1, x_2, \dots, x_k)$ é um monômio de $K\langle X \rangle$, definimos o **multigrau** de m como sendo a k -upla (a_1, a_2, \dots, a_k) onde $a_i = \deg_{x_i} m$. Dado um polinômio $f \in K\langle X \rangle$, uma **componente multi-homogênea de f** é a soma de todos os monômios de f com o mesmo multigrau. Observe então que f é **multi-homogêneo** se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea.

Exemplo 1.3.5 Considere o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3 x_2 + x_3 x_2^2$ do Exemplo 1.3.4. Tem-se que $x_1^2 x_2^2$ e $x_2 x_3 x_2 + x_3 x_2^2$ são as duas componentes multi-homogêneas de f . Note que a primeira componente tem multigrau $(2, 2, 0)$ e a segunda tem multigrau $(0, 2, 1)$.

Teorema 1.3.6 Sejam I um T -ideal de $K\langle X \rangle$ e $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in I$. Se K é infinito, então cada componente multi-homogênea de f pertence a I . Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.

Prova. Seja n o maior grau em x_1 de algum monômio de f . Para cada $i = 0, 1, \dots, n$, tomemos $f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$ como sendo a soma de todos os monômios que têm grau i em x_1 (a componente de grau i em x_1). Temos claramente $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$. Como K é infinito, podemos escolher $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ todos distintos. Para cada $j = 0, 1, \dots, n$, temos $g_j = f(\lambda_j x_1, x_2, \dots, x_k) = f_0 + \lambda_j f_1 + \dots + \lambda_j^n f_n$, e estas igualdades juntas equivalem à seguinte igualdade matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Observe que $g_0, g_1, \dots, g_n \in I$, pois I é T -ideal. Ademais, a primeira matriz na igualdade acima é uma matriz de Vandermonde invertível. Logo, devemos ter $f_0, f_1, \dots, f_n \in I$.

Agora, para cada $i = 0, 1, \dots, n$ e cada $t = 0, 1, 2, \dots$, tomemos f_{it} como sendo a componente homogênea em f_i de grau t em x_2 . Usando então os mesmos argumentos acima, concluímos que $f_{it} \in I$ e assim, repetindo o processo para cada variável, temos a primeira afirmação. Finalmente, observando que f é a soma de suas componentes multi-homogêneas, concluímos que I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.

■

Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é **multilinear** se é multi-homogêneo com multigrado $(1, 1, \dots, 1)$, ou seja, se em cada monômio cada variável tem grau exatamente 1. Assim, podemos escrever

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}, \quad \text{com } \alpha_{\sigma} \in K.$$

Observação 1.3.7 *Se f é um polinômio multilinear e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$ são tais que $g_i = \sum_{j=1}^{m_i} w_{ij}$, sendo w_{ij} monômios, temos que $f(g_1, \dots, g_n)$ é uma soma de termos da forma $f(w_{1j_1}, w_{2j_2}, \dots, w_{nj_n})$.*

Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in K\langle X \rangle$ um polinômio multihomogêneo de grau n em x_1 . Considere também as variáveis y_1 e y_2 de X , distintas de x_2, \dots, x_k . Substituindo a variável x_1 de f por $y_1 + y_2$, obtemos o polinômio

$$h(y_1, y_2, \dots, x_k) = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_k).$$

Desenvolvendo o polinômio da direita, encontramos uma componente homogênea de grau 1 em y_1 . Chamando essa componente homogênea de h_1 , tem-se que $\partial_{y_2}(h_1) = n - 1$ e que

$$h_1(x_1, x_1, x_2, \dots, x_k) = nf(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Para melhor entender as últimas afirmações, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.8 *Considere o polinômio $f(x_1, x_2) = x_2 x_1^3 + x_1^2 x_2 x_1$. Note que f é multi-homogêneo de grau 3 em x_1 . Sendo $y_1, y_2 \in X$, obtemos*

$$\begin{aligned} f(y_1 + y_2, x_2) &= x_2(y_1 + y_2)^3 + (y_1 + y_2)^2 x_2 (y_1 + y_2) = \\ &= x_2 y_1^3 + x_2 y_1^2 y_2 + x_2 y_1 y_2 y_1 + x_2 y_1 y_2^2 + x_2 y_2 y_1^2 + x_2 y_2 y_1 y_2 + x_2 y_2^2 y_1 + x_2 y_2^3 + \end{aligned}$$

$$+y_1^2x_2y_1 + y_1y_2x_2y_1 + y_2y_1x_2y_1 + y_2^2x_2y_1 + y_1^2x_2y_2 + y_1y_2x_2y_2 + y_2y_1x_2y_2 + y_2^2x_2y_2$$

Logo, $h_1(y_1, y_2, x_2) = x_2y_1y_2^2 + x_2y_2y_1y_2 + x_2y_2^2y_1 + y_2^2x_2y_1 + y_1^2x_2y_2 + y_1y_2x_2y_2$ e daí $h_1(x_1, x_1, x_2) = 3f(x_1, x_2)$.

De posse dessas idéias obtemos a seguinte proposição, a qual é tecnicamente muito importante no caso de $\text{char}K = 0$.

Proposição 1.3.9 *Se I é um T -ideal de $K\langle X \rangle$ e $\text{char}K = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Prova. Como $\text{char}K = 0$, temos que K é infinito e portanto I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos. Seja então $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in I$ multi-homogêneo. Como I é T -ideal temos $h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_k) = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_k) \in I$ e daí, como K é infinito, $h_1(y_1, y_2, x_2, \dots, x_k) \in I$, onde h_1 é a componente homogênea (do polinômio h) de grau 1 em y_1 . Da igualdade $h_1(x_1, x_1, x_2, \dots, x_k) = nf(x_1, x_2, \dots, x_k)$ e da hipótese de $\text{char}K = 0$ segue que f é consequência de $h_1(y_1, y_2, x_2, \dots, x_k)$. Tomemos agora $h_2(y_1, y_2, y_3, y_4, x_3, \dots, x_k)$ como sendo a componente de grau 1 em y_3 de $h_1(y_1, y_2, y_3 + y_4, x_3, \dots, x_k)$. Seguindo com essas idéias, concluimos que $\text{deg}_{y_4}h_2 = \text{deg}_{x_2}h_1 - 1 \in I$ e h_1 é consequência de h_2 . Continuando com este processo (chamado de processo de linearização), concluimos que f é consequência de algum polinômio multilinear de I . ■

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto enumerável de variáveis e para $n \in \mathbb{N}$, consideremos o espaço V_n dos polinômios multilineares de $K\langle X \rangle$ nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n . Note que o conjunto

$$\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

é uma base para V_n , e assim podemos dizer que $\dim(V_n) = n!$.

Definição 1.3.10 *Seja A uma álgebra associativa. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$ a n -ésima codimensão de A , denotada por $c_n(A)$, como sendo*

$$c_n(A) = \dim \left(\frac{V_n}{V_n \cap T(A)} \right).$$

Observação 1.3.11 (i) $c_n(A) = n! - \dim(V_n \cap T(A)) \leq n!$. Então, se A não possui nenhuma identidade multilinear, temos $c_n(A) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) A é uma PI-álgebra se, e somente se, $c_n(A) < n!$, para algum $n \in \mathbb{N}$. De fato, se A é uma PI-álgebra, existe $f \in T(A)$ tal que $f \neq 0$. Daí, existe uma identidade polinomial multilinear para A de grau n para algum n natural. Assim, $\dim(V_n \cap T(A)) \geq 1$ e portanto $c_n(A) < n!$. Reciprocamente, dizer que $c_n(A) < n!$ implica dizer que A possui alguma identidade de grau n . Com efeito, se $c_n(A) < n!$, então $\dim(V_n \cap T(A)) \geq 1$.

(iii) É interessante observar que se A é uma PI-álgebra, então existe uma melhor estimativa para as codimensões de A . Mais precisamente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $c_n(A) \leq k^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Regev, em [42], foi o primeiro a demonstrar esse resultado

Exemplo 1.3.12 Se A é uma álgebra comutativa e unitária, então $c_n(A) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para todo $\sigma \in S_n$, temos $a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)} = a_1 \dots a_n$, ou seja, $a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)} - a_1 \dots a_n = 0$. Daí, $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} - x_1 \dots x_n \in V_n \cap T(A)$ e consequentemente

$$\overline{x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}} = \overline{x_1 \dots x_n}$$

em $\frac{V_n}{V_n \cap T(A)}$. Logo, $\overline{x_1 \dots x_n}$ gera $\frac{V_n}{V_n \cap T(A)}$ como espaço vetorial, donde concluímos que $c_n(A) = \dim\left(\frac{V_n}{V_n \cap T(A)}\right) \leq 1$. Ademais, $x_1 \dots x_n \notin T(A)$ já que A possui unidade. Logo, $c_n(A) = 1$.

1.4 T-espços e polinômios centrais

Definição 1.4.1 Sejam A uma álgebra e $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$. Dizemos que f é um polinômio central para A se f tem termo constante nulo e $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$. Dizemos que um polinômio central f é essencial se f não é identidade para A .

De acordo com esta afirmação, dizer que f é um polinômio central para A significa dizer que $[f, g]$ é uma identidade de A para todo polinômio $g \in K\langle X \rangle$. Segue que se

duas álgebras são PI-equivalentes, então elas têm exatamente os mesmos polinômios centrais. Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 1.4.2 *O polinômio $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$ (polinômio de Hall) é um polinômio central essencial para a álgebra $M_2(K)$. Okhitin [38] descreveu os polinômios centrais para a álgebra $M_2(K)$, no caso de $\text{char}K = 0$, e Colombo e Koshlukov [15] generalizaram esta descrição para o caso de K ser um corpo infinito de característica diferente de 2. Uma outra descrição, dada por Formanek, pode ser encontrada em [24].*

Definição 1.4.3 *Um subespaço V de $K\langle X \rangle$ é dito ser um **T-espaço** se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo $\varphi \in \text{End}K\langle X \rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \dots, g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1, \dots, x_n) \in V$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$.*

Exemplo 1.4.4 *Todos os T-ideais de $K\langle X \rangle$ são exemplos de T-espaços. O subespaço $K = \{\alpha 1 \mid \alpha \in K\}$ é também um exemplo de T-espaço de $K\langle X \rangle$.*

Exemplo 1.4.5 *Seja A uma álgebra. O conjunto*

$$\{f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle \mid f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A), \forall a_1, \dots, a_n \in A\}$$

é um T-espaço de $K\langle X \rangle$, chamado de espaço dos polinômios centrais de A e normalmente denotado por $C(A)$. Como $Z(A)$ é uma subálgebra de A , temos que $C(A)$ é multiplicativamente fechado, condição que nem todo T-espaço satisfaz.

Observação 1.4.6 *É importante observar que os elementos de $C(A)$ são na verdade da forma $g+C$, onde g é um polinômio central (de acordo com a definição 1.4.1), e C é uma constante. É também importante observar que o conjunto dos polinômios centrais propriamente ditos de alguma álgebra pode não ser um T-espaço. No Exemplo 1.4.9, considerando $\text{char}K = p$, vimos que $g(x) = x^p$ é um polinômio central para E . No entanto, $g(x+1) = x^p + 1$ possui termo constante não nulo.*

É fácil ver que a interseção e a soma de uma família qualquer de T-espaços $K\langle X \rangle$ ainda são T-espaços. Dado então um subconjunto S de $K\langle X \rangle$, podemos definir o T-espaço de $K\langle X \rangle$ gerado por S como sendo a interseção de todos os T-espaços que contêm S . Em outras palavras, estamos tomando o **menor T-espaço** de $K\langle X \rangle$ que

contem S . A próxima proposição nos dá uma caracterização (mais interessante do ponto de vista prático) do T -espaço gerado por um conjunto.

Proposição 1.4.7 *Se $S \subseteq K\langle X \rangle$ e V é o T -espaço de $K\langle X \rangle$ gerado por S , então V é exatamente o subespaço de $K\langle X \rangle$ gerado por*

$$\{f(g_1, \dots, g_n) \mid f \in S, g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle\}$$

Prova. Começemos observando que este conjunto é exatamente igual a

$$(End K\langle X \rangle)S = \{\varphi(f) \mid f \in S, \varphi \in End K\langle X \rangle\}$$

e tomemos V_1 como sendo o subespaço de $K\langle X \rangle$ gerado por $(End K\langle X \rangle)S$. Como $S \subseteq V$ e V é um T -espaço, temos que $\varphi(f) \in V$ para quaisquer $f \in S$ e $\varphi \in End K\langle X \rangle$, ou seja, $(End K\langle X \rangle)S \subseteq V$. Logo, $V_1 \subseteq V$.

Observando agora que $\psi(g) \in (End K\langle X \rangle)S$ para quaisquer $\psi \in End K\langle X \rangle$ e $g \in (End K\langle X \rangle)S$, concluímos que V_1 é um T -espaço de $K\langle X \rangle$. Ademais, temos $S \subseteq V_1$. Logo, $V \subseteq V_1$, o que conclui a demonstração. ■

Exemplo 1.4.8 *Sejam $S \subseteq K\langle X \rangle$ e J o T -ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por S . Tomando*

$$S_1 = \{x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n)x_{n+2} \mid f \in S\}$$

temos que J é exatamente o T -espaço de $K\langle X \rangle$ gerado por S_1 . Assim, a partir de uma base de um T -ideal, é possível construir um conjunto capaz de gerá-lo como T -espaço.

Exemplo 1.4.9 *Sejam K um corpo qualquer e E a álgebra exterior sobre K . Temos que $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é um exemplo de polinômio central para E . Seja K um corpo infinito tal que $char K = p > 2$, e considere os polinômios*

$$q(x_1, x_2) = x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} \quad e$$

$$q_n = q_n(x_1, \dots, x_{2n}) = q(x_1, x_2)q(x_3, x_4) \dots q(x_{2n-1}, x_{2n}),$$

para cada $n \geq 1$. Em [12], foi mostrado que se K é infinito e $char K > 2$, então $C(E)$ é gerado (como T -espaço em $K\langle X \rangle$) pelos polinômios

$$x_1[x_2, x_3, x_4], \quad x_0^p, \quad x_0^p q_1, \dots, x_0^p q_n, \dots$$

Também foi mostrado que $C(E)$ não é finitamente gerado. No caso $char K = 0$, os polinômios $x_1[x_2, x_3, x_4]$ e $[x_1, x_2]$ geram $C(E)$ como T -espaço.

Observação 1.4.10 *Vimos na seção anterior que todo T -ideal é gerado por seus polinômios multilineares quando o corpo base tem característica zero, e por seus polinômios multi-homogêneos quando o corpo base é infinito. Essas técnicas de redução são extremamente importantes quando trabalhamos com identidades polinomiais e conforme veremos, também no estudo de polinômios centrais. Através dos mesmos processos usados para T -ideais é possível mostrar que todo T -espaço é gerado por seus polinômios multilineares no caso de característica zero, e por seus polinômios multi-homogêneos no caso de corpo base infinito.*

1.5 Identidades e polinômios centrais graduados

Estudaremos aqui os conceitos de álgebras graduadas, identidades e polinômios centrais graduados e ainda veremos o conceito de codimensão graduada. Em toda esta seção, G denotará um grupo abeliano com notação aditiva.

Definição 1.5.1 *Dizemos que uma álgebra A é G -graduada, se existe uma família de subespaços $\{A^{(g)} \mid g \in G\}$ de A tais que*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)} \quad e \quad A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(g+h)}$$

para quaisquer $g, h \in G$.

Na definição acima, dizemos que a família $\{A^{(g)} \mid g \in G\}$ é uma **G -graduação em A** e que $A^{(g)}$ é a **componente homogênea** de grau g . Se $a \in A^{(g)}$, dizemos que a é homogêneo de grau g e escrevemos $\partial_G(a) = g$.

Exemplo 1.5.2 *Toda álgebra A admite uma G -graduação. Basta tomar $A^{(0)} = A$ e $A^{(g)} = \{0\}$ para todo $g \in G - \{0\}$. Esta graduação é chamada de **trivial**.*

Exemplo 1.5.3 *A álgebra exterior E possui uma \mathbb{Z}_2 -graduação natural: $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 é o subespaço dos elementos pares e E_1 dos elementos ímpares. Considerando agora a álgebra exterior E_n de dimensão 2^n (veja o Exemplo 1.1.13) e tomando $(E_n)_0 = E_n \cap E_0$ e $(E_n)_1 = E_n \cap E_1$, temos $E_n = (E_n)_0 \oplus (E_n)_1$ e esta decomposição define uma \mathbb{Z}_2 -graduação em E_n .*

Exemplo 1.5.4 Considere n um inteiro positivo e $M = M_n(K)$. Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, tomemos o subespaço $M^{(\gamma)} = \langle E_{ij} \mid \overline{j-i} = \gamma \rangle$. Observe que $M^{(0)}$ é exatamente o conjunto das matrizes diagonais. Do fato do conjunto $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ ser uma base de M segue que

$$M = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} M^{(\gamma)}.$$

Agora, para ver que esta decomposição define uma \mathbb{Z}_n -gradação em $M_n(K)$, basta observar que

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k \\ E_{il}, & \text{se } j = k, \end{cases}$$

donde $M^{(\gamma_1)}M^{(\gamma_2)} \subseteq M^{(\gamma_1+\gamma_2)}$ para $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_n$.

Exemplo 1.5.5 Considere a álgebra $A = M_2(E)$ e os subespaços

$$A^{(0,0)} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}, \quad A^{(0,1)} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & E_0 \\ E_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $A = \bigoplus A^{(s,t)}$ com $s, t \in \mathbb{Z}_2$. Agora observe que $A^{(s_1,t_1)}A^{(s_2,t_2)} \subseteq A^{(s_1+t_1, s_2+t_2)}$, Assim, $\{A^{(0,0)}, A^{(0,1)}, A^{(1,0)}, A^{(1,1)}\}$ é uma $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação em $A = M_2(E)$.

Exemplo 1.5.6 Considere a álgebra $M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0; b, c \in E_1 \right\}$.

A álgebra $M_{1,1}(E)$ é munida da \mathbb{Z}_2 -gradação

$$(M_{1,1}(E))^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0 \right\}$$

e

$$(M_{1,1}(E))^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1 \right\}.$$

Exemplo 1.5.7 Dados uma álgebra G -gradauada R e a álgebra exterior E , munida com a \mathbb{Z}_2 -gradação natural (ver Exemplo 1.5.3), temos que a álgebra $R \otimes E$ é $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -gradauada com componentes homogêneas $(R \otimes E)^{(g,i)} = R^{(g)} \otimes E_i$, para $(g, i) \in G \times \mathbb{Z}_2$.

Primeiramente mostremos que $R \otimes E = \bigoplus_{(g,i) \in G \times \mathbb{Z}_2} (R^{(g)} \otimes E_i)$. Para isso, tomemos $a \otimes b \in R \otimes E$. Logo,

$$a \in R = \bigoplus_{g \in G} R^{(g)} \quad e \quad b \in E = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_2} E_i$$

e daí temos

$$a = \sum_{g \in G} a^{(g)} \quad e \quad b \in \sum_{i \in \mathbb{Z}_2} b^{(i)}.$$

Assim,

$$a \otimes b = \sum_{g \in G} a^{(g)} \otimes \sum_{i \in \mathbb{Z}_2} b^{(i)} = \sum_{(g,i) \in G \times \mathbb{Z}_2} a^{(g)} \otimes b^{(i)}.$$

Usando propriedade (vi) de produto tensorial vista na Observação 1.1.24 podemos mostrar que soma dos subespaços $R^{(g)} \otimes E_i$ (com $i \in \mathbb{Z}_2$ e $g \in G$) é direta.

