

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Alguns resultados sobre as soluções de  
um sistema misto de uma EDP  
parabólica e  $n$  EDO's<sup>†</sup>

por

Cláudio Odair Pereira da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# Alguns resultados sobre as soluções de um sistema misto de uma EDP parabólica e $n$ EDO's

por

Cláudio Odair Pereira da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro - UFPB**  
Membro da Banca

---

**Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG**  
Membro da Banca

---

**Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza - UFCG**  
Orientador  
Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

julho/2011

# Agradecimentos

Há muitos a quem agradecer, pois nenhum trabalho é solitário. Ao longo desta caminhada, fui orientado e apoiado por todas as pessoas que em mim acreditaram.

Agradeço primeiramente, a Deus, por estar sempre presente em minha vida me acompanhando e guiando nesta jornada.

Em particular, agradeço a minha esposa, Cláudia, pelo seu amor, sua amizade e compreensão.

Aos meus pais, Agenildo e Damiana e meus irmãos, pelo carinho, apoio e por sempre me ensinarem o verdadeiro significado das palavras, honestidade e humildade.

Aos meus avós por terem me ajudado bastante, pois do contrário não teria chegado até aqui e em especial a minha avó, Ana Alixandrina a qual sinto muita falta e onde quer que esteja está orgulhosa de mim.

Ao meu primo Francisco e aos seus pais, Miguel Jorge e Maria José que contribuíram bastante para que pudesse chegar até aqui e a Ivanda e Luzia pela convivência.

Aos amigos de mestrado, Annaxuel, Igor, Denilson, Jussê, Hildênio, Kelmen, Bruno Fontes, Eraldo e Bruno Sérgio que sempre estiveram dispostos a me ajudar diante das dificuldades, e também a profa. Marisa e Dona Argentina que me confortavam com suas sábias palavras e assim se foram, deixando saudades.

À profa. Rosana e o prof. Zé Luiz pelos conselhos, ao professor Dr. Nelson Nery por participar da banca e aos professores, Horácio, Brandão, Claudianor e Júlio pelos seus sábios ensinamentos.

Especialmente à meu orientador professor Dr. Aparecido Jesuino de Souza, pela paciência, compreensão e disposição que sempre teve para me ajudar a vencer as dificuldades, orientando-me com competência e dedicação, pois sem seus grandes ensinamentos não teríamos concluído esse trabalho, ensinamentos que levarei por toda minha vida. Que Deus conceda muita saúde e felicidades na sua vida e de sua família.

Aos professores e funcionários da UAME, meu muito obrigado por tudo!

Finalmente, à CAPES, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

# Dedicatória

Aos meus pais, Agenildo e Damiana e a minha esposa Cláudia.

# Resumo

Neste trabalho são apresentados resultados sobre Existência, Unicidade e Dependência Contínua de soluções para um sistema consistindo de uma EDP parabólica e  $n$ -Equações Diferenciais Ordinárias. São apresentados também resultados sobre a Estabilidade Exponencial de tal sistema em torno de uma solução do tipo onda viajante e em torno de uma solução de equilíbrio.

**Palavras chave:** Método de Picard, Ondas Viajantes, Estabilidade Exponencial.

# Abstract

In this work are presented some results on existence, uniqueness and continuous dependence of solutions for a system consisting of a parabolic PDE and  $n$ -Ordinary Differential Equations. Also are discussed the exponential stability of such system at a traveling wave solution and at a resting state.

Keywords: Picard Method, Traveling Waves, Exponential Stability.

# Conteúdo

|  |           |
|--|-----------|
| Notações . . . . .   | 6         |
| Introdução . . . . .   | 8         |
| <b>1 Existência, Unicidade e Dependência Contínua de Soluções</b>  | <b>10</b> |
| 1.1 O Sistema de Equações Integrais . . . . .                      | 10        |
| 1.2 Existência e Unicidade de Solução . . . . .                    | 12        |
| 1.3 Dependência Contínua dos dados Iniciais . . . . .              | 19        |
| 1.3.1 Generalização . . . . .                                      | 25        |
| <b>2 Sobre a Estabilidade Exponencial de Soluções</b>              | <b>27</b> |
| 2.1 Preliminares . . . . .   | 27        |
| 2.2 Estabilidade Exponencial . . . . .                             | 30        |
| <b>3 Estabilidade Exponencial em uma Solução de Equilíbrio</b>     | <b>43</b> |
| 3.1 Introdução . . . . .   | 44        |
| 3.2 Condições para a Estabilidade Exponencial . . . . .            | 66        |
| <b>A Conceitos e Resultados Básicos</b>                            | <b>72</b> |
| A.1 Matrizes . . . . .   | 72        |
| A.2 O Índice de Rotação de uma Curva . . . . .                     | 73        |
| A.3 Solução Fundamental para a Equação do Calor . . . . .          | 74        |
| A.4 Núcleos de Dirac . . . . .                                     | 76        |
| A.5 A Transformada de Fourier . . . . .                            | 77        |
| A.6 Outros Resultados de Análise e Equações Diferenciais . . . . . | 78        |
| <b>Bibliografia</b>  | <b>80</b> |

# Notações

|  |  |
|--|--|
| $\mathbb{N}$   | conjuntos dos números naturais   |
| $\mathbb{R}$   | conjuntos dos números reais  |
| $\mathbb{C}$   | conjuntos dos números complexos  |
| $ x $  | valor absoluto do número real $x$  |
| $\mathbb{R}^{n+1} = \{\mathbf{x} = (x^0, x^1, \dots, x^n); x^i \in \mathbb{R}\}$ | espaço euclidiano $n + 1$ dimensional  |
| $\ \mathbf{x}\  = \sqrt{\sum_{i=0}^n (x^i)^2}$                                   | norma euclidiana em $\mathbb{R}^{n+1}$   |
| $\ \mathbf{x}\ _s = \sum_{i=0}^n  x^i $  | norma da soma em $\mathbb{R}^{n+1}$  |
| $\ \mathbf{x}\ _\infty = \max_{0 \leq i \leq n} \{ x^i \}$                       | norma do máximo em $\mathbb{R}^{n+1}$  |
| $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$                                | função que associa cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ num escalar                      |
| $\Omega$   | subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$  |
| $C_B(\Omega)$  | Espaço das funções contínuas e limitadas sobre $\Omega$                                    |
| $C^k(\Omega)$  | Espaço das funções contínuas com derivadas parciais contínuas até ordem $k$ sobre $\Omega$ |
| $\mathcal{S}(\Omega)$  | Espaço (de Schwartz) das funções de decrescimento rápido                                   |
| $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}[f]$  | transformada de Fourier da função $f$  |
| $\check{g}$ ou $\mathcal{F}^{-1}[g]$   | transformada de Fourier inversa da função $g$  |



|   |   |
|---|---|
| $\frac{\partial f}{\partial x^j} \equiv D_j f \equiv \partial_{x^j} f$                                | derivada de $f$ com relação a variável $x^j$  |
| $D_{\mathbf{x}} f \equiv \nabla f = (D_0 f, D_1 f, \dots, D_n f)$                                     | gradiente de $f$ com relação à $\mathbf{x}$   |
| $\ \nabla f\ _{\infty} = \max_{0 \leq j \leq n} \{\sup_{\mathbf{x} \in \Omega}  D_j f(\mathbf{x}) \}$ | norma (do <i>sup</i> ) do gradiente de $f$  |
| $A = (a_{ij})_n$  | matriz de ordem $n$   |
| $\ A\ _{\infty} = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{ a_{ij} \}$   | norma da matriz $A$   |
| $g : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$   | função que associa cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ o vetor $g(\mathbf{x}) = (g^0(\mathbf{x}), g^1(\mathbf{x}), \dots, g^n(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ |
| $Dg = \left( D_j g^i \right)_{\substack{i=0,1,\dots,n \\ j=0,1,\dots,n}}$                             | matriz Jacobiana da função $g$  |
| $\ Dg\ _{\infty} = \max_{0 \leq i, j \leq n} \{\sup_{\mathbf{x} \in \Omega}  D_j g^i(\mathbf{x}) \}$  | norma (do <i>sup</i> ) da matriz Jacobiana de $g$   |
| $W^i(\cdot, t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   | função que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa um escalar cujo valor em $x \in \mathbb{R}$ é $W^i(x, t)$  |
| $\ W^i(\cdot, t)\ _{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ W^i(x, t) \}$                                | norma (do <i>sup</i> ) da função $W^i(\cdot, t)$  |
| $\mathcal{W} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$                       | função que associa cada par $(x, t)$ o vetor $\mathcal{W}(x, t) = (W^0(x, t), W^1(x, t), \dots, W^n(x, t))$   |
| $\mathcal{W}(\cdot, t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$                                 | função que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa um vetor cujo valor em $x \in \mathbb{R}$ é $\mathcal{W}(x, t)$  |
| $\ \mathcal{W}(\cdot, t)\ _{\infty} = \max_{0 \leq i \leq n} \{\sup_{x \in \mathbb{R}}  W^i(x, t) \}$ | norma (do <i>sup</i> ) da função $\mathcal{W}(\cdot, t)$  |

# Introdução

Baseados numa sequência de artigos clássicos de J. Evans [9, 10, 11], consideramos nesta dissertação um sistema misto de equações diferenciais, constituído de uma Equação Diferencial Parcial (equação de calor) e  $n$  Equações Diferenciais Ordinárias da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W^0}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 W^0}{\partial x^2}(x, t) = g^0(W^0(x, t), W(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t}(x, t) = g(W^0(x, t), W(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ W^0(x, 0) = \psi^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ W(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (1)$$

No sistema (1) as variáveis independentes são  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$  e as funções incógnitas são a função escalar  $W^0$  e a função vetorial  $W = (W^1, W^2, \dots, W^n)$  com valores em  $\mathbb{R}^n$ . A função  $g^0$  é uma função escalar e  $g = (g^1, g^2, \dots, g^n)$  uma função vetorial, ambas de  $(n+1)$  variáveis. Os dados iniciais consistem da função escalar  $\psi^0$  e da função vetorial  $\psi = (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n)$ . Como hipóteses gerais vamos supor que  $g^i \in C_B^2(\mathbb{R}^{n+1})$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Para simplificar a notação usaremos  $\mathcal{W}$  e  $\Psi$  para representar as funções vetoriais com valores em  $\mathbb{R}^{n+1}$  dadas por  $(W^0, W)$  e  $(\psi^0, \psi)$ , respectivamente, assim temos que  $\mathcal{W} = (W^0, W^1, \dots, W^n)$  e  $\Psi = (\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^n)$ .

O objetivo da dissertação é estudar a Existência, Unicidade e Dependência Contínua da solução para o problema de valor inicial para o sistema (1) e apresentar alguns

resultados de estabilidade exponencial em relação a uma solução do tipo onda viajante. Como motivação para o estudo desse tipo de sistema temos a questão de propagação de frentes de combustão em meios porosos, [6], e o modelo de Hodgkin e Huxley, [17], sobre a propagação de pulsos elétricos.

Além da Introdução, esta dissertação consta de três outros Capítulos e um Apêndice, como descritos a seguir.

No Capítulo 1 apresentamos e discutimos os resultados sobre Existência, Unicidade e Dependência Contínua (em relação aos valores iniciais) de soluções para o sistema (1). Este estudo é feito baseado nas propriedades do núcleo de calor e do método iterativo de Picard para soluções de sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias.

No Capítulo 2 consideramos uma solução  $\mathcal{W}(x, t) = \phi(x - vt)$  (do tipo onda viajante) do sistema (1) e apresentamos a demonstração de um Teorema mostrando a equivalência da estabilidade exponencial do sistema (1) em torno desta onda viajante e a do sistema formado pela sua linearização, em torno da derivada da onda viajante. Este teorema estabelece que uma solução obtida a partir de uma pequena perturbação nos dados iniciais correspondentes à uma determinada onda viajante  $\phi$  tende exponencialmente rápido no tempo à uma translação de tal onda viajante se, e somente se, o sistema linearizado tem a propriedade de suas soluções tenderem à um múltiplo da derivada da onda viajante. A demonstração desse resultado é baseada em três Lemas preparatórios.

No Capítulo 3 apresentamos dois teoremas relacionado a estabilidade exponencial do sistema formado pela linearização de (1) em torno da solução de equilíbrio nula e a do sistema obtido a partir deste após à aplicação da Transformada de Fourier. As demonstrações destes teoremas estão baseadas numa sequência de quatro Proposições preparatórias e de alguns Lemas auxiliares.

Finalmente, no Apêndice A apresentamos alguns conceitos e resultados básicos que foram usados no desenvolvimento da dissertação.

# Capítulo 1

## Existência, Unicidade e Dependência Contínua de Soluções

Neste Capítulo discutiremos e apresentaremos resultados sobre Existência, Unicidade e Dependência Contínua de solução clássica para o sistema (1). Na primeira Seção estudamos condições para a existência de soluções do sistema (1), bem como exibimos fórmulas integrais para essas soluções. Na segunda Seção apresentamos um método iterativo para a determinação da solução do sistema (1), baseado no próprio método de Picard. Na última Seção discutimos a questão da dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais. Usamos [9] como referência para a primeira Seção e [9] e [21] nas demais Seções.

### 1.1 O Sistema de Equações Integrais

Nesta Seção abordaremos a questão fundamental sobre a existência de soluções do sistema (1) usando os resultados clássicos sobre equações diferenciais parciais parabólicas e sobre sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. O Teorema a seguir mostra que sob certas restrições as soluções do sistema (1) são exatamente as soluções de um sistema de equações integrais, ou em outras palavras obtemos um sistema de equações integrais equivalente ao sistema (1).

**Teorema 1.1** *Seja  $T > 0$ . Suponha que as funções  $g^0$  e  $g$  em (1) sejam contínuas e limitadas com derivadas parciais primeiras contínuas e limitadas e que o dado inicial*

$\Psi$  e sua derivada  $\Psi'$  sejam contínuas e limitadas. Sejam  $W^0$  e  $W$  funções contínuas e limitadas em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ . Então  $\mathcal{W} = (W^0, W)$  é uma solução do sistema (1) com  $\frac{\partial W^0}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial x}$  contínuas e limitadas em  $\mathbb{R} \times [0, T]$  e com  $\frac{\partial W^0}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 W^0}{\partial x^2}$  contínuas em  $\mathbb{R} \times (0, T]$  se, e somente se  $W^0$  e  $W$  satisfazem o sistema de equações integrais

$$\begin{aligned} W^0(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) \psi^0(y) dy \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) g^0(W^0(y, s), W(y, s)) dy ds, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$W(x, t) = \psi(x) + \int_0^t g(W^0(x, s), W(x, s)) ds, \quad (1.2)$$

onde  $\mathcal{K}(x, y, t)$  é o núcleo de calor definido em A.7, (veja página 74).

**Demonstração:** Suponha que  $(W^0, W)$  seja solução do sistema (1) satisfazendo as propriedades acima. Como  $g^0$ ,  $\frac{\partial W^0}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 W^0}{\partial x^2}$  são contínuas, pela primeira equação de (1) a função composta  $g^0(W^0(x, t), W(x, t))$  também é contínua. Como  $W^0(x, t)$ ,  $W(x, t)$  são contínuas e limitadas em  $\mathbb{R} \times [0, T]$  então por hipótese  $g^0(W^0(x, t), W(x, t))$  também é limitada em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ . Sabendo que as derivadas parciais  $D_0 g^0$  e  $D_i g^0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são contínuas e limitadas, temos também que a função  $\frac{\partial g^0}{\partial x} = D_0 g^0 \frac{\partial W^0}{\partial x} + \sum_{i=1}^n D_i g^0 \frac{\partial W^i}{\partial x}$  é contínua e limitada em  $(x, t)$ . Assim pelo Teorema A.6 (pg. 75) a função  $W^0$  satisfaz (1.1).

Passamos agora a obter (1.2). Como  $g$ ,  $W^0$  e  $W$  são contínuas, temos que a função composta  $g(W^0(x, t), W(x, t))$  também é contínua. Integrando de 0 a  $t$  a segunda equação em (1) temos que

$$\int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x, s) ds = \int_0^t g(W^0(x, s), W(x, s)) ds.$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo e da condição inicial para  $W$  em (1) obtemos

$$W(x, t) - \psi(x) = \int_0^t g(W^0(x, s), W(x, s)) ds.$$

Portanto  $W(x, t)$  satisfaz (1.2).

Reciprocamente suponha que  $W^0$  e  $W$  são funções contínuas e limitadas satisfazendo (1.1) e (1.2), respectivamente. Como as funções  $g$ ,  $W^0$  e  $W$  são contínuas, então a função composta  $g(W^0, W)$  também é contínua. Assim de (1.2) e do Teorema Fundamental do Cálculo segue que  $\frac{\partial W}{\partial t}$  existe, é contínua em  $\mathbb{R} \times [0, T]$  e a segunda e quarta equações do sistema (1) são satisfeitas.

Analisemos agora a função  $W^0$  em (1.1). Escrevemos  $W^0(x, t) = A(x, t) + B(x, t)$ , com

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) \psi^0(y) dy$$

e

$$B(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) g^0(W^0(y, s), W(y, s)) dy ds.$$

Das propriedades do núcleo de calor temos que as quatro integrais impróprias  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_x(x, y, t) \psi^0(y) dy$$

e

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_x(x, y, t-s) g^0(W^0(y, s), W(y, s)) dy ds$$

convergem uniformemente. Daí, podemos derivar  $A(x, t)$  e  $B(x, t)$  sob o sinal de integração. Obtendo

$$A_x(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_x(x, y, t) \psi^0(y) dy,$$

e

$$B_x(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_x(x, y, t-s) g^0(W^0(y, s), W(y, s)) dy ds,$$

as quais são contínuas e limitadas para  $x \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq t \leq T$ . Portanto  $\frac{\partial W^0}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x}$  é contínua e limitada em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ .

Considere novamente a equação (1.2), mas agora vista como um sistema de EDO's em "t" e considerando "x" como parâmetro. Como  $\psi$  e  $g$  possuem derivadas com relação ao parâmetro "x" contínuas e limitadas, do Teorema da dependência diferenciável, [21], segue que  $\frac{\partial W}{\partial x}$  existe e é contínua e limitada em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ . Portanto  $\frac{\partial g^0}{\partial x} = D_0 g^0 \frac{\partial W^0}{\partial x} + D g^0 \frac{\partial W}{\partial x}$  é contínua e limitada em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ . Como as funções  $\psi^0$ ,  $g^0$ , e  $\frac{\partial g^0}{\partial x}$  são contínuas e limitadas, pelo Teorema A.6 segue que  $\frac{\partial W^0}{\partial t}$  e  $\frac{\partial^2 W^0}{\partial x^2}$  são contínuas em  $\mathbb{R} \times (0, T]$  e a função  $W^0$  satisfaz a primeira e terceira equações do sistema (1), concluindo assim a demonstração do Teorema 1.1. ■

## 1.2 Existência e Unicidade de Solução

Nesta Seção veremos como obter uma solução para o sistema (1) através de um processo iterativo que determina as soluções do sistema de equações (1.1)-(1.2) ob-

tido na Seção 1.1 sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.1, isto é, com as funções  $g^0, g, D_j g^i, (i, j = 0, 1, \dots, n), \psi^0$  e  $\psi$  contínuas e limitadas.

Para isso definimos a sequência de aproximações  $(W_n^0, W_n), n = 0, 1, 2, \dots$ , para  $x \in \mathbb{R}$  e  $t \in [0, T]$ , da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} W_0^0(x, t) = \psi^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad e \quad t \in [0, T]; \\ W_{n+1}^0(x, 0) = \psi^0(x), \quad x \in \mathbb{R}; \\ W_{n+1}^0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) \psi^0(y) dy; \\ \quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) g^0(W_n^0(y, s), W_n(y, s)) dy ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ \\ W_0(x, t) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}; \quad t \in [0, T]; \\ W_{n+1}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}; \\ W_{n+1}(x, t) = \psi(x) + \int_0^t g(W_n^0(x, s), W_n(x, s)) ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Desta forma, dado  $T > 0$ , pela Proposição A.4 (pg. 75) e das próprias fórmulas em (1.3), as iteradas  $(W_n^0, W_n)$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , são contínuas em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ .

O próximo teorema mostra que essa sequência de iteradas em (1.3) converge uniformemente para uma solução do sistema (1.1)-(1.2) e conseqüentemente do sistema (1).

**Teorema 1.2** *Dado  $T > 0$ , a sequência de iteradas  $(W_n^0(x, t), (W_n(x, t)), n = 0, 1, 2, \dots$ , converge uniformemente para uma solução  $(W^0(x, t), W(x, t))$  do sistema (1), para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ . Esta solução é única.*

**Demonstração:** Primeiro mostraremos por indução que a sequência  $(W_n^0, W_n)$  de iteradas é uniformemente limitada em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ .

Lembremos que por hipótese, para  $n = 0$ ,  $W_0^0(x, t) = \psi^0(x)$  e  $W_0(x, t) = \psi(x)$  são tais que existem  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$  com  $|\psi^0(x)| \leq c_1$  e  $\|\psi(x)\| \leq c_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Suponha que  $W_n^0$  e  $W_n$  sejam limitadas para algum  $n \geq 1$ . Mostremos que  $W_{n+1}^0$  e  $W_{n+1}$  também são limitadas.

Das limitações das funções  $g^0$  e  $g$  sejam  $M_1 > 0$  e  $M_2 > 0$  tais que  $|g^0(W^0, W)| \leq M_1$

e  $\|g(W^0, W)\| \leq M_2$ ,  $\forall (W^0, W) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} |W_{n+1}^0(x, t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) \psi^0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) g^0(W_n^0(y, s), W_n(y, s)) dy ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) |\psi^0(y)| dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) |g^0(W_n^0(y, s), W_n(y, s))| dy ds \\ &\leq c_1 + M_1 t \leq c_1 + M_1 T = C_1(T); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|W_{n+1}(x, t)\| &= \left\| \psi(x) + \int_0^t g(W_n^0(x, s), W_n(x, s)) ds \right\| \\ &\leq \|\psi(x)\| + \int_0^t \|g(W_n^0(x, s), W_n(x, s))\| ds \leq c_2 + M_2 t \leq c_2 + M_2 T = C_2(T); \end{aligned}$$

donde segue que a sequência de funções  $(W_n^0, W_n)$  é limitada, para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ .

Agora vamos mostrar a convergência da sequência de iteradas em (1.3). Escrevemos

$$\begin{cases} W_n^0(x, t) = W_0^0(x, t) + [W_1^0(x, t) - W_2^0(x, t)] + \cdots + [W_n^0(x, t) - W_{n-1}^0(x, t)], \\ W_n(x, t) = W_0(x, t) + [W_1(x, t) - W_2(x, t)] + \cdots + [W_n(x, t) - W_{n-1}(x, t)]. \end{cases}$$

Daí,  $(W_n^0, W_n)$  convergirá uniformemente se, e somente se as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} |W_n^0 - W_{n-1}^0|$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \|W_n - W_{n-1}\|$  convergirem uniformemente. Sendo a sequência  $(W_n^0, W_n)$  limitada, definamos a nova sequência

$$\rho_n(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ |W_n^0(x, t) - W_{n-1}^0(x, t)| + \|W_n(x, t) - W_{n-1}(x, t)\| \}, \quad t > 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Das limitações das derivadas parciais de  $g^0$  e de  $g$ , existe  $L > 0$  tal que

$$|D_j g^i(W^0, W)| \leq L, \quad \forall (W^0, W) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Usando as desigualdades triangular e do valor médio, temos que

$$\begin{aligned} &|g^0(W_n^0(x, t), W_n(x, t)) - g^0(W_{n-1}^0(x, t), W_{n-1}(x, t))| \\ &\leq |g^0(W_n^0(x, t), W_n(x, t)) - g^0(W_{n-1}^0(x, t), W_n(x, t))| \\ &\quad + |g^0(W_{n-1}^0(x, t), W_n(x, t)) - g^0(W_{n-1}^0(x, t), W_{n-1}(x, t))| \\ &\leq L |W_n^0(x, t) - W_{n-1}^0(x, t)| + L \|W_n(x, t) - W_{n-1}(x, t)\| \\ &\leq L \left( |W_n^0(x, t) - W_{n-1}^0(x, t)| + \|W_n(x, t) - W_{n-1}(x, t)\| \right). \end{aligned}$$



Daí segue que

$$|g^0(W_n^0(x, t), W_n(x, t)) - g^0(W_{n-1}^0(x, t), W_{n-1}(x, t))| \leq L\rho_n(t). \quad (1.5)$$

Analogamente obtemos para a função  $g$  que

$$\|g(W_n^0(x, t), W_n(x, t)) - g(W_{n-1}^0(x, t), W_{n-1}(x, t))\| \leq L\rho_n(t). \quad (1.6)$$

Agora note que

$$\begin{aligned} & |W_{n+1}^0(x, t) - W_n^0(x, t)| \\ &= \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left[ g^0(W_n^0(y, s), W_n(y, s)) - g^0(W_{n-1}^0(y, s), W_{n-1}(y, s)) \right] dy ds \right| \\ &\leq \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) |g^0(W_n^0(y, s), W_n(y, s)) - g^0(W_{n-1}^0(y, s), W_{n-1}(y, s))| dy ds \\ &\leq \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) L\rho_n(s) dy ds \leq L \int_0^t \rho_n(s) ds, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Analogamente temos que

$$\|W_{n+1}(x, t) - W_n(x, t)\| \leq L \int_0^t \rho_n(s) ds, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]. \quad (1.8)$$

Somando (1.7) com (1.8) obtemos

$$|W_{n+1}^0(x, t) - W_n^0(x, t)| + \|W_{n+1}(x, t) - W_n(x, t)\| \leq 2L \int_0^t \rho_n(s) ds, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T].$$

Assim da definição de  $\rho_n(t)$ , segue que

$$\rho_{n+1}(t) \leq 2L \int_0^t \rho_n(s) ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

Agora seja  $K > 0$  uma constante tal que  $|\rho_1(t)| \leq K, 0 \leq t \leq T$ . Então de (1.9) obtemos

$$\begin{aligned} \rho_2(t) &\leq 2L \int_0^t \rho_1(s) ds \leq K2Lt, \\ \rho_3(t) &\leq 2L \int_0^t \rho_2(s) ds \leq K(2L)^2 \int_0^t s ds = \frac{K(2Lt)^2}{2!}, \\ &\vdots \\ \rho_n(t) &\leq \frac{K(2Lt)^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{K(2LT)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Daí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(t) \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2LT)^{n-1}}{(n-1)!} = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2LT)^n}{n!} = Ke^{2LT}, \quad \forall t \in [0, T],$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left( |W_n^0(x, t) - W_{n-1}^0(x, t)| + \|W_n(x, t) - W_{n-1}(x, t)\| \right) \\ & \leq K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2LT)^n}{n!}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teste M de Weierstrass, as séries de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} |W_n^0(x, t) - W_{n-1}^0(x, t)|$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \|W_n(x, t) - W_{n-1}(x, t)\|$  convergem uniformemente para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ , donde segue a convergência uniforme da sequência de iteradas  $(W_n^0, W_n)$  definidas em (1.3)  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ . Sejam portanto  $W^0(x, t)$  e  $W(x, t)$  as funções dadas por

$$W^0(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n^0(x, t), \quad W(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T].$$

Da maneira como foram definidas e da convergência uniforme, temos que  $W^0$  e  $W$  são funções contínuas e limitadas para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ . Agora mostremos que  $(W^0(x, t), W(x, t))$  satisfaz o sistema de equações integrais (1.1) - (1.2), o que é equivalente a mostrar que  $(W^0(x, t), W(x, t))$  é solução do sistema (1), segundo o Teorema 1.1.

Tomando o limite com  $n$  tendendo à infinito em ambos os lados das equações em (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} W^0(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) \psi^0(y) dy \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) g^0(W_n^0(y, s), W_n(y, s)) dy ds, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$W(x, t) = \psi(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g(W_n^0(x, s), W_n(x, s)) ds. \quad (1.11)$$

A passagem do limite para dentro do sinal de integração em (1.10) é justificada devido as propriedades do núcleo do calor e da continuidade da função  $g^0$ . Portanto temos

$$\begin{aligned} W^0(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) \psi^0(y) dy \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) g^0(W^0(y, s), W(y, s)) dy ds. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Para justificar a passagem do limite para dentro do sinal de integração em (1.11) devemos mostrar que

$$\left\| \int_0^t g(W^0(x, s), W(x, s)) ds - \int_0^t g(W_n^0(x, s), W_n(x, s)) ds \right\|$$

tende a zero quando  $n$  tende a infinito. Para isto, usamos as desigualdades triangular e do valor médio, obtendo

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t g(W^0(x, s), W(x, s)) ds - \int_0^t g(W_n^0(x, s), W_n(x, s)) ds \right\| \\
& \leq \int_0^t \|g(W^0(x, s), W(x, s)) - g(W_n^0(x, s), W_n(x, s))\| ds \\
& \leq \int_0^t \left[ \|g(W^0(x, s), W(x, s)) - g(W_n^0(x, s), W(x, s))\| \right. \\
& \quad \left. + \|g(W_n^0(x, s), W(x, s)) - g(W_n^0(x, s), W_n(x, s))\| \right] ds \\
& \leq \int_0^t \left[ L |W^0(x, s) - W_n^0(x, s)| + L \|W(x, s) - W_n(x, s)\| \right] ds \\
& \leq L \int_0^t \left[ |W^0(x, s) - W_n^0(x, s)| + \|W(x, s) - W_n(x, s)\| \right] ds.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
W^0(x, s) - W_n^0(x, s) &= \sum_{m=n+1}^{\infty} [W_m^0(x, s) - W_{m-1}^0(x, s)], \\
W(x, s) - W_n(x, s) &= \sum_{m=n+1}^{\infty} [W_m(x, s) - W_{m-1}(x, s)],
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
W^0(x, s) &= W_0^0(x, s) + \sum_{m=1}^{\infty} [W_m^0(x, s) - W_{m-1}^0(x, s)]; \\
W_n^0(x, s) &= W_0^0(x, s) + \sum_{m=1}^n [W_m^0(x, s) - W_{m-1}^0(x, s)];
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
W(x, s) &= W_0(x, s) + \sum_{m=1}^{\infty} [W_m(x, s) - W_{m-1}(x, s)]; \\
W_n(x, s) &= W_0(x, s) + \sum_{m=1}^n [W_m(x, s) - W_{m-1}(x, s)].
\end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
& |W^0(x, s) - W_n^0(x, s)| + \|W(x, s) - W_n(x, s)\| \\
& \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \left[ |W_m^0(x, s) - W_{m-1}^0(x, s)| + \|W_m(x, s) - W_{m-1}(x, s)\| \right].
\end{aligned}$$

Como  $|W_m^0(x, s) - W_{m-1}^0(x, s)|$  e  $\|W_m(x, s) - W_{m-1}(x, s)\|$  tendem a zero, quando  $m$  tende a infinito, temos

$$\left\| \int_0^t g(W^0(x, s), W(x, s)) ds - \int_0^t g(W_n^0(x, s), W_n(x, s)) ds \right\|$$

também tende a zero, quando  $n$  tende a infinito, mostrando que em (1.11) obtemos

$$W(x, t) = \psi(x) + \int_0^t g(W^0(x, s), W(x, s)) ds. \quad (1.13)$$

Portanto de (1.12) e (1.13), as funções limite  $W^0(x, t)$  e  $W(x, t)$  satisfazem as equações integrais (1.1) - (1.2) e pelo Teorema 1.1 segue que  $\mathcal{W}(x, t) = (W^0(x, t), W(x, t))$  é solução do sistema (1).

Para concluir a demonstração do Teorema 1.2, mostremos então a unicidade de solução. Suponha que  $(\overline{W}^0(x, t), \overline{W}(x, t))$  também seja solução contínua e limitada do sistema (1), para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ ,  $T > 0$ . Defina

$$\rho(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \left| W^0(x, t) - \overline{W}^0(x, t) \right| + \|W(x, t) - \overline{W}(x, t)\| \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Com um procedimento análogo ao que foi feito para obter (1.5), (1.6), (1.7) e (1.8) obtemos, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ ,

$$\left| g^0(W^0(x, t), W(x, t)) - g^0(\overline{W}^0(x, t), \overline{W}(x, t)) \right| \leq L\rho(t);$$

$$\left\| g(W^0(x, t), W(x, t)) - g(\overline{W}^0(x, t), \overline{W}(x, t)) \right\| \leq L\rho(t);$$

$$\left| W^0(x, t) - \overline{W}^0(x, t) \right| \leq L \int_0^t \rho(s) ds; \quad (1.14)$$

$$\|W(x, t) - \overline{W}(x, t)\| \leq L \int_0^t \rho(s) ds. \quad (1.15)$$

Somando (1.14) e (1.15) segue-se que

$$0 \leq \left| W^0(x, t) - \overline{W}^0(x, t) \right| + \|W(x, t) - \overline{W}(x, t)\| \leq 2L \int_0^t \rho(s) ds, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T].$$

Daí

$$\rho(t) \leq 2L \int_0^t \rho(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Do Lema de Gronwall (pg. 79) segue que  $\rho(t) \equiv 0$  e assim  $\overline{W}^0(x, t) = W^0(x, t)$  e  $\overline{W}(x, t) = W(x, t)$ , para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ .

■

### 1.3 Dependência Contínua dos dados Iniciais

Nas duas Seções anteriores tratamos da questão de existência e unicidade de solução do sistema (1). Esta Seção tem como objetivo mostrar a dependência contínua dessa solução com relação aos dados iniciais  $\psi^0$  e  $\psi$ . Isto significa mostrar que duas soluções de (1) mantem-se "próximas" ao longo do tempo, desde que os dados iniciais estejam próximos ao longo de um intervalo finito (no espaço). Seja novamente  $L > 0$  como em (1.4). Baseados nas estimativas das iteradas, seja  $P > 0$  uma constante que depende de  $T$  tal que

$$|W_n^0(x, t)| \leq P, \quad \|W_n(x, t)\| \leq P, \\ \left| \overline{W}_n^0(x, t) \right| \leq P \quad \text{e} \quad \left\| \overline{W}_n(x, t) \right\| \leq P, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T],$$

onde  $\overline{W}_n^0$  e  $\overline{W}_n$  são as iteradas correspondentes aos dados iniciais  $\overline{W}^0(x, 0) = \overline{\psi}^0$  e  $\overline{W}(x, 0) = \overline{\psi}$ .

**Teorema 1.3** *Seja  $I$  um intervalo arbitrário. Sejam  $\varepsilon, T$  constantes positivas arbitrárias. Sejam  $\psi^0, \psi, \overline{\psi}^0, \overline{\psi}$  funções contínuas em  $\mathbb{R}$  e  $M > 0$  tais que*

$$|\psi^0(x)| \leq M, \quad \|\psi(x)\| \leq M, \quad |\overline{\psi}^0(x)| \leq M, \quad \|\overline{\psi}(x)\| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Então existem um intervalo finito  $J$  suficientemente grande e um número  $\delta > 0$  tais que se  $|\psi^0(x) - \overline{\psi}^0(x)| < \delta$  e  $\|\psi(x) - \overline{\psi}(x)\| < \delta$ ,  $\forall x \in J$ , então as soluções  $(W^0(x, t), W(x, t))$  e  $(\overline{W}^0(x, t), \overline{W}(x, t))$  de (1) com valores iniciais  $(\psi^0(x), \psi(x))$  e  $(\overline{\psi}^0(x), \overline{\psi}(x))$ , respectivamente, satisfazem,*

$$\left| W^0(x, t) - \overline{W}^0(x, t) \right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \|W(x, t) - \overline{W}(x, t)\| < \varepsilon, \quad \forall (x, t) \in I \times [0, T].$$

#### Demonstração:

Suponha que  $(W^0, W), (\overline{W}^0, \overline{W})$  sejam limites uniformes das sequências de iteradas  $(W_m^0, W_m), (\overline{W}_m^0, \overline{W}_m)$  respectivamente. Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , como a estimativa de convergência depende apenas de  $L$  e de  $M$ , existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $m \geq m_0$  então

$$\left| W_m^0(x, t) - W^0(x, t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \overline{W}_m^0(x, t) - \overline{W}^0(x, t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \\ \|W_m(x, t) - W(x, t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \|\overline{W}_m(x, t) - \overline{W}(x, t)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seja  $m \in \mathbb{N}$  com  $m \geq m_0$  e  $m$  fixo. Então

$$\left| W^0(x, t) - \overline{W}^0(x, t) \right| \leq \left| W^0(x, t) - W_m^0(x, t) \right| + \left| W_m^0(x, t) - \overline{W}_m^0(x, t) \right| \\ + \left| \overline{W}_m^0(x, t) - \overline{W}^0(x, t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| W_m^0(x, t) - \overline{W}_m^0(x, t) \right| + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \|W(x, t) - \overline{W}(x, t)\| &\leq \|W(x, t) - W_m(x, t)\| + \|W_m(x, t) - \overline{W}_m(x, t)\| \\ &+ \|\overline{W}_m(x, t) - \overline{W}(x, t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|W_m(x, t) - \overline{W}_m(x, t)\| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Logo basta mostrar que existe  $\delta > 0$  e um intervalo  $J$  tal que se

$$\left| \psi^0(x) - \overline{\psi^0}(x) \right| < \delta \quad \text{e} \quad \|\psi(x) - \overline{\psi}(x)\| < \delta, \quad \forall x \in J,$$

então

$$\left| W_m^0(x, t) - \overline{W}_m^0(x, t) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \|W_m(x, t) - \overline{W}_m(x, t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in I, 0 \leq t \leq T.$$

Sejam  $I_m = I$  e  $\delta_m = \frac{\varepsilon}{3}$ . Defina as constantes  $K = 1 + 2M + 2LT + 2LPT$  e  $\delta_j = \frac{\delta_{j+1}}{K}$  com  $j$  decrescendo de  $j = m - 1$  até  $j = 0$ .

Note que  $\delta_j$ ,  $j = m, m - 1, \dots, 1, 0$ , satisfaz:

$$\delta_m = \frac{\varepsilon}{3}, \delta_{m-1} = \frac{\varepsilon}{3K}, \dots, \delta_1 = \frac{\varepsilon}{3K^{m-1}} \quad \text{e} \quad \delta_0 = \frac{\varepsilon}{3K^m}.$$

Como a integral  $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$  é convergente, então para cada  $j = m - 1, m - 2, \dots, 1, 0$ , escolha  $\sigma_j$  tal que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sigma_j}{\sqrt{4T}}}^\infty e^{-t^2} dt < \delta_j. \quad (1.18)$$

Agora defina intervalos  $I_j$ ,  $j = m - 1, m - 2, \dots, 1, 0$ , tais que  $I_j$  seja o intervalo  $I_{j+1}$  expandido por  $\sigma_j$  em suas extremidades. Por exemplo, se  $I_{j+1} = [a, b]$  então temos  $I_j = [a - \sigma_j, a) \cup I_{j+1} \cup (b, b + \sigma_j]$ . Definimos  $J = I_0$  e  $\delta = \delta_0$ .

A demonstração prosseguirá pela aplicação do Lema 1.1 a seguir, cuja demonstração (do Lema 1.1) será dada ao final (da demonstração do Teorema 1.3).

**Lema 1.1** *Seja  $j \in \mathbb{N}$  com  $0 \leq j \leq m - 1$ . Se  $\left| W_j^0(x, t) - \overline{W}_j^0(x, t) \right| < \delta_j$  e  $\|W_j(x, t) - \overline{W}_j(x, t)\| < \delta_j$ , para todo  $(x, t) \in I_j \times [0, T]$  então valem as desigualdades  $\left| W_{j+1}^0(x, t) - \overline{W}_{j+1}^0(x, t) \right| < \delta_{j+1}$  e  $\|W_{j+1}(x, t) - \overline{W}_{j+1}(x, t)\| < \delta_{j+1}$ , para todo  $(x, t) \in I_{j+1} \times [0, T]$ .*

Proseguimos então a demonstração (do Teorema 1.3) aplicando o Lema 1.1 sucessivamente com  $j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ .

Lembrando que como foi definida a sequência de aproximações, temos que  $W_0^0(x, t) = \psi^0(x)$  e  $W_0(x, t) = \psi(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall t > 0$ . Assim aplicando o Lema 1.1 com  $j = 0$ , temos que se

$$\begin{aligned} \left| \psi^0(x) - \overline{\psi^0}(x) \right| < \delta = \delta_0 \text{ e } \|\psi(x) - \overline{\psi}(x)\| < \delta = \delta_0, \quad \forall x \in J = I_0, \text{ isto é, se} \\ \left| W_0^0(x, t) - \overline{W_0^0}(x, t) \right| < \delta_0 = \delta \text{ e } \|W_0(x, t) - \overline{W_0}(x, t)\| < \delta_0 = \delta, \quad \forall x \in J = I_0, \end{aligned}$$

então

$$\left| W_1^0(x, t) - \overline{W_1^0}(x, t) \right| < \delta_1 \text{ e } \|W_1(x, t) - \overline{W_1}(x, t)\| < \delta_1, \quad \forall (x, t) \in I_1 \times [0, T].$$

Aplicando novamente o Lema 1.1, desta vez com  $j = 1$ , obtemos que

$$\left| W_2^0(x, t) - \overline{W_2^0}(x, t) \right| < \delta_2 \text{ e } \|W_2(x, t) - \overline{W_2}(x, t)\| < \delta_2, \quad \forall (x, t) \in I_2 \times [0, T].$$

Seguindo este procedimento temos que

$$\begin{aligned} \left| W_{m-1}^0(x, t) - \overline{W_{m-1}^0}(x, t) \right| < \delta_{m-1} \text{ e} \\ \|W_{m-1}(x, t) - \overline{W_{m-1}}(x, t)\| < \delta_{m-1}, \quad \forall (x, t) \in I_{m-1} \times [0, T]. \end{aligned}$$

Daí, aplicando o Lema 1.1 pela última vez com  $j = m - 1$ , obtemos que

$$\left| W_m^0(x, t) - \overline{W_m^0}(x, t) \right| < \delta_m \text{ e } \|W_m(x, t) - \overline{W_m}(x, t)\| < \delta_m, \quad \forall (x, t) \in I_m \times [0, T].$$

Como  $\delta_m = \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $I_m = I$  e  $J = I_0$  obtivemos então que

$$\left| W_m^0(x, t) - \overline{W_m^0}(x, t) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \|W_m(x, t) - \overline{W_m}(x, t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in I, \forall t \in [0, T],$$

como queríamos.

Voltando às equações (1.16) e (1.17) temos que se  $\left| \psi^0(x) - \overline{\psi^0}(x) \right| < \delta$  e  $\|\psi(x) - \overline{\psi}(x)\| < \delta$ ,  $\forall x \in J$ , então

$$\left| W^0(x, t) - \overline{W^0}(x, t) \right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \|W(x, t) - \overline{W}(x, t)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in I, \forall t \in [0, T],$$

o que conclui a demonstração do Teorema 1.3. ■

Uma vez concluída a demonstração do Teorema 1.3, passemos à

**Demonstração** do Lema 1.1:

Fixado  $j \in \mathbb{N}$ , com  $0 \leq j \leq m - 1$  e usando a desigualdade triangular temos que

$$\begin{aligned} \left| W_{j+1}^0(x, t) - \overline{W_{j+1}^0}(x, t) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) \left( W_j^0(x, 0) - \overline{W_j^0}(x, 0) \right) dy \right. \\ &+ \left. \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left[ g^0(W_j^0(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W_j^0}(y, s), \overline{W_j}(y, s)) \right] dy ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) \left| W_j^0(x, 0) - \overline{W_j^0}(x, 0) \right| dy \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left| g^0(W_j^0(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W_j^0}(y, s), \overline{W_j}(y, s)) \right| dy ds. \end{aligned}$$

Denotando o conjunto complementar do intervalo  $I_j$  por  $I_j^c$  temos que

$$\begin{aligned}
& \left| W_{j+1}^0(x, t) - \overline{W}_{j+1}^0(x, t) \right| \leq \int_{I_j} \mathcal{K}(x, y, t) \left| W_j^0(x, 0) - \overline{W}_j^0(x, 0) \right| dy \\
& + \int_{I_j^c} \mathcal{K}(x, y, t) \left| W_j^0(x, 0) - \overline{W}_j^0(x, 0) \right| dy \\
& + \int_0^t \int_{I_j} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left| g^0(W_j^0(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W}_j^0(y, s), \overline{W}_j(y, s)) \right| dy ds \\
& + \int_0^t \int_{I_j^c} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left| g^0(W_j^0(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W}_j^0(y, s), \overline{W}_j(y, s)) \right| dy ds.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Denotamos por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  as integrais que aparecem do lado direito da última desigualdade em (1.19), respectivamente. Façamos a estimativa para cada uma dessas integrais. Para  $A$  temos que

$$A = \int_{I_j} \mathcal{K}(x, y, t) \left| W_j^0(x, 0) - \overline{W}_j^0(x, 0) \right| dy \leq \delta_j \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) dy = \delta_j. \tag{1.20}$$

Para a integral  $C$ , aplicamos o teorema do valor médio e usamos as limitações em (1.4), para obter que

$$\begin{aligned}
C &= \int_0^t \int_{I_j} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left| g^0(W_j^0(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W}_j^0(y, s), \overline{W}_j(y, s)) \right| dy ds \\
&\leq \int_0^t \int_{I_j} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left[ \left| g^0(W_j^0(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W}_j^0(y, s), W_j(y, s)) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| g^0(\overline{W}_j^0(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W}_j^0(y, s), \overline{W}_j(y, s)) \right| \right] dy ds \\
&\leq \int_0^t \int_{I_j} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left[ L \left| W_j^0(y, s) - \overline{W}_j^0(y, s) \right| + L \|W_j(y, s) - \overline{W}_j(y, s)\| \right] dy ds \\
&\leq 2L\delta_j \int_0^t \int_{I_j} \mathcal{K}(x, y, t-s) dy ds = 2L\delta_j t \leq 2L\delta_j T.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Para estimar a integral  $B$ , lembremos que  $x \in I_{j+1}$  e que  $y \in I_j^c$  e assim temos  $|x - y| > \sigma_j$ , pois por construção  $I_{j+1} \subset I_j$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ . Vamos também usar a fórmula (A.7) para  $\mathcal{K}(x, y, t)$  (pg. 74), fazer uma mudança de variáveis conveniente e



usar a desigualdade (1.18). Assim,

$$\begin{aligned}
B &= \int_{I_j^c} \mathcal{K}(x, y, t) \left| (W_j^0(x, 0) - \overline{W}^0_j(x, 0)) \right| dy \leq 2M \int_{I_j^c} \mathcal{K}(x, y, t) dy \\
&= 2M \int_{|x-y| \geq \sigma_j} \mathcal{K}(x, y, t) dy = 2M \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{|x-y| \geq \sigma_j} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \right) \\
&= 2M \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|z| \geq \frac{\sigma_j}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2} dz \right) \leq 2M \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sigma_j}{\sqrt{4t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right) < 2M\delta_j. \tag{1.22}
\end{aligned}$$

Para estimar a integral  $D$  usamos novamente as desigualdades triangular e do valor médio, junto com as limitações em (1.4) e a desigualdade (1.18), obtendo

$$\begin{aligned}
D &= \int_0^t \int_{I_j^c} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left| g^0(W_j^0(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W}^0_j(y, s), \overline{W}_j(y, s)) \right| dy ds \\
&\leq \int_0^t \int_{I_j^c} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left[ \left| g^0(W_j^0(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W}^0_j(y, s), W_j(y, s)) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| g^0(\overline{W}^0_j(y, s), W_j(y, s)) - g^0(\overline{W}^0_j(y, s), \overline{W}_j(y, s)) \right| \right] dy ds \\
&\leq \int_0^t \int_{I_j^c} \mathcal{K}(x, y, t-s) \left[ L \left| W_j^0(y, s) - \overline{W}^0_j(y, s) \right| + L \|W_j(y, s) - \overline{W}_j(y, s)\| \right] dy ds \\
&\leq 2LP \int_0^t \int_{|x-y| \geq \sigma_j} \mathcal{K}(x, y, t-s) dy = 2LP \int_0^t \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{|x-y| \geq \sigma_j} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \right) ds \\
&= 2LP \int_0^t \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|z| \geq \frac{\sigma_j}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2} dz \right) ds \leq 2LP \int_0^t \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sigma_j}{\sqrt{4t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right) ds \\
&< 2LP\delta_j t \leq 2LPT\delta_j. \tag{1.23}
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas (1.20), (1.21), (1.22) e (1.23) em (1.19) obtemos que, se  $x \in I_{j+1}$  e  $0 \leq t \leq T$ , então

$$\left| W_{j+1}^0(x, t) - \overline{W}^0_{j+1}(x, t) \right| < (1 + 2M + 2LT + 2LPT)\delta_j = K\delta_j = \delta_{j+1}.$$

Estimemos agora  $\|W_j(x, t) - \overline{W}_j(x, t)\|$ . Usando mais uma vez as desigualdades triangular, do valor médio, as limitações em (1.4) e que  $I_{j+1} \subset I_j$ , temos que

$$\begin{aligned}
& \|W_{j+1}(x, t) - \overline{W}_{j+1}(x, t)\| \\
&= \left\| \psi(x) + \int_0^t g(W_j^0(x, s), W_j(x, s)) ds - \overline{\psi}(x) - \int_0^t g(\overline{W}_j^0(x, s), \overline{W}_j(x, s)) ds \right\| \\
&\leq \|\psi(x) - \overline{\psi}(x)\| + \int_0^t \left\| g(W_j^0(x, s), W_j(x, s)) - g(\overline{W}_j^0(x, s), \overline{W}_j(x, s)) \right\| ds \\
&\leq \delta_j + \int_0^t \left[ \left\| g(W_j^0(x, s), W_j(x, s)) - g(\overline{W}_j^0(x, s), W_j(x, s)) \right\| + \right. \\
&\quad \left. + \left\| g(\overline{W}_j^0(x, s), W_j(x, s)) - g(\overline{W}_j^0(x, s), \overline{W}_j(x, s)) \right\| \right] ds \\
&\leq \delta_j + \int_0^t \left[ L |W_j^0(x, s) - \overline{W}_j^0(x, s)| + L \|W_j(x, s) - \overline{W}_j(x, s)\| \right] ds \\
&\leq \delta_j + 2LT\delta_j \leq \delta_j + 2M\delta_j + 2LT\delta_j + 2LPT\delta_j = K\delta_j = \delta_{j+1},
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do Lema 1.1. ■

No próximo teorema obtemos uma estimativa para a taxa de crescimento da solução do sistema de equações integrais (1.1)-(1.2).

