

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Ondas Viajantes Para um Modelo de Combustão em Meios Porosos e Para a Equação KPP[†]

por

Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo

sob orientação do

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da ANP

Ondas Viajantes Para um Modelo de Combustão em Meios Porosos e Para a Equação KPP

por

Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota - UFG
Membro da Banca

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Membro da Banca

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Julho/2011

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me guiado até aqui. Eis o principal responsável por todos os obstáculos vencidos.

Agradeço ao Professor Dr. Aparecido Jesuíno de Souza, pela agradável orientação e por me propor o projeto que deu origem a este trabalho. Agradeço também à todos os professores da UAME, que contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico.

À toda minha família e amigos, sou muito grato pela força, em especial minha mãe Selma, minha avó Avani e minha esposa Patrícia.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro da ANP/PRH-25, ao CTPETRO, CT BRASIL, FINEP e ao INCTMat.

*You tell me we can start the rain
You tell me that we all can change
You tell me we can find something
to wash the tears away.*
Iron maiden

Resumo

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre existência e unicidade de soluções do tipo onda viajante para duas classes de equações diferenciais. A primeira delas consiste de um sistema que modela a propagação de uma frente de temperatura em meios porosos. Tal modelo é utilizado em métodos térmicos aplicados à recuperação de óleo em engenharia de petróleo. Para este modelo são provados a existência e unicidade de uma solução do tipo onda viajante para uma faixa de velocidades de propagação a partir de um valor crítico. A existência é provada usando técnicas de perturbação singular geométrica e a unicidade usando a integral de Melnikov. A segunda classe consiste de uma equação do tipo reação-difusão conhecida na literatura como a equação KPP. Esta equação aparece em problemas de reações químicas autocatalíticas isotérmicas. Usando técnicas similares às da primeira classe são obtidos resultados análogos de existência e unicidade de soluções do tipo onda viajante. O trabalho termina com o estudo da estabilidade espectral daquelas ondas viajantes com velocidades não críticas da equação KPP sob perturbações em um espaço de Banach com peso.

Palavras-chave: Ondas Viajantes, Modelo de Combustão, Equação KPP, Estabilidade.

Abstract

In this work is presented a study about the existence and uniqueness of traveling waves solutions for two classes of differential equations. The first of them is a system modeling a temperature front propagation in a porous media. This model come from a thermal method applied to oil recovery in petroleum engineering. For this model it is proved the existence and uniqueness of a traveling wave solution for a range of propagation velocities above a critical value. The existence is proved by the geometric singular perturbation technique and the uniqueness by the Melnikov Integral. The second class is a reaction-diffusion equation known in literature as the KPP equation. This equation come from isothermal autocatalytic chemical reactions problems. By analogous techniques used in the first class are obtained analogous results on the existence and uniqueness of traveling wave solutions. The work finishes with the spectral stability study of the traveling waves with non critical velocities of the KPP equation under perturbations in a weighted Banach space.

Key-words: Traveling Waves, Combustion Model, KPP Equation, Stability.

Conteúdo

1	Introdução	4
1.1	Organização da Dissertação	5
2	Equações Diferenciais Ordinárias	7
2.1	Conceitos Iniciais	7
2.2	Singularidades	9
2.3	Comportamento Assintótico	10
2.3.1	Soluções Assintóticas para EDOs	13
2.4	Variedades Invariantes	13
2.4.1	Variedades Estáveis, Instáveis e Centrais	15
2.5	Teoria da Perturbação Singular Geométrica	19
2.5.1	Teoremas de Fenichel	19
2.6	Integral de Melnikov	21
2.6.1	Conexões Entre Selas	22
3	Ondas Viajantes	24
3.1	Conceitos Iniciais	24
3.2	Estabilidade de Ondas Viajantes	25
3.2.1	Equações Parabólicas	27
3.2.2	Espectro de Operadores Diferenciais Parabólicos	28
4	Ondas Viajantes na Combustão In-situ	31
4.1	Modelagem Matemática	31
4.1.1	Ondas Viajantes	35

4.2	Retrato de Fase	36
4.3	Existência de Soluções	39
5	A Equação KPP	42
5.1	Existência de Soluções	42
5.1.1	Propriedades das Soluções	50
5.2	Estabilidade	52
6	Conclusão	68
	Bibliografia	69

Capítulo 1

Introdução

Reservatórios petrolíferos com óleos de alta viscosidade são comuns no Nordeste brasileiro e em outras partes do mundo. Essa alta viscosidade do óleo gera muitas dificuldades para a produção. Em primeiro lugar, óleos viscosos se deslocam pelo reservatório com maior dificuldade, retardando a produção. Por outro lado, nos projetos de recuperação secundária convencionais, a água injetada no reservatório, por ter uma viscosidade bem menor que a do óleo, se desloca por caminhos preferenciais deixando grandes áreas do reservatório não varridas.

A combustão in-situ é um método térmico de recuperação que consiste em provocar uma frente de temperatura no reservatório com o objetivo de diminuir a viscosidade do óleo, favorecendo o seu deslocamento. No entanto, a utilização desse método pode trazer altos riscos ao meio ambiente e às vidas envolvidas. Portanto, um planejamento cuidadoso, baseado em simulações numéricas e análise dos modelos matemáticos envolvidos, é necessário antes da aplicação desse método.

O modelo matemático do método térmico, aqui estudado, consiste, à princípio, de um sistema de equações diferenciais provenientes das leis de balanço de massa das fases, do balanço de energia e da lei de Arrhenius, que fornece a taxa de reação entre o oxigênio injetado e o combustível presente no reservatório. A metodologia para estudar este sistema é supor que o mesmo possua solução do tipo onda viajante, ou seja, uma onda que não muda de forma com a evolução do tempo. Com isto, uma mudança de variáveis transforma o sistema de equações diferenciais (que inclui equações diferenciais parciais e ordinárias), em um sistema de equações diferenciais ordinárias, o qual passa a ser o objeto de estudo. A existência de uma onda viajante, é equivalente à existência de uma órbita do sistema de EDO's, conectando dois pontos de equilíbrio, que representam, respectivamente, a configuração do reservatório petrolífero, antes e depois da passagem da frente de temperatura.

Foi provado em [Da Mota] que a existência de uma tal onda viajante depende de sua velocidade de propagação. Mais precisamente, existe um valor crítico de velocidade $\sigma^* > 0$, tal que o sistema possui solução do tipo onda viajante se, e somente se, a velocidade de propagação da onda for maior ou igual à σ^* . Além disso, a única onda que é forte, ou seja, que corresponde à uma órbita do sistema de EDO's associado que se estabiliza de forma exponencial, tanto no menos infinito

como no mais infinito, é a onda de velocidade σ^* .

Na literatura existem alguns resultados de estabilidade para a onda viajante forte (de velocidade σ^*), mas pouco se sabe à este respeito das demais ondas. Nesta dissertação, além de estudarmos o modelo de propagação de uma frente de temperatura no método da combustão *in-situ*, estudaremos também a equação de Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov, conhecida na literatura como equação KPP. Esta equação possui propriedades semelhantes às do modelo de combustão em meios porosos, sendo que para esta equação, existem estudos de estabilidade para as ondas que não são fortes [Wu]. Com isto, esperamos no futuro, utilizar as técnicas de [Wu], para estudar a estabilidade das ondas não fortes do modelo da combustão *in-situ* em meios porosos.

1.1 Organização da Dissertação

O Capítulo 2 é um apurado das ferramentas utilizadas para provarmos a existência de ondas viajantes, tanto para o modelo da combustão *in-situ*, quanto para a equação KPP. As Seções 2.1 e 2.2, consistem de uma breve revisão da teoria básica das EDO's segundo [Doering] e [Sotomayor]. Na Seção 2.3, estudamos aproximações assintóticas e suas aplicações em equações diferenciais ordinárias segundo [Holmes], [Bender] e [Coppel]. Na Seção 2.4, elementos mais específicos da teoria são apresentados, como os conjuntos invariantes e os importantes teoremas das variedades estáveis, instáveis e centrais. Em [Chicone] o leitor pode aprender mais sobre conjuntos invariantes e em [Carr] e [Phongì] encontrará uma boa quantidade de informações sobre variedades centrais. Na Seção 2.5, temos uma breve introdução da teoria da perturbação singular geométrica. Aqui apresentamos os principais resultados para provar a existência das ondas viajantes para as equações estudadas. O leitor interessado neste ramo da matemática pode começar por [Jones], mas a prova dos resultados são encontradas em [Fenichel]. A Seção 2.6 trata da integral de Melnikov, ferramenta utilizada para provar a unicidade das ondas viajantes fortes. Detalhes sobre esse assunto encontram-se em [Chicone] e [Schecter].

O Capítulo 3, trata de ondas viajantes e de resultados de estabilidade. Inicialmente definimos o conceito de forma mais geral segundo [Sandstade] e depois nos focamos na classe de equações parabólicas segundo [Volpert], [Smoler] e [Gardner].

O modelo da Combustão *in-situ* é estudado no Capítulo 4 segundo [Da Mota]. Na Seção 4.1, obtemos o sistema de equações diferenciais que governa a propagação da frente de temperatura no meio poroso e o equivalente sistema de EDO's. Na Seção 4.2, construímos o retrato de fase desse sistema e na Seção 4.3, provamos que a existência de uma órbita do sistema de EDO's, correspondendo à uma onda viajante do modelo, depende de sua velocidade de propagação.

A equação KPP é estudada no Capítulo 5. Na Seção 5.1, provamos a existência de ondas viajantes e obtemos algumas propriedades. Os autores [Billingham] e [Barnes], utilizam técnicas de análise numérica para garantir a existência da onda viajantes. Apesar de utilizarmos algumas idéias destes autores, nossa demonstração

é baseada na teoria da perturbação singular geométrica, assim como no Capítulo 4. Na Seção 5.2, estudamos a estabilidade das ondas viajantes não fortes, obtidas na Seção 5.1, utilizando as técnicas de [Wu].

Por fim, o Capítulo 6, traz as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias

Para apresentar as ferramentas que utilizaremos ao longo desta dissertação, faremos, neste capítulo, uma breve revisão bibliográfica de vários tópicos da teoria das equações diferenciais ordinárias. Para não perder o foco, enunciamos todos os resultados a serem utilizados sem prová-los, mas suas demonstrações podem ser encontradas na literatura indicada na Seção 1.1.

2.1 Conceitos Iniciais

Dado um campo vetorial $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, o teorema de Picard, garante que o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

possui uma única solução local definida em um intervalo máximo $I(x_0)$ contendo 0. Tal solução é chamada de *trajetória de f por x_0* do problema (2.1).

Quando o campo f é linear, ou seja, uma matriz $n \times n$, temos que

$$I(x_0) = \mathbb{R}, \quad \forall x_0 \in \Omega = \mathbb{R}^n.$$

O conjunto imagem de cada trajetória passando por x é denominado de *órbita de f por x* . Como cada solução de (2.1) é de classe \mathcal{C}^2 , cada órbita é um conjunto conexo, constituindo uma curva parametrizada de classe \mathcal{C}^2 e sem auto-interseções. Uma *órbita orientada* é uma órbita munida da orientação do tempo crescente da trajetória associada. O *retrato de fase* do campo f é a partição do conjunto Ω em órbitas orientadas.

Analisando as propriedades do retrato de fase, podemos inferir algumas propriedades das soluções do problema (2.1), sem necessariamente, conhecer estas soluções.

Se $t_0 \in I(x)$, $\forall x \in \Omega$, definimos o *fluxo de x no tempo t_0* , como sendo a aplicação $\phi_{t_0} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\phi_{t_0}(x_0) = x(t_0)$, onde x é a trajetória de f por x_0 . Apesar de

induzir a uma confusão inicial, costumamos escrever $\phi_t(x) = x(t)$, deixando implícito que o "x" no argumento do fluxo é um ponto (a condição inicial do problema de Cauchy) e o $x(t)$ é a trajetória pelo ponto x no tempo t . Assim, enquanto a trajetória diz respeito ao comportamento da solução em função do tempo, o fluxo no tempo t , diz respeito à posição da solução no tempo t , em função da condição inicial. Sendo $\Omega_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; x \in \Omega \text{ e } t \in I(x)\}$, definimos o *fluxo* de f , como sendo a aplicação $\phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(t, x) = \phi_t(x)$.

O fluxo de f satisfaz as seguintes propriedades:

- $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x));$
- $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x), \forall t, t + s \in I(x).$

Exemplo 1: Considere o sistema $x' = f_1(x)$, onde o campo de vetores é dado por

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, 0, \dots, 0) = e_1,$$

com condição inicial $x(0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

A trajetória deste problema é

$$x(t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n).$$

O fluxo desta equação é dado por

$$\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n).$$

O fluxo do campo dado no Exemplo 1 é chamado de *fluxo tubular*. O retrato de fase deste sistema, para $n = 2$, está ilustrado na Figura 2.1.

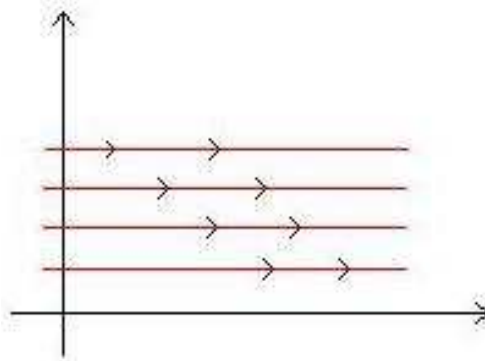


Figura 2.1: Retrato de fase do campo f_1 do Exemplo 1.

Sejam $f_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois campos de vetores com respectivos fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2 . Dizemos que os campos f_1 e f_2 (ou os fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2) são *topologicamente conjugados*, quando existe um homeomorfismo $g : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, denominado *conjugação topológica*, tal que

$$\phi_t^2 \circ g = g \circ \phi_t^1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quando g for um difeomorfismo, dizemos que os campos são *diferencialmente conjugados*.

Dois sistemas diferenciavelmente conjugados tem propriedades dinâmicas semelhantes. Em particular seus retratos de fase diferem por uma mudança de coordenadas diferenciável. As conjugações diferenciáveis estão para os sistemas dinâmicos, assim como os isomorfismos estão para a álgebra, ou os homeomorfismos estão para a topologia.

2.2 Singularidades

Dizemos que $x \in \Omega$ é uma *singularidade*, ou *ponto de equilíbrio*, do campo f , quando $f(x) = 0$. Um ponto que não é de equilíbrio é chamado de *ponto regular*.

A trajetória do sistema (2.1) por um ponto singular x_0 é sempre trivial, isto é, $x(t) = x_0, \forall t \in I(x_0) = \mathbb{R}$.

O teorema a seguir estabelece que, localmente, o fluxo de qualquer campo de classe \mathcal{C}^1 , em torno de pontos regulares, é diferenciavelmente conjugado ao fluxo do campo f_1 dado no exemplo 1. Portanto, o retrato de fase de qualquer campo da classe \mathcal{C}^1 , em torno de pontos regulares, difere apenas de uma mudança de coordenadas diferenciável.

Teorema 2.1 (Teorema do Fluxo Tubular) *Seja $x_0 \in \Omega$ um ponto regular para o campo $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Então existem uma vizinhança $V \subset \Omega$ de x_0 , um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, uma constante $r > 0$ e um difeomorfismo $g : V \rightarrow (-r, r) \times U$, que conjuga o campo f com o campo f_1 do Exemplo 1.*

O retrato de fase nas vizinhanças de pontos de equilíbrio, não é tão simples assim, podendo haver uma grande variedade de comportamentos distintos.

Dizemos que uma singularidade x_0 de um campo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *estável* quando dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in \Omega$ e $|x - x_0| < \delta$ implica $|\phi(t, x) - x_0| < \epsilon, \forall t > 0$. Ou seja, x_0 é uma singularidade estável quando as órbitas que começam suficientemente próximas de x_0 , permanecem próximas de x_0 . Uma singularidade estável, é dita *assintoticamente estável*, quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in \Omega$ e $|x - x_0| < \delta$ implicam $|\phi(t, x) - x_0| < \epsilon, \forall t > 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0$. Uma singularidade assintoticamente estável, é dita *exponencialmente assintoticamente estável*, quando dado $\epsilon > 0$, existem $\delta, c, \mu > 0$, tal que $x \in \Omega$ e $|x - x_0| < \delta$ implica $|\phi_t(x) - x_0| \leq ce^{\mu t}, \forall t \geq 0$. Uma singularidade estável que não é assintoticamente estável é chamada de *indiferente*. Uma singularidade que não é estável é chamada de *instável*.

O próximo teorema nos permite analisar a estabilidade de um ponto de equilíbrio através dos autovalores da matriz jacobiana do campo.

Teorema 2.2 (Liapunov-Perron) *Considere um campo $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e x_0 uma singularidade de f .*

1. *Se todos os autovalores da matriz jacobiana $f'(x_0)$ tem parte real negativa, então x_0 é assintoticamente estável;*
2. *Se algum autovalor de $f'(x_0)$ tem parte real positiva, então x_0 é instável.*

Dada uma singularidade x_0 para um campo f , dizemos que x_0 é *hiperbólica*, quando todos os autovalores de $f'(x_0)$ são não nulos.

O próximo teorema fortalece a conclusão do teorema de Liapunov-Perron, acrescentando a hipótese da singularidade ser hiperbólica.

Teorema 2.3 (Hartman-Grobman) *Seja x_0 uma singularidade hiperbólica do campo $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Então existe uma vizinhança $V \subset \Omega$ de x_0 , um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, uma constante $r > 0$ e um difeomorfismo $g : V \rightarrow (-r, r) \times U$, que conjuga o campo f com o campo linear $f'(x_0)$.*

2.3 Comportamento Assintótico

Sejam $g, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas em um intervalo I e $t_0 \in \bar{I}$. Dizemos que a função g é "o" *pequeno* (lê-se: ó pequeno) de θ quando $t \rightarrow t_0$, e escrevemos $g(t) = o(\theta(t))$ quando $t \rightarrow t_0$, se, e somente se, θ não se anular em uma vizinhança de t_0 e

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{\theta(t)} = 0.$$

Dizemos que g é "o" *grande* (lê-se: ó grande) de θ quando $t \rightarrow t_0$, e escrevemos $g(t) = O(\theta(t))$ quando $t \rightarrow t_0$, se, e somente se, θ não se anular em uma vizinhança de t_0 e a fração $g(t)/\theta(t)$ for limitada nesta vizinhança de t_0 , isto é, se existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que

$$|g(t)| \leq M|\theta(t)|, \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I.$$

Note que se $g(t) = o(\theta(t))$ quando $t \rightarrow t_0$, então $g(t) = O(\theta(t))$ quando $t \rightarrow t_0$.

Algumas propriedades úteis são:

1. Seja $c > 0$. Se $g(t) = O(t^c)$ quando $t \rightarrow 0$, então $g(t) = o(t^b)$ quando $t \rightarrow 0$, $\forall b \in (0, c)$;
2. Se $g(t) = O(\theta(t))$ quando $t \rightarrow 0$, então $|g(t)|^c = O(|\theta(t)|^c)$ quando $t \rightarrow 0$, $\forall c > 0$;

3. Se $g_1(t) = O(\theta_1(t))$ e $g_2(t) = O(\theta_2(t))$ quando $t \rightarrow 0$, então

$$\begin{aligned} g_1(t) + g_2(t) &= O(|\theta_1(t)| + |\theta_2(t)|) \quad \text{quando } t \rightarrow 0 \\ g_1(t)g_2(t) &= O(\theta_1(t)\theta_2(t)) \quad \text{quando } t \rightarrow 0; \end{aligned}$$

4. Se $g(t) = o(\theta(t))$ quando $t \rightarrow 0$, com g e θ contínuas, então

$$\int_0^t g(x)dx = o\left(\int_0^t |\theta(x)|dx\right) \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

As propriedades (2) e (3) também são válidas com "o" no lugar de "O".

Ocorrendo $g(t) - \theta(t) = o(\theta(t))$ quando $t \rightarrow t_0$, dizemos que θ é uma *aproximação assintótica* de g quando $t \rightarrow t_0$. Neste caso escrevemos $g(t) \sim \theta(t)$ quando $t \rightarrow t_0$. Note que, $g(t) \sim \theta(t)$ quando $t \rightarrow t_0$ é equivalente à

$$\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)/\theta(t) = 1.$$

Sejam $g : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que $g(t)$ tende à x *exponencialmente*, quando $t \rightarrow -\infty$, quando existem constantes $a, b > 0$ e $t_0 \leq a$ tais que $|f(t) - x| \leq ae^{bt}$, $\forall t \leq t_0$. Sendo $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que $g(t)$ tende à x *exponencialmente*, quando $t \rightarrow \infty$, quando existem constantes $a, b > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tais que $|f(t) - x| \leq ae^{-bt}$, $\forall t \geq t_0$.

Note que, se $f(t) - x \sim ae^{bt}$ quando $t \rightarrow -\infty$, então $f(t) \rightarrow x$ exponencialmente quando $t \rightarrow -\infty$. Analogamente, se $f(t) - x \sim ae^{-bt}$ quando $t \rightarrow \infty$, então $f(t) \rightarrow x$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$.

Outra propriedade interessante, é que se $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana, $a \in I$ e $f(t) \rightarrow a$ exponencialmente quando $t \rightarrow \pm\infty$, então $g(f(t)) \rightarrow g(a)$ exponencialmente quando $t \rightarrow \pm\infty$. De fato, se $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$, $\forall x, y \in I$ e $|f(t) - a| \leq Ae^{-Bt}$, $\forall t \geq t_0$, temos $|g(f(t)) - g(a)| \leq KAe^{-Bt}$, $\forall t \geq t_0$, donde $g(f(t)) \rightarrow g(a)$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente se mostra para $t \rightarrow -\infty$.

Séries de Potências Assintóticas

Dados um intervalo I , $t_0 \in \bar{I}$ e uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, escrevemos

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n \quad \text{quando } t \rightarrow t_0,$$

se, e somente se,

$$f(t) - \sum_{n=0}^k a_n(t - t_0)^n = o((t - t_0)^k) \quad \text{quando } t \rightarrow t_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Suponha que $f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$ quando $t \rightarrow t_0$ e $g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t-t_0)^n$ quando $t \rightarrow t_0$. Temos as seguintes propriedades:

1. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(t-t_0)^n \quad \text{quando } t \rightarrow t_0;$$

2. Se $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$, então

$$f(t)g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n \quad \text{quando } t \rightarrow t_0;$$

3. Se $b_0 \neq 0$, $d_0 = a_0/b_0$ e $d_n = [a_n - \sum_{i=0}^{n-1} d_i b_{n-i}]/b_0$, $\forall n \geq 1$, então

$$\frac{f(t)}{g(t)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t-t_0)^n \quad \text{quando } t \rightarrow t_0;$$

4. Se f é integrável em uma vizinhança de t_0 , então

$$\int_{t_0}^t f(x)dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (t-t_0)^{n+1} \quad \text{quando } t \rightarrow t_0;$$

5. Se f é derivável em uma vizinhança de t_0 com derivada integrável nesta vizinhança, então

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t-t_0)^{n-1} \quad \text{quando } t \rightarrow t_0.$$

Outros resultados úteis são:

1. Se $p \geq 1$, $f''(t)$ é positiva para t suficientemente grande e $f(t) \sim t^p$ quando $t \rightarrow \infty$, então $f'(t) \sim p t^{p-1}$ quando $t \rightarrow \infty$;
2. Se $f(t) \sim g(t)$ quando $t \rightarrow t_0$ e g não muda de sinal em alguma vizinhança de t_0 , então existe uma constante de integração c tal que

$$\int_{t_1}^t f(x)dx \sim \int_{t_1}^t g(x)dx + c \quad \text{quando } t \rightarrow t_0.$$

2.3.1 Soluções Assintóticas para EDOs

Através de um exemplo, vamos ilustrar como obter aproximações assintóticas de soluções de uma EDO.