Assim

$$R \otimes E = \bigoplus_{(g,i) \in G \times \mathbb{Z}_2} (R^{(g)} \otimes E_i).$$

Agora mostremos que $((R \otimes E)^{(g,i)})((R \otimes E)^{(h,j)}) \subseteq (R \otimes E)^{(g+h,i+j)}$. Dados $x = a \otimes b \in (R \otimes E)^{(g,i)}$ (com $a \in R^{(g)}$ e $b \in E_i$) e $y = c \otimes d \in (R \otimes E)^{(h,j)}$ (com $c \in R^{(h)}$ e $d \in E_j$), temos $xy = ab \otimes cd$, com $ab \in R^{(g+h)}$ e $cd \in E_{i+j}$. Logo, $xy \in (R \otimes E)^{(g+h,i+j)}$. Portanto $\{(R \otimes E)^{(g,i)} \mid g \in G, i \in \mathbb{Z}_2\}$ é uma $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação para $R \otimes E$.

Proposição 1.5.8 Se A é uma álgebra G -graduada, então $1 \in A^{(0)}$.

Prova. Temos que existem $g_1, \dots, g_n \in G$ tais que

$$1 = a^{(0)} + a^{(g_1)} + \dots + a^{(g_n)}$$

com $a^{(0)} \in A^{(0)}$ e $a^{(g_i)} \in A^{(g_i)}$, para $i = 1, \dots, n$. Tomando agora $h \in G$ e $a^{(h)} \in A^{(h)}$, arbitrários, temos

$$a^{(h)} = a^{(h)}a^{(0)} + a^{(h)}a^{(g_1)} + \dots + a^{(h)}a^{(g_n)}.$$

Observando que $a^{(h)}a^{(0)} \in A^{(h)}$, $a^{(h)}a^{(g_i)} \in A^{(h+g_i)}$ e $h, h+g_1, \dots, h+g_n$ são dois a dois distintos, podemos concluir que $a^{(h)}a^{(g_i)} = 0$ para $1, \dots, n$, donde $a^{(h)}a^{(0)} = a^{(h)}$. De modo inteiramente análogo, mostramos que $a^{(0)}a^{(h)} = a^{(h)}$ e assim concluimos que $a^{(0)} = 1$. ■

Definição 1.5.9 Sejam A e B álgebras G -graduadas com componentes homogêneas A_g e B_g , respectivamente. Dizemos que um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \rightarrow B$ é G -graduado se $\varphi(A^{(g)}) \subseteq B^{(g)}$ para todo $g \in G$.

Vamos agora tratar de identidades e polinômios centrais G -graduados. Para isso, precisamos do conceito de álgebra associativa livre G -graduada. Para defini-lo, comecemos considerando para cada $g \in G$ um conjunto enumerável $X^{(g)} = \{x_i^{(g)} \mid i \in \mathbb{N}\}$, e suponhamos $X^{(g_1)}$ e $X^{(g_2)}$ disjuntos para $g_1 \neq g_2$. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X^{(g)} = \{x_i^{(g)} \mid i \in \mathbb{N}, g \in G\}$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K\langle X \mid G \rangle$. Definimos agora

$$\alpha(1) = 0 \quad e \quad \alpha(x_1^{(g_1)} x_2^{(g_2)} \dots x_m^{(g_m)}) = g_1 + g_2 + \dots + g_m.$$

Sendo então m um monômio de $K\langle X \mid G \rangle$, dizemos que $\alpha(m)$ é o G -grau de m . Tomando para cada $g \in G$

$$K\langle X \mid G \rangle^{(g)} = \langle m \mid m \text{ monômio de } K\langle X \mid G \rangle, \alpha(m) = g \rangle,$$

temos

$$K\langle X \mid G \rangle = \bigoplus_{g \in G} K\langle X \mid G \rangle^{(g)} \quad e \quad K\langle X \mid G \rangle^{(g)} K\langle X \mid G \rangle^{(h)} \subseteq K\langle X \mid G \rangle^{(g+h)},$$

para quaisquer $g, h \in G$. Assim $K\langle X \mid G \rangle$ é chamada de álgebra associativa livre G -graduada. Se $f \in K\langle X \mid G \rangle^{(g)}$, dizemos que f é homogêneo de G -grau g e usamos a notação $\alpha(f) = g$. Agora estamos prontos para definir identidade e polinômio central G -graduados.

Definição 1.5.10 *Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ uma álgebra G -graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) \in K\langle X \mid G \rangle$ é :*

- (i) *Uma identidade G -graduada de A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A^{(g_i)}$ com $i = 1, \dots, n$.*
- (ii) *Um polinômio central G -graduado para A se f possui termo constante nulo e $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_i \in A^{(g_i)}$, com $i = 1, \dots, n$.*

Exemplo 1.5.11 *Consideremos a álgebra exterior E com sua \mathbb{Z}_2 -gradação natural, (veja o Exemplo 1.5.3). Sendo $K\langle X \mid \mathbb{Z}_2 \rangle$ a álgebra associativa livre \mathbb{Z}_2 -graduada, temos $X = X^{(0)} \cup X^{(1)}$. Como $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in E_1$, temos que $f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}$ é identidade \mathbb{Z}_2 -graduada de E . Como $E_0 = Z(E)$, temos que todo polinômio $f \in K\langle X \rangle^{(0)}$ é um polinômio central \mathbb{Z}_2 -graduado para E .*

Definição 1.5.12 *Sejam A uma álgebra G -graduada e $f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) \in K\langle X | G \rangle$. Dizemos que (a_1, \dots, a_n) é uma **substituição G -admissível** para f se $a_i \in A^{(g_i)}$, para todo $i = 1, \dots, n$.*

Observe que $f_1(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) \in T_G(A)$ se, e somente se, $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para cada substituição G -admissível de elementos em A . Do mesmo modo, $f_2(x_1^{(h_1)}, \dots, x_n^{(h_n)}) \in C_G(A)$ se, e somente se, $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$ para cada substituição G -admissível de elementos em A .

Apresentaremos agora os conceitos de T_G -ideal e T_G -espaço. Tais conceitos são análogos aos de T -ideal e T -espaço vistos anteriormente, e também de fundamental importância.

Definição 1.5.13 *Seja $K\langle X | G \rangle$ a álgebra associativa livre G -graduada. Um ideal I de $K\langle X | G \rangle$ é dito ser um T_G -ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G -graduado φ de $K\langle X | G \rangle$. Um subespaço V de $K\langle X | G \rangle$ é dito ser o T_G -espaço se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo endomorfismo G -graduado φ de $K\langle X | G \rangle$.*

De acordo com esta definição, dizer que I é um T_G -ideal é equivalente a dizer que $f(q_1, \dots, q_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) \in I$ e $q_i \in K\langle X | G \rangle^{(g_i)}$ com $i = 1, \dots, n$. Analogamente, para T_G -espaços.

As idéias de T_G -ideal e T_G -espaço gerados por um subconjunto S de $K\langle X | G \rangle$ são análogas às idéias de T -ideal e T -espaço gerados. Denotamos por $\langle S \rangle^{T_G}$ o T_G -ideal gerado por S .

Agora observe que f é uma identidade para a álgebra G -graduada A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos G -graduados de $K\langle X | G \rangle$ em A (A verificação disso é análoga ao que foi feito para identidades polinomiais ordinárias).

Sendo A uma álgebra G -graduada, denotamos por $T_G(A)$ o conjunto de todas as identidades G -graduadas para A . Assim, podemos escrever

$$T_G(A) = \bigcap_{\phi} \text{Ker} \phi \quad (1.4)$$

onde a interseção corre sobre todos os homomorfismos G -graduados $\phi : K\langle X | G \rangle \rightarrow A$. Primeiramente, mostremos que $T_G(A)$ é um T_G -ideal de $K\langle X | G \rangle$. Claramente, $T_G(A)$ é um ideal de $K\langle X | G \rangle$. Resta mostrar que $T_G(A)$ é invariante por todos os endomorfismos graduados de $K\langle X | G \rangle$.

Seja $\psi : K\langle X \mid G \rangle \longrightarrow K\langle X \mid G \rangle$ um endomorfismo graduado arbitrário. Dado $f \in T_G(A)$, basta mostrar que $\psi(f) \in T_G(A)$, o que equivale a mostrar que $\psi(f) \in \text{Ker}\phi$, para todo homomorfismo G -graduado ϕ de $K\langle X \mid G \rangle$ em A . Note que $\phi \circ \psi : K\langle X \mid G \rangle \longrightarrow A$ é um homomorfismo G -graduado de álgebras. Logo, se $f \in T_G(A)$, então $f \in \text{Ker}(\phi \circ \psi)$ e daí $(\phi \circ \psi)(f) = 0$, ou seja, $\phi(\psi(f)) = 0$. Segue então que $\psi(f) \in \text{Ker}\phi$. Como ϕ foi tomado arbitrário, temos por (1.4) que $\psi(f) \in T_G(A)$, e como ψ foi tomado arbitrário, por definição, $T_G(A)$ é um T_G -ideal de $K\langle X \mid G \rangle$.

Observação 1.5.14 (i) Note que o conjunto $C_G(A)$ dos polinômios centrais G -graduados para A é um T_G -espaço de $K\langle X \mid G \rangle$.

(ii) Se $S \subseteq T_G(A)$ é tal que $\langle S \rangle^{T_G} = T_G(A)$, dizemos que S gera o T_G -ideal, ou que S é uma base das identidades G -graduadas de A .

(iii) Se $S \subseteq C_G(A)$ é tal que o T_G -espaço gerado por S é igual a $C_G(A)$, dizemos que S gera $C_G(A)$ (como T_G -espaço).

Observação 1.5.15 É importante notar que todo T_G -ideal e todo T_G -espaço é gerado por seus polinômios multi-homogêneos no caso do corpo base ser infinito, e por seus polinômios multilineares no caso do corpo base ter característica zero (as demonstrações são as mesmas feitas para T -ideais).

Definição 1.5.16 Sejam G um grupo abeliano finito e A uma álgebra G -graduada. Dizemos que um polinômio f de $K\langle X \mid G \rangle$ é um polinômio central **essencial** G -graduado para A se $f \in C_G(A) - T_G(A)$ (denotaremos o conjunto $C_G(A) - T_G(A)$ por $\overline{C}_G(A)$).

Exemplo 1.5.17 As identidades polinomiais \mathbb{Z}_2 -graduadas das álgebras $M_2(K)$ e $M_{1,1}(E)$ foram descritas em [19] para característica de K igual a zero. Neste artigo, Di Vincenzo mostrou que $T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(K))$ e $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E))$ são gerados, respectivamente pelos conjuntos

$$\{[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)} - x_3^{(1)}x_2^{(1)}x_1^{(1)}\} \quad \text{e} \quad \{[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)} + x_3^{(1)}x_2^{(1)}x_1^{(1)}\}.$$

A mesma descrição foi obtida por Azevedo e Koshlukov em [7], quando K é infinito e de característica diferente de 2.

Exemplo 1.5.18 Considere $M_n(K)$ munida de sua \mathbb{Z}_n -gradação (veja o Exemplo 1.5.4). Em [48], Vasilovsky descreveu as identidades \mathbb{Z}_n -graduadas de $M_n(K)$, quando $\text{char}K = 0$. Mais precisamente ele mostrou que $T_{\mathbb{Z}_n}(M_n(K))$ é gerado pelo conjunto

$$\{[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)} - x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

O resultado continua válido para K infinito e foi demonstrado por Azevedo em [4].

Exemplo 1.5.19 Os polinômios centrais \mathbb{Z}_2 -graduadas para $M_2(K)$ e $M_{1,1}(E)$, com K infinito e $\text{char}K \neq 2$, foram descritos por Brandão e Koshlukov em [11]. Mais precisamente, foi mostrado neste artigo que os $T_{\mathbb{Z}_2}$ -espaços $C_{\mathbb{Z}_2}(M_2(K))$ e $C_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E))$ são gerados pelos conjuntos

$$z_1[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]z_2 \quad , \quad z_1(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} - x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})z_2 \quad , \quad x_1^{(1)} x_2^{(1)} + x_2^{(1)} x_1^{(1)}$$

e

$$z_1[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]z_2 \quad , \quad z_1(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})z_2 \quad , \quad [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}]$$

respectivamente, onde z_1 e z_2 são variáveis em X .

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades polinomiais ordinárias e graduadas.

Proposição 1.5.20 Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G -gradações tais que $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$. Ademais, se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.

Prova. Consideremos a álgebra associativa livre $K\langle Y \rangle$, onde $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e seja $f(y_1, y_2, \dots, y_n) \in T(A)$. Dados $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$, tomemos $b_i^{(g)} \in B^{(g)}$, para $i = 1, \dots, n$ e $g \in G$, tais que $b_i = \sum_{g \in G} b_i^{(g)}$. Para cada $b_i^{(g)} \neq 0$, tomemos $x_i^{(g)} \in X^{(g)}$ e consideremos o polinômio $f_1 = f(\sum_{g \in G} x_i^{(g)}, \dots, \sum_{g \in G} x_n^{(g)}) \in K\langle X \mid G \rangle$. Como $f \in T(A)$, temos $f_1 \in T_G(A)$ e daí $f_1 \in T_G(B)$. Fazendo então as substituições $x_i^{(g)} = b_i^{(g)}$, para $i = 1, \dots, n$ e $g \in G$, temos

$$f(b_1, b_2, \dots, b_n) = f\left(\sum_{g \in G} b_{1g}, \sum_{g \in G} b_{2g}, \dots, \sum_{g \in G} b_{ng}\right) = 0$$

e assim $f \in T(B)$. Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T_G(A) \subseteq T_G(B)$ e $T_G(B) \subseteq T_G(A)$, donde temos a última afirmação. ■

Definiremos agora **codimensões graduadas**. Mas, faremos antes algumas considerações sobre polinômios multilineares graduados.

Definição 1.5.21 *Definimos*

$$V_n^G = \langle x_{\sigma(1)}^{g_1} \dots x_{\sigma(n)}^{g_n} \mid g_i \in G, \sigma \in S_n \rangle$$

como sendo o **espaço dos polinômios multilineares graduados de grau n** de $K\langle X \mid G \rangle$.

Observação 1.5.22 *Note que os g_i 's não são fixos em cada variável x_i com $i = 1, \dots, n$. Por exemplo, sendo $G = \mathbb{Z}_3$, considere os monômios $m_1 = x_2^{(0)} x_3^{(1)} x_1^{(0)}$ e $m_2 = x_2^{(0)} x_3^{(2)} x_1^{(1)}$. Ambos são monômios geradores de $V_3^{\mathbb{Z}_3}$, e no entanto os G -graus em cada variável são diferentes.*

Considerando $\text{char}K = 0$, o T_G -ideal de uma álgebra G -graduada A é determinado por seus polinômios multilineares, ou seja, por $V_n^G \cap T_G(A)$ para $n \in \mathbb{N}$ (veja a Observação 1.5.15).

Definição 1.5.23 *A n -ésima codimensão G -graduada de A é definida como sendo*

$$c_n^G(A) = \dim \left(\frac{V_n^G}{V_n^G \cap T_G(A)} \right).$$

Definição 1.5.24 *Dizemos que uma família*

$$\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_g \subseteq \{1, \dots, n\} \mid g \in G\}$$

é uma **G -partição** de $\hat{n} = \{1, \dots, n\}$ se satisfaz:

$$(i) \bigcup_{g \in G} \mathfrak{S}_g = \{1, \dots, n\}$$

$$(ii) \mathfrak{S}_g \cap \mathfrak{S}_h = \emptyset \text{ para } g \neq h.$$

Neste caso escrevemos $\mathfrak{S} \vdash_G n$ para representar a G -partição \mathfrak{S} de \hat{n} .

Cada monômio $m \in V_n^G$ define uma única G -partição de n , a saber $\mathfrak{S}(m)$, dada por

$$\mathfrak{S}_g(m) = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j^g \text{ aparece em } m\}$$

para $g \in G$. Para uma G -partição \mathfrak{S} de \hat{n} , definimos

$$V_n^G(\mathfrak{S}) = \langle m \in V_n^G \mid m \text{ é um monômio, } \mathfrak{S}(m) = \mathfrak{S} \rangle.$$

Exemplo 1.5.25 Dado o grupo $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ e o monômio

$$m(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3^{(0)} x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_4^{(1)} \in V_4^{\mathbb{Z}_3}$$

note que

$$\mathfrak{S}_0(m) = \{3\}, \mathfrak{S}_1(m) = \{4\}, \mathfrak{S}_2(m) = \{1, 2\}$$

e que

$$\mathfrak{S}_0(m) \cup \mathfrak{S}_1(m) \cup \mathfrak{S}_2(m) = \{1, 2, 3, 4\},$$

e ainda

$$\mathfrak{S}_0 \cap \mathfrak{S}_1 = \emptyset, \mathfrak{S}_0 \cap \mathfrak{S}_2 = \emptyset, \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = \emptyset.$$

Portanto \mathfrak{S} é uma G -partição de $\{1, 2, 3, 4\}$.

Seja G um grupo abeliano finito, com $|G| = r$, e fixemos uma ordem em G , digamos $G = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$. Fixados $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$, com $n_i \geq 0$ e $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, definimos $V_{n_1, n_2, \dots, n_r}^G$ como sendo o subespaço de V_n^G dos polinômios multilineares nas variáveis

$$x_1^{(g_1)}, \dots, x_{n_1}^{(g_1)}, x_{n_1+1}^{(g_2)}, \dots, x_{n_1+n_2}^{(g_2)}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{r-1}+1}^{(g_r)}, \dots, x_n^{(g_r)}.$$

Considerando agora a G -partição \mathcal{P} de $\{1, \dots, n\}$ dada por

$$\mathcal{P}_{g_1} = \{1, \dots, n_1\}, \mathcal{P}_{g_2} = \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}, \dots, \mathcal{P}_{g_r} = \{n_1 + \dots + n_{r-1} + 1, \dots, n\}$$

temos que $V_{n_1, n_2, \dots, n_r}^G = V_n^G(\mathcal{P})$.

Sendo A uma álgebra G -graduada, definimos

$$c_{n_1, \dots, n_r}^G(A) = \dim \frac{V_{n_1, \dots, n_r}^G}{V_{n_1, \dots, n_r}^G \cap T_G(A)} = \dim \frac{V_n^G(\mathcal{P})}{V_n^G(\mathcal{P}) \cap T_G(A)} \quad (1.5)$$

Sendo \mathfrak{S} uma G -partição qualquer de \hat{n} tal que $|\mathfrak{S}_{g_i}| = n_i$ para todo $i = 1, \dots, r$, Di Vincenzo mostrou em [20], Lema 3, que

$$\dim \frac{V_n^G(\mathfrak{S})}{V_n^G(\mathfrak{S}) \cap T_G(A)} = c_{n_1, \dots, n_r}^G(A).$$

Também foi mostrado em [20] que

$$V_n^G = \bigoplus_{\mathfrak{S} \vdash_G n} V_n^G(\mathfrak{S}) \quad e \quad \frac{V_n^G}{V_n^G \cap T_G(A)} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{S} \vdash_G n} \frac{V_n^G(\mathfrak{S})}{V_n^G(\mathfrak{S}) \cap T_G(A)} \quad (1.6)$$

e que as G -codimensões de A são relacionadas pela fórmula

$$c_n^G(A) = \sum_{n_1 + \dots + n_r = n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} c_{n_1, n_2, \dots, n_r}^G(A) \quad (1.7)$$

onde

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}.$$

Capítulo 2

Identidades polinomiais graduadas de produtos tensoriais pela álgebra de Grassmann

Neste capítulo vamos considerar G um grupo abeliano e R uma álgebra G -graduada. Também vamos considerar a álgebra $R \otimes E$ com a graduação natural pelo grupo $G \times \mathbb{Z}_2$. Vamos estudar e comparar as identidades polinomiais $G \times \mathbb{Z}_2$ -graduadas de $R \otimes E$ com as identidades polinomiais G -graduadas de R . Descreveremos um conjunto de geradores das identidades $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas de $R \otimes E$ em termos de geradores das identidades G -graduadas de R . Essa descrição foi obtida por Di Vincenzo e Nardoza [21].

