



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Defeitos analíticos em gravidade $f(R)$

ARTHUR SOUZA RAMOS

CAMPINA GRANDE
-DEZEMBRO DE 2018-

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Defeitos Analíticos em Gravidade $f(R)$

Arthur Souza Ramos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Linha de Pesquisa: Teoria Geral de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

CAMPINA GRANDE

- Julho 2018 -

R175d Ramos, Arthur Souza.
Defeitos analíticos em gravidade $f(R)$ / Arthur Souza Ramos. –
Campina Grande, 2018.
63 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos".
Referências.

1. Defeitos. 2. Formalismo de primeira ordem. 3. Teoria
modificada de gravitação. 4. Parâmetros cosmológicos. I. Santos,
João Rafael Lucio dos. II. Título.

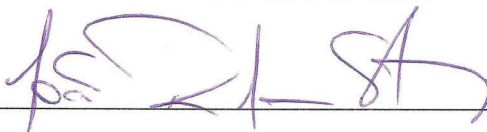
CDU 53(043)

ARTHUR SOUZA RAMOS

DEFEITOS ANALÍTICOS EM GRAVIDADE $f(R)$

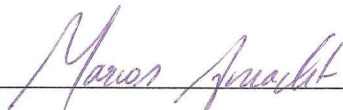
Dissertação aprovada em 19/12/2018

BANCA EXAMINADORA



(Presidente)

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



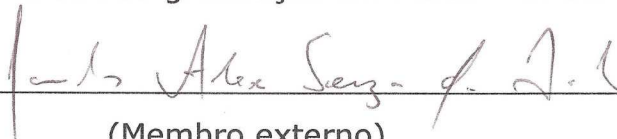
(Membro interno)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Danilo Cesar Moreira
Programa de Pós-graduação em Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – CG

Agradecimentos

A Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele.

Agradeço ao meu pai, herói que me deu apoio e incentivo nas horas difíceis. Agradeço também à minha mãe pelo incentivo e dedicação diária. Vocês dois são a base da minha vida. Não posso esquecer dos meus irmãos, Lucas e Rafael, pelo apoio e torcida.

O que falar de Renata Silva? Pessoa com quem amo partilhar a vida. Com você tenho me sentido mais vivo de verdade. Obrigado pelo carinho, paciência e por sua capacidade de me trazer paz na correria de cada ano.

Agradeço a todos os professores, especialmente ao orientador João Rafael. Obrigado, professor, por ter paciência e exigir de mim muito mais do que eu imaginava ser capaz de fazer. Manifesto aqui minha gratidão eterna por compartilhar sua sabedoria, o seu tempo e sua experiência.

Meus agradecimentos aos amigos Renan Aragão e Kelven Felix, companheiros de trabalhos e irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação, desde da graduação, e que vão continuar presentes em minha vida. A todos os professores do curso, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento desta dissertação. O meu muito obrigado à UFCG por me proporcionar o melhor ambiente educacional.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida.

E a todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de defeitos do tipo kink (curva vermelha) e anti-kink (curva azul).	10
2.2	Gráfico do potencial ϕ^4 .	11
2.3	Potencial ϕ^4 invertido.	12
2.4	Soluções do tipo lump (linha azul) e anti-lump (linha vermelha).	13
2.5	Densidades de energia para a solução tipo lump (linha vermelha) e para a solução tipo kink (linha azul).	14
2.6	Defeito original χ representado pela linha vermelha e defeito deformado ϕ representado pela linha azul.	17
3.1	A figura a seguir mostra as três formas do Universo e seus respectivos valores do parâmetro de curvatura k . Figura editada pelo autor.	23
5.1	Campo ϕ do modelo, assumindo que $\beta = 0.280$, $c_1 = -0.375$ e $c_2 = 0.5$	41
5.2	Parâmetro de Hubble H para $b = 0.301$, $c_1 = -0.375$, $c_2 = 0.5$ e $c_3 = 1.953$.	42
5.3	Gráfico \log versus t de $\ln(a)$ onde consideramos $b = 0.301$, $c_1 = -0.375$, $c_2 = 0.5$ e $c_3 = 1.953$.	43
5.4	Parâmetro da taxa de desaceleração \bar{q} com $b = 0.301$, $c_1 = -0.375$, $c_2 = 0.5$ e $c_3 = 1.953$.	43
5.5	Parâmetro da equação de estado ω , para valores de $b = 0.301$, $c_1 = -0.375$, $c_2 = 0.5$ e $c_3 = 1.953$, $\alpha = 0.053$ e $\beta = 0.280$	44

Resumo

Defeitos são soluções oriundas de equações diferenciais não-lineares e estão presentes no quadro de teoria clássica de campos. Essas soluções podem ser comparadas com ondas solitárias, e podem ser classificadas como estáveis, ou kinks em uma dimensão, ou instáveis, denominadas por lumps em uma dimensão. Este trabalho tem objetivo de apresentar uma aplicação de defeitos topológicos, em modelos cosmológicos, de uma teoria modificada de gravitação. Essa teoria, alternativa à Relatividade Geral, busca generalizá-la de modo a explicar fenômenos não abordados nas equações usuais de Einstein. A teoria $f(R)$, estudada neste trabalho, é um exemplo dessas teorias alternativas e é baseada na inclusão de um termo geométrico de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert. Utilizando o modelo Starobinski para $f(R)$, neste trabalho foi introduzido um método chamado de formalismo de primeira ordem, o qual consiste em conectar o parâmetro de Hubble com uma função de um campo escalar de fundo. Como novos resultados, geramos parâmetros cosmológicos analíticos como o parâmetro da equação de estado, a taxa de desaceleração, entre outros. Esses parâmetros foram produzidos decorrentes do modelo utilizado e foi constatado que eles são válidos com a descrição da fase atual do universo.

Palavras-chave: Defeitos, formalismo de primeira ordem, teoria modificada de gravitação, parâmetros cosmológicos.

Abstract

Defects are solutions derived from non-linear differential equations and they are present within the framework of classical field theory. These solutions can be compared with solitary waves, which are classified as stable, or kinks in one dimension, or unstable, called lumps in one dimension. This dissertation aims to introduce an application of topological defects in cosmological model based on a modified gravity theory. This theory, alternative to general relativity, searches to generalize it in order to explain phenomena not described in usual Einstein equations. The $f(R)$ theory is an example of such alternative theory and it is based on the addition of a geometric higher order term in the Einstein-Hilbert action. In this dissertation we worked with the so-called Starobinski's model for $f(R)$, via a method called first-order formalism. Such a method consists in connect a function of a background scalar field with Hubble's parameter. As new results, we derived analytical cosmological parameters like the equation of state (EoS) parameter, the deceleration parameter, among others. These parameters are able to describe the actual expansion phase of the universe.

Keywords: Defects, first-order formalism, modified gravity theory, cosmological parameters.

Sumário

1	Introdução	1
2	Defeitos Topológicos em 1+1 Dimensões	5
2.1	Teoria para um Campo Escalar Real	5
2.2	Método BPS	7
2.3	Carga Topológica	9
2.4	Solução do Tipo Kink	10
2.5	Soluções do Tipo Lump	12
2.6	Método da Deformação	14
3	Relatividade Geral	18
3.1	Equação de Einstein	20
3.2	Modelo FLRW	22
3.3	Tensor Energia-Momento para um fluido perfeito	25
3.4	Parâmetros Cosmológicos	28
3.5	Formalismo de Primeira Ordem	29
4	Teorias $f(R)$	32
4.1	Equação de Campo para $f(R)$	33
4.2	Modelo Starobinski	38
5	Modelo Analítico Gerado	40
6	Conclusões e Perspectivas	45
A	Minimização da Ação	47
B	Equações de Friedmann	50
C	Variacional do Tensor Métrico	53
D	Equação da Continuidade de um fluido cosmológico	55

Capítulo 1

Introdução

Campos escalares clássicos têm sido objeto de estudos nas mais diversas áreas da Física, e suas propriedades podem ser determinadas através de soluções analíticas das equações de movimento oriundas da minimização de uma dada ação. Em sistemas com a parte cinemática usual, as características das soluções estão relacionadas diretamente com o potencial. Via de regra, no momento em que usamos campos escalares reais, os potenciais gerados serão não-lineares dificultando a determinação de cenários analíticos. Os campos unidimensionais que satisfazem tais sistemas são denominados de defeitos [1].

Esses defeitos podem se apresentar de duas formas: ou serão defeitos topológicos ou serão defeitos não topológicos. Defeitos topológicos são soluções que possuem carga topológica diferente de zero, caracterizada por potenciais com quebra de simetria. Já defeitos não-topológicos são aqueles que apresentam carga topológica nula [1].

Por se tratarem de soluções não-lineares e solitárias, podemos traçar um paralelo entre defeitos e soluções tipo sóliton¹ [2]. Sólitons hidrodinâmicos foram observados pela primeira vez por Scott Russell em 1834 [3]. Russell relatou a dinâmica dessas ondas solitárias quando um barco deixou de ser puxado em um canal subitamente. O barco produziu uma oscilação no canal que segundo Russell mantinha seu movimento e sua forma constantes, percorrendo uma longa distância ao longo do canal.

Assim como o sóliton é um tipo de defeito, os kinks são soluções que conectam dois mínimos consecutivos e degenerados de um potencial. Como consequência disso, surge a corrente topológica. A diferença essencial entre defeitos e sólitons é que os primeiros não mantêm suas características originais quando sujeitos a fenômenos de espalhamento [1]. Sólitons por sua vez, possuem um número infinito de cargas conservadas, e por esta razão não dissipam mesmo quando sofrem espalhamento.

Uma característica importante dos kinks é a presença de uma carga topológica oriunda da conservação de uma corrente topológica. Podemos definir então que os kinks são soluções que conectam dois mínimos globais dos potenciais de cada um dos modelos [1], tal região entre os mínimos é conhecida como setor topológico. Além disso, apesar de defeitos como os kinks não serem invariantes sob espalhamento, eles são estáveis sob pequenas perturbações.

O fato de certos defeitos serem estáveis e do algebrismo por trás de teoria clássica de campos escalares ser um tanto quanto acessível, resulta em uma vasta aplicabilidade deste tipos de modelos, tais como em física de altas energias [4,5], em modelos cosmológicos [6,7], em física de matéria condensada [8] e cenários de branas [9]. A presente dissertação

¹Sóliton é uma concepção mais geral do que ondas solitárias e consiti em uma configuração de campo onde a energia situa-se localizada e não dissipava.

fundamenta-se na aplicação de campos escalares em cenários cosmológicos.

Até o século XIX, a física era uma ciência importante e dita como quase completa. O ilustre físico William Thomson (1824-1907), mais conhecido como Lord Kelvin, disse: “No céu azul da física clássica existem apenas duas nuvens a serem dirimidas e seria questão de tempo resolvê-las”. As duas nuvens citadas por ele fazem menção à dois fenômenos físicos que na época ainda não eram explicados: a existência do éter e o problema da radiação do corpo negro. Curioso que essas duas nuvens deram origem a duas teorias que revolucionaram a ciência: a relatividade e a mecânica quântica [10].

Os estudos da relatividade começou com Galileu Galilei (1564-1642) definindo o espaço e tempo como entidades absolutas e independentes. Séculos após os estudos de Galileu, J. C. Maxwell (1831-1879) constatou que a luz possui natureza ondulatória, composta por campos elétrico e magnético, com velocidade bem definida. Além disso, a equação da onda eletromagnética ou da luz, não era invariante sob as consagradas transformações de Galileu, mas sim sob um novo conjunto de transformações, denominadas transformações de Lorentz. As características fenomenológicas das transformações de Lorentz foram interpretadas fisicamente por Albert Einstein em 1905, que reformulou o princípio da relatividade, a partir de então denominada por Relatividade Especial.

Após 10 anos da publicação da Relatividade Especial, Einstein concluiu as equações que formulam a Lei de Gravitação de maneira geral. A missão de Einstein foi complexa, pois precisava elaborar uma teoria matemática, fundamentada em cálculo tensorial, que corrobora os postulados da relatividade especial. Ou seja, Einstein refinou uma teoria da gravitação, convertendo o problema do movimento dos corpos celestes em dinâmica (definida como força) para um em cinemática (movimento) [11].

A concepção de Einstein nos revela a combinação entre geometria e quantidade de energia, ou seja, a geometria será distorcida devido à presença de matéria contida na região. Logo mais tarde, através de fotografias astronômicas, foi constatado a validação dessa teoria e Einstein se tornou um dos maiores físicos da história.

Einstein só conseguiu concluir sua teoria graças a álgebra tensorial e a geometria não-euclidiana incorporada nos cálculos da Relatividade Geral, em que as contribuições de Christoffel, Riemann e Lorentz foram de suma importância para fundamentar as novas concepções de deformação do espaço.

O primeiro artigo que Einstein escreveu sobre cosmologia foi publicado em 1917 [12], ao abordar um modelo cosmológico de um universo estático, finito e homogêneo. Para tanto, foi necessário impor um termo que vetaria a expansão do universo, denominado de Constante Cosmológica. Para infelicidade de Einstein, foi observado a expansão do universo que o fez abdicar dessa constante.