Exemplo 2: Para cada $p > 1$ e $c > 0$, seja $f(x, y) = -\frac{1}{c}(x+y)^p(1-x-y)$. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} f(x, y(x))[y'(x) + 1] &= -cy(x), & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Vamos procurar uma expansão assintótica para uma solução desse problema na forma $y(x) = ax^\alpha + o(x^\alpha)$, quando $x \rightarrow 0$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $\alpha \geq 1$ devem ser determinados. Substituindo na equação, obtemos

$$\frac{-1}{c}[x + ax^\alpha + o(x^\alpha)]^p[1 - x - ax^\alpha + o(x^\alpha)][\alpha ax^{\alpha-1} + 1 + o(x^{\alpha-1})] = -cax^\alpha + o(x^\alpha),$$

isto é,

$$[x + ax^\alpha + o(x^\alpha)]^p[1 - x - ax^\alpha + o(x^\alpha)][\alpha ax^{\alpha-1} + 1 + o(x^{\alpha-1})] = c^2ax^\alpha + o(x^\alpha).$$

Como a menor potência possível no lado esquerdo dessa equação é x^p e o coeficiente deste termo é 1, temos que $\alpha = p$ e $c^2a = 1$, isto é, $a = 1/c^2$. Logo $y(x) = \frac{x^p}{c^2} + o(x^p)$, quando $x \rightarrow 0$, ou seja, $y(x) \sim \frac{x^p}{c^2}$, quando $x \rightarrow 0$.

Agora apresentaremos um resultado sobre o comportamento assintótico de certas soluções de sistemas lineares.

Teorema 2.4 *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores, todos simples, de uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{C})$, (aqui, $M_n(\mathbb{K})$ indica o conjunto de todas as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas no corpo \mathbb{K}) com respectivos autovetores v_1, \dots, v_n . Considere um caminho contínuo $B : [t_0, \infty) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ satisfazendo*

$$\int_{t_0}^{\infty} |B(t)| dt < \infty.$$

Então existem x_1, \dots, x_n , soluções linearmente independentes do sistema

$$x' = [A + B(t)]x,$$

tais que

$$x_i(t) \sim e^{\lambda_i t} v_i, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty \quad (i = 1, \dots, n).$$

2.4 Variedades Invariantes

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que um conjunto $E \subset \Omega$ é *invariante pelo fluxo* de um campo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, quando dado $x \in E$, a órbita que passa por x está

totalmente contida em E . Em outras palavras, E é invariante pelo fluxo quando a seguinte implicação for verdadeira

$$x \in E \Rightarrow \phi_t(x) \in E, \forall t \in I(x).$$

Se tivermos apenas

$$x \in E \Rightarrow \phi_t(x) \in E, \forall t \in I(x) \cap [0, \infty),$$

dizemos que E é *positivamente invariante*. Se tivermos apenas

$$x \in E \Rightarrow \phi_t(x) \in E, \forall t \in I(x) \cap (-\infty, 0],$$

dizemos que E é *negativamente invariante*.

Dizemos que E é *localmente invariante pelo fluxo* de um campo $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, quando existe uma vizinhança $V \supset E$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ vale

- $x \in E, t \geq 0$ e $\phi([0, t], x) \subset V \Rightarrow \phi([0, t], x) \subset E$;
- $x \in E, t < 0$ e $\phi([t, 0], x) \subset V \Rightarrow \phi([t, 0], x) \subset E$.

Ou seja, nenhuma trajetória por um ponto $x \in E$, pode escapar de E sem escapar de V . Isto significa que se algum "pedaço" de trajetória por um ponto $x \in E$, estiver contido em V , deverá necessariamente, estar contido em E . Como V é um conjunto aberto, uma trajetória só pode escapar de E pela fronteira de V .

Se pensarmos no conjunto localmente invariante E como um arco de uma curva, então as trajetórias passando por um ponto $x \in E$ só podem escapar de E pelas suas extremidades e desde que estas extremidades não pertençam à E , ou seja, que E não seja um conjunto fechado, veja a Figura 2.2. Caso E seja fechado, então não há como uma trajetória escapar de E sem deixar um pedaço fora de E e dentro de V , pois V é um aberto que contém E . Logo uma curva localmente invariante que inclui suas extremidades é um conjunto invariante.

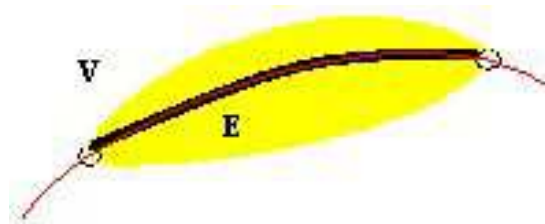


Figura 2.2: Curva localmente invariante.

Toda superfície unidimensional (curva) invariante pelo fluxo é um prolongamento de uma órbita, ou mais precisamente, uma união de órbitas interligadas.

Uma *variedade* n -dimensional é um espaço métrico M , cujos pontos possuem vizinhanças homeomorfas à abertos do \mathbb{R}^n .

Pontos, linhas, planos, arcos de curvas, esferas e toros são exemplos de variedades. Em particular, uma órbita é uma variedade 1-dimensional e esta será a principal variedade que trabalharemos neste texto.

Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma *subvariedade k -dimensional* se, para cada $x \in S$, existem $W \subset \mathbb{R}^k$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ abertos com $x \in U \cap S$ e $G : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave, tal que $U \cap S = G(W)$ e :

- Se $k = n$, então G é a aplicação identidade;
- Se $k < n$, então existem uma matriz inversível $A \in GL_n(\mathbb{R})$ e uma função suave $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ tais que $G(w) = A(w, g(w))^t$, $\forall w \in W$.

Neste caso, a aplicação $G : W \rightarrow S$, é chamada de carta de S em x e é possível mostrar que esta aplicação é sempre inversível.

Subespaços de \mathbb{R}^n e superfícies de nível de uma aplicação diferenciável são exemplos de subvariedades.

Uma *variedade diferenciável n -dimensional* é um espaço métrico conexo M , que possui uma cobertura aberta $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = M$ satisfazendo:

- Cada A_{α} é homeomorfo à bola unitária $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, ou seja, existe um homeomorfismo $h_{\alpha} : A_{\alpha} \rightarrow B$;
- Se $A_{\alpha} \cap A_{\beta} \neq \emptyset$, então $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha} \circ h_{\beta}^{-1} : h_{\beta}(A_{\alpha} \cap A_{\beta}) \rightarrow h_{\alpha}(A_{\alpha} \cap A_{\beta})$ é diferenciável e o determinante jacobiano $\det Dh_{\alpha\beta}(x) \neq 0$, $\forall x \in h_{\beta}(A_{\alpha} \cap A_{\beta})$.

Quando $h_{\alpha\beta}$ for de classe \mathcal{C}^k (respectivamente analítica), dizemos que M é uma variedade de classe \mathcal{C}^k (respectivamente analítica).

Um conjunto invariante pelo fluxo de um campo f , que tem estrutura de uma variedade de classe \mathcal{C}^k , é chamado de variedade invariante de classe \mathcal{C}^k .

2.4.1 Variedades Estáveis, Instáveis e Centrais

No que segue, assumiremos que $I(x) = \mathbb{R}$, $\forall x \in \Omega$. Dado um ponto de equilíbrio x_0 de um campo $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, definimos os *conjuntos estável e instável* de x_0 respectivamente por

$$W^e(x_0) = \{y : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(y) = x_0\} \quad \text{e} \quad W^i(x_0) = \{y : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) = x_0\}.$$

Os conjuntos estáveis e instáveis são sempre não-vazios, pois $x_0 \in W^e(x_0) \cap W^i(x_0)$. Além disso, são também invariantes pelo fluxo. Quando os conjuntos $W^e(x_0)$ ou $W^i(x_0)$ forem variedades, são denominados *variedades estável e instável* de x_0 respectivamente.

Dado um conjunto localmente invariante E , generalizamos o conceito de conjunto estável e instável de E da seguinte maneira:

$$W^e(E) = \{y : \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, y), E) = 0\} \quad \text{e} \quad W^i(E) = \{y : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t, y), E) = 0\}.$$

Dado um campo linear $f = A \in M_n(\mathbb{R})$, o espaço \mathbb{R}^n pode ser decomposto em soma direta de três subespaços invariantes:

$$\mathbb{R}^n = F^e \oplus F^i \oplus F^c,$$

onde todos os autovalores de $A|_{F^e}$, $A|_{F^i}$ e $A|_{F^c}$ têm parte real, negativa, positiva e nula respectivamente. Observemos que o subespaço E^e gerado pelos autovetores associados aos autovalores de parte real negativa, (também conhecido como *espaço estável* de A) está contido em F^e . Analogamente, $E^i \subset F^i$ e $E^c \subset F^c$.

O teorema a seguir, revela muitas informações sobre os conjuntos estáveis e instáveis de uma singularidade hiperbólica.

Teorema 2.5 (Adamar-Perron) *Seja x_0 uma singularidade hiperbólica do campo $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Então $W^e(x_0)$ e $W^i(x_0)$ são variedades invariantes de classe \mathcal{C}^k , tangentes e com dimensões iguais à E^e e E^i (relativamente ao campo linear $f'(x_0)$), respectivamente. Além disso, existem constantes $c, \lambda > 0$ tais que, para quaisquer soluções φ em $W^e(x_0)$ e ψ em $W^i(x_0)$, temos as estimativas*

$$\|\varphi(t) - x_0\| \leq ce^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \|\psi(t) - x_0\| \leq ce^{\lambda t}, \quad \forall t \leq 0.$$

Uma propriedade das variedades estáveis e instáveis que faremos uso é que as órbitas contidas nestas tendem, assintoticamente, ao ponto de equilíbrio x_0 , pelo espaço tangente.

Caso a singularidade não seja hiperbólica, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.6 (Teorema da Variedade Central) *Seja x_0 uma singularidade não hiperbólica do campo $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Então existe uma variedade invariante de classe \mathcal{C}^{k-1} , denotada por $W^c(x_0)$, tangente à E^c (relativamente ao campo linear $f'(x_0)$) em x_0 .*

Em geral, uma *variedade central* é uma variedade invariante diferenciável que é tangente à E^c em x_0 . Assim, o teorema da variedade central garante a existência de variedades centrais. Existem exemplos que mostram que um campo pode, até mesmo, ter infinitas variedades centrais, veja [Carr].

O comportamento destas variedades invariantes e subespaços está esquematizado na figura 2.3.

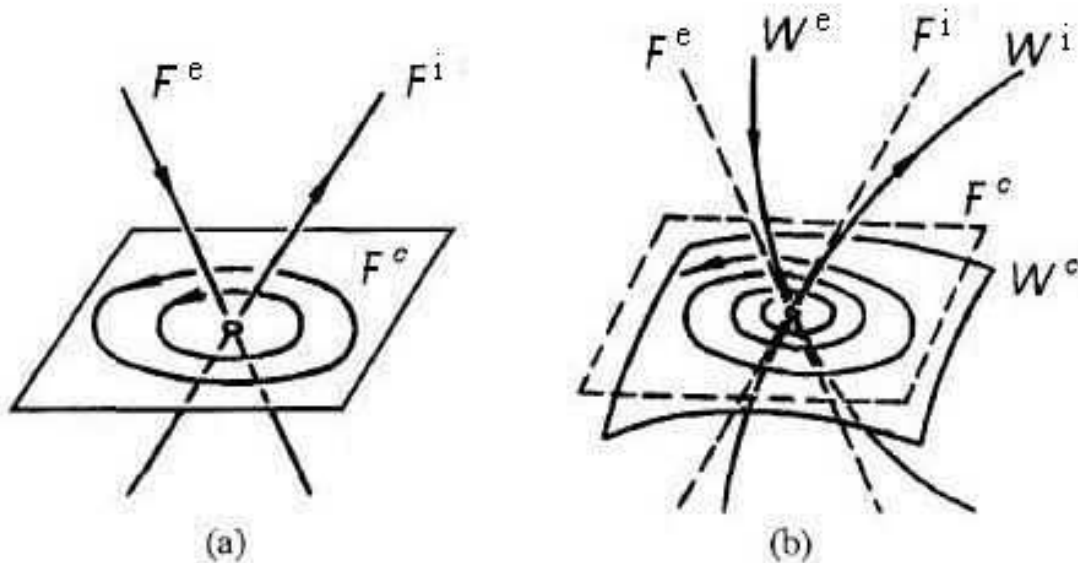


Figura 2.3: Variedades estável, instável e central de um campo linear (a) e um campo não-linear (b). Fonte: [Magnitskii].

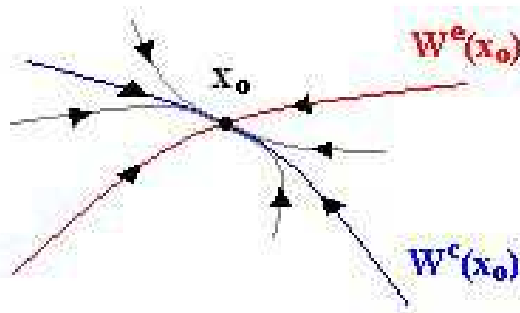


Figura 2.4: Comportamento das órbitas que começam próximas de $W^c(x_0)$.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto de equilíbrio com uma variedade estável e outra central. Uma propriedade interessante das variedades centrais é que as órbitas, em uma vizinhança de x_0 , que começam próximas da variedade central são atraídas pela variedade central, veja a Figura 2.4.

Em geral, a dificuldade de se calcular as variedades centrais, estáveis ou instáveis equivalem a resolver a EDO. Não obstante, aproximações assintóticas das variedades estáveis e instáveis nos pontos de equilíbrio são obtidas sem tanta dificuldade pelos espaços tangentes. Já para as variedades centrais, as aproximações assintóticas são obtidas da seguinte maneira.

Suponha que $x_0 = 0$ seja uma singularidade não hiperbólica do sistema (2.1). Em uma base de autovetores, o sistema (2.1) pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} u' = Au + f_1(u, v) \\ v' = Bv + f_2(u, v), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $f_1 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ e $f_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ são de classe \mathcal{C}^1 satisfazendo $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$ e $f_1'(0,0) = f_2'(0,0) = 0$, a matriz $A \in M_{n_1}(\mathbb{R})$ tem todos os autovalores no eixo imaginário e a matriz $B \in M_{n_2}(\mathbb{R})$ tem todos os autovalores fora do eixo imaginário. Aqui, $n_1 + n_2 = n$.

Teorema 2.7 *Sendo $h : W \subset \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ uma carta para a variedade central do sistema (2.2), temos que h satisfaz o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} h'(x)[Ax + f_1(x, h(x))] & = Bh(x) + f_2(x, h(x)) \\ h(0) & = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Exemplo 3: Para $c > 0$ e $p > 1$, considere o sistema

$$\begin{cases} u' & = v \\ v' & = -cv - u^p(1-u). \end{cases} \quad (2.4)$$

Sendo $z = (u, v)$, este sistema pode ser escrito na forma autônoma

$$z' = F(z),$$

onde $F(z) = F(u, v) = (v, -cv - u^p(1-u))$. A matriz jacobiana desse sistema é

$$JF(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u^{p-1}((p+1)u - p) & -c \end{pmatrix}.$$

O ponto $Q = (1, 0)$ é uma sela, pois os autovalores de $JF(Q)$ são $\lambda_1 = [-c + (c^2 + 4)^{1/2}]/2 > 0$ e $\lambda_2 = [-c - (c^2 + 4)^{1/2}]/2 < 0$, com respectivos autovetores $u_1 = (1, \lambda_1)$ e $u_2 = (1, \lambda_2)$. A variedade estável $W^e(Q)$ tem dimensão 1 (portanto é uma curva) e é tangente à $(1, \lambda_2)$ e a variedade instável $W^i(Q)$ também tem dimensão 1 e é tangente à $(1, \lambda_1)$. Daí, sobre a órbita contida em $W^i(Q)$, temos $v \sim \lambda_1(u - 1)$, quando $u \rightarrow 1^-$, ou seja, $v(\xi) \sim \lambda_1(u(\xi) - 1)$, quando $\xi \rightarrow -\infty$. Por outro lado, sobre a órbita contida em $W^e(Q)$, temos $v \sim \lambda_2(u - 1)$, quando $u \rightarrow 1^+$, ou seja, $v(\xi) \sim \lambda_2(u(\xi) - 1)$, quando $\xi \rightarrow \infty$.

Quanto à origem $P = (0, 0)$, esta é uma singularidade não hiperbólica, pois 0 e $-c < 0$ são os autovalores da matriz $JF(P)$ com respectivos autovetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, -c)$. Este sistema possui uma variedade estável $W^e(P)$, de dimensão 1 tangente ao vetor $(1, -c)$ e variedades centrais $W^c(P)$ tangentes ao vetor $(1, 0)$. Daí, sobre a variedade estável $W^e(P)$, temos que $v \sim -cu$ quando $u \rightarrow 0$, ou seja, $v(\xi) \sim -cu(\xi)$ quando $\xi \rightarrow \infty$.

A fim de obtermos uma aproximação assintótica para a variedade central, vamos usar os autovetores $(1, -c)$ e $(1, 0)$ para transformar o sistema (2.4) na forma (2.2). Basta fazer a mudança de variáveis $z = Mw$, onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Daí, sendo $w = (x, y)$, o sistema (2.4) toma a forma

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{c}(x+y)^p(1-x-y) = f_1(x, y) \\ y' = -cy + \frac{1}{c}(x+y)^p(1-x-y) = -cy - f_1(x, y). \end{cases} \quad (2.5)$$

Pelo Teorema 2.7, sendo h uma carta para uma variedade central $W^c(P)$, temos que h é solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} h'(x)[f_1(x, h(x))] &= -ch(x) - f_1(x, h(x)) \\ h(0) &= 0. \end{aligned}$$

Este problema é equivalente ao problema

$$\begin{cases} f(x, h(x))[h'(x) + 1] = -ch(x) \\ h(0) = 0, \end{cases}$$

que já foi estudado no Exemplo 2 e portanto, temos que $h(x) \sim x^p/c^2$ quando $x \rightarrow 0$. Voltando para as variáveis (u, v) , temos que $v = h(u) \sim -u^p/c$ quando $u \rightarrow 0$.

2.5 Teoria da Perturbação Singular Geométrica

Nesta seção introduziremos uma ferramenta poderosa desenvolvida por Fenichel no final dos anos 70. Trata-se da teoria da perturbação singular geométrica, cuja motivação surgiu na relação de um sistema parametrizado por duas escalas de tempo. As ferramentas desenvolvidas nesta seção serão úteis para provar a existência de soluções do sistema proposto no Capítulo 3. O leitor interessado em mais detalhes sobre o assunto pode consultar [Jones]

2.5.1 Teoremas de Fenichel

Considere os sistemas

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \epsilon) \\ y' = \epsilon g(x, y, \epsilon) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = f(x, y, \epsilon) \\ \dot{y} = g(x, y, \epsilon), \end{cases} \quad (2.7)$$

onde $' = \frac{d}{dt}$, $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, ϵ é um parâmetro real, $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ são abertos e $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ são de classe C^∞ . Suponhamos que $f(x, y, 0) = 0$, $\forall (x, y, 0) \in \Omega_1$.

O sistema (2.7) é obtido do (2.6) via a mudança de variáveis $\tau = \epsilon t$. Para $\epsilon > 0$ pequeno, a diferença entre as soluções destes sistemas é que a solução de (2.6) se

desloca mais rapidamente que a do sistema (2.7). Não por menos, o sistema (2.6) é chamado de sistema *rápido* e o (2.7) de sistema *lento*.

Fazendo $\epsilon = 0$, estes sistemas se tornam

$$\begin{cases} x' = f(x, y, 0) \\ y' = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} 0 = f(x, y, 0) \\ \dot{y} = g(x, y, 0). \end{cases} \quad (2.9)$$

A variedade diferenciável $M_0 = \{(x, y); f(x, y, 0) = 0\}$, é chamada de *variedade lenta* do sistema (2.9).

Seja (x_0, y_0) uma singularidade para o sistema (2.8), isto é $f(x_0, y_0, 0) = 0$. A matriz jacobiana do sistema (2.8) em (x_0, y_0) é

$$\begin{bmatrix} D_x f(x_0, y_0, 0) & D_y f(x_0, y_0, 0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dizemos que a singularidade (x_0, y_0) do sistema (2.8) é *normalmente hiperbólica*, se $D_x f(x_0, y_0)$ não possuir autovalores com parte real nula.

Teorema 2.8 (1º Teorema da Variedade Invariante de Fenichel) *Considere $E \subset M_0$ uma variedade compacta e composta por singularidades normalmente hiperbólicas para o sistema (2.8). Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então existe uma variedade de classe C^∞ , E_ϵ , difeomorfa à E , localmente invariante pelo fluxo (do sistema (2.6)) e tal que*

$$\sup\{|a - b|; a \in E, b \in E_\epsilon\} = O(\epsilon) \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0.$$

O próximo teorema relaciona as variedades estáveis e instáveis dos sistemas (2.8) e (2.6).

Teorema 2.9 (2º Teorema da Variedade Invariante de Fenichel) *Seja M_0 um conjunto compacto composto por singularidades normalmente hiperbólicas para o sistema (2.8). Suponha que M_0 seja gráfico de uma função de classe C^∞ , cujo domínio é compacto, simplesmente conexo e com fronteira sendo uma subvariedade de classe C^∞ de dimensão $m - 1$. Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então existem variedades diferenciáveis de classe C^∞ , $W^e(M_\epsilon)$ e $W^i(M_\epsilon)$, localmente invariantes pelo fluxo (do sistema (2.6)), difeomorfas à $W^e(M_0)$ e $W^i(M_0)$ respectivamente e tais que*

$$\begin{aligned} \sup\{|a - b|; a \in W^e(M_\epsilon), b \in W^e(M_0)\} &= O(\epsilon) \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0 \\ \sup\{|a - b|; a \in W^i(M_\epsilon), b \in W^i(M_0)\} &= O(\epsilon) \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

2.6 Integral de Melnikov

Considere o sistema planar

$$x' = f(x, \lambda), \quad (2.10)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^n$ é um parâmetro e $f : \mathbb{R}^{2+n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe \mathcal{C}^1 , donde $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe \mathcal{C}^2 .

Seja $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto regular para o sistema não perturbado

$$x' = f(x, 0) \quad (2.11)$$

Para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$, denotemos por $\varphi(\cdot, \xi, \lambda) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, a solução de (2.10) tal que $\varphi(0, \xi, \lambda) = \xi$. Defina $f^\perp(x) = Rf(x, 0)$, onde

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e seja ψ o fluxo do sistema "ortogonal" $x' = f^\perp(x)$ em \mathbb{R}^2 .

Note que $\psi(\cdot, \xi_0)$ é transversal à $\phi(\cdot, \xi_0, 0)$ e considere a seção transversal

$$\Sigma = \{\psi(t, \xi_0); t \in \mathbb{R}\}.$$

Suponha que tenhamos duas famílias $\mathcal{F}_1 = \{x_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{y_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}^n\}$, de soluções de (2.10), parametrizadas por λ , cujos membros são transversais à Σ e tais que, em $\lambda = 0$, as soluções correspondentes coincidam com $\varphi(\cdot, \xi_0, 0)$, isto é, $x_0 = y_0 = \varphi(\cdot, \xi_0, 0)$. Uma maneira de obtermos famílias com estas propriedades é fixar dois pontos ξ_1 e ξ_2 na órbita correspondente à solução não perturbada e, para cada λ , a i -ésima família consistindo das soluções de (2.10), parametrizadas por λ , que passam por ξ_i , ou seja, $F_i = \{\varphi(\cdot, \xi_i, \lambda); \lambda \in \mathbb{R}^n\}$, $i = 1, 2$.