Em todo este capítulo o corpo base K será sempre de característica zero.

2.1 A aplicação ζ_J

Seja $E = E_0 \oplus E_1$ a álgebra exterior. A partir da álgebra G -graduada R , apresentaremos a álgebra $R \otimes E$, que é uma álgebra $G \times \mathbb{Z}_2$ -graduada com componentes homogêneas dadas por

$$(R \otimes E)^{(g,i)} = R^{(g)} \otimes E_i,$$

para $i \in \mathbb{Z}_2$ e $g \in G$ (veja o Exemplo 1.5.7).

Vamos relacionar as identidades G -graduadas de R com as identidades $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas de $R \otimes E$.

Fazendo $K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle^{(g)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_2} K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle^{(g,i)}$, para cada $g \in G$, temos que a álgebra livre $K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ é uma álgebra G -graduada. Fazendo também $K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle^{(i)} = \bigoplus_{g \in G} K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle^{(g,i)}$, para cada $i \in \mathbb{Z}_2$, observamos que $K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle^{(g)}$ é também \mathbb{Z}_2 -graduada.

Sejam m um monômio multilinear em $K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ e $i_1 < \dots < i_k$ os índices das variáveis de m com \mathbb{Z}_2 -grau ímpar. Então para $\sigma \in \text{Sym}(\{i_1, \dots, i_k\})$, onde $\text{Sym}(\{i_1, \dots, i_k\})$ é o grupo das permutações de $\{i_1, \dots, i_k\}$, podemos escrever

$$m = m_0 z_{\sigma(i_1)} m_1 \dots m_{k-1} z_{\sigma(i_k)} m_k,$$

onde m_0, m_1, \dots, m_k são monômios multilineares em várias variáveis com \mathbb{Z}_2 -grau par e $z_{\sigma(i_j)} \in X$ são variáveis com \mathbb{Z}_2 -grau ímpar. Então, como em [31], definimos

$$\zeta(m) = (-1)^\sigma m \tag{2.1}$$

Note que

$$\zeta(\zeta(m)) = (-1)^\sigma (-1)^\sigma m = m.$$

Como $K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ e $K\langle X \mid G \rangle$ são álgebras livres, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.1 *Dado $J \subseteq \mathbb{N}$, definimos:*

a) $\varphi_J : K\langle X \mid G \rangle \longrightarrow K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ como sendo o homomorfismo de álgebras dado por

$$\varphi_J(x_i^{(g)}) = \begin{cases} x_i^{(g,1)}, & \text{se } i \in J \\ x_i^{(g,0)}, & \text{se } i \notin J \end{cases} \tag{2.2}$$

b) $\zeta_J : V_n^G \longrightarrow V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}$ como sendo a transformação linear tal que $\zeta_J(m) = \zeta(\varphi_J(m))$ para todo monômio $m \in V_n^G$.

Conforme veremos, a aplicação ζ_J terá um papel fundamental neste e no próximo capítulo.

Exemplo 2.1.2 Seja $G = \mathbb{Z}_3$, $m = x_6^{(2)} x_4^{(1)} x_1^{(1)} x_3^{(0)} x_2^{(0)} x_5^{(2)}$ e $J = \{1, 3, 4, 9\}$. Então:

$$\begin{aligned} \varphi_J(m) &= \varphi_J(x_6^{(2)} x_4^{(1)} x_1^{(1)} x_3^{(0)} x_2^{(0)} x_5^{(2)}) = \\ &= x_6^{(2,0)} x_4^{(1,1)} x_1^{(1,1)} x_3^{(0,1)} x_2^{(0,0)} x_5^{(2,0)}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \zeta_J(m) &= \zeta(\varphi_J(m)) = \zeta(x_6^{(2,0)} x_4^{(1,1)} x_1^{(1,1)} x_3^{(0,1)} x_2^{(0,0)} x_5^{(2,0)}) = \\ &= (-1)^{(1\ 4\ 3)} x_6^{(2,0)} x_4^{(1,1)} x_1^{(1,1)} x_3^{(0,1)} x_2^{(0,0)} x_5^{(2,0)} = \\ &= x_6^{(2,0)} x_4^{(1,1)} x_1^{(1,1)} x_3^{(0,1)} x_2^{(0,0)} x_5^{(2,0)}. \end{aligned}$$

Note que $\sigma = (1\ 4\ 3) \in \text{Sym}(J)$ e que $(-1)^{(1\ 4\ 3)} = 1$.

Fixado $J \subseteq \hat{n}$, uma G -partição \mathfrak{S} de \hat{n} induz uma $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -partição \mathfrak{S}' de \hat{n} assim:

$$\mathfrak{S}'_{(g,1)} = \mathfrak{S}_g \cap J \quad e \quad \mathfrak{S}'_{(g,0)} = \mathfrak{S} - J \quad (2.3)$$

Reciprocamente, a partir de uma $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -partição \mathfrak{S}' de \hat{n} pode-se obter um G -partição de \hat{n} , tomando-se

$$\mathfrak{S}_g = \mathfrak{S}'_{(g,0)} \cup \mathfrak{S}'_{(g,1)} \quad (2.4)$$

para $g \in G$. Claramente a correspondência $\mathfrak{S} \rightleftharpoons \mathfrak{S}'$, para um J fixo, é biunívoca.

Lema 2.1.3 Sejam $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ e ζ, φ_J e ζ_J como acima. Seja γ o homomorfismo G -graduado de $K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ em $K\langle X \mid G \rangle$ que suprime o \mathbb{Z}_2 -grau das $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -variáveis livres, isto é,

$$\gamma : x_l^{(g,i)} \longmapsto x_l^{(g)} \quad \forall x_l \in X. \quad (2.5)$$

Então:

$$(i) \quad \gamma \circ \varphi_J = \text{Id}_{K\langle X \mid G \rangle}.$$

$$(ii) \quad \text{Se } \mathfrak{S}' \vdash_{G \times \mathbb{Z}_2} n, J = \bigcup_{g \in G} \mathfrak{S}'_{(g,1)} \text{ e } f \in V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}'), \text{ temos } (\varphi_J \circ \gamma)(f) = f$$

Prova. De (2.5) temos que

$$\gamma \circ \varphi(x_l^{(g)}) = \gamma(x_l^{(g,i)}) = x_l^{(g)}$$

para $i = 0, 1$. Logo temos o item (i).

Para demonstrar o item (ii), considere $J = \{i_1, \dots, i_r\}$. Observando que os monômios de $f \in V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}')$ são da forma $m = m_0 x_{i_1}^{(g_{i_1,1})} m_1 \dots m_{r-1} x_{i_r}^{(g_{i_r,1})} m_r$, onde os m'_j s são monômios nas variáveis de \mathbb{Z}_2 -grau zero, temos

$$\begin{aligned} (\varphi_J \circ \gamma)(m) &= (\varphi_J(\gamma(m_0 x_{i_1}^{(g_{i_1,1})} m_1 \dots m_{r-1} x_{i_r}^{(g_{i_r,1})} m_r))) = \\ &= \varphi_J(\overline{m}_0 x_{i_1}^{(g_{i_1})} \overline{m}_1 \dots \overline{m}_{r-1} x_{i_r}^{(g_{i_r})} \overline{m}_r) = \\ &= m_0 x_{i_1}^{(g_{i_1,1})} m_1 \dots m_{r-1} x_{i_r}^{(g_{i_r,1})} m_r = m \end{aligned}$$

onde $\overline{m}_i = \gamma(m_i)$. Assim, obtemos o item (ii). ■

Lema 2.1.4 *Sejam R uma álgebra G -graduada, $f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) \in K\langle X \mid G \rangle$ um polinômio multilinear G -graduado, $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ e $(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n)$ uma substituição $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -admissível para $\zeta_J(f)$ com $a_i \otimes d_i \in R \otimes E$, para $i = 1, \dots, n$. Então $\zeta_J(f)(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes d_1 \dots d_n$.*

Prova.

Seja $(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n)$ uma substituição $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -admissível para $\zeta_J(f)$ (ou seja, que respeita os $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -graus das variáveis de $\zeta_J(f)$, conforme a Definição 1.5.12). Sendo $J = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ com $i_1 < i_2 < \dots < i_t$, cada monômio de f pode ser escrito da forma

$$m(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) = m_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1)} \dots x_{\sigma(i_t)}^{(g_t)} m_t,$$

onde os m'_i s (com $i = 0, 1, \dots, t$), são monômios nas variáveis restantes e g_1, \dots, g_t são elementos de G , não necessariamente distintos. Então

$$\begin{aligned} \zeta_J(m) &= (-1)^\sigma \varphi_J(m_0) x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} \dots x_{\sigma(i_t)}^{(g_t,1)} \varphi_J(m_t) \\ &= (-1)^\sigma \overline{m}_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} \dots x_{\sigma(i_t)}^{(g_t,1)} \overline{m}_t, \end{aligned}$$

onde $\overline{m}_0, \dots, \overline{m}_t$ são monômios de \mathbb{Z}_2 grau 0. Consequentemente,

$$\zeta_J(m)(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n) = (-1)^\sigma m(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n),$$

observando que $R \otimes E$ pode ser vista como álgebra G - graduada. Assim,

$$(-1)^\sigma m(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n) = (-1)^\sigma m(a_1, \dots, a_n) \otimes v_0 d_{\sigma(i_1)} v_1 \dots d_{\sigma(i_t)} v_t =$$

$$(-1)^\sigma (-1)^\sigma m(a_1, \dots, a_n) \otimes d_1 \dots d_n = m(a_1, \dots, a_n) \otimes d_1 \dots d_n,$$

com $v_l \in E_0$ e $d_i \in E_1$ para $i \in J$, e $d_i \in E_0$ para $i \notin J$ pois a substituição $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -admissível. Consequentemente,

$$\zeta_J(f)(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes d_1 \dots d_n.$$

■

Teorema 2.1.5 *Sejam f uma identidade polinomial multilinear G -graduada para R de grau n , e $J \subseteq \{1, \dots, n\}$. Então $\zeta_J(f) \in T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$.*

Prova. Como $\text{char} K = 0$, temos que $T_G(R)$ é multihomogêneo. Assim, podemos tomar $f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) \in V_n^G(\mathfrak{S})$ para alguma G -partição \mathfrak{S} de $\{1, \dots, n\}$.

Seja $(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n)$ uma substituição $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -admissível para $\zeta_J(f)$. Como f é multilinear, é suficiente provar apenas que

$$\zeta_J(f)(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n) = 0$$

com $a_s \otimes t_s \in R^{(g_s)} \otimes E_{i_s}$. Pelo Lema 2.1.4 temos

$$\zeta_J(f)(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes d_1 \dots d_n$$

e consequentemente

$$\zeta_J(f)(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes d_1 \dots d_n = 0 \otimes d_1 \dots d_n = 0,$$

pois, por hipótese, $f \in T_G(R)$. Portanto

$$\zeta_J(f) \in T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E).$$

■

Provaremos agora que polinômios obtidos dessa forma, são suficientes para descrever as identidades polinomiais $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas de $R \otimes E$.

Lema 2.1.6 *Considere \mathfrak{S}' uma $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -partição de \hat{n} , $f \in T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E) \cap V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}')$ e o conjunto*

$$J = \bigcup_{g \in G} \mathfrak{S}'_{(g,1)}.$$

Então $f = \zeta_J(h)$ para algum $h \in T_G(R) \cap V_n^G(\mathfrak{S})$, onde \mathfrak{S} é a G -partição de \hat{n} correspondente a \mathfrak{S}' (considerando o subconjunto J de \hat{n}).

Prova. Seja $J = \{i_1, \dots, i_r\}$ com $i_1 < \dots < i_r$. Então qualquer monômio de f pode ser escrito na forma

$$m = m_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} m_1 x_{\sigma(i_2)}^{(g_2,1)} \dots m_{r-1} x_{\sigma(i_r)}^{(g_r,1)} m_r,$$

onde os m'_i s (com $i = 1, \dots, r$) são monômios com variáveis de \mathbb{Z}_2 grau par em $K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ e $\sigma \in \text{Sym}(J)$ uma permutação dos elementos de J . Assim,

$$f = \sum \alpha_m m_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} m_1 x_{\sigma(i_2)}^{(g_2,1)} \dots x_{\sigma(i_r)}^{(g_r,1)} m_r.$$

onde σ depende de m . Tome $h = (\gamma \circ \zeta)(f) \in V_n^G(\mathfrak{S})$. Pelo Lema 2.1.3 $(\varphi_J \circ \gamma)(\zeta(f)) = \zeta(f)$ e daí

$$\begin{aligned} \zeta_J(h) &= \zeta_J(\gamma \circ \zeta(f)) = \zeta(\varphi_J(\gamma \circ \zeta(f))) = \\ &= \zeta \circ (\varphi_J \circ \gamma)(\zeta(f)) = \zeta(\zeta(f)) = f. \end{aligned}$$

Alem disso,

$$h = \gamma \circ \zeta(f) = (\gamma \circ \zeta) \left(\sum \alpha_m m_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} m_1 x_{\sigma(i_2)}^{(g_2,1)} \dots x_{\sigma(i_r)}^{(g_r,1)} m_r \right),$$

e assim

$$h = \sum \alpha_m (-1)^\sigma \bar{m}_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1)} \bar{m}_1 x_{\sigma(i_2)}^{(g_2)} \dots x_{\sigma(i_r)}^{(g_r)} \bar{m}_r \in V_n^G(\mathfrak{S})$$

onde $\bar{m}_i = \gamma(m_i)$ ($i = 1, \dots, r$) e σ depende de m .

Queremos mostrar agora que h é uma identidade G -graduada para R . Para isso, considere (a_1, \dots, a_n) uma substituição G -admissível para h em R . Temos que $a_i \in R^{(g)}$ se, e somente se, $i \in \mathfrak{S}_g$. Desde que E é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita, podemos escolher elementos homogêneos $d_1, \dots, d_n \in E$ tais que $d_1 \dots d_n \neq 0$ e $d_i \in E_1$ se, e somente se, $i \in J$. Observe então que $(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n)$ é uma substituição $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -admissível para f , pelo Lema 2.1.4, temos

$$0 = f(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n) = \zeta_J(a_1 \otimes d_1, \dots, a_n \otimes d_n) = h(a_1, \dots, a_n) \otimes d_1 \dots d_n$$

Como $d_1 \dots d_n \neq 0$ temos $h(a_1, \dots, a_n) = 0$ e assim, temos $h \in T_G(R)$. ■

Seja $J \subseteq \mathbb{N}$. Se \mathfrak{S} é uma G -partição de \hat{n} e \mathfrak{S}' é a correspondente $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -partição de \hat{n} , temos pelo Teorema 2.1.5 que se $f \in V_n^G(\mathfrak{S}) \cap T_G(R)$, então

$$\zeta_J(f) \in V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}') \cap T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$$

ou seja,

$$\zeta_J(V_n^G(\mathfrak{S}) \cap T_G(R)) \subseteq V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}') \cap T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E).$$

Agora pelo Lema 2.1.6, se $f \in V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}') \cap T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$, então $f = \zeta_J(h)$, com $h \in V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}') \cap T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$, ou seja,

$$f \in \zeta_J(V_n^G(\mathfrak{S}) \cap T_G(R))$$

Assim, temos que

$$V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}') \cap T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E) = \zeta_J(V_n^G(\mathfrak{S}) \cap T_G(R)). \quad (2.6)$$

2.2 Codimensões graduadas de R e $R \otimes E$

Sejam $J \subseteq \mathbb{N}$, $\mathfrak{S} \vdash_G n$ e \mathfrak{S}' a $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -partição correspondente a \mathfrak{S} com respeito a J . Fixando-se uma ordem em G , isto é, $g_1 < \dots < g_r$, consideremos a ordem lexicográfica à esquerda em $G \times \mathbb{Z}_2$, induzida pela ordem de G , ou seja,

$$(g_1, 0) < (g_1, 1) < (g_2, 0) < (g_2, 1) < \dots < (g_r, 0) < (g_r, 1).$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, r$, sejam

$$|\mathfrak{S}'_{(g_i, 0)}| = p_i \quad e \quad |\mathfrak{S}'_{(g_i, 1)}| = q_i \quad (2.7)$$

De (2.4) temos $|\mathfrak{S}_{g_i}| = p_i + q_i$. Note que p_i é exatamente o número de variáveis com $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -grau $(g_i, 0)$, q_i é exatamente o número de variáveis com $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -grau $(g_i, 1)$ nos monômios de $V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}')$ e $(p_i + q_i)$ representa exatamente o número de variáveis com G -grau g_i nos monômios de $V_n^G(\mathfrak{S})$, com $i = 1, \dots, r$. Assim, é evidente que $\sum_{i=1}^r (p_i + q_i) = n$. Considerando agora a igualdade (2.6) (no final da seção anterior), obtemos que

$$\dim(V_{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r}^{G \times \mathbb{Z}_2} \cap T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)) = \dim(V_{p_1 + q_1, \dots, p_r + q_r}^G \cap T_G(R)) \quad (2.8)$$

pois ζ_J é injetiva. Para um melhor entendimento veja o exemplo seguinte.

Exemplo 2.2.1 Considere o monômio $m = x_6^{(2)}x_4^{(1)}x_1^{(1)}x_3^{(0)}x_2^{(0)}x_5^{(2)}$ e o grupo \mathbb{Z}_3 com a ordem $\{0, 1, 2\}$. Sendo \mathfrak{S} a \mathbb{Z}_3 -partição induzida pelo monômio m , temos

$$\mathfrak{S}_2(m) = \{5, 6\}, \mathfrak{S}_1(m) = \{1, 4\}, \mathfrak{S}_0(m) = \{2, 3\}.$$

Note que

$$|\mathfrak{S}_2| = 2, |\mathfrak{S}_1| = 2, |\mathfrak{S}_0| = 2.$$

Assim, $m \in V_6^{\mathbb{Z}_3}(\mathfrak{S})$.

Agora, considerando $J = \{1, 3, 4\}$ temos

$$\zeta_J(m) = x_6^{(2,0)}x_4^{(1,1)}x_1^{(1,1)}x_3^{(0,1)}x_2^{(0,0)}x_5^{(2,0)}$$

De (2.3) e (2.4) temos

$$\mathfrak{S}'_{(2,0)}(m) = \{5, 6\}, \mathfrak{S}'_{(2,1)}(m) = \emptyset, \mathfrak{S}'_{(1,0)}(m) = \emptyset,$$

$$\mathfrak{S}'_{(1,1)}(m) = \{1, 4\}, \mathfrak{S}'_{(0,1)}(m) = \{3\}, \mathfrak{S}'_{(0,0)}(m) = \{2\}$$

e daí

$$|\mathfrak{S}'_{(2,0)}| = 2, |\mathfrak{S}'_{(2,1)}| = 0, |\mathfrak{S}'_{(1,0)}| = 0, |\mathfrak{S}'_{(1,1)}| = 2,$$

$$|\mathfrak{S}'_{(0,1)}| = 1, |\mathfrak{S}'_{(0,0)}| = 1.$$

Logo, fixando a ordem $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$ em $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, temos $\zeta_J(m) \in V_6^{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}')$. Observe ainda que

$$|\mathfrak{S}_2| = |\mathfrak{S}'_{(2,0)}| + |\mathfrak{S}'_{(2,1)}| = 2 + 0 = 2$$

$$|\mathfrak{S}_1| = |\mathfrak{S}'_{(1,0)}| + |\mathfrak{S}'_{(1,1)}| = 0 + 2 = 2$$

$$|\mathfrak{S}_0| = |\mathfrak{S}'_{(0,0)}| + |\mathfrak{S}'_{(0,1)}| = 1 + 1 = 2.$$

Provaremos a seguir um resultado que relaciona as codimensões $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas de $R \otimes E$ com as codimensões G -graduadas de R .