**Teorema 1.4** *Sejam  $T > 0$  e  $L > 0$  como em (1.4). Suponha  $g^i(0) = 0$ ,  $i = 0, \dots, n$ , seja  $\mathcal{W} = (W^0, W)$  uma solução do sistema integral (1.1)-(1.2) com dado inicial limitado, então*

$$\|\mathcal{W}(\cdot, t)\|_\infty \leq \|\mathcal{W}(\cdot, 0)\|_\infty e^{Lt}, \quad \forall t \in [0, T].$$

**Demonstração:** Utilizando a desigualdade do valor médio, temos que

$$\begin{aligned}
|g^i(\mathcal{W}(y, s))| &= |g^i(\mathcal{W}(y, s)) - g^i(0)| \\
&\leq L\|\mathcal{W}(\cdot, s)\|_\infty, \quad i = 0, 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Utilizando (1.1), o fato que  $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) dy = 1$  e (1.24) temos que,

$$\begin{aligned}
|W^0(x, t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) W^0(y, 0) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) g^0(\mathcal{W}(y, s)) dy ds \right| \\
&\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) W^0(y, 0) dy \right| + \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) g^0(\mathcal{W}(y, s)) dy ds \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) |W^0(y, 0)| dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) |g^0(\mathcal{W}(y, s))| dy ds \\
&\leq \sup_{y \in \mathbb{R}} \{|W^0(y, 0)|\} + \int_0^t L\|\mathcal{W}(\cdot, s)\|_\infty ds.
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$|W^0(x, t)| \leq \|\mathcal{W}(\cdot, 0)\|_\infty + \int_0^t L \|\mathcal{W}(\cdot, s)\|_\infty ds. \quad (1.25)$$

Agora utilizando (1.2) temos para  $i = 1, \dots, n$ , que

$$\begin{aligned} |W^i(x, t)| &= \left| W^i(x, 0) + \int_0^t g^i(\mathcal{W}(y, s)) ds \right| \leq |W^i(x, 0)| + \int_0^t |g^i(\mathcal{W}(y, s))| ds \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |W^i(x, 0)| + \int_0^t L \|\mathcal{W}(\cdot, s)\|_\infty ds. \end{aligned}$$

Daí segue que

$$|W^i(x, t)| \leq \|\mathcal{W}(\cdot, 0)\|_\infty + \int_0^t L \|\mathcal{W}(\cdot, s)\|_\infty ds, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (1.26)$$

Assim de (1.25) e (1.26) obtemos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |W^i(x, t)| \leq \|\mathcal{W}(\cdot, 0)\|_\infty + \int_0^t L \|\mathcal{W}(\cdot, s)\|_\infty ds, \quad \text{para } i = 0, \dots, n.$$

Donde concluímos que

$$\|\mathcal{W}(\cdot, t)\|_\infty \leq \|\mathcal{W}(\cdot, 0)\|_\infty + \int_0^t L \|\mathcal{W}(\cdot, s)\|_\infty ds. \quad (1.27)$$

Para concluir aplicamos o Lema de Gronwall (pg. 79) em (1.27), obtendo

$$\|\mathcal{W}(\cdot, t)\|_\infty \leq \|\mathcal{W}(\cdot, 0)\|_\infty e^{Lt}.$$

■

### 1.3.1 Generalização

Todos os resultados obtidos nas Seções anteriores também são válidos para um sistema mais geral (do que o sistema (1)) da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial W^0}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 W^0}{\partial x^2}(x, t) = \tilde{g}_0(x, t, \mathcal{W}(x, t)), \\ \frac{\partial W}{\partial t}(x, t) = \tilde{g}(x, t, \mathcal{W}(x, t)), \end{cases} \quad (1.28)$$

onde  $\mathcal{W} = (W^0, W)$ . As hipóteses sobre as funções  $\tilde{g}_0$  e  $\tilde{g} = (g^1, \dots, g^n)$  são as mesmas anteriores para as funções  $g^0$  e  $g$  acrescidas das limitações das derivadas parciais

primeiras com relação à variável  $x$ . Assim o sistema de equações integrais (1.1)-(1.2) equivalente ao sistema (1.28) passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} W^0(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) W^0(y, 0) dy \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) \tilde{g}_0(y, s, \mathcal{W}(y, s)) dy ds, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$W(x, t) = W(x, 0) + \int_0^t \tilde{g}(x, s, \mathcal{W}(x, s)) ds. \quad (1.30)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq t \leq T$ , e desta forma a mesma adaptação é feita na sequência de iteradas  $(W_n^0, W_n)_{n=0}^{\infty}$  (pg. 13), obtendo a nova sequência

$$\left\{ \begin{array}{l} W_0^0(x, t) = W^0(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad e \quad t \in [0, T]; \\ W_{n+1}^0(x, 0) = W^0(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}; \\ W_{n+1}^0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) W^0(y, 0) dy \\ \quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) \tilde{g}_0(y, s, \mathcal{W}_n(y, s)) dy ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ \\ W_0(x, t) = W(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}; \quad t \in [0, T]; \\ W_{n+1}(x, 0) = W(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}; \\ W_{n+1}(x, t) = W(x, 0) + \int_0^t \tilde{g}(y, s, \mathcal{W}_n(x, s)) ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \end{array} \right.$$

e a partir daí obtendo Teoremas análogos.

# Capítulo 2

## Sobre a Estabilidade Exponencial de Soluções

Em vários trabalhos, tais como [3, 6, 15, 16], são mostrados numericamente ou analiticamente que para determinadas escolhas das funções  $g^i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , o sistema (1) admite soluções do tipo onda viajante da forma  $W^i(x, t) = \phi^i(x - vt)$ , onde  $v$  é a velocidade de propagação da onda viajante. Tomando como hipótese a existência desta onda viajante, o objetivo deste Capítulo é apresentar um resultado de estabilidade exponencial do sistema em torno da mesma. Na primeira Seção são feitas algumas preliminares introduzindo o conceito de onda viajante do sistema (1) e suas propriedades. Na segunda Seção introduzimos o conceito de estabilidade exponencial e apresentamos o Teorema principal do Capítulo, cuja demonstração está baseada numa sequência de três lemas fundamentais que também são apresentados.

### 2.1 Preliminares

Vamos iniciar estas preliminares formalizando o conceito de onda viajante do sistema (1).

**Definição 2.1** *Seja  $\mathcal{W} = (W^0, W)$  uma solução de classe  $C^2$  do sistema (1). Dizemos que  $\mathcal{W}$  é uma solução do tipo onda viajante, ou simplesmente que  $\mathcal{W}$  é uma onda viajante, se a mesma tem a forma  $\mathcal{W}(x, t) = \phi(x - vt)$  onde  $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^n)$  e  $v$  é uma constante, no caso  $v$  é dita a velocidade de propagação da onda viajante.*

Usando a notação  $\xi = x - vt$ , temos por substituição direta no sistema (1) que  $\phi^i(\xi)$ , com  $i = 0, 1, \dots, n$ , satisfaz

$$\begin{cases} -v \frac{d\phi^0}{d\xi}(\xi) - \frac{d^2\phi^0}{d\xi^2}(\xi) = g^0(\phi^0(\xi), \phi^1(\xi), \dots, \phi^n(\xi)), \\ -v \frac{d\phi^i}{d\xi}(\xi) = g^i(\phi^0(\xi), \phi^1(\xi), \dots, \phi^n(\xi)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Para poder comparar as soluções do sistema (1) com as soluções de (2.1), vamos escrever o sistema (1) em coordenadas móveis, isto é, façamos a seguinte mudança de variáveis  $\xi = x - vt$ ,  $\tau = t$ . Definindo  $U^i(\xi, \tau) = W^i(\xi + vt, t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , temos pela regra da cadeia que

$$\frac{\partial W^i}{\partial t} = \frac{\partial U^i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U^i}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -v \frac{\partial U^i}{\partial \xi} + \frac{\partial U^i}{\partial \tau} \quad (2.2)$$

e

$$\frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U^i}{\partial \xi^2}. \quad (2.3)$$

De (2.2) e (2.3) e considerando que  $\mathcal{W} = (W^0, W)$  é uma solução de (1) obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial \tau}(\xi, \tau) - v \frac{\partial U^0}{\partial \xi}(\xi, \tau) - \frac{\partial^2 U^0}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) = g^0(U^0, U^1, \dots, U^n), \\ \frac{\partial U^i}{\partial \tau}(\xi, \tau) - v \frac{\partial U^i}{\partial \xi}(\xi, \tau) = g^i(U^0, U^1, \dots, U^n), \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.4)$$

O sistema (2.4) é o mesmo sistema (1) só que em coordenadas móveis. Isto significa que neste sistema a onda viajante com velocidade  $v$  fica imóvel ou que é uma solução estacionária do sistema (2.4).

Linearizando o sistema (2.4) em torno da onda viajante  $\phi$  obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial \tau}(\xi, \tau) - v \frac{\partial U^0}{\partial \xi}(\xi, \tau) - \frac{\partial^2 U^0}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) = G^0(\xi, (U^0(\xi, \tau), U(\xi, \tau))), \\ \frac{\partial U^i}{\partial \tau}(\xi, \tau) - v \frac{\partial U^i}{\partial \xi}(\xi, \tau) = G^i(\xi, (U^0(\xi, \tau), U(\xi, \tau))), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $G^i(\xi, (U^0(\xi, \tau), U(\xi, \tau))) = D_0 g^i(\phi(\xi)) U^0(\xi, \tau) + \dots + D_n g^i(\phi(\xi)) U^n(\xi, \tau)$ , com  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Note que nas variáveis  $(x, t)$  o sistema (2.5) fica da mesma forma que o sistema (1.28), uma vez que os termos do lado direito das igualdades não dependem apenas das funções incógnitas, mas dependem também das variáveis independentes  $(x, t)$  através de  $\phi(\xi) = \phi(x - vt)$ .

De maneira análoga ao Teorema 1.1 (pg. 10), demonstra-se que o sistema de equações integrais (correspondentes à (1.1)-(1.2)) e equivalente ao sistema (2.4) é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} U^0(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau) U^0(y, 0) dy \\ \quad + \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau - s) g^0(\mathcal{U}(y - vs, s)) dy ds, \\ \\ U^i(\xi, \tau) = U^i(\xi + v\tau, 0) + \int_0^{\tau} g^i(\mathcal{U}(\xi + v\tau - vs, s)) ds, i = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

onde  $\mathcal{U} = (U^0, U^1, \dots, U^n)$ . Já o sistema de equações integrais equivalente ao sistema (2.5) é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} U^0(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau) U^0(y, 0) dy \\ \quad + \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau - s) \sum_{j=0}^n D_j g^0(\phi(y - vs)) U^j(y - vs, s) dy ds \\ \\ U^i(\xi, \tau) = U^i(\xi + v\tau, 0) \\ \quad + \int_0^{\tau} \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi(\xi + v\tau - vs, s)) U^j(\xi + v\tau - vs, s) ds, i = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

**Teorema 2.2** *Seja  $v > 0$ . Suponha que as funções  $g^0$  e  $g$  sejam contínuas com derivadas parciais primeiras contínuas e limitadas. Seja  $\phi(\xi)$  uma solução limitada do sistema (2.1) com velocidade  $v$ . Então  $\frac{d\phi}{d\xi}(\xi)$  é uma solução limitada do sistema linear (2.5). Além disso  $\frac{d^3\phi^0}{d\xi^3}$  e  $\frac{d^2\phi^i}{d\xi^2}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$ , também são limitadas.*

**Demonstração:** Como  $\phi$  é limitada, das hipóteses sobre  $g^i$ , segue que  $g^i(\phi)$  também é limitada, para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Portanto das últimas equações do sistema (2.1) temos que  $\frac{\partial\phi^i}{\partial\xi}$  são limitadas, para  $i = 1, \dots, n$ . Como  $W^0(x, t) = \phi^0(x - vt)$  é limitada, então do Teorema 1.1, dado  $T > 0$ , temos que  $\frac{\partial W^0}{\partial x}$  é limitada em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ , donde segue que  $\frac{d\phi^0}{d\xi}$  é limitada em  $\mathbb{R}$  pois  $\frac{d\phi^0}{d\xi}(\xi)$  e  $\frac{d\phi^0}{d\xi}(x - vt)$  têm as mesmas imagens

quando  $\xi$  e  $x$  percorrem a reta real. Portanto obtivemos que  $\frac{d\phi}{d\xi}(\xi)$  é limitada. Agora usando a primeira equação do sistema (2.1) obtemos que  $\frac{d^2\phi^0}{d\xi^2}(\xi)$  também é limitada. Diferenciando o sistema (2.1) com relação a  $\xi$  obtemos

$$\begin{cases} -v \frac{d^2\phi^0}{d\xi^2}(\xi) - \frac{d^3\phi^0}{d\xi^3}(\xi) = D_0 g^0(\phi(\xi)) \frac{d\phi^0}{d\xi}(\xi) + \dots + D_n g^0(\phi(\xi)) \frac{d\phi^n}{d\xi}(\xi) \\ -v \frac{d^2\phi^i}{d\xi^2}(\xi) = D_0 g^i(\phi(\xi)) \frac{d\phi^0}{d\xi}(\xi) + \dots + D_n g^i(\phi(\xi)) \frac{d\phi^n}{d\xi}(\xi), \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.8)$$

o que mostra que  $\frac{d\phi}{d\xi}$  é solução (estacionária) limitada do sistema linear (2.5). Fazendo as mesmas considerações que foram feitas para a solução  $\phi$  do sistema (2.1), agora para a solução  $\frac{d\phi}{d\xi}$  do sistema (2.5), obtemos que  $\frac{d^2\phi^i}{d\xi^2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $\frac{d^3\phi^0}{d\xi^3}$  também são limitadas. ■

## 2.2 Estabilidade Exponencial

Seja  $\mathcal{W} = \phi(x - vt)$  uma solução do tipo onda viajante do sistema (1) com velocidade de propagação  $v$  e  $\xi = x - vt$ . Portanto, de acordo com a Definição 2.1, a função  $\phi(\xi)$  é solução do sistema (2.1) (ou uma solução estacionária do sistema (2.4)). A seguir daremos as definições sobre estabilidade exponencial que consideraremos no restante da dissertação. Antes observemos que se  $\phi(\xi)$  é uma solução do sistema (2.1) e se  $h$  é uma constante real então  $\phi_h(\xi) = \phi(\xi + h)$  também é solução do sistema (2.1), ou seja, translações de soluções do tipo onda viajante também são soluções do tipo onda viajante do sistema (2.1).

**Definição 2.3** *Seja  $\phi$  uma solução do sistema (2.1). Dizemos que o sistema (2.4) é exponencialmente estável em  $\phi$ , se existirem constantes  $K, P, \alpha$ , positivas, tais que dado  $\beta \in [0, K]$ , para toda solução  $\mathcal{U} = (U^0, U^1, \dots, U^n)$  do sistema (2.4) que satisfaça  $\|\mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi\|_\infty \leq \beta$  existe  $h \in [-\beta P, \beta P]$  tal que*

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau) - \phi_h\|_\infty \leq \beta P e^{-\alpha\tau}, \quad \forall \tau \geq 0.$$

**Definição 2.4** *Seja  $\phi$  solução do sistema (2.1). Dizemos que o sistema (2.5) é exponencialmente estável em  $\frac{d\phi}{d\xi}$  se existirem constantes  $P$  e  $\alpha$  positivas tais que dado  $\beta \geq 0$ ,*



para toda solução  $\mathcal{U} = (U^0, U^1, \dots, U^n)$  do sistema (2.5) que satisfaça  $\|\mathcal{U}(\cdot, 0)\|_\infty \leq \beta$  existe  $h \in [-\beta P, \beta P]$  tal que

$$\left\| \mathcal{U}(\cdot, \tau) - h \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty \leq \beta P e^{-\alpha\tau}, \quad \forall \tau \geq 0.$$

O próximo Teorema é o mais importante deste Capítulo, ele relaciona a estabilidade do sistema (2.4) e da sua linearização dado em (2.5).

**Teorema 2.5** *Seja  $\phi$  uma solução limitada do sistema (2.1). O sistema (2.4) é exponencialmente estável em  $\phi$  se, e somente se, o sistema (2.5) é exponencialmente estável em  $\frac{d\phi}{d\xi}$ .*

Antes de apresentarmos a demonstração deste Teorema enunciaremos e demonstraremos três Lemas que serão utilizados na demonstração do mesmo. Para isto vamos refinar um pouco mais as hipóteses de limitação das derivadas parciais da função  $g^i$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Assim suponha que existem constantes positivas  $L$  e  $Q$  tais que

$$|D_j g^i(\mathcal{W})| \leq \frac{L}{n+1}, \quad |D_{jk}^2 g^i(\mathcal{W})| \leq \frac{Q}{(n+1)^2}, \quad (2.9)$$

para  $j, k = 0, \dots, n$ , e para todo  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Definimos as seguintes funções auxiliares

$$\mathcal{V}(\xi, \tau) = \mathcal{U}(\xi, \tau) - \phi(\xi) \quad \text{e} \quad \rho(\tau) = \left\| \mathcal{V}(\cdot, \tau) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, \tau) \right\|_\infty, \quad \forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \quad (2.10)$$

onde  $\mathcal{U} = (U^0, U)$  é uma solução do sistema (2.4),  $\phi$  é uma solução limitada do sistema (2.1), com  $v > 0$  e  $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{U}^0, \tilde{U})$  é uma solução do sistema (2.5).

**Lema 2.1** *Sejam  $\mathcal{V}$  e  $\rho$  definidas em (2.10). Seja  $M > 0$  tal que  $\|\mathcal{V}(\cdot, \tau)\|_\infty \leq M$  para todo  $\tau \geq 0$ . Então*

$$\rho(\tau) \leq \rho(0)e^{L\tau} + \frac{M^2 Q}{L}(e^{L\tau} - 1), \quad \forall \tau \geq 0. \quad (2.11)$$

**Demonstração:** Sendo  $\phi$  solução do sistema (2.1) então  $\phi$  também é solução estacionária do sistema (2.4). Portanto  $\phi$  satisfaz as equações integrais (2.6). Como  $\mathcal{U}$  e  $\tilde{\mathcal{U}}$  são soluções dos sistemas (2.4) e (2.5) respectivamente, então as mesmas satisfazem as equações integrais (2.6) e (2.7) respectivamente. Usaremos também a seguir a propriedade (iii) do núcleo do calor em (A.7). Assim usando a representação integral em (2.6)

para  $U^0$  e  $\phi^0$  e a representação em (2.7) para  $\tilde{U}^0$  obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| U^0(\xi, \tau) - \phi^0(\xi) - \tilde{U}^0(\xi, \tau) \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau) U^0(y, 0) dy + \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau - s) g^0(\mathcal{U}(y - vs, s)) dy ds \right. \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau) \phi^0(y) dy - \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau - s) g^0(\phi(y - vs)) dy ds \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau) \tilde{U}^0(y, 0) dy \\
&\quad \left. - \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau - s) \sum_{j=0}^n D_j g^0(\phi(y - vs)) \tilde{U}^j(y - vs, s) dy ds \right| \\
&\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau) \left[ U^0(y, 0) - \phi^0(y) - \tilde{U}^0(y, 0) \right] dy \right| \\
&\quad + \left| \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau - s) \left[ g^0(\mathcal{U}(y - vs, s)) - g^0(\phi(y - vs)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{j=0}^n D_j g^0(\phi(y - vs)) \tilde{U}^j(y - vs, s) \right] dy ds \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau) \left| U^0(y, 0) - \phi^0(y) - \tilde{U}^0(y, 0) \right| dy \\
&\quad + \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi + v\tau, y, \tau - s) \left| g^0(\mathcal{U}(y - vs, s)) - g^0(\phi(y - vs)) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^n D_j g^0(\phi(y - vs)) \tilde{U}^j(y - vs, s) \right| dy ds \\
&\leq \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \left| U^0(y, 0) - \phi^0(y) - \tilde{U}^0(y, 0) \right| \right\} + \int_0^{\tau} \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \left| g^0(\mathcal{U}(y - vs, s)) - g^0(\phi(y - vs)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{j=0}^n D_j g^0(\phi(y - vs)) \tilde{U}^j(y - vs, s) \right| \right\} ds \\
&\leq \left\| \mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, 0) \right\|_{\infty} + \int_0^{\tau} H^0(s) ds,
\end{aligned}$$

onde

$$H^0(s) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \left| g^0(\mathcal{U}(y - vs, s)) - g^0(\phi(y - vs)) - \sum_{j=0}^n D_j g^0(\phi(y - vs)) \tilde{U}^j(y - vs, s) \right| \right\}.$$

Resumindo, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left| U^0(\xi, \tau) - \phi^0(\xi) - \tilde{U}^0(\xi, \tau) \right| &\leq \left\| \mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, 0) \right\|_{\infty} \\
&\quad + \int_0^{\tau} H^0(s) ds. \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \tau \geq 0 \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Utilizando desta vez a representação em (2.6) para  $U^i$  e  $\phi^i$  e a representação em (2.7) para  $\tilde{U}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| U^i(\xi, \tau) - \phi^i(\xi) - \tilde{U}^i(\xi, \tau) \right| = \\
& \left| U^i(\xi + v\tau, 0) + \int_0^\tau g^i(\mathcal{U}(\xi + v\tau - vs, s)) ds - \phi^i(\xi + v\tau) - \int_0^\tau g^i(\phi(\xi + v\tau - vs, s)) ds \right. \\
& \quad \left. - \tilde{U}^i(\xi + v\tau - vs, 0) - \int_0^\tau \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi(\xi + v\tau - vs, s)) \tilde{U}^j(\xi + v\tau - vs, s) ds \right| \\
& \leq \left| U^i(\xi + v\tau, 0) - \phi^i(\xi + v\tau) - \tilde{U}^i(\xi + v\tau, 0) \right| + \left| \int_0^\tau \left[ g^i(\mathcal{U}(\xi + v\tau - vs, s)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - g^i(\phi(\xi + v\tau - vs, s)) - \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi(\xi + v\tau - vs, s)) \tilde{U}^j(\xi + v\tau - vs, s) \right] ds \right| \\
& \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left\{ \left| U^i(\xi, 0) - \phi^i(\xi) - \tilde{U}^i(\xi, 0) \right| \right\} + \int_0^\tau \left| g^i(\mathcal{U}(\xi + v\tau - vs, s)) \right. \\
& \quad \left. - g^i(\phi(\xi + v\tau - vs, s)) - \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi(\xi + v\tau - vs, s)) \tilde{U}^j(\xi + v\tau - vs, s) \right| ds \\
& \leq \left\| \mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, 0) \right\|_\infty + \int_0^\tau H^i(s) ds,
\end{aligned}$$

onde

$$H^i(s) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \left| g^i(\mathcal{U}(y - vs, s)) - g^i(\phi(y - vs)) - \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi(y - vs)) \tilde{U}^j(y - vs, s) \right| \right\}.$$