A integral de Melnikov é uma ferramenta para obter informações sobre a taxa de separação entre essas duas famílias de soluções. Sejam $\rho^1, \rho^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves com $\rho^i(0) = 0$ e $\rho^i(\lambda_0)$ sendo o tempo gasto por ψ , para sair de ξ_0 e interceptar a órbita da i -ésima família, correspondente a solução de (2.10) com $\lambda = \lambda_0$. Denotemos por

$$\gamma^i(\cdot, \lambda) = \varphi(\cdot, \psi(\rho^i(\lambda), \xi_0), \lambda), \quad i = 1, 2,$$

tais famílias e observemos que $\gamma^i(\cdot, 0) = \varphi(\cdot, \xi_0, 0)$. Logo a solução não perturbada (em $\lambda = 0$) faz parte das duas famílias. Além disso, $\gamma^i(0, \lambda) = \psi(\rho^i(\lambda), \xi_0)$, donde cada γ^i tem valor inicial na seção transversal Σ .

Definimos a *função separadora* $sep : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} sep(\lambda) &= \langle \psi(\rho^1(\lambda), \xi_0) - \psi(\rho^2(\lambda), \xi_0), f^\perp(\xi_0) \rangle \\ &= f(\xi_0, 0) \wedge [\psi(\rho^1(\lambda), \xi_0) - \psi(\rho^2(\lambda), \xi_0)], \\ &= f(\xi_0, 0) \wedge [\gamma^1(0, \lambda) - \gamma^2(0, \lambda)] \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota o produto interno usual e $(a, b) \wedge (c, d) = \langle (-d, c), (a, b) \rangle$.

Observemos que $sep(0) = 0$. Além disso, pela unicidade das soluções do problema de valor inicial, temos que, $sep(\lambda) = 0$ se, e somente se, $\gamma^1(\cdot, \lambda) = \gamma^2(\cdot, \lambda)$.

2.6.1 Conexões Entre Selas

Sejam $p_0, q_0 \in \mathbb{R}^2$ duas selas hiperbólicas para o sistema (2.11). Suponha que exista uma órbita para o sistema (2.11) conectando p_0 à q_0 , isto é, uma órbita cujo conjunto α -limite é $\{p_0\}$ e o conjunto Ω -limite é $\{q_0\}$. Neste caso dizemos que a órbita sai de p_0 e chega em q_0 . Observemos que a única maneira de isto acontecer é quando a variedade instável de p_0 intercepta a variedade estável de q_0 (ou vice-versa). Seja ξ_0 um ponto regular dessa órbita. Pelo Teorema da Função Implícita, para $|\lambda|$ suficientemente pequena, existem selas hiperbólicas para o sistema (2.10), denotadas por $p_\lambda, q_\lambda \in \mathbb{R}^2$, satisfazendo $|p_\lambda - p_0|, |q_\lambda - q_0| = O(\lambda)$, quando $|\lambda| \rightarrow 0$.

Uma questão importante é saber se ainda existe uma órbita do sistema (2.10) conectando a variedade instável de p_λ à variedade estável de q_λ , ou se pelo menos estas variedades estão próximas.

Sejam $\gamma^1(\cdot, \lambda)$ e $\gamma^2(\cdot, \lambda)$ as soluções de (2.10) contidas em $W^i(p_\lambda)$ e $W^e(q_\lambda)$ respectivamente.

Como antes, temos duas famílias de soluções parametrizadas por λ . Observemos que existe uma órbita conectando p_λ à q_λ se, e somente se, $sep(\lambda) = 0$.

O resultado a seguir fornece uma expressão para calcular a taxa de separação entre $\gamma^1(\cdot, \lambda)$ e $\gamma^2(\cdot, \lambda)$. A integral que aparece na expressão é conhecida na literatura como integral de Melnikov. A demonstração deste resultado pode ser conferida em [Chicone].

Teorema 2.10 *Sob as hipóteses consideradas nesta seção, temos que*

$$\frac{\partial sep}{\partial \lambda_j}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \int_0^t \operatorname{div} f(\varphi(s, \xi_0)) ds \right] f(\varphi(t, \xi_0)) \wedge \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(\varphi(t, \xi_0)) dt, \quad (2.12)$$

onde $f(\varphi(s, \xi_0)) = f(\varphi(s, \xi_0, 0), 0)$.

Um problema análogo ocorre quando q_0 deixa de ser um ponto de equilíbrio hiperbólico. Por exemplo, suponha que a matriz jacobiana do campo em q_0 tenha dois autovalores, um com parte real nula e outro com parte real negativa. Neste caso ainda temos uma variedade estável tangente à q_0 e novamente podemos ter uma órbita conectando p_0 à q_0 . Novamente uma tal órbita só existe quando a variedade estável de q_0 intercepta a variedade instável de p_0 . A expressão para calcular a taxa de separação entre as órbitas, neste caso, tem um termo adicional, como afirma o próximo resultado provado em [Schecter].

Teorema 2.11 *Sob as hipóteses consideradas nesta seção, temos que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial sep}{\partial \lambda_j}(0) &= \frac{\partial q_0}{\partial \lambda_j}(0) \wedge \lim_{r \rightarrow \infty} f(\varphi(r, \xi_0)) \exp \left[- \int_0^r \operatorname{div} f(\varphi(s, \xi_0)) ds \right] + \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \int_0^t \operatorname{div} f(\varphi(s, \xi_0)) ds \right] f(\varphi(t, \xi_0)) \wedge \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(\varphi(t, \xi_0)) dt, \end{aligned}$$

onde $f(\varphi(s, \xi_0)) = f(\varphi(s, \xi_0, 0), 0)$.

Observemos que se o ponto de equilíbrio q_0 independe da variação do parâmetro λ_j , então a expressão do Teorema 2.11 se reduz a do Teorema 2.10.

Capítulo 3

Ondas Viajantes

Neste capítulo, estudaremos um tipo especial de solução de equações diferenciais parciais. Trata-se das soluções do tipo onda viajante, que aparecem em diversos problemas da matemática aplicada. Geometricamente, ondas viajantes são ondas que se movem à uma velocidade constante e mantendo o perfil. A Figura 3.1 ilustra alguns tipos de ondas viajantes. Neste trabalho estaremos particularmente interessados em ondas viajantes do tipo (c), que são chamadas de *frentes* e ocorrem em problemas de combustão.

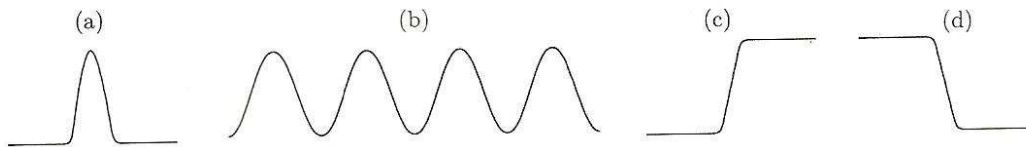


Figura 3.1: Alguns perfis de ondas viajantes.

Assim como no Capítulo 2, este capítulo tem o objetivo de apresentar mais ferramentas que serão usadas ao longo da dissertação. Assim, os resultados não serão demonstrados, todavia, podem ser conferidos na literatura. Para este fim, sugerimos [Sandstade], [Volpert] ou [Smoler].

3.1 Conceitos Iniciais

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, X um espaço de Banach de funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k , $D \subset X$ denso em X e P um polinômio de grau menor ou igual à k . Sendo $\partial_x : D \rightarrow X$ o operador diferencial na variável espacial e $N : Y \subset X \rightarrow X$ uma função qualquer, consideraremos neste capítulo, equações diferenciais parciais da forma

$$u_t = P(\partial_x)u + N(u). \quad (3.1)$$

Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^l , onde $l \leq k$ é o grau de P . Uma

solução de (3.1) da forma $u(x, t) = \phi(x - ct)$ se chama *onda viajante* de *velocidade de propagação* c e de *perfil* ϕ .

A mudança de coordenadas $\xi = x - ct$, chamada de *coordenadas móveis*, transforma a equação (3.1) em

$$u_t = P(\partial_\xi)u + c\partial_\xi u + N(u). \quad (3.2)$$

Assim, uma onda viajante ϕ é uma solução da EDO de ordem l

$$0 = P(\partial_\xi)u + c\partial_\xi u + N(u),$$

a qual é equivalente a um sistema de EDOs de primeira ordem de l equações da forma

$$w' = F(w, c), \quad (3.3)$$

onde $' = \frac{d}{d\xi}$, $w = (u, u', u'', \dots, u^{l-1})$ e $F : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$.

Em geral, estamos a procura de uma onda viajante sujeita a certas condições de contorno em $\pm\infty$, representando os estados de equilíbrio do sistema proveniente do modelo matemático. Assim, a onda viajante da EDP (3.1) corresponde à uma órbita do sistema de EDO's (3.3) conectando os dois estados de equilíbrio em questão.

3.2 Estabilidade de Ondas Viajantes

A estabilidade de uma onda viajante é a propriedade que fornece informações sobre o comportamento assintótico de soluções cujo dado inicial seja uma pequena perturbação da mesma.

Em equações homogêneas, translações de ondas viajantes ainda são ondas viajantes, ou seja, sendo $u(x, t) = \phi(x - ct)$ uma onda viajante, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, a função $w(x, t) = \phi(x + x_0 - ct)$ é uma onda viajante para a mesma EDP. Dada uma onda viajante ϕ , denotamos por $\bar{\phi}$ o conjunto de todas as ondas viajantes que são translações de ϕ .

Linearizando a equação (3.2) em torno de uma onda viajante ϕ , obtemos

$$u_t = P(\partial_\xi)u + c\partial_\xi u + N'(\phi)u = \mathcal{L}u,$$

onde $\mathcal{L} : D \rightarrow X$ é um operador linear fechado, densamente definido e dado por

$$\mathcal{L}u = P(\partial_\xi)u + c\partial_\xi u + N'(\phi)u. \quad (3.4)$$

Definição: Sejam X um espaço de normado complexo, $D(T) \subset X$ um subespaço de X e $T : D(T) \rightarrow X$ um operador linear. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ seja $T_\lambda = T - \lambda I$, onde $I : X \rightarrow X$ é o operador identidade. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *valor regular* de T quando $T_\lambda^{-1} : T_\lambda(D(T)) \rightarrow X$ existir, for limitado e densamente definido, isto é,

$\overline{T_\lambda(D(T))} = X$. O conjunto $\rho(T)$ de todos os valores regulares de T é chamado de conjunto *resolvente* de T . O conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ é chamado de *espectro* do operador T .

Dados $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $a \in \mathbb{R}$, considere a seção de números complexos

$$S(a, \phi) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}.$$

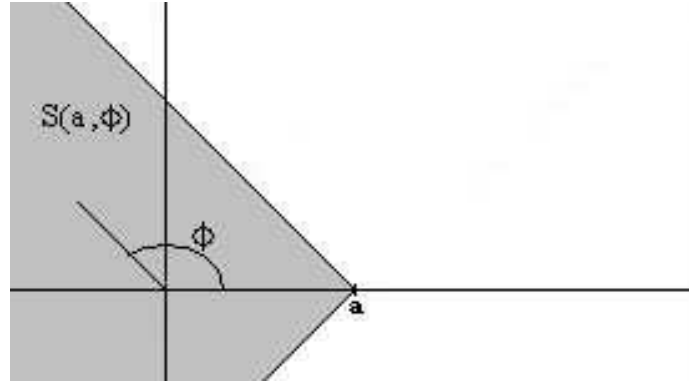


Figura 3.2: Seção $S(a, \phi)$.

Seja X um espaço normado complexo. Dizemos que um operador linear, fechado e densamente definido $T : D(T) \rightarrow X$ é *setorial*, quando existem $\phi \in (0, \pi/2)$, $a \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ tais que $\sigma(T) \subset S(a, \phi)$ e

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} - S(a, \phi).$$

Todo operador linear limitado $T : X \rightarrow X$ é setorial. Também é setorial o operador linear \mathcal{L} dado no Exemplo 1 deste Capítulo.

O leitor interessado em exemplos de operadores setoriais e propriedades destes pode consultar [Henry]. Para um aprofundamento em teoria espectral, sugerimos [Edmunds].

Neste trabalho, estaremos interessados na estabilidade de ondas viajantes sob perturbações em um espaço de Banach específico.

Considere o espaço de Banach $C_{unif}(\mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}); \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} u(\xi) = 0\}$, munido da norma

$$\|u\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|.$$

Observe que toda função $u \in C_{unif}(\mathbb{R})$, é uniformemente contínua e limitada.

Dado um espaço de Banach de funções reais $(X, \|\cdot\|)$, podemos introduzir um peso na norma do espaço e obter um novo espaço de Banach. Por exemplo, considerando uma função peso positiva $q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, podemos definir um novo espaço de Banach, $(X_q, \|\cdot\|_q)$, por $X_q = \{v; qv \in X\}$ com a norma $\|v\|_q = \|qv\|$. De fato, seja $(y_n) \subset X_q$ de Cauchy, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $n, m > n_0$ implica

$\|y_n - y_m\|_q < \epsilon$. Daí $n, m > n_0$ implica $\|qy_n - qy_m\| < \epsilon$, donde $(qy_n) \subset X$ é de Cauchy. Como X é um espaço de Banach, existe $y \in X$ tal que $qy_n \rightarrow y$ em X , ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $\|qy_n - y\| < \epsilon$. É claro que $y/q \in X_q$ e $n > n_0$ implica $\|y_n - y/q\|_q = \|(qy_n - y)/q\|_q = \|qy_n - y\| < \epsilon$. Logo $y_n \rightarrow y/q$ em X_q e assim X_q é um espaço de Banach.

Para cada $\alpha \geq 0$, considere o espaço de Banach C_α , obtido a partir de $C_{unif}(\mathbb{R})$, via a função peso $q_\alpha(\xi) = 1 + e^{\alpha\xi}$. Considere também os subespaços

$$C_{unif}^2(\mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}); u, u', u'' \in C_{unif}(\mathbb{R})\}$$

e

$$C_\alpha^2 = \{u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}); u, u', u'' \in C_\alpha\}.$$

Definição: Dizemos que uma onda viajante $u(x, t) = \phi(x - ct)$ é *estável com translação* na norma $\|\cdot\|_\alpha$, quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\theta \in C_{unif}(\mathbb{R})$, $\theta - \phi \in C_\alpha$ e $\|\theta - \phi\|_\alpha < \delta$, então a solução v da EDP, com condição inicial θ , existe para todo $t > 0$, é única, e satisfaz $v(\cdot, t) \in \{w \in C_{unif}(\mathbb{R}); w - \phi \in C_\alpha \text{ e } \|w - \varphi\|_\alpha < \epsilon \text{ para algum } \varphi \in \bar{\phi}\}$, $\forall t > 0$. Quando, além disso, existir $\varphi^* \in \bar{\phi}$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} v = \varphi^*$, dizemos que ϕ é *assintoticamente estável com translação*. Quando, além disso, existirem constantes $a, b > 0$, tais que $\|v(\cdot, t) - \varphi^*\|_\alpha \leq ae^{-bt}$, $\forall t > 0$, dizemos que ϕ é *exponencialmente assintoticamente estável com translação*. O termo "com translação" é removido dessas definições de estabilidade, quando pudermos tomar a própria ϕ , em vez de translações dela.

3.2.1 Equações Parabólicas

Passemos agora do caso mais geral para o de nosso interesse e considerando o sistema parabólico

$$u_t = Au_{xx} + f(u, u_x), \quad (3.5)$$

onde $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$, $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, A é uma matriz diagonal $n \times n$ com entradas reais e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua dada.

Suponha $u(x, t) = \phi(\xi)$ uma onda viajante para a equação (3.5), onde $\xi = x - ct$ e suponha que existam os limites

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = \phi_\pm.$$

Agora considere o operador $\mathcal{L}_\alpha : C_\alpha^2 \rightarrow C_\alpha$ obtido pela linearização da equação (3.5):

$$\mathcal{L}_\alpha u = Au_{\xi\xi} + (cI + D_2 f(\phi, \phi'))u_\xi + D_1 f(\phi, \phi')u,$$

onde $D_1 f(w_1, w_2) = f'(w_1, w_2)|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$ e $D_2 f(w_1, w_2) = f'(w_1, w_2)|_{\{0\} \times \mathbb{R}^n}$.

Neste contexto, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Se \mathcal{L}_α é um operador setorial e existe $\delta > 0$ tal que o espectro $\sigma(\mathcal{L}_\alpha) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) \leq -\delta\}$, então a onda viajante ϕ é exponencialmente assintoticamente estável com translação na norma $\|\cdot\|_\alpha$.*

Exemplo 1: Neste trabalho estudaremos a equação KPP

$$u_t = u_{xx} + u^p(1 - u), \quad p > 1.$$

No Capítulo 5, provaremos a existência de ondas viajante para esta equação. Além disso, nas coordenadas móveis $\xi = x - ct$, esta equação pode ser reescrita na forma

$$u_t = \mathcal{L}u + f(\phi_c, u),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : C_{unif}^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow C_{unif}(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto \mathcal{L}u = u_{\xi\xi} + cu_\xi + [p\phi_c^{p-1} - (p+1)\phi_c^p]u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(\phi_c, u) &= F(\phi_c + u) - F(\phi_c) - F'(\phi_c)u, \\ F(u) &= u^n(1 - u). \end{aligned}$$

e ϕ_c é a onda viajante de velocidade c .

Como o operador \mathcal{L} é setorial (ver [Henry]), Pelo Teorema 3.1, basta analisarmos onde se encontra o espectro do operador $\mathcal{L}_\alpha : C_\alpha \longrightarrow C_\alpha$ dado por $\mathcal{L}_\alpha v = \mathcal{L}v$, para obtermos resultados de estabilidade para a onda viajante ϕ_c .

3.2.2 Espectro de Operadores Diferenciais Parabólicos

O Teorema 3.1 revela a importância de determinar onde se encontra o espectro de certos operadores diferenciais. Esta seção é devotada ao estudo da localização do espectro de operadores diferenciais parabólicos.

Seja X um espaço de Banach. Dado um operador linear fechado e densamente definido $T : D \subset X \longrightarrow X$. Dizemos que um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ de T , tem *multiplicidade algébrica finita* quando

$$\dim \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker(T - \lambda I)^k < \infty.$$

Neste caso, este número, é por definição a multiplicidade algébrica de λ . Caso contrário, dizemos que λ tem multiplicidade algébrica infinita.

Denotamos por $\sigma_n(T)$, o conjunto de todos os autovalores de T , de multiplicidade algébrica finita. O conjunto $\sigma_{ess}(T) = \sigma(T) - \sigma_n(T)$ é chamado de *espectro essencial* de T .

Novamente, seja ϕ uma onda viajante para a equação (3.5) e consideremos o operador linear fechado e densamente definido $\mathcal{L} : C_{unif}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_{unif}(\mathbb{R})$ dado por

$$\mathcal{L}u = Au_{\xi\xi} + (c + D_2f(\phi, \phi'))u_{\xi} + d_1f(\phi, \phi')u.$$

Supondo que existam $a_{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} D_2f(\phi(\xi), \phi'(\xi))$ e $b_{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} D_1f(\phi(\xi), \phi'(\xi))$, definimos os operadores $\mathcal{L}_{\pm} : C_{unif}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_{unif}(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{L}_{\pm}u = Au_{\xi\xi} + (c + a_{\pm})u_{\xi} + b_{\pm}u.$$

Com respeito ao espectro dos operadores \mathcal{L}_{\pm} temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{L} : C_{unif}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_{unif}(\mathbb{R})$ dado por*

$$\mathcal{L}u = au'' + bu' + cu.$$

Então o espectro $\sigma(\mathcal{L})$ de \mathcal{L} consiste no gráfico da função

$$\lambda(t) = -at^2 + ibt + c, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2: Para cada $p > 1$ voltemos a considerar a equação KPP

$$u_t = u_{xx} + u^p(1 - u).$$

Provaremos no Capítulo 5 que existe $c^* > 0$, tal que esta equação possui solução do tipo onda viajante $u(x, t) = \phi(x - ct)$ se, e somente se, $c \geq c^*$. Além disso, neste caso, temos $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi(\xi) = 0$ e $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) = 1$.

Defina $\mathcal{L} : C_{unif}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_{unif}(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{L}v = v_{\xi\xi} + cv_{\xi} + [p\phi^{p-1} - (p+1)\phi^p]v.$$

Neste caso, temos $\mathcal{L}_+v = v_{\xi\xi} + cv_{\xi}$ e $\mathcal{L}_-v = v_{\xi\xi} + cv_{\xi} - v$. Pelo Teorema 3.2, temos que o espectro dos operadores \mathcal{L}_{\pm} são exatamente as imagens das funções $\lambda_+(t) = -t^2 + ict$ e $\lambda_-(t) = -t^2 + ict - 1$. A imagem destas funções são as parábolas S_{\pm} ilustradas na Figura 3.3.

A importância de se calcular o espectro dos operadores \mathcal{L}_{\pm} reside no seguinte resultado.

Teorema 3.3 (Lema de Weyl) *O conjunto $\sigma(\mathcal{L}_+) \cup \sigma(\mathcal{L}_-)$ divide \mathbb{C} em componentes, sendo que uma destas componentes, digamos Ω , satisfaz*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \Omega \quad e \quad \sigma_{ess} \cap \Omega = \emptyset.$$

Exemplo 3: Voltando ao Exemplo 2, pelo Teorema 3.3, temos que

$$\sup\{\operatorname{Re} \lambda; \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{L})\} \leq 0.$$

Uma vez que o Teorema 3.3 informa a localização de $\sigma_{ess}(\mathcal{L})$, resta-nos analisar a localização dos autovalores de multiplicidade algébrica finita.

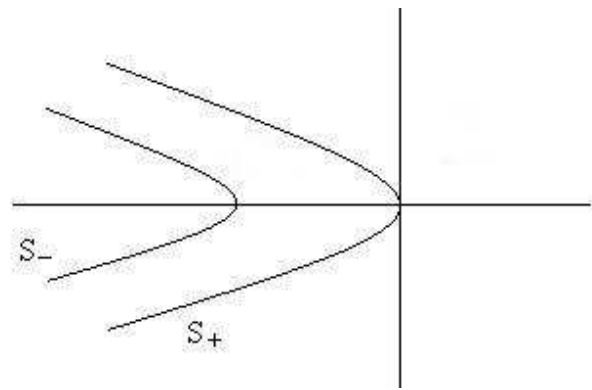


Figura 3.3: Parábolas S_+ e S_- .

Capítulo 4

Ondas Viajantes na Combustão In-situ

O método da combustão *in-situ* consiste em injetar oxigênio no reservatório fazendo com que parte do combustível presente entre em ignição. Uma pequena parte do óleo é queimada, gerando uma frente de temperatura, que se propaga pelo reservatório, aquecendo o óleo e promovendo seu deslocamento. Uma vez aquecido, o óleo tem sua viscosidade reduzida, o que favorece seu deslocamento e aumenta a eficiência dos métodos convencionais de recuperação secundária, como a injeção de água.

Neste capítulo, estudaremos um modelo matemático que governa a temperatura e concentração de óleo, em uma camada do reservatório, no processo da reação provocada pela combustão *in-situ*.