Proposição 2.2.2 *Seja R uma PI-álgebra G -graduada. Então*

$$c_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E) = 2^n c_n^G(R).$$

Prova. Primeiramente, pela fórmula (1.7) temos

$$c_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E) = \sum_{p_1+q_1+\dots+p_r+q_r=n} \binom{n}{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r} c_{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r}^{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E). \quad (2.9)$$

Já pela equação (2.8), temos que

$$c_{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r}^{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E) = c_{p_1+q_1, \dots, p_r+q_r}^G(R) \quad (2.10)$$

pois $\dim V_{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r}^{G \times \mathbb{Z}_2} = \dim V_{p_1+q_1, \dots, p_r+q_r}^G = n!$. Além disso,

$$\begin{aligned} \binom{n}{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r} &= \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_r!} = \frac{n!}{(p_1+q_1)! \dots (p_r+q_r)!} \cdot \frac{(p_1+q_1)!}{p_1!} \dots \frac{(p_r+q_r)!}{p_r!} = \\ &= \binom{n}{p_1+q_1, \dots, p_r+q_r} \cdot \binom{p_1+q_1}{p_1} \dots \binom{p_r+q_r}{p_r}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} c_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E) &= \sum_{p_1+q_1+\dots+p_r+q_r=n} \binom{n}{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r} c_{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r}^{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E) = \\ &= \sum_{n_1+\dots+n_r=n} \sum_{p_1+q_1=n_1} \dots \sum_{p_r+q_r=n_r} \binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot \binom{n_1}{p_1} \dots \binom{n_r}{p_r} c_{n_1, \dots, n_r}^G(R) = \\ &= \sum_{n_1+\dots+n_r=n} \sum_{p_1=0}^{n_1} \dots \sum_{p_r=0}^{n_r} \binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot \binom{n_1}{p_1} \dots \binom{n_r}{p_r} c_{n_1, \dots, n_r}^G(R) = \\ &= \sum_{n_1+\dots+n_r=n} \binom{n}{n_1, \dots, n_r} c_{n_1, \dots, n_r}^G(R) \sum_{p_1=0}^{n_1} \dots \sum_{p_r=0}^{n_r} \binom{n_1}{p_1} \dots \binom{n_r}{p_r} = \\ &= c_n^G(R) \sum_{p_1=0}^{n_1} \sum_{p_2=0}^{n_2} \dots \sum_{p_r=0}^{n_r} \binom{n_1}{p_1} \binom{n_2}{p_2} \dots \binom{n_r}{p_r} = \\ &= c_n^G(R) \sum_{p_1=0}^{n_1} \binom{n_1}{p_1} \sum_{p_2=0}^{n_2} \binom{n_2}{p_2} \dots \sum_{p_r=0}^{n_r} \binom{n_r}{p_r} = \\ &= c_n^G(R) 2^{n_1} 2^{n_2} \dots 2^{n_r} = 2^{n_1+n_2+\dots+n_r} c_n^G(R) = 2^n c_n^G(R). \end{aligned}$$

■

2.3 Identidades graduadas para $R \otimes E$

Seja $J = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \mathbb{N}$, com $i_1 < \dots < i_k$. Dada $\alpha \in \text{Sym}(J)$, α pode ser representada pela palavra $\alpha(i_1) \dots \alpha(i_k)$ em J . Dado $m \in \mathbb{N}$ e inteiros positivos t_1, \dots, t_m tais que $t_1 + \dots + t_m = k$, podemos dividir a palavra $\alpha(i_1) \dots \alpha(i_k)$ em produto de m subpalavras de comprimento t_1, \dots, t_m e escrevemos

$$\alpha \equiv \underbrace{a_{1,1} \dots a_{1,t_1}}_{t_1} \underbrace{a_{2,1} \dots a_{2,t_2}}_{t_2} \dots \underbrace{a_{m,1} \dots a_{m,t_m}}_{t_m}.$$

Seja $\pi \in \text{Sym}(\hat{m})$, podemos permutar as m subpalavras de α segundo π . Desta maneira, definimos a seguinte permutação de $\text{Sym}(J)$

$$\alpha^\pi \equiv \underbrace{a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(1),t_{\pi(1)}}}_{t_{\pi(1)}} \underbrace{a_{\pi(2),1} \dots a_{\pi(2),t_{\pi(2)}}}_{t_{\pi(2)}} \dots \underbrace{a_{\pi(m),1} \dots a_{\pi(m),t_{\pi(m)}}}_{t_{\pi(m)}}$$

Queremos comparar o sinal de α com o sinal de α^π . Para isso consideremos

$$D = \{i \in \hat{m} \mid t_i \text{ é ímpar}\}$$

Suponha $D \neq \emptyset$, digamos $D = \{l_1, \dots, l_s\}$, com $l_i < \dots < l_s$. Suprimindo de $\pi(1) \dots \pi(m)$ as letras que não estão em D , denotemos por $\tilde{\pi}$ a permutação em $\text{Sym}(D)$ definida pela palavra obtida dessa forma. Além disso, essa palavra define uma única permutação $\pi^* \in \text{Sym}(\hat{s})$, a qual satisfaz

$$\tilde{\pi} = \pi(l_1) \dots \pi(l_s) = l_{\pi^*(1)} \dots l_{\pi^*(s)}.$$

Observe que π^* permuta as letras de $\tilde{\pi}$, e assim π^* e $\tilde{\pi}$ têm o mesmo sinal.

Exemplo 2.3.1 Considere $J = \{3, 5, 7, 9, 12, 15\} \subset \mathbb{N}$. Seja $\alpha \in \text{Sym}(J)$ a permutação definida pela palavra

$$\alpha \equiv 9 \ 7 \ 15 \ 5 \ 12 \ 13 \tag{2.11}$$

Para uma melhor compreensão, podemos escrever α em uma notação habitual

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 12 & 15 \\ \alpha(3) & \alpha(5) & \alpha(7) & \alpha(9) & \alpha(12) & \alpha(15) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 12 & 15 \\ 9 & 7 & 15 & 5 & 12 & 3 \end{pmatrix} = (3 \ 9 \ 5 \ 7 \ 15).$$

Sejam $t_1 = 3$, $t_2 = 1$ e $t_3 = 2$. Dividindo α em $m = 3$ subpalavras de comprimentos 3, 1 e 2, temos

$$\alpha \equiv \underbrace{\alpha(3) \ \alpha(5) \ \alpha(7)}_{t_1=3} \ \underbrace{\alpha(9)}_{t_2=1} \ \underbrace{\alpha(12) \ \alpha(15)}_{t_3=2} \quad (2.12)$$

Sendo $\pi \in \text{Sym}(\hat{3})$ tal que $\pi = (1 \ 3 \ 2)$, temos

$$\alpha^\pi = \underbrace{12 \ 3}_{t_3} \ \underbrace{9 \ 7 \ 15}_{t_1} \ \underbrace{5}_{t_2}$$

Notemos que $D = \{1, 2\}$, $l_1 = 1$ e $l_2 = 2$. Logo, $\tilde{\pi} = id \in \text{Sym}\{1, 2\}$. Assim,

$$\tilde{\pi} \equiv 1 \ 2 = l_1 \ l_2 = l_{\pi^*(1)} \ l_{\pi^*(2)}$$

Daí, $\pi^* = id \in \text{Sym}\{1, 2\}$. Note que $(-1)^\alpha = 1$ e $(-1)^{\alpha^\pi} = 1$. Por outro lado

$$(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha (-1)^{\pi^*} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Esse exemplo pode ser generalizado pelo lema a seguir.

Lema 2.3.2 (i) Se $D = \emptyset$, então $(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha$, para toda $\pi \in \text{Sym}(\hat{m})$.

(ii) $D \neq \emptyset$, então $(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha (-1)^{\pi^*}$, para toda $\pi \in \text{Sym}(\hat{m})$.

Prova.

Cada permutação em $\text{Sym}(\hat{m})$ pode ser escrita com um produto de transposições e cada transposição $(a \ b) \in \text{Sym}(\hat{m})$, com $b = a + t$ e $t \in \mathbb{N}$, pode ser escrita como produto de transposição da forma $(r \ r + 1)$. Para ver isso, basta observar que $(a \ b + 1) = (b \ b + 1)(a \ b)(b \ b + 1)$ e usar indução. Assim, é suficiente mostrar o resultado apenas para π da forma $(r \ r + 1)$.

Considerando então $\pi = (r \ r + 1)$, temos

$$\alpha^\pi \equiv \underbrace{a_{1,1} \dots a_{1,t_1}}_{t_1} \dots \underbrace{a_{r+1,1} \dots a_{r+1,t_{r+1}}}_{t_{r+1}} \underbrace{a_{r,1} \dots a_{r,t_r}}_{t_r} \dots \underbrace{a_{m,1} \dots a_{m,t_m}}_{t_m}$$

onde $t_1, \dots, t_r, t_{r+1}, \dots, t_m$ são os tamanhos das subpalavras. Consequentemente, α^π pode ser obtida a partir de α realizando-se $t_r t_{r+1}$ trocas de duas letras. Observe que cada troca de duas letras implica em multiplicar o sinal da permutação α por (-1) .

Como as duas palavras possuem tamanhos t_r e t_{r+1} , obtemos o sinal de α^π multiplicando o sinal de α por $(-1)^{t_r t_{r+1}}$, isto é,

$$(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha (-1)^{t_r t_{r+1}}.$$

Se $D = \emptyset$, então t_r e t_{r+1} são ambos pares. Logo, $t_r t_{r+1}$ é par e daí $(-1)^{t_r t_{r+1}} = 1$. Assim $(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha$ e portanto temos o item (i).

Se $D \neq \emptyset$, suponhamos $D = \{l_1 \dots l_s\}$ e observe que π^* e $\tilde{\pi}$ têm o mesmo sinal, se t_r é par ou t_{r+1} é par, note que $t_r t_{r+1}$ é par. Suponhamos por exemplo que t_r é par e t_{r+1} é ímpar, temos $r \notin D$ e daí $\tilde{\pi} = l_1 \dots r+1 \dots l_s$, logo $\tilde{\pi} = Id$. Analogamente para t_r ímpar e t_{r+1} par. Daí

$$(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha (-1)^{t_r t_{r+1}} = (-1)^\alpha \cdot 1 = (-1)^\alpha (-1)^{\tilde{\pi}} = (-1)^\alpha (-1)^{\pi^*}$$

e (ii) segue. E por fim, sendo t_r e t_{r+1} ambos ímpares, temos $\tilde{\pi} = (r \ r+1)$ e assim

$$(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha (-1)^{t_r t_{r+1}} = (-1)^\alpha (-1) = (-1)^\alpha (-1)^{\tilde{\pi}} = (-1)^\alpha (-1)^{\pi^*}.$$

■

Exemplo 2.3.3 *Seja*

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nas notações do Lema 2.3.2 temos $\beta = 3 \ 1 \ 2 \ 5 \ 4$. Considere então as subpalavras $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1 \ 2$, $\beta_3 = 5$, $\beta_4 = 4$ de tamanhos $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ respectivamente. Dado $\pi = (1 \ 2)$, temos $\beta^\pi = 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 4$. Note que $(-1)^\beta = -1$ e $(-1)^{\beta^\pi} = -1$. Agora usando o Lema 2.3.2, temos que $D \neq \emptyset$, pois, $D = \{1, 3, 4\}$, sendo $\tilde{\pi} = 1 \ 3 \ 4$, temos $\pi^* = Id$, logo

$$(-1)^{\beta^\pi} = (-1)^\beta (-1)^{\pi^*} = -1 \cdot 1 = -1$$

Exemplo 2.3.4 *Agora vamos considerar as subpalavras na permutação*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 & 12 & 14 & 18 \\ 5 & 7 & 12 & 4 & 18 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Considere também as subpalavras $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 7 \ 12 \ 4$, $\alpha_3 = 18 \ 2$ e $\alpha_4 = 14$ de tamanhos $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 2$, $t_4 = 1$, respectivamente, note que $(-1)^\alpha = -1$.

Considerando agora a permutação $\pi = (2\ 3) \in S_4$, obtemos a permutação

$$\alpha^\pi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 & 12 & 14 & 18 \\ 5 & 18 & 2 & 7 & 12 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

observe que $(-1)^{\alpha^\pi} = -1$. Por outro lado $D = \{1, 2, 4\}$ sendo $\pi \equiv 1\ 3\ 2\ 4$, temos $\tilde{\pi} \equiv 1\ 2\ 4$ e daí, $\pi^* = Id$ e assim $(-1)^{\pi^*} = 1$. Então vamos verificar o sinal de α^π , pelo Lema (2.3.2) temos,

$$(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha (-1)^{\pi^*} = -1 \cdot 1 = -1.$$

Antes de enunciar o próximo lema, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3.5 Seja $w = w_1 w_2 w_3 \in V_{12}^G$ tal que

$$w_1 = x_4^{(g_1)} x_5^{(g_2)} x_6^{(g_3)} x_{11}^{(g_4)}, \quad w_2 = x_3^{(g_5)} x_2^{(g_6)} x_1^{(g_7)} x_7^{(g_8)} x_{12}^{(g_9)} \quad e \quad w_3 = x_9^{(g_{10})} x_{10}^{(g_{11})} x_8^{(g_{12})}$$

Definimos

$$Supp\{w_i\} = \{j \in \mathbb{N} : x_j^{(g)} \text{ aparece em } w_i \text{ para algum } g \in G\}$$

com $i = 1, 2, 3$. Dado $J = \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$ e fazendo

$$|J \cap Supp\{w_1\}| = 3 = t_1$$

$$|J \cap Supp\{w_2\}| = 4 = t_2$$

$$|J \cap Supp\{w_3\}| = 2 = t_3.$$

Considere a palavra nos índices 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12 de variáveis de w , com a mesma ordem em que elas aparecem em w , ou seja,

$$\underbrace{4\ 6\ 11}_{t_1=3} \quad \underbrace{3\ 2\ 7\ 12}_{t_2=4} \quad \underbrace{9\ 10}_{t_3=2}$$

Então podemos definir a permutação $\alpha \in Sym\{J\}$ como sendo

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 11 & 3 & 2 & 7 & 12 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Agora, fazendo $b_i = \varphi_J(w_i)$, com $i = 1, 2, 3$, temos,

$$b_1 = \varphi_J(w_1) = x_4^{(g_1,1)} x_5^{(g_2,0)} x_6^{(g_3,1)} x_{11}^{(g_4,1)}$$

$$b_2 = \varphi_J(w_2) = x_3^{(g_5,1)} x_2^{(g_6,1)} x_1^{(g_7,0)} x_7^{(g_8,1)} x_{12}^{(g_9,1)}$$

$$b_3 = \varphi_J(w_3) = x_9^{(g_{10},1)} x_{10}^{(g_{11},1)} x_8^{(g_{12},0)}.$$

Observe que $\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_1) = 1$, $\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_2) = 0$ e $\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_3) = 0$.

Diante disso, note que o \mathbb{Z}_2 -grau de b_i é 1 se, e somente se, $i \in D = \{i \mid t_i \text{ é ímpar}\}$. De fato, se o \mathbb{Z}_2 -grau de b_i é 1, então existe um número ímpar de variáveis em b_i com \mathbb{Z}_2 -grau 1 e isto implica t_i tem ordem ímpar, ou seja, t_i é ímpar. Logo, $i \in D$. Reciprocamente, se $i \in D$, então t_i é ímpar e assim existe um número ímpar de variáveis em b_i com \mathbb{Z}_2 -grau 1, ou seja, o \mathbb{Z}_2 -grau de b_i é 1. Note que esse exemplo pode ser generalizado.

Lema 2.3.6 *Seja $f(x_1^{g_1}, \dots, x_m^{g_m}) \in V_m^G$ e w_1, \dots, w_m monômios em $K\langle X \mid G \rangle$ tais que $\partial_G(w_i) = g_i$ e $f(w_1, \dots, w_m) \in V_n^G$. Sendo $J \subseteq \hat{n}$, existem $D \subseteq \{1, \dots, m\}$ e elementos homogêneos $b_1, \dots, b_m \in K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ tais que*

$$(i) \quad \partial_{G \times \mathbb{Z}_2}(b_i) = \partial_{G \times \mathbb{Z}_2}(\varphi_D(x_i^{g_i})).$$

$$(ii) \quad \zeta_J(f(w_1, \dots, w_m)) = \pm g(b_1, \dots, b_m), \text{ onde } g = \zeta_D(f)$$

Prova. Seja $f(x_1^{g_1}, \dots, x_m^{g_m}) = \sum_{\pi \in S_m} c_\pi x_{\pi(1)}^{g_{\pi(1)}} \dots x_{\pi(m)}^{g_{\pi(m)}}$ e w_1, \dots, w_m monômios tais que $w = w_1 \dots w_m$ é multilinear. Escrevemos

$$\text{Supp}(w_i) := \{j \in \mathbb{N} \mid x_j^g \text{ aparece em } w_i \text{ para algum } g \in G\}$$

De acordo com a notação do Lema (2.3.2), seja $J = \{i_1, \dots, i_k\}$, com $i_1 < \dots < i_k$. Escrevendo

$$|J \cap \text{Supp}(w_i)| = t_i$$

temos

$$\sum_{i=1}^m t_i = k.$$

Então consideremos

$$\underbrace{a_{1,1} \dots a_{1,t_1}}_{t_1} \underbrace{a_{2,1} \dots a_{2,t_2}}_{t_2} \dots \underbrace{a_{m,1} \dots a_{m,t_m}}_{t_m}$$

a palavra nos índices i_1, \dots, i_k de variáveis de w , com a mesma ordem em que elas ocorrem em w , da esquerda para a direita. Definimos a permutação

$$\alpha = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ a_{1,1} & \dots & a_{m,t_m} \end{pmatrix},$$

e o conjunto $D = \{i \mid t_i \text{ é ímpar}\}$. Note que $\zeta_J(w) = (-1)^\alpha \varphi_J(w)$. Para todo $\pi \in \text{Sym}(\hat{m})$, pelo Lema (2.3.2), temos

$$\zeta_J(w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)}) = (-1)^\alpha (-1)^{\pi^*} \varphi_J(w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)}) \quad (2.13)$$

quando $D \neq \emptyset$ e

$$\zeta_J(w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)}) = (-1)^\alpha \varphi_J(w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)}) \quad (2.14)$$

quando $D = \emptyset$.

Considere agora o polinômio

$$g(x_1^{(g_1, h_1)}, \dots, x_m^{(g_m, h_m)}) = \zeta_D(f(x_1^{g_1}, \dots, x_m^{g_m})). \quad (2.15)$$

Tomemos $b_i = \varphi_J(w_i)$. Observe que, para todo $i = 1, \dots, m$, os G -graus de b_i e w_i são iguais, pois φ_J acrescenta apenas o \mathbb{Z}_2 -grau em w_i mantendo o mesmo G -grau. Note também que pelo Exemplo (2.3.4) o \mathbb{Z}_2 -grau de b_i é ímpar se, e somente se, $i \in D$. Assim, temos o item (i).