Portanto obtemos também que

$$\begin{aligned}
\left| U^i(\xi, \tau) - \phi^i(\xi) - \tilde{U}^i(\xi, \tau) \right| & \leq \left\| \mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, 0) \right\|_\infty \\
& \quad + \int_0^\tau H^i(s) ds, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Agora procuremos uma estimativa de limitação para as funções  $H^i(s)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Como  $\mathcal{U}(\cdot, s) = \mathcal{V}(\cdot, s) + \phi$ , então  $g^i(\mathcal{U}(\cdot, s)) = g^i(\mathcal{V}(\cdot, s) + \phi)$ . Somando e subtraindo  $\sum_{j=0}^n D_j g^i \mathcal{V}^j$  na expressão que define  $H^i$  e usando a aproximação de Taylor de segunda ordem temos que existe um ponto  $\theta^*(y, s)$  no segmento de extremidades  $\phi(\xi)$  e  $\mathcal{V}(\xi, s)$ ,

tal que

$$\begin{aligned}
& \left| g^i(\mathcal{U}) - g^i(\phi) - \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi) \tilde{U}^j \right| \\
& \leq \left| g^i(\mathcal{V} + \phi) - g^i(\phi) - \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi) V^j \right| + \left| \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi) V^j - \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi) \tilde{U}^j \right| \\
& = \left| \frac{1}{2} \sum_{j,k=0}^n D_{jk}^2 g^i(\theta^*) V^j V^k \right| + \left| \sum_{j=0}^n D_j g^i(\phi) [V^j - \tilde{U}^j] \right| \\
& \leq \frac{Q}{2(n+1)^2} \sum_{j,k=0}^n |V^j V^k| + L \left\| \mathcal{V}(\cdot, s) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, s) \right\|_{\infty} \\
& \leq \frac{Q}{2(n+1)^2} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{\|V^j\|_{\infty}^2 + \|V^k\|_{\infty}^2}{2} + L \left\| \mathcal{V}(\cdot, s) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, s) \right\|_{\infty} \\
& \leq \frac{Q \|\mathcal{V}(\cdot, s)\|_{\infty}^2}{2(n+1)^2} (n+1)^2 + L \left\| \mathcal{V}(\cdot, s) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, s) \right\|_{\infty} \\
& \leq Q \|\mathcal{V}(\cdot, s)\|_{\infty}^2 + L \left\| \mathcal{V}(\cdot, s) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, s) \right\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Logo da definição de  $H^i$ , segue que

$$H^i(s) \leq Q \|\mathcal{V}(\cdot, s)\|_{\infty}^2 + L \left\| \mathcal{V}(\cdot, s) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, s) \right\|_{\infty}, \quad i = 0, \dots, n,$$

donde obtemos que

$$\max_{0 \leq i \leq n} \{H^i(s)\} \leq Q \|\mathcal{V}(\cdot, s)\|_{\infty}^2 + L \left\| \mathcal{V}(\cdot, s) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, s) \right\|_{\infty}. \quad (2.14)$$

Assim voltando à (2.12) e (2.13) temos que

$$\left| U^i(\xi, \tau) - \phi^i(\xi) - \tilde{U}^i(\xi, \tau) \right| \leq \left\| \mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, 0) \right\|_{\infty} + \int_0^{\tau} H^i(s) ds, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Usando a hipótese de que  $\|\mathcal{V}(\cdot, s)\|_{\infty} \leq M$ , a desigualdade (2.14) e a definição da função  $\rho$ , segue que

$$\begin{aligned}
& \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left\{ \left| U^i(\xi, \tau) - \phi^i(\xi) - \tilde{U}^i(\xi, \tau) \right| \right\} \\
& \leq \left\| \mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, 0) \right\|_{\infty} + \int_0^{\tau} \left( Q \|\mathcal{V}(\cdot, s)\|_{\infty}^2 + L \left\| \mathcal{V}(\cdot, s) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, s) \right\|_{\infty} \right) ds \\
& \leq \left\| \mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, 0) \right\|_{\infty} + \int_0^{\tau} (L\rho(s) + QM^2) ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\| \mathcal{U}(\cdot, \tau) - \phi - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, \tau) \right\|_{\infty} \leq \left\| \mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, 0) \right\|_{\infty} + \int_0^{\tau} (L\rho(s) + QM^2) ds. \quad (2.15)$$

Como por definição  $\mathcal{U}(\cdot, \tau) - \phi = \mathcal{V}(\cdot, \tau)$ , temos de (2.15) que

$$\left\| \mathcal{V}(\cdot, \tau) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, \tau) \right\|_{\infty} \leq \left\| \mathcal{V}(\cdot, 0) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, 0) \right\|_{\infty} + \int_0^{\tau} (L\rho(s) + QM^2) ds,$$

ou seja,

$$\rho(\tau) \leq \rho(0) + QM^2\tau + \int_0^{\tau} L\rho(s) ds. \quad (2.16)$$

Aplicando o Lema de Gronwall generalizado (pg. 79) em (2.16) segue que

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &\leq \rho(0) + QM^2\tau + \int_0^{\tau} L(\rho(0) + QM^2s)e^{L(\tau-s)} ds \\ &= \rho(0) + QM^2\tau + \rho(0)e^{L\tau} \int_0^{\tau} Le^{-Ls} ds + QM^2e^{L\tau} \int_0^{\tau} Lse^{-Ls} ds \\ &= \rho(0) + QM^2\tau + \rho(0)e^{L\tau} [-e^{-Ls}]_0^{\tau} + QM^2e^{L\tau} \left[ -se^{-Ls} - \frac{e^{-Ls}}{L} \right]_0^{\tau} \\ &= \rho(0) + QM^2\tau + \rho(0)e^{L\tau} (-e^{-L\tau} + 1) + QM^2e^{L\tau} \left( -\tau e^{-L\tau} - \frac{e^{-L\tau}}{L} + \frac{1}{L} \right) \\ &= \rho(0) + QM^2\tau + \rho(0) (e^{L\tau} - 1) + QM^2 \left( -\tau - \frac{1}{L} + \frac{e^{L\tau}}{L} \right). \end{aligned}$$

Donde obtemos a estimativa (2.11), o que conclui a demonstração do Lema 2.1 ■

**Observação:** No Lema 2.1 se considerarmos  $\|\tilde{\mathcal{U}}(\cdot, \tau)\|_{\infty} \leq M, \quad \forall \tau \geq 0$ , ao invés da limitação  $\|\mathcal{V}(\cdot, \tau)\|_{\infty} \leq M, \quad \forall \tau \geq 0$ , e na estimativa de  $H^i(s)$  somarmos e subtraímos o termo  $g^i(\phi + \tilde{\mathcal{U}})$  ao invés de  $\sum_{j=0}^n D_j g^i V^j$  (veja pg.33) teremos uma demonstração análoga obtendo que

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{H^i(s)\} \leq L\|\mathcal{V}(\cdot, s) - \tilde{\mathcal{U}}(\cdot, s)\|_{\infty} + Q\|\tilde{\mathcal{U}}(\cdot, s)\|_{\infty}^2$$

e conseqüentemente obtemos a mesma estimativa (2.11).

**Lema 2.2** *Suponha que existam constantes positivas  $\tilde{K}, \tilde{P}$  e  $\tau_0$  tais que dada uma constante  $\beta$  com  $\beta \in [0, \tilde{K}]$ , para toda solução  $\mathcal{U} = (U^0, U^1, \dots, U^n)$  do sistema (2.4) satisfazendo  $\|\mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi\|_{\infty} \leq \beta$  existe  $h \in [-\beta\tilde{P}, \beta\tilde{P}]$  tal que  $\|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_h\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\beta$ . Então o sistema (2.4) é exponencialmente estável em  $\phi$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\tilde{K}, \tilde{P}$  e  $\tau_0$  como nas hipóteses do Lema. Seja  $\mathcal{U}$  uma solução do sistema (2.4) com  $\|\mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi\|_{\infty} \leq \beta \leq \tilde{K}$ . Então também por hipótese, existe  $h_1 \in [-\beta\tilde{P}, \beta\tilde{P}]$  tal que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_1\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\beta,$$

onde  $\phi_1 = \phi_{h_1}$  é a translação de  $\phi$  por  $h_1$ .

Defina  $\mathcal{U}_1(\xi, \tau) = \mathcal{U}(\xi, \tau + \tau_0)$ . Como  $\mathcal{U}$  é solução do sistema (2.4) então por substituição direta temos que  $\mathcal{U}_1$  também é solução de (2.4). Daí,

$$\|\mathcal{U}_1(\cdot, 0) - \phi_1\|_\infty = \|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_1\|_\infty \leq \frac{1}{2}\beta.$$

Como  $0 \leq \frac{1}{2}\beta < \beta \leq \tilde{K}$ , então novamente por hipótese existe  $h_2 \in \left[-\frac{1}{2}\beta\tilde{P}, \frac{1}{2}\beta\tilde{P}\right]$  tal que

$$\|\mathcal{U}_1(\cdot, \tau_0) - \phi_2\|_\infty \leq \frac{1}{2^2}\beta,$$

onde  $\phi_2 = \phi_{h_1+h_2}$  é a translação de  $\phi$  por  $h_1 + h_2$ .

Defina  $\mathcal{U}_2(\xi, \tau) = \mathcal{U}_1(\xi, \tau + \tau_0) = \mathcal{U}(\xi, \tau + 2\tau_0)$ . Então  $\mathcal{U}_2$  também é solução do sistema (2.4) e

$$\|\mathcal{U}_2(\cdot, 0) - \phi_2\|_\infty = \|\mathcal{U}_1(\cdot, \tau_0) - \phi_2\|_\infty \leq \frac{1}{2^2}\beta.$$

Como  $0 \leq \frac{1}{2^2}\beta < \beta \leq \tilde{K}$ , segue novamente por hipótese que existe  $h_3 \in \left[-\frac{1}{2^2}\beta\tilde{P}, \frac{1}{2^2}\beta\tilde{P}\right]$  tal que

$$\|\mathcal{U}_2(\cdot, \tau_0) - \phi_3\|_\infty \leq \frac{1}{2^3}\beta,$$

onde  $\phi_3 = \phi_{h_1+h_2+h_3}$  é a translação de  $\phi$  por  $h_1 + h_2 + h_3$ .

Assim, fazendo  $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$  e procedendo com este raciocínio, para cada  $k \in \mathbb{N}$  obtemos as funções  $\mathcal{U}_{k-1}(\cdot, \tau) = \mathcal{U}(\cdot, \tau + (k-1)\tau_0)$  e  $\phi_{k-1} = \phi_{h_1+\dots+h_{k-1}}$  com  $\mathcal{U}_{k-1}$  solução do sistema (2.4) e  $\phi_{h_1+\dots+h_{k-1}}$  translação de  $\phi$  por  $h_1 + \dots + h_{k-1}$  tais que

$$\|\mathcal{U}_{k-1}(\cdot, 0) - \phi_{k-1}\|_\infty = \|\mathcal{U}_{k-2}(\cdot, \tau_0) - \phi_{k-1}\|_\infty \leq \frac{1}{2^{k-1}}\beta < \beta \leq \tilde{K},$$

donde por hipótese existe  $h_k \in \left[-\frac{1}{2^{k-1}}\beta\tilde{P}, \frac{1}{2^{k-1}}\beta\tilde{P}\right]$  tal que

$$\|\mathcal{U}_{k-1}(\cdot, \tau_0) - \phi_k\|_\infty \leq \frac{1}{2^k}\beta,$$

onde  $\phi_k = \phi_{h_1+h_2+\dots+h_k}$  é a translação de  $\phi$  por  $h_1 + h_2 + \dots + h_k$ .

Mas  $\mathcal{U}_{k-1}(\xi, \tau_0) = \mathcal{U}(\xi, \tau_0 + (k-1)\tau_0) = \mathcal{U}(\xi, k\tau_0)$ . Portanto,

$$\|\mathcal{U}(\cdot, k\tau_0) - \phi_k\|_\infty \leq \frac{1}{2^k}\beta.$$

Como  $-\frac{1}{2^{k-1}}\beta\tilde{P} \leq h_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}\beta\tilde{P}$ , temos que a série numérica  $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$  é convergente.

Definimos então  $h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k$ . Daí,

$$|h| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |h_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \beta\tilde{P} = \beta\tilde{P} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\beta\tilde{P},$$

ou seja,  $h \in [-2\beta\tilde{P}, 2\beta\tilde{P}]$ . Definindo  $\phi_h(\xi) = \phi(\xi + h)$ , temos que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, k\tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \|\mathcal{U}(\cdot, k\tau_0) - \phi_k\|_\infty + \|\phi_h - \phi_k\|_\infty$$

e daí,

$$\|\mathcal{U}(\cdot, k\tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \beta + \|\phi_h - \phi_k\|_\infty. \quad (2.17)$$

Agora usando o teorema do valor médio temos para  $\xi \in \mathbb{R}$  que

$$\begin{aligned} \|\phi_h(\xi) - \phi_k(\xi)\| &= \|\phi(\xi + h_1 + \dots + h_k + h_{k+1} + \dots) - \phi(\xi + h_1 + \dots + h_k)\| \\ &\leq \left\| \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty \sum_{i=k+1}^{\infty} |h_i| \leq \left\| \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\beta\tilde{P}}{2^i} \\ &= \left\| \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k \beta\tilde{P} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2\beta\tilde{P} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left\| \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Substituindo  $\|\phi_h - \phi_k\|_\infty \leq 2\beta\tilde{P} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left\| \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty$  em (2.17) segue que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, k\tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \beta \left(1 + 2\tilde{P} \left\| \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty\right). \quad (2.18)$$

Como a função  $\phi_h$  é uma solução estacionária do sistema (2.4) temos que a função  $\mathcal{U}_k(\xi, \tau) - \phi_h(\xi) = \mathcal{U}(\xi, \tau + k\tau_0) - \phi_h(\xi)$  também é solução de (2.4). Logo pelo Teorema 1.4 (pg. 24) temos que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau + k\tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \|\mathcal{U}(\cdot, k\tau_0) - \phi_h\|_\infty e^{L\tau}, \quad \forall \tau \geq 0.$$

Usando (2.18) nesta última desigualdade temos que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau + k\tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \beta \left(1 + 2\tilde{P} \left\| \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty\right) e^{L\tau}.$$

Agora de acordo com [10] aplicando o Lema 2.1 obtemos que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau) - \phi_h\|_\infty \leq \beta P e^{-\alpha\tau},$$

onde

$$P = \left(1 + 2\tilde{P} \left\| \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty\right) e^{L\tau_0 + \log 2}, \quad \alpha = \frac{\log 2}{\tau_0},$$

donde segue que o sistema (2.4) é exponencialmente estável em  $\phi$ . ■

O próximo Lema tem uma demonstração análoga à demonstração do Lema 2.2 e por isso omitiremos a sua demonstração.

**Lema 2.3** *Suponha que existam constantes positivas  $\tilde{P}$  e  $\tau_0$  tais que dado  $\beta > 0$  para toda solução  $\tilde{\mathcal{V}}$  do sistema (2.5) satisfazendo  $\|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_\infty \leq \beta$  existe  $h \in [-\beta\tilde{P}, \beta\tilde{P}]$  tal que  $\left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - h \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2}\beta$ . Então o sistema (2.5) é exponencialmente estável em  $\frac{d\phi}{d\xi}$ .*

Depois de ter apresentado os três Lemas básicos, passemos à demonstração do Teorema principal deste Capítulo, enunciado na página 31, o qual relaciona a estabilidade exponencial dos sistemas (2.4) e (2.5).

**Demonstração** (do Teorema 2.5) Para demonstrar a primeira parte do Teorema fazemos uso do Lema 2.3, isto é, devemos mostrar que existem constantes positivas  $\tilde{P}$  e  $\tau_0$  tais que se  $\tilde{\mathcal{V}}$  é uma solução do sistema (2.5) com  $\|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_\infty \leq \beta$ , então existe  $h \in [-\beta\tilde{P}, \beta\tilde{P}]$  tal que

$$\left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - h \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2}\beta.$$

Suponha que (2.4) é exponencialmente estável em  $\phi$  com constantes  $K, P, \alpha$ . Do Teorema 2.2 sabemos que  $\frac{d\phi}{d\xi}$  e  $\frac{d^2\phi}{d\xi^2}$  são limitadas. Definimos

$$N = \left\| \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty \quad \text{e} \quad R = \left\| \frac{d^2\phi}{d\xi^2} \right\|_\infty. \quad (2.19)$$

Tomemos  $\tilde{P} = P$  e escolhamos  $\tau_0 \geq 0$  e  $\beta_0 \geq 0$  tais que

$$Pe^{-\alpha\tau_0} \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{\beta_0 P^2 (1+N)^2 Q}{L} (e^{L\tau_0} - 1) \leq \frac{1}{8}, \quad \beta_0 P^2 R \leq \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \beta_0 \leq K. \quad (2.20)$$

Seja  $\tilde{\mathcal{V}}$  solução de (2.5) com  $\|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_\infty \leq \beta_0$ . Seja  $\mathcal{U}$  solução de (2.4) com dado inicial  $\mathcal{U}(\xi, 0) = \tilde{\mathcal{V}}(\xi, 0) + \phi(\xi)$ . Então  $\|\mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi\|_\infty \leq \beta_0$  e como (2.4) é exponencialmente estável em  $\phi$ , deve existir  $h_0 \in [-\beta_0 P, \beta_0 P]$  tal que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau) - \phi_{h_0}\|_\infty \leq \beta_0 P e^{-\alpha\tau}, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (2.21)$$

Como  $\mathcal{U}$  é solução de (2.4) e  $\phi$  é solução de (2.1) sabemos que  $\mathcal{V}(\cdot, \tau) = \mathcal{U}(\cdot, \tau) - \phi$  é solução do sistema (2.5). Assim temos que

$$\|\mathcal{V}(\cdot, \tau)\|_\infty = \|\mathcal{U}(\cdot, \tau) - \phi\|_\infty \leq \|\mathcal{U}(\cdot, \tau) - \phi_{h_0}\|_\infty + \|\phi_{h_0} - \phi\|_\infty, \quad \forall \tau \geq 0.$$

Daí e de (2.21) segue que

$$\|\mathcal{V}(\cdot, \tau)\|_\infty \leq \beta_0 P e^{-\alpha\tau} + \|\phi_{h_0} - \phi\|_\infty, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (2.22)$$



Mas pelo Teorema do Valor Médio temos que as  $i$ -ésimas componentes de  $\phi_{h_0}$  e de  $\phi$  satisfazem

$$|\phi_{h_0}^i(\xi) - \phi^i(\xi)| = |\phi^i(h_0 + \xi) - \phi^i(\xi)| \leq N|h_0|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

onde  $N$  foi definido em (2.19). Daí tomando o *sup* no lado esquerdo da desigualdade e depois tomando o máximo para  $0 \leq i \leq n$  obtemos,

$$\|\phi_{h_0} - \phi\|_\infty \leq N|h_0|.$$

Daí e de (2.22) temos

$$\|\mathcal{V}(\cdot, \tau)\|_\infty \leq \beta_0 P e^{-\alpha\tau} + N|h_0|, \quad \forall \tau \geq 0.$$

Como  $h_0 \in [-\beta_0 P, \beta_0 P]$  e  $0 \leq e^{-\alpha\tau} \leq 1$  segue que

$$\|\mathcal{V}(\cdot, \tau)\|_\infty \leq \beta_0 P + N\beta_0 P = \beta_0 P(1 + N), \quad \forall \tau \geq 0.$$

Consideremos como em (2.10), substituindo a função  $\tilde{\mathcal{U}}$  pela função  $\tilde{\mathcal{V}}$ , temos que  $\rho(\tau) = \|\mathcal{V}(\cdot, \tau) - \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau)\|_\infty$ , para todo  $\tau \geq 0$ , como  $\mathcal{V}(\xi, \tau) = \mathcal{U}(\xi, \tau) - \phi(\xi)$  e  $\mathcal{U}(\xi, 0) = \mathcal{V}(\xi, 0) + \phi(\xi)$ , então  $\rho(0) = 0$ . Assim considerando  $M = \beta_0 P(1 + N)$ , pelo Lema 2.1 segue que

$$\rho(\tau) = \|\mathcal{V}(\cdot, \tau) - \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau)\|_\infty \leq \frac{M^2 Q}{L} (e^{L\tau} - 1), \quad \forall \tau \geq 0. \quad (2.23)$$

Consideremos agora  $\tau_0$  como escolhido acima e satisfazendo as desigualdades em (2.20). Temos então de (2.23) que

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - h_0 \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty &\leq \|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - \mathcal{V}(\cdot, \tau_0)\|_\infty + \|\mathcal{V}(\cdot, \tau_0) - (\phi_{h_0} - \phi)\|_\infty \\ &\quad + \left\| \phi_{h_0} - \phi - h_0 \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty \\ &\leq \frac{M^2 Q}{L} (e^{L\tau_0} - 1) + \|\mathcal{V}(\cdot, \tau_0) - (\phi_{h_0} - \phi)\|_\infty \\ &\quad + \left\| \phi_{h_0} - \phi - h_0 \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pela fórmula de Taylor com resto de segunda ordem temos que

$$\left| \phi_{h_0}^i(\xi) - \phi^i(\xi) - h_0 \frac{d\phi^i}{d\xi}(\xi) \right| \leq R|h_0|^2,$$

onde  $R$  foi definido em (2.19). Tomando o *sup* em  $\xi$  e depois o máximo para  $0 \leq i \leq n$  no lado esquerdo da desigualdade acima obtemos,

$$\left\| \phi_{h_0}(\xi) - \phi(\xi) - h_0 \frac{d\phi}{d\xi}(\xi) \right\|_{\infty} \leq R|h_0|^2. \quad (2.25)$$

Sabemos também que  $\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) = \mathcal{V}(\cdot, \tau_0) + \phi$ . Usando este fato e a estimativa (2.25) em (2.24) obtemos que

$$\left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - h_0 \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_{\infty} \leq \frac{M^2 Q}{L} (e^{L\tau_0} - 1) + \|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_{h_0}\|_{\infty} + R|h_0|^2.$$

Usando a estimativa (2.21) com  $\tau = \tau_0$  e usando o fato que  $h_0 \in [-\beta_0 P, \beta_0 P]$  temos então que

$$\left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - h_0 \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_{\infty} \leq \frac{M^2 Q}{L} (e^{L\tau_0} - 1) + \beta_0 P e^{-\alpha\tau_0} + R\beta_0^2 P^2. \quad (2.26)$$

Usando que  $M = \beta_0 P(1 + N)$  e as desigualdades em (2.20) satisfeitas por  $\tau_0$  e  $\beta_0$ , de (2.26) obtemos que

$$\left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - h_0 \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}\beta_0 + \frac{1}{8}\beta_0 + \frac{1}{4}\beta_0 = \frac{1}{2}\beta_0.$$

Agora provemos a mesma desigualdade para um  $\beta$  qualquer. Suponha então que  $\|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_{\infty} \leq \beta$ . Seja  $\tilde{\mathcal{V}}(\xi, \tau)$  a solução do sistema (2.5) correspondente a esta condição inicial. Como o sistema (2.5) é linear então a função  $C\tilde{\mathcal{V}}(\xi, \tau)$  também é solução do sistema (2.5), para qualquer constante  $C$ .