4.1 Modelagem Matemática

Nesta seção vamos trabalhar com equações de balanço de massa e de energia ambientadas em um meio poroso representando um reservatório petrolífero. Faremos algumas hipóteses, obtendo certas simplificações nas equações e, como resultado, um modelo matemático que descreve a temperatura e a concentração de óleo ao longo do reservatório.

Consideremos um meio poroso unidimensional, de comprimento l , saturado por óleo. Assim, sendo x a variável espacial e t a temporal, temos $0 < x < l$ e $t \geq 0$. A reação química nesta camada tem a seguinte forma:



Para obtermos as equações de balanço, assumiremos que o gás, a rocha e o óleo estão, localmente e durante todo tempo, em equilíbrio térmico. Além disso, a porosidade será constante e independente da concentração do óleo em toda a camada. Desconsideraremos a perda de calor para a formação.

Os subscritos g , r e c se referem respectivamente ao oxigênio injetado, a rocha e ao óleo no reservatório.

Denotaremos por:

- $T = T(x, t)$: a temperatura no ponto $x \in (0, l)$ no instante $t > 0$ (parametrizada de forma que $T = 0$ seja a temperatura de ignição);
- $\eta_c = \eta_c(x, t)$: a concentração de combustível;
- $Y = Y(x, t)$: fração mássica de oxigênio no estado gasoso;
- $v_g = v_g(x, t)$: velocidade do gás;
- $p = p(x, t)$: pressão;
- $\rho_g = \rho_g(T, p)$: densidade do gás;
- ρ_r : densidade da rocha;
- ϕ : porosidade;
- λ : condutividade térmica;
- c_g : capacidade calorífica do gás a pressão constante;
- c_r e c_c : calor específico da rocha e do óleo respectivamente;
- r : taxa de óleo consumido na reação química;
- m e m_g : coeficientes estequiométricos massa-peso do oxigênio e do gás respectivamente;
- Q_c : calor da reação;
- K : resistência de fluxo aparente na lei de Darcy.

Consideremos as seguintes equações:

Balanco de energia:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\phi\rho_g c_g T + (1 - \phi)\rho_r c_r T + \eta_c c_c T] = -\frac{\partial}{\partial x}[\rho_g c_g v_g T] + Q_c r + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (4.1)$$

Balanco de massa de combustível:

$$\frac{\partial \eta_c}{\partial t} = -r; \quad (4.2)$$

Balanco de massa do oxigênio:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\phi\rho_g Y] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho_g v_g Y] = -m r; \quad (4.3)$$

Balço de massa total de gás:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\phi\rho_g] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho_g v_g] = m_g r; \quad (4.4)$$

Lei de Darcy:

$$v_g = -K \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.5)$$

Uma versão da lei de Arrhenius nos dá

$$r = \begin{cases} A_c(Yp)^\alpha \eta_c e^{-E/RT} & , \text{ se } T > 0 \\ 0 & , \text{ se } T \leq 0, \end{cases}$$

onde A_c é a constante de Arrhenius, E é a energia de ativação, α é a ordem de taxa de reação gasosa e R é a constante universal dos gases.

Com o objetivo de trabalharmos com variáveis adimensionais, fazemos o seguinte ajuste:

$$x = \frac{x}{x^*}, \quad t = \frac{t}{t^*}, \quad v_i = \frac{t^* v_g}{x^*}, \quad T = \frac{T}{T^*}, \quad p = \frac{p}{p^*}, \quad \rho = \frac{\rho_g}{\rho_g^*}, \quad \eta = \frac{\eta_c}{\eta_c^*},$$

onde o "*" indica um valor de referência para a respectiva variável e η_c^o é a concentração de combustível inicial. Assim, $0 \leq \eta \leq 1$ é a fração de óleo queimado remanescente.

Com esses ajustes o sistema (4.1)-(4.5) se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[(\phi\rho_g^* \rho c_g + (1-\phi)\rho_r c_r + \eta_c^o \eta c_c)T] &= -\frac{\partial}{\partial x}[\rho_g^* \rho c_g v T] + \frac{t^* \lambda}{(x^*)^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{t^* \eta_c^o A_c Q_c (p^*)^\alpha}{T^*} h(T, \eta, Y, p) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -t^* A_c (p^*)^\alpha h(T, \eta, Y, p) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\phi\rho_g^* \rho Y] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho_g^* \rho v Y] = -t^* m \eta_c^o A_c (p^*)^\alpha h(T, \eta, Y, p) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\phi\rho_g^* \rho] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho_g^* \rho v] = t^* m_g \eta_c^o A_c (p^*)^\alpha h(T, \eta, Y, p) \quad (4.9)$$

$$v = -\frac{t^* p^* K}{(x^*)^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.10)$$

onde

$$h(T, \eta, Y, p) = \begin{cases} (Yp)^\alpha \eta e^{-E/RT^* T} & , \text{ se } T > 0 \\ 0 & , \text{ se } T \leq 0. \end{cases}$$

Dividindo (4.6) por $(1 - \phi)\rho_r c_r$, (4.8) e (4.9) por ρ_g^* , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}[(a + b\eta)T] + \frac{\partial}{\partial x}[cvT] &= dh(T, \eta, Y, p) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -Ah(T, \eta, Y, p) \\
\frac{\partial}{\partial t}[\phi\rho Y] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho v Y] &= -Bh(T, \eta, Y, p) \\
\frac{\partial}{\partial t}[\phi\rho] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho v] &= Dh(T, \eta, Y, p) \\
v &= -K \frac{\partial p}{\partial x},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\phi\rho_g^*\rho c_g + (1 - \phi)\rho_r c_r}{(1 - \phi)\rho_r c_r}, & b &= \frac{\eta_c^o c_c}{(1 - \phi)\rho_r c_r}, & c &= \frac{\rho_g^*\rho c_g}{(1 - \phi)\rho_r c_r}, \\
A &= t^* A_c (p^*)^\alpha, & d &= \frac{A\eta_c^o Q_c}{T^*(1 - \phi)\rho_r c_r}, & \lambda &= \frac{t^* \lambda}{(x^*)^2 (1 - \phi)\rho_r c_r}, \\
B &= \frac{mA\eta_c^o}{\rho_g^*}, & D &= \frac{m_g A\eta_c^o}{\rho_g^o}, & K &= \frac{t^* p^* K}{(x^*)^2}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

As quantidades em (4.12) dependem das propriedades físicas do reservatório e, salvo D , são todas não-negativas.

Neste trabalho estudaremos uma versão simplificada do sistema (4.11). Para obtermos um sistema mais simples, vamos supor que os fluidos são incompressíveis e negligenciar as variações de volume e pressão durante as reações químicas. Além disso, vamos supor que ρ e $(Yp)^\alpha$ são constantes e $m_g = 0$, donde $D = 0$. Com a injeção de oxigênio em $x = 0$, vamos supor que todo o combustível é queimado e a frente de reação se propaga para a direita.

Como $D = 0$, e ϕ e ρ são constantes, segue que $\partial v / \partial x = 0$, isto é, v depende apenas de t .

Com estas simplificações, denotando por u a temperatura e y a concentração de combustível no reservatório, obtemos um modelo que governa a temperatura e a concentração de óleo em uma camada do reservatório:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}[(a + by)u] + \frac{\partial}{\partial x}(cu) &= df(u, y) + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -Af(u, y), \end{cases} \tag{4.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
f(v, z) &= \begin{cases} ze^{-E/RT^*v} & \text{se } v > 0 \\ 0 & \text{se } v \leq 0, \end{cases} \\
A &= t^* A_c (p^* Y p)^\alpha
\end{aligned}$$

e os demais parâmetros estão definidos em (4.12).

4.1.1 Ondas Viajantes

Considere o conjunto

$$G = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}); \text{ existe } \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f(\xi) \text{ e } \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f'(\xi) = 0. \right\}$$

Uma *onda viajante* para o sistema (4.13) com velocidade σ , conectando o estado $w_0 = (u_0, y_0)$ (à esquerda) ao estado $w_1 = (u_1, y_1)$ (à direita) é uma solução $w = (u, y)$, onde $u(x, t) = v(x - \sigma t)$, $y(x, t) = z(x - \sigma t)$ e $(v, z) \in G^2$, satisfazendo

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} z(\xi) = z_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} z(\xi) = z_1 \quad (4.14)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) = v_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} v(\xi) = v_1 \quad (4.15)$$

Para o nosso problema específico, desejamos que a onda viajante, conecte um estado queimado à um estado não queimado. Logo tomamos $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$. Além disso, estamos supondo que o reservatório esteja em equilíbrio termodinâmico e que sua temperatura inicial seja igual a temperatura de ignição $T = 0$. Portanto adicionamos a condição $u(x, t) = 0$, $\forall t \leq 0$, fazendo com que $v_1 = 0$.

O problema de encontrar uma onda viajante para o sistema (4.13) conectando w_0 à w_1 pode ser transferido, via uma mudança de variáveis, ao problema de resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Teorema 4.1 *A função $w(\xi) = (v(\xi), z(\xi))$, onde $\xi = x - ct$, é uma onda viajante para o sistema (4.13) com velocidade σ , conectando $w_e = (v_0, 0)$ à $w_d = (0, 1)$ se, e somente se, w é uma solução em G^2 do seguinte sistema de EDO's*

$$\begin{cases} v' &= \frac{1}{\lambda} \left[-\sigma \left(av + bvz + \frac{d}{A}z - \frac{d}{A} \right) + cv \right] \\ z' &= \frac{A}{\sigma} f(v, z) \end{cases}, \quad (4.16)$$

sujeito às seguintes condições de contorno

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = w_e \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = w_d. \quad (4.17)$$

Prova: Suponha que w seja uma onda viajante de (4.13) conectando w_e e w_d . A condição de contorno (4.17) é automaticamente satisfeita. Resta-nos mostrar que w é solução do sistema (4.16). Com efeito, substituindo w em (4.13), obtemos

$$-\sigma \frac{d}{d\xi} [(a + bz)v] + \frac{d}{d\xi} [cv] = df(v, z) + \lambda \frac{d^2 v}{d\xi^2} \quad (4.18)$$

$$\sigma \frac{dz}{d\xi} = Af(v, z). \quad (4.19)$$

Integrando (4.19) de ξ à ∞ , obtemos

$$\sigma - \sigma z(\xi) = \sigma [\lim_{\xi \rightarrow \infty} z(\xi) - z(\xi)] = \sigma \int_{\xi}^{\infty} z'(r) dr = A \int_{\xi}^{\infty} f(v(r), z(r)) dr.$$

Daí a integral

$$\int_{\xi}^{\infty} f(v(r), z(r)) dr = \frac{\sigma}{A}(1 - z(\xi)),$$

converge.

Analogamente, integrando (4.18) de ξ à ∞ , obtemos

$$\lambda v' = -\sigma(a + bz)v + cv + d \int_{\xi}^{\infty} f(v(r), z(r)) dr = -\sigma(a + bz)v + cv + d \frac{\sigma}{A}(1 - z(\xi))$$

Daí e de (4.19), concluímos que w é solução do sistema (4.16).

A recíproca é obtida simplesmente derivando as funções $u(x, t) = v(x - \sigma t)$ e $y(x, t) = z(x - \sigma t)$. \square

Portanto, se resolvermos o problema (4.16)-(4.17), basta tomar $u(x, t) = v(x - \sigma t)$ e $y(x, t) = z(x - \sigma t)$, que $w = (u, y)$ será uma solução do tipo onda viajante para o problema (4.13). Consequentemente, a questão da existência de uma onda viajante de velocidade σ é equivalente à questão da existência de uma órbita do sistema de EDO's (4.16) conectando w_e à w_d de forma assintótica.

4.2 Retrato de Fase

Nesta seção concentraremos nossos esforços em estudar o retrato de fase do sistema (4.16), o qual podemos reescrever na forma

$$w' = (v', z') = F(w, \sigma) = (f_1(w, \sigma), f_2(w, \sigma)).$$

A quantidade z só tem significado físico, no intervalo $[0, 1]$. No entanto, consideraremos todas as soluções com $z \geq 0$ para obtermos um retrato de fase mais claro.

Se $v, z > 0$, então de (4.16), segue que $z' > 0$. Se $z = 0$, então $z' = 0$, isto nos leva a inferir que o eixo v seja invariante pelo fluxo. Com efeito, note que definindo $\alpha = (c - \sigma a)/\lambda$, $\beta = \sigma d/(\lambda A)$ e $v(\xi) = ke^{\alpha \xi}$, temos que $w(\xi) = (v(\xi), 0)$ é solução de (4.16) para qualquer constante k . Por unicidade de soluções, concluímos que o eixo v é invariante pelo fluxo. Por outro lado, se $v \leq 0$, então $z' = 0$, donde as órbitas nesta região são horizontais.

Como a densidade da rocha é muito maior que a do gás e a porosidade de uma rocha reservatório, em geral, não supera 20%, segue que c/a é um número estritamente positivo e próximo de zero. De agora em diante vamos supor $\sigma > c/a$,

donde, para $z \geq 0$, v' é positivo, nulo, ou negativo, conforme w está abaixo, sobre, ou acima da curva

$$v = \frac{\sigma d(1-z)}{A(\sigma a + \sigma b z - c)}, \quad (4.20)$$

respectivamente. Observemos que esta curva é invariante pelo fluxo para $v \leq 0$, pois neste caso todos os pontos são singularidades. Além disso, a curva corta o eixo v no ponto $v_e(\sigma) = \frac{\sigma d}{A(\sigma a - c)} > 0$. Portanto, as singularidades do campo F são $\{(v_e(\sigma), 0)\} \cup \{(v, z) : z \geq 1 \text{ e } v = \frac{\sigma d(1-z)}{A(\sigma a + \sigma b z - c)}\}$.

Para resolver o sistema (4.16), precisamos determinar o valor de v_1 em (4.15). Ora, o único ponto de equilíbrio deste sistema no eixo v é $(v_e(\sigma), 0)$ que, como veremos adiante, é uma sela, cuja variedade estável é o eixo v e a variedade instável uma curva transversal ao eixo v . Consequentemente a única órbita do retrato de fase que pode sair de algum ponto do eixo v (no sentido de tender a algum ponto do eixo v quando $t \rightarrow -\infty$) e tem chance de chegar à w_d (no sentido de tender w_d quando $t \rightarrow \infty$), e assim corresponder a uma solução do problema (4.16)-(4.17), é a órbita contida na variedade instável de $(v_e(\sigma), 0)$. Portanto, estaremos interessados em soluções em G^2 do sistema de EDO's

$$\begin{cases} v' &= \frac{1}{\lambda} \left[-\sigma \left(av + bvz + \frac{d}{A}z - \frac{d}{A} \right) + cv \right] \\ z' &= \frac{A}{\sigma} f(v, z) \end{cases}, \quad (4.21)$$

sujeito às condições de contorno

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = w_e = (v_e(\sigma), 0) \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = w_d = (0, 1).$$

Reiterando: soluções de (4.21), correspondem a ondas viajantes conectando o estado queimado w_e (à esquerda) ao estado não queimado w_d (à direita). Órbitas com este comportamento, conectando dois pontos de equilíbrio, são conhecidas na literatura como *órbitas heteroclínicas*.

É importante notar que se $\sigma \leq c/a$, então $v_e \leq 0$, donde $z' = 0$, isto é, as órbitas são horizontais, tornando a igualdade $\lim_{\xi \rightarrow \infty} z(\xi) = 0$ impossível. Logo não existem ondas viajantes conectando w_e à w_d neste caso.

O cálculo da derivada do campo F nos pontos de equilíbrio nos dá

$$F'(w_e) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F'(w_d) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\sigma a - c}{\lambda}, & a_{22} &= \frac{A}{\sigma} f_y(w_e), & a_{12} &= \frac{\sigma}{\lambda} (bv_e(\sigma) + d/A), \\ b_{11} &= -\frac{\sigma(a+b) - c}{\lambda} & \text{e} & & b_{12} &= -\frac{\sigma d}{\lambda A} \end{aligned}$$

Os autovalores de $F'(w_e)$ são $a_{11} < 0$ e $a_{22} > 0$, com respectivos autovetores $e_1 = (1, 0)$ e $C = (a_{12}, a_{22} - a_{11})$. Portanto w_e é um ponto de equilíbrio hiperbólico

que consiste de uma sela. A variedade estável W_e^e desta singularidade é tangente, em w_e , ao eixo v . Como o eixo v é invariante pelo fluxo, para que não haja uma órbita no eixo v perturbando o comportamento das órbitas próximas da sela w_e , o eixo v deve, necessariamente, coincidir com W_e^e . Quanto a variedade instável, W_e^i , esta é tangente, em w_e , ao vetor $C = (a_{12}, a_{22} - a_{11})$.

Os autovalores de $F'(w_d)$ são $b_{11} < 0$ e 0 , com respectivos autovetores $e_1 = (1, 0)$ e $B = (-b_{12}, b_{11})$. Portanto w_d é um ponto de equilíbrio não-hiperbólico. Aqui, o eixo v é tangente, em w_d , à sua variedade estável W_d^e , enquanto o vetor $B = (-b_{12}, b_{11})$ é tangente, em w_d , à sua variedade central W_d^c . Para $v \leq 0$, a curva de equilíbrio (4.20) é invariante pelo fluxo. Como W_d^c passa por w_d , tangente à um vetor com direção B , se W_d^c escapasse da curva (4.20), como as órbitas no semi-plano $v \leq 0$ são horizontais, W_d^c deixaria de ser suave. Portanto, para $v \leq 0$, a variedade central W_d^c é exatamente a curva (4.20). Para $v > 0$, a variedade central consiste de uma órbita, pois se esta escapar de uma órbita, deverá conter todas as órbitas que interceptar fazendo com que deixe de ser uma curva. Numa vizinhança de w_d as órbitas por pontos no eixo z , acima de w_d , são "quase" horizontais. Logo, nesta vizinhança, a órbita W_d^c deve estar abaixo de w_d . Como $z' > 0$ para $v > 0$, esta órbita se dirige à w_d . Pelo comportamento da variedade central, as órbitas por pontos (v, z) próximos de w_d , abaixo da variedade estável e tais que $v > 0$, se dirigem à w_d tangentes à B .

Analogamente, podemos ver que a matriz jacobiana calculada sobre os demais pontos de equilíbrio tem um autovalor nulo e outro negativo. Sendo a variedade estável uma reta horizontal para $v \leq 0$ e a variedade central a mesma de anteriormente. Daí, as órbitas por pontos próximos de w_d e acima da variedade estável, incidirão sobre as órbitas (que são variedades estáveis) de algum ponto de equilíbrio da curva (4.20) com $v < 0$. Veja a Figura 4.1.

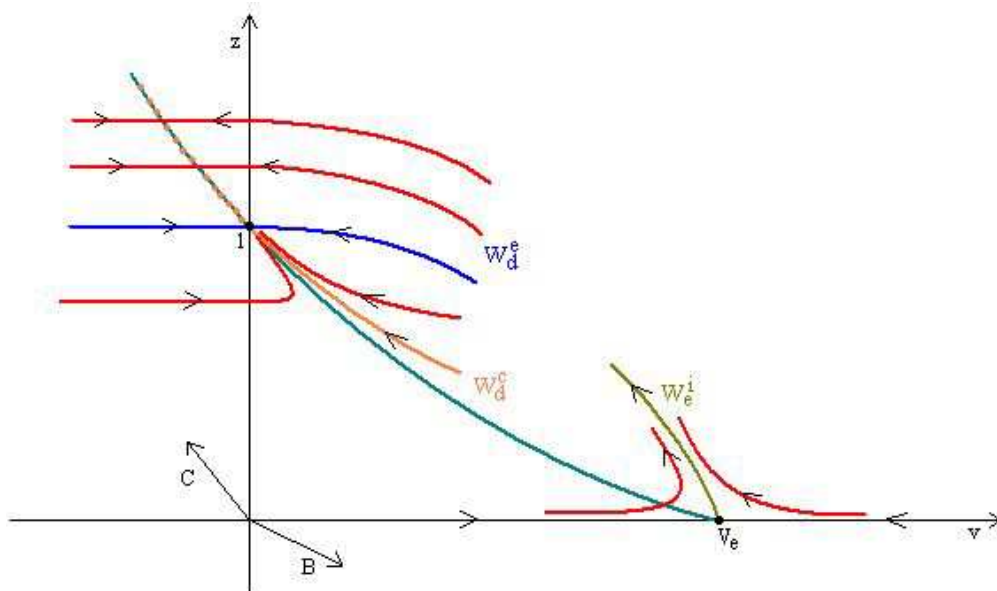


Figura 4.1: Retrato de Fase do sistema (4.21).

4.3 Existência de Soluções

Uma órbita de uma EDO conectando um ponto de equilíbrio hiperbólico w_e à um ponto de equilíbrio não-hiperbólico w_d é chamada *forte*, quando está totalmente contida na variedade estável de w_d . Se esta órbita corresponde a uma onda viajante de uma EDP dizemos que a onda viajante também é forte.

Como w_e é uma sela, W_e^i é a única órbita do retrato de fase que sai de w_e e tem chance de chegar à w_d . Se a variedade instável W_e^i interceptar a variedade estável W_d^e , a união destes conjuntos deve constituir uma única órbita forte que conecta w_e à w_d . Se W_e^i se aproximar de w_d pela região acima de W_d^e , então interceptará uma órbita (e portanto será esta órbita) que não passa por w_d . Portanto, neste caso, o sistema (4.21) não possui solução. Se W_e^i se aproximar de w_d pela região abaixo de W_d^e , então interceptará uma órbita (que não é W_d^e) que tende à w_d pela variedade central W_d^c e assim será uma órbita, não forte, conectando w_e à w_d . A seguir provaremos que isto ocorre conforme σ é pequeno ou grande respectivamente.

Imaginemos que σ seja suficientemente grande, digamos $\sigma = 1/\epsilon$, com ϵ pequeno. A mudança de variáveis $\xi = \epsilon\eta$, transforma o sistema (4.21) em

$$\begin{cases} v' &= \frac{1}{\lambda} \left[- \left(av + bvz + \frac{d}{A}z - \frac{d}{A} \right) + \epsilon cv \right] \\ z' &= \epsilon^2 Af(v, z) \end{cases} \quad (4.22)$$

Para $\epsilon = 0$ o sistema (4.22) tem uma curva de equilíbrio $v = \frac{d(1-z)}{A(a+bz)}$, que inclui um segmento no primeiro quadrante ligando $(\frac{d}{aA}, 0)$ à $(0, 1)$. Seja M_0 este segmento. Observemos que $(d/(aA), 0)$ corresponde exatamente ao ponto de equilíbrio w_e , com $\sigma = \infty$. Neste caso os autovalores da derivada do campo em qualquer ponto (v, z) são 0 e $-(a + bz)/\lambda$. Portanto M_0 é constituído por singularidades normalmente hiperbólicas (os autovalores não-nulos são negativos). Pelo Primeiro Teorema da Variedade Invariante de Fenichel (Teorema 2.8), para ϵ suficientemente pequeno, existe uma variedade M_ϵ difeomorfa à M_0 (portanto uma curva que é um conjunto fechado) suficientemente próxima de M_0 e que é localmente invariante pelo fluxo. Sendo um conjunto fechado e localmente invariante segue que M_ϵ é um conjunto invariante pelo fluxo. Note que para ϵ suficientemente pequeno, o ponto de equilíbrio w_e está suficientemente próximo de $(d/(aA), 0)$, portanto podemos considerar que uma das extremidades da curva M_ϵ está próxima de w_e . Assim, levando em consideração o comportamento das órbitas em torno de uma sela, concluímos que M_ϵ deverá coincidir com a variedade instável W_e^i , pois caso contrário interceptará órbitas que escaparão de M_ϵ , o que contradiz o fato de M_0 ser invariante. Analogamente, a outra extremidade da curva M_ϵ deve estar próxima de w_d . Como M_ϵ está suficientemente próxima de M_0 , deve se aproximar de w_d , por baixo de W_d^e e acima de W_d^c , pois caso contrário novamente chegaríamos a contradições com o fato de M_ϵ ser invariante. Como W_e^i não pode escapar de M_ϵ , segue que W_e^i é uma órbita conectando w_e à w_d . Portanto, para σ grande, o sistema (4.21) possui solução do tipo onda viajante que não é forte. Além disso, neste caso a órbita correspondente a esta solução se encontra na região abaixo da variedade estável W_e^e .