Se $D \neq \emptyset$, de (2.15) temos

$$\begin{aligned} g(x_1^{(g_1, h_1)}, \dots, x_m^{(g_m, h_m)}) &= \zeta_D(f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_m^{(g_1)})) = \\ &= \zeta_D \left(\sum_{\pi \in S_m} c_\pi x_{\pi(1)}^{(g_{\pi(1)})} \dots x_{\pi(m)}^{(g_{\pi(m)})} \right) = \\ &= \zeta \left(\sum_{\pi \in S_m} c_\pi \varphi_D(x_{\pi(1)}^{(g_{\pi(1)})} \dots x_{\pi(m)}^{(g_{\pi(m)})}) \right) = \\ &= \sum_{\pi \in S_m} c_\pi (-1)^{\pi^*} \varphi_D(x_{\pi(1)}^{(g_{\pi(1)})} \dots x_{\pi(m)}^{(g_{\pi(m)})}). \end{aligned}$$

De (2.15), temos que $\varphi_D(x_i^{(g_i)}) = x_i^{(g_i, h_i)}$ com $i = 1, \dots, n$ e daí

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_m} c_\pi (-1)^{\pi^*} \varphi_D(x_{\pi(1)}^{(g_{\pi(1)})} \dots x_{\pi(m)}^{(g_{\pi(m)})}) &= \\ &= \sum_{\pi \in S_m} c_\pi (-1)^{\pi^*} x_{\pi(1)}^{(g_{\pi(1)}, h_{\pi(1)})} \dots x_{\pi(m)}^{(g_{\pi(m)}, h_{\pi(m)})}. \end{aligned}$$

Note que o motivo de aparecer o sinal de π^* acima, é porque $\pi^* \in \text{Sym}\{\hat{s}\}$ pode ser vista como uma permutação dos elementos de D .

Agora, avaliando g em b_1, \dots, b_m obtemos

$$g(b_1, \dots, b_m) = \sum_{\pi \in S_m} c_\pi (-1)^{\pi^*} b_{\pi(1)} \dots b_{\pi(m)}$$

e daí

$$\begin{aligned} (-1)^\alpha g(b_1 \dots b_m) &= (-1)^\alpha \sum_{\pi \in S_m} c_\pi (-1)^{\pi^*} b_{\pi(1)} \dots b_{\pi(m)} = \\ &= (-1)^\alpha \sum_{\pi \in S_m} c_\pi (-1)^{\pi^*} \varphi_J(w_{\pi(1)}) \dots \varphi_J(w_{\pi(m)}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_m} c_\pi (-1)^\alpha (-1)^{\pi^*} \varphi_J(w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)}) = \\ &\stackrel{de(2.13)}{=} \sum_{\pi \in S_m} c_\pi \zeta_J(w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)}) = \\ &= \zeta_J \left(\sum_{\pi \in S_m} c_\pi w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)} \right) = \\ &= \zeta_J(f(w_1, \dots, w_m)). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $D = \emptyset$, note que $(-1)^{\pi^*} = 1$. Assim de (2.15) podemos escrever,

$$\begin{aligned} g(x_1^{(g_1, h_1)}, \dots, x_1^{(g_m, h_m)}) &= \\ &= \sum_{\pi \in S_m} c_\pi x_{\pi(1)}^{(g_{\pi(1)}, h_{\pi(1)})} \dots x_{\pi(m)}^{(g_{\pi(m)}, h_{\pi(m)})}. \end{aligned}$$

Avaliando g em b_1, \dots, b_m obtemos,

$$g(b_1, \dots, b_m) = \sum_{\pi \in S_m} c_\pi b_{\pi(1)} \dots b_{\pi(m)}$$

e daí

$$\begin{aligned} (-1)^\alpha g(b_1 \dots b_m) &= (-1)^\alpha \sum_{\pi \in S_m} c_\pi b_{\pi(1)} \dots b_{\pi(m)} = \\ &= (-1)^\alpha \sum_{\pi \in S_m} c_\pi \varphi_J(w_{\pi(1)}) \dots \varphi_J(w_{\pi(m)}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_m} c_\pi (-1)^\alpha \varphi_J(w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)}) = \\ &\stackrel{de(2.14)}{=} \sum_{\pi \in S_m} c_\pi \zeta_J(w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \zeta_J \left(\sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} c_\pi w_{\pi(1)} \cdots w_{\pi(m)} \right) = \\
&= \zeta_J(f(w_1, \dots, w_m))
\end{aligned}$$

e assim obtemos (ii).

■

Teorema 2.3.7 *Seja $\mathcal{E} \subseteq K\langle X \mid G \rangle$ um sistema de geradores multilineares para $T_G(R)$. Então o sistema*

$$\{\zeta_J(f) \in K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle \mid f \in \mathcal{E}, J \subseteq \mathbb{N}\}$$

é um conjunto de geradores multilineares para $T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$.

Prova. Seja U o $T_{G \times \mathbb{Z}_2}$ -ideal de $K\langle X \mid G \rangle$ gerado por

$$\{\zeta_J(f) \in K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle \mid f \in \mathcal{E}, J \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Como $f \in \mathcal{E}$ é multilinear, pelo Teorema 2.1.5, temos que $\zeta_J(f) \in T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$, e assim $U \subseteq T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$.

Agora, tomando $h \in T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$, como $\text{char}K = 0$ podemos considerar $h \in V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}')$ para alguma $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -partição \mathfrak{S}' de \hat{n} , onde n é o grau de f . Pelo Lema 2.1.6, existem $J \subseteq \mathbb{N}$ e um polinômio multilinear $\bar{h} \in T_G(R)$ tal que $h = \zeta_J(\bar{h})$. Como \bar{h} pertence ao T_G -ideal gerado por \mathcal{E} , temos

$$\bar{h} = \sum_{f \in \mathcal{E}} \alpha_f u_f f(w_1, \dots, w_m) v_f$$

para algum $f \in \mathcal{E}$, monômios u_f, v_f, w_i e escalares α_f . Consequentemente,

$$h = \zeta_J(\bar{h}) = \sum_{f \in \mathcal{E}} \alpha_f \zeta_J(u_f f(w_1, \dots, w_m) v_f)$$

Por outro lado, para cada $f \in \mathcal{E}$ temos

$$\zeta_J(u_f f(w_1, \dots, w_m) v_f) = \zeta_J(u_f) \zeta_J(f(w_1, \dots, w_m)) \zeta_J(v_f)$$

e pelo Lema 2.3.6 existem algum $D = D(f) \subseteq \{1, \dots, m\}$ e elementos homogêneos $b_i = b_i(f)$ tais que $\partial_{G \times \mathbb{Z}_2}(b_i) = \partial_{G \times \mathbb{Z}_2}(\varphi_D(x_i^{g_i}))$ e

$$\zeta_J(f(w_1, \dots, w_m)) = \pm g(b_1, \dots, b_m)$$

para $g = \zeta_D(f)$. Sendo $f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_m^{(g_m)}) \in V_m^G$, com $\partial_G(w_i) = g_i$, temos

$$\zeta_D(f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_m^{(g_m)})) = \zeta(f(\varphi_D(x_1^{(g_1)}), \dots, \varphi_D(x_m^{(g_m)})))$$

e daí (b_1, \dots, b_m) é $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -admissível para $\zeta_D(f)$. Observe que $g = \zeta_D(f) \in U$ e assim, $g(b_1, \dots, b_m) \in U$. Isto quer dizer que cada termo de $h = \zeta_J(\bar{h})$ pertence a U , e assim $h \in U$. Portanto $T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E) \subseteq U$. ■

Observação 2.3.8 Na prova do teorema acima usamos o Lema 2.3.6 item (i), porque dado $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, não sabemos se $(\zeta_J(w_1), \dots, \zeta_J(w_m))$ é $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -admissível para f .

Observação 2.3.9 Sejam $J \subseteq \mathbb{N}$ e $1, \dots, k$ os índices das variáveis de um monômio m , temos $\zeta_J(m) = \zeta_{J \cap \{1, \dots, k\}}(m)$. Daí, precisamos trabalhar apenas com subconjuntos J de $\{1, \dots, k\}$.

2.4 Aplicações

Vamos determinar agora a $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação da álgebra $M_n(E)$, utilizando o isomorfismo

$$\begin{aligned} T : M_n(K) \otimes E &\longrightarrow M_n(E) \\ E_{ij} \otimes a &\longmapsto T(E_{ij} \otimes a) = E_{ij}(a) \end{aligned}$$

Para isso, considere a \mathbb{Z}_n -gradação $M^{(\gamma)} = \langle E_{ij} \mid \overline{i-j} = \gamma \rangle$ com $\gamma \in \mathbb{Z}_n$ de $M_n(K)$. Assim, temos

$$M_n(E)^{(\gamma,0)} = T(M^{(\gamma)} \otimes E_0) \quad e \quad M_n(E)^{(\gamma,1)} = T(M^{(\gamma)} \otimes E_1).$$

Logo, para $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, temos que

$$M_n(E)^{(\gamma,0)} = \langle E_{ij}(a) \mid \overline{i-j} = \gamma, a \in E_0 \rangle$$

$$M_n(E)^{(\gamma,1)} = \langle E_{ij}(a) \mid \overline{i-j} = \gamma, a \in E_1 \rangle$$

é uma $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação da álgebra $M_n(E)$. Em particular, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 2.4.1 Considere o isomorfismo $T : M_2(K) \otimes E \longrightarrow M_2(E)$ tal que

$$T \left(\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \otimes a \right) \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 a \\ \lambda_3 a & \lambda_4 a \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$M_2(K)^{(0)} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right) \right\} \quad e \quad M_2(K)^{(1)} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right) \right\}$$

é uma \mathbb{Z}_2 -graduação para $M_2(K)$. Usando o isomorfismo T obtemos

$$T((M_2(K)^{(0)}) \otimes E_0) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix} = M_2(E)^{(0,0)}$$

$$T((M_2(K)^{(0)}) \otimes E_1) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = M_2(E)^{(0,1)}$$

$$T((M_2(K)^{(1)}) \otimes E_0) = \begin{pmatrix} 0 & E_0 \\ E_0 & 0 \end{pmatrix} = M_2(E)^{(1,0)}$$

$$T(M_2(K)^{(1)}) \otimes E_1) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix} = M_2(E)^{(1,1)}$$

E assim obtemos a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduação $\{M_2(E)^{(0,0)}, M_2(E)^{(0,1)}, M_2(E)^{(1,0)}, M_2(E)^{(1,1)}\}$ da álgebra $M_2(E)$.

Uma aplicação do Teorema 2.3.7 descreve as identidades $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas da álgebra de matrizes $M_n(E) \simeq M_n(K) \otimes E$. Vasilovsky [48] descobriu um sistema de geradores para a álgebra $M_n(K)$ munida de sua \mathbb{Z}_n -graduação natural (veja o Exemplo 1.5.4). Usando este fato e o Teorema 2.3.7, temos o corolário abaixo.

Corolário 2.4.2 O ideal $T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(M_n(E))$ é gerado pelas seguintes identidades multilineares:

$$[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}]$$

$$[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}]$$

$$x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)}$$

$$x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)}$$

$$\begin{aligned}
& x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} - x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)} \\
& x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,0)} \\
& x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,0)} + x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)} \\
& x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)} \\
& x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)}
\end{aligned}$$

para $i \in \mathbb{Z}_n$.

Prova.

Pelo que vimos acima, temos que $M_n(K) \otimes E \simeq M_n(E)$ como álgebras $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas. Então é suficiente mostrar que esse conjunto gera o $T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}$ -ideal $T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(M_n(K) \otimes E)$. Pelo Exemplo 1.5.18, o $T_{\mathbb{Z}_n}$ -ideal de $M_n(K)$ é gerado pelos polinômios

$$\{[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)} - x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$$

Então usando o Teorema 2.3.7 e variando J em $\{1, 2, 3\}$, ou seja, fazendo

$$\begin{aligned}
& J = \emptyset, J = \{2\}, J = \{3\}, J = \{1, 2\}, J = \{1, 3\}, J = \{1, 2, 3\}, \\
& J = \{1\}, J = \{2, 3\}, \text{ temos}
\end{aligned}$$

(i) $J = \emptyset$:

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_\emptyset([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) &= \zeta(\varphi_\emptyset(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_\emptyset(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,0)} x_2^{(0,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,0)} x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}],
\end{aligned}$$

onde α_1 e α_2 são as permutações dos índices nas variáveis de \mathbb{Z}_2 - grau ímpar.

Como neste caso não existem essas variáveis, temos $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = 1$.

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_\emptyset(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)} - x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)}) &= \\
&= \zeta(\varphi_\emptyset(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)})) - \zeta(\varphi_\emptyset(x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)} = \\
&= x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)}.
\end{aligned}$$

(ii) $J = \{2\}$:

- $\zeta_{\{2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) = \zeta(\varphi_{\{2\}}(x_1^{(0)}x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{2\}}(x_2^{(0)}x_1^{(0)})) =$
 $= (-1)^{\alpha_1}x_1^{(0,0)}x_2^{(0,1)} - (-1)^{\alpha_2}x_2^{(0,1)}x_1^{(0,0)} =$
 $= x_1^{(0,0)}x_2^{(0,1)} - x_2^{(0,1)}x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}],$

onde $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = (-1)^{id} = 1$.

- $\zeta_{\{2\}}(x_1^{(i)}x_2^{(-i)}x_3^{(i)} - x_3^{(i)}x_2^{(-i)}x_1^{(i)}) =$
 $= \zeta(\varphi_{\{2\}}(x_1^{(i)}x_2^{(-i)}x_3^{(i)})) - \zeta(\varphi_{\{2\}}(x_3^{(i)}x_2^{(-i)}x_1^{(i)})) =$
 $= (-1)^{\alpha_1}x_1^{(i,0)}x_2^{(-i,1)}x_3^{(i,0)} - (-1)^{\alpha_2}x_3^{(i,0)}x_2^{(-i,1)}x_1^{(i,0)} =$
 $= x_1^{(i,0)}x_2^{(-i,1)}x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)}x_2^{(-i,1)}x_1^{(i,0)},$

onde $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = (-1)^{id} = 1$.

(iii) $J = \{3\}$:

- $\zeta_{\{3\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) = \zeta(\varphi_{\{3\}}(x_1^{(0)}x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{3\}}(x_2^{(0)}x_1^{(0)})) =$
 $= (-1)^{\alpha_1}x_1^{(0,0)}x_2^{(0,0)} - (-1)^{\alpha_2}x_2^{(0,0)}x_1^{(0,0)} =$
 $= x_1^{(0,0)}x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)}x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}],$

novamente α_1 e α_2 são as permutações dos índices nas variáveis de \mathbb{Z}_2 -grau ímpar. Como neste caso não existem essas variáveis, temos $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = 1$. Note que obtemos o mesmo polinômio quando fizemos $\zeta_{\emptyset}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}])$.

- $\zeta_{\{3\}}(x_1^{(i)}x_2^{(-i)}x_3^{(i)} - x_3^{(i)}x_2^{(-i)}x_1^{(i)}) =$
 $= \zeta(\varphi_{\{3\}}(x_1^{(i)}x_2^{(-i)}x_3^{(i)})) - \zeta(\varphi_{\{3\}}(x_3^{(i)}x_2^{(-i)}x_1^{(i)})) =$
 $= (-1)^{\alpha_1}x_1^{(i,0)}x_2^{(-i,0)}x_3^{(i,1)} - (-1)^{\alpha_2}x_3^{(i,1)}x_2^{(-i,0)}x_1^{(i,0)} =$
 $= x_1^{(i,0)}x_2^{(-i,0)}x_3^{(i,1)} - x_3^{(i,1)}x_2^{(-i,0)}x_1^{(i,0)}.$

onde $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = (-1)^{id} = 1$.

(iv) $J = \{1, 2\}$:

- $\zeta_{\{1,2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) = \zeta(\varphi_{\{1,2\}}(x_1^{(0)}x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{1,2\}}(x_2^{(0)}x_1^{(0)})) =$
 $= (-1)^{\alpha_1}x_1^{(0,1)}x_2^{(0,1)} - (-1)^{\alpha_2}x_2^{(0,1)}x_1^{(0,1)} =$
 $= x_1^{(0,1)}x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)}x_1^{(0,1)},$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1\ 2)$.

- $\zeta_{\{1,2\}}(x_1^{(i)}x_2^{(-i)}x_3^{(i)} - x_3^{(i)}x_2^{(-i)}x_1^{(i)}) =$
 $= \zeta(\varphi_{\{1,2\}}(x_1^{(i)}x_2^{(-i)}x_3^{(i)})) - \zeta(\varphi_{\{1,2\}}(x_3^{(i)}x_2^{(-i)}x_1^{(i)})) =$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)} = \\
&= x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,0)} + x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)},
\end{aligned}$$

onde também $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1 \ 2)$.

(v) $J = \{1, 3\}$:

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_{\{1,3\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) &= \zeta(\varphi_{\{1,3\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{1,3\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} = \\
&= x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} = -(x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} - x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)}) = -[x_2^{(0,0)}, x_1^{(0,1)}],
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = \alpha_2 = id$. Note que o polinômio encontrado é consequência do polinômio $\zeta_{\{2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}]$.

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_{\{1,3\}}(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)} - x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)}) &= \\
&= \zeta(\varphi_{\{1,3\}}(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)})) - \zeta(\varphi_{\{1,3\}}(x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} - (-1)^{\alpha_2} x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)} = \\
&= x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)},
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1 \ 3)$.

(vi) $J = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_{\{1,2,3\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) &= \zeta(\varphi_{\{1,2,3\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{1,2,3\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)} = \\
&= x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)} = x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)},
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1 \ 2)$. Note que esse polinômio é o mesmo polinômio obtido por $\zeta_{\{1,2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}])$.

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_{\{1,2,3\}}(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)} - x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)}) &= \\
&= \zeta(\varphi_{\{1,2,3\}}(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)})) - \zeta(\varphi_{\{1,2,3\}}(x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,1)} - (-1)^{\alpha_2} x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)} = \\
&= x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)},
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1 \ 3)$.

(vii) $J = \{1\}$:

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_{\{1\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) &= \zeta(\varphi_{\{1\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{1\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} = -(x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} - x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)}) = \\
&= -[x_2^{(0,0)}, x_1^{(0,1)}],
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = \alpha_2 = id$. Note que o polinômio encontrado é consequência do polinômio $\zeta_{\{2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}]$.

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_{\{1\}}(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)} - x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)}) &= \\
&= \zeta(\varphi_{\{1\}}(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)})) - \zeta(\varphi_{\{1\}}(x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)} = \\
&= x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)} = \\
&= -(x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)} - x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)}),
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = \alpha_2 = id$. Observe que o polinômio encontrado é consequência do polinômio $\zeta_{\{3\}}(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)} - x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)}) = x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} - x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)}$.

(viii) $J = \{2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_{\{2,3\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) &= \zeta(\varphi_{\{2,3\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{2,3\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,0)} x_2^{(0,1)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,1)} x_1^{(0,0)} = \\
&= x_1^{(0,0)} x_2^{(0,1)} - x_2^{(0,1)} x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}],
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = \alpha_2 = id$. Note que o polinômio encontrado é o mesmo polinômio obtido por $\zeta_{\{2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}])$.

$$\begin{aligned}
\bullet \zeta_{\{2,3\}}(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)} - x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)}) &= \\
&= \zeta(\varphi_{\{2,3\}}(x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)})) - \zeta(\varphi_{\{2,3\}}(x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,1)} - (-1)^{\alpha_2} x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,0)} = \\
&= x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,0)} = \\
&= x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,0)} + x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,1)},
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (2 \ 3)$. Observe que o polinômio encontrado é consequência do polinômio $x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,0)} + x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)}$, obtido fazendo $J = \{1, 2\}$.

E assim obtemos identidades geradoras de $T_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2}(M_n(K) \otimes E)$. ■

Observação 2.4.3 Para o caso particular $n = 2$, temos que os polinômios

$$\{[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} - x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}\}$$

geram o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal $T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(K))$ (veja o Exemplo 1.5.17). Logo, no resultado anterior, podemos considerar apenas $i = 1$. Assim, $T_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(K) \otimes E)$ é gerado pelos seguintes polinômios $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados

$$\begin{aligned}
& [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}], \quad [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}] \\
& \quad x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)} \\
& x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)} \\
& x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)} \\
& x_1^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,0)} \\
& x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)} \\
& x_1^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,1)} + x_3^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,1)} \\
& x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,1)} + x_3^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora, daremos um pouco mais de atenção para a álgebra $M_2(E)$. Um teorema bem conhecido de Kemer [32], chamado **Teorema do produto tensorial**, diz que, em característica zero, as álgebras $M_{k,l}(E) \otimes E$ e $M_{k+l}(E)$ são PI-equivalentes, ou seja, essas álgebras possuem as mesmas identidades polinomiais (veja também em Regev [43]). Usando os resultados demonstrados na seção anterior, vamos mostrar um caso parcial deste teorema.