Por mais que Einstein tenha errado ao considerar a constante cosmológica, as equações de RG eram precisas em diversos fenômenos físicos, como: a trajetória no periélio de Mercúrio, redshift gravitacional e além de explicar o encurvamento da luz [13–16]. No capítulo 3, falaremos mais sobre esses fenômenos.

Nos dias atuais vivenciamos uma fase de ouro da cosmologia devido ao novo patamar de observações cosmológicas experimentais. Entre tais observações destacamos a constatação de uma fase de expansão acelerada do Universo [17–19], e a comprovação da existência de ondas gravitacionais [20–22]. O Universo atual está baseado no modelo chamado de cosmologia padrão ou Λ CDM, cuja proposta fundamenta-se em um cenário atual de expansão acelerada mediado por uma constante cosmológica, compondo cerca de 70% do conteúdo do seu conteúdo de matéria. Além disso, os outros 30% de matéria restante são constituídos de matéria escura (cerca de 26%), e de matéria bariônica (cerca

de 4%).

As observações cosmológicas mais atuais também apontam que nosso Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala. Homogeneidade, no princípio cosmológico, é a distribuição de matéria no universo e isotropia basicamente é a ausência de direções privilegiadas, de modo que os fenômenos físicos serão os mesmos independentemente da direção. A constatação dessa característica do Universo atual foram obtidas através de medidas dos diagramas de Hubble via supernovas do tipo Ia [23] e por meio do espectro da chamada Radiação Cósmica de Fundo [19].

Como apontado previamente, uma das mais relevantes observações cosmológicas atuais consiste na atual fase de expansão acelerada do Universo. No final do século XX, dois grupos experimentais independentes, High Redshift Supernova Team e Supernova Cosmology Project, provaram que o Universo está em expansão acelerada [17, 18]. Tais grupos esperavam que a magnitude de supernovas do tipo Ia indicassem que o Universo está em um gradual processo de desaceleração. Contudo, após a observação cuidadosa de diversas supernovas os grupos concluíram que os dados indicam um Universo que expande aceleradamente por pelo menos metade de sua história. A fonte dessa misteriosa aceleração ficou conhecida na literatura como energia escura, e esta corresponde a maior parte do conteúdo do Universo [19]. A proposta teórica mais simples e usual para a explicação da energia escura é baseada em uma constante cosmológica.

A constante cosmológica apesar de resolver o problema da natureza da energia escura, também possui inconsistências em sua descrição da aceleração. Entre as inconsistências destacam-se a questão da coincidência cósmica e a enorme discrepância existente entre a determinação do valor da constante cosmológica via teoria quântica de campos e via relatividade geral. Consequentemente, existe espaço para outras abordagens que podem descrever de forma satisfatória o processo de expansão do Universo, tal como a abordagem via campos escalares de fundo.

Campos escalares surgem como uma alternativa para explicar a expansão cósmica acelerada do universo [24–30]. Isto é, o campo escalar real pode ser utilizado para descrever a energia escura, como sendo um método alternativo para a descrição da expansão anterior, diferente da formulação empregada para constante cosmológica. Também destacamos o formalismo empregado para recuperar resultados observados experimentalmente, como o parâmetro da equação de estado, o índice espectral e a razão escalar tensor.

Para esse fim, a presença do campo escalar, conhecido também como ínflaton, admite a construção de um modelo capaz de atender os principais problemas encontrados na teoria padrão, em um regime inflacionário [25].

É interessante notar que, a inserção de um campo escalar nos possibilita gerar, também, um modelo ϕ -CDM (ϕ - Cold Dark Matter), cujo campo escalar ϕ corresponde ao conteúdo de energia escura do universo [31]. Nesse modelo, a aceleração cósmica na fase atual é fruto da dinâmica associada ao campo escalar, possibilitando extrair uma equação de estado, ω_e , variável².

A área dos campos escalares é muito vasta na cosmologia, destacamos ainda os áxions, possível postulante à matéria escura [33], e dilation. Esse dilation está relacionado à ação de baixas energias das teorias das cordas e é um candidato a resolver os dilemas da inflação, incluindo o da singularidade [34, 35]. Atualmente, há autores propondo que campos escalares, ou quintessência, seja tratada como matéria escura não bariônica [36], pois, esses campos podem estar relacionados nas formações de estruturas em larga escala.

²Para mais detalhes, vide [17, 32] como mostra as observações das curvas de luminosidade de supernovas do tipo Ia.

Além de campo escalar, existem outras perspectivas como, as teorias modificadas de gravitação. Essas teorias são uma linha de pesquisa que têm o objetivo de explicar esses fenômenos não explicados pela RG, expandindo elementos da relatividade Geral. Entre essas teorias, destacamos: Teorias de gravidade de Gauss-Bonnet [39], teoria Horava-Lifshitz da gravitação [40–42], Teorias $f(R)$ da Gravitação [36–38], dentre outros. Esses trabalhos propõem uma modificação na formulação geométrica das equações de Einstein, possibilitando um novo campo de estudos de eventos gravitacionais.

A teoria $f(R)$ surge com A. Buchdahl em 1970 [37] e tem a finalidade de alterar o escalar de Ricci, presente nas equações de Einstein, e substituir por uma função que dependa apenas desse escalar. Isto é, uma mudança entre R para uma função $f(R)$ sugere uma generalidade, de modo que se $f(R)$ for igual a R , retomará as equações usuais de Einstein. Essa generalidade fornece uma lagrangiana de ordem mais alta e não linear nas derivadas da métrica [38].

Uma vantagem da teoria $f(R)$ é a possibilidade de se obter soluções cosmológicas devido a esses termos de ordem superior. Com isso, podemos ter mais alternativas para a matéria escura e a energia escura, em especial aquelas que utilizam a métrica do modelo FLRW. Outra utilidade dessa teoria é o fato de ser renormalizável, diferente da Relatividade Geral [39].

Dito isso, vamos relatar agora como a estrutura em que dissertação será organizada. Apresentamos no segundo capítulo a análise dos campos escalares reais para modelos de um e dois campos, o qual adotaremos teorias de campos relativística que se submete à métrica de Minkowski e convenções de unidades naturais. Ressaltamos que os modelos tratados nesse trabalho são constituídos por campos escalares com uma dimensão espacial, ou estáticos, os quais obedecem às equações diferenciais de primeira e segunda ordem. Para abranger esta obra, faremos o estudo das soluções do tipo BPS (Bogomol’nyi, Prasad e Sommersfield), as quais representam os defeitos não-triviais com energia mínima.

No capítulo 3, falaremos sobre Relatividade Geral e Cosmologia. Começamos com um contexto histórico apontando os principais eventos ocorridos até a metade do século XX. Durante essa explanação, descreveremos os principais postulados desta teoria. Finalizada essa parte da introdução, apresentaremos a equação de campo. Após, falaremos sobre o modelo FLRW, o primeiro modelo a considerar o universo em expansão. Ainda há tópicos sobre parâmetros cosmológicos e encerrando com o formalismo de primeira ordem.

No capítulo 4, abordaremos as teorias alternativas da gravitação, mais especificamente teoria $f(R)$. Após de narrar sobre a história e as motivações desta teoria, apresentaremos, detalhadamente, a equação de campo modificada. Em seguida, discorreremos sobre o modelo Starobinsky e finalizamos este capítulo apresentando resultados obtidos e suas interpretações físicas.

No final do trabalho, há três apêndices que servirão como material de apoio. A primeira delas é referente à minimização da ação gerando a equação de Euler-Lagrange. No apêndice B apresentamos, com detalhes, os símbolos de Christoffel não nulos e os tensores de Ricci da métrica FLRW. Por fim, no apêndice C, demonstramos uma propriedade muito útil, utilizada no capítulo sobre Relatividade Geral e Teoria $f(R)$, para obter as equações de campo.

Capítulo 2

Defeitos Topológicos em 1+1 Dimensões

No início deste capítulo, apresentaremos generalidades sobre modelos compostos por um campo escalar real. Para isso, adotaremos teorias de campos relativísticas que se submetem à métrica de Minkowski e às convenções de unidades naturais, ou seja, $c = \hbar = 1$, sendo c a velocidade da luz e \hbar a constante de Planck dividida por 2π . Ressaltamos que os modelos tratados neste trabalho são constituídos por campos escalares com uma dimensão espacial e com uma dimensão temporal, ou seja (1+1) dimensões, e estes são soluções das equações de movimento dos sistemas. Para obtermos soluções de defeitos analíticos, utilizaremos o chamado método BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Sommersfield), o qual resulta em defeitos com energia mínima não-trivial. Abordaremos ainda, o conceito de carga e de corrente topológica, bem como o chamado método da deformação.

2.1 Teoria para um Campo Escalar Real

Defeitos topológicos tratam-se de soluções que descrevem transições entre diferentes fases de sistemas físicos. Em outras palavras, podemos definir um defeito topológico como sendo uma seção de um sistema onde ocorre uma mudança de propriedades e/ou característica [40].

No cenário de teoria de campos, os defeitos topológicos são soluções clássicas vindas das equações de movimento para uma topologia não trivial. Esses defeitos acontecem em modelos que resistem à quebra espontânea de simetria. O principal motivo de estudo desta área é analisar o comportamento dos campos num regime assintótico, ou seja, no estado de vácuo [41].

Neste capítulo, trabalharemos as teorias que retratam modelos de um campo escalar real em (1,1) dimensões. Resultados como equação do movimento, soluções topológicas ou não-topológicas e energia serão apresentadas nesta seção.

A densidade de lagrangiana para um escalar real é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde adotaremos $\mu = 0, 1$ e $V(\phi)$ é o potencial que particulariza o modelo abordado. Já que estamos considerando dois valores possíveis para μ , podemos reescrever a densidade de lagrangiana da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi - V(\phi). \quad (2.2)$$

Definindo o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ da seguinte maneira

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

podemos escrever a lagrangeana \mathcal{L} como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi), \\ \mathcal{L} &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\phi'^2}{2} - V(\phi), \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\dot{\phi}$ é a derivada parcial do campo com relação ao tempo e ϕ' é a derivada parcial do campo com relação à posição.

De acordo com a equação (2.1) encontraremos, a partir da minimização da ação, uma expressão da equação do movimento para uma lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, que é dada por:

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.5)$$

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0, \quad (2.6)$$

onde $\ddot{\phi}$ é a derivada segunda parcial do campo com relação ao tempo e ϕ'' é a derivada segunda parcial do campo com relação à posição.

Considerando um cenário de campo estático¹, ou seja, onde $\phi = \phi(x)$ temos

$$\dot{\phi} = 0 \quad e \quad \ddot{\phi} = 0,$$

consequentemente, a equação (2.6) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} -\phi'' + V_\phi &= 0, \\ \phi'' &= V_\phi, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $V_\phi = \frac{dV}{d\phi}$

Agora, precisamos fazer alguns truques matemáticos para obter a equação diferencial de primeira ordem. Esse artifício consiste em multiplicar a equação de movimento (2.7), em ambos os lados, por ϕ' e integra-la em relação à coordenada x . Tal procedimento resulta em

¹Soluções estáticas significam que o sistema de referências é comóvel à solução.

$$\begin{aligned}
\phi' \phi'' &= V_\phi \phi', \\
\int dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi'^2}{2} \right) &= \int \frac{d}{dx} [V(\phi)] dx, \\
\frac{\phi'^2}{2} &= V_\phi + \frac{C}{2}, \\
\phi' &= \pm \sqrt{2V + C},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

tratando-se de uma equação diferencial de primeira ordem. A constante C surge da integração e, a princípio, pode ter qualquer valor, contudo, é possível demonstrar que tal constante deve ser nula para que as soluções tenham energia finita, vide [1].

2.2 Método BPS

Nesta seção, vamos apresentar um método chamado de BPS que está relacionado com o cálculo da energia mínima do sistema. Esse método foi desenvolvido de forma independente por Bogomol'nyi (1976) [42], Prasad e Sommerfield (1975) [43], e tem como objetivo determinar a energia mínima não trivial de uma solução. Veremos também que os defeitos provenientes do método BPS satisfazem equações de primeira ordem iguais a (2.8).

Podemos escrever a densidade hamiltoniana em termos da transformada de Legendre da lagrangeana como sendo

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \tag{2.9}$$

onde $\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ é o momento canonicamente conjugado [44].