Analisemos agora o que acontece se σ for pequeno, digamos $\sigma = \frac{\epsilon}{a} + \tau$, com $\tau > 0$

pequeno.

A mudança de variáveis $v = 1/s$ transforma o sistema (4.21), na região $v > 0$, em

$$\begin{cases} s' &= \frac{s}{\lambda} \left[\left(\frac{c}{a} + \tau \right) \cdot \left(a + bz + \frac{d}{A}(z-1)s \right) - c \right] \\ z' &= \frac{Aa}{c+a\tau} z e^{Es/(RT^*)} \end{cases} \quad (4.23)$$

Os pontos de equilíbrio de (4.21) com $v \leq 0$, não são visíveis neste sistema, em particular, w_d é deslocado para $s = \infty$.

Pondo $\tau = 0$ o sistema (4.23) toma a forma

$$\begin{aligned} s' &= \frac{c}{a\lambda} s \left(bz + \frac{d}{A}(z-1)s \right) \\ z' &= \frac{Aa}{c} z e^{-Es/(RT^*)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

O único ponto de equilíbrio deste sistema é a origem $P_0 = (0, 0)$. Os autovalores da matriz jacobiana deste campo são 0 e $Aa/c > 0$ com respectivos autovetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Daí a variedade central de P_0 é tangente ao eixo s e a variedade instável tangente ao eixo z . Se $z = 0$, então $z' = 0$ e novamente podemos concluir que o eixo s é invariante pelo fluxo e assim a variedade central de P_0 é o próprio eixo s . Analogamente, se $s = 0$, então $s' = 0$, donde o eixo z é invariante pelo fluxo e assim a variedade instável de P_0 é o eixo z .

Se $\tau > 0$ o sistema (4.23) tem dois pontos de equilíbrio, $P = (0, 0)$ e $Q = (q, 0) = (1/v_e(\sigma), 0)$. Neste caso, os autovalores da matriz jacobiana em P são $a\tau/\lambda > 0$ e $Aa^2/(c + a\tau) > 0$, logo P é uma fonte. Os autovalores da matriz jacobiana em Q são $-a\tau/\lambda < 0$ e $aAe^{-Eq/RT^*}/\sigma > 0$, donde Q é uma sela. Observemos que esta sela é exatamente a mesma sela do sistema (4.21). Além disso, a variedade estável desta sela continua sendo tangente ao eixo s (pois $(0, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor negativo) e portanto consiste no próprio eixo s .

O conjunto $M_0 = \{P_0\}$ satisfaz as hipóteses do Segundo Teorema da Variedade Invariante de Fenichel (Teorema 2.9). Neste caso, necessariamente $M_\tau = \{Q\}$, pois a outra possibilidade, $M_\tau = \{P\}$, é descartada já que P é uma fonte, donde $W_e^i(M_\tau) = \mathbb{R}^2$ teria dimensão 2. Logo, $W_e^i(Q)$ está suficientemente próxima de qualquer parte compacta do eixo z (ou seja, $W^i(P_0)$), desde que $\tau > 0$ seja suficientemente pequeno. Assim, $(s, z) \in W^i(Q)$ implica s suficientemente pequeno. Logo $(v, z) \in W_e^i$ implica v suficientemente grande. Portanto, neste caso, W_e^i não conecta w_e à w_d e assim o problema não possui solução.

Concluimos que, W_e^i está abaixo ou acima de W_d^e conforme $\sigma > c/a$ é suficientemente grande ou pequeno. Pela continuidade das soluções em relação aos parâmetros, deve existir um valor de $\sigma = \sigma^*$ para o qual W_e^i intercepta (e portanto coincide com) W_d^e provando a existência de uma órbita correspondendo a uma onda viajante forte, de velocidade σ^* , conectando w_e à w_d .

Concluiremos nossa discussão sobre existência de soluções para o sistema (4.21),

provando a unicidade do valor de σ^* para o qual a órbita é forte. Para tanto, utilizaremos as ferramentas apresentadas na Seção 2.6.

Seja $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função separadora entre W_d^e e W_e^i , que é positiva quando W_d^e estiver abaixo de W_e^i e que é negativa quando W_d^e estiver acima de W_e^i . Temos que $S(\sigma^*) = 0$ e desejamos mostrar que existe apenas um σ^* que anula S .

Seja $w_0(\xi) = (v_0(\xi), z_0(\xi))$ uma solução do sistema (4.21) correspondendo à uma onda viajante forte de velocidade σ_0 . Temos $S(\sigma_0) = 0$. Defina

$$H(\xi) = \exp \left(- \int_0^\xi \operatorname{div} F(w_0(s)) ds \right).$$

Como a singularidade não-hiperbólica w_d é sempre constante quando σ varia (na notação do Teorema 2.11, temos $\frac{\partial q_0}{\partial \lambda_j}(0) = 0$), podemos usar o Teorema 2.11, obtendo que

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma}(\sigma_0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi) [(v'_0(\xi), z'_0(\xi)) \wedge \frac{\partial F}{\partial \sigma}(w_0(\xi))] d\xi. \quad (4.25)$$

Qualquer conexão $w = (v, z)$ de w_e à w_d , permanece no primeiro quadrante do plano $v \times z$ e acima da curva (4.20). Logo $z' < 0$ e $v' < 0$ sobre qualquer conexão $w = (v, z)$ de w_e à w_d . Além disso,

$$v > \frac{\sigma d(1-z)}{A(\sigma a + \sigma b z - c)} > \frac{\sigma d(1-z)}{A(\sigma a + \sigma b z)} = \frac{d(1-z)}{A(a + b z)}.$$

Daí

$$\begin{aligned} (v'_0(\xi), z'_0(\xi)) \wedge \frac{\partial F}{\partial \sigma}(w_0(\xi)) d\xi &= \langle (-z'(\xi), v'(\xi)), \frac{\partial F}{\partial \sigma}(w(\xi)) \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[av + bvz + \frac{d}{A}(z-1) \right] - v' \frac{A}{\sigma^2} f(v, z) > 0. \end{aligned}$$

Daí e de (4.25), sendo a função exponencial sempre positiva, concluímos que $\frac{\partial S}{\partial \sigma}(\sigma_0) > 0$. Assim, em cada σ_0 tal que $S(\sigma_0) = 0$, a função separadora é crescente em uma vizinhança de σ_0 . Como S é contínua, só pode haver, no máximo, um ponto σ tal que $S(\sigma) = 0$. Portanto $\sigma_0 = \sigma^*$ é o único valor de velocidade para o qual a onda viajante é forte.

Assim, acabamos de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.2 *Existe um único $\sigma^* \in (\frac{c}{a}, \infty)$ tal que o sistema (4.21) possui órbita conectando w_e à w_d se, e somente se, $\sigma \in [\sigma^*, \infty)$. Além disso a órbita é forte se, e somente se, $\sigma = \sigma^*$.*

Capítulo 5

A Equação KPP

Neste capítulo estudaremos uma equação do tipo reação-difusão conhecida na literatura como equação KPP:

$$u_t = u_{xx} + u^p(1 - u), \quad p > 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0. \quad (5.1)$$

Esta equação aparece nos problemas de reações químicas autocatalíticas isotérmicas. Como veremos neste Capítulo, esta equação tem propriedades muito próximas das do sistema (4.13), proveniente do modelo de combustão em meios porosos. Em particular veremos que existem soluções do tipo onda viajante para uma faixa de valores de velocidades, sendo que somente a solução correspondente ao menor destes valores é forte. Encerramos o Capítulo com um estudo da estabilidade das ondas viajantes não fortes, sob perturbações em certos espaço de Banach com peso. Esperamos que as técnicas aqui estudadas sejam úteis para o estudo da estabilidade das ondas não fortes do sistema (4.13).

5.1 Existência de Soluções

Nesta seção estaremos interessados em provar a existência de soluções do tipo onda viajante para a equação (5.1), conectando os estados de equilíbrio $u = 1$ à $u = 0$.

Inicialmente note que a mudança de variáveis $\xi = x - ct$, com $c > 0$, transforma a equação (5.1) em

$$u_{\xi\xi} + cu_{\xi} + u^p(1 - u) = 0.$$

A fim de transformar esta equação em um sistema de EDO de 1ª ordem, fazemos $v = u_{\xi}$, obtendo

$$\begin{cases} u_{\xi} &= & v \\ v_{\xi} &= & -cv - u^p(1 - u). \end{cases} \quad (5.2)$$

Sendo $z = (u, v)$, este sistema pode ser escrito na forma autônoma

$$z_\xi = F(z, c),$$

onde $F(z, c) = (v, -cv - u^p(1 - u))$. A matriz jacobiana desse sistema é

$$JF(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u^{p-1}((p+1)u - p) & -c \end{pmatrix}.$$

O sistema (5.2) tem dois pontos de equilíbrio, $P = (0, 0)$ e $Q = (1, 0)$. Os autovalores de $JF(P)$ são 0 e $-c$, com respectivos autovetores $(1, 0)$ e $(1, -c)$. Portanto P é um ponto de equilíbrio não-hiperbólico com uma variedade estável $W^e(P)$ tangente ao vetor $(1, -c)$ e com variedades centrais $W^c(P)$ tangentes ao vetor $(1, 0)$. Por outro lado, os autovalores de $JF(Q)$ são $\lambda_1 = [-c + (c^2 + 4)^{1/2}]/2$ e $\lambda_2 = [-c - (c^2 + 4)^{1/2}]/2$, com respectivos autovetores $(1, \lambda_1)$ e $(1, \lambda_2)$. Como $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ segue que Q é uma sela, cuja variedade estável $W^e(Q)$ é tangente à $(1, \lambda_2)$ e a variedade instável $W^i(Q)$ é tangente à $(1, \lambda_1)$.

Uma solução do tipo onda viajante de (5.1) conectando $u = 1$ à $u = 0$ deve ser uma solução de (5.2) conectando os pontos de equilíbrio Q à P . Como Q é uma sela, a única órbita candidata a solução é a contida na variedade instável $W^i(Q)$.

Como vimos no Exemplo 3, do Capítulo 2, sendo h uma carta para $W^c(P)$ em uma vizinhança de P , temos que $h(u) \sim -u^p/c^2$ quando $u \rightarrow 0$. Portanto, dependendo do valor de $p > 1$, temos duas possíveis configurações para $W^c(P)$, ilustradas na Figura 5.1. Se $v > 0$ e $u < 0$, então $u_\xi > 0$ e assim nenhuma órbita que tenda à P pelo 2º quadrante do plano $u \times v$ pode vir de Q . Se $v, u < 0$, então $u_\xi < 0$ e assim nenhuma órbita que tenda à P pelo 3º quadrante do plano $u \times v$ pode vir de Q . Concluímos que a diferença entre as configurações A e B para $W^c(P)$ é irrelevante para analisarmos a existência de soluções do sistema (5.2). Portanto, podemos supor sem perda de generalidade, que $W^c(P)$ tem a configuração A.

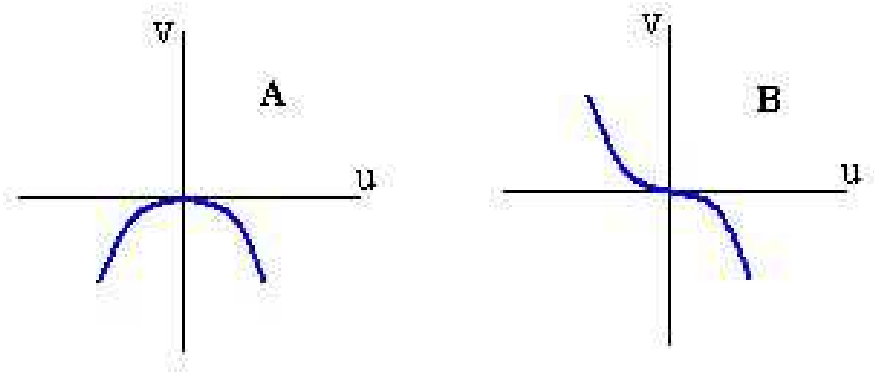


Figura 5.1: Possíveis configurações para $W^c(P)$.

Como vimos, se $v < 0$, então $u_\xi < 0$ e assim as órbitas no semi-plano $v < 0$ tem orientação no sentido negativo do eixo u . Com estas informações, podemos esboçar o retrato de fase do sistema (5.2) nas vizinhanças de seus pontos de equilíbrio. Veja a Figura 5.2.

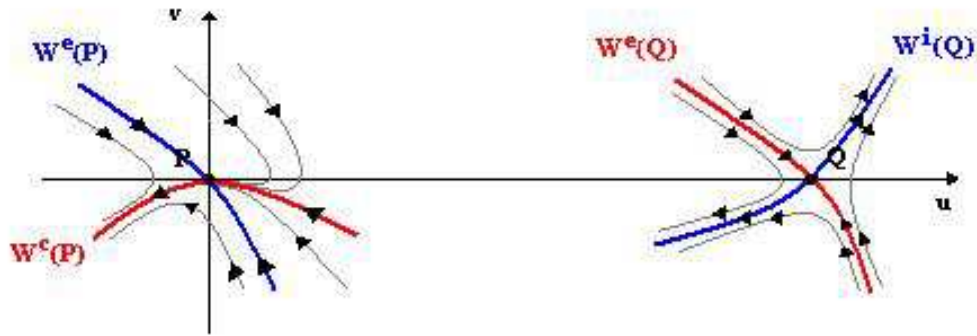


Figura 5.2: Retrato de Fase do sistema (5.2).

Seja C a curva dada por

$$h(u) = -u^p(1-u)/c, \quad u \geq 0 \quad (\text{veja a Figura 5.3}).$$

Note que $h(1) = h(0) = 0$ e como $u^{p+1} < u^p, \forall u \in (0, 1)$, segue que a curva C permanece no 4º quadrante do plano $u \times v$ para $u \in (0, 1)$. Para $u > 1$ temos $u^{p+1} > u^p$ e assim a curva C permanece no 1º quadrante do plano $u \times v$ para $u > 1$.

Considere agora as regiões (ver Figura 5.3):

- $R_1 = \{(u, v); u, v < 0\}$ (terceiro quadrante do plano $u \times v$);
- R_2 é a região tal que $u \geq 1, v > 0$, limitada superiormente por C ;
- R_3 é a região tal que $v > 0$, limitada inferiormente por C ;
- R_4 é a união da faixa $\{(u, v); 0 < u < 2/3, v < -2^p/(3^{p+1}c)\}$ com a região do semi-plano $u > 2/3, v < 0$ limitada superiormente por C ;
- R_5 é a região do semi-plano $u > 0, v < 0$, limitada inferiormente pela fronteira de R_4 .

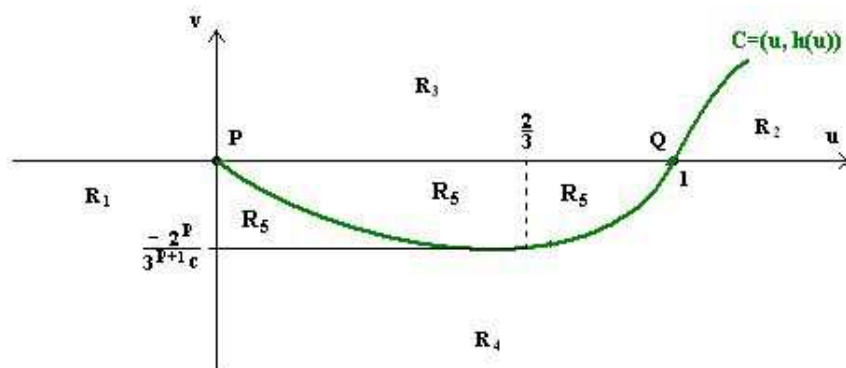


Figura 5.3: Regiões R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 .

Vejamos algumas propriedades destas regiões:

R_1 : Se alguma órbita interceptar a fronteira $\{(0, v); v < 0\}$, então $u_\xi < 0$ e assim a órbita entrará em R_1 .

R_2 : Se alguma órbita interceptar a fronteira $\{(u, 0); u > 1\}$, então $v_\xi > 0$ e assim a órbita entrará em R_2 . Se alguma órbita interceptar a fronteira $\{(u, h(u)); u > 1\}$, então $u_\xi > 0$ e $v_\xi = 0$. Logo, as órbitas em R_2 não podem deixar esta região.

R_3 : Se alguma órbita interceptar a fronteira $\{(u, 0); 0 < u < 1\}$, então $v_\xi < 0$ e assim a órbita entrará em R_5 . Se alguma órbita interceptar a fronteira $\{(u, h(u)); u > 1\}$, então $u_\xi > 0$ e $v_\xi = 0$. Logo uma órbita em R_3 que interceptar esta fronteira entrará em R_2 .

R_4 : Se alguma órbita interceptar a fronteira $\{(0, v); v < -2^p/3^{p+1}c\}$, então, como vimos na análise de R_1 , a órbita entrará em R_1 . Se alguma órbita interceptar a fronteira $\{(u, -2^p/(3^{p+1}c)); 0 < u \leq 2/3\}$, então $v_\xi = 2^p/3^{p+1} - u^p(1-u) > 0$ e assim a órbita entrará em R_5 . Se alguma órbita interceptar a fronteira $\{(u, h(u)); 2/3 < u < 1\}$, então $v_\xi = -ch(u) - u^p(1-u) = 0$ e $u_\xi < 0$, donde a órbita entrará em R_5 . Se alguma órbita interceptar a fronteira $\{(u, 0); u > 1\}$, então $v_\xi > 0$ e assim a órbita entrará em R_2 .

R_5 : A fronteira de R_5 já foi estudada nas regiões anteriores.

Seja S_0 a órbita contida em $W^e(P)$ que chega em P , pelo quadrante $u > 0, v < 0$. Diante das propriedades das regiões $R_i, i = 1, \dots, 5$, podemos concluir que existem apenas três alternativas para S_0 (acompanhe com as Figuras 5.4 - 5.6):

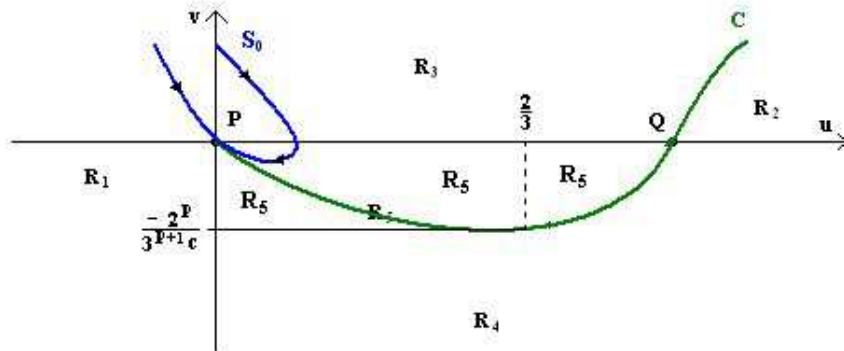


Figura 5.4: Alternativa A_1 .

A_1 : S_0 vem de R_3 , entra em R_5 e tende à P ;

A_2 : S_0 conecta Q à P ;

A_3 : S_0 vem de R_4 sem conectar Q , entra em R_5 e tende à P .

Seja S_1 a órbita contida em $W^i(Q)$ que sai de Q pelo semi-plano $v < 0$. Vamos analisar o que acontece com S_1 em cada alternativa $A_i, i = 1, 2, 3$:

A_1 : Neste caso, a órbita S_0 forma uma barreira, impedindo as órbitas que chegam em P (observe a Figura 5.2 e note que estas órbitas estão acima de S_0) de sair de Q . Logo $W^i(Q)$ não pode interceptar nenhuma órbita que chegue em P . Portanto,

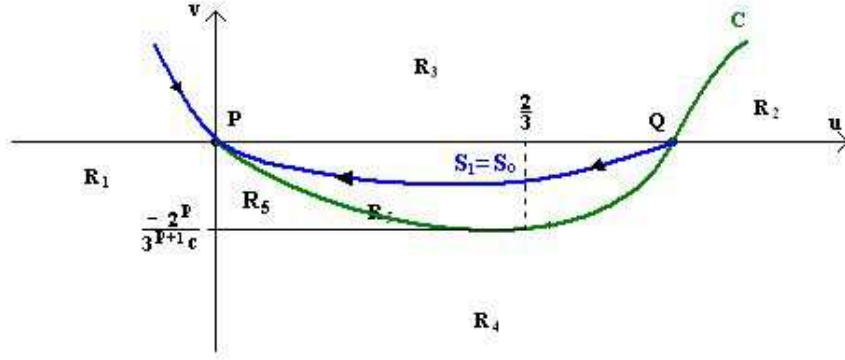


Figura 5.5: Alternativa A_2 .

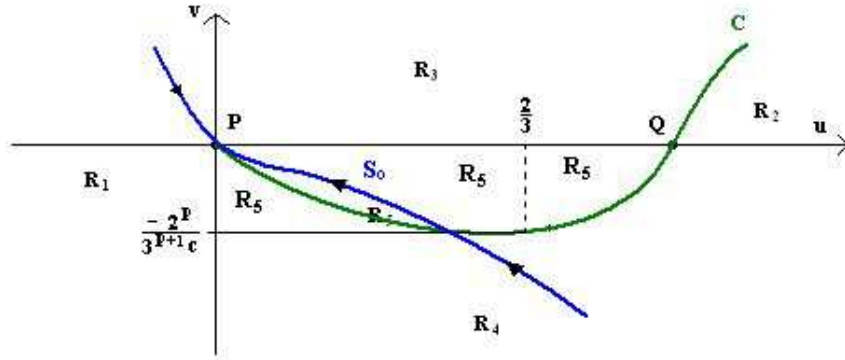


Figura 5.6: Alternativa A_3 .

neste caso, o problema não possui solução.

A_2 : Neste caso $S_0 = S_1$ é a única solução do problema, que consiste de uma órbita forte, correspondendo à uma onda viajante forte.

A_3 : Se $v > 0$ e $0 < u < 1$, então de (5.2) temos $v_\xi < 0$ e assim S_1 não pode entrar em R_3 . Note que S_1 não pode sair de Q por R_4 , pois para $2/3 < u < 1$ e $v < -u^p(1-u)/c$, temos $v_\xi = -cv - u^p(u-1) > 0$. Logo S_1 sai de Q por R_5 , e como não pode deixar esta região pela fronteira de R_4 nem pela fronteira de R_3 (veja as propriedades de R_3 e de R_4), segue que S_1 deve chegar em P , pois não pode interceptar S_0 , se mantendo acima de S_0 e em R_5 . Portanto, S_1 é a única solução do problema que, neste caso, não é forte.