Teorema 2.4.4 *As álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ são PI-equivalentes em característica zero.*

Prova. Conforme o Exemplo 1.5.17, as identidades polinomiais \mathbb{Z}_2 -graduadas de $M_{1,1}(E)$ são geradas pelo conjunto

$$\{[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], \quad x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}\}.$$

Então, variando $J \subseteq \{1, 2, 3\}$ e usando o Teorema 2.3.7, obtemos:

(i) $J = \emptyset$:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \zeta_{\emptyset}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) &= \zeta(\varphi_{\emptyset}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\emptyset}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
&= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,0)} x_2^{(0,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,0)} x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}],
\end{aligned}$$

onde α_1 e α_2 são as permutações dos índices nas variáveis de \mathbb{Z}_2 - grau ímpar.

Como neste caso não existem essas variáveis, temos $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = 1$.

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\emptyset}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}) = \\
& = \zeta(\varphi_{\emptyset}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)})) + \zeta(\varphi_{\emptyset}(x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,0)} + (-1)^{\alpha_2} x_3^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)} = \\
& = x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

(ii) $J = \{2\}$:

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\{2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) = \zeta(\varphi_{\{2\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{2\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,0)} x_2^{(0,1)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,1)} x_1^{(0,0)} = \\
& = x_1^{(0,0)} x_2^{(0,1)} - x_2^{(0,1)} x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}],
\end{aligned}$$

onde $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = (-1)^{id} = 1$.

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\{2\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}) = \\
& = \zeta(\varphi_{\{2\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)})) + \zeta(\varphi_{\{2\}}(x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} + (-1)^{\alpha_2} x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,0)} = \\
& = x_1^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,0)},
\end{aligned}$$

onde $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = (-1)^{id} = 1$.

(iii) $J = \{1\}$:

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\{1\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) = \zeta(\varphi_{\{1\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{1\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} = \\
& = x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} = -(x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} - x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)}) = \\
& = -[x_2^{(0,0)}, x_1^{(0,1)}],
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = \alpha_2 = id$. Note que o polinômio encontrado é consequência do polinômio $\zeta_{\{2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}])$.

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\{1\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}) = \\
& = \zeta(\varphi_{\{1\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)})) + \zeta(\varphi_{\{1\}}(x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,0)} + (-1)^{\alpha_2} x_3^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,1)} = \\
& = x_1^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,1)},
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = \alpha_2 = id$.

(iv) $J = \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \bullet \zeta_{\{1,2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) &= \zeta(\varphi_{\{1,2\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{1,2\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\ &= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)} = \\ &= x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)}, \end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1 \ 2)$.

$$\begin{aligned} \bullet \zeta_{\{1,2\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}) &= \\ &= \zeta(\varphi_{\{1,2\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)})) + \zeta(\varphi_{\{1,2\}}(x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})) = \\ &= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} + (-1)^{\alpha_2} x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)} = \\ &= x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)}, \end{aligned}$$

onde também $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1 \ 2)$.

(v) $J = \{1, 3\}$:

$$\begin{aligned} \bullet \zeta_{\{1,3\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) &= \zeta(\varphi_{\{1,3\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{1,3\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\ &= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} = \\ &= x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} = -(x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} - x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)}) = -[x_2^{(0,0)}, x_1^{(0,1)}], \end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = \alpha_2 = id$. Note que o polinômio encontrado é consequência do polinômio $\zeta_{\{2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}])$.

$$\begin{aligned} \bullet \zeta_{\{1,3\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}) &= \\ &= \zeta(\varphi_{\{1,3\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)})) + \zeta(\varphi_{\{1,3\}}(x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})) = \\ &= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,1)} + (-1)^{\alpha_2} x_3^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,1)} = \\ &= x_1^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,1)}, \end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1 \ 3)$.

(vi) $J = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \bullet \zeta_{\{1,2,3\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) &= \zeta(\varphi_{\{1,2,3\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{1,2,3\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\ &= (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)} = \\ &= x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)} = x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)}, \end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1 \ 2)$. Note que esse polinômio é o mesmo polinômio obtido por $\zeta_{\{1,2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}])$.

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\{1,2,3\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}) = \\
& = \zeta(\varphi_{\{1,2,3\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)})) + \zeta(\varphi_{\{1,2,3\}}(x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,1)} + (-1)^{\alpha_2} x_3^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)} = \\
& = x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)},
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (1\ 3)$.

(vii) $J = \{3\}$:

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\{3\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) = \zeta(\varphi_{\{3\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{3\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,0)} x_2^{(0,0)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,0)} x_1^{(0,0)} = \\
& = x_1^{(0,0)} x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)} x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}],
\end{aligned}$$

novamente α_1 e α_2 são as permutações dos índices nas variáveis de \mathbb{Z}_2 -grau ímpar. Como neste caso não existem essas variáveis, temos $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = 1$. Note que obtivemos o mesmo polinômio quando fizemos $\zeta_{\emptyset}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}])$.

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\{3\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}) = \\
& = \zeta(\varphi_{\{3\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)})) + \zeta(\varphi_{\{3\}}(x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,1)} + (-1)^{\alpha_2} x_3^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)} = \\
& = x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,1)} + x_3^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

onde $(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = (-1)^{id} = 1$.

Observe que o polinômio encontrado é consequência do polinômio

$$x_1^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,1)}, \text{ obtido para } J = \{1\}.$$

(viii) $J = \{2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\{2,3\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]) = \zeta(\varphi_{\{2,3\}}(x_1^{(0)} x_2^{(0)})) - \zeta(\varphi_{\{2,3\}}(x_2^{(0)} x_1^{(0)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(0,0)} x_2^{(0,1)} - (-1)^{\alpha_2} x_2^{(0,1)} x_1^{(0,0)} = \\
& = x_1^{(0,0)} x_2^{(0,1)} - x_2^{(0,1)} x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}],
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = \alpha_2 = id$. Note que o polinômio encontrado é o mesmo polinômio obtido por $\zeta_{\{2\}}([x_1^{(0)}, x_2^{(0)}])$.

$$\begin{aligned}
& \bullet \zeta_{\{2,3\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}) = \\
& = \zeta(\varphi_{\{2,3\}}(x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)})) + \zeta(\varphi_{\{2,3\}}(x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)})) = \\
& = (-1)^{\alpha_1} x_1^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,1)} + (-1)^{\alpha_2} x_3^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,0)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_1^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,0)} = \\
&= -(x_3^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,0)} - x_1^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,1)}),
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = id$ e $\alpha_2 = (2 \ 3)$. Observe que o polinômio encontrado é consequência do polinômio $x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)}$, obtido para $J = \{1, 2\}$.

E assim obtemos o seguinte sistema de geradores para $T_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E) \otimes E)$:

$$\begin{aligned}
&[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}], \quad [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}] \\
&x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)} \\
&x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)} \\
&x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,1)} + x_3^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)} \\
&x_1^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,0)} \tag{2.17} \\
&x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)} \\
&x_1^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,1)} \\
&x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)}
\end{aligned}$$

Vamos obter agora uma $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação para $M_2(E)$ com respeito à qual as identidades são geradas pelos polinômios em (2.17).

Considere agora o automorfismo $t : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tal que $t(0, 1) = (0, 1)$ e $t(1, 0) = (1, 1)$ (Observe que $t(1, 1) = (1, 0)$). Tomando agora $M^{(i,j)} = M_2(E)^{t^{-1}(i,j)}$, para $(i, j) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, temos que $\{M^{(i,j)} \mid (i, j) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\}$ é uma nova $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação para $M_2(E)$.

Sejam $T_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(E))$ e $T'_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(E))$ os ideais das identidades $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas de $M_2(E)$ com respeito a primeira e a nova graduação, respectivamente. Temos que $f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) \in T_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2} M_2(E)$ se, e somente se, $f(x_1^{(t(g_1))}, \dots, x_n^{(t(g_n))}) \in T'_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2} M_2(E)$. Observando que os polinômios de (2.17) são obtidos a partir dos polinômios (2.16) trocando-se os graus das variáveis pelas suas imagens por t , concluímos que $T'_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(E))$ é gerado por (2.16). Logo, $T'_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(E)) = T_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E) \otimes E)$ e daí, pela Proposição 1.5.20, temos o resultado. ■

Capítulo 3

Polinômios centrais graduados para

$$R \otimes E$$

Neste capítulo estudaremos os polinômios centrais graduados para $R \otimes E$ a partir dos polinômios centrais da álgebra graduada R . Como consequência, obteremos os polinômios centrais $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados para a álgebra $M_2(E)$, quando K é infinito e $\text{char}K \neq 2$, e os polinômios centrais $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados para a álgebra $M_n(E)$, quando $\text{char}K = 0$. Determinaremos também as identidades e polinômios centrais \mathbb{Z}_2 -graduados para $E \otimes E$, considerando uma \mathbb{Z}_2 -gradação diferente da usual. Nos basearemos nas idéias desenvolvidas no capítulo 2 de como relacionar as identidades graduadas das álgebras R e $R \otimes E$. Os principais resultados que serão apresentados neste capítulo foram obtidos por Alves, Brandão e Koshlukov [2]

3.1 Polinômios centrais de R para $R \otimes E$

Seja $\{R^{(g)} \mid g \in G\}$ um G -gradação para R . Lembremos que uma $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação para $R \otimes E$ induzida a partir da G -gradação de R é definida como sendo $(R \otimes E)^{(g,i)} = R^{(g)} \otimes E_i$. Assim, deduziremos nesta seção um método para a obtenção de polinômios centrais $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados para a álgebra $R \otimes E$ a partir de polinômios centrais G -graduados da álgebra R . O método é análogo ao desenvolvido no capítulo

2. Recordando o Teorema 2.1.5, daremos aqui um resultado análogo para polinômios centrais. Lembramos que $\overline{C}_G(R)$ denota o conjunto dos polinômios centrais essenciais G -graduados para R (veja a Definição 1.5.16).

Lema 3.1.1 *Se $f \in \overline{C}_G(R) \cap V_n^G$ e se $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, com $|J|$ par, então $\zeta_J(f) \in \overline{C}_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$.*

Prova. Como f é multilinear temos que

$$f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}^{(g_{\sigma(1)})} \dots x_{\sigma(n)}^{(g_{\sigma(n)})}.$$

Seja $J = \{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, com $i_1 < \dots < i_t$ e t par.

Seja agora $(a_1 \otimes b_1, \dots, a_n \otimes b_n)$ uma substituição $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -admissível para $\zeta_J(f)$. Pelo Lema 2.1.4 temos $\zeta_J(f)(a_1 \otimes b_1, \dots, a_n \otimes b_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes b_1 \dots b_n \in Z(R) \otimes Z(E) = Z(R \otimes E)$, pois, como $|J|$ é par, temos que $b_1 \dots b_n \in E_0 = Z(E)$, e além disso, (a_1, \dots, a_n) é uma substituição G -admissível para f . Logo, $\zeta_J(f) \in C_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$.

Por outro lado, como $f \notin T_G(R)$ e $\dim E = \infty$, podemos tomar $b_1, \dots, b_n \in E$ tais que $b_1 \dots b_n \neq 0$, e $a_1, \dots, a_n \in R$ tais que $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Logo $\zeta_J(f)(a_1 \otimes b_1, \dots, a_n \otimes b_n) \neq 0$. Assim, temos que $f \notin T_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$ e daí $f \in \overline{C}_{G \times \mathbb{Z}_2}(R \otimes E)$. ■

Observação 3.1.2 *Note que o lema anterior é válido para $\text{char} K \neq 2$.*

Usando o que foi visto no Exemplo 1.5.19, vejamos algumas aplicações do lema anterior.

Exemplo 3.1.3 *Sabemos que $f = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}] \in \overline{C}_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E))$. Portanto, para $J = \emptyset$, obtemos*

$$\zeta_\emptyset(f) = [x_1^{(1,0)}, x_2^{(1,0)}] \in \overline{C}_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E) \otimes E)$$

Também

$$\zeta_{\{1,2\}}(f) = x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} + x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)} \in \overline{C}_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E) \otimes E).$$

Exemplo 3.1.4 *O polinômio $f = x_1^1 x_2^1 + x_2^1 x_1^1$ pertence a $\overline{C}_{\mathbb{Z}_2}(M_2(K))$. Portanto, para $J = \emptyset$,*

$$\zeta_\emptyset(f) = x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} + x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)} \in C_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(K) \otimes E)$$

Do mesmo modo,

$$\zeta_{\{1,2\}}(f) = x_1^{(1,1)}x_2^{(1,1)} - x_2^{(1,1)}x_1^{(1,1)} = [x_1^{(1,1)}, x_2^{(1,1)}] \in \overline{C}_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(K) \otimes E)$$

Exemplo 3.1.5 *Seja $G = \{0\}$. Considerando a graduação pelo grupo G , temos apenas uma componente, a saber, $(M_2(K))_0 = M_2(K)$. Se $f \in \overline{C}(M_2(K))$, podemos ver f como polinômio G -graduado, e como $\{0\} \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$, para algum $J \subseteq \mathbb{N}$, temos que $\zeta_J(f)$ é \mathbb{Z}_2 -graduado.*

Tomando $f = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$, sabemos que f (ver Exemplo 1.4.2) é um polinômio central essencial para $M_2(K)$. Considerando f graduado pelo grupo trivial e tomando $J \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ obtemos polinômios centrais essenciais $\zeta_J(f)$ para a álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada $M_2(K) \otimes E \cong M_2(E)$. Quando $J = \emptyset$, obtemos

$$\zeta_\emptyset(f) = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] \circ [x_3^{(0)}, x_4^{(0)}] \in \overline{C}_{\mathbb{Z}_2}(M_2(K) \otimes E)$$

Agora, para $J = \{1, 2, 3, 4\}$, obtemos

$$\zeta_J(f) = 4(x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}) \circ (x_3^{(1)} \circ x_4^{(1)})$$

Já quando $J = \{1, 2\}$, obtemos

$$\zeta_J(f) = 2((x_1^{(1)} \circ [x_3^{(0)}, x_4^{(0)}]))$$

Quando $J = \{1, 3\}$, obtemos

$$\zeta_J(f) = \frac{1}{2}[[x_1^{(1)}, x_2^{(0)}], [x_3^{(1)}, x_4^{(0)}]].$$

Vamos relembrar o conceito de $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -partição obtida a partir de uma G -partição de $\{1, \dots, n\}$. Sejam $J \subseteq \hat{n}$ e $\mathfrak{S} \vdash_G n$ uma G -partição. Então definimos uma $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -partição \mathfrak{S}' de \hat{n} fixando $\mathfrak{S}'_{(g,1)} = \mathfrak{S}_g \cap J$ e $\mathfrak{S}'_{(g,0)} = \mathfrak{S} - J$. Analogamente, se $\mathfrak{S}' \vdash_{G \times \mathbb{Z}_2} \hat{n}$ temos uma G -partição \mathfrak{S} de \hat{n} fixando $\mathfrak{S}_g = \mathfrak{S}'_{(g,0)} \cup \mathfrak{S}'_{(g,1)}$. Note que para cada $J \subseteq \hat{n}$ fixado, então a correspondência $\mathfrak{S} \longleftrightarrow \mathfrak{S}'$ é biunívoca.

Lema 3.1.6 *Sejam $\mathfrak{S}' \vdash_{G \times \mathbb{Z}_2} \hat{n}$ uma $(G \times \mathbb{Z}_2)$ -partição e $J = \bigcup_{g \in G} \mathfrak{S}'_{(g,1)}$. Se $f \in V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}')$, então $f = \zeta_J(h)$ para algum $h \in V_n^G(\mathfrak{S})$, onde \mathfrak{S} é a G -partição de \hat{n} correspondente a \mathfrak{S}' .*

Prova. Considere $J = \{i_1, \dots, i_t\}$, com $i_1 < \dots < i_t$, e seja m um monômio de f . Então

$$m = m_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} m_1 x_{\sigma(i_2)}^{(g_2,1)} \dots m_{t-1} x_{\sigma(i_t)}^{(g_t,1)} m_t,$$

onde σ é uma permutação de J e os m'_i 's são monômios nas variáveis de $K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ com \mathbb{Z}_2 -grau zero. Escrevendo $f = \sum \alpha_m m$, considere as aplicações φ_J e ζ_J (Definição 2.1.1) e a aplicação ζ também definida na Seção 2.1. Considerando agora o homomorfismo de álgebras $\gamma : K\langle X \mid G \times \mathbb{Z}_2 \rangle \longrightarrow K\langle X \mid G \rangle$ tal que $\gamma(x^{(g,1)}) = x^g$ para cada $g \in G$ e $i \in \mathbb{Z}_2$, temos pela Proposição 2.1.3 que $(\varphi_J \circ \gamma)(p) = p$ e $(\gamma \circ \varphi_J)(q) = q$ para cada $p \in V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathfrak{S}')$ e $q \in V_n^G(\mathfrak{S})$. Portanto se $h = \gamma\zeta(f) \in V_n^G(\mathfrak{S})$ temos, $\zeta_J(h) = \zeta_J(\gamma\zeta(f)) = \zeta(\varphi_J \circ \gamma \circ \zeta(f)) = \zeta\zeta(f) = f$.

Resta agora mostrar que $h = \gamma\zeta(f) \in V_n^G(\mathfrak{S})$. De fato,

$$\begin{aligned} h &= \gamma\zeta(f) = \\ &= \gamma\zeta\left(\sum \alpha_m m_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} \dots m_{t-1} x_{\sigma(i_t)}^{(g_t,1)} m_t\right) \end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned} h &= \gamma \sum (-1)^\sigma \alpha_m m_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} \dots m_{t-1} x_{\sigma(i_t)}^{(g_t,1)} m_t = \\ &= \sum (-1)^\sigma \alpha_m \bar{m}_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1)} \dots \bar{m}_{t-1} x_{\sigma(i_t)}^{(g_t)} \bar{m}_t \in V_n^G(\mathfrak{S}), \end{aligned}$$

onde $\bar{m}_i = \gamma(m_i)$, $0 \leq i \leq t$. ■

3.2 Polinômios centrais $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados para a álgebra $M_2(K) \otimes E$

A descrição das identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas para $M_2(K)$, com K infinito e $\text{char}K \neq 2$ foi apresentada no Exemplo 1.5.17. A descrição dos polinômios centrais \mathbb{Z}_2 -graduadas para esta mesma álgebra foi apresentada no Exemplo 1.5.19.

Recordemos que a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação em $M_2(E)$ é dada por $(M_2(K) \otimes E)^{(\alpha,\beta)} = M_2(K)^{(\alpha)} \otimes E_\beta$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. Recordemos ainda que uma base das identidades $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduadas de $M_2(E)$ foi descrita no Capítulo 2 em $\text{char}K = 0$. No caso em que K é infinito e $\text{char}K = p > 2$, o mesmo resultado foi provado em [6]. Em $\text{char}K = 0$, tal base pode ser obtida aplicando ζ_J nos geradores

das identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas para $M_2(K)$ (veja a Observação 2.4.3), obtendo-se os seguintes polinômios:

$$\begin{aligned}
g_1 &= [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}] \\
g_2 &= [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}] \\
g_3 &= x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)} \\
g_4 &= x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)} \\
g_5 &= x_1^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,1)} \\
g_6 &= x_1^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,0)} \\
g_7 &= x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)} \\
g_8 &= x_1^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_3^{(1,1)} + x_3^{(1,1)} x_2^{(1,0)} x_1^{(1,1)} \\
g_9 &= x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_3^{(1,1)} + x_3^{(1,1)} x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Os polinômios $z_1 g_j z_2$, com $z_1, z_2 \in X$, geram $T_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(K) \otimes E)$ como um $T_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$ -espaço.