Analisando ainda a lagrangiana da equação (2.4), vamos ter para o momento canonicamente conjugado a seguinte expressão

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi) \right), \\
&= \dot{\phi}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Substituindo a relação anterior em (2.9), teremos

$$\mathcal{H} = \dot{\phi} (\dot{\phi}) - \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi) \right), \tag{2.12}$$

$$= \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi). \tag{2.13}$$

A equação acima é a expressão mais completa para a densidade de energia. Para o nosso caso, estamos analisando um sistema composto por um campo estático, ou seja, o campo ϕ só depende de x , resultando conseqüentemente em

$$\mathcal{H} = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) = -\mathcal{L}. \quad (2.14)$$

A partir da densidade de hamiltoniana podemos obter a energia total do sistema, cuja relação é

$$E = \int dx \mathcal{H},$$

para o caso em $(1+1)$ dimensões. Tal relação para o caso de defeitos estáticos é simplesmente escrita como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (-\mathcal{L}) = \int dx \left[\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right]. \quad (2.15)$$

Um método para resolver essa integral é completar um quadrado perfeito do integrando de E , o que consiste em reescrever a equação anterior segundo

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\phi' \mp \sqrt{2V})^2 \pm \sqrt{2V}\phi' \right], \quad (2.16)$$

Podemos determinar uma energia E mínima que não seja trivial de modo a considerarmos

$$\phi' = \pm \sqrt{2V}, \quad (2.17)$$

a qual está de acordo com a equação de primeira ordem dada pela expressão (2.8) para o caso $C = 0$. Assim, a energia minimizada denominada de E_{BPS} é descrita como sendo

$$E_{BPS} = \left| \int dx (\pm \sqrt{2V}\phi') \right|. \quad (2.18)$$

Podemos ainda associar esse potencial em termos de uma nova função contínua e denominada de "superpotencial", esta função será representada por $W(\phi)$. Então, escrevendo o potencial da seguinte maneira:

$$V = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.19)$$

onde $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$, averiguamos que a energia total é

$$\begin{aligned} E_{BPS} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sqrt{2V}\phi', \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx W_\phi \phi', \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx}, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dW, \\ &= \left| W(\phi_{(x \rightarrow +\infty)}) - W(\phi_{(x \rightarrow -\infty)}) \right|, \\ &= |\Delta W|, \end{aligned} \quad (2.20)$$

esta última relação também é conhecida como limite de Bogomol'nyi. O motivo pelo qual denominamos $W = W(\phi)$, como sendo o superpotencial, é justamente fazer uma analogia com a Mecânica Quântica Supersimétrica [45]. Como visto em [46], o modelo de campo escalar em questão pode ser comparado como uma parte bosônica de uma teoria supersimétrica, na qual os estados BPS e soluções das equações de primeira ordem conservam parcialmente a supersimetria.

Podemos ainda reescrever as equações (2.17) e (2.7) em termos dessa nova função da seguinte maneira:

$$\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi} \quad e \quad \phi' = \pm W_\phi, \quad (2.21)$$

a partir das quais vemos que soluções das equações de primeira ordem também satisfazem as equações de movimento.

2.3 Carga Topológica

Carga topológica, Q_T , tem o propósito de caracterizar defeitos topológicos e defeitos não-topológicos, por meio de uma corrente topológica. Podemos equacionar essa corrente da seguinte forma

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W, \quad (2.22)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita anti-simétrico, pela troca de $\mu \rightarrow \nu$. Como estamos trabalhando com um modelo de (1+1) dimensões, então os índices só podem variar de 0,1, ou seja, $\mu, \nu = 0, 1$. Deste modo, as componentes desse pseudo-tensor são $\epsilon^{00} = \epsilon^{01} = \epsilon^{11} = \epsilon^{10} = 1$. Devido à antissimetria de $\epsilon^{\mu\nu}$, é notório que J_T^μ é uma quantidade conservada, isto é

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.23)$$

Apesar da conservação da corrente topológica não advir do teorema de Noether [44], podemos estabelecer um formalismo análogo ao das correntes e cargas de Noether, o qual consiste em considerar

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} W dx, \\ &= W(\phi_{(x \rightarrow +\infty)}) - W(\phi_{(x \rightarrow -\infty)}), \\ Q_T &= E_{BPS}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

ou seja, esse conceito de corrente nos concede ter uma carga conservada igual à energia BPS e cuja existência depende do comportamento do superpotencial nas condições de vácuo de um dado sistema [47].

A carga dada pela equação (2.24) associa as soluções estáticas de duas formas: soluções topológicas conhecidas como Kinks, e soluções não topológicas conhecidas como

Lumps. As cargas relativas aos kinks têm seus valores diferentes de zero, enquanto as soluções tipo lump possuem cargas nulas. Além dos lumps, há outras soluções das equações do movimento com energia nula como os estados de vácuo. Porém, esse estudo não será abordado neste trabalho [48].

2.4 Solução do Tipo Kink

Como já foi visto anteriormente, os kinks são soluções estáticas com carga topológica não nula. A principal característica dessas soluções é a estabilidade sob pequenas perturbações. O próprio nome kink é sugestivo devido à figura formada ao plotarmos um gráfico do campo escalar em função da coordenada x [49], como observado na Figura 2.1.

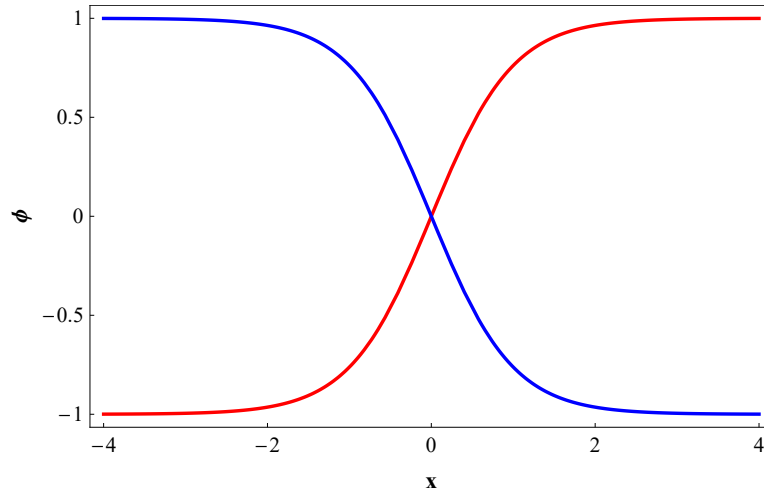


Figura 2.1: Exemplos de defeitos do tipo kink (curva vermelha) e anti-kink (curva azul).

A região central de defeitos do tipo kink (região ao redor de $x = 0$), também é conhecida na literatura como parede de domínio. Tal denominação ocorre por essa região caracterizar uma transição entre duas configurações de mínimos do sistema. Para exemplificar uma solução do tipo kink, tomaremos como base o potencial do modelo ϕ^4 , cuja lagrangiana usual é tal que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{(1 - \phi^2)^2}{2}. \quad (2.25)$$

Na Figura 2.2, podemos apreciar as características do potencial ϕ^4 . Os pontos em que $\phi = \pm 1$ são chamados de valores de vácuo do campo e correspondem aos mínimos do potencial.

Com base na lagrangiana anterior, podemos utilizar a equação (2.19) para determinar a forma do superpotencial. Deste modo, ficamos com

$$\begin{aligned} W(\phi) &= \int d\phi W_\phi, \\ &= \int d\phi (1 - \phi^2), \\ W(\phi) &= \phi - \frac{\phi^3}{3} + C, \end{aligned} \quad (2.26)$$

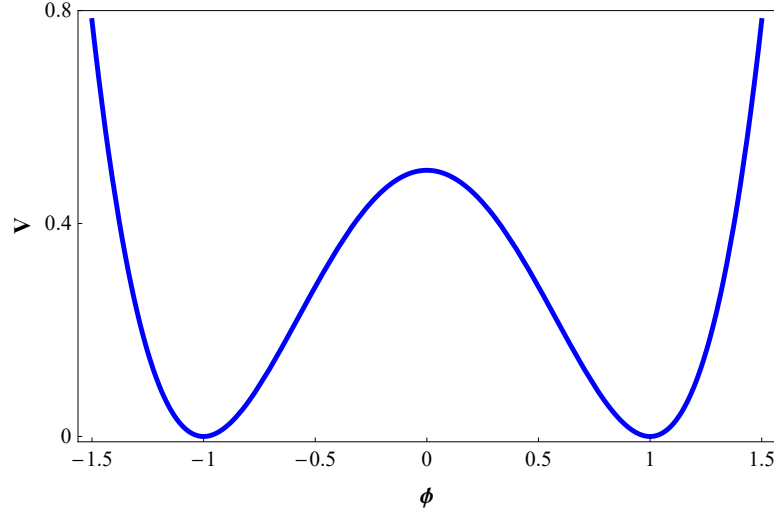


Figura 2.2: Gráfico do potencial ϕ^4 .

onde C é uma constante da integração. Diante disso, averiguamos que a equação de movimento e a equação de primeira ordem são escritas respectivamente como

$$\phi'' = 2\phi(\phi^2 - 1) \quad e \quad \phi' = \pm(1 - \phi^2). \quad (2.27)$$

As equações obtidas acima são satisfeitas pelas soluções analíticas

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \tanh(x), \quad (2.28)$$

cujas formas são apresentadas na Figura 2.1. Na figura (2.2), podemos constatar que essas soluções demonstram limites assintóticos diferentes, logo são ditas topológicas e conectam os mínimos do potencial. O setor do potencial conectado pelas soluções tipo kink ou anti-kink é conhecido como setor topológico. As soluções analíticas obtidas também possibilitam o cálculo da energia BPS desses defeitos.

Para encontrarmos essa energia utilizamos a equação (2.20), que nos leva à

$$\begin{aligned} E_{BPS} &= W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty)), \\ &= (+1) - \frac{(+1)^3}{3} - (-1) - \frac{(-1)^3}{3}, \\ &= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right), \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Esse mesmo valor de energia pode ser obtido a partir do cálculo da energia total, como mostrado abaixo

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\phi'^2}{2} - \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2 \right], \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sinh^4(x), \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A grande vantagem que o método BPS tem em relação ao cálculo da energia total dos defeitos, é que para determinarmos as energias BPS basta conhecermos os valores assintóticos de cada setor topológico.

2.5 Soluções do Tipo Lump

O defeito do tipo lump, ou solução não-topológica são defeitos que possuem cargas nulas. Diferentemente dos kinks, os lumps são defeitos que conectam a uma única configuração de mínimo de um dado potencial. Veremos adiante que tais soluções são instáveis sob pequenas perturbações. Para exemplificar um modelo que possui esse tipo de solução, vamos considerar o "potencial ϕ^4 invertido", cuja forma é

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)\phi^2, \quad (2.31)$$

a qual encontrasse plotada na Figura 2.3.

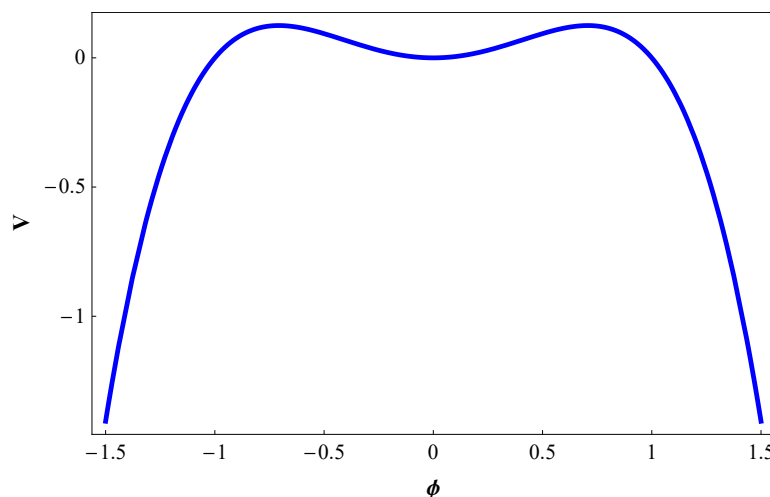


Figura 2.3: Potencial ϕ^4 invertido.

A equação de primeira ordem correspondente a esse modelo é dada por

$$\phi' = W_\phi = \pm\phi(1 - \phi^2)^{1/2}, \quad (2.32)$$

que é satisfeita por

$$\phi(x) = \pm\text{sech}(x). \quad (2.33)$$

Essas soluções estão representadas nos gráficos da Figura 2.4.

Comparando o comportamento das soluções com o potencial ϕ^4 invertido, observamos que os defeitos partem do mínimo local $V = 0, \phi = 0$ e possuem como valores máximos $\phi = \pm 1$. Como os pontos de $V(\phi)$ correspondentes aos valores máximos do lump e do anti-lump, não são pontos de mínimo do potencial os defeitos retornam ao ponto de mínimo $V = 0, \phi = 0$. As regiões do potencial cobertas pelas soluções tipo lump e anti-lump são denominadas setores não-topológicos.

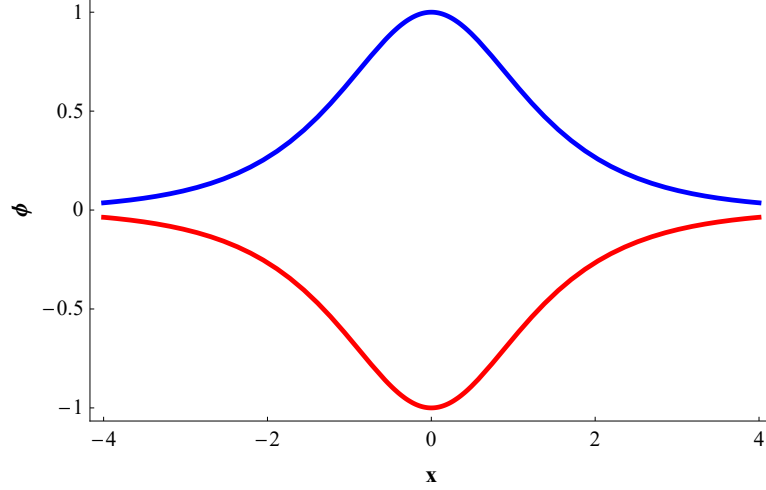


Figura 2.4: Soluções do tipo lump (linha azul) e anti-lump (linha vermelha).