Agora vamos buscar determinar uma relação entre o valor de $c > 0$ e as alternativas A_1, A_2 e A_3 . Para isto vamos definir uma função $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ da seguinte forma: Para cada $c > 0$, se ocorrer a alternativa A_1 , seja $f(c) \in (0, 1)$ o valor de u para o qual S_0 intercepta o eixo u . Se ocorrer A_2 , seja $f(c) = 1$. Se ocorrer A_3 , seja $f(c) = 1 - v_1$, onde v_1 é o valor de v para o qual S_0 intercepta a reta $u = 1$. Note que a única maneira de S_0 não interceptar a reta vertical $u = 1$, seria existir uma assíntota entre 0 e 1 para S_0 . Mas isto só ocorreria se $v_\xi/u_\xi = -c - u^p(1-u)/v \rightarrow -\infty$ quando $v \rightarrow -\infty$, o que não é verdade. Portanto f esta bem definida e como as soluções da equação (5.2) dependem continuamente do parâmetro c , segue que f é

uma função contínua.

Pela construção da função f , temos o seguinte resultado:

Teorema 5.1 *O problema (5.2) possui solução se, e somente se, $f(c) \geq 1$. Além disso, a solução é forte se, e somente se, $f(c) = 1$.*

O Teorema 5.1 ainda não é um resultado satisfatório devido a natureza abstrata da função f . Sequer sabemos se existe um valor de c para o qual tenhamos $f(c) \geq 1$! Portanto, a partir de agora nos dediquemos a estudar a função f .

Lema 1: A função f é crescente.

Prova: Dado $c > 0$, denotemos por $S_0(c)$ a órbita S_0 do sistema (5.2) correspondente ao parâmetro c .

Por (5.2), quando $c > 0$ cresce, a inclinação das retas tangentes à $S_0(c)$ decrescem e tendem monotonicamente a uma reta vertical.

Dado $c_0 > 0$, seja $R(c_0)$ a região contida na faixa $0 \leq u \leq 1$, $v \leq 0$ limitada inferiormente por $S_0(c_0)$ (veja a Figura 5.7).

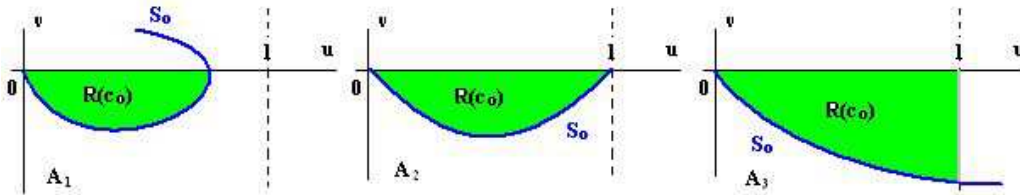


Figura 5.7: Região $R(c_0)$ para as alternativas A_1 , A_2 e A_3 .

Seja $c_1 > c_0$ (acompanhe na Figura 5.8). Se $S_0(c_1)$ interceptar $S_0(c_0)$ em um ponto (u_0, v_0) , dada a monotonicidade das inclinações das retas tangentes à $S_0(c)$ em função de c , a reta tangente a órbita $S_0(c_1)$ no ponto (u_0, v_0) tem inclinação menor que a reta tangente à $S_0(c_0)$ em (u_0, v_0) . Logo $S_0(c_1)$ entra em $R(c_0)$.

Por outro lado, para u suficientemente pequeno, a órbita $S_0(c_i)$, $i = 0, 1$, chega em P tangente ao vetor $(1, -c_i)$. Portanto $S_0(c_1)$ deve estar abaixo de $S_0(c_0)$ para u suficientemente pequeno. Se $S_0(c_1)$ interceptar $S_0(c_0)$, como vimos, $S_0(c_1)$ entrará em $R(c_0)$, contrariando o que acabamos de ver. Portanto $S_0(c_1)$ não deve interceptar $S_0(c_0)$ e assim permanecerá abaixo de $S_0(c_0)$. Pela definição de f , devemos ter $f(c_1) > f(c_0)$. Logo f é crescente. \square

Lema 2: Se $c > 0$ é suficientemente grande, então $f(c) > 1$.

Prova: Sendo $c > 0$ suficientemente grande, podemos escrever $c = 1/\epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. A mudança de variáveis $\eta = c\xi$, transforma o sistema (5.2) em

$$\begin{cases} u' = & \epsilon v \\ v' = & -v - \epsilon u^p(1 - u). \end{cases} \quad (5.3)$$

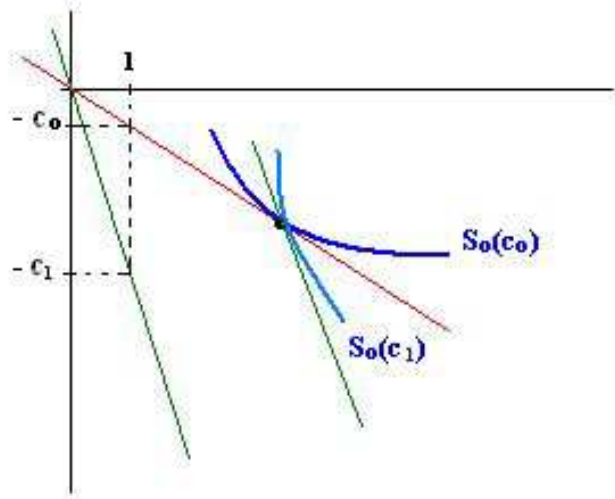


Figura 5.8: $S_0(c_1)$ entra na região $R(c_0)$ quando interceptar $S_0(c_0)$.

Para $\epsilon = 0$, o sistema (5.3) tem o eixo u como seu conjunto de pontos de equilíbrio. Considere o conjunto compacto $M_0 = \{(u, 0); 0 \leq u \leq 1\}$. Note que o conjunto M_0 é composto por singularidades normalmente hiperbólicas. Pelo Primeiro Teorema da Variedade Invariante de Fenichel (Teorema 2.8), para ϵ suficientemente pequeno, existe uma curva fechada M_ϵ , difeomorfa à M_0 , suficientemente próxima de M_0 e localmente invariante pelo fluxo. Analisando o retrato de fase do sistema (5.2), sendo M_ϵ localmente invariante pelo fluxo, podemos concluir que, próximo de Q , M_ϵ deve coincidir com $W^i(Q)$. Consequentemente $W^i(Q)$ conecta Q à P , donde $f(c) \geq 1$. Como f é crescente, devemos ter $f(c) > 1$ para c suficientemente grande. \square

A combinação dos Lemas 1 e 2, nos garante que, sendo $c^*(p) = \inf f^{-1}([1, \infty)) \geq 0$, temos $f(c) \geq 1, \forall c \geq c^*(p)$, ou seja, a equação (5.1) possui uma solução do tipo onda viajante se, e somente se, $c \geq c^*(p)$. Além disso, neste caso, a solução é única. Resta-nos saber se existem $c > 0$ tais que a equação (5.1) não possua solução. Esta questão é respondida no próximo lema.

Lema 3: Se $c > 0$ é suficientemente pequeno, então $f(c) < 1$.

Prova: Qualquer órbita que conecte Q à P , permanece no quarto quadrante do plano $u \times v$. Portanto, vamos nos restringir ao quarto quadrante do plano $u \times v$. Nesta região, podemos fazer a mudança de variáveis $s = 1/u$ que transforma o sistema (5.2) em

$$\begin{cases} s' &= -s^2v \\ v' &= -cv - s^{-p-1}(s-1). \end{cases} \quad (5.4)$$

O sistema (5.4) possui apenas um ponto de equilíbrio, $Q' = (1, 0)$. Observe que $Q' = Q$, onde estamos usando o $'$ para indicar que a singularidade $(1, 0)$ é relativa ao sistema (5.4). Os autovalores da matriz jacobiana no ponto Q' são $\lambda_1 = (-c + (c^2 + 4)^{1/2})/2 > 0$ e $\lambda_2 = (-c - (c^2 + 4)^{1/2})/2 < 0$, com respectivos

autovetores $V_1 = (1, -\lambda_1)$ e $V_2 = (1, -\lambda_2)$. Logo Q' é uma sela com variedade instável tangente ao vetor V_1 e variedade estável tangente ao vetor V_2 . Note que esta sela é o ponto de equilíbrio correspondente à sela Q do sistema (5.2).

Sendo $c = 0$, o sistema (5.4) se torna

$$\begin{cases} s' = -s^2v \\ v' = -s^{-p-1}(s-1). \end{cases} \quad (5.5)$$

A única singularidade do sistema (5.5) é exatamente a mesma do sistema (5.4). Por isto vamos denotá-la por Q'' , para indicar que é relativa ao sistema (5.5). Os autovalores da matriz jacobiana no ponto Q'' são 1 e -1 , com respectivos autovetores $U_1 = (1, -1)$ e $U_2 = (1, 1)$. Logo Q'' é uma sela com variedade instável tangente ao vetor U_1 e variedade estável tangente ao vetor U_2 .

Para $v < 0$, de (5.5), temos que $s' = -s^2v > 0$ e para $s > 1$, temos $v' = -s^{-p-1}(s-1) < 0$. Daí, sendo S_1'' a órbita contida em $W^i(Q'')$ que está no quarto quadrante do plano $s \times v$, podemos garantir que existe um $v_0 < 0$, tal que S_1'' fica abaixo da reta horizontal $v = v_0$ a partir de um certo ponto (veja a Figura 5.9).

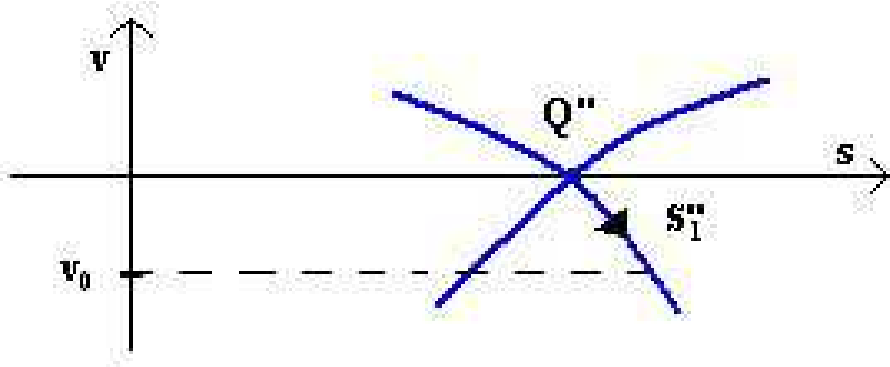


Figura 5.9: S_1'' permanece abaixo de v_0 a partir de um certo ponto.

Aplicando o Segundo Teorema da Variedade Invariante de Fenichel (Teorema 2.9) ao compacto $M_0 = \{Q''\}$, concluímos que, para $c > 0$ suficientemente pequeno, $W^i(Q')$ está suficientemente próxima de $W^i(Q'')$. Logo, sendo S_1' a órbita contida em $W^i(Q')$ que está no quarto quadrante do plano $s \times v$, temos que S_1' fica abaixo da reta $v = v_0$ a partir de um certo ponto.

Seja $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ uma carta para a órbita S_1 . Suponha que ocorra a alternativa A_2 ou A_3 , isto é, S_1 conecta $Q = (0, 1)$ à $P = (0, 0)$, donde

$$\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = \lim_{u \rightarrow 1^-} g(u) = 0.$$

Seja $g_1 : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_1(s) = g(1/s)$ e note que o gráfico de g_1 permanece no quarto quadrante do plano $s \times v$, pois $g(u) < 0, \forall u \in (0, 1)$. Por propriedade de mudança de variáveis, sendo g uma carta de uma órbita da equação

(5.2), segue que g_1 é uma carta de alguma órbita da equação (5.4). Como

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} g_1(s) = \lim_{u \rightarrow 1^-} g(u) = 0,$$

segue que g_1 é uma carta da órbita S'_1 . Daí

$$0 = \lim_{u \rightarrow 0} g(u) = \lim_{s \rightarrow \infty} g_1(s) \leq v_0 < 0,$$

um absurdo. Logo as alternativas A_2 e A_3 não podem ocorrer, isto é, ocorre a alternativa A_1 . Portanto, para $c > 0$ suficientemente pequeno, temos $f(c) < 1$. \square

Da combinação dos Lemas 1, 2 e 3, segue o seguinte resultado para a equação KPP:

Teorema 5.2 *Para cada $p > 1$, existe $c^*(p) > 0$ tal que a equação (5.1) possui uma solução do tipo onda viajante $u(t, x) = \phi_c(x - ct)$ conectando $u = 1$ à $u = 0$ se, e somente se, $c \geq c^*(p)$. Neste caso a solução é única. Além disso, a onda viajante é forte se, e somente se, $c = c^*(p)$.*

Em [Barnes] o leitor pode encontrar estimativas numéricas para o valor de $c^*(p)$ para alguns valores de p .

5.1.1 Propriedades das Soluções

Agora vamos nos dedicar a estudar o comportamento assintótico das soluções da equação (5.1).

Para cada $c \geq c^*(p)$, a solução (u, v) do sistema (5.2) tende ao ponto de equilíbrio Q , quando $\xi \rightarrow -\infty$, pela variedade instável $W^i(Q)$. Como $W^i(Q)$ é tangente, em Q , à $(1, \lambda_1)$, onde $\lambda_1 = [-c + \sqrt{c^2 + 4}]/2$, temos que $u' = v \sim \lambda_1(u - 1)$, quando $u \rightarrow 1^-$. Multiplicando por $e^{-\lambda_1 \xi}$ e integrando, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$u(\xi) \sim 1 + Ae^{\lambda_1 \xi} \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

Se $c = c^*(p)$, então a solução (u, v) do sistema (5.2) tende ao ponto de equilíbrio P , quando $\xi \rightarrow \infty$, pela variedade estável $W^e(P)$. Como $W^e(P)$ é tangente, em P , à $(1, -c)$, temos que $u' = v \sim -cu$, quando $u \rightarrow 0^+$. Integrando, obtemos uma constante $B > 0$ tal que

$$u(\xi) \sim Be^{-c\xi} \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Se $c > c^*(p)$, então a solução (u, v) do sistema (5.2) tende ao ponto de equilíbrio P quando $\xi \rightarrow \infty$ pela variedade central $W^c(P)$. Pelo Exemplo 3 do Capítulo 2, temos que $u'(\xi) = v(\xi) = h(u(\xi)) \sim -u(\xi)^p/c$ quando $\xi \rightarrow \infty$. Daí, $u'(\xi)u(\xi)^{-p} \sim$

$-1/c$ quando $\xi \rightarrow \infty$ e integrando através da mudança de variáveis $U = u(\xi)$, obtemos

$$-\frac{\xi}{c} \sim \int u'(\xi)u(\xi)^{-p}d\xi = \int u'(\xi)u(\xi)^{-p}d\xi = \int U^{-p}dU = \frac{U^{-p+1}}{-p+1} = \frac{u(\xi)}{-p+1}.$$

Logo

$$u(\xi) \sim \left[\frac{c}{(p-1)\xi} \right]^{1/(p-1)} \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

A síntese dos resultados obtidos nesta seção nos dá o

Teorema 5.3 *Para cada $p > 1$, existe $c^*(p) > 0$ tal que a equação (5.1) possui solução do tipo onda viajante $u(t, x) = \phi_c(x - ct)$ conectando $u = 1$ à $u = 0$ se, e somente se, $c \geq c^*(p)$. Ademais, para $\xi = x - ct$, existem constantes $A, B > 0$, tais que*

$$\begin{aligned} \phi_c(\xi) &\sim \begin{cases} Be^{-\alpha\xi} & \text{se } c = c^*(p) \\ \left[\frac{c}{(p-1)\xi} \right]^{1/(p-1)} & \text{se } c > c^*(p) \end{cases} \quad \text{quando } \xi \rightarrow \infty \\ (1 - \phi_c(\xi)) &\sim Ae^{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}\xi} \quad \text{quando } \xi \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Observemos as semelhanças das soluções do tipo onda viajante da equação KPP com as do sistema (4.13) para o modelo de combustão. Temos existência destas soluções para uma faixa de valores de velocidades c , sendo que existe um único valor crítico $c^*(p)$, onde as soluções correspondentes a valores acima de $c^*(p)$ não são fortes. Novamente, para valores abaixo de $c^*(p)$ a equação não possui solução do tipo onda viajante.

Finalizemos esta Seção, destacando mais algumas propriedades da onda viajante ϕ_c da equação KPP (5.1). Para isto, seja $c \geq c^*(p)$ e seja ϕ_c a correspondente solução do tipo onda viajante da equação (5.1).

(P1) $\phi'_c(\xi) < 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$.

Prova: Isto decorre do fato da órbita S_1 do sistema (5.2) permanecer no quarto quadrante do plano $u \times v$. \square

(P2) Se $c > c^*(p)$, então $\frac{\phi''_c(\xi)}{\phi'_c(\xi)} \sim D\xi^{-1}$, quando $\xi \rightarrow \infty$, onde $D = -p/(p-1)^{p-1}$.

Prova: Para $c > c^*(p)$, pelo Teorema 5.3 temos que

$$\phi_c(\xi) \sim [c/(p-1)]^{1/(p-1)}\xi^{-1/(p-1)} \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Daí

$$\phi'_c(\xi) \sim -c^{1/(p-1)}/(p-1)^{2/(p-1)}\xi^{-p/(p-1)} \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow \infty$$

e assim

$$\phi_c''(\xi) \sim pc^{1/(p-1)}/(p-1)^{3/p-1}\xi^{(-2p+1)/(p-1)} \quad \text{quando } \xi \longrightarrow \infty.$$

Portanto

$$\frac{\phi_c''(\xi)}{\phi_c'(\xi)} \sim D\xi^{-1}, \quad \text{quando } \xi \longrightarrow \infty.$$

□

(P3) $\left(2\frac{\phi_c''(\xi)}{\phi_c'(\xi)} + c\right) \longrightarrow \sqrt{c^2 + 4}$, quando $\xi \longrightarrow -\infty$.

Prova: Como

$$1 - \phi_c(\xi) \sim A \exp\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}\xi\right) \quad \text{quando } \xi \longrightarrow -\infty,$$

segue que

$$-\phi_c'(\xi) \sim A \left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}\right) \exp\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}\xi\right) \quad \text{quando } \xi \longrightarrow -\infty.$$

Daí

$$-\phi_c''(\xi) \sim A \left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}\right)^2 \exp\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}\xi\right) \quad \text{quando } \xi \longrightarrow -\infty.$$

Logo

$$\frac{\phi_c''(\xi)}{\phi_c'(\xi)} \sim \left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}\right) \quad \text{quando } \xi \longrightarrow -\infty.$$

Daí segue o resultado. □

5.2 Estabilidade

Nesta Seção, vamos analisar a estabilidade das soluções, do tipo onda viajante, que não são fortes, obtidas no Teorema 5.3. O objetivo deste estudo é tomar familiaridade com as técnicas desenvolvidas por [Wu] para a equação KPP, para que num próximo trabalho, possamos utilizá-las no estudo da estabilidade das ondas viajantes não fortes do modelo de combustão em meios porosos.

Considere os espaços de Banach $C_{unif}(\mathbb{R})$, $C_{unif}^2(\mathbb{R})$, C_α e C_α^2 definidos no Capítulo 3.

Para cada $c > c^*(p)$, seja $u(x, t) = \phi_c(x - ct)$ a solução do tipo onda viajante obtida no Teorema 5.3. Linearizando a equação (5.1) em torno de tal onda viajante, obtemos

$$u_t = \mathcal{L}u + f(\phi_c, u),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : C_{unif}^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow C_{unif}(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto \mathcal{L}u = u_{\xi\xi} + cu_{\xi} + [p\phi_c^{p-1} - (p+1)\phi_c^p]u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(\phi_c, u) &= F(\phi_c + u) - F(\phi_c) - F'(\phi_c)u, \\ F(u) &= u^p(1 - u). \end{aligned}$$

Como vimos no Exemplo 2 do Capítulo 3, vale a seguinte limitação para o espectro essencial do operador $\mathcal{L} : C_{unif}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_{unif}(\mathbb{R})$:

$$\sup\{\operatorname{Re} \lambda; \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{L})\} \leq 0.$$

Observemos que esta limitação não garante que o espectro essencial do operador \mathcal{L} esteja no semi-plano esquerdo do plano complexo, pois este ainda pode interceptar o eixo imaginário. Além disso, adiante veremos que zero é um autovalor de \mathcal{L} . Portanto não podemos esperar estabilidade assintótica da onda viajante ϕ_c sob perturbações no espaço $C_{unif}^2(\mathbb{R})$. Não obstante, inserindo um peso na norma do espaço $C_{unif}^2(\mathbb{R})$, isto é, trabalhando com o espaço C_{α} , podemos deslocar o espectro do operador \mathcal{L} para o semi-plano esquerdo do plano complexo.

A fim de obtermos estabilidade da onda viajante ϕ_c , na norma de C_{α} , devemos mostrar que o espectro do operador $\mathcal{L}_{\alpha} : C_{\alpha} \longrightarrow C_{\alpha}$ dado por $\mathcal{L}_{\alpha}u = \mathcal{L}u$ se mantém no semi-plano esquerdo do plano complexo. Inicialmente provaremos esta propriedade para o espectro essencial.

Teorema 5.4 *Se $0 < \alpha < c$, então existe $\delta_{\alpha} > 0$ tal que*

$$\sup\{\operatorname{Re} \lambda; \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{L}_{\alpha})\} \leq -\delta_{\alpha} < 0.$$

Prova: Considere o operador $M : C_{\alpha} \longrightarrow C_{unif}(\mathbb{R})$ dado por $Mu = q_{\alpha}u$, onde $q_{\alpha}(\xi) = 1 + e^{\alpha\xi}$. Sendo $B = M\mathcal{L}_{\alpha}M^{-1} : C_{unif}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_{unif}(\mathbb{R})$, temos que $\sigma_n(B) = \sigma_n(\mathcal{L}_{\alpha})$ e $\sigma_{ess}(B) = \sigma_{ess}(\mathcal{L}_{\alpha})$. Além disso

$$Bu = u'' + \left[c - \frac{2q'_{\alpha}}{q_{\alpha}} \right] u' + \left[\frac{2(q'_{\alpha})^2}{q_{\alpha}^2} - \frac{q''_{\alpha}}{q_{\alpha}} - \frac{cq'_{\alpha}}{q_{\alpha}} + (p\phi_c^{p-1} - (p+1)\phi_c^p) \right] u$$

e lembrando que $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi_c(\xi) = 0$ e $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi_c(\xi) = 1$, temos que

$$\begin{aligned} B_+u &= u'' + (c - 2\alpha)u' + (\alpha^2 - c\alpha)u, \\ B_-u &= u'' + cu' - u. \end{aligned}$$

Seja $\delta_{\alpha} = \max\{\alpha c - \alpha^2, 1\} > 0$. Pelo Teorema 3.2, o espectro dos B_{\pm} são exatamente os gráficos das curvas $\lambda_+(t) = -t^2 + i(c - 2\alpha)t + (\alpha^2 - c\alpha)$ e $\lambda_-(t) =$

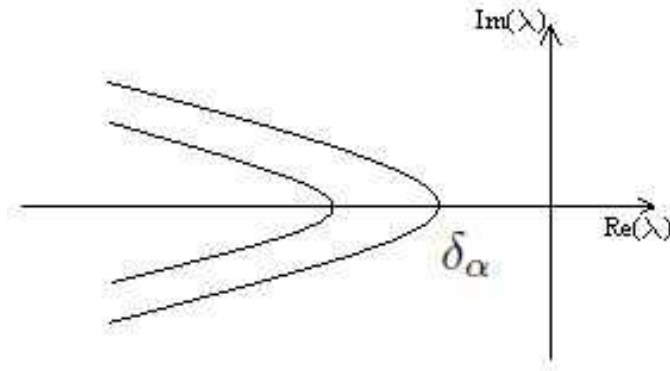


Figura 5.10: Gráficos das parábolas λ_+ e λ_- .