Considerando agora os polinômios $h_1 = x_1^{(1,0)} \circ x_2^{(1,0)}$ e $h_2 = [x_1^{(1,1)}, x_2^{(1,1)}]$ de $K\langle X \mid \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rangle$ e lembrando que a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -gradação para $M_2(E)$, induzida pela de $M_2(K) \otimes E$, é dada por

$$\begin{aligned}
(M_2(E))^{(0,0)} &= \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}, & (M_2(E))^{(0,1)} &= \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}, \\
(M_2(E))^{(1,0)} &= \begin{pmatrix} 0 & E_0 \\ E_0 & 0 \end{pmatrix}, & (M_2(E))^{(1,1)} &= \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

temos o seguinte resultado.

Lema 3.2.1 *Os polinômios $h_1, h_2 \in \overline{C}_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(E))$.*

Prova. Para mostrar que os polinômios h_1 e h_2 são polinômios centrais $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados essenciais para $M_2(E)$, observemos primeiramente que $f_3 = x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}$ é um polinômio central essencial \mathbb{Z}_2 -graduado para $M_2(K)$. De fato, sejam $A, B \in M_2(K)^{(1)}$, ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

com $a_1, b_1, a_2, b_2 \in K$. Tem-se que

$$\begin{aligned} f_3(A, B) &= AB + BA = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_2 & 0 \\ 0 & b_1 a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 b_1 & 0 \\ 0 & b_2 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_2 + b_1 a_2 & 0 \\ 0 & b_1 a_2 + b_2 a_1 \end{pmatrix} = \\ &= (a_1 b_2 + b_1 a_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z(M_2(K)). \end{aligned}$$

Agora observe que podemos tomar a_1, a_2, b_1 e b_2 tais que $a_1 b_2 + b_1 a_2 \neq 0$ e daí $f_3 \notin T_2(M_2(K))$. Assim $f_3 \in \overline{C}_2(M_2(K))$.

Pelo Lema 3.1.1, para $J_1 = \emptyset$ e $J_2 = \{1, 2\}$ temos que $\zeta_{J_1}(f_3) = x_1^{(1,0)} x_2^{(1,0)} + x_2^{(1,0)} x_1^{(1,0)}$ e $\zeta_{J_2}(f_3) = x_1^{(1,1)} x_2^{(1,1)} - x_2^{(1,1)} x_1^{(1,1)}$ pertencem a $\overline{C}_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(K) \otimes E)$. Como $M_2(K) \otimes E$ e $M_2(E)$ são isomorfas como álgebras H -graduadas, temos o resultado. ■

Nos próximos resultados, vamos descrever geradores para o T -espaço $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -graduado $C_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}(M_2(E))$. Seja $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e denote por V o T_H -espaço gerado pelos polinômios $z_1 g_i z_2$, $1 \leq i \leq 9$, e por h_1 e h_2 .

Lema 3.2.2 $T_H(M_2(E)) \subseteq V \subseteq C_H(M_2(E))$.

Prova. Como o T_H -espaço $T_H(M_2(E))$ é gerado por $z_1 g_i z_2 \in V$, para $1 \leq i \leq 9$, temos a primeira inclusão. Além disso, $z_1 g_i z_2 \in T_H(M_2(E)) \subseteq C_H(M_2(E))$, e pelo Lema 3.2.1, $h_1, h_2 \in \overline{C}_H(M_2(E))$. Assim $V \subseteq C_H(M_2(E))$. ■

Teorema 3.2.3 *Seja K infinito, com $\text{char} K \neq 2$. Então $V = C_H(M_2(E))$.*

Prova. Pelo Lema 3.2.2, $V \subseteq C_H(M_2(E))$. Então, basta provar que $V \supseteq C_H(M_2(E))$. Seja $f \in C_H(M_2(E))$ um polinômio multihomogêneo. Observe que

$$Z(M_2(E)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid \text{com } a \in E_0 \right\} \subseteq (M_2(E))^{(0,0)}.$$

Logo, como $f \in C_H(M_2(E))$, se $\partial_H(f) \neq (0, 0)$ então f é identidade, e assim nos resta apenas trabalhar com $\partial_H(f) = (0, 0)$.

Vamos supor que f depende apenas de variáveis de graus $(0, j)$, com $j \in \mathbb{Z}_2$, ou seja,

$$f = f(x_1^{(0,0)}, \dots, x_n^{(0,0)}, x_1^{(0,1)}, \dots, x_m^{(0,1)}).$$

Os polinômios $[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}]$, $[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}]$, $x_1^{(0,1)} \circ x_2^{(0,1)}$ são identidades H -graduadas para $M_2(E)$. Como f é multihomogêneo e

$$x_i^{(0,0)} x_j^{(0,0)} \equiv x_j^{(0,0)} x_i^{(0,0)} \pmod{T_H(M_2(E))},$$

$$x_i^{(0,0)} x_j^{(0,1)} \equiv x_j^{(0,1)} x_i^{(0,0)} \pmod{T_H(M_2(E))},$$

$$x_i^{(0,1)} x_j^{(0,1)} \equiv -x_j^{(0,1)} x_i^{(0,1)} \pmod{T_H(M_2(E))},$$

temos

$$f \equiv \lambda(x_1^{(0,0)})^{l_1} \dots (x_n^{(0,0)})^{l_n} (x_1^{(0,1)})^{k_1} \dots (x_m^{(0,1)})^{k_m} \pmod{T_H(M_2(E))},$$

com $\lambda \in K$.

Note que $(x_1^{(0,1)})^2 \in T_H(M_2(E))$, pois, dado $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in (M_2(E))^{(0,1)}$, com $x, y \in E_1$, temos

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, se $k_j \geq 2$ para algum $j = 1, \dots, m$, temos $(x_j^{(0,1)})^{k_j} \in T_H(M_2(E))$ e consequentemente $f \in T_H(M_2(E)) \subseteq V$. Assim, podemos considerar $k_j = 1$, para $j = 1, \dots, m$, e daí

$$f \equiv \lambda(x_1^{(0,0)})^{l_1} \dots (x_n^{(0,0)})^{l_n} (x_1^{(0,1)}) \dots (x_m^{(0,1)}) \pmod{T_H(M_2(E))}$$

Então substituindo $x_i^{(0,0)}$ por $E_{11}(1_E)$ e $x_j^{(0,1)}$ por $E_{11}(e_j)$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, temos

$$\bar{f} - \lambda(E_{11}(1_E) \dots E_{11}(1_E))(E_{11}(e_m) \dots E_{11}(e_j)) = 0$$

onde \bar{f} é o polinômio f avaliado nesta substituição. Assim, temos

$$\bar{f} - \lambda E_{11}(e_1 \dots e_m) = 0$$

e daí

$$\lambda E_{11}(e_1 \dots e_m) = \bar{f} \in Z(M_2(E)).$$

Isso implica em $\lambda = 0$. e portanto $f \in T_H(M_H(E)) \subseteq V$.

Agora vamos considerar f dependendo de variáveis de H -grau $(1, j)$, com $j \in \mathbb{Z}_2$ (possivelmente poderá aparecer algumas variáveis de H -grau $(0, j)$). Note então que qualquer monômio m de f pode ser escrito da forma

$$m = uv$$

onde os H -graus de u e de v são ambos $(1, 0)$ ou ambos $(1, 1)$. De fato, primeiramente, lembrando que o H -grau de f é $(0, 0)$, considere o H -grau de u igual a $(1, 0)$. Daí podemos escrever

$$(0, 0) = \partial(uv) = \partial(u) + \partial(v) = (1, 0) + \partial(v)$$

supondo $\partial(v) = (s, t)$, com $s, t \in \mathbb{Z}_2$, temos $(1, 0) + (s, t) = (0, 0)$. Logo, $\partial(v) = (1, 0)$.

Supondo agora que $\partial(u) = (1, 1)$ e $\partial(v) = (s, t)$ temos

$$(0, 0) = \partial(uv) = (1 + s, 1 + t)$$

e daí $\partial(v) = (1, 1)$.

Observe ainda que $uv = \frac{1}{2}[u, v] + u \circ v$. Se u e v forem ambos de H -grau $(1, 0)$, então $u \circ v \in V$, pois $h_1 = x_1^{(1,0)} \circ x_2^{(1,0)} \in V$, enquanto que $[u, v]$ nos dá uma matriz de traço zero em $M_2(E)$. De fato, observe que dados $A, B \in (M_2(E))^{(1,0)}$ com $A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, sendo $a, b, c, d \in E_0$, temos

$$\begin{aligned} [A, B] &= \begin{pmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} db & 0 \\ 0 & ca \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} db - ac & 0 \\ 0 & ca - bd \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} bd - ac & 0 \\ 0 & ac - bd \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Veja que o traço da última matriz é zero.

Por outro lado, quando u e v forem ambos de H -grau $(1, 1)$, então $[u, v] \in V$, pois $h_2 = [x_1^{(1,1)}, x_2^{(1,1)}] \in V$, e ainda temos que $u \circ v$ nos dá uma matriz de traço zero em

$M_2(E)$. De fato, sejam $A, B \in (M_2(E))^{(1,1)}$ tais que $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, com $x, y \in E_1$, e

$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, com $a, b \in E_1$. Então temos

$$\begin{aligned} AB + BA &= \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} xa & 0 \\ 0 & yb \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} by & 0 \\ 0 & ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & 0 \\ 0 & yb \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -yb & 0 \\ 0 & -xa \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} xa - yb & 0 \\ 0 & yb - xa \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que a última matriz tem traço nulo.

Assim, podemos escrever $f = f_1 + f_2$, onde $f_1 \in V$ e f_2 nos dá uma matriz de traço nulo em $M_2(E)$. Observe ainda que $f \in C_H(M_2(E))$ e $V \subseteq C_H(M_2(E))$, e daí $f_1 \in C_H(M_2(E))$. Logo, $f_2 \in C_H(M_2(E))$. Mas, o centro de $M_2(E)$ não contém matrizes de traço zero, com exceção da matriz nula. Assim, $f_2 \in T_H(M_2(E)) \subseteq V$. Como $f_1 \in V$, temos portanto $f \in V$. ■

Proposição 3.2.4 $T_G(A) = T_G(B) \Rightarrow C_G(A) = C_G(B)$.

Prova. Seja $f \in C_G(A)$, com $f = f(x_1^{g_1}, \dots, x_n^{g_n})$. Dados $a_i \in A^{(g_i)}$, temos $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$, ou seja, $[f(a_1, \dots, a_n), b] = 0$ para todo $b \in A$, e em particular, se $b \in A^{(g)}$ para qualquer $g \in G$. Assim, $g = [f(x_1^{g_1}, \dots, x_n^{g_n}), x_{n+1}^{(g)}] \in T_G(A)$ e daí $g \in T_G(B)$, donde $f \in C_G(B)$. A outra inclusão é análoga. ■

Corolário 3.2.5 *Seja $\text{char}K = 0$. Então $C_H(M_{1,1}(E) \otimes E) = V$.*

Prova. Pelo teorema 2.4.4 as álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ satisfazem as mesmas identidades H -graduadas. Logo, pela Proposição 3.2.4 e o Teorema 3.2.3, temos $C_H(M_{1,1}(E) \otimes E) = C_H(M_2(E)) = V$. ■

3.3 Polinômios centrais $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)$ -graduados para a álgebra $M_n(E)$

Nesta seção vamos considerar $\text{char}K = 0$. Tomando $n \geq 2$, denote $G = \mathbb{Z}_n$ e $H = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$. Sejam $h_0 = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ e $f_i = x_1^{(i)} x_2^{(-i)} x_3^{(i)} - x_3^{(i)} x_2^{(-i)} x_1^{(i)}$ com $i \in G$. Denote por B_n o subgrupo cíclico gerado pelo n -ciclo $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ do grupo simétrico S_n . Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ uma n -upla de elementos de G . Então α é chamada uma **sequência completa** se $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$ em G e $\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_n\} = G$. Defina então

$$g_\alpha = \sum_{\sigma \in B_n} x_{\sigma(1)}^{(\alpha_1)} x_{\sigma(2)}^{(\alpha_2)} \cdots x_{\sigma(n)}^{(\alpha_n)}$$

para toda sequência completa α .

As identidades e os polinômios centrais \mathbb{Z}_n -graduados para $M_n(K)$ foram descritos por Vasilovsky (veja o Exemplo 1.5.18) e por Brandão, respectivamente. A descrição dos polinômios centrais \mathbb{Z}_n -graduados para $M_n(K)$ é dada no seguinte resultado.

Teorema 3.3.1 ([10]) *Seja $\text{char}K = 0$, então o T_G -espaço $C_G(M_n(K))$ é gerado por g_α , $z_1 h_0 z_2$ e $z_1 f_i z_2$ com $z_1, z_2 \in X$, com $i \in \mathbb{Z}_n$ e α correndo sobre todas as sequências completas.*

Observação 3.3.2 *Como um T_G -espaço, $T_G(M_n(K))$ é gerado por $z_1 h_0 z_2$, $z_1 f_i z_2$, onde $z_1, z_2 \in X$ e $i \in \mathbb{Z}_n$.*

Recordemos que $M_n(K) \otimes E \cong M_n(E)$ é H -graduada, com $(M_n(K) \otimes E)^{(\gamma, S)} = (M_n(K))^\gamma \otimes E_S$, para $\gamma \in G = \mathbb{Z}_n$ e $s \in \mathbb{Z}_2$. Seja $S = \{h_0, f_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$. Note que os polinômios em S são multilineares. Temos que $\{\zeta_J(w) \mid w \in S, J \subseteq \hat{n}\}$ é um conjunto gerador multilinear de $T_H(M_n(K) \otimes E)$ (veja o Teorema 2.3.7 e o Teorema 3.3.1). Além

disso, pelo Corolário 2.4.2, o T_H -ideal $T_H(M_n(E))$ é gerado pelos polinômios:

$$\begin{aligned}
h_1 &= [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}] \\
h_2 &= [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}] \\
h_3 &= x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)} \\
f_1^i &= x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)} \\
f_2^i &= x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} - x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)} \\
f_3^i &= x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,0)} \\
f_4^i &= x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,0)} + x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)} \\
f_5^i &= x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)} \\
f_6^i &= x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

para $i \in \mathbb{Z}_n$. Então, como T_H -espaço, $T_H(M_n(E))$ é gerado pelos polinômios

$$z_1 h_j z_2, \quad j = 1, 2, 3, \quad \text{e} \quad z_1 f_k^i z_2, \quad 1 \leq k \leq 6, \quad i \in \mathbb{Z}_n,$$

onde $z_1, z_2 \in X$. Por outro lado, $g_\alpha \in \overline{C}_G(M_n(K))$, se α é uma sequência completa (Ver Teorema 3.3.1), e assim temos que se $J \subseteq \hat{n}$ e $|J|$ é par, pelo Lema 3.1.1 $\zeta_J(g_\alpha) \in \overline{C}_H(M_n(K) \otimes E)$.

Seja W o T_H -espaço gerado pelos polinômios $z_1 h_j z_2$, com $j = 1, 2, 3$, e $z_1 f_k^i z_2$, $1 \leq k \leq 6$, com $i \in \mathbb{Z}_n$, e também por $\zeta_J(g_\alpha)$ para toda sequência completa α e todo $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, com $|J|$ par. Temos o seguinte lema.

Lema 3.3.3 *São válidas as inclusões $T_H(M_n(K) \otimes E) \subseteq W \subseteq C_H(M_n(K) \otimes E)$.*

Prova. A primeira inclusão é imediata pois $z_1 h_j z_2, z_1 f_k^i z_2 \in W$, com $j = 1, 2, 3$ e $1 \leq k \leq 6$, e geram $T_H(M_n(K) \otimes E)$ como T_H -espaço. Como $T_H(M_n(K) \otimes E) \subseteq C_H(M_n(K) \otimes E)$, temos que $z_1 h_j z_2, z_1 f_k^i z_2 \in C_H(M_n(K) \otimes E)$, para $j = 1, 2, 3, 1 \leq k \leq 6$ e $i \in \mathbb{Z}_n$, e além disso $\zeta_J(g_\alpha) \in C_H(M_n(K) \otimes E)$ para quaisquer sequência completa α e $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, com $|J|$ par. Assim, $W \subseteq C_H(M_n(K) \otimes E)$. ■

Teorema 3.3.4 *Se $\text{char} K = 0$, então $C_H(M_n(K) \otimes E) = W$.*

Prova. Como $\text{char} K = 0$, vamos considerar somente polinômios multilineares. Seja $f = f(x_1, \dots, x_k) \in V_k^H$ um tal polinômio. Então, pelo Lema 3.1.6 existe $J \subseteq \hat{k}$

e $h \in V_k^G$ tal que $f = \zeta_J(h)$. Denotando por $\partial(f) = (\alpha(f), \beta(f))$ o H -grau de f , com $\alpha(f) \in \mathbb{Z}_n$ e $\beta(f) \in \mathbb{Z}_2$, observemos que o G -grau de h é $\alpha(f) = \alpha(h)$. Supondo $f \in C_H(M_n(K) \otimes E)$, seja $(a_1 \otimes d_1, \dots, a_k \otimes d_k)$ uma substituição H -admissível para f , com $d_1 \dots d_k \neq 0$. Logo, pelo Lema 2.1.4,

$$\begin{aligned} h(a_1, \dots, a_k) \otimes d_1 \dots d_k &= \zeta_J(h)(a_1 \otimes d_1, \dots, a_k \otimes d_k) = \\ &= f(a_1 \otimes d_1, \dots, a_k \otimes d_k) \in Z(M_n(K) \otimes E) = Z(M_n(K)) \otimes E_0. \end{aligned}$$

Aqui J é o conjunto dos $i \in \hat{k}$ tal que $d_i \in E_1$. Primeiramente considere $\beta(f) = \bar{1}$ em \mathbb{Z}_2 . Neste caso devemos ter $d_1 \dots d_k \in E_1 - \{0\}$, e assim $h(a_1, \dots, a_k) = 0$, uma vez que $E_0 \cap E_1 = \{0\}$ e $h(a_1, \dots, a_k) \otimes d_1 \dots d_k \in Z(M_n(K)) \otimes E_0$. Portanto, $h \in T_G(M_n(K))$ e consequentemente $f = \zeta_J(h) \in T_H(M_n(K) \otimes E) \subseteq W$.

Note que $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n \times n} \mid \lambda \in K\}$. Como $h(a_1, \dots, a_k) \in Z(M_n(K))$, temos

$$h(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \in (M_n(K))^{\bar{0}}$$

e daí, $\alpha(h) = \bar{0}$. Assumindo agora $\beta(f) = \bar{0}$, então $|J|$ deve ser par. Se $\alpha(f) \neq 0$, temos que $\alpha(h) = \alpha(f) \neq \bar{0}$, e daí $h(a_1, \dots, a_k) \in (M_n(K))^{\bar{0}} \cap (M_n(K))^{\bar{\gamma}} = 0$, com $\bar{\gamma} \neq 0$, e assim $h(a_1, \dots, a_n) = 0$. Portanto $h \in T_G(M_n(K))$. Assim, pelo Lema 2.1.5, $f \in T_H(M_n(K) \otimes E) \subseteq W$.

O último caso a considerar agora é $\partial(f) = (0, 0)$. Neste caso $\alpha(h) = 0$. Pelo que foi visto acima, temos $h \in C_G(M_n(K))$. Observando que

$$C_G(M_n(K)) = T_G(M_n(K)) + U,$$

onde U é o T_G -espaço gerado por polinômios da forma g_α , temos que $h = h_1 + h_2$, com $h_1 \in T_G(M_n(K))$ e $h_2 \in U$. Notemos ainda que $\zeta_J(h_1) \in T_H(M_n(K) \otimes E) \subseteq W$. Além disso, pelo Lema 2.3.6, $\zeta_J(h_2) \in \zeta_J(U) \subset W$. Assim, $f = \zeta_J(h) = \zeta_J(h_1) + \zeta_J(h_2) \in W$.