Considere  $C = \frac{\beta_0}{\|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_{\infty}}$ . Então  $\|C\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_{\infty} = \beta_0 \leq \beta_0$ . Daí, pelos cálculos feito acima para  $\beta_0$ , segue que

$$\left\| C\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - h_0 \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\beta_0.$$

Daí,

$$C \left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - \frac{h_0}{C} \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\beta_0,$$

donde segue que

$$\left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - \frac{h_0}{C} \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2C}\beta_0 = \frac{1}{2}\beta_0 \frac{\|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_{\infty}}{\beta_0} = \frac{1}{2}\|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\beta.$$

Como  $-\beta_0 P \leq h_0 \leq \beta_0 P$  temos que  $-\frac{\beta_0 P}{C} \leq \frac{h_0}{C} \leq \frac{\beta_0 P}{C}$  se, e somente se,

$$\left| \frac{h_0}{C} \right| \leq \frac{\beta_0 P}{C} = \frac{\beta_0 P \|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_{\infty}}{\beta_0} = P \|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_{\infty} \leq P\beta.$$

Portanto considerando  $h = \frac{h_0}{C}$ , do Lema 2.3 obtemos a estabilidade exponencial do sistema (2.5) em  $\frac{d\phi}{d\xi}$ .

Para demonstrar a recíproca utilizaremos o Lema 2.2. Para isto devemos mostrar que existem constantes positivas  $\tilde{K}, \tilde{P}, \tau_0$  e  $\beta$  com  $\beta \in [0, \tilde{K}]$  tais que se  $\mathcal{U}$  é uma solução do sistema (2.4) com  $\|\mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi\|_\infty \leq \beta$ , então existe  $h \in [-\beta\tilde{P}, \beta\tilde{P}]$  tal que  $\|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \frac{1}{2}\beta$ .

Suponha então que (2.5) é exponencialmente estável em  $\frac{d\phi}{d\xi}$ , com constantes  $P$  e  $\alpha$ . Escolhamos novamente  $\tau_0 \geq 0$  e  $\beta_0 \geq 0$  tais que

$$Pe^{-\alpha\tau_0} \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{\beta_0 P^2 (1+N)^2 Q}{L} (e^{L\tau_0} - 1) \leq \frac{1}{8}, \quad \beta_0 P^2 R \leq \frac{1}{4}. \quad (2.27)$$

Suponhamos também que  $\|\mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi\|_\infty \leq \beta_0$ . Sendo  $\tilde{\mathcal{V}}$  solução de (2.5) com condição inicial  $\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0) = \mathcal{U}(\cdot, 0) - \phi$  temos  $\|\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, 0)\|_\infty \leq \beta_0$ . Como (2.5) é exponencialmente estável em  $\frac{d\phi}{d\xi}$ , então existe  $h \in [-\beta_0 P, \beta_0 P]$  tal que

$$\left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau) - h \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty \leq \beta_0 P e^{-\alpha\tau} \quad \forall \tau \geq 0. \quad (2.28)$$

Note que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_h\|_\infty &= \|\mathcal{V}(\cdot, \tau_0) + \phi - \phi_h\|_\infty = \|\mathcal{V}(\cdot, \tau_0) - (\phi_h - \phi)\|_\infty \\ &\leq \|\mathcal{V}(\cdot, \tau_0) - \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0)\|_\infty + \left\| \tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \tau_0) - h \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty + \left\| h \frac{d\phi}{d\xi} - (\phi_h - \phi) \right\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Combinando (2.23), (2.28) e (2.29) obtemos que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \frac{M^2 Q}{L} (e^{L\tau_0} - 1) + \beta_0 P e^{-\alpha\tau_0} + \left\| \phi_h - \phi - h \frac{d\phi}{d\xi} \right\|_\infty. \quad (2.30)$$

Agora usando (2.25) em (2.30) segue que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \frac{M^2 Q}{L} (e^{L\tau_0} - 1) + \beta_0 P e^{-\alpha\tau_0} + R|h|^2.$$

Usando o fato de que  $h \in [-\beta_0 P, \beta_0 P]$ , temos que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \frac{M^2 Q}{L} (e^{L\tau_0} - 1) + \beta_0 P e^{-\alpha\tau_0} + R\beta_0^2 P^2. \quad (2.31)$$

Portanto das escolhas de  $\tau_0$  e  $\beta_0$  satisfazendo as desigualdades em (2.27) obtemos que,

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \frac{1}{8}\beta_0 + \frac{1}{8}\beta_0 + \frac{1}{4}\beta_0 = \frac{1}{2}\beta_0.$$

Escolhendo  $\beta$  com  $0 \leq \beta \leq \beta_0$  ainda temos as mesmas desigualdades em (2.27) e daí tomando  $\|U(\cdot, 0) - \phi\|_\infty \leq \beta \leq \beta_0$ , então teremos estimativas análogas obtendo que

$$\|\mathcal{U}(\cdot, \tau_0) - \phi_h\|_\infty \leq \frac{1}{2}\beta.$$

Logo, usando o Lema 2.2, com  $\tilde{K} = \beta_0$  e  $\tilde{P} = P$ , segue a estabilidade exponencial do sistema (2.4) em  $\phi$  completando a demonstração do Teorema 2.5

■

# Capítulo 3

## Estabilidade Exponencial em uma Solução de Equilíbrio

Este Capítulo tem por objetivo demonstrar dois resultados. O primeiro deles, a ser estabelecido no Teorema 3.6, fornece uma condição necessária e suficiente para estabilidade exponencial (em uma solução de equilíbrio) do sistema obtido pela aplicação da transformada de Fourier ao sistema (1) linearizado. Já o segundo a ser estabelecido no Teorema 3.7, é um resultado de equivalência da estabilidade exponencial (em uma solução de equilíbrio) do sistema (1) linearizado, com a estabilidade exponencial (em uma solução de equilíbrio) do sistema obtido a partir deste após aplicação da Transformada de Fourier. Na primeira Seção são apresentados alguns resultados que serão usados nas seções seguintes para as demonstrações dos dois teoremas principais a serem feitas na segunda e última Seção.

Os resultados apresentados neste Capítulo sobre a estabilidade exponencial em torno de uma solução de equilíbrio, de sistemas lineares obtidos a partir do sistema (1), servem como ferramentas importantes para a obtenção de resultados mais avançados no estudo da estabilidade do mesmo em uma onda viajante através de sua linearização em torno da mesma. Embora não apresentamos neste trabalho, tais resultados podem ser vistos na continuação da série de artigos aqui estudados, tais como em [11, 12, 13].

### 3.1 Introdução

Como hipótese principal deste capítulo vamos supor que o sistema (1) possui a solução nula como solução de equilíbrio, o que significa que devemos ter  $g^i(0) = 0$ , com  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Para simplificar a notação introduzimos os seguintes vetores e matrizes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0}_c : \text{vetor coluna de } n \text{ componentes nulas;} \\ \mathbf{0}_r : \text{vetor linha de } n \text{ componentes nulas;} \\ a : \text{o escalar } D_0 g^0(0); \\ B : \text{matriz quadrada de ordem } n \text{ com entradas } D_j g^i(0), i, j = 1, 2, \dots, n; \\ O : \text{matriz quadrada nula de ordem } n; \\ \mathbf{r} : \text{o vetor linha } (D_1 g^0(0), D_2 g^0(0), \dots, D_n g^0(0)); \\ \mathbf{c} : \text{o vetor coluna } (D_0 g^1(0), D_0 g^2(0), \dots, D_0 g^n(0))^T. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Linearizando o sistema (1) em torno da solução de equilíbrio  $\mathcal{W} \equiv 0$  e depois escrevendo na forma matricial obtemos o sistema

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{W}^0}{\partial x^2} \\ \mathbf{0}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} \mathcal{W}, \quad (3.2)$$

Antes de prosseguir enunciaremos um resultado, que segue do Teorema 1.2 (da dependência contínua com relação aos dados iniciais), que usaremos mais adiante.

**Teorema 3.1** *Seja  $M > 0$ . Se  $\mathcal{W}_k(x, t), k = 0, 1, \dots$ , é uma sequência de soluções do sistema (3.2) com  $\|\mathcal{W}_k(\cdot, 0)\|_\infty \leq M$  e  $\mathcal{W}_k(\cdot, 0)$  convergindo uniformemente para  $\mathcal{W}_0(\cdot, 0)$  em conjuntos limitados, então  $\mathcal{W}_k(\cdot, t)$  converge para  $\mathcal{W}_0(\cdot, t)$ , para  $t \geq 0$  e para todo  $x \in \mathbb{R}$ , quando  $k$  tende à infinito.*

Aplicando a transformada de Fourier (veja Seção A.5) ao sistema (3.2) na variável  $x$  obtemos um novo sistema de  $(n + 1)$  Equações Diferenciais Ordinárias lineares de primeira ordem na variável  $t$ , dependendo do parâmetro  $\theta$

$$\frac{d\widehat{\mathcal{W}}}{dt}(\theta, t) = A(\theta^2)\widehat{\mathcal{W}}(\theta, t), \quad (3.3)$$

onde

$$A(\theta^2) = \begin{pmatrix} a - \theta^2 & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

e  $\widehat{\mathcal{W}}$  denota a transformada de Fourier de  $W$ .

O objetivo deste Capítulo é relacionar a estabilidade exponencial do sistema (3.2) na solução de equilíbrio  $\mathcal{W} = 0$  com a estabilidade exponencial do sistema (3.3) na solução de equilíbrio  $\widehat{\mathcal{W}} = 0$ . Antes disto apresentamos quatro proposições e uma série de lemas que serão utilizados nas demonstrações dos teoremas principais a serem estabelecidos na Seção 3.2.

No que segue  $A(\theta^2)$  é a matriz quadrada de ordem  $n + 1$  definida em (3.4).

**Proposição 3.2** *Um número complexo  $z$  é autovalor da matriz  $A(\theta^2)$  se, e somente se,  $(\alpha_0 - z) \cdots (\alpha_n - z) = \theta^2(\beta_1 - z) \cdots (\beta_n - z)$ , onde  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , são os autovalores de  $A(0)$  e  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , são os autovalores de  $B$ .*

**Demonstração:** Da multilinearidade da função determinante temos que  $z$  é autovalor de  $A(\theta^2)$ , se e somente se,

$$\det(A(\theta^2) - zI) = \det \begin{pmatrix} a - z & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B - zI \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -\theta^2 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{c} & B - zI \end{pmatrix} = 0,$$

se, e somente se,

$$\det(A(0) - zI) - \theta^2 \det(B - zI) = (\alpha_0 - z) \cdots (\alpha_n - z) - \theta^2(\beta_1 - z) \cdots (\beta_n - z) = 0,$$

se, e somente se,

$$(\alpha_0 - z) \cdots (\alpha_n - z) = \theta^2(\beta_1 - z) \cdots (\beta_n - z).$$

■

**Proposição 3.3** *Se  $\theta^2$  é suficientemente grande, então existe um autovalor  $\lambda(\theta^2)$  de  $A(\theta^2)$  tal que a função  $g$ , dada por  $g(z) = \frac{1}{z\lambda(\frac{1}{z})}$ , pode ser estendida a uma função complexa analítica em  $z = 0$ , com  $g(0) = -1$ . Além disto, os demais autovalores de  $A(\theta^2)$  tendem aos autovalores de  $B$  quando  $\theta^2$  tende à infinito.*

**Demonstração:** Defina a seguinte função  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$z = h(w) = \frac{w(w\beta_1 - 1) \cdots (w\beta_n - 1)}{(w\alpha_0 - 1) \cdots (w\alpha_n - 1)} = \frac{w \prod_{i=1}^n (w\beta_i - 1)}{\prod_{i=0}^n (w\alpha_i - 1)}. \quad (3.5)$$

Como o numerador e o denominador da função  $h$  são funções analíticas e o denominador não se anula em  $w = 0$ , então  $h$  é analítica em zero. Afirmamos que

$$h(0) = 0 \quad e \quad \frac{dh}{dw}(0) = -1.$$

De fato, a primeira igualdade é imediata. Para verificar a segunda igualdade, primeiro mostremos por indução sobre  $n$  que se  $k, n \in \mathbb{N}$  com  $k \leq n$  e constantes  $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ , então

$$\frac{d}{dw} \left( \prod_{i=k}^n (wa_i - 1) \right) = \sum_{i=k}^n a_i \prod_{j \neq i}^n (wa_j - 1). \quad (3.6)$$

Sem perda de generalidade consideremos  $k = 0$ . Para  $n = 1$  temos que

$$\frac{d}{dw} \left( (wa_0 - 1)(wa_1 - 1) \right) = a_0(wa_1 - 1) + a_1(wa_0 - 1) = \sum_{i=0}^1 a_i \prod_{j \neq i}^1 (wa_j - 1).$$

Suponha como hipótese de indução que a fórmula (3.6) vale para algum  $n > 1$ . Como

$$\prod_{i=0}^{n+1} (wa_i - 1) = \left[ \prod_{i=0}^n (wa_i - 1) \right] (wa_{n+1} - 1),$$

então da hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \left( \prod_{i=0}^{n+1} (wa_i - 1) \right) &= \left[ \sum_{i=0}^n a_i \prod_{j \neq i}^n (wa_j - 1) \right] (wa_{n+1} - 1) + a_{n+1} \prod_{i=0}^n (wa_i - 1) \\ &= a_0[(wa_1 - 1)(wa_2 - 1) \cdots (wa_n - 1)(wa_{n+1} - 1)] \\ &\quad + a_1[(wa_0 - 1)(wa_2 - 1) \cdots (wa_n - 1)(wa_{n+1} - 1)] \\ &\quad + \cdots + a_n[(wa_0 - 1)(wa_1 - 1) \cdots (wa_{n-1} - 1)(wa_{n+1} - 1)] \\ &\quad + a_{n+1}[(wa_0 - 1)(wa_1 - 1) \cdots (wa_n - 1)] = \sum_{i=0}^{n+1} a_i \prod_{j \neq i}^{n+1} (wa_j - 1), \end{aligned}$$

o que conclui a prova da fórmula (3.6). Usando a fórmula (3.6) para derivar a função  $h(w)$  em (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dw}(w) &= \left[ \left( \prod_{i=1}^n (w\beta_i - 1) + w \sum_{i=1}^n \beta_i \prod_{j \neq i}^n (w\beta_j - 1) \right) \prod_{i=0}^n (w\alpha_i - 1) \right. \\ &\quad \left. - \left( w \prod_{i=1}^n (w\beta_i - 1) \right) \sum_{i=0}^n \alpha_i \prod_{j \neq i}^n (w\alpha_j - 1) \right] \cdot \frac{1}{\left[ \prod_{i=0}^n (w\alpha_i - 1) \right]^2}. \end{aligned}$$



Daí

$$\frac{dh}{dw}(0) = (-1)^n(-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Como  $h$  é analítica em zero e  $h'(w)|_{w=0} \neq 0$ , então pelo Teorema da Função Inversa (veja Teorema A.14) existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_o$  de  $z = 0$  e uma função  $f : \mathcal{V}_o \rightarrow f(\mathcal{V}_o)$  a qual é analítica em  $\mathcal{V}_o$  tal que

$$f(z) = f(h(w)) = w \quad \text{e} \quad h(w) = h(f(z)) = z, \quad \forall z \in \mathcal{V}_o \quad \text{e} \quad \forall w \in f(\mathcal{V}_o).$$

Logo  $f(0) = f(h(0)) = 0$  e

$$f'(z)|_{z=0} = \frac{1}{h'(w)|_{w=0}} = -1.$$

Do fato de  $f$  ser analítica em  $\mathcal{V}_o$  podemos representá-la por sua série de Maclaurin em  $\mathcal{V}_o$ , isto é,

$$f(z) = -z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}z^n + \dots, \quad \forall z \in \mathcal{V}_o.$$

Daí,

$$f(z) = z \left( -1 + \frac{f''(0)}{2!}z + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}z^{n-1} + \dots \right),$$

donde segue que,

$$\frac{f(z)}{z} = -1 + \frac{f''(0)}{2!}z + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}z^{n-1} + \dots.$$

Assim a função

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{se } z \in \mathcal{V}_o - \{0\}, \\ -1 & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

é analítica em  $\mathcal{V}_o$ .

Consideremos agora  $z \in \mathbb{C}$  com  $|z|$  suficientemente grande tal que  $\frac{1}{z} \in \mathcal{V}_o$ . Definimos

$$\lambda(z) = \frac{z}{g\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Restringindo  $z$  aos números reais temos para  $\theta^2$  suficientemente grande que

$$\lambda(\theta^2) = \frac{\theta^2}{g\left(\frac{1}{\theta^2}\right)} = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\theta^2}\right)}. \quad (3.7)$$

Mostremos que  $\lambda(\theta^2)$  dado em (3.7) é um autovalor de  $A(\theta^2)$ . Do fato que  $h$  e  $f$  são funções inversas uma da outra e da expressão de  $h$  definida em (3.5), segue que

$$\begin{aligned}\theta^2 &= \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{h(f(\frac{1}{\theta^2}))} = \frac{1}{h(\frac{1}{\lambda(\theta^2)})} = \frac{(\frac{1}{\lambda(\theta^2)}\alpha_0 - 1) \cdots (\frac{1}{\lambda(\theta^2)}\alpha_n - 1)}{\frac{1}{\lambda(\theta^2)}(\frac{1}{\lambda(\theta^2)}\beta_0 - 1) \cdots (\frac{1}{\lambda(\theta^2)}\beta_n - 1)} \\ &= \frac{\frac{1}{\lambda(\theta^2)^{n+1}}(\alpha_0 - \lambda(\theta^2)) \cdots (\alpha_n - \lambda(\theta^2))}{\frac{1}{\lambda(\theta^2)^{n+1}}(\beta_1 - \lambda(\theta^2)) \cdots (\beta_n - \lambda(\theta^2))} = \frac{(\alpha_0 - \lambda(\theta^2)) \cdots (\alpha_n - \lambda(\theta^2))}{(\beta_1 - \lambda(\theta^2)) \cdots (\beta_n - \lambda(\theta^2))}.\end{aligned}$$

Daí segue que

$$(\alpha_0 - \lambda(\theta^2)) \cdots (\alpha_n - \lambda(\theta^2)) = \theta^2(\beta_1 - \lambda(\theta^2)) \cdots (\beta_n - \lambda(\theta^2)),$$

e assim da Proposição 3.2 temos que  $\lambda(\theta^2)$  definido em (3.7) é um autovalor de  $A(\theta^2)$ , para  $\theta^2$  suficientemente grande. Demonstrando assim a primeira parte da Proposição 3.3.

Para demonstrar a segunda parte da Proposição 3.3, começamos notando que como foi visto na demonstração da Proposição 3.2, vale a fórmula

$$\det(A(\theta^2) - zI) = \prod_{j=0}^n (\alpha_j - z) - \theta^2 \prod_{j=1}^n (\beta_j - z). \quad (3.8)$$

Logo usando a regra do produto para derivação em (3.8) obtemos que

$$\frac{d}{dz} \det(A(\theta^2) - zI) = - \sum_{j=0}^n \prod_{i \neq j} (\alpha_i - z) + \theta^2 \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} (\beta_i - z). \quad (3.9)$$

De agora por diante para encurtar a notação fazemos  $\Phi(\theta, z) = \det(A(\theta^2) - zI)$ . Note que

$$\frac{d}{dz} \left( \ln[\Phi(\theta, z)] \right) = \frac{\frac{d}{dz}[\Phi(\theta, z)]}{\Phi(\theta, z)} = \frac{- \sum_{j=0}^n \prod_{i \neq j} (\alpha_i - z) + \theta^2 \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} (\beta_i - z)}{\prod_{j=0}^n (\alpha_j - z) - \theta^2 \prod_{j=1}^n (\beta_j - z)}.$$

Considere  $\gamma_k$  um círculo de raio  $\varepsilon_k$  centrado em  $\beta_k$  orientado positivamente contendo

apenas o autovalor  $\beta_k$  de  $B$ , para algum  $k$ , com  $1 \leq k \leq n$ . Daí,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \left( \ln[\Phi(\theta, z)] \right) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{-\sum_{j=0}^n \prod_{i \neq j}^n (\alpha_i - z) + \theta^2 \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j}^n (\beta_i - z)}{\prod_{j=0}^n (\alpha_j - z) - \theta^2 \prod_{j=1}^n (\beta_j - z)} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{\theta^2} \sum_{j=0}^n \prod_{i \neq j}^n (\alpha_i - z) + \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j}^n (\beta_i - z)}{\frac{1}{\theta^2} \prod_{j=0}^n (\alpha_j - z) - \prod_{j=1}^n (\beta_j - z)} = \frac{\sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j}^n (\beta_i - z)}{-\prod_{j=1}^n (\beta_j - z)} \\
&= -\frac{1}{(\beta_1 - z)(\beta_2 - z) \cdots (\beta_n - z)} \left( [(\beta_2 - z)(\beta_3 - z) \cdots (\beta_n - z)] \right. \\
&\quad \left. + [(\beta_1 - z)(\beta_3 - z) \cdots (\beta_n - z)] + \cdots + [(\beta_1 - z)(\beta_2 - z) \cdots (\beta_{n-1} - z)] \right) \\
&= -\frac{1}{\beta_1 - z} - \frac{1}{\beta_2 - z} - \cdots - \frac{1}{\beta_n - z} = \sum_{j=1}^n -\frac{1}{\beta_j - z} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - \beta_j}.
\end{aligned}$$

Integrando sobre o círculo  $\gamma_k$  e depois multiplicando por  $\frac{1}{2\pi i}$  ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{d}{dz} \left( \ln[\Phi(\theta, z)] \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - \beta_j} dz = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - \beta_j}.$$

Assim do Teorema de Cauchy-Goursat segue que

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{d}{dz} \left( \ln[\Phi(\theta, z)] \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - \beta_k}.$$

Daí, usando a definição do índice de rotação de uma curva fechada em torno de um ponto (veja fórmula A.4, pg.73) temos então que

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mathcal{I}(\Phi(\theta, \gamma_k), 0) = \mathcal{I}(\gamma_k, \beta_k). \quad (3.10)$$

Considere agora a função complexa

$$\psi(z) = \det(B - zI) = \prod_{j=1}^n (\beta_j - z).$$

Tomando o logarítmo temos que

$$\ln(\psi(z)) = \sum_{j=1}^n \ln(\beta_j - z).$$

Daí,

$$\frac{d}{dz} \left( \ln(\psi(z)) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - \beta_j}.$$

Novamente integrando sobre o círculo  $\gamma_k$  e depois multiplicando ambos os lados da igualdade acima por  $\frac{1}{2\pi i}$  obtemos,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{d}{dz} \left( \ln \psi(z) \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \sum_{j=1}^n \frac{dz}{z - \beta_j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - \beta_j}.$$

Usando novamente o Teorema de Cauchy-Goursat temos então que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{d}{dz} \left( \ln \psi(z) \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - \beta_k},$$

donde se conclui que  $\mathcal{I}(\psi(\gamma_k), 0) = \mathcal{I}(\gamma_k, \beta_k)$ .