$-t^2 + ict - 1$, $t \in \mathbb{R}$, respectivamente. Os gráficos destas funções são as parábolas ilustradas na Figura 5.10.

Pelo Lema de Weyl (Teorema 3.3), segue que

$$\sup\{\operatorname{Re} \lambda; \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{L}_\alpha)\} \leq -\delta_\alpha < 0.$$

□

Agora, nosso próximo passo será provar que os autovalores do operador \mathcal{L}_α tem parte real negativa.

Consideremos o problema de autovalor

$$\mathcal{L}y = \lambda y,$$

o qual pode ser reescrito na forma de sistema de EDO's (não autônomo) dependendo de um parâmetro $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$Y' = A(\xi, \lambda)Y, \tag{5.6}$$

onde $' = \frac{d}{d\xi}$, $Y = (y, y')$ e

$$A(\xi, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - p\phi_c^{p-1}(\xi) + (p+1)\phi_c^p(\xi) & -c \end{bmatrix}.$$

Sejam $A_\pm(\lambda) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} A(\xi, \lambda)$, isto é,

$$A_+(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & -c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_-(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda + 1 & -c \end{bmatrix}.$$

Considere agora, as curvas

$$S_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(i\mu I - A_\pm(\lambda)) = 0 \text{ para algum } \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Seja $\lambda = a + bi$. Se $a = -b^2/c^2$, então $\lambda \in S_+$, basta tomar $\mu = b/c$. Reciprocamente, se $\lambda \in S_+$, então existe $\mu \in \mathbb{R}$, tal que $-\mu^2 + ic\mu - \lambda = \det(i\mu I - A_+(\lambda)) = 0$,

donde $-\mu^2 = a + i(b - c\mu)$ e assim $a = -b^2/c^2$. Com um calculo semelhante para S_- , obtemos

$$S_- = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = -\frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{c^2} - 1 \right\} \quad \text{e} \quad S_+ = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = -\frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{c^2} \right\}.$$

Sejam $\Omega_+, \Omega_- \subset \mathbb{C}$ os conjuntos abertos, contendo o semi-plano direito do plano complexo, cujas fronteiras são S_+ e S_- respectivamente, veja a Figura 5.11. É claro que $\Omega_+ \subset \Omega_-$.

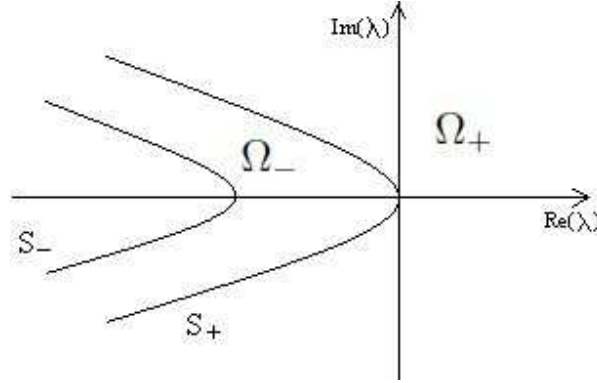


Figura 5.11: Curvas S_+ e S_- no plano complexo λ .

Os polinômios característicos das matrizes $A_{\pm}(\lambda)$ são $p_+(z) = z^2 + cz - \lambda$ e $p_-(z) = z^2 + cz - \lambda - 1$. Daí, os autovalores de $A_+(\lambda)$ são

$$\mu_1^+(\lambda) = [-c - \sqrt{c^2 + 4\lambda}]/2 \quad \text{e} \quad \mu_2^+(\lambda) = [-c + \sqrt{c^2 + 4\lambda}]/2$$

e os autovalores de $A_-(\lambda)$ são

$$\mu_1^-(\lambda) = [-c - \sqrt{c^2 + 4(\lambda + 1)}]/2 \quad \text{e} \quad \mu_2^-(\lambda) = [-c + \sqrt{c^2 + 4(\lambda + 1)}]/2.$$

Denotemos por $v_i^{\pm}(\lambda)$ os autovetores associados aos autovalores $\mu_i^{\pm}(\lambda)$.

Por outro lado, sabemos que a raiz quadrada é uma função complexa bivalente, isto é, $\sqrt{a + bi}$ pode resultar em dois números complexos distintos, digamos, $x + iy$ e $-(x + iy)$. Não obstante, as raízes de $p_+(z)$ são $[-c \pm \sqrt{c^2 + 4\lambda}]/2$. Sendo

$$\sqrt{c^2 + 4\lambda} = \pm(x + iy),$$

temos que as raízes de $p_+(z)$ são $[-c \pm [\pm(x + iy)]]/2 = [-c \pm (x + iy)]/2$. Portanto, independente do valor escolhido para $\sqrt{c^2 + 4\lambda} = \pm(x + iy)$, os autovalores de A_+ são $\mu_1^+(\lambda) = [-c - x - iy]/2$ e $\mu_2^+(\lambda) = [-c + x + iy]/2$. Fixemos

$$\sqrt{c^2 + 4\lambda} = x + iy,$$

com $x \geq 0$.

Para $\lambda = a + ib \in \Omega_+$, isto é, $a > -b^2/c^2$, temos $c^2 + 4a + (4b)i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$, donde $x^2 - y^2 = c^2 + 4a$ e $xy = 2b$.

Se $x = 0$, então $b = 0$ e assim $a > 0$, donde $0 \geq -y^2 = c^2 + 4a > 0$, um absurdo. Logo $x > 0$.

Portanto $y = 2b/x$ e assim, substituindo y por $2b/x$ em $x^2 - y^2 = c^2 + 4a$, obtemos

$$x^4 - (c^2 + 4a)x^2 - 4b = 0.$$

Sendo $t = x^2 > 0$, temos $t^2 - (c^2 + 4a)t - 4b = 0$, donde

$$t = [c^2 + 4a + \sqrt{(c^2 + 4a)^2 + 16b^2}]/2$$

e assim

$$x = \sqrt{[c^2 + 4a + \sqrt{(c^2 + 4a)^2 + 16b^2}]/2}.$$

Como $a > -b^2/c^2$, segue que

$$(c^2 + 4a)^2 + 16b^2 > (c^2 - 4a)^2,$$

donde

$$\sqrt{(c^2 + 4a)^2 + 16b^2} > |c^2 - 4a| \geq c^2 - 4a$$

e assim

$$[c^2 + 4a + \sqrt{(c^2 + 4a)^2 + 16b^2}]/2 > c^2.$$

Logo $x > c$ e portanto temos que

$$Re \mu_1^+(\lambda) < -\frac{c}{2} < 0 \quad e \quad Re \mu_2^+(\lambda) > 0, \quad \forall \lambda \in \Omega_+.$$

Analogamente se conclui que $\mu_1^-(\lambda)$ tem parte real negativa e $\mu_2^-(\lambda)$ tem parte real positiva quando $\lambda \in \Omega_-$, mais precisamente

$$Re \mu_1^-(\lambda) < -\frac{c}{2} < 0 \quad e \quad Re \mu_2^-(\lambda) > 0, \quad \forall \lambda \in \Omega_-.$$

Em particular, os autovalores de A_{\pm} são todos distintos e portanto, simples.

A estratégia para provar que os autovalores de \mathcal{L}_{α} tem parte real negativa, é estudar o comportamento assintótico de certas auto-funções.

Teorema 5.5 *Dados $c > c^*(p)$ e $\lambda \in \Omega_-$, existem duas soluções linearmente independentes $Y_i^-(\lambda)$ do sistema (5.6) tais que*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} e^{-\mu_i^-(\lambda)\xi} Y_i^-(\xi, \lambda) = v_i^-(\lambda), \quad i = 1, 2,$$

onde $v_i^-(\lambda)$ são os autovetores de $A_-(\lambda)$ associados à $\mu_i^-(\lambda)$, $i = 1, 2$.

Prova: Seja $B(\xi, \lambda) = -A(-\xi, \lambda) + A_-(\lambda)$. Temos que $|B(\xi, \lambda)| = |(p+1)\phi_c(-\xi)^p - p\phi_c(-\xi)^{p-1} - 1| \leq p|\phi_c(-\xi)^p - 1| + p|\phi_c(-\xi)^{p-1} - 1| + |\phi_c(-\xi)^p - 1|$. Pelo Teorema 5.3, $\phi_c(\xi) \rightarrow 1$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow -\infty$.

Como $g : [\frac{1}{2}, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(t) = t^k$, é lipschitziana $\forall k > 0$, segue que $\phi_c(\xi)^p, \phi_c(\xi)^{p-1} \rightarrow 1$ exponencialmente quando $\xi \rightarrow -\infty$. Logo

$$\phi_c(-\xi)^p, \phi_c(-\xi)^{p-1} \rightarrow 1 \quad \text{exponencialmente quando } \xi \rightarrow \infty.$$

Portanto, existem constantes $a, b > 0$, tais que $|B(\xi, \lambda)| \leq ae^{-b\xi}$, $\forall \xi \geq \xi_0$, donde

$$\int_{\xi_0}^{\infty} |B(\xi, \lambda)| d\xi \leq a \int_{\xi_0}^{\infty} e^{-b\xi} d\xi < \infty.$$

Como os autovalores da matriz $-A_-(\lambda)$ são todos simples e

$$-A(-\xi, \lambda) = B(\xi, \lambda) + [-A_-(\lambda)],$$

pelo Teorema 2.4 existem $Z_1^-(\lambda), Z_2^-(\lambda)$ soluções L.I. de $Z' = -A(-\xi, \lambda)Z$, satisfazendo

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} e^{\mu_i^-(\lambda)\xi} Z_i^-(\xi, \lambda) = v_i^-(\lambda), \quad i = 1, 2.$$

Agora basta definir $Y_i^-(\xi, \lambda) = Z_i^-(-\xi, \lambda)$, que o resultado segue por verificação imediata. \square

Já mencionamos que $Re \mu_1^+(\lambda) < -c/2$ e $Re \mu_2^+(\lambda) > 0$, $\forall \lambda \in \Omega_+$. Como $\mu_i^+(\lambda)$ depende continuamente de λ , concluímos que $Re \mu_1^+(\lambda) \leq -c/2$ e $Re \mu_2^+(\lambda) \geq 0 \forall \lambda \in S_+$. Portanto, podemos escolher uma vizinhança $N(\Omega_+)$, de Ω_+ , contendo S_+ , tal que

$$Re \mu_1^+(\lambda) \leq -2\alpha_0 \quad \text{e} \quad Re \mu_2^+(\lambda) \geq -\alpha_0, \quad \forall \lambda \in N(\Omega_+), \quad (5.7)$$

para algum $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno.

Teorema 5.6 *Sejam $c > c^*(p)$ e $v_i^+(\lambda)$ o autovetor de $A_+(\lambda)$ associado à $\mu_i^+(\lambda)$, $i = 1, 2$. Existe $\xi_0 > 0$, tal que, para todo $\lambda \in N(\Omega_+)$, o sistema (5.6) possui duas soluções linearmente independentes, $Y_i^+(\xi, \lambda)$, satisfazendo*

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\phi_c'(\xi)^{-1} \exp \left(- \int_{\xi_0}^{\xi} \tilde{\mu}_i(s, \lambda) ds \right) Y_i^+(\xi, \lambda) \right] = v_i^+(\lambda), \quad i = 1, 2, \quad (5.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1(s, \lambda) &= - \left[\frac{c}{2} + \frac{\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} \right] - \sqrt{\left[\frac{c}{2} + \frac{\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} \right]^2 + \lambda} \quad e \\ \tilde{\mu}_2(s, \lambda) &= - \left[\frac{c}{2} + \frac{\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} \right] + \sqrt{\left[\frac{c}{2} + \frac{\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} \right]^2 + \lambda}. \end{aligned}$$

Prova: Por **(P1)**, $\phi'(\xi) < 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, donde podemos fazer a mudança de variáveis $w(\xi) = \phi'_c(\xi)^{-1}y(\xi)$ no sistema (5.6), obtendo

$$W' = \tilde{A}(\xi, \lambda)W \quad (5.9)$$

onde

$$\tilde{A}(\xi, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & -2\frac{\phi''_c(\xi)}{\phi'_c(\xi)} - c \end{bmatrix}$$

e $W = (w, w')$.

Um cálculo rotineiro mostra que os autovalores de $\tilde{A}(\xi, \lambda)$ são precisamente $\tilde{\mu}_i(\xi, \lambda)$, $i = 1, 2$.

Por outro lado, por **(P2)** temos que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{A}(\xi, \lambda) = A_+(\lambda)$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_i(\xi, \lambda) = \mu_i^+(\lambda), \quad i = 1, 2.$$

Daí e de (5.7), existe ξ_0 suficientemente grande, tal que

$$Re \tilde{\mu}_1(\xi, \lambda) < -2\alpha_1 < -\alpha_1 < Re \tilde{\mu}_2(\xi, \lambda), \quad \forall \xi \geq \xi_0, \quad (5.10)$$

onde $\alpha_1 = \alpha_0/2 > 0$. Em particular, $\tilde{A}(\xi, \lambda)$ tem dois autovalores distintos e assim é diagonalizável para $\xi \geq \xi_0$. Como $\tilde{v}_1 = (1, \tilde{\mu}_1(\xi, \lambda))$ e $\tilde{v}_2 = (1, \tilde{\mu}_2(\xi, \lambda))$ são autovetores associados ao autovalores $\tilde{\mu}_1(\xi, \lambda)$ e $\tilde{\mu}_2(\xi, \lambda)$ respectivamente, temos que $\Lambda(\xi, \lambda) = \text{diag} [\tilde{\mu}_1(\xi, \lambda), \tilde{\mu}_2(\xi, \lambda)] = T(\xi, \lambda)^{-1}\tilde{A}(\xi, \lambda)T(\xi, \lambda)$, onde

$$T(\xi, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{\mu}_1(\xi, \lambda) & \tilde{\mu}_2(\xi, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Sendo $Z = T(\xi, \lambda)^{-1}W$ o sistema (5.9), se torna

$$Z' = [\Lambda(\xi, \lambda) + C(\xi, \lambda)]Z, \quad (5.11)$$

onde $C = -T^{-1}T'$.

Agora, fazendo as mudanças de variáveis $V_i(\xi, \lambda) = \exp \left[-\int_{\xi_0}^{\xi} \tilde{\mu}_i(s, \lambda) ds \right] Z(\xi, \lambda)$, $i = 1, 2$, o sistema (5.11) se torna

$$V'_i = [B_i(\xi, \lambda) + C(\xi, \lambda)]V_i, \quad (5.12)$$

onde $B_i(\xi, \lambda) = \Lambda(\xi, \lambda) - \tilde{\mu}_i(\xi, \lambda)I$, para $i = 1, 2$.

Por **(P2)**, temos $\frac{d}{d\xi} \left[\frac{\phi''_c}{\phi'_c} \right] (\xi) \sim -D\xi^{-2}$ quando $\xi \rightarrow \infty$. Daí,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{d\xi} \left[\frac{\phi''_c}{\phi'_c} \right] (\xi)}{\xi^{-2}} = -D,$$

donde existe $K > 0$, tal que

$$\left| \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\phi_c''}{\phi_c'} \right] (\xi) \right| \leq K \frac{1}{\xi^2}, \quad \forall \xi \geq \xi_0.$$

Logo

$$\int_{\xi_0}^{\infty} |\tilde{A}'(s, \lambda) ds| < \infty.$$

Analogamente temos

$$\int_{\xi_0}^{\infty} |T'(s, \lambda) ds| < \infty.$$

Por (5.10), temos que a matriz

$$T(\xi, \lambda)^{-1} = \frac{1}{\tilde{\mu}_2(\xi, \lambda) - \tilde{\mu}_1(\xi, \lambda)} \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_2(\xi, \lambda) & 1 \\ \tilde{\mu}_1(\xi, \lambda) & 1 \end{bmatrix}$$

é limitada para $\xi \geq \xi_0$, donde segue da definição da matriz C , que

$$\int_{\xi_0}^{\infty} |C(s, \lambda)| ds < \infty. \quad (5.13)$$

Considere as matrizes diagonais $P_1 = \text{diag } [0, 0]$, $P_2 = \text{diag } [1, 0]$ e

$$S_i(\xi, \lambda) = \exp \left(\int_{\xi_0}^{\xi} B_i(s, \lambda) ds \right), \quad i = 1, 2.$$

Seja $CB([\xi_0, \infty))$ o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em $[\xi_0, \infty)$ munido da norma do sup, denotada por $\|\cdot\|_{\infty}$.

Defina os operadores $F_i(\lambda) : CB([\xi_0, \infty)) \rightarrow CB([\xi_0, \infty))$ por

$$\begin{aligned} F_i(\lambda)V(z) &= e_i + \int_{\xi_0}^{\xi} S_i(\xi, \lambda) P_i S_i(s, \lambda) C(s, \lambda) V(s) ds \\ &\quad - \int_{\xi}^{\infty} S_i(\xi, \lambda) (I - P_i) S_i(s, \lambda) C(s, \lambda) V(s) ds, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

onde e_1 e e_2 são os vetores da base canônica do \mathbb{R}^2 .

Por (5.10), temos que $-[\text{Re } \tilde{\mu}_2(\xi, \lambda) - \text{Re } \tilde{\mu}_1(\xi, \lambda)] \leq -\alpha_1$, $\forall \xi \in [\xi_0, \infty)$. Daí, para $\xi_0 \leq \xi \leq s$, temos

$$\begin{aligned} |S_1(\xi, \lambda) S_1(s, \lambda)^{-1}| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp \left(- \int_{\xi}^s [\tilde{\mu}_2(r, \lambda) - \tilde{\mu}_1(r, \lambda)] dr \right) \end{pmatrix} \right| \\ &\leq 1 + \left| \exp \left(- \int_{\xi}^s [\tilde{\mu}_2(r, \lambda) - \tilde{\mu}_1(r, \lambda)] dr \right) \right| \\ &= 1 + \exp \left(-\text{Re} \int_{\xi}^s [\tilde{\mu}_2(r, \lambda) - \tilde{\mu}_1(r, \lambda)] dr \right) \\ &\leq 1 + \exp(-\alpha_1 |\xi - s|) \leq 2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Daí,

$$\begin{aligned} |F_1(\lambda)V(\xi) - F_1(\lambda)U(\xi)| &= \left| \int_{\xi}^{\infty} S_1(\xi, \lambda)S_1(s, \lambda)C(s, \lambda)[U(s) - V(s)]ds \right| \\ &\leq \left[2 \int_{\xi_0}^{\infty} |C(s, \lambda)|ds \right] \|V - U\|_{\infty}, \quad \forall \xi \in [\xi_0, \infty), \end{aligned}$$

e assim

$$\|F_1(\lambda)V - F_1(\lambda)U\|_{\infty} \leq \left[2 \int_{\xi_0}^{\infty} |C(s, \lambda)|ds \right] \|V - U\|_{\infty}.$$

Por (5.13), podemos tomar ξ_0 suficientemente grande de tal maneira que

$$2 \int_{\xi_0}^{\infty} |C(s, \lambda)|ds < 1.$$

Logo, escolhendo ξ_0 nestas condições, o operador $F_1(\lambda)$ é uma contração.

Analogamente, para $\xi_0 \leq s \leq \xi$, temos

$$\begin{aligned} |S_2(\xi, \lambda)P_2S_2(\xi, \lambda)^{-1}| &= \left| \begin{pmatrix} \exp\left(\int_s^{\xi} [\tilde{\mu}_1(r, \lambda) - \tilde{\mu}_2(r, \lambda)]dr\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \exp\left(-\int_s^{\xi} [\tilde{\mu}_2(r, \lambda) - \tilde{\mu}_1(r, \lambda)]dr\right) \right| \\ &= \exp\left(-\int_s^{\xi} \operatorname{Re} [\tilde{\mu}_2(r, \lambda) - \tilde{\mu}_1(r, \lambda)]dr\right) \\ &\leq \exp(-\alpha_1|\xi - s|) \leq 1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|S_2(\xi, \lambda)(I - P_2)S_2(\xi, \lambda)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \leq 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |F_2(\lambda)V(\xi) - F_2(\lambda)U(\xi)| &\leq \left[\int_{\xi_0}^{\xi} |C(s, \lambda)|ds \right] \|V - U\|_{\infty} + \\ &\quad \left[\int_{\xi}^{\infty} |C(s, \lambda)|ds \right] \|V - U\|_{\infty} \\ &\leq \left[\int_{\xi_0}^{\infty} |C(s, \lambda)|ds \right] \|V - U\|_{\infty}, \quad \forall \xi \in [\xi_0, \infty), \end{aligned}$$

e analogamente concluimos que $F_2(\lambda)$ também é uma contração.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach existem $V_i^+(\cdot, \lambda) \in CB([\xi_0, \infty))$, $i = 1, 2$, tais que

$$\begin{aligned} V_i^+(\xi, \lambda) &= F_i(\lambda)V_i^+(\xi, \lambda) \\ &= e_i + \int_{\xi_0}^{\xi} S_i(\xi, \lambda)P_iS_i(s, \lambda)^{-1}C(s, \lambda)V_i^+(s)ds \\ &\quad - \int_{\xi}^{\infty} S_i(\xi, \lambda)(I - P_i)S_i(s, \lambda)^{-1}C(s, \lambda)V_i^+(s)ds. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}S_1(\xi, \lambda) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{\mu}_2(\xi, \lambda) - \tilde{\mu}_1(\xi, \lambda)] \exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} [\tilde{\mu}_2(s, \lambda) - \tilde{\mu}_1(s, \lambda)]ds\right) \end{bmatrix} \\ &= B_1(\xi, \lambda)S_1(\xi, \lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} S_1(s, \lambda)^{-1}C(s, \lambda)V_1^+(s)ds &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\xi+h}^{\xi} S_1(s, \lambda)^{-1}C(s, \lambda)V_1^+(s)ds \\ &= -S_1(\xi, \lambda)^{-1}C(\xi, \lambda)V_1^+(\xi). \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}V_1^+(\xi, \lambda) &= \frac{d}{d\xi}F_1(\lambda)V_1^+(\xi, \lambda) = -\frac{d}{d\xi}S_1(\xi, \lambda) \int_{\xi}^{\infty} S_1(s, \lambda)^{-1}C(s, \lambda)V_1^+(s)ds \\ &= -\left[\frac{d}{d\xi}S_1(\xi, \lambda)\right] \int_{\xi}^{\infty} S_1(s, \lambda)^{-1}C(s, \lambda)V_1^+(s)ds \\ &\quad - S_1(\xi, \lambda) \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} S_1(s, \lambda)^{-1}C(s, \lambda)V_1^+(s)ds \\ &= -B_1(\xi, \lambda)S_1(\xi, \lambda) \int_{\xi}^{\infty} S_1(s, \lambda)^{-1}C(s, \lambda)V_1^+(s)ds \\ &\quad + S_1(\xi, \lambda)S_1(\xi, \lambda)^{-1}C(\xi, \lambda)V_1^+(\xi, \lambda) \\ &= B_1(\xi, \lambda) [V_1^+(\xi, \lambda) - e_1] + C(\xi, \lambda)V_1^+(\xi, \lambda) \\ &= [B_1(\xi, \lambda) + C(\xi, \lambda)] V_1^+(\xi, \lambda). \end{aligned}$$

Logo $V_1^+(\cdot, \lambda)$ é uma solução do sistema (5.12) para $i = 1$. Analogamente, se mostra que $V_2^+(\cdot, \lambda)$ é uma solução de (5.12) para $i = 2$.