Além dos resultados anteriores, podemos determinar a forma de $W(\phi)$ através de (2.19). Deste modo, verificamos que

$$\begin{aligned}
 W(\phi) &= \int d\phi W_\phi, \\
 &= \int d\phi [\phi(1 - \phi^2)^{1/2}], \\
 &= \frac{-1}{3}(1 - \phi^2)^{3/2}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Seguindo os mesmos passos para o caso do Kink, podemos determinar a energia total do lump utilizando a equação (2.15), como

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\phi^2(1 - \phi^2)], \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{\cosh^2 x} - \frac{1}{\cosh^4 x} \right) \\
 &= \frac{2}{3},
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

porém, não podemos aplicar a equação (2.20) para calcular a energia BPS do lump. Analisando o caso do potencial dado pela equação, temos

$$W(\phi) = -\frac{1}{3}(1 - \phi^2)^{3/2}, \tag{2.36}$$

e com essa expressão, determinamos a energia BPS

$$\begin{aligned}
 E_{lump} &= |W(+\infty) - W(-\infty)|, \\
 &= -\frac{1}{3}(1 - 0)^{1/3} - \left[-\frac{1}{3}(1 - 0)^{1/3} \right], \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

que é uma resposta diferente do que foi computado antes em (2.35). Uma possibilidade de determinar a energia BPS do lump é definir

$$E_{BPS_{lump}} \equiv |W[\phi(+\infty)] + W[\phi(-\infty)]|. \quad (2.38)$$

O motivo dessa divergência é que energia BPS só funciona para os potenciais positivos definidos. Ou seja, a relação $E_{BPS} = \Delta W$ foi construída a partir da condição de $V(\phi) \geq 0$.

Por fim, esboçamos um gráfico ilustrando as densidades de energias das soluções do tipo kink e lump na Figura 2.5. As densidades de energia de ambas as soluções são integráveis e possuem simetria par.

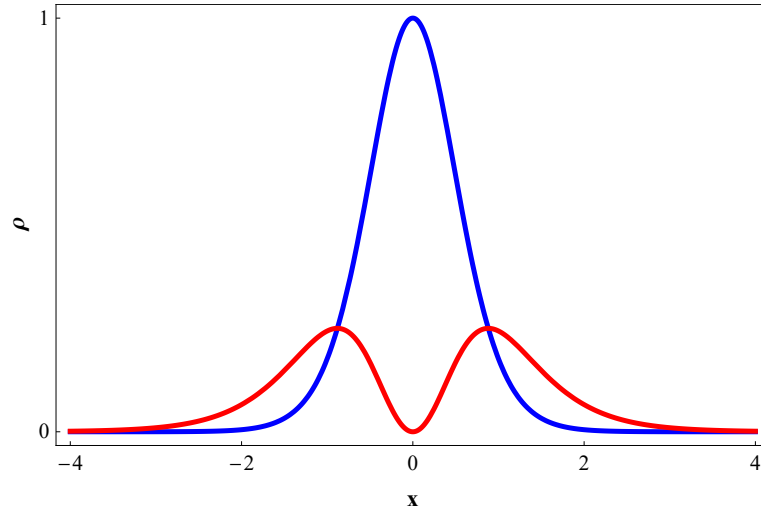


Figura 2.5: Densidades de energia para a solução tipo lump (linha vermelha) e para a solução tipo kink (linha azul).

2.6 Método da Deformação

Na seção anterior, estudamos dois modelos simples compostos por um único campo escalar que são analiticamente solúveis. Contudo, nem sempre é fácil integrar tanto as equações de movimento quanto as equações diferenciais de primeira ordem de modelos com altos graus de não linearidades.

Nesta seção, apresentamos as generalidades do chamado método de deformação, que tem como objetivo principal, determinar novas famílias de modelos analíticos compostos por um campo escalar real. Tal método foi proposto por Bazeia, Losano e Malbouisson [50] em 2002 e consiste em conectar dois modelos diferentes de um campo escalar via um mapeamento mediado por uma determinada função, chamada de função de deformação.

Para este trabalho, iremos considerar dois modelos de um campo descritos pelas seguintes densidades de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi); \quad (2.39)$$

e

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\chi), \quad (2.40)$$

ambas em 1 + 1 dimensões, sendo \mathcal{L} a densidade de lagrangiana relativa ao modelo já conhecido e \mathcal{L}_d a densidade de lagrangiana referente ao novo modelo, que será produzido a partir da função de deformação. Também temos $V(\phi)$ e $U(\chi)$ como os respectivos potenciais dos modelos acima.

Como estamos trabalhando com modelos estáticos, podemos associar cada modelo as suas respectivas equações de movimento, de modo que ficaremos com

$$\phi'' = V_\phi \quad e \quad \chi'' = U_\chi, \quad (2.41)$$

onde U_χ é a derivada parcial de U com relação ao campo χ , enquanto V_ϕ é a derivada parcial de V em relação ao campo ϕ .

Como vimos nas seções anteriores, tanto o potencial V quanto o potencial U podem ser escritos em termos de superpotenciais, de tal forma que

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2} \quad e \quad U(\chi) = \frac{\tilde{W}_\chi^2}{2}. \quad (2.42)$$

Além disso, ao aplicarmos o método BPS em ambos os modelos determinamos que suas equações de primeira ordem são tais que

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi) \quad e \quad \chi' = \pm \tilde{W}_\chi(\chi). \quad (2.43)$$

Como mencionado previamente, assumimos que tais modelos podem ser conectados via o seguinte mapeamento

$$f = f(\chi) = \phi, \quad (2.44)$$

o qual deve ser inversível, ou seja, deve existir

$$\chi = f^{-1}(\phi). \quad (2.45)$$

Sabendo que $\phi' = \frac{d\phi}{dx}$, então podemos escrever a equação (2.44) da seguinte forma

$$\phi' = f_\chi \chi', \quad (2.46)$$

onde χ' é a derivada do campo χ em relação a x e f_χ é a derivada da função f em relação ao campo χ . Ao substituirmos as equações vistas em (2.43), no vínculo anterior, ficamos com

$$\tilde{W}_\chi = \frac{W_\phi(\phi \rightarrow f(\chi))}{f_\chi}. \quad (2.47)$$

De forma análoga, a equação (2.42) revela que o potencial $U(\chi)$ pode ser obtido a partir de $V(\phi = f(\chi))$ segundo a relação

$$U(\chi) = \frac{V(\phi \rightarrow f(\chi))}{f_\chi^2}, \quad (2.48)$$

caracterizando um novo modelo gerado a partir da função de deformação. A solução analítica desse novo modelo pode ser obtida diretamente a partir de

$$\chi(x) = f^{-1}(\phi(x)). \quad (2.49)$$

Com o objetivo de tornar mais clara a ideia do método de deformação, iremos exemplificar o modelo ϕ^4 , definindo a função deformadora como sendo

$$f(\chi) = \sinh \chi, \quad (2.50)$$

e o modelo abordado será dada pela equação (2.25)

$$V(\chi) = \frac{1}{2}(1 - \chi^2)^2. \quad (2.51)$$

O potencial da teoria deformada será, pela equação (2.48)

$$\begin{aligned} V(\chi) &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \sinh^2 \chi)}{\left(\frac{d}{d\chi} \sin \chi\right)^2}, \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \chi (1 - \sinh^2 \chi), \end{aligned} \quad (2.52)$$

de modo que a lagrangeana desta teoria toma a forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \chi (1 - \sinh^2 \chi)^2, \quad (2.53)$$

a qual conduz à equação de movimento,

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \operatorname{sech} \chi (1 - \sinh^2 \chi), \quad (2.54)$$

com essa expressão, percebemos que é uma equação de difícil solução por métodos usuais. Contudo, podemos obter uma solução graças à essa técnica da deformação, utilizando a relação (2.45). Então, temos

$$\begin{aligned} \chi &= f^{-1}(\phi), \\ &= \operatorname{arcsinh}(\phi), \end{aligned} \quad (2.55)$$

com $\phi(x)$ dada pela equação (2.44). Logo

$$\chi_\pm(x) = \pm \operatorname{arcsinh}(\tanh x), \quad (2.56)$$

que é uma solução topológica do modelo deformado.

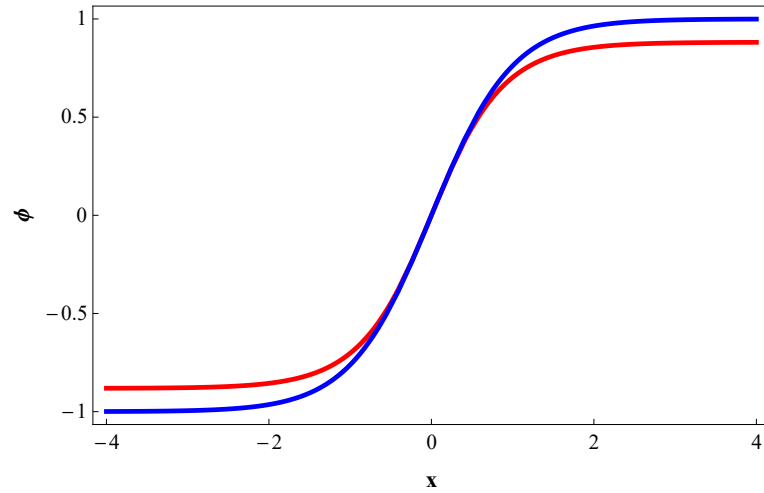


Figura 2.6: Defeito original χ representado pela linha vermelha e defeito deformado ϕ representado pela linha azul.

O defeito deformado revela-se uma leve variação em relação ao defeito da teoria original. Na figura (2.6) é ilustrada a solução da teoria ϕ^4 original e a solução da teoria deformado.

Em suma, construímos um modelo deformado, representado pela lagrangeana (2.53), e obtemos sua solução de forma trivial, por uma simples inversão da função deformadora, partindo de um modelo de solução conhecida.

Capítulo 3

Relatividade Geral

Galileu Galilei (1564-1642) foi um físico italiano que contribuiu muito para a ciência, principalmente por suas investigações a cerca da natureza dos movimentos. Em sua teoria sobre a descrição do movimento uniforme, Galileu estabelece que o tempo tem caráter absoluto. Além disso, de acordo com Galileu, todo referencial inercial é equivalente e deve descrever as mesmas leis mecânicas¹.

Os estudos de Galileu sobre a natureza dos estados de movimento compreendem a base de fundação da Mecânica Newtoniana, que descreveu de forma bem sucedida a dinâmica de sistemas físicos até o final do século XIX, quando então, James Clerk Maxwell (1831-1879) publica seu célebre artigo no qual ele apresenta uma nova formulação para o eletromagnetismo [51]. Tal trabalho é um marco na ciência, pois é dele que advém as chamadas equações de Maxwell.

Uma das relevantes contribuições das equações de Maxwell refere-se a natureza da luz. A partir das leis do eletromagnetismo Maxwell demonstrou que é possível obter uma equação de onda para os campos elétrico e magnético com velocidade bem definida. O módulo ao quadrado dessa velocidade é inversamente proporcional ao produto da permissividade elétrica pela susceptibilidade magnética. Ao substituir os valores conhecidos para essas duas constantes, é possível mostrar que a velocidade da onda eletromagnética no vácuo é equivalente à velocidade da luz. Medidas sobre o valor da velocidade da luz já eram conhecidas antes do trabalho de Maxwell [52], deste modo, a partir da equação de onda obtida através da formulação de Maxwell descobriu-se que a luz é uma radiação eletromagnética. A evidência experimental de que a luz é de fato uma radiação eletromagnética remete aos experimentos de Hertz, realizados entre 1886 e 1889.

Apesar dos importantes resultados obtidos por Maxwell, uma questão complexa cercava suas equações, que era o fato delas não serem invariantes sob transformações de Galileu. Para tornar as equações de Maxwell invariantes, é necessário transformar não somente as dimensões espaciais, mas também a dimensão temporal. Tal lei de transformação é conhecida como Transformação de Lorentz e nesta há uma velocidade limite para os objetos físicos, que é a velocidade da luz.

Tomando como base a invariância da velocidade da radiação eletromagnética entre observadores, Albert Einstein postulou em 1905 uma nova teoria para a descrição dos movimentos dos objetos, que ficou conhecida como Teoria da Relatividade Restrita².

Os dois postulados fundamentais da teoria da relatividade restrita são: i) as leis da Física devem ser as mesmas para quaisquer observadores inerciais e ii) a velocidade da

¹Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno à Due Nuovo Scienze, 1638.

²STACHEL, J. Einstein's miraculous year. Princeton: Princeton University, 1998.

luz tem o mesmo valor, independente do movimento relativo entre observador e a fonte, sendo esta a velocidade limite da natureza [53].

Este artigo abordava em fenômenos com velocidades próximas à da luz. Essas limitações se baseiam em duas vertentes, que são: a constância da velocidade da luz e a descrição do movimento do ponto de vista de referenciais inerciais [53]. Apesar dessa restrição, a teoria da relatividade restrita trouxe vários argumentos inovadores consigo, como: dilatação do tempo e contração do espaço. Isso só foi possível graças aos estudos de Hermann Minkowski (1864-1909) sobre um novo espaço, não absoluto, chamado de espaço-tempo [54].