Do Princípio do Argumento (veja fórmula (A.5) pg. 74) sabemos que  $\mathcal{I}(\gamma_k, \beta_k)$  é igual ao número de zeros de  $\psi$  (com multiplicidade) menos o número de polos de  $\psi$  (com multiplicidade) no interior da curva  $\gamma_k$ . Como  $\psi$  é um polinômio, temos que  $\psi$  não possui polos, mas apenas zeros. Assim  $\mathcal{I}(\gamma_k, \beta_k)$  é igual ao número de zeros de  $\psi$  (com multiplicidade) no interior de  $\gamma_k$ , ou seja, como  $\psi(z) = \det(B - zI)$ , então  $\mathcal{I}(\gamma_k, \beta_k)$  é igual a multiplicidade do autovalor  $\beta_k$  de  $B$ . Logo por (3.10) o número de zeros de  $\Phi$  (com multiplicidade) no interior de  $\gamma_k$  é igual a multiplicidade do autovalor  $\beta_k$  de  $B$ . Portanto, como  $\Phi(\theta, z) = \det(A(\theta^2) - zI)$ , o número de autovalores (com multiplicidade) de  $A(\theta^2)$  no interior de  $\gamma_k$ , para  $\theta^2$  suficientemente grande, é igual a multiplicidade do autovalor  $\beta_k$  de  $B$ . Como  $\varepsilon_k > 0$  pode ser feito arbitrariamente pequeno, temos que, para  $\theta^2$  suficientemente grande, os autovalores de  $A(\theta^2)$  tendem aos autovalores de  $B$ . ■

**Proposição 3.4** *Sejam  $\delta > 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Suponha que todos os autovalores de  $A(\theta^2)$  tenham partes reais inferiores à  $-\alpha$ . Seja*

$$F(\theta, t) = e^{tA(\theta^2)} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

*Então existem constantes  $M_{k,j}^\delta$ ,  $k, j = 0, 1, 2, \dots$ , tais que*

$$\left\| \frac{\partial^{k+j}}{\partial \theta^k \partial t^j} F(\theta, t) \right\| \leq M_{k,j}^\delta \left( \frac{1}{1 + \theta^2} \right) e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq \delta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

*Além disso  $F(\theta, t)$  é uniformemente limitada para  $0 \leq t \leq 1$  e para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

A demonstração da Proposição 3.4 é feita baseada em quatro Lemas que passaremos a apresentar em seguida juntamente com suas demonstrações.

**Lema 3.1** *Sejam  $\theta^2$  suficientemente grande e  $\lambda(\theta^2)$  o autovalor de  $A(\theta^2)$  dado na Proposição 3.3. Então existem matrizes quadradas  $P(\theta^2)$  e  $Q(\theta^2)$  de ordem  $(n + 1)$ , com posto de  $P(\theta^2)$  sendo 1, tais que*

$$(i) \quad A(\theta^2) = \lambda(\theta^2)P(\theta^2) + Q(\theta^2);$$

$$(ii) \quad P(\theta^2)P(\theta^2) = P(\theta^2);$$

$$(iii) \quad A(\theta^2)P(\theta^2) = P(\theta^2)A(\theta^2) = \lambda(\theta^2)P(\theta^2);$$

(iv)  $P(\frac{1}{z})$  e  $Q(\frac{1}{z})$  podem ser estendidas para funções complexas analíticas em  $z = 0$  com,

$$P\left(\frac{1}{z}\right)_{|z=0} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & O \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$Q\left(\frac{1}{z}\right)_{|z=0} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & B \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

**Demonstração.**

**Prova do item (i).** Para  $\theta^2$  suficientemente grande considere o autovetor  $\begin{pmatrix} x \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$  associado à  $\lambda(\theta^2)$ . Então

$$\begin{pmatrix} a - \theta^2 & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \lambda(\theta^2) \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{y} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$(a - \theta^2)x + \mathbf{r} \mathbf{y} = \lambda(\theta^2)x, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{c} x + B \mathbf{y} = \lambda(\theta^2) \mathbf{y}, \quad (3.15)$$

onde  $x$  é um escalar,  $\mathbf{y}$  é um vetor coluna de  $n$  linhas e  $a$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $B$  foram definidos em (3.1).

Temos que  $|\lambda(\theta^2)| \geq \|B\|$  para  $\theta^2$  suficientemente grande, pois pela Proposição 3.3 a função  $\frac{1}{z\lambda(\frac{1}{z})}$  é analítica numa vizinhança de  $z = 0$  e portanto é limitada nesta vizinhança. Assim, usando a fórmula A.2 (pg.73) temos a representação para  $\theta^2$  suficientemente grande

$$(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1} = \frac{1}{\lambda(\theta^2)} \left( I + \frac{1}{\lambda(\theta^2)} B + \frac{1}{\lambda(\theta^2)^2} B^2 + \dots \right). \quad (3.16)$$

Temos também que  $x \neq 0$ , pois do contrário  $\mathbf{y}$  seria autovetor de  $B$  associado à  $\lambda(\theta^2)$ , o que não ocorre devido à Proposição 3.3. Assim, fazendo  $x = 1$  em (3.15) obtemos que

$$(\lambda(\theta^2)I - B)\mathbf{y} = \mathbf{c}.$$

Daí,

$$\mathbf{y} = (\lambda(\theta^2)I - B)^{-1}\mathbf{c}. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.14), com  $x = 1$ , obtemos,

$$(a - \theta^2) = \lambda(\theta^2) - \mathbf{r}(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1}\mathbf{c}. \quad (3.18)$$

Assim a matriz coluna (de  $n + 1$  linhas)

$$p(\theta^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ (\lambda(\theta^2)I - B)^{-1}\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

é um autovetor (à direita) de  $A(\theta^2)$  associado ao autovalor  $\lambda(\theta^2)$ .

Analogamente obtemos que a matriz linha (de  $n + 1$  colunas)

$$q(\theta^2) = \left( 1 \quad \mathbf{r}(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1} \right)$$

é um autovetor (à esquerda) de  $A(\theta^2)$  associado ao autovalor  $\lambda(\theta^2)$ .

Notando que o produto  $q(\theta^2)p(\theta^2)$  é um escalar, definimos a matriz  $(n+1) \times (n+1)$

$$P(\theta^2) = \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} [p(\theta^2)q(\theta^2)].$$

Como  $q(\theta^2)p(\theta^2) = 1 + \mathbf{r}(\lambda(\theta^2)I - B)^{-2}\mathbf{c}$  é um escalar, então

$$P(\theta^2) = \frac{1}{1 + \mathbf{r}(\lambda(\theta^2)I - B)^{-2}\mathbf{c}} \times \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{r}(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1} \\ (\lambda(\theta^2)I - B)^{-1}\mathbf{c} & (\lambda(\theta^2)I - B)^{-1}\mathbf{c}\mathbf{r}(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Do fato de  $p(\theta^2)$  e  $q(\theta^2)$  terem posto 1 e pela propriedade A.1 (pg. 72) segue que  $P(\theta^2)$  também tem posto 1.

Uma vez definida a matriz  $P(\theta^2)$ , definimos  $Q(\theta^2) = A(\theta^2) - \lambda(\theta^2)P(\theta^2)$ . Substituindo a expressão (3.18) na matriz  $A(\theta^2)$ , obtemos

$$Q(\theta^2) = \begin{pmatrix} \lambda(\theta^2) - \mathbf{r}(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1}\mathbf{c} & \mathbf{r} \\ & B \\ \mathbf{c} & \end{pmatrix} - \frac{1}{1 + r(\lambda(\theta^2)I - B)^{-2}\mathbf{c}} \times$$

$$\begin{pmatrix} \lambda(\theta^2) & \mathbf{r}\lambda(\theta^2)(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1} \\ \lambda(\theta^2)(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1}\mathbf{c} & \lambda(\theta^2)(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1}\mathbf{c}\mathbf{r}(\lambda(\theta^2)I - B)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

o que conclui a demonstração do item (i).

**Prova do item (ii) do Lema 3.1.**

$$\begin{aligned} P(\theta^2)P(\theta^2) &= \left( \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} [p(\theta^2)q(\theta^2)] \right) \left( \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} [p(\theta^2)q(\theta^2)] \right) \\ &= \frac{1}{[q(\theta^2)p(\theta^2)][q(\theta^2)p(\theta^2)]} p(\theta^2)[q(\theta^2)p(\theta^2)]q(\theta^2) \\ &= \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} [p(\theta^2)q(\theta^2)] = P(\theta^2). \end{aligned}$$

**Prova do item (iii) do Lema 3.1.**

Para provar este item usamos o item (ii) e que  $p(\theta^2)$  e  $q(\theta^2)$  são autovetores (à direita e à esquerda respectivamente) de  $A(\theta^2)$  associados ao autovalor  $\lambda(\theta^2)$ . Vejamos;

$$\begin{aligned} A(\theta^2)P(\theta^2) &= A(\theta^2) \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} [p(\theta^2)q(\theta^2)] = [A(\theta^2)p(\theta^2)] \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} q(\theta^2) \\ &= \lambda(\theta^2)p(\theta^2) \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} q(\theta^2) = \frac{\lambda(\theta^2)}{q(\theta^2)p(\theta^2)} [p(\theta^2)q(\theta^2)] = \lambda(\theta^2)P(\theta^2). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(\theta^2)A(\theta^2) &= \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} [p(\theta^2)q(\theta^2)] A(\theta^2) = \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} p(\theta^2) [q(\theta^2)A(\theta^2)] \\ &= \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} p(\theta^2) \lambda(\theta^2)q(\theta^2) = \lambda(\theta^2) \frac{1}{q(\theta^2)p(\theta^2)} [p(\theta^2)q(\theta^2)] = \lambda(\theta^2)P(\theta^2). \end{aligned}$$

**Prova do item (iv) do Lema 3.1.**

Substituindo  $\theta^2$  por  $\frac{1}{z}$  em (3.16) e reescrevendo convenientemente temos

$$(\lambda(1/z)I - B)^{-1} = z \frac{1}{z\lambda(\frac{1}{z})} \left( I + \frac{z}{z\lambda(\frac{1}{z})} B + \frac{z^2}{[z\lambda(\frac{1}{z})]^2} B^2 + \dots \right). \quad (3.21)$$

Sabemos da Proposição 3.3 que a função  $\frac{1}{z\lambda(\frac{1}{z})}$  possui uma extensão analítica numa vizinhança de  $z = 0$  e que seu valor em *zero* é  $-1$ . Assim tomando o limite com  $z \rightarrow 0$  em (3.21) obtemos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} (\lambda(1/z)I - B)^{-1} = O. \quad (3.22)$$

Fazendo o mesmo procedimento em (3.19), substituindo  $\theta^2$  por  $\frac{1}{z}$ , e usando (3.22) obtemos que  $P\left(\frac{1}{z}\right)$  possui uma extensão analítica em  $z = 0$  e que

$$P\left(\frac{1}{z}\right)_{|z=0} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & O \end{pmatrix}$$

De maneira análoga substituindo  $\theta^2$  por  $\frac{1}{z}$  em (3.20) temos

$$Q\left(\frac{1}{z}\right) = \begin{pmatrix} \lambda(\frac{1}{z}) - \mathbf{r}(\lambda(\frac{1}{z})I - B)^{-1}\mathbf{c} & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} - \frac{1}{1 + \mathbf{r}(\lambda(\frac{1}{z})I - B)^{-2}\mathbf{c}} \times$$

$$\begin{pmatrix} \lambda(\frac{1}{z}) & \mathbf{r}\lambda(\frac{1}{z})(\lambda(\frac{1}{z})I - B)^{-1} \\ \lambda(\frac{1}{z})(\lambda(\frac{1}{z})I - B)^{-1}\mathbf{c} & \lambda(\frac{1}{z})(\lambda(\frac{1}{z})I - B)^{-1}\mathbf{c}\mathbf{r}(\lambda(\frac{1}{z})I - B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Novamente usando a Proposição 3.3 e tomando o limite com  $z \rightarrow 0$ , obtemos que

$$Q\left(\frac{1}{z}\right)_{|z=0} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & B \end{pmatrix}$$

o que conclui a demonstração do Lema 3.1. ■

**Observação 3.1** Note que de (3.18) e de (3.22) temos que o autovalor de  $A(\theta^2)$  dado na Proposição 3.3 satisfaz  $\lambda(\theta^2) \approx (a - \theta^2)$  para  $\theta^2$  suficientemente grande.

**Lema 3.2** Se  $z \neq 0$  não é autovalor de  $A(\theta^2)$ , então para  $\theta^2$  suficientemente grande vale a fórmula

$$(zI - A(\theta^2))^{-1} = \frac{1}{z - \lambda(\theta^2)}P(\theta^2) + (I - P(\theta^2))(zI - Q(\theta^2))^{-1}. \quad (3.23)$$



**Demonstração:** Para  $\theta^2$  suficientemente grande os autovalores de  $Q(\theta^2)$  são zero e os autovalores de  $A(\theta^2)$  distintos de  $\lambda(\theta^2)$ . Logo  $(zI - Q(\theta^2))^{-1}$  existe. Mostremos que

$$(zI - A(\theta^2)) \left[ \frac{1}{z - \lambda(\theta^2)} P(\theta^2) + (I - P(\theta^2))(zI - Q(\theta^2))^{-1} \right] = I.$$

Do Lema 3.1, item (iii), temos que

$$(zI - A(\theta^2))P(\theta^2) = zP(\theta^2) - A(\theta^2)P(\theta^2) = zP(\theta^2) - \lambda(\theta^2)P(\theta^2).$$

Logo

$$(zI - A(\theta^2))P(\theta^2) = (z - \lambda(\theta^2))P(\theta^2). \quad (3.24)$$

Do Lema 3.1, itens (i), (ii) e (iii), temos que

$$\begin{aligned} P(\theta^2)Q(\theta^2) &= P(\theta^2)(A(\theta^2) - \lambda(\theta^2)P(\theta^2)) = P(\theta^2)A(\theta^2) - \lambda(\theta^2)P(\theta^2)P(\theta^2) \\ &= \lambda(\theta^2)P(\theta^2) - \lambda(\theta^2)P(\theta^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Temos também do Lema 3.1, itens (iii), (i) e de (3.25), que

$$\begin{aligned} (zI - A(\theta^2))(I - P(\theta^2)) &= zI - zP(\theta^2) - A(\theta^2) + A(\theta^2)P(\theta^2) \\ &= zI - zP(\theta^2) - [A(\theta^2) - \lambda(\theta^2)P(\theta^2)] = zI - zP(\theta^2) - Q(\theta^2) + P(\theta^2)Q(\theta^2) \\ &= z(I - P(\theta^2)) - (I - P(\theta^2))Q(\theta^2). \end{aligned}$$

Daí segue que

$$(zI - A(\theta^2))(I - P(\theta^2)) = (I - P(\theta^2))(zI - Q(\theta^2)). \quad (3.26)$$

De (3.24) e de (3.26) segue que

$$\begin{aligned} &(zI - A(\theta^2)) \left[ \frac{1}{z - \lambda(\theta^2)} P(\theta^2) + (I - P(\theta^2))(zI - Q(\theta^2))^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{z - \lambda(\theta^2)} (zI - A(\theta^2)) P(\theta^2) + (zI - A(\theta^2))(I - P(\theta^2))(zI - Q(\theta^2))^{-1} \\ &= P(\theta^2) + (I - P(\theta^2)) = I \end{aligned}$$

Do Lema 3.1 item (iii) as matrizes  $A(\theta^2)$  e  $P(\theta^2)$  comutam e consequentemente do item (i) as matrizes  $A(\theta^2)$  e  $Q(\theta^2)$  também comutam, donde segue a expressão da matriz inversa em (3.23), o que conclui a demonstração do Lema 3.2. ■

Antes de enunciar o próximo Lema vamos definir uma curva no plano complexo que aparece em seu enunciado. Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  como no enunciado da Proposição 3.4 a ser demonstrada. Da Proposição 3.3 podemos garantir a existência de um número real  $\beta > 0$  tal que todos os autovalores de  $A(\theta^2)$  possuem partes imaginárias no intervalo  $(-\beta, \beta)$ . Seja  $r > 0$ . Consideremos os pontos  $A, B, C, D$  do plano complexo tais que  $A = -\alpha - i\beta$ ,  $B = -\alpha + i\beta$ ,  $C = -(\alpha + r) + i(\beta + r)$  e  $D = -(\alpha + r) - i(\beta + r)$ . Seja  $\Gamma_r$  a curva fechada simples formada pelos segmentos retilíneos que ligam os pontos  $A, B, C$  e  $D$ , orientada no sentido anti-horário (veja Figura 3.1).

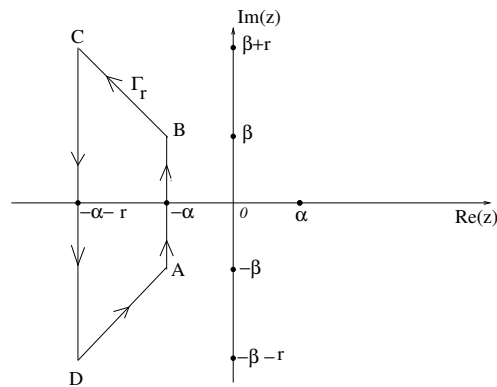


Figura 3.1: Curva  $\Gamma_r$ .

**Lema 3.3** *Seja  $\Gamma$  a curva limite obtida a partir de  $\Gamma_r$  quando  $r \rightarrow \infty$ . Se  $z$  não é autovalor de  $A(\theta^2)$ , então existem constantes  $M_1, M_2, \dots$ , tais que*

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} (zI - A(\theta^2))^{-1} \right\| \leq \frac{M_j}{1 + \theta^2}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \forall z \in \Gamma, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

**Demonstração:** Inicialmente note que

$$\frac{\partial A(\theta^2)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -2\theta & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & O \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 A(\theta^2)}{\partial \theta^2} = \begin{pmatrix} -2 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & O \end{pmatrix},$$

e  $\frac{\partial^j A(\theta^2)}{\partial \theta^j} = O$ , para  $j \geq 3$ .

Calculando as duas primeiras derivadas em relação à  $\theta$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (zI - A(\theta^2))^{-1} &= -(zI - A(\theta^2))^{-1} \frac{\partial A(\theta^2)}{\partial \theta} (zI - A(\theta^2))^{-1}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (zI - A(\theta^2))^{-1} &= 2(zI - A(\theta^2))^{-1} \frac{\partial A(\theta^2)}{\partial \theta} (zI - A(\theta^2))^{-1} \frac{\partial A(\theta^2)}{\partial \theta} (zI - A(\theta^2))^{-1} \\ &\quad - (zI - A(\theta^2))^{-1} \frac{\partial^2 A(\theta^2)}{\partial \theta^2} (zI - A(\theta^2))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Continuando o processo para calcular as derivadas de ordem superior vemos que o fator  $(zI - A(\theta^2))^{-1}$  sempre aparecerá tanto à direita como à esquerda dos fatores  $\frac{\partial^j A(\theta^2)}{\partial \theta^j}$ ,  $j = 1, 2$ , já que esses fatores se anulam para  $j = 3, 4, 5, \dots$ .

Primeiro mostremos as estimativas para  $\theta$  num intervalo compacto  $J$ . Para isto vamos usar a fórmula (3.23) dada no Lema 3.2. Como  $\lambda(\theta^2)$  é contínua temos que  $\lambda(\theta^2)$  é limitada para  $\theta \in J$  e daí

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{|z - \lambda(\theta^2)|} = 0.$$

De (3.22) e das fórmulas dadas no Lema 3.1 segue que  $P(\theta^2)$ ,  $Q(\theta^2)$  e  $I - P(\theta^2)$  são limitadas. Logo, para  $|z| \geq \|Q(\theta^2)\|$  temos que

$$(zI - Q(\theta^2))^{-1} = \frac{1}{z} \left( I + \frac{1}{z} Q(\theta^2) + \frac{1}{z^2} Q^2(\theta^2) + \dots \right),$$

donde segue que  $\|(zI - Q(\theta^2))^{-1}\|$  tende a *zero* quando  $z \rightarrow \infty$ . Daí e pela fórmula (3.23) segue que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \|(zI - A(\theta^2))^{-1}\| = 0.$$

Como as derivadas  $\frac{\partial^j}{\partial \theta^j} (zI - A(\theta^2))^{-1}$  são combinações lineares finitas de produtos finitos de termos envolvendo  $\frac{\partial A(\theta^2)}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial^2 A(\theta^2)}{\partial \theta^2}$  e  $(zI - A(\theta^2))^{-1}$ , (veja (3.27) para  $j = 2$ ) segue que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} (zI - A(\theta^2))^{-1} \right\| = 0, \forall \theta \in J.$$

Assim sempre podemos adequar constantes  $M_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$  tais que

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} (zI - A(\theta^2))^{-1} \right\| \leq \frac{M_j}{1 + \theta^2}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \forall z \in \Gamma, \quad \forall \theta \in J.$$

Mostremos agora a estimativa para  $\theta$  não necessariamente num compacto. Observando as fórmulas de  $\frac{\partial A(\theta^2)}{\partial \theta}$  e  $\frac{\partial^2 A(\theta^2)}{\partial \theta^2}$ , vemos que as mesmas só possuem a primeira entrada diferente de *zero*. Logo basta obter uma limitação do tipo  $\frac{N}{1 + \theta^2}$  apenas para os elementos da primeira linha e da primeira coluna da matriz  $(zI - A(\theta^2))^{-1}$ , porque apenas elas são envolvidas nos produtos das combinações lineares dos produtos finitos que definem  $\frac{\partial^j}{\partial \theta^j} (zI - A(\theta^2))^{-1}$ .

Seja  $\alpha \neq 0$ . Logo o ponto  $z_0 = 0$  não pertence a curva  $\Gamma$ . Assim podemos considerar a representação (3.23) dado no Lema 3.2, para  $\theta^2$  suficientemente grande. Note que por (3.12) e (3.13) as matrizes  $P(\theta^2)$  e  $Q(\theta^2)$  são limitadas para  $\theta^2$  suficientemente grande. Logo podemos usar (A.2, pg.73) e obter que a matriz  $(zI - Q(\theta^2))^{-1}$  é uniformemente limitada em  $z$  para  $\theta^2$  suficientemente grande. Segundo [11], pela construção

de  $\Gamma$ , da Observação 3.1 e da representação (3.16) temos a existência de uma constante  $N$  tal que

$$\frac{1}{|z - \lambda(\theta^2)|} \leq \frac{N}{1 + \theta^2} \quad \text{e} \quad \|(zI - Q(\theta^2))^{-1}\| \leq \frac{N}{1 + \theta^2}.$$

Assim usando a definição de  $P(\theta^2)$  em (3.19) e também (3.12) segue que os elementos da primeira linha e da primeira coluna de  $(I - P(\theta^2))$  também são limitados por  $N/(1 + \theta^2)$ . Juntando estes fatos e a representação em (3.23) segue a existência de uma constante  $C > 0$  tal que os elementos da primeira linha e da primeira coluna da matriz  $(zI - A(\theta^2))^{-1}$  são limitadas por  $C/(1 + \theta^2)$ .

Para  $\alpha = 0$  a demonstração é feita para  $z$  sobre uma pequena translação da curva  $\Gamma$ , digamos por  $\gamma > 0$  suficientemente pequeno e considerando a seguinte matriz  $(zI - (A(\theta^2) + \gamma I))^{-1}$  de tal forma que  $z$  não seja autovalor de  $(A(\theta^2) + \gamma I)$ . ■

**Lema 3.4** *Considere a função  $F(\theta, t)$  definida em (3.11), na Proposição 3.4 (pg. 50) e a curva  $\Gamma$  do Lema 3.3. Para  $k, j = 0, 1, 2, \dots$ , vale a fórmula*

$$\frac{\partial^{k+j}}{\partial t^k \partial \theta^j} F(\theta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^k e^{tz} \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} \left[ (zI - A(\theta^2))^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & (zI - B)^{-1} \end{pmatrix} \right] dz.$$

**Demonstração:** Por construção, para  $r$  suficientemente grande todos os autovalores das matrizes  $B$  e de  $A(\theta^2)$  estão no interior da região delimitada pela curva  $\Gamma_r$ . Daí pela fórmula (A.3) (pg. 73) temos que

$$e^{tA(\theta^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{tz} (zI - A(\theta^2))^{-1} dz$$

e

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{tz} (zI - B)^{-1} dz.$$

Substituindo estas duas representações na expressão da função  $F(\theta, t)$ , em (3.11) temos que

$$F(\theta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{tz} \left[ (zI - A(\theta^2))^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & (zI - B)^{-1} \end{pmatrix} \right] dz.$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada repetidas vezes para derivar sob o sinal de integração obtemos que

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} F(\theta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} z^k e^{tz} \left[ (zI - A(\theta^2))^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & (zI - B)^{-1} \end{pmatrix} \right] dz$$

e que

$$\frac{\partial^{k+j}}{\partial t^k \partial \theta^j} F(\theta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} z^k e^{tz} \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} \left[ (zI - A(\theta^2))^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & (zI - B)^{-1} \end{pmatrix} \right] dz. \quad (3.28)$$

Analisemos o comportamento do fator exponencial do integrando em (3.28) quando  $r \rightarrow \infty$ . Usamos que  $\Gamma_r = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , (veja Figura 3.1) cujas parametrizações são dadas por

$$\begin{aligned} \Gamma_0 : \quad z &= -\alpha + iy, \quad \text{com} \quad -\beta \leq y \leq \beta; \\ \Gamma_1 : \quad z &= x + i(-x + \beta - \alpha), \quad \text{com} \quad \alpha \leq -x \leq \alpha + r; \\ \Gamma_2 : \quad z &= -\alpha - r + iy, \quad \text{com} \quad -\beta - r \leq -y \leq \beta + r; \\ \Gamma_3 : \quad z &= x + i(x + \alpha - \beta), \quad \text{com} \quad -\alpha - r \leq x \leq -\alpha. \end{aligned}$$

Sobre  $\Gamma_0$  temos que  $e^{tz} = e^{(-\alpha+iy)t}$ , donde segue que  $|e^{tz}| = e^{-\alpha t}$  é constante em  $r$ .