Ademais, de (5.14) temos que $|S_1(\xi, \lambda)S_1(s, \lambda)^{-1}| \leq 2$ para $\xi_0 \leq \xi \leq s$ e assim, da definição de $F_1(\lambda)$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} V_1^+(\xi, \lambda) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} F_1(\lambda)V_1^+(\xi, \lambda) \\ &= e_1 - \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_{\xi}^{\infty} S_1(\xi, \lambda)S_1(s, \lambda)^{-1}C(s, \lambda)V_1^+(s)ds = e_1. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} V_2^+(\xi, \lambda) = e_2.$$

Daí, segue que $V_1^+(\cdot, \lambda)$ e $V_2^+(\cdot, \lambda)$ são soluções dos sistemas (5.12) linearmente independentes. De fato, caso contrário, existiria $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $V_1^+(\cdot, \lambda) = \theta V_2^+(\cdot, \lambda)$ e assim $e_1 = \lim_{\xi \rightarrow \infty} V_1^+(\xi, \lambda) = \theta \lim_{\xi \rightarrow \infty} V_2^+(\xi, \lambda) = \theta e_2$, o que geraria um absurdo.

Logo, voltando à variável Z , temos que

$$Z_i^+(\xi, \lambda) = \exp\left(\int_{z_0}^z \tilde{\mu}_i(s, \lambda) ds\right) V_i^+(\xi, \lambda)$$

são soluções linearmente independentes do sistema (5.11).

Voltando à variável W , temos que

$$W(\xi, \lambda) = \exp\left(\int_{z_0}^z \tilde{\mu}_i(s, \lambda) ds\right) T(\xi, \lambda) V_i^+(\xi, \lambda)$$

são soluções linearmente independentes do sistema (5.9). Finalmente, voltando à variável Y , obtemos que

$$Y_i^+(\xi, \lambda) = \phi'_c(\xi) \exp\left(\int_{z_0}^z \tilde{\mu}_i(s, \lambda) ds\right) T(\xi, \lambda) V_i^+(\xi, \lambda)$$

são soluções linearmente independentes do sistema (5.6) satisfazendo

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi'_c(\xi)^{-1} \exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi} \tilde{\mu}_i(s, \lambda) ds\right) Y_i^+(\xi, \lambda) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} T(\xi, \lambda) V_i^+(\xi, \lambda) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1(\lambda) & \mu_2(\lambda) \end{bmatrix} e_i = v_i^+, \end{aligned}$$

o que conclui a prova do Teorema 5.6. \square

Como consequência dos Teoremas 5.5 e 5.6, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.7 *Sejam $c > c^*(p)$ e $0 < \alpha < c$. Se $\lambda \in N(\Omega_+)$ é um autovalor de \mathcal{L} com correspondente autofunção y_λ , então existem constantes $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ e $\xi_0 \in \mathbb{R}$, tais que*

$$\begin{aligned} y_\lambda(\xi) &\sim a_1 \exp\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4(\lambda + 1)}}{2} \xi\right), & \text{quando } \xi \rightarrow -\infty \\ y'_\lambda(\xi) &\sim a_2 \exp\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4(\lambda + 1)}}{2} \xi\right), & \text{quando } \xi \rightarrow -\infty \\ y_\lambda(\xi) &\sim a_3 \phi'_c(\xi) \exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} \tilde{\mu}_1(s, \lambda) ds\right), & \text{quando } \xi \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Prova: Como (y_λ, y'_λ) é solução do (5.6), pelo Teorema 5.5, existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $(y_\lambda, y'_\lambda) = aY_1^-(\lambda) + bY_2^-(\lambda)$.

Como

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} e^{-\mu_i^-(\lambda)\xi} Y_i^-(\xi, \lambda) = v_i^-(\lambda) = (1, \mu_i^-(\lambda)), \quad i = 1, 2,$$

temos que

$$y_\lambda(\xi) e^{-\mu_2^-(\lambda)\xi} \sim a e^{\mu_1^-(\lambda)\xi} + b e^{\mu_2^-(\lambda)\xi} \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

Daí

$$y_\lambda(\xi) e^{-\mu_2^-(\lambda)\xi} \sim a e^{-2\sqrt{c^2+4(\lambda+1)}\xi} + b \sim b \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

Logo, basta tomar $a_1 = b$.

Analogamente, de $y'_\lambda = a\mu_1^-(\lambda)Y_1^-(\lambda) + b\mu_2^-(\lambda)Y_2^-(\lambda)$, concluímos que

$$y'_\lambda(\xi) \sim a_2 \exp\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4(\lambda+1)}}{2}\xi\right) \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow -\infty,$$

onde $a_2 = \mu_2^-(\lambda)b$.

Agora pelo Teorema 5.6, existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$, tais que

$$(y_\lambda, y'_\lambda) = aY_1^+(\lambda) + bY_2^+(\lambda).$$

O resto do resultado segue de forma análoga ao caso anterior. □

Para cada $y \in C_{unif}^2(\mathbb{R})$, seja $\tilde{y}(\xi) = \exp(c\xi/2)y(\xi)$ e defina o operador $L : C_{unif}^2(\mathbb{R}) \rightarrow C_{unif}(\mathbb{R})$ por

$$L\tilde{y} = \tilde{y}'' + [p\phi_c^{p-1} - (p+1)\phi_c^p - c^4/4]\tilde{y}.$$

Teorema 5.8 *Sejam $c > c^*(p)$ e $\lambda \in \Omega_+$. Então λ é um autovalor de \mathcal{L} se, e somente se, é um autovalor de L .*

Prova: Suponha que $\lambda \in \Omega_+$ seja um autovalor de \mathcal{L} e seja $y \in C_{unif}^2$ a autofunção associada dada pelo Teorema 5.7. Temos que $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{y}(\xi) = 0$.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \left| \phi'_c(\xi) e^{c\xi/2} \exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} \tilde{\mu}_1(s, \lambda) ds\right) \right| &= -\phi'_c(\xi) e^{c\xi/2} \exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} \operatorname{Re} \tilde{\mu}_1(s, \lambda) ds\right) \\ &= -e^{c\xi_0/2} \phi'_c(\xi) \exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} [\operatorname{Re} \tilde{\mu}_1(s, \lambda)] - c/2 ds\right). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Por **(P2)** temos que $\phi_c''(\xi)/\phi_c'(\xi)$ é positivo para ξ suficientemente grande. Daí, sendo $\tilde{\mu}_i(s, \lambda)$, $i = 1, 2$, dados no Teorema 5.6, temos que

$$Re \tilde{\mu}_1(s, \lambda) < Re \mu_1^+(\lambda) < c/2$$

e assim

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} -e^{c\xi/2} \phi_c'(\xi) \exp \left(\int_{\xi_0}^{\xi} [Re \tilde{\mu}_1(s, \lambda)] - c/2 ds \right) = 0$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left| \phi_c'(\xi) e^{c\xi/2} \exp \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \tilde{\mu}_1(s, \lambda) ds \right) \right| = 0.$$

Daí e de (5.15) concluímos que $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{y}(\xi) = 0$. Analogamente se mostra que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{y}'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{y}''(\xi) = 0$$

e portanto $\tilde{y} \in C_{unif}^2(\mathbb{R})$. Ademais,

$$\begin{aligned} L\tilde{y}(\xi) &= e^{c\xi/2} \left[\frac{c^2}{4} y(\xi) + y''(\xi) + cy'(\xi) + (p\phi_c^{p-1}(\xi) - (p+1)\phi_c^p(\xi))y(\xi) - \frac{c^2}{4} y(\xi) \right] \\ &= e^{c\xi/2} \mathcal{L}y(\xi) = \lambda \tilde{y}(\xi). \end{aligned}$$

Logo λ é um autovalor de L e \tilde{y} é uma autofunção associada.

Reciprocamente, suponha que $\lambda \in \Omega_+$ seja um autovalor de L com autofunção associada $\tilde{y} \in C_{unif}^2(\mathbb{R})$. Sendo $y(\xi) = \exp(-c\xi/2)\tilde{y}(\xi)$, temos que $y(\xi) \rightarrow 0$, quando $\xi \rightarrow \infty$. Além disso, y satisfaz $\mathcal{L}y = \lambda y$ e assim (y, y') é solução do sistema (5.6). Pelo Teorema 5.5, existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $(y, y') = aY_1^-(\lambda) + bY_2^-(\lambda)$. Daí, $y(\xi) \sim ae^{\mu_1^-(\lambda)\xi} + be^{\mu_2^-(\lambda)\xi}$, quando $\xi \rightarrow -\infty$ e assim

$$y(\xi)e^{-\mu_2^-(\lambda)\xi} \sim ae^{-2\sqrt{c^2+4(\lambda+1)}\xi} + b \sim b \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

De posse dessa estimativa, analogamente concluímos que $y \in C_{unif}^2(\mathbb{R})$. Logo λ é um autovalor de \mathcal{L} . □

Teorema 5.9 *Todos os autovalores do operador L são reais.*

Prova: Considere o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ munido de seu produto interno usual

$$\langle v, u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(s)u(s)ds.$$

Temos que $L : C_{unif}^2(\mathbb{R}) \rightarrow C_{unif}(\mathbb{R})$ é um operador linear densamente definido em $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, usando integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [u'' + [p\phi_c^{p-1} - (p+1)\phi_c^p - c^4/4]u]v ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u''v ds + \int_{-\infty}^{\infty} [p\phi_c^{p-1} - (p+1)\phi_c^p - c^4/4]uv ds. \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} uv'' ds + \int_{-\infty}^{\infty} u[p\phi_c^{p-1} - (p+1)\phi_c^p - c^4/4]v ds. \\
&= \langle u, Lv \rangle, \quad \forall u, v \in C_{unif}^2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Logo L é auto-adjunto e portanto seus autovalores são reais. □

Corolário 1: Os autovalores do operador \mathcal{L} , em Ω_+ , são todos reais.

Teorema 5.10 *Se $c > c^*(p)$, então \mathcal{L}_α não possui autovalores em $\{0\} \cup \Omega_+$. Ademais, existe $\delta_1 > 0$ tal que \mathcal{L}_α não possui autovalores com parte real maior que $-\delta_1$.*

Prova: Seja $\lambda \in \{0\} \cup \Omega_+$ um autovalor de \mathcal{L} com autofunção $y_\lambda \in C_{unif}^2(\mathbb{R})$. Pelo Corolário 1, $\lambda \in \mathbb{R}$ e assim $\lambda \geq 0$.

Seja $y_\lambda = w_\lambda \phi_c'$. De $\mathcal{L}y_\lambda = \lambda y_\lambda$, obtemos

$$w_\lambda'' + \left(2\frac{\phi_c''}{\phi_c'} + c\right)w_\lambda' + \left[\frac{\phi_c'''}{\phi_c'} + c\frac{\phi_c''}{\phi_c'} + p\phi_c^{p-1} - (p+1)\phi_c^p\right]w_\lambda = \lambda w_\lambda.$$

Como $u(x, t) = \phi_c(x - ct)$ é solução da equação (5.1), temos que

$$-c\phi_c' - \phi_c'' = \phi_c^p - \phi_c^{p+1}.$$

Daí, derivando esta última igualdade, temos que

$$-c\phi_c'' - \phi_c''' = p\phi_c^{p-1}\phi_c' - (p+1)\phi_c^p\phi_c'.$$

Logo

$$w_\lambda'' + \left(2\frac{\phi_c''}{\phi_c'} + c\right)w_\lambda' = \lambda w_\lambda.$$

Multiplicando esta equação pelo fator integrante $\exp\left[\int_0^\xi \left(\frac{2\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} + c\right) ds\right]$, obtemos

$$\left[\exp\left[\int_0^\xi \left(\frac{2\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} + c\right) ds\right]w_\lambda'(\xi)\right]' = \lambda w_\lambda(\xi) \exp\left[\int_0^\xi \left(\frac{2\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} + c\right) ds\right]. \quad (5.16)$$

Consideremos inicialmente $\lambda = 0$. Por (5.16), existe uma constante $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$w'_0(\xi) = k \exp \left[- \int_0^\xi \left(\frac{2\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} + c \right) ds \right].$$

Pelo Teorema 5.3, existe uma constante $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_c'(\xi) \sim k_1 \exp \left(\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \xi \right)$ quando $\xi \rightarrow -\infty$. Daí, pelo Teorema 5.7, $\frac{y_0(\xi)}{\phi_c'(\xi)}, \frac{y'_0(\xi)}{\phi_c'(\xi)} \sim k_1$ quando $\xi \rightarrow -\infty$. Agora de $y_0 = w_0 \phi_c'$, segue que $w'_0 = \frac{y'_0}{\phi_c'} - \frac{\phi_c''}{\phi_c'} \cdot \frac{y_0}{\phi_c'}$ e por **(P2)**, $w'_0(\xi)$ é limitada quando $\xi \rightarrow -\infty$.

Por outro lado, por **(P3)**,

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \exp \left[\int_0^\xi - \left(\frac{2\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} + c \right) ds \right] = \infty$$

e assim, para que $w'_0(\xi)$ seja limitada para $\xi \rightarrow -\infty$, devemos ter $k = 0$. Logo $w_0 = k_2$ é uma função constante e portanto $y_0 = k_2 \phi_c'$, isto é, o auto espaço associado ao autovalor 0 é gerado por ϕ_c' .

Pelo Teorema 5.3, $\phi_c'(\xi) \sim k_3 \xi^{-p/(p-1)}$ quando $\xi \rightarrow \infty$, onde a constante k_3 é dada por $k_3 = c^{1/(p-1)}/(p-1)^{p/(p-1)}$. Daí, $\phi_c'(\xi) q_\alpha(\xi) \sim (1 + e^{\alpha\xi} k_3 \xi^{-p/(p-1)})$ quando $\xi \rightarrow \infty$ e assim $\phi_c' \notin C_\alpha$. Portanto 0 não é um autovalor de \mathcal{L}_α .

Agora vamos mostrar que o operador \mathcal{L} não possui autovalores positivos. Como todo autovalor de \mathcal{L}_α é autovalor de \mathcal{L} , teremos o resultado.

Suponha, por contradição, que \mathcal{L} possua pelo menos um autovalor positivo. Assim, pelo Teorema 5.8, o operador L também possui algum autovalor positivo, já que possui os mesmo autovalores que \mathcal{L} . Da teoria de Sturm-Liouville (veja por exemplo [Sotomayor]), os autovalores do problema $L\tilde{y} = \lambda\tilde{y}$ formam uma sequência $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n > \dots$, com $\lambda_n \rightarrow -\infty$ e a autofunção \tilde{y}_{λ_0} , associada ao primeiro autovalor λ_0 , não muda de sinal. Como o operador L possui algum autovalor positivo, devemos ter $\lambda_0 > 0$. Daí, a autofunção $y_{\lambda_0}(\xi) = \exp(-c\xi/2)\tilde{y}_{\lambda_0}(\xi)$ (com respeito à \mathcal{L}) também não muda de sinal.

Suponha sem perda de generalidade que $y_{\lambda_0}(\xi) > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 5.7, $|w_{\lambda_0}(\xi)| = |y_{\lambda_0}(\xi)/\phi_c'(\xi)| \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow \infty$. Portanto, pelos Teoremas 5.7 e 5.3, existe uma constante $k \in \mathbb{R}$, tal que $w_{\lambda_0}(\xi) = y_{\lambda_0}(\xi)/\phi_c'(\xi) \sim k \exp([\sqrt{c^2 + 4}(\lambda_0 + 1) - \sqrt{c^2 + 4}]/2)$ e assim $|w_{\lambda_0}(\xi)| \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow -\infty$. Analogamente temos $|w'_{\lambda_0}(\xi)| \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Agora note que w'_{λ_0} não é identicamente nula, pois caso contrário, w_{λ_0} seria constante e assim ϕ_c' seria uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_0 > 0$. Mas isto não pode ocorrer, pois teríamos dois autovalores distintos (0 e λ_0) associados a mesma autofunção, acarretando um absurdo.

Como w'_{λ_0} não é identicamente nula e $|w_{\lambda_0}(\xi)| \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow \pm\infty$, então existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tal que $w'(\xi_0) > 0$. Trocando o limite de integração inferior 0 por ξ_0

em (5.16), como $\lambda_0 > 0$ e $w_{\lambda_0}(\xi) = y_{\lambda_0}(\xi)/\phi'_c(\xi) < 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$, temos que

$$\left[\exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{2\phi''_c(s)}{\phi'_c(s)} + c \right) ds \right] w'_{\lambda_0}(\xi) \right]' < 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Daí

$$\exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{2\phi''_c(s)}{\phi'_c(s)} + c \right) ds \right] w'_{\lambda_0}(\xi) > w'_{\lambda_0}(\xi_0) \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi_0} \left(\frac{2\phi''_c(s)}{\phi'_c(s)} + c \right) ds \right], \quad \forall \xi < \xi_0,$$

e assim

$$w'_{\lambda_0}(\xi) > w'_{\lambda_0}(\xi_0) \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} - \left(\frac{2\phi''_c(s)}{\phi'_c(s)} + c \right) ds \right], \quad \forall \xi < \xi_0. \quad (5.17)$$

De **(P3)** e (5.17), segue que $w'_{\lambda_0}(\xi) \rightarrow \infty$ quando $\xi \rightarrow -\infty$, contrariando $|w'_{\lambda_0}(\xi)| \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow -\infty$. Logo \mathcal{L} não possui autovalores positivos e consequentemente, \mathcal{L}_α também não possui autovalores positivos.

Como \mathcal{L} não possui autovalores positivos, então o primeiro autovalor λ_0 de \mathcal{L} é negativo. Tomando $-\delta_1 \in (\lambda_0, 0)$, temos que todos os autovalores de \mathcal{L} são menores que $-\delta_1$ e consequentemente todos os autovalores de \mathcal{L}_α são menores que $-\delta_1$. \square

Finalmente, temos o resultado principal deste Capítulo.

Teorema 5.11 *Seja $c^*(p)$ o valor crítico obtido no Teorema 5.3. Se $c > c^*(p)$ e $0 < \alpha < c$, então a onda viajante ϕ_c , obtida no Teorema 5.3, é exponencialmente assintoticamente estável, com translação, na norma $\|\cdot\|_\alpha$.*

Prova: Seja $\delta = \min\{\delta_\alpha, \delta_1\} > 0$, onde $\delta_\alpha > 0$ e $\delta_1 > 0$ são dados nos Teoremas 5.4 e 5.10 respectivamente. Temos que o espectro $\sigma(\mathcal{L}_\alpha) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{Re } \lambda < -\delta\}$. Portanto, como \mathcal{L}_α é setorial, pelo Teorema 3.1, a onda viajante ϕ_c é exponencialmente, assintoticamente estável, com translação, na norma $\|\cdot\|_\alpha$. \square

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho estudamos um modelo de combustão, que governa a propagação de uma frente de temperatura em um meio poroso. Este modelo aparece na modelagem matemática da combustão *in-situ*, um método de recuperação de poços petrolíferos que otimiza e aumenta seu tempo de produção. Provamos a existência e unicidade de uma onda viajante para este modelo, para uma faixa de valores de velocidades de propagação da onda, conectando os dois estados de equilíbrio do sistema, que correspondem aos estados queimado e não queimado, após e antes a passagem da frente de temperatura, respectivamente. As principais ferramentas usadas, na nossa abordagem, foram técnicas de perturbação singular geométrica (para provar a existência da onda) e a integral de Melnikov (para provar a unicidade da onda).

Em seguida, nos dedicamos a equação KPP, uma equação do tipo reação-difusão que aparece em problemas de reações químicas autocatalíticas isotérmicas. Usando técnicas similares ao do modelo de combustão, provamos a existência e unicidade de uma onda viajante conectando os dois estados de equilíbrio do sistema. Para esta equação, fomos um pouco mais além, e estudamos a estabilidade, das ondas não fortes, sob perturbações em um certo espaço de Banach com peso na norma. Estabelecemos condições para que o espectro do operador diferencial associado (definido no espaço com peso na norma) se mantenha no lado esquerdo do eixo imaginário do plano complexo, obtendo o resultado desejado via teoremas clássicos da teoria espectral dos operadores diferenciais.

Uma continuação natural do trabalho aqui exposto, seria tentar aplicar as técnicas usadas para a equação KPP, para obter resultados de estabilidade para as ondas não fortes do modelo de combustão, que, até o momento, não existem na literatura.

Bibliografia

- [Barnes] BARNES, A. N., *Reaction-Diffusion Waves in an Isothermal Chemical System with a General Order of Autocatalysis*, Msc Dissertation, University of Reading, Reading, UK, 1996.
- [Bender] BENDER, C. M., ORSZAG, S. A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I, Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Springer, New York, 1999.
- [Billingham] BILLINGHAM J., NEEDHAM D. J., *A Note on the Properties of a Family of Traveling-Wave Solutions Arising in Cubic Autocatalysis*, Dynamics and Stability of Systems, vol 6, n° 1, 1991.
- [Carr] CARR, J., *Applications of Centre Manifold Theory*, Applied Mathematical Sciences, Vol 35, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [Chicone] CHICONE, C., *Ordinary Differential Equations With Applications*, Texts in Applied Mathematics, 34, Springer, New York, 1999.
- [Coppel] COPPEL, W. A., *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.
- [Doering] DOERING, C. I., LOPES, A. O., *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Matemática Universitária, 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [Da Mota] DA MOTA, J. C., SCHECTER, S., *Combustion Fronts in a Porous Media With Two Layers*, Journal of Dynamics and Differential Equations, v. 18, 615-665, 2006.
- [Edmunds] EDMUNDS D. E. and EVANS W. D., *Spectral Theory and Differential Operators*, Oxford Science Publications, New York, 1987.
- [Fenichel] FENICHEL, N., *Persistence and Smoothness of invariant manifolds for flows*, Indiana University Math. Journal, 21, pg 193-226, 1971.
- [Gardner] GARDNER, R. A. and JONES C. K. R. T. *Stability of One-Dimensional Waves in Weak and Singular Limits*. proceedings of the Workshop on Viscous Profiles and Numerical Methods for Shock Waves (Raleigh, North-Carolinne, 1990), 32-48, SIAM, Philadelphia, PA, 1991.
- [Henry] HENRY D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1981.

- [Holmes] HOLMES, M. H., *Introduction to Perturbation Methods*, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 1995.
- [Jones] JONES, C. K. R. T., *Geometric Singular Perturbation Theory*, Lecture Notes in Math, 1994.
- [Magnitskii] MAGNITSKII, N. A., SIDOROV, S. V., *New Methods For Chaotic Dinamics*, World Scientific Series on Nonlinear Science, series A, Vol 58, 2006.
- [Phongi] PHONGI, E. K., *Centre Manifold Theory With an Application in Population Modelling*, Msc Dissertation, University of KwaZulu-Natal, Durban, 2009.
- [Sandstade] SANDSTADE, B., *Stability of Traveling Waves*. Handbook of Dynamical Systems, vol 2, 983-1055, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Schecter] SCHECTER, S. *The Saddle-Node Separatrix-Loop Bifurcation*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, vol 18, pp. 1142-1156, 1987.
- [Smoler] SMOLER, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, 2^a edition, Springer, 1994, New York.
- [Sotomayor] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides. Rio de Janeiro, IMPA, 1979.
- [Volpert] VOLPERT, A. I., et Al. *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, Translations of mathematical Monographs, vol 140, AMS, USA 2000.
- [Wu] WU, I., XIANG, X., YE, Q., *Stability of Traveling Waves With Algebraic Decay For n -Degree Fisher-Type Equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol 16, n^o 1, 2006.