Einstein não se conformou com as limitações impostas da relatividade especial e seguiu trabalhando para uma nova teoria, ainda mais geral que envolvesse também referenciais acelerados (ou não inerciais) [55]. Einstein passou 10 anos para sistematizar e equacionar esta teoria chamada de Teoria da Relatividade Geral (TRG) [56].

Essa nova teoria, formulada em 1915, tem o intuito de descrever o movimento dos corpos celestes no universo. Como bem sabemos, no século XVIII, Issac Newton (1643-1727) formulou sua consagrada teoria sobre a de Lei da Gravitação Universal³. Essa lei, baseada nos estudos de Galileu e Johannes Kepler (1571-1630), estabelece que a descrição matemática que sistematiza a interação entre dois objetos massivos é, em módulo, [13]

$$F = \frac{GM_1M_2}{d^2}, \quad (3.1)$$

onde d é a distância entre os corpos, M_1 e M_2 são as massas dos objetos e G é a constante gravitacional de Newton: $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3/(kg.s^2)$.

Apesar do grande sucesso da Gravitação Newtoniana, ela não explicava certos fenômenos astronômicos, tais como a precessão do periélio de Mercúrio. A trajetória da órbita de Mercúrio é bastante curiosa quando o mesmo se aproxima do periélio. Consta-nos que o Mercúrio faz um pequeno desvio de 43 segundos de arco por século nesta aproximação. Esse resultado só foi explicado depois de 200 anos com a teoria da relatividade geral elaborada por Einstein. Para mais detalhes sobre os argumentos utilizados na resolução do problema do periélio de Mercúrio, recomendamos a referência [13].

A relatividade geral descreve o movimento de objetos massivos, não em termos da ação de forças como na Mecânica Clássica, mas em termos de trajetórias descritas sobre a superfície do espaço-tempo. Deste modo, a TRG é uma teoria relativística de gravitação que consiste em associar a deformação do "tecido" espaço-tempo com a quantidade de matéria atrelada ao corpo. Com isso, Einstein conseguiu equacionar uma fórmula envolvendo uma associação entre geometria e matéria. Dessa forma, é possível explicar alguns fenômenos como redshift gravitacional, precessão do periélio de mercúrio, a curvatura da luz e dentre outros [13–16].

O redshift gravitacional basicamente consiste na explicação do movimento do fóton próximo a uma região que possui um campo gravitacional forte, isto porque, os fótons movem-se lentamente na presença de um objeto supermassivo [53]. Outra consequência da TRG é o encurvamento da luz, também conhecido como fenômeno de lentes gravitacionais. Como bem sabemos, o feixe de luz tende a fazer a menor trajetória possível, conhecida como geodésica. Então se um corpo massivo é capaz de distorcer o seu espaço em sua volta, logo, a luz se encurva de modo a percorrer a menor distância possível [13]. Sabendo

³NEWTON, I. The Principia (Mathematical Principles of Natural Philosophy - A new translation). In: I. Bernard Cohen and Anne Whitman (ed.). Los Angeles: University of California Press, 1999

dessa dedução, Einstein elaborou um teste não tão simples para validar a sua teoria. Esse experimento consistiu em fotografar estrelas durante um eclipse solar⁴.

Para essa missão, ele pediu a um jovem astrônomo Arthur Stanley Eddington (1882-1944), que fizesse uma expedição para realizar algumas fotografias [57]. Por sorte de Einstein, em 1919, aconteceu um eclipse visto na América do Sul e na África. Nessas expedições, houveram duas equipes observando o eclipse, uma sediou-se na Ilha do Príncipe e outra no município de Sobral no Ceará, Brasil [58, 59]. Pouco tempo depois, Einstein recebeu uma carta de Eddington parabenizando pelo sucesso da teoria recém comprovada. Desde de então, muitos cientistas refizeram os cálculos e experimentos desta magnífica teoria [56].

Há algumas restrições que Einstein adotou na formulação da TRG. Entre elas, ele considerou que o Universo é estático e uniforme. Segundo Einstein, para que o universo não entre em colapso sob a força da gravidade, precisaria existir uma constante cosmológica em sua equação de movimento que seria responsável por repelir a atração gravitacional⁵. Com essa constante, foi possível determinar a extensão e a massa do universo [60].

Para tristeza de Einstein, Edwin Hubble publicou em 1929, um trabalho feito baseado em observações astronômicas, provando que o universo estava se afastando da Terra. Segundo Gamow, após de aceitar essa verdade, Einstein tinha dito que a constante cosmológica foi o maior erro da sua vida [61]. Um fato curioso é que, nos dias de hoje, consideramos uma constante cosmológica como uma alternativa de explicar a energia escura [62].

Um outro trabalho de grande relevância para a Teoria da Gravitação Universal foi produzido em 1922 por Alexander Friedmann (1888-1925). Nele, Friedmann apresentou soluções matemáticas possíveis das equações de campo da teoria relativística da gravitação. Segundo os resultados obtidos, Friedmann constatou que, para seu modelo, o universo não seria estático [53]. Com a morte prematura de Friedmann em 1925, coube a Lemaître a seguir seus passos estudando as características desse modelo. Apoiado por de Sitter, Lemaître publicou um artigo em 1931, dando indícios à teoria que mais tarde foi chamado de Big Bang. Outros nomes importantes que deram contribuições fundamentais a este modelo foram Robertson (1903-1961) e Walker (1909-2001), desenvolvendo a denominada métrica de Robertson-Walker [63]. Essa métrica, hoje popularmente conhecida como FLRW é a base para a compreensão de um universo homogêneo que evolui com o passar do tempo.

3.1 Equação de Einstein

Há vários meios de se obter as equações de campo de Einstein, mas o caminho mais conveniente e amplo é derivar as equações de Einstein a partir do princípio variacional. Neste capítulo, verificaremos como as equações de campo podem ser determinadas a partir da minimização da chamada ação de Einstein-Hilbert, cuja forma explícita é

⁴Eclipse solar é um fenômeno que acontece quando a Lua se interpõe entre a Terra e o Sol. Quando isso ocorre, haverá uma zona de penumbra de modo que a luz é parcialmente coberta. Existe também uma região chamada de umbra, a qual a luz é totalmente encoberta.

⁵A constante cosmológica é uma expressão que anula os efeitos de atração provocados pela força da gravidade, como se fosse uma força gravitacional repulsiva.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right], \quad (3.2)$$

onde R é a contração do tensor de Riemann denominado de escalar de Ricci, g é o determinante do tensor métrico e ϕ representa o campo escalar. Aplicando o princípio variacional à referida ação encontramos

$$\delta S = \int d^4x \left[(\delta \sqrt{-g}) \left(-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right) + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right) \right]. \quad (3.3)$$

Durante o procedimento de minimização da ação, utilizaremos a seguinte identidade

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

cuja dedução é apresentada em detalhes no Apêndice C. Podemos escrever então a equação (3.3) da seguinte maneira

$$\delta S = \int d^4x \left[-\frac{\sqrt{-g}}{4} \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2}R + 2g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right) \right], \quad (3.4)$$

além disso, observando que o escalar de Ricci pode ser escrito como $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, obtemos

$$\frac{-1}{4} \sqrt{-g} \delta R = \frac{-1}{4} \sqrt{-g} [\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}]. \quad (3.5)$$

Constatamos também, que ao tomarmos a variação da lagrangiana em relação ao tensor métrico, temos

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

O termo envolvendo $\delta R_{\mu\nu}$ da equação (3.5) será nulo devido as condições de contorno. Diante disso, substituindo as equações (3.5) e (3.6) na equação (3.4), teremos

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{-1}{4} (R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}R) + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Conforme introduzido por Einstein em 1915 [64], a teoria da Relatividade Geral permite uma relação entre a matéria e a geometria do Universo, cuja forma matemática é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T^{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

na qual o lado esquerdo representa a configuração geométrica do espaço-tempo, enquanto o lado direito está relacionado com a descrição do conteúdo de matéria. Além disso, a

constante κ acima é $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Considerando um sistema de unidades no qual $c = 1$ e $4\pi G = 1$, constatamos que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T^{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

Sendo assim, ao substituírmos a equação (3.9) em (3.7), encontramos a seguinte relação

$$2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} = T^{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

que associa diretamente o tensor $T_{\mu\nu}$ com a lagrangiana do campo escalar. Tal tensor é denominado tensor energia-momento e representa o conteúdo da matéria causadora da curvatura do espaço-tempo [13].

3.2 Modelo FLRW

O modelo FLRW consiste na hipótese do Universo ser espacialmente isotrópico e homogêneo durante toda sua evolução. Contudo, há evidências de pequenas inomogeneidades em aglomerados de galáxias [65] e na radiação cósmica de fundo [66]. No caso de aglomerados, tais anisotropias são da ordem de 100 Mpc [67].

Segundo as análises de Hubble, o princípio cosmológico revela que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala. Tal informação só foi comprovada através dos experimentos de Arno Penzias e Robert Wilson, em 1965, com a descoberta da radiação cósmica de fundo [66].

O elemento de linha da métrica FLRW possui a seguinte estrutura

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.11)$$

Onde consideramos $c = 1$ e k corresponde ao parâmetro de curvatura. Esse parâmetro pode ser classificado de 3 maneiras distintas e será ilustrada na figura⁶ (3.1). Para $k = 0$ quer dizer que o Universo é plano. Ou seja, é baseada na geometria euclidiana e possui dimensões infinitas. De acordo com as atuais pesquisas observacionais, o Universo apresenta essa geometria como a que mais se aproxima da geometria do Universo [68]. Para $k = 1$ representa um Universo esférico. Apesar de ter dimensões finitas, esse tipo de Universo não se dispõe de limites ou barreiras. E se considerarmos $k = -1$, o Universo se revela de forma hiperbólica. As características desse Universo é que as linhas paralelas sempre se distanciam das outras, caracterizando um Universo aberto e infinito [69]. Ainda temos a função $a(t)$ representa o fator de escala da parte espacial da geometria, tal fator é responsável pela expansão ou pela contração do universo.

⁶Fonte: http://map.gsfc.nasa.gov/media/990006/990006_200.jpg

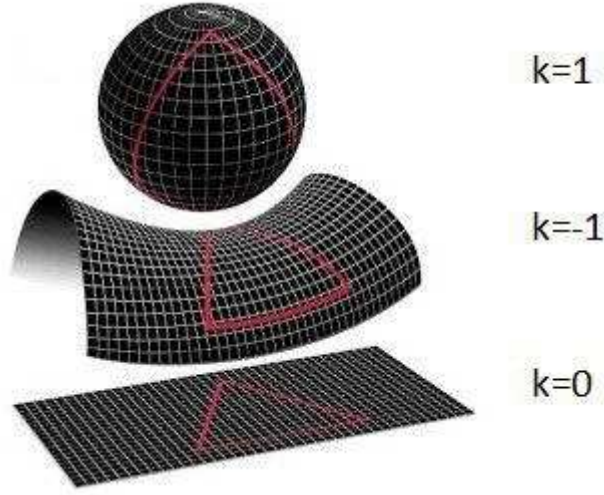


Figura 3.1: A figura a seguir mostra as três formas do Universo e seus respectivos valores do parâmetro de curvatura k . Figura editada pelo autor.

Para obter as equações que retratam a dinâmica do universo, basta aplicarmos a métrica FLRW nas equações de campo da gravitação. A partir do elemento de linha acima, podemos representar as componentes do tensor métrico da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= 1; \\
 g_{11} &= \frac{-a^2}{(1 - kr^2)}; \\
 g_{22} &= -a^2 r^2; \\
 g_{33} &= -a^2 r^2 \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Os elementos acima mencionados serão de grande relevância para o cálculo dos símbolos de Christoffel, dos tensores de Ricci, bem como do escalar de Ricci. No Apêndice B descrevemos de forma mais detalhada o cálculo dos símbolos de Christoffel não nulos, assim como, a determinação das componentes do tensor de Ricci.

Além disso, o tensor de curvatura pode ser escrito da seguinte forma

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \quad (3.12)$$

na qual

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (3.13)$$

sendo estes objetos conhecidos como conexão afim ou símbolos de Christoffel.

O chamado tensor de Ricci é uma forma contraída da equação (3.12) de tal forma que

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (3.14)$$

os termos não nulos deste tensor para a métrica FLRW são

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad (3.15)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{11}; \quad (3.16)$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{22}; \quad (3.17)$$

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{33}. \quad (3.18)$$

As relações acima podem ser representadas pelas formas compactas

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad e \quad R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{ij}. \quad (3.19)$$

Um elemento fundamental para as equações de Einstein é o escalar de Ricci. Como já foi citado anteriormente, esse escalar de Ricci, ou a segunda contração do tensor de Riemann, é expresso pelo produto do tensor métrico com o tensor de Ricci. Diante disso, o escalar de Ricci para a métrica FLRW é tal que

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \\ &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}, \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \left[3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)\right], \\ &= -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por fim, o tensor de Einstein é definido da seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.21)$$

esta identidade representa a parte geométrica das equações de campo. Explicitando as componentes temporal e espacial de $G_{\mu\nu}$ ficamos com

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R}, \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \\ &= 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

e

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R}, \\
&= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{ij} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)g_{ij}, \\
&= \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right), \tag{3.23}
\end{aligned}$$

respectivamente.