Sobre  $\Gamma_1$  temos que  $e^{tz} = e^{(x+i(-x+\beta-\alpha))t}$ . Logo  $|e^{tz}| = e^{tx}$ , donde segue que  $|e^{tz}|$  tende a *zero* quando  $x \rightarrow -\infty$  ou  $(r \rightarrow \infty)$ .

Sobre  $\Gamma_2$  temos que  $e^{tz} = e^{(-\alpha-r+iy)t}$ . Daí  $|e^{tz}| = e^{-(\alpha+r)t}$  e como  $\alpha$  é fixo segue que  $|e^{tz}|$  também tende a *zero* quando  $r \rightarrow \infty$ .

Finalmente sobre  $\Gamma_3$  temos que  $e^{tz} = e^{(x+i(x+\alpha-\beta))t}$ . Daí  $|e^{tz}| = e^{xt}$ . Logo  $|e^{tz}|$  também tende a *zero* quando  $x \rightarrow -\infty$  ou  $(r \rightarrow \infty)$ .

Como o crescimento da norma do integrando em (3.28) é determinado pelo decréscimo do fator exponencial, o qual tende à *zero* sobre  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$ , então temos que o limite da integral de linha em (3.28) quando  $r \rightarrow \infty$  existe e portanto podemos escrever que

$$\frac{\partial^{k+j}}{\partial t^k \partial \theta^j} F(\theta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^k e^{tz} \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} \left[ (zI - A(\theta^2))^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & (zI - B)^{-1} \end{pmatrix} \right] dz,$$

o que conclui a demonstração do Lema 3.4. ■

Uma vez estabelecidos os Lemas preliminares, passemos a **Demonstração da Proposição 3.4** (veja pg. 50).

Da Proposição 3.3 sabemos que se  $\mu(\theta^2)$  é um autovalor de  $A(\theta^2)$  diferente de  $\lambda(\theta^2)$ , então  $\mu(\theta^2)$  está na vizinhança de algum autovalor  $\beta_j$  de  $B$ , para  $\theta$  suficien-

temente grande. Logo existe  $\beta > 0$  finito tal que  $Im(\mu(\theta^2)) \leq \beta$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Para este valor de  $\beta$  e  $\alpha$  e como no enunciado da Proposição 3.4, considere a curva  $\Gamma_r$  definida anteriormente (página 56) tal que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_r = \Gamma$ .

Do Lema 3.4 temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{k+j}}{\partial t^k \partial \theta^j} F(\theta, t) \right\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |z^k| |e^{tz}| \left\| \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} \left[ (zI - A(\theta^2))^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & (zI - B)^{-1} \end{pmatrix} \right] \right\| |dz| \\ &= \frac{e^{-\alpha t}}{2\pi} \int_{\Gamma} |z^k| |e^{t(z+\alpha)}| \left\| \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} \left[ (zI - A(\theta^2))^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & (zI - B)^{-1} \end{pmatrix} \right] \right\| |dz|. \end{aligned}$$

Agora mostremos a limitação uniforme de  $F(\theta, t)$  para  $0 \leq t \leq 1$  e todo  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Multiplicando ambos os lados de (3.23) no Lema 3.2 por  $\frac{1}{2\pi i} e^{tz}$  temos,

$$\frac{1}{2\pi i} e^{tz} (zI - A(\theta^2))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} e^{tz} (z - \lambda(\theta^2))^{-1} P(\theta^2) + (I - P(\theta^2)) \frac{1}{2\pi i} e^{tz} (zI - Q(\theta^2))^{-1}.$$

Integrando a igualdade acima sobre  $\Gamma$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{tz} (zI - A(\theta^2))^{-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{tz} (z - \lambda(\theta^2))^{-1} dz P(\theta^2) \\ &\quad + (I - P(\theta^2)) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{tz} (zI - Q(\theta^2))^{-1} dz, \end{aligned}$$

ou seja, da fórmula A.3 (pg.73) temos que

$$e^{tA(\theta^2)} = e^{t\lambda(\theta^2)} P(\theta^2) + (I - P(\theta^2)) e^{tQ(\theta^2)}.$$

Para  $\theta^2$  finito e  $t \in [0, 1]$  temos que  $\left\| e^{tA(\theta^2)} \right\|$  é limitada. Da Observação 3.1 para  $\theta^2$  suficientemente grande temos que  $Re[\lambda(\theta^2)] < 0$  e daí segue que

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA(\theta^2)} \right\| &\leq \left| e^{t\lambda(\theta^2)} \right| \|P(\theta^2)\| + \|(I - P(\theta^2))\| \left\| e^{tQ(\theta^2)} \right\| \\ &= e^{Re[\lambda(\theta^2)]t} \|P(\theta^2)\| + \|(I - P(\theta^2))\| e^{t\|Q(\theta^2)\|} \\ &\leq \|P(\theta^2)\| + \|(I - P(\theta^2))\| e^{t\|Q(\theta^2)\|} \\ &\leq \|P(\theta^2)\| + \|(I - P(\theta^2))\| e^{\|Q(\theta^2)\|}, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Do Lema 3.1 temos que  $\|P(\theta^2)\|$ ,  $\|(I - P(\theta^2))\|$  e  $\|Q(\theta^2)\|$  são limitadas. Portanto existe  $C > 0$  tal que  $e^{t\|A(\theta^2)\|} \leq C$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ . Da expressão de  $F(\theta, t)$  em (3.11) segue que

$$\|F(\theta, t)\| \leq \left\| e^{tA(\theta^2)} \right\| + \|e^{tB}\| \leq C + e^{t\|B\|} \leq C + e^{\|B\|},$$

para  $0 \leq t \leq 1$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , ou seja  $F(\theta, t)$  é uniformemente limitada para  $t \in [0, 1]$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Provemos as limitações das derivadas. Segundo [11], para  $j = 0$ , por argumentos análogos aos que foram usados na demonstração do Lema 3.3, usando (3.12), (3.13), (3.23) e a construção de  $\Gamma$ , do Lema 3.3 temos que

$$\left\| (zI - A(\theta^2))^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & (zI - B)^{-1} \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{M_0}{1 + \theta^2}.$$

Para  $j \geq 1$ , do Lema 3.3 temos que

$$\left\| \frac{\partial^{k+j}}{\partial t^k \partial \theta^j} F(\theta, t) \right\| \leq \frac{M_j e^{-\alpha t}}{2\pi(1 + \theta^2)} \int_{\Gamma} |z^k| e^{(Re(z)+\alpha)t} |dz|.$$

Como  $z \in \Gamma$  então  $Re(z) \leq -\alpha$ . Logo  $Re(z) + \alpha < 0$  e como  $t \geq \delta > 0$  então  $(Re(z) + \alpha)t \leq (Re(z) + \alpha)\delta$ . Daí,  $e^{(Re(z)+\alpha)t} \leq e^{(Re(z)+\alpha)\delta}$ . Assim

$$\left\| \frac{\partial^{k+j}}{\partial t^k \partial \theta^j} F(\theta, t) \right\| \leq \frac{M_j e^{-\alpha t}}{2\pi(1 + \theta^2)} \int_{\Gamma} e^{Re(z+\alpha)\delta} |z^k| |dz| = M_{k,j}^{\delta} \frac{e^{-\alpha t}}{(1 + \theta^2)},$$

onde

$$M_{k,j}^{\delta} = \frac{M_j}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{Re(z+\alpha)\delta} |z^k| |dz|,$$

o que conclui a demonstração da Proposição 3.4. ■

**Proposição 3.5** *Se  $\mathcal{W} = (W^0, W^1, \dots, W^n)$  é solução do sistema (3.2) com a seguinte condição inicial  $\mathcal{W}(x, 0) = \Psi(x)$  e  $\|\Psi\|_{\infty}$  finita, então  $\mathcal{W}$  tem a seguinte representação*

$$\mathcal{W}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(x - y, t) \Psi(y) dy + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \Psi(x), \quad (3.30)$$

onde  $\check{F}$  é a transformada inversa de Fourier de  $F$  e  $\Psi = (\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^n)$ .

**Demonstração:** Demonstraremos em duas partes.

**1ª Parte:** Primeiro mostraremos que a representação (3.30) é válida no espaço de Schwartz  $\mathcal{S}$  das funções de decrescimento rápido (veja pg.78).

Considere a função  $\mathcal{W}(x, t)$  definida em (3.30), com  $\psi^j \in \mathcal{S}$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Note que  $\check{F}(x, t)$  está bem definida e é limitada em  $x$  para cada  $t$  fixado. De fato, da definição da Transformada Inversa de Fourier temos que mostrar que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} F(\theta, t) d\theta$$

é finita, para todo  $t \geq 0$ , e para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Da Proposição 3.4 temos a limitação  $\|F(x, t)\| \leq \left(\frac{M_{0,0}^\delta}{1+\theta^2}\right) e^{-\alpha t}$ . Daí,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|e^{i\theta x} F(\theta, t)\| d\theta \leq M_{0,0}^\delta e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\theta^2} d\theta = M_{0,0}^\delta \pi e^{-\alpha t}.$$

Portanto,  $\check{F}$  está definida e é limitada em  $x$  para cada  $t$  fixado.

Agora mostremos que  $\mathcal{W}$  é solução do sistema (3.2) com condição inicial  $\Psi(x)$ . Temos formalmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(x-y, t) \Psi(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(x-y)} F(\theta, t) \Psi(y) d\theta dy. \quad (3.31)$$

Verifiquemos as hipóteses do Teorema de Fubini na segunda integral em (3.31), para que possamos inverter a ordem da integração. Como  $\Psi \in \mathcal{S}$  temos que o integrando em (3.31) é uma função contínua. Da Proposição 3.4 temos que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{i\theta(x-y)} F(\theta, t) \Psi(y)\| d\theta dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\theta(x-y)}| \|F(\theta, t)\| \|\Psi(y)\| d\theta dy \\ & \leq M_{0,0}^\delta e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Psi(y)\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\theta^2} d\theta dy = M_{0,0}^\delta e^{-\alpha t} \pi \int_{-\infty}^{\infty} \|\Psi(y)\| dy \leq M_{0,0}^\delta e^{-\alpha t} K\pi, \end{aligned}$$

onde  $K$  é uma constante tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\Psi(y)\| dy \leq K$$

pois, como  $\Psi \in \mathcal{S}$ , então a mesma é integrável. Assim pelo Teorema de Fubini as integrais iteradas convergem e podemos trocar a ordem de integração, obtendo de (3.31) que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(x-y, t) \Psi(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(x-y)} F(\theta, t) \Psi(y) dy d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} F(\theta, t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta y} \Psi(y) dy \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \left[ e^{tA(\theta^2)} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \right] \widehat{\Psi}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} e^{tA(\theta^2)} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \Psi(x). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Comparando (3.32) com (3.30), obtemos que

$$\mathcal{W}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} e^{tA(\theta^2)} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta.$$



Portanto  $\mathcal{W}$  é a Transformada inversa de Fourier de  $e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta)$ .

Mostremos agora que cada entrada de  $e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta)$  são funções que estão no espaço  $\mathcal{S}$  de Schwartz.

Da Proposição 3.4 temos que existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} F(\theta, t) \right\| \leq \frac{M_{0,j}^\delta e^{-\alpha t}}{1 + \theta^2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad \forall t \geq \delta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Como

$$e^{tA(\theta^2)} = F(\theta, t) + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix},$$

então

$$e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta) = F(\theta, t)\widehat{\Psi}(\theta) + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \widehat{\Psi}(\theta)$$

tem entradas em  $\mathcal{S}$ . Como as entradas de  $e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta)$  são funções de  $\theta$  que pertencem a  $\mathcal{S}$ , temos que  $e^{i\theta x} e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta)$  também tem entradas em  $\mathcal{S}$ . Portanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta) d\theta$$

converge.

Como as entradas de  $A(\theta^2)$  são polinômios em  $\theta$  (de grau  $\leq 2$ ) temos que as entradas de  $e^{i\theta x} A(\theta^2) e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta)$  pertencem a  $\mathcal{S}$ . Daí segue a convergência uniforme da integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} A(\theta^2) e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta) d\theta.$$

Assim  $\mathcal{W}(x, t)$  é derivável na variável  $t$  e

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} A(\theta^2) e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta) d\theta. \quad (3.33)$$

Pelos mesmos argumentos temos que  $i\theta e^{i\theta x} A(\theta^2) e^{tA(\theta^2)}$  tem entradas em  $\mathcal{S}$  donde também segue a convergência uniforme da integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\theta e^{i\theta x} e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta) d\theta,$$

e vale a fórmula

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\theta^2 e^{i\theta x} e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta) d\theta.$$

Da mesma maneira segue que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\theta^2) e^{i\theta x} e^{tA(\theta^2)}\widehat{\Psi}(\theta) d\theta. \quad (3.34)$$

Para destacar apenas a primeira componente de  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ , fazemos as demais componentes em (3.34) iguais a zero, obtendo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W^0}{\partial x^2}(x, t) \\ \mathbf{0}_c \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\theta^2) e^{i\theta x} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & O \end{pmatrix} e^{tA(\theta^2)} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \begin{pmatrix} -\theta^2 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & O \end{pmatrix} e^{tA(\theta^2)} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.35)$$

De (3.33) e de (3.35), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t}(x, t) - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W^0}{\partial x^2}(x, t) \\ \mathbf{0}_c \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} A(\theta^2) e^{tA(\theta^2)} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \begin{pmatrix} -\theta^2 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & O \end{pmatrix} e^{tA(\theta^2)} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \left[ \begin{pmatrix} a - \theta^2 & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta^2 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & O \end{pmatrix} \right] e^{tA(\theta^2)} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \begin{pmatrix} a & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} e^{tA(\theta^2)} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta = \begin{pmatrix} a & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} \mathcal{W}(x, t). \end{aligned}$$

Portanto  $\mathcal{W}(x, t)$  é solução do sistema (3.2).

Verifiquemos a condição inicial. Temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} W(x, t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} e^{tA(\theta^2)} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta.$$

Da Proposição 3.4 temos que  $e^{tA(\theta^2)}$  é uniformemente limitada para  $0 \leq t \leq 1$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ . Como  $\widehat{\Psi}$  tem componentes em  $\mathcal{S}$ , podemos passar o limite para dentro do sinal de integração, obtendo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{W}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \widehat{\Psi}(\theta) d\theta.$$

Isto conclui a primeira parte da demonstração da Proposição 3.5, para o caso do dado inicial do sistema (3.2) estar no espaço  $\mathcal{S}$ .

**2ª Parte:** Agora mostremos que se  $\mathcal{W}$  é solução do sistema (3.2) com  $\mathcal{W}(x, 0) = \Psi(x)$ , e se existe  $M > 0$  tal que  $\|\Psi(x)\| \leq M$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $\mathcal{W}$  pode ser escrita como em (3.30).

Defina,

$$\Psi_m(x) = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m^2(x-y)^2}{2}} \Psi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Temos que

$$(i) \quad \|\Psi_m(x)\| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \quad \psi_m^i \in \mathcal{S}, \quad i = 0, \dots, n;$$

(iii)  $\Psi_m$  converge uniformemente para  $\Psi$ .

De fato.

(i) Temos que

$$\|\Psi_m(x)\| \leq \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m^2(x-y)^2}{2}} \|\Psi(y)\| dy \leq \frac{mM}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m^2(x-y)^2}{2}} dy.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável  $z = \frac{m(y-x)}{\sqrt{2}}$  temos que

$$\|\Psi_m(x)\| \leq \frac{M}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \leq \frac{M}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = M.$$

(ii) Dada a presença do fator exponencial e a limitação de  $\|\Psi(y)\|$ , segue que as funções  $\psi_m^i \in \mathcal{S}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

(iii) Verifiquemos que

$$k_m(s) = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} m e^{-\frac{m^2 s^2}{2}},$$

onde  $s = x - y$ , satisfaz as propriedades  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  da Definição A.7 (pg.76).

Como  $\mathcal{D}_m(s)$  é contínua então  $\mathcal{D}_m(s)$  é seccionalmente contínua. As propriedades  $D_1$  e  $D_2$  verificam-se analogamente as propriedades (ii) e (iii) para o núcleo do calor dado na Seção A.3. Para justificar  $D_3$  verifiquemos que

$$\int_{|s|>\eta} \mathcal{D}_m(s) \longrightarrow 0$$

para  $m$  suficientemente grande.

De fato, fazendo a mesma mudança de variável como em (i) segue que

$$\int_{|s|>\eta} \mathcal{D}_m(s) ds = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} m \int_{|s|>\eta} e^{-\frac{m^2(s)^2}{2}} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|z|>\frac{m\eta}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz.$$

Note que quando  $m \rightarrow \infty$  segue que  $|z| \rightarrow \infty$ . Como a integral imprópria de  $e^{-z^2}$  é convergente, segue que a integral acima tende a zero.

Como  $\mathcal{D}_m(s)$  é uma sequência de núcleos de Dirac e  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma função seccionalmente contínua limitada, então pelo Teorema A.8 (pg.76) temos que  $\Psi_m$  converge uniformemente para  $\Psi$ .

Se  $\mathcal{W}_m(x, t)$  é solução de (3.2) com  $\mathcal{W}_m(x, 0) = \Psi_m(x)$ , então pela Primeira Parte da demonstração temos que

$$\mathcal{W}_m(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(x - y, t) \Psi_m(y) dy + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \Psi_m(x). \quad (3.36)$$

Como  $\|\Psi_m(x)\| \leq M$  e  $\Psi_m$  converge uniformemente para  $\Psi$  então pelo Teorema 3.1 segue que quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{W}_m(x, t)$  converge para  $\mathcal{W}(x, t)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ . Daí e de (3.36) segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(x, t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{W}_m(x, t) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(x - y, t) \Psi_m(y) dy + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \Psi_m(x) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Portanto aplicando o Teorema da Convergência Dominada obtemos que

$$\mathcal{W}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(x - y, t) \Psi(y) dy + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \Psi(x).$$

o que conclui a demonstração da Proposição 3.5

■

## 3.2 Condições para a Estabilidade Exponencial

Nesta seção apresentamos os teoremas principais relacionados à estabilidade exponencial dos sistemas (3.2) e (3.3) em uma solução de equilíbrio.

**Teorema 3.6** *O sistema (3.3) é exponencialmente estável na solução de equilíbrio  $\widehat{\mathcal{W}} = 0$  se, e somente se, existe  $\alpha > 0$  tal que todos autovalores de  $A(\theta^2)$  possuem parte real inferior à  $-\alpha$ .*

**Demonstração:** Suponha que exista  $\alpha > 0$  tal que todos autovalores de  $A(\theta^2)$  possuam parte real inferior à  $-\alpha$ . Logo, da segunda parte da Proposição 3.3 (pg. 45), todos os autovalores de  $B$  tem parte real inferior à  $-\alpha$ . Assim, pelo Teorema A.20 existe  $K_2 \geq 1$  tal que

$$\|e^{tB}\| \leq K_2 e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (3.38)$$

Da Proposição 3.4, (pg. 50) com  $\delta = 1$ , temos

$$\|F(\theta, t)\| \leq \frac{M_{0,0}^1}{1 + \theta^2} e^{-\alpha t} \leq M_{0,0}^1 e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Daí

$$\left\| e^{tA(\theta^2)} \right\| - \|e^{tB}\| \leq \left\| e^{tA(\theta^2)} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \right\| = \|F(\theta, t)\| \leq M_{0,0}^1 e^{-\alpha t},$$

donde segue que

$$\left\| e^{tA(\theta^2)} \right\| \leq M_{0,0}^1 e^{-\alpha t} + \|e^{tB}\|.$$

Substituindo (3.38) na desigualdade acima temos

$$\left\| e^{tA(\theta^2)} \right\| \leq (M_{0,0}^1 + K_2) e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (3.39)$$

Temos também pela Proposição 3.4 que a função  $F(\theta, t)$  é uniformemente limitada para  $0 \leq t \leq 1$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ . Portanto existe  $k_1 > 0$  tal que

$$\|F(\theta, t)\| \leq K_1, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$\|F(\theta, t)\| \leq K_1 e^{\alpha t} e^{-\alpha t} \leq K_1 e^{\alpha} e^{-\alpha t}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

Repetindo o cálculo que foi feito para obter (3.39) temos que

$$\left\| e^{tA(\theta^2)} \right\| \leq (K_1 e^{\alpha} + K_2) e^{-\alpha t}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1, \theta \in \mathbb{R}. \quad (3.40)$$

Seja  $P = \max\{M_{0,0}^1 + K_2, K_1 e^{\alpha} + K_2\}$  e  $\widehat{\mathcal{W}}$  a solução do sistema (3.3) dada por

$$\widehat{\mathcal{W}}(\theta, t) = e^{tA(\theta^2)} \widehat{\mathcal{W}}(\theta, 0).$$

Temos que

$$\left\| \widehat{\mathcal{W}}(\cdot, t) \right\|_{\infty} \leq \left\| e^{tA(\theta^2)} \right\| \left\| \widehat{\mathcal{W}}(\cdot, 0) \right\|_{\infty}. \quad (3.41)$$

Usando as desigualdades (3.39) e (3.40) em (3.41), obtemos que

$$\left\| \widehat{\mathcal{W}}(\cdot, t) \right\|_{\infty} \leq P \left\| \widehat{\mathcal{W}}(\cdot, 0) \right\|_{\infty} e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.42)$$

Donde segue a estabilidade exponencial do sistema (3.3) na solução de equilíbrio  $\widehat{\mathcal{W}} = 0$ .

Por outro lado suponha que o sistema (3.3) é exponencialmente estável na solução de equilíbrio  $\widehat{\mathcal{W}} = 0$ . Logo, existem constantes  $P, \alpha > 0$  tais que (3.42) se verifica.