■

Sendo $a + b = n$, definimos a subálgebra $M_{a,b}(E)$ de $M_n(E)$ como sendo

$$M_{a,b}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A \in M_a(E_0); D \in M_b(E_0), B \in M_{a \times b}(E_1), C \in M_{b \times a}(E_1) \right\}.$$

Agora consideremos os conjuntos

$$\Delta_0 = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq a \text{ ou } a + 1 \leq i, j \leq a + b\} \quad \text{e}$$

$$\Delta_1 = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq a \text{ e } a + 1 \leq j \leq a + b \text{ ou } 1 \leq j \leq a \text{ e } a + 1 \leq i \leq a + b\}$$

Sendo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, definimos o subespaço $M_{a,b}(E)^{(\alpha,\beta)}$ da álgebra $M_{a,b}(E)$ como sendo o espaço das matrizes de $M_{a,b}(E)$ tendo na entrada (i, j) , com $\overline{j-i} = \alpha \in \mathbb{Z}_n$ e $(i, j) \in \Delta_\beta$, um elemento de E_β , e 0 nas demais.

Considerando agora a álgebra $P = M_{a,b}(E) \otimes E$, observamos que P possui uma H -gradação, cuja componente (α, β) é definida por

$$P^{(\alpha,\beta)} = M_{a,b}(E)^{(\alpha,\beta)} \otimes E_0 + M_{a,b}(E)^{(\alpha,\beta+1)} \otimes E_1.$$

Considerando esta graduação, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.3.5 *Seja $\text{char}K = 0$ e $a + b = n$. Então $C_H(M_{a,b}(E) \otimes E) = W$*

Prova. Em [4] foi mostrado que $T_H(M_{a,b}(E) \otimes E) = T_H(M_n(E))$. Pela Proposição 3.2.4, $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_n(E)$ terão os mesmos polinômios centrais H -graduados. Segue do Teorema 3.3.4 que

$$C_H(M_{a,b}(E) \otimes E) = C_H(M_n(E)) = W.$$

■

3.4 Polinômios centrais \mathbb{Z}_2 -graduados para $E \otimes E$

Considere a álgebra $E \otimes E$. A \mathbb{Z}_2 -gradação usual de $E \otimes E$ é definida da seguinte maneira:

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1)$$

$$(E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0).$$

As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de $E \otimes E$, com respeito a esta graduação estão descritas para K infinito em [19], no caso $\text{char}K = 0$, e em [7] quando $\text{char}K = p \neq 2$. Nestes artigos é mostrado que o $T_{\mathbb{Z}_2}$ ideal $T_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$ é gerado pelos polinômios

$$[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], \quad x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(1)}, \quad [(x_1^{(0)})^p, x_2^{(1)}],$$

onde o último só aparece quando $\text{char}K = p \neq 0, 2$.

Fixemos agora $\text{char}K = 0$. Podemos considerar outra \mathbb{Z}_2 -gradação em $E \otimes E$, induzida pela graduação trivial na primeira componente do produto tensorial e pela \mathbb{Z}_2 -gradação natural na segunda componente, ou seja,

$$(E \otimes E)_0 = E \otimes E_0 \quad e \quad (E \otimes E)_1 = E \otimes E_1.$$

Lembrando que sendo $G = \{0\}$, podemos considerar um polinômio ordinário f como sendo um polinômio G -graduado, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4.1 *Seja $\text{char}K = 0$ e considere a álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada $E \otimes E = (E \otimes E_0) \oplus (E \otimes E_1)$. Então os polinômios*

$$[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}], [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}], [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}] \circ x_3^{(1)} \quad e \quad [x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}, x_3^{(1)}]$$

formam uma base das identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de $E \otimes E$.

Prova.

Vamos descrever as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de $E \otimes E$ com respeito à graduação considerada no enunciado. As identidades (ordinárias) para E seguem do polinômio $[x_1, x_2, x_3]$, (veja o Exemplo 1.2.8). Então vamos aplicar o Lema 2.1.5 neste polinômio e variar o conjunto $J \subseteq \{1, 2, 3\}$. Quando $J = \emptyset$ obtemos a identidade graduada $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]$ para $E \otimes E$. Quando $J = \{1\}$, temos $[x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]$. Se $\{J\} = \{2\}$ temos o polinômio

$$\begin{aligned} [x_1^{(0)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}] &= [[x_1^{(0)}, x_2^{(1)}], x_3^{(0)}] = [-[x_2^{(1)}, x_1^{(0)}], x_3^{(0)}] = \\ &= -[x_2^{(1)}, x_1^{(0)}, x_3^{(0)}] \in \langle [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}] \rangle^T. \end{aligned}$$

Analogamente, quando $J = \{3\}$ segue da identidade de Jacobi que $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(1)}] = [x_3^{(1)}, x_2^{(0)}, x_1^{(0)}] - [x_3^{(1)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ e assim $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(1)}]$ é consequência de $\zeta_{\{1\}}([x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}])$. Agora se $J = \{1, 2\}$, temos

$$\begin{aligned} \zeta_J([x_1, x_2, x_3]) &= x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(0)} + x_2^{(1)} x_1^{(1)} x_3^{(0)} - x_3^{(0)} x_1^{(1)} x_2^{(1)} - x_3^{(0)} x_2^{(1)} x_1^{(1)} = \\ &= (x_1^{(1)} x_2^{(1)} + x_2^{(1)} x_1^{(1)}) x_3^{(0)} - x_3^{(0)} (x_1^{(1)} x_2^{(1)} + x_2^{(1)} x_1^{(1)}) = [x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}, x_3^{(0)}] \end{aligned}$$

Quando $J = \{1, 3\}$,

$$\zeta_J([x_1, x_2, x_3]) = x_1^{(1)} x_2^{(0)} x_3^{(1)} - x_2^{(0)} x_1^{(1)} x_3^{(1)} + x_3^{(1)} x_1^{(1)} x_2^{(0)} - x_3^{(1)} x_2^{(0)} x_1^{(1)} =$$

$$= [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}]x_3^{(1)} + x_3^{(1)}[x_1^{(1)}, x_2^{(0)}] = [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}] \circ x_3^{(1)}.$$

Para $J = \{2, 3\}$

$$\begin{aligned} \zeta_J([x_1, x_2, x_3]) &= x_1^{(0)}x_2^{(1)}x_3^{(1)} - x_2^{(1)}x_1^{(0)}x_3^{(1)} + x_3^{(1)}x_1^{(0)}x_2^{(1)} - x_3^{(1)}x_2^{(1)}x_1^{(0)} = \\ &= [x_1^{(0)}, x_2^{(1)}]x_3^{(1)} + x_3^{(1)}[x_1^{(0)}, x_2^{(1)}] = -([x_2^{(1)}, x_1^{(0)}]x_3^{(1)} + x_3^{(1)}[x_2^{(1)}, x_1^{(0)}]) = \\ &= -[x_2^{(1)}, x_1^{(0)}] \circ x_3^{(1)} \in \langle [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}] \circ x_3^{(1)} \rangle_2^T \end{aligned}$$

Se $J = \{1, 2, 3\}$ temos

$$\begin{aligned} \zeta_J([x_1, x_2, x_3]) &= x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)} + x_2^{(1)}x_1^{(1)}x_3^{(1)} - x_3^{(1)}x_1^{(1)}x_2^{(1)} - x_3^{(1)}x_2^{(1)}x_1^{(1)} = \\ &= (x_1^{(1)}x_2^{(1)} + x_2^{(1)}x_1^{(1)})x_3^{(1)} - x_3^{(1)}(x_1^{(1)}x_2^{(1)} + x_2^{(1)}x_1^{(1)}) = [x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}, x_3^{(1)}] \end{aligned}$$

O resultado segue então do Teorema 2.3.7. ■

Consideremos agora o T-espaço \mathbb{Z}_2 -graduado V gerado pelos polinômios

$$\begin{aligned} z_1[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]z_2, \quad z_1[x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]z_2, \quad z_1([x_1^{(1)}, x_2^{(0)}] \circ x_3^{(1)})z_2, \\ z_1[x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}, x_3^{(1)}]z_2, \quad [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], \quad x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Lema 3.4.2 $T_2(E \otimes E) \subseteq V \subseteq C_2(E \otimes E)$.

Prova. Do Teorema 3.4.1 a primeira inclusão é clara. O polinômio $[x_1, x_2]$ é central essencial para E , e aplicando o Lema 3.1.1 para este polinômio, obtemos $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ e $x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}$ para $J = \emptyset$ e $J = \{1, 2\}$, respectivamente. Como $T_2(E \otimes E) \subseteq C_2(E \otimes E)$, os quatro primeiros polinômios em (3.3) estão em $C_2(E \otimes E)$. Assim, $V \subseteq C_2(E \otimes E)$. ■

Teorema 3.4.3 Se $\text{char}K = 0$, então $C_2(E \otimes E) = V$.

Prova. Pelo lema 3.4.2 é suficiente provar que $C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E) \subseteq V$. Seja $f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}) \in C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$. Como $\text{char}K = 0$, podemos supor f um polinômio multilinear. Se m é ímpar, temos que $f \in K\langle X \mid \mathbb{Z}_2 \rangle^{(1)}$ e consequentemente, f avaliado em uma substituição \mathbb{Z}_2 -admissível resulta num elemento de $E \otimes E_1$. Mas, $Z(E \otimes E) = Z(E) \otimes Z(E) = E_0 \otimes E_0$, e como $f \in C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$ devemos ter $f \in T_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$. Segue então do Lema 3.4.2 que $f \in V$.

Suponhamos agora m par. Note que m par inclui o caso $m = 0$, ou seja, f dependendo apenas de variáveis de \mathbb{Z}_2 -grau par.

Vamos supor primeiramente $n \geq 1$. Cada monômio w de f pode ser escrito como $w = ux_1^{(0)}v$. Como m é par, u e v são ambos pares ou ambos são ímpares. Se u e v são pares temos $w \equiv x_1^{(0)}vu \pmod{V}$ visto que $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] \in V$. Quando u e v são ambos ímpares temos $w \equiv -(x_1^{(0)}v)u \pmod{V}$ devido a $x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)} \in V$. Portanto,

$$f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}) \equiv x_1^{(0)}g(x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}) \pmod{V}$$

onde g é multilinear. Note que

$$f - x_1^{(0)}g \in V \subseteq C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$$

e daí existe $h \in C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$ tal que

$$x_1^{(0)}g = f - h \in C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E).$$

Logo, substituindo $x_1^{(0)}$ por 1 temos $g(a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in Z(E \otimes E)$, para qualquer substituição \mathbb{Z}_2 -admissível $(a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ em g , donde $g \in C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$. Se $g \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$, então existem elementos $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in E \otimes E_0$ e $\beta_1, \dots, \beta_m \in E \otimes E_1$ tais que

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \neq 0$$

e daí, como $\dim E = \infty$, deve existir $d \in E_1$ tal que

$$\gamma = (d \otimes 1)g(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \neq 0.$$

Como $g, x_1^{(0)}g \in C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$, temos $g(\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \in E_0 \otimes E_0$, $\gamma \in E_0 \otimes E_0$ e

$$\gamma \in E_1 \otimes E_0 - \{0\}$$

pois $E_1E_0 = E_1$. Assim, temos uma contradição e portanto g deve ser uma identidade \mathbb{Z}_2 -graduada. Logo $x_1^{(0)}g$ também é um identidade \mathbb{Z}_2 -graduada e assim $x_1^{(0)}g \in T_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E) \subseteq V$; e como $f - x_1^{(0)}g \in V$, tem-se que $f \in V$.

Agora suponhamos que f depende só de variáveis de grau 1. Como acima, podemos escrever cada monômio w de f como $w = ux_1^{(1)}v$ e observe que se u é par, então v é ímpar, e se u é ímpar, então v é par. Supondo u par e v ímpar, como $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] \in V$,

temos $ux_1^{(1)}v \equiv x_1^{(1)}vu \pmod{V}$. Agora, se u é ímpar e v é par, como $x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)} \in V$, temos

$$\begin{aligned} ux_1^{(1)}v &= -x_1^{(1)}vu + x_1^{(1)}vu + ux_1^{(1)}v \\ &= -x_1^{(1)}vu + (x_1^{(1)}v) \circ u \end{aligned}$$

e então $ux_1^{(1)}v \equiv -x_1^{(1)}vu \pmod{V}$. Portanto $f(x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}) \equiv x_1^{(1)}g(x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}) \pmod{V}$ onde g é multilinear.

Se $g \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$, então existem $\beta_i = u_i \otimes v_i$, com $2 \leq i \leq m$ e u_i e v_i elementos básicos de E , tais que $g(\beta_2, \dots, \beta_m) = u \otimes v \neq 0$, onde u e v são elementos básicos de E . Seja $d_1 \in E_1$ tal que $d_1u, d_1v \neq 0$. Como $f - x_1^{(1)}g = h \in V \subseteq C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$, temos $x_1^{(1)}g = f - h \in C_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$ e daí $u \otimes d_1v = (1 \otimes d_1)(u \otimes v) = (1 \otimes d_1)g(\beta_2, \dots, \beta_m) \in Z(E \otimes E) = E_0 \otimes E_0$. Logo $u \in E_0$. Além disso,

$$d_1u \otimes d_1v = (d_1 \otimes d_1)g(\beta_2, \dots, \beta_m) \in E_0 \otimes E_0.$$

Diante disto temos que $u \in E_0$ e $d_1u \in E_0$, com $d_1u \neq 0$ e $d_1 \in E_1$, o que é uma contradição. Concluimos então que g deve ser uma identidade \mathbb{Z}_2 -graduada para $E \otimes E$ e assim $x_1^{(1)}g \in T_{\mathbb{Z}_2}(E \otimes E)$. Logo, $f \in V$. ■

Bibliografia

- [1] A. A. Albert, *Structure of Algebras*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., vol. **24**, Providence, R.I. , 1939.
- [2] S. M. Alves, A. Brandão Jr., P. Koshlukov, *Graded central polynomials for T -prime algebras*, Commun. Algebra **37 (6)**, 2008 – 2020 (2009).
- [3] S. A. Amitsur, J. Levitski, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449 – 463 (1950).
- [4] S. S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra **30 (12)**, 5849 – 5860 (2002).
- [5] S. S. Azevedo, *A basis for \mathbb{Z} -graded identities of matrices over infinite fields*, Serdica Math. Journal **29 (2)**, 149 – 158 (2003).
- [6] S. S. Azevedo, M. Fidellis, P. Koshlukov, *Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic*, Commun. Algebra **33 (4)**, 1011 – 1022 (2005).
- [7] S. S. Azevedo, P. Koshlukov, *Graded identities for T -prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. **128**, 157 – 176 (2002).
- [8] Y. Bahturin, A. Giambruno, D. M. Riley, *Group-graded algebras satisfying a polynomial identity*, Israel J. Math. **104**, 145 – 155 (1998).
- [9] A. Berele, *Cocharacters of \mathbb{Z}_2 -graded algebras*, Israel J. Math. **61**, 225 – 234 (1988).
- [10] A. Brandão Jr., *Graded central polynomial for the algebra $M_n(K)$* , Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **57**, 265 – 278 (2008).

- [11] A. Brandão Jr., P. Koshlukov, *Central polynomials for \mathbb{Z}_2 -graded algebras and for algebras with involution*, J. Pure Appl. Algebra **208**, 877 – 886 (2007).
- [12] A. Brandão Jr., P. Koshlukov A. Krasilnikov, E A. Siva, *The central polynomials for the Grassmann algebra*, Israel J. Math. **179**, 121 – 144 (2010).
- [13] P. Zh. Chiripov, P. N. Siderov, *On bases for identities of some varieties of associative algebras*, Pliska Studia Mathematica Bulgarica **2**, 103 – 115 (1981).
- [14] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, John Wiley and Sons, New York-London, (1962).
- [15] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. **377**, 53 – 67 (2004).
- [16] V. Drensky, *Identities in Lie algebras*, Algebra and Logic **13**, 150 – 165 (1974).
- [17] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic **20 (3)**, 188 – 194 (1981).
- [18] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras, Graduate Course in Algebra*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.
- [19] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$* . Israel J. Math. **80(3)**, 323 – 335 (1992).
- [20] O. M. Di Vincenzo, *Cocharacters of G -graded Algebras*. Commun. Algebra **24(10)**: 3293 – 3310 (1996).
- [21] O. M. Di Vincenzo, V. Nardoza, *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra*, Commun. Algebra **31(3)**, 1453 – 1474 (2003).
- [22] J. Dubnov, V. Ivanov, *Sur l'abaissement du degré des polynômes en affineurs*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR **41**, 96 – 98 (1943).
- [23] E. Formanek, *Central polynomials for matrix rings*, J. Algebra **23**, 129 – 132 (1972).
- [24] E. Formanek, *Invariants and ring of generic matrices*, J. Algebra **89**, 178 – 223 (1984).
- [25] A. Giambruno, Zaicev, M., *Exponential codimensions growth of PI-algebras: an exact estimate*, Adv. Math. **142**, 221 – 243 (1999).

- [26] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic $p > 0$* , Israel J. Math. **122**, 305 – 316 (2001).
- [27] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Math. Monographs **15**, Math. Assoc. Amer., New York, 1968.
- [28] N. Jacobson, *Structure theory of algebraic algebras of bounded degree*, Ann. of Math. **46**, 695 – 707 (1945).
- [29] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 575 – 580 (1948).
- [30] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic. **26**, 362 – 397 (1987).
- [31] A. R. Kemer, *Varieties and \mathbb{Z}_2 -graded algebras*. Izv. Aad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **48**, 1042 – 1059 (1984).
- [32] A. R. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*. AMS Trans. of math. monographs **87**, 1991.
- [33] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$* , J. Algebra **241**, 410 – 434 (2001).
- [34] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitski and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7**, 237 – 264 (1958).
- [35] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181**, 429 – 438 (1973).
- [36] J. Levitzki, *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 1033 – 1035, (1946).
- [37] A.I, Malcev, *On algebras defined by identities (Russian)*, Mat. Sb. **26**, 19 – 33 (1950).
- [38] S. Okhitin, *Central polynomials of the algebra of second order matrices*, Moscow Univ. Math. Bull. **43 (4)**, 49 – 51 (1988).
- [39] Yu. P. Rasmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic **12**, 47 – 63 (1973).

- [40] Yu. P. Razmyslov, *Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero*, Math. USSR, Izv. **8**, 727 – 760 (1974).
- [41] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitski identity*, Israel J. Math. **23**, 187 – 188 (1976).
- [42] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$* , Israel J. Math. **11**, 131 – 152 (1972).
- [43] A. Regev, *Tensor productis of matrix algebras over the Grassmann algebra*. Israel J. Math. **58(3)**, 351 – 369 (1990).
- [44] A. H. Stojanova-Venkova, *Bases of identities of Grassmann algebras*, Serdica **6**, 63 – 72 (1980).
- [45] R. G. Swan, *An application of graph theory to algebra*, Proc. Amer. Math. Soc **14**, 367-373 (1963). Correção: **21**, 379 – 380 (1969).
- [46] M. R. Vaughan-Lee, *Varieties of Lie algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **21 (2)**, 297 – 308 (1970).
- [47] S. Yu. Vasilovsky, *\mathbb{Z} -graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Commun. Algebra **26 (2)**, 601 – 612 (1998).
- [48] S. Yu. Vasilovsky, *\mathbb{Z}_n -graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n* , Proc. Amer. Math. Soc. **127 (12)**, 3517 – 3524 (1999).