Essas duas expressões podem ser chamadas também de tensor de Einstein e elas representam matematicamente a geometria do espaço-tempo. As equações anteriores podem expressar a curvatura de uma variedade de Riemann [53].

3.3 Tensor Energia-Momento para um fluido perfeito

O intuito desse trabalho é estudar os campos escalares reais acoplados à Gravitação e como já vimos, o Princípio Cosmológico revela que o Universo é homogêneo e isotrópico através da métrica FLRW. Uma vez que, o Universo pode ser pensado como um fluido perfeito o tensor energia-momento deve ser conservado [2].

Um fluido perfeito pode ser considerado um gás, desde que não haja interações entre partículas, que permite se mover através do espaço-tempo com uma quadri-velocidade U_μ . Esse fluido tem como característica uma densidade de massa-energia, denominada de ρ , e uma pressão isotrópica, escrita por p [70, 71].

A partir dos estudos de Mecânica de Fluidos, observamos que o tensor energia-momento para um fluido perfeito é tal que

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{3.24}$$

cujo o vetor quadri-velocidade é representado por

$$\begin{aligned}
U^0 &= U^t = 1 & U^i &= 0; \\
U^\mu &= (1, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Estamos tratando de referencial de uma partícula estacionária, de modo a ficarmos com: $U^\mu = (1, 0)$, ou seja, as componentes não nulas do tensor são

$$T_{00} = (\rho + p)U_0U_0 - pg_{00} \quad e \quad T_{ij} = -p g_{ij}. \tag{3.25}$$

Podemos representar o Tensor Energia-Momento na forma matricial dada por

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 p}{(1 - kr^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 p \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

cujo o traço será: $T = T^\mu_\mu = \rho - 3p$.

Os resultados acima revelam que a componente temporal do tensor de Einstein G_{00} [33], é tal que

$$\begin{aligned} G_{00} &= 2T_{00}, \\ 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) &= 2\rho, \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

esta equação descreve a velocidade de expansão da densidade de energia. O termo $\frac{\dot{a}}{a}$ é chamado de parâmetro de Hubble e é representado pela letra H , implicando em

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.28)$$

Para as componentes espaciais G_{ii} [33] temos

$$\begin{aligned} G_{ij} &= -2pT_{ij}, \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= -2p, \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}\right) + \frac{k}{a^2} &= -2p, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{3}(\rho + 3p), \end{aligned} \quad (3.29)$$

essa equação representa a taxa de aceleração em função da pressão e da densidade. As equações (3.28) e (3.29) são as famosas equações de Friedmann.

Podemos relacionar as equações acima com a equação da continuidade para um fluido cosmológico da seguinte forma

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.30)$$

Com essa expressão podemos criar um vínculo da densidade e pressão [72], chamado de equação de estado. O parâmetro da equação de estado [73] é muito importante nos estudos da evolução do universo e é dado pela razão entre densidade e pressão

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad (3.31)$$

onde ω é o parâmetro da equação de estado. De acordo com o modelo Λ CDM, nos primeiros instantes do Universo, a dinâmica do Universo era dominada pela radiação, ou seja, $\omega = 1/3$. Após frações de segundos, o Universo passou a ser regida pela era da matéria, $\omega = 0$. E atualmente o Universo tende à uma dinâmica dominada pela constante cosmológica, ou Energia Escura, $\omega = -1$ [74].

Podemos extrair ainda as formas da densidade e da pressão, a partir da lagrangiana associada ao campo escalar. Como vimos, a lagrangiana relativa à ϕ é tal que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.32)$$

substituindo a equação anterior em (3.10), determinamos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right), \quad (3.33)$$

cujas formas explícitas de suas componentes são

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 - \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right], \quad (3.34)$$

e

$$T_{ii} = 0 + \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right]. \quad (3.35)$$

As equações (3.34) e (3.35) podem ser relacionadas com a equação (3.26) de modo a resultar nas seguintes expressões

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.36)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.37)$$

Logo, substituindo as equações (3.36) e (3.37) na expressão (3.31) temos

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (3.38)$$

Observamos que a equação de Friedmann (3.28) agora é dada por

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.39)$$

Além disso, tomando a derivada do parâmetro de Hubble em relação ao tempo, encontramos

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (3.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{H} + H^2 &= -\frac{1}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi), \\
\dot{H} &= -\frac{1}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi) - \frac{2}{3}\rho_\phi + \frac{k}{a^2}, \\
&= \rho_\phi - p_\phi + \frac{k}{a^2}, \\
\dot{H} &= \dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

O próximo passo para completar a descrição deste modelo de universo acoplado a um campo escalar de matéria consiste na descrição da dinâmica do campo. Para tanto, precisamos variar a ação de Einstein-Hilbert em relação ao campo ϕ . Observamos que a ação vista em (3.2) pode ser reescrita como

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}, \tag{3.42}$$

onde $\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-g}\mathcal{L}$. Deste modo, ao variarmos a ação em respeito ao campo escalar, ficamos simplesmente com

$$\delta S = \int d^4x \delta \tilde{\mathcal{L}} = 0, \tag{3.43}$$

resultando na equação de movimento

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \tag{3.44}$$

Sendo assim, a dinâmica do campo escalar é regida pela relação

$$\begin{aligned}
\partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V_\phi &= 0, \\
\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + V_\phi &= 0, \\
\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi &= 0,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

para o caso em $\phi = \phi(t)$.

3.4 Parâmetros Cosmológicos

A cosmologia atualmente é a ciência que estuda a origem e a evolução do Universo, tendo como finalidade compreender o seu surgimento e sua natureza. Vivenciamos no presente uma fase na qual os modelos cosmológicos estão fortemente vinculados a dados experimentais. Tais dados podem ser utilizados tanto para entender a evolução do universo desde seus momentos mais remotos, bem como para projetar cenários futuros.

Como já vimos, o modelo cosmológico mais aceito nos dias de hoje é o Λ CDM e esse modelo se baseia em três pilares: a Expansão do Universo, a Radiação Cósmica de Fundo e a Nucleossíntese Primordial [75].

Segundo essa teoria do big Bang, é possível relatar fenômenos que ocorreram desde os primeiros instantes do Universo até os dias atuais. Com isso, a teoria nos revela que

o Universo se expande adiabaticamente, partindo de um Universo intensamente quente e denso [76]. O Universo nesse momento era composto por fótons e partículas sendo criadas e aniquiladas a todo momento. Os estágios dos primórdios do Universo consiste nos seguintes períodos: era de Planck ($t < 10^{-45} s$); era do Compton ($10^{-43} < t < 10^{-23} s$); era dos Hádrons ($10^{-35} s < t < 10^{-6} s$). Após essas fases, surge a Nucleossíntese com a formação de alguns elementos mais leves, como: D, He^3 , He^4 e Li. Esse período teve duração de 100 segundos, a uma temperatura de $10^{10} K$ [77].

Enquanto o Universo era quente e denso, a radiação estava interligada aos bárions através do espalhamento de Compton. À medida que o Universo foi se esfriando, os fótons chegaram a um determinado estágio que não possuíam mais energia para ionizar o hidrogênio. Esse acontecimento é chamado de recombinação, validando o momento que os fótons passaram a se propaga livremente [78]. O universo nessa época era formado por um plasma, conhecido na literatura também como sopa de partículas, composto por fótons, elétrons e bárions. Diante disso, os fótons citados anteriormente se interagem como plasma através do efeito Compton. Isso só é possível, se a temperatura for superior a $400 K$ [79]. Toda radiação dispensada pelo plasma é chamado de Radiação Cósmica de Fundo, ou CDM. Além de ser isotrópica, essa radiação contém informações de como era o Universo nos seus primórdios.

Interessante salientar que no surgimento da Relatividade Geral, Einstein impôs que o universo fosse estático. Mas, Edwin Hubble publicou um artigo, com base em observações astronômicas, afirmando que o Universo expandia devido ao aumento da velocidade recessão, ou afastamento [80, 81]. Em seu trabalho, ele determinou a Lei de Hubble como sendo

$$v_p = H(t)d_p, \quad (3.46)$$

onde v_p é a velocidade própria e d_p corresponde à distância própria (ou física). O termo $H(t)$ descreve a taxa de expansão do universo em um dado tempo. A lei de Hubble é a única lei de expansão compatível com um Universo isotrópico e homogêneo [82] e pode ser expressa também pelo fator de escala, como já vimos na equação (3.28)

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (3.47)$$

Além da equação de estado, vista em (3.31), há um outro parâmetro importante que é a taxa de desaceleração, definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) &\equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \\ &= -\frac{1}{H^2} \cdot \frac{\ddot{a}}{a}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.5 Formalismo de Primeira Ordem

Uma das propostas para explicar a energia escura é por meio da inserção de um campo escalar, que é fundamentada nos modelos de quintessência ou ϕ Cold Dark Matter (ϕ CDM) [31]. Para executar essa abordagem, precisamos utilizar as equações do movimento associados a dinâmica desse campo escalar. Nesses seguintes trabalhos [83, 84], os

autores conseguiram, de forma simplificada, soluções para a dinâmica do campo escalar a partir da redução da ordem das equações de diferenciais de movimento. Tais investigações estão fundamentadas nas generalidades a seguir.

Considerando uma geometria plana, ($k = 0$), podemos escrever as equações de Friedmann da seguinte maneira

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) \quad (3.49)$$

e

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (3.50)$$

Permita-nos então definir que

$$H \equiv -W(\phi), \quad (3.51)$$

tal definição implica em

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -W_\phi \dot{\phi}, \\ \dot{H} &= -\dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde $W_\phi = \frac{dW}{d\phi} = \dot{\phi}$. Logo, a equação de Friedmann acima implica no vínculo

$$\dot{\phi} = W_\phi, \quad (3.53)$$

informando que o campo escalar deve obedecer uma equação diferencial de primeira ordem. Com os ingredientes acima, constatamos que o potencial $V(\phi)$ apresentado em (3.49) é tal que

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{3}{2} \left[H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{3} \right], \\ &= \frac{3}{2} H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{2}, \\ V(\phi) &= \frac{3}{2} W^2 - \frac{\dot{W}_\phi^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Um teste importante da validade do formalismo de primeira ordem consiste em verificar se este é compatível com a equação de movimento (3.45). Podemos observar diretamente que

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{d}{dt}(W_\phi), \\ &= W_{\phi\phi} \dot{\phi}, \\ &= W_{\phi\phi} W_\phi, \end{aligned} \quad (3.55)$$

e

$$\begin{aligned} V_\phi &= \frac{dV}{d\phi}, \\ &= \frac{d}{d\phi} \left(\frac{3}{2}W^2 - \frac{\dot{W}_\phi^2}{2} \right), \\ &= 3WW_\phi - W_\phi W_{\phi\phi}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Sendo assim, ao substituírmos as duas últimas equações na equação de movimento do campo escalar (3.45), averiguamos que a última é satisfeita.

Capítulo 4

Teorias $f(R)$

A Relatividade Geral é precisa ao descrever fenômenos físicos em escalas macroscópicas. Com ela, é possível definir conceitos sobre tempo, espaço, gravidade, matéria, etc. Contudo, pouco tempo após de sua publicação, houve trabalhos questionando se essa teoria era a única teoria fundamental eficaz para descrever todas interações gravitacionais. Sobre essas indagações, destacamos a motivação de se encontrar uma teoria mais geral que corrobore com os dados observacionais [85]. Nesse contexto, podemos citar os trabalhos de Hermann Weyl (1885-1955) em 1919 [86] e Arthur Eddington (1882-1944) em 1923 [87]. Os trabalhos desses cientistas consistem em impor modificações na teoria, incluindo termos de ordem superior na ação [88]. Contudo, a inclusão desses novos termos na ação foi classificada restrita à regimes de gravidade forte. Desta forma, as correções propostas não influenciariam na fenomenologia gravitacional em baixas energias citesotirou2010f. Essas retificações foram consideradas importantes, se confinadas, nas escalas de Planck, remetendo então ao Universo primordial, ou próximos da singularidade de buracos negros [54].

Apesar da RG explicar muitos eventos físicos com uma boa precisão, há alguns fenômenos no universo, em regimes extremos, que não são explicados, como: problema da planura [89]¹, horizonte² e monopolos [88]. Não só isso, mas a Relatividade Geral não aborda efeitos quânticos. Logo, muitos físicos tentam produzir uma Teoria Quântica da Gravitação e dessas tentativas surgem teorias alternativas de gravitação [90].

O fato da teoria da Relatividade Geral não ser renormalizável nos diz que ela não pode ser quantizada. Diante disso, as teorias alternativas tentam abordar esse tipo de situação. Em 1962, foi demonstrado por Utiyama [91] que a renormalização em um ciclo exigiria uma adaptação na ação de Einstein-Hilbert, de modo que incluiria um termo de curvatura de ordem superior [85]. Em seguida, nos trabalhos de Stelle, foi averiguado que uma ação de ordem superior realmente renormalizaria a TRG [39]. Essas investigações encorajaram uma parte da comunidade científica a estudar teorias de gravidade de ordem superior. Isto é, explorar as alterações na ação de Einstein-Hilbert inserindo invariantes de curvatura de ordem maior do que a do escalar de Ricci [85].