Caso  $P \leq 1$ , trocamos  $P$  por  $P + 1$  em (3.42). Assim da desigualdade (3.42) e do Teorema A.20 temos que todos autovalores de  $A(\theta^2)$  possuem parte real negativa. ■

**Teorema 3.7** *O sistema (3.2) é exponencialmente estável na solução de equilíbrio  $\mathcal{W} = 0$  se, e somente se, o sistema (3.3) é exponencialmente estável na solução de equilíbrio,  $\widehat{\mathcal{W}} = 0$ .*

**Demonstração:** Suponha que o sistema (3.3) seja exponencialmente estável na solução de equilíbrio  $\widehat{\mathcal{W}} = 0$ . Então pelo Teorema 3.6 existe  $\alpha > 0$  tal que todos os autovalores de  $A(\theta^2)$  possuem parte real inferior à  $-\alpha$ . Daí pela Proposição 3.4, com  $\delta = 1$ , existem constantes  $M_{i,j}^1$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ , tais que

$$\left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial \theta^j} F(\theta, t) \right\| \leq \frac{M_{i,j}^1}{1 + \theta^2} e^{-\alpha t}, \quad t \geq 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

Como  $|e^{i\theta x}| = 1$  temos que

$$\begin{aligned} \|\check{F}(x, t)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} F(\theta, t) d\theta \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\theta x}| \|F(\theta, t)\| d\theta \\ &\leq \frac{M_{0,0}^1 e^{-\alpha t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \theta^2} d\theta \leq \frac{M_{0,0}^1}{2\pi} e^{-\alpha t} \pi = \frac{M_{0,0}^1}{2} e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\check{F}(x, t)\| \leq M_{0,0}^1 e^{-\alpha t}. \quad (3.43)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right] (x, t) \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta, t) d\theta \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\theta x}| \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta, t) \right\| d\theta \\ &\leq \frac{M_{2,0}^1 e^{-\alpha t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \theta^2} d\theta \leq \frac{M_{2,0}^1}{2\pi} e^{-\alpha t} \pi = \frac{M_{2,0}^1}{2} e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

e daí,

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right] (x, t) \right\| \leq M_{2,0}^1 e^{-\alpha t}. \quad (3.44)$$

Como

$$\frac{\partial^n \widehat{F}(\theta, t)}{\partial \theta^n}(x, t) = \mathcal{F}[(-ix)^n F(x, t)](\theta, t)$$

então aplicando a transformada inversa de Fourier em ambos os lados da igualdade acima obtemos,

$$\frac{\partial^n F(\theta, t)}{\partial \theta^n}(x, t) = \mathcal{F}[(-ix)^n \mathcal{F}^{-1}[F](x, t)](\theta, t).$$

Aplicando novamente a transformada inversa de Fourier em ambos os lados da igualdade acima temos,

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\partial^n F}{\partial \theta^n} \right] (x, t) = (-ix)^n \mathcal{F}^{-1}[F](x, t).$$

Considerando  $n = 2$ , de (3.44) segue que

$$\|(-ix)^2 \check{F}(x, t)\| = x^2 \|\check{F}(x, t)\| = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right] (x, t) \right\| \leq M_{2,0}^1 e^{-\alpha t}. \quad (3.45)$$

Somando (3.43) e (3.45) obtemos

$$\|\check{F}(x, t)\| + x^2 \|\check{F}(x, t)\| \leq M_{0,0}^1 e^{-\alpha t} + M_{2,0}^1 e^{-\alpha t}.$$

Logo,

$$(1 + x^2) \|\check{F}(x, t)\| \leq (M_{0,0}^1 + M_{2,0}^1) e^{-\alpha t},$$

donde segue que

$$\|\check{F}(x, t)\| \leq \frac{K_1}{1 + x^2} e^{-\alpha t}, \quad (3.46)$$

onde  $K_1 = M_{0,0}^1 + M_{2,0}^1$ .

Como todos os autovalores de  $A(\theta^2)$  possuem parte real inferior à  $-\alpha$  então novamente pela segunda parte da Proposição 3.3 (pg. 45) temos que  $Re[\beta_j] < -\alpha$  para  $j = 1, \dots, n$ , onde os  $\beta_j$  são os autovalores da matriz  $B$ . Logo do Teorema A.20, existe  $K_2 \geq 1$  tal que

$$\|e^{tB}\| \leq K_2 e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.47)$$

Agora seja  $\mathcal{W}$  solução do sistema (3.2) com a condição inicial  $\|\mathcal{W}(x, 0)\| \leq 1$ .

Pela Proposição 3.5 temos que

$$\mathcal{W}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(x - y, t) \mathcal{W}(y, 0) dy + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \mathcal{W}(x, 0).$$

Assim

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}(x, t)\| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\check{F}(x - y, t)\| \|\mathcal{W}(y, 0)\| dy + \left\| \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & e^{tB} \end{pmatrix} \right\| \|\mathcal{W}(x, 0)\| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\check{F}(x - y, t)\| \|\mathcal{W}(y, 0)\| dy + \|e^{tB}\| \|\mathcal{W}(x, 0)\|. \end{aligned}$$

Substituindo (3.46) e (3.47) na inequação acima temos que

$$\|\mathcal{W}(x, t)\| \leq e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1}{1 + (x - y)^2} dy + K_2 e^{-\alpha t}.$$

Fazendo a mudança de variável  $z = y - x$  obtemos,

$$\|\mathcal{W}(x, t)\| \leq e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1}{1+z^2} dz + K_2 e^{-\alpha t},$$

donde temos que

$$\|\mathcal{W}(x, t)\| \leq (K_1\pi + K_2) e^{-\alpha t}, \quad \text{para } t \geq 1. \quad (3.48)$$

Pelo Teorema 1.4 (página 24) sabemos que

$$\|\mathcal{W}(x, t)\| \leq e^{Lt} \|W(x, 0)\|, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1, \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como  $\|\mathcal{W}(x, 0)\| \leq 1$ , segue então que

$$\|\mathcal{W}(x, t)\| \leq e^{Lt} = e^{Lt+\alpha t} e^{-\alpha t} \leq e^{L+\alpha} e^{-\alpha t}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1. \quad (3.49)$$

Escolhendo  $P = \max\{e^{L+\alpha}, K_1\pi + K_2\}$ , obtemos então de (3.48) e (3.49) que o sistema (3.2) é exponencialmente estável na solução de equilíbrio  $\mathcal{W} = 0$ .

Reciprocamente suponha que o sistema (3.2) seja exponencialmente estável em  $\mathcal{W} = 0$  e que o sistema (3.3) não seja exponencialmente estável em  $\widehat{\mathcal{W}} = 0$ . Então pelo Teorema 3.6 temos que, para todo  $\alpha > 0$  existem  $\theta_0$ ,  $\lambda_0(\theta_0)$  autovalor de  $A(\theta_0^2)$  e  $\epsilon > 0$  com  $\epsilon > \alpha$  tais que

$$\epsilon - \alpha \leq \operatorname{Re}(\lambda_0(\theta_0)).$$

Seja  $\Psi(\theta_0)$  o autovetor de  $A(\theta_0^2)$  associado à  $\lambda_0(\theta_0)$  com  $\|\Psi(\theta_0)\| = 1$ . Defina

$$\mathcal{W}_0(x, t) = e^{i\theta_0 x + \lambda_0(\theta_0)t} \Psi(\theta_0).$$

Provemos que  $\mathcal{W}_0(x, t)$  é solução do sistema (3.2). De fato, seja  $\widehat{\mathcal{W}}(\theta_0, t) = e^{\lambda_0(\theta_0)t} \Psi(\theta_0)$ . Então  $\widehat{\mathcal{W}}(\theta_0, t)$  é solução do sistema (3.3) e vale

$$\mathcal{W}_0(x, t) = e^{i\theta_0 x} \widehat{\mathcal{W}}(\theta_0, t).$$



Derivando em  $t$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{W}_0}{\partial t}(x, t) &= e^{i\theta_0 x} \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}}{\partial t}(\theta_0, t) = e^{i\theta_0 x} \left( A(\theta_0^2) \widehat{\mathcal{W}}(\theta_0, t) \right) \\
&= e^{i\theta_0 x} \left( \begin{pmatrix} -\theta_0^2 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_c & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} \right) \widehat{\mathcal{W}}(\theta_0, t) \\
&= \begin{pmatrix} -\theta_0^2 e^{i\theta_0 x} \widehat{W}^0(\theta_0, t) \\ \mathbf{0}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} e^{i\theta_0 x} \widehat{\mathcal{W}}(\theta_0, t) \\
&= \begin{pmatrix} -\theta_0^2 W_0^0(x, t) \\ \mathbf{0}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} \mathcal{W}_0(x, t) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_0^0(x, t) \\ \mathbf{0}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \mathbf{r} \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix} \mathcal{W}_0(x, t).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{W}_0(x, t)\| &= \|e^{i\theta_0 x + \lambda(\theta_0)t} \psi(\theta_0)\| = |e^{i\theta_0 x}| |e^{\lambda(\theta_0)t}| \|\psi(\theta_0)\| \\
&= |e^{\lambda(\theta_0)t}| = e^{Re[\lambda(\theta_0)]t} > e^{(\epsilon - \alpha)t}.
\end{aligned}$$

Donde  $\|\mathcal{W}_0(x, t)\|$  tende para infinito quando  $t$  tende para infinito, o que contradiz a hipótese. Portanto o sistema (3.3) é exponencialmente estável na solução de equilíbrio  $\widehat{\mathcal{W}} = 0$ .

■

# Apêndice A

## Conceitos e Resultados Básicos

Neste Apêndice listamos alguns dos resultados e conceitos que foram utilizados nesta dissertação. As demonstrações, em geral, serão omitidas podendo o leitor encontrá-las com facilidade nas referências indicadas.

### A.1 Matrizes

Temos algumas propriedades básicas sobre matrizes utilizadas no decorrer da dissertação, que passamos a citar em seguida. Estas propriedades podem ser consultadas em [18] e [21] por exemplo. Se  $A$  e  $D$  são matrizes de dimensões apropriadas, então

$$\|AD\| \leq \|A\| \|D\|.$$

Seja  $A$  uma matriz quadrada. Denotaremos a inversa de  $A$ , quando existir, por  $A^{-1}$  e seu determinante por  $\det A$ .

A matriz exponencial associada à uma matriz quadrada  $A$  é definida pela série

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

onde  $I$  é a matriz identidade.

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes então temos a seguinte propriedade em relação ao posto de  $A$  e  $B$ ,

$$\text{posto}(AB) \leq \min\{\text{posto}(A), \text{posto}(B)\} \tag{A.1}$$

Considerando  $z$  um número complexo que não seja autovalor da matriz quadrada  $A$ , com  $|z| \geq \|A\|$ , então vale a representação

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z} \left( I + \frac{1}{z}A + \frac{1}{z^2}A^2 + \dots \right). \quad (\text{A.2})$$

Considere agora  $\Gamma$  uma curva fechada suave no plano complexo, a qual circunda os autovalores de uma certa matriz quadrada  $A$ . Então vale a seguinte representação

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{tz} (zI - A)^{-1} dz. \quad (\text{A.3})$$

O próximo resultado justifica a passagem da derivada para dentro do sinal de integral.

**Lema A.1** ([11], p. 78) *Se  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , e se  $A(x, y)$  e  $\frac{\partial A}{\partial y}(x, y)$  são matrizes de funções integráveis em  $x$  tais que exista uma função integrável  $h(x)$  com  $\left\| \frac{\partial A}{\partial y}(x, u) \right\| \leq h(x)$  para todo  $u$  numa vizinhança de  $y$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ , então*

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dx.$$

## A.2 O Índice de Rotação de uma Curva

Agora relembremos alguns conceitos em relação ao índice de rotação de uma curva no plano complexo. Para mais detalhes ver [5],[20].

**Definição A.1** *Seja  $\mathcal{D}$  um domínio no plano complexo  $\mathbb{C}$  e  $f$  uma função complexa definida em  $\mathcal{D}$ . Dizemos que  $f$  é meromorfa em  $\mathcal{D}$  se  $f$  possuir um número finito de singularidades em  $\mathcal{D}$  todas sendo do tipo polo ou singularidade removível.*

**Definição A.2** *Seja  $\gamma$  uma curva fechada no plano complexo orientada positivamente e  $z_0$  um ponto na região interior à  $\gamma$ . O índice de rotação da curva  $\gamma$  em relação à  $z_0$ , denotado por  $\mathcal{I}(\gamma, z_0)$ , é definida pela fórmula*

$$\mathcal{I}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}. \quad (\text{A.4})$$

*O índice de rotação representa o número de voltas que a curva  $\gamma$  dá em torno de  $z_0$ .*

Seja  $\gamma$  uma curva simples fechada orientada no sentido anti-horário. Seja  $\mathcal{D}$  o domínio delimitado por  $\gamma$ . Seja  $f$  uma função meromorfa em  $\mathcal{D} \cup \gamma$ . Suponha que não há nenhuma singularidade ou zero de  $f$  ao longo de  $\gamma$ . Seja  $N$  e  $P$  o número de zeros

e polos de  $f$  em  $\mathcal{D}$ , respectivamente, contando as suas multiplicidades. Então vale a seguinte fórmula conhecida como o Princípio do Argumento:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P. \quad (\text{A.5})$$

Note que  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \ln[f(z)]$ , portanto a fórmula (A.5) também se escreve

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d}{dz} \ln[f(z)] dz = N - P.$$

Agora fazendo uma mudança de variável  $w = f(z)$  em (A.5) temos,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w} = \mathcal{I}(f(\gamma), 0), \quad (\text{A.6})$$

onde  $\mathcal{I}(f(\gamma), 0)$  é o índice de rotação da curva fechada  $f(\gamma)$  em torno da origem. Como  $z$  percorre a curva  $\gamma$  então  $w$  percorre a curva  $f(\gamma)$  que é a imagem de  $\gamma$  pela função  $f$ . Esta nova curva é parametrizada pela função  $f(\gamma(t))$ , onde  $t$  varia no mesmo intervalo da parametrização da curva  $\gamma$ .

### A.3 Solução Fundamental para a Equação do Calor

Nesta Seção relembramos alguns resultados básicos, sobre o Problema de Valor Inicial para a equação do calor. Maiores detalhes e as demonstrações podem ser encontradas por exemplo em [14] ou em [22]. Relembramos apenas que para se ter unicidade considera-se soluções clássicas limitadas.

**Definição A.3** *O núcleo do calor em uma dimensão é definido por*

$$\mathcal{K}(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}, \quad x, y \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (\text{A.7})$$

O núcleo do calor satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\frac{\partial \mathcal{K}(x, y, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathcal{K}(x, y, t)}{\partial x^2} = 0;$
- (ii)  $\mathcal{K}(x, y, t) > 0;$
- (iii)  $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) dy = 1.$

A Proposição seguinte fornece a fórmula para a solução do Problema de Valor Inicial homogêneo para a equação do calor com dado inicial limitado.

**Proposição A.4** *Seja  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $a \in C_B(\mathbb{R})$ . Então a função  $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) a(y) dy, \quad (\text{A.8})$$

*satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i)  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ ;
- (ii)  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ;
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = a(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- (iv)  $u$  é limitada.

A próxima Proposição fornece a fórmula para a solução do Problema de Valor Inicial para a equação do calor no caso não homogêneo, com dado inicial homogêneo.

**Proposição A.5** *Seja  $T$  positivo. Seja  $b : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $b \in C_B(\mathbb{R} \times [0, T])$ . Então a função  $u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t-s) b(y, s) dy ds, \quad (\text{A.9})$$

*satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i)  $u \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  existe e  $\frac{\partial u}{\partial x} \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$ ;
- (ii) Se  $\frac{\partial b}{\partial x}$  existe e  $\frac{\partial b}{\partial x} \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$  então  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  também existem e são contínuas;
- (iii)  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = b(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, t)$ ;
- (iv)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- (v)  $u$  é limitada.

O Teorema seguinte, segue diretamente das duas Proposições anteriores e fornece a fórmula da solução fundamental do Problema de Valor Inicial não homogêneo, com dado inicial limitado para a equação do calor.

**Teorema A.6** *Seja  $T > 0$ . Sejam  $a, b$  como nas Proposições anteriores e também  $\frac{\partial b}{\partial x} \in C_B(\mathbb{R} \times [0, T])$ . Então a única solução limitada para o Problema de Valor Inicial*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = b(x, t), & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T] \\ u(x, 0) = a(x) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

é dada pela fórmula

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t) a(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y, t - s) b(y, s) dy ds. \quad (\text{A.11})$$

Além disto,  $u$  satisfaz:

- (i)  $u$  é contínua.
- (ii) Se  $\frac{\partial a}{\partial x}$  é contínua e limitada então  $\frac{\partial u}{\partial x}$  também existe e é contínua para todo ponto  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ .
- (iii)  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  são contínuas para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ .

## A.4 Núcleos de Dirac

Nesta seção enunciaremos uma definição e um resultado relacionado aos Núcleos de Dirac. Para mais detalhes consulte [7].

**Definição A.7** Uma sequência de funções  $\mathcal{D}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínuas e satisfazendo às propriedades abaixo

- (D<sub>1</sub>)  $\mathcal{D}_n(x) \geq 0$ ;
- (D<sub>2</sub>)  $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_n(x) dx = 1$ ;
- (D<sub>3</sub>) Dado  $\varepsilon > 0$  e  $\eta > 0$ , existe  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$ , tem-se

$$\int_{|x| > \eta} \mathcal{D}_n(x) dx < \varepsilon.$$

é chamada uma sequência de núcleos de Dirac.

**Teorema A.8** sejam  $(\mathcal{D}_n)$  uma sequência de núcleos de Dirac e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua, limitada. Então

- (i) as funções  $f_n$  abaixo estão bem definidas,

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_n(x - s) f(s) ds;$$

- (ii) supondo que  $\mathcal{D}_n$  seja uma função par, temos, para cada  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2};$$

- (iii) a sequência  $(f_n)$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo limitado fechado  $I$  que não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ .

## A.5 A Transformada de Fourier

Nesta seção introduzimos o Espaço de Schwartz e a Transformada de Fourier fornecendo alguns resultados. Para mais detalhes e demonstrações consulte [7].

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é de decrescimento rápido no infinito se  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  e se

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0$$

para todos  $m$  e  $n$  inteiros não negativos. Designamos o conjunto das funções de decrescimento rápido por  $\mathcal{S}$ , que também é conhecido como Espaço de Schwartz, o espaço natural para se trabalhar com a Transformada de Fourier. Definimos a norma em  $\mathcal{S}$  como sendo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^m |D^n f(x)|.$$

A última condição na definição é equivalente a dizer que, dados  $m, n > 0$  inteiros, existe uma constante,  $M(m, n)$ , que depende de  $m$  e  $n$ , tal que

$$|x|^m |D^n f(x)| \leq M(m, n), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Definição A.9** Para qualquer  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , definimos sua Transformada de Fourier, denotada por  $\hat{f}$  ou por  $\mathcal{F}[f]$ , como sendo a função  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\hat{f}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} f(x) dx.$$

**Proposição A.10** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  estiver em  $\mathcal{S}$ , então  $D^n f$  e  $x^m f$ , para quaisquer  $n, m \geq 0$  inteiros, estão também em  $\mathcal{S}$ . Consequentemente,  $x^m D^n f$  está em  $\mathcal{S}$ .

**Proposição A.11** Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então  $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(\mathbb{R})$  e satisfaz:

$$(i) \quad D_\theta^n \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)]$$

$$(ii) \quad \mathcal{F}[D^n f] = (i\theta)^n \mathcal{F}[f].$$

**Proposição A.12** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for uma função de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então a Transformada de Fourier  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  será uma função de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Definição A.13** Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , e seja  $\hat{f}$  sua Transformada de Fourier. Definimos a Transformada Inversa de Fourier, denotada por  $\check{f}$  ou por  $\mathcal{F}^{-1}[f]$ , como sendo a função  $\check{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f(\theta) d\theta.$$

## A.6 Outros Resultados de Análise e Equações Diferenciais

**Teorema A.14** (Teorema da Função Inversa)(ver [20], p.200) Sejam  $U$  um aberto de  $\mathbb{C}$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Suponha que  $\frac{df}{dz}(z_0) \neq 0$  onde  $z_0 \in U$ . Então existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $z_0$ ,  $V \subset U$ , tal que  $f(V) = W$  é aberto e  $f|_V : V \rightarrow W$  possui uma inversa  $(f|_V)^{-1} = g : W \rightarrow V$ , a qual é analítica.

**Teorema A.15** (Formula de Taylor)(ver [19], p.69) Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Fixado  $a \in U$ , para todo  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a + v \in U$  escrevamos

$$f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j + r(v),$$

as derivadas sendo calculadas no ponto  $a$ . Então

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|^2} = 0.$$

**Teorema A.16** (Desigualdade do Valor Médio)(ver [19], p.107) Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável em todos os pontos do segmento de reta  $[a, a + v] \subset U$ . Se para todo  $t \in [0, 1]$ , tem-se  $|Df(a + tv)| \leq M$  então

$$|f(a + v) - f(a)| \leq M|v|.$$

**Teorema A.17** (Teorema do Valor Médio)(ver [19], p.61) Dada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , se o segmento de reta  $[a, a + v]$  estiver contido em  $U$  então existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$f(a + v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v) = \langle \nabla f(a + \theta v), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) v^i$$

onde  $v = (v^1, \dots, v^n)$ .

**Teorema A.18** (Teorema da Convergência Dominada)(ver [2], p.46) Seja  $X$  um espaço de medida com a medida de Lebesgue. Suponha que para  $t \in [a, b]$ , a função  $x \rightarrow f(x, t)$  seja integrável em  $X$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t}$  exista em  $X \times [a, b]$  e que existe uma função integrável  $g$  em  $X$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x).$$

Então a função

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

é diferenciável em  $[a, b]$  e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$



**Teorema A.19** (ver [1], p.308) Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar com derivadas parciais de segunda ordem  $D_{ij}f$  contínuas na bola  $B(a, r)$ . Então para todo  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a + y \in B(a, r)$  temos

$$f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} y H(a + cy) y^t, \quad 0 < c < 1$$

onde

$$y H(a + cy) y^t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} f(a + cy) y_i y_j.$$

**Lema A.1** (Lema de Gronwall) (ver [21], p.37) Sejam  $u$  e  $v$  funções contínuas não negativas em  $[a, b]$  tais que, para  $\alpha \geq 0$ , satisfazem a

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s) u(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Então

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}.$$

Em particular, se  $\alpha = 0$  então  $u \equiv 0$ .

**Lema A.2** (Lema de Gronwall Generalizado) (ver [8], p.61) Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  funções contínuas definidas em um intervalo  $(a, b)$ , tais que  $\beta \geq 0$  e

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s) \delta(s) ds.$$

Então

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s) \alpha(s) e^{\int_s^x \beta(u) du} ds.$$

**Teorema A.20** (ver [21], p.73) As seguintes proposições são equivalentes

- (i) O sistema  $x' = Ax$  é um atrator.
- (ii) Todos os autovalores de  $A$  têm parte real negativa.
- (iii) Existem  $\mu > 0$  e  $K \geq 1$  tais que  $\|e^{tA}x\| \leq K e^{-\mu t} \|x\|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ .
- (iv) O sistema  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $x' = -x$

# Bibliografia

- [1] T. M. Apostol, *Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, (second edition), v. II, Xerox College Publishing International Textbook Series, 1969.
- [2] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [3] G. Chapiro; G. Hime; A. Mailybaev; D. Marchesin; A. J. Souza, *Global Asymptotic Effects of the Structure of Combustion Waves in Porous Media*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. v. 67, 487-498, 2009.
- [4] E. Coddington e N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw Hill Book Company, Inc., New York, 1955.
- [5] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Graduate Texts in Mathematics, 11, 1978.
- [6] J. C. Da Mota; S. Schechter, *Combustion Fronts in Porous Media with Two Layers*, Journal of Dynamics and Differential Equations, v. 18, 615-665, 2006.
- [7] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais* (quarta edição), Projeto Euclides, IMPA 2003.
- [8] D. G. de Figueiredo; A. F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas* (terceira edição), Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007
- [9] J. Evans e N. Shenk, *Solutions to Axon Equation*, J. Biophys., v. 10, 1090-1101, 1970.

- [10] J. Evans, *Nerve Axon Equations: I Linear Approximations*, Indiana Univ. J. Math., v. 21, 877-885, 1972.
- [11] J. Evans, *Nerve Axon Equations: II Stability at Rest*, Indiana Univ. J. Math., v. 22, 75-90, 1972.
- [12] J. Evans, *Nerve Axon Equations: III Stability of the Nerve Impulse*, Indiana Univ. J. Math., v. 22, 577-593, 1972.
- [13] J. Evans, *Nerve Axon Equations: IV The Stable and the Unstable Impulse*, Indiana Univ. J. Math., v. 24, 1169-1190, 1975.
- [14] L. C. Evans, *Partial Differential Equations Graduate Studies in Mathematics*, v. 19, American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.
- [15] R. FitzHugh e H. A. Antosiewicz, *Automatic Computation of Nerve Excitation, Detailed Corrections and Additions*, J. Soc. Ind. Appl. Math. 7, 447-458, 1959.
- [16] A. Ghazaryan; Y. Latushkin; S. Schechter; A. J. Souza, *Stability of Gasless Combustion Fronts in One-Dimensional Solids*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, v. 198, p. 981-1030, 2010.
- [17] A. L. Hodgkin e A. F. Huxley, *A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve*, J. Physiol. v. 117, 500-544, 1952.
- [18] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operations*, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [19] E. L. Lima, *Análise Real, vol 2*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.
- [20] A. Lins Neto, *Funções de uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro. Projeto Euclides, IMPA, 1996.
- [21] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [22] E. C. Zachmanoglou and D. W. Thoe, *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Dover, 1986.