Uma das teorias alternativas da gravitação muito explorada na literatura é a teoria $f(R)$. Essa linha de pesquisa tem base em modelos cosmológicos [92–94], além de possuir trabalhos sobre aceleração cósmica [17, 18], fazendo relação entre a teoria e as observações

¹Para mais detalhes, consulte "COSMOLOGIA" no site disponível em: http://www.cienciamao.usp.br/dados/tne/_asmadorestruturasdowni.arquivoempdf.pdf. Acesso em 3 set. 2018

²O Problema do Horizonte. Disponível em: <http://intl.relatividad.org/pt/o-problema-do-horizonte/>. Acesso em: 3 set. 2018.

cosmológicas [95–97]. Além desses trabalhos já citados, temos ainda obras abordando a inflação [98–104] e os problemas da energia escura [105–107].

Essa teoria modifica o escalar R da ação de Einstein-Hilbert por uma função que depende do escalar de curvatura. Assim, podemos impor uma função mais abrangente, não linear, de modo a expandir o escalar de curvatura para ordens superiores. Para isso, precisamos elaborar um método de tal forma que se a função $f(R)$ for igual a R , retornará à equação usual de Einstein-Hilbert [85].

Sobre o método, existem basicamente duas formas distintas nas teorias $f(R)$, para obter as equações de campos, que são: formalismo Métrico e o formalismo de Palatini. Para este trabalho, abordaremos apenas o formalismo métrico.

O primeiro método, denominado de formalismo métrico, é mais usual na literatura e as equações de campo possuem termos de quarta ordem na métrica. Além de ser um trabalho árduo, algumas funções não estão de acordo com experimentos, diante disto tais casos não serão explorados nesse trabalho. É o caso, por exemplo, da função $f(R) = R - \beta/R^n$, com $n > 0$ visto no trabalho [85], a qual tem apresentado divergências nos testes do sistema solar [108,109], mostrando também problemas para o limite Newtoniano [110,111] e estabilidade gravitacional [112]. Nesse trabalho apresentaremos um modelo famoso, conhecido como Modelo Starobinski cuja descrição detalhada encontra-se no livro de Capozziello & Faraoni [90].

O modelo Starobinski explora a função $f(R)$ dada por: $f(R) = R + \alpha R^2$. A principal característica deste modelo é as correções quadráticas no escalar de Ricci, na tentativa de renormalizar a Relatividade Geral, que formam uma extensão direta da TRG e têm sido muito trabalhadas na cosmologia, visto que é concedida a formulação de um modelo inflacionário auto consistente [113].

O segundo método para teorias $f(R)$ é a formulação de Palatini. Essa abordagem utiliza o princípio variacional de Palatini que resulta nas equações diferenciais de segunda ordem na métrica. Nos trabalhos [114,115] é aplicado ao modelo FLRW para explicar a expansão acelerada do universo sem a necessidade de energia escura. Entretanto, existem alguns estudos que questionam se as teorias $f(R)$ na formulação de Palatini atendem aos testes do sistema solar, indagando se estão de acordo com as aproximações Newtoniana [116–120] e ainda livres de instabilidades gravitacionais [121,122].

4.1 Equação de Campo para $f(R)$

Como já vimos anteriormente, a ação de Einstein Hilbert usual é dada por

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (4.1)$$

a qual pode ser generalizada realizando a troca $R \rightarrow f(R)$, resultando na ação [90]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} f(R) \right], \quad (4.2)$$

onde $\kappa = 8\pi G = 2$.

A minimização da ação anterior em relação à métrica resulta em

$$\begin{aligned}
\delta S &= 0, \\
&= \int \frac{d^4x}{2\kappa} \delta \left[\sqrt{-g} f(R) \right], \\
&= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[f(R) (\delta \sqrt{-g}) + \sqrt{-g} (\delta f(R)) \right].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Analogamente ao caso de Einstein Hilbert usual, temos

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}, \tag{4.4}$$

então, aplicando a propriedade (4.4) na equação (4.3) ficamos com

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{f(R)}{2} g^{\mu\nu} \right) + \sqrt{-g} \delta f(R) \right]. \tag{4.5}$$

Devemos aplicar, nesse momento, o princípio variacional em $f(R)$, de modo a ficarmos com [90]

$$\delta f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \delta R, \tag{4.6}$$

Onde o primo termo indica a derivada funcional de $f(R)$ em relação a R .

Além disso, como vimos previamente, o escalar de Ricci pode ser obtido através da soma

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{4.7}$$

desta maneira, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta R &= \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}), \\
&= [\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu})].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Retomando a equação (4.5), ficaremos com

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{f(R)}{2} g^{\mu\nu} + \frac{\partial f(R)}{\partial R} R_{\mu\nu} \right) + \sqrt{-g} \frac{\partial f(R)}{\partial R} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right]. \tag{4.9}$$

Agora, precisamos analisar o último termo da expressão acima dado por $\delta R_{\mu\nu}$. Esse termo, denominado de Tensor de Ricci de segunda ordem, pode ser expresso em termos dos símbolos de Christoffel da seguinte maneira

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta [\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\sigma\rho}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma]. \tag{4.10}$$

De acordo com a equação (7.114) da referência [123],

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho, \tag{4.11}$$

que ao ser multiplicado por $g^{\mu\nu}$ implica em

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = [\partial_\mu\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho]g^{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

Como os índices repetidos da equação anterior representam uma soma, podemos reescrever as letras do segundo termo da seguinte forma: $\rho \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \rho$, nos levando à

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \partial_\nu[g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho - g^{\mu\rho}(\delta\Gamma_{\mu\rho}^\nu)], \\ &= \partial_\nu K^\nu, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $K^\nu = g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho - g^{\mu\rho}(\delta\Gamma_{\mu\rho}^\nu)$.

Com esses ingredientes, observamos que a equação (4.9) é reescrita como

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{f(R)}{2}g^{\mu\nu} + \frac{\partial f(R)}{\partial R}R_{\mu\nu} \right) + \sqrt{-g}\frac{\partial f(R)}{\partial R}\partial_\nu K^\nu \right], \quad (4.14)$$

na qual o último termo pode ser representado por

$$\sqrt{-g}\frac{\partial f(R)}{\partial R}\partial_\nu K^\nu = \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\frac{\partial f(R)}{\partial R}K^\nu \right) - \sqrt{-g}K^\nu\partial_\nu \left(\frac{\partial f(R)}{\partial R} \right). \quad (4.15)$$

Ao realizarmos a integração sobre todo o espaço-tempo, o primeiro termo do lado direito consiste em um termo de superfície via teorema de Gauss. Consideramos que tal termo de superfície é nulo nos contornos de integração e assim, ficamos com a equação

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\frac{\partial f(R)}{\partial R}\partial_\nu K^\nu &= -\sqrt{-g}K^\nu\partial_\nu \left(\frac{\partial f(R)}{\partial R} \right) \\ &= -\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho - g^{\mu\rho}(\delta\Gamma_{\mu\rho}^\nu)]\partial_\nu \left(\frac{\partial f(R)}{\partial R} \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sabemos que os símbolos de Christoffel são dados por

$$\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}[\nabla_\rho\delta g_{\lambda\mu} + \nabla_\mu\delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\rho\rho}],$$

e

$$\delta\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}[\nabla_\rho\delta g_{\lambda\mu} + \nabla_\mu\delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\rho}],$$

consequentemente, podemos escrever K^ν da seguinte forma

$$\begin{aligned} K^\nu &= g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho - g^{\mu\rho}(\delta\Gamma_{\mu\rho}^\nu), \\ &= g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\nabla_\rho\delta g_{\lambda\mu} + \nabla_\mu\delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\rho}) \right] - g^{\mu\rho} \left[\frac{1}{2}g^{\nu\lambda}(\nabla_\rho\delta g_{\lambda\mu} + \nabla_\mu\delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\rho}) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Além disso, podemos utilizar a propriedade

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu, \begin{cases} 0 \rightarrow \mu \neq \lambda \\ 1 \rightarrow \mu = \lambda \end{cases}$$

onde δ_λ^μ é a delta de Kronecker [124], em conjunto com

$$g_{\nu\lambda}(\delta g^{\mu\nu}) = -g^{\mu\nu}(\delta g_{\nu\lambda}); \quad (4.18)$$

e

$$g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} \delta g_{\rho\lambda} = -\delta g^{\mu\nu}, \quad (4.19)$$

para reescrever (4.16) como

$$\sqrt{-g} K^\nu \partial_\nu \frac{\partial f(R)}{\partial R} = \sqrt{-g} \left(\partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial f(R)}{\partial R} - g_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha \frac{\partial f(R)}{\partial R} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

Substituindo o resultado anterior na variação da ação (4.17), ficamos com

$$\delta S = \int \frac{1}{2\kappa} d^4x \left[\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \frac{\partial f(R)}{\partial R} - \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial f(R)}{\partial R} + g_{\mu\nu} \square \frac{\partial f(R)}{\partial R} \right) \right] = 0,$$

onde \square é operador d'Alembertiano, ou seja,

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2. \quad (4.21)$$

Então, a equação de campo para a teoria f(R) será escrita por

$$-\frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \frac{\partial f(R)}{\partial R} - \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial f(R)}{\partial R} + g_{\mu\nu} \square \frac{\partial f(R)}{\partial R} = 0. \quad (4.22)$$

Para incluir a interação da matéria, basta acrescentar a ação composta por uma lagrangiana \mathcal{L}_m na equação (4.2). Deste modo, ao variarmos a ação efetiva em relação à métrica ficamos com o termo extra

$$\delta \mathcal{L}_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \quad (4.23)$$

e constatamos que a nossa equação será

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f'(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.24)$$

onde a constante $\kappa = 2$, o termo $f'(R)$ é a derivada da função em relação ao escalar de Ricci e o $T_{\mu\nu}$ é tensor energia momento representado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.25)$$

Observamos que a equação (4.24) recupera as equações de campo de Einstein se escolhermos $f(R) = -R$.

Ao calcularmos o traço da equação (4.24) determinamos que

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) = \kappa T, \quad (4.26)$$

Como exemplo, podemos ilustrar um cenário de ausência de matéria,

Podemos ainda representar a equação (4.24) em termos do tensor de Einstein e associa-la a um tensor energia momento formado por termos de curvatura. Para tanto, permita-nos reescrever (4.24) como

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}f'(R) &- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f'(R)R + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f'(R)R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\Box f'(R) = -\kappa T_{\mu\nu}, \\ f'(R)G_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\frac{f(R) - f'(R)R}{2} + \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\Box f'(R), \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein. Neste momento, estabeleceremos uma nova expressão para o tensor energia momento

$$T_{\mu\nu}^m = \frac{T_{\mu\nu}}{f'(R)} \quad e \quad T_{\mu\nu}^{(eff)} = -\frac{1}{\kappa f'(R)} \left[g_{\mu\nu}\frac{f(R) - f'(R)R}{2} + \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\Box f'(R) \right],$$

ou seja, a equação (4.27) torna-se

$$G_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^{(eff)}). \quad (4.28)$$

Verificamos diretamente que a componente temporal da equação anterior possui a forma

$$f'R_{00} + g_{00}\Box f' - \partial_0\partial_0 f' - \frac{1}{2}f(R)g_{00} = -\kappa T_{00}, \quad (4.29)$$

além disso, visto que

$$\partial_0\partial_0 f' = \partial_0^2 f' = \ddot{f}'. \quad (4.30)$$

e, aplicando na métrica FLRW

$$\begin{aligned} \Box f' &= \partial_\mu\partial^\mu f', \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu f'), \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\mu\sqrt{-g})\partial^\mu f' + \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\partial^\mu\partial_\mu f', \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_0\sqrt{-g})\partial^0 f' + \partial_0\partial^0 f', \\ &= \frac{3a^2\dot{a}r^2\sin^2\theta}{a^3r^2\sin\theta}\dot{f}' + \ddot{f}', \\ &= 3H\dot{f}' + \ddot{f}', \end{aligned} \quad (4.31)$$

constatamos que (4.29), é simplesmente

$$\begin{aligned}
-3\frac{\ddot{a}}{a}f' + (3H\dot{f}' + \ddot{f}') - \dot{f}' - \frac{1}{2}f(R) &= -\kappa\rho, \\
-3\left(\frac{-R}{6} - H\right)f' + 3H\dot{f}' - \frac{1}{2}f(R) &= -\kappa\rho, \\
\frac{R}{2}f' + 3H^2f' + 3H\dot{f}' - \frac{1}{2}f(R) &= -\kappa\rho \\
H^2 = \frac{1}{3f'} \left[-\kappa\rho + \frac{1}{2}(f(R) - Rf') - 3H\dot{R}f'' \right], & \quad (4.32)
\end{aligned}$$

tratando-se da versão da primeira equação de Friedmann no contexto de teorias $f(R)$. Podemos observar que o caso usual de Einstein Hilbert pode ser recuperado se $f = -R$. Para as componentes espaciais de (4.28) temos

$$f'R_{ij} + g_{ij}\square f' - \partial_i\partial_j f' - \frac{1}{2}f(R)g_{ij} = -\kappa T_{ij}, \quad (4.33)$$

a qual pode ser simplificada considerando

$$\begin{aligned}
\partial_i\partial_j f' &= \partial_i\partial_j f' + \Gamma_{ij}^\lambda\partial_\lambda f', \\
&= \Gamma_{ij}^\lambda\partial_0 f', \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}(\partial_i g_{j\mu} + \partial_j g_{\mu i} - \partial_\mu g_{ij})\partial_0 f', \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{ij})\partial_0 f', \\
&= \frac{2a\dot{a}}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\right)g_{ij}\partial_0 f', \\
&= \frac{\dot{a}}{a}g_{ij}\partial_0 f', \\
&= Hg_{ij}\dot{f}'. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Deste modo, observamos que (4.33) é dada por

$$\begin{aligned}
-g_{ij}f'\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2\right) + g_{ij}(3H\dot{f}' + \ddot{f}') - Hg_{ij}\dot{f}' - \frac{1}{2}g_{ij}f(R) &= -\kappa p g_{ij}, \\
-f'\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2\right) + 3H\dot{f}' + \ddot{f}' - H\dot{f}' - \frac{1}{2}f &= -\kappa p, \\
3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{1}{f'} \left[-\kappa p - \frac{1}{2}(f - Rf') + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \dot{R}^2 f''' \right], & \quad (4.35)
\end{aligned}$$

tratando-se da segunda equação de Friedmann para teorias $f(R)$. Novamente, o caso usual de Einstein-Hilbert é recuperado quando impomos $f = -R$.

4.2 Modelo Starobinski

Alexei Alexandrowitsch Starobinski nasceu na Rússia em 1948 e teve um papel muito importante para os modelos inflacionários em teorias modificadas da gravitação.

Um de seus grandes trabalhos na área aborda as anomalias que surgem na Gravitação Quântica [125]. O modelo proposto por Starobinski nos mostra resultados bastante consistentes com a CMB quanto aos espectros quase invariantes de escala de ondas gravitacionais e anisotropias da temperatura [126, 127].

A função $f(R)$ para o modelo Starobinski é dada por

$$f(R) = -R + \alpha R^2, \quad (4.36)$$

onde α é uma constante.

Para determinar as equações de Friedmann no modelo Starobinski precisamos utilizar as expressões (4.32) e (4.35), a partir delas constatamos que

$$H^2 = \frac{1}{3(-1 + 2\alpha R)} \left[-\kappa\rho - \frac{1}{2}\alpha R^2 - 6\alpha H\dot{R} \right], \quad (4.37)$$

e

$$3H^2 + 2\dot{H} = \frac{-1}{-1 + 2\alpha R} \left[-\kappa p + \frac{1}{2}\alpha R^2 + 4\alpha H\dot{R} + 2\alpha\ddot{R} \right], \quad (4.38)$$

para o caso em que $\alpha = 0$, retornaremos as equações usuais de Friedmann.

Capítulo 5

Modelo Analítico Gerado

Nossa proposta de contribuição de análise cosmológica no modelo de Starobinski consiste em obter uma configuração analítica de campo escalar que nos permita descrever diferentes fases do universo observável. Para tanto, nos inspiramos nas investigações de Bazeia *et al.* [128], no qual os autores obtêm branas analíticas em modelos com uma dimensão extra. Adotando uma estratégia semelhante a desse artigo, vamos propor que

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi); \quad \phi = \phi(t), \quad (5.1)$$

e ao trabalharmos com a métrica FLRW, R é tal que

$$R = -6 \frac{\ddot{a}}{a} - 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -6 (2H^2 + \dot{H}). \quad (5.2)$$

Conseqüentemente,

$$\dot{R} = -24H\dot{H} - 6\ddot{H}; \quad \ddot{R} = -24\dot{H}^2 - 24H\ddot{H} - 6\ddot{\ddot{H}}. \quad (5.3)$$

Ao substituírmos esses ingredientes em (4.38), após algumas simplificações chegamos em

$$\dot{\phi}^2 = -\dot{H} - 36\alpha\dot{H}^2 - 6\alpha(3H\ddot{H} + \ddot{\ddot{H}}). \quad (5.4)$$

A fim de buscar por uma solução analítica para a equação acima, vamos propor o *Ansatz*

$$H = b \tanh(c_1 t + c_2) + c_3, \quad (5.5)$$

além disso, considerando o "fine-tuning" ou ajuste fino

$$b = \frac{48\alpha c_1^2 - 1}{108\alpha c_1}; \quad c_3 = \frac{-1 + 36bc_1\alpha - 24c_1^2\alpha}{36c_1\alpha}, \quad (5.6)$$

podemos reescrever (5.4) como

$$\dot{\phi} = \beta [\tanh(c_1 t + c_2) + 1] \operatorname{sech}(c_1 t + c_2); \quad \beta = \frac{\sqrt{-(6\alpha c_1^2 + 1)(48\alpha c_1^2 - 1)}}{9\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}. \quad (5.7)$$

A equação anterior pode ser integrada diretamente, resultando em

$$\phi(t) = \frac{2\beta \tan^{-1}\left(\tanh\left(\frac{1}{2}(c_1 t + c_2)\right)\right) - \beta \operatorname{sech}(c_1 t + c_2)}{c_1}, \quad (5.8)$$

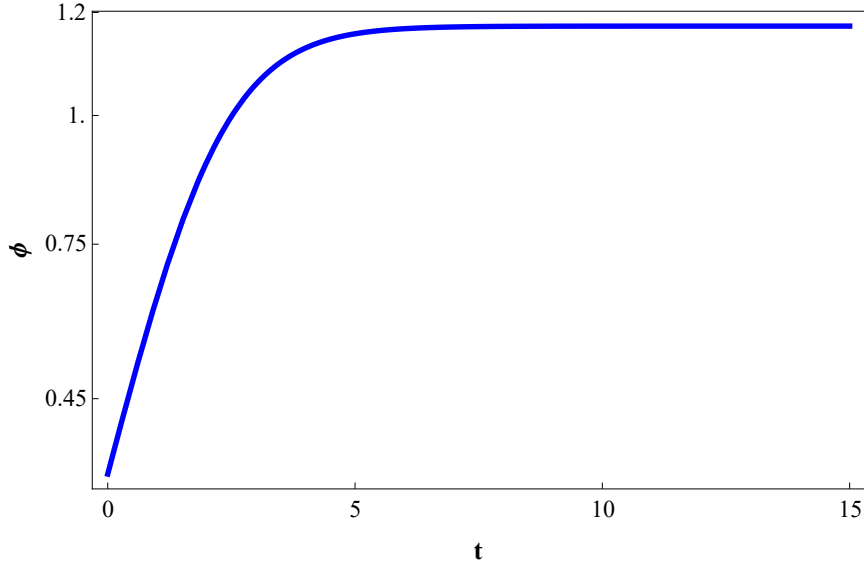


Figura 5.1: Campo ϕ do modelo, assumindo que $\beta = 0.280$, $c_1 = -0.375$ e $c_2 = 0.5$

o campo gerado pode ser visualizado na figura (5.1)

Isolando o potencial cosmológico em (4.37), verificamos que

$$V = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} - 3\alpha H\dot{R} - \frac{3}{2}H^2(-1 + 2\alpha R) - \frac{1}{4}\alpha R^2, \quad (5.9)$$

consequentemente, ao substituirmos (5.8) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{4} \left[-2 \operatorname{sech}^4(c_2 + c_1 t) \left(18b^2 c_1^2 \alpha + \beta^2 \cosh[2(c_2 + c_1 t)] + \beta^2 \sinh[2(c_2 + c_1 t)] \right) + \right. \\ & 6 \left[c_3 + b \tanh(c_2 + c_1 t) \right]^2 + 72 b c_1 \alpha \operatorname{sech}(c_2 + c_1 t)^2 \left[c_3 + b \tanh(c_2 + c_1 t) \right] \times \\ & \left. \left[3c_3 + (3b - 2c_1) \tanh(c_2 + c_1 t) \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

A solução analítica (5.8) junto com o potencial (5.10) formam as bases de nosso modelo analítico. A partir dos resultados anteriores, verificamos também que o fator de escala pode ser escrito como sendo

$$\begin{aligned} a &= \int H dt, \\ &= e^{c_3 t} \cosh(c_2 + c_1 t)^{b/c_1}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

e a taxa de desaceleração é

$$\bar{q} = -1 - \frac{b c_1}{[c_3 \cosh(c_2 + c_1 t) b \sinh(c_2 + c_1 t)]^2}, \quad (5.12)$$

e

$$\omega = \frac{z^2 \left[9\alpha b^2 c_1^2 + \beta^2 \sinh(2(c_1 t + c_2)) + \beta^2 \cosh(2(c_1 t + c_2)) \right] - 36\alpha b c_1 z x y - 6x^2}{6x^2 - 9\alpha b^2 c_1 z^2 + 36\alpha b c_1 z}. \quad (5.13)$$

onde $y = (3b - 2c_1) \tanh(c_1 t + c_2) + 3c_3$, $x = b \tanh(c_1 t + c_2) + c_3$ e $z = 2\text{sech}^2(c_1 t + c_2)$.

Veamos agora explicitamente, as características dos nossos parâmetros analíticos. Na Figura 5.2 ilustramos o parâmetro de Hubble para o modelo em questão. Nela, averiguamos que o parâmetro de Hubble possui um valor específico em $t = 0$ que decai à medida que o tempo passa. Tal comportamento caracteriza uma transição da expansão que vai de um regime acelerado intenso para um regime acelerado suave. Para complementar a análise desse parâmetro, geramos também o gráfico do crescimento do fator de escala, mostrado na Figura 5.3.

No referido gráfico, vemos que o fator de escala acompanha o comportamento de H , revelando um universo em constante expansão. A constante expansão também é corroborada pelo parâmetro de desaceleração como visto na Figura 5.4, a qual revela que o Universo possui uma região de pequena desaceleração para t próximo de zero e passa a acelerar para tempos futuros, sinalizando o regime atual de expansão. Finalmente, geramos também o gráfico para o parâmetro da equação de estado, Figura 5.5 o qual mostra que a fase do universo mapeada pelo modelo pertence ao regime de pressão negativa, ou seja, trata-se de um período no qual o universo já encontra-se dominado pela energia escura. Averiguamos também que ω tende suavemente ao valor -1 , sendo este o valor medido experimentalmente pelo satélite PLANCK e pela colaboração Dark Energy Survey. Vale salientar que não é necessário um ajuste fino das constantes c_1 e c_2 para a obtenção dos parâmetros aqui discutidos.

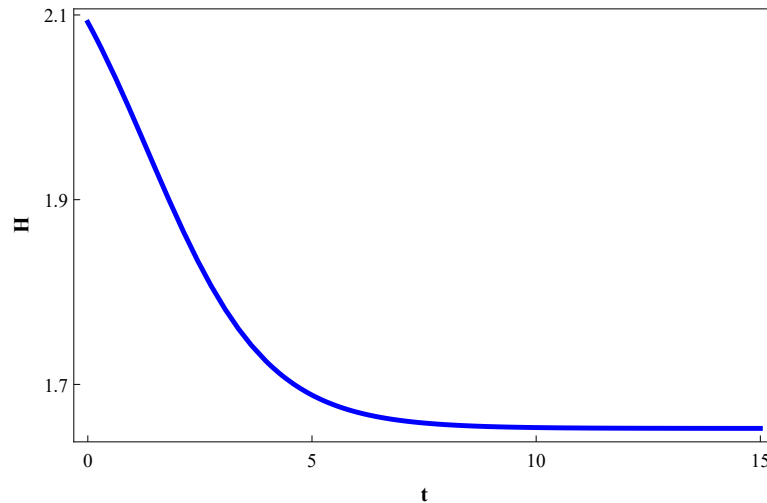


Figura 5.2: Parâmetro de Hubble H para $b = 0.301$, $c_1 = -0.375$, $c_2 = 0.5$ e $c_3 = 1.953$.

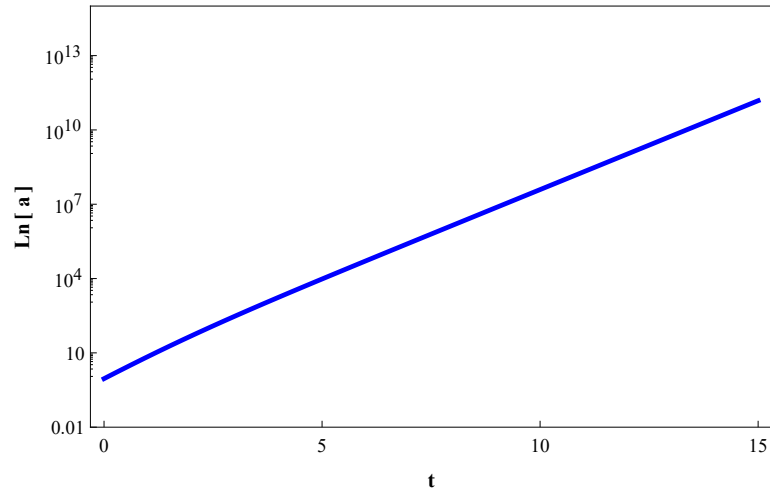


Figura 5.3: Gráfico *log* versus t de $\ln(a)$ onde consideramos $b = 0.301$, $c_1 = -0.375$, $c_2 = 0.5$ e $c_3 = 1.953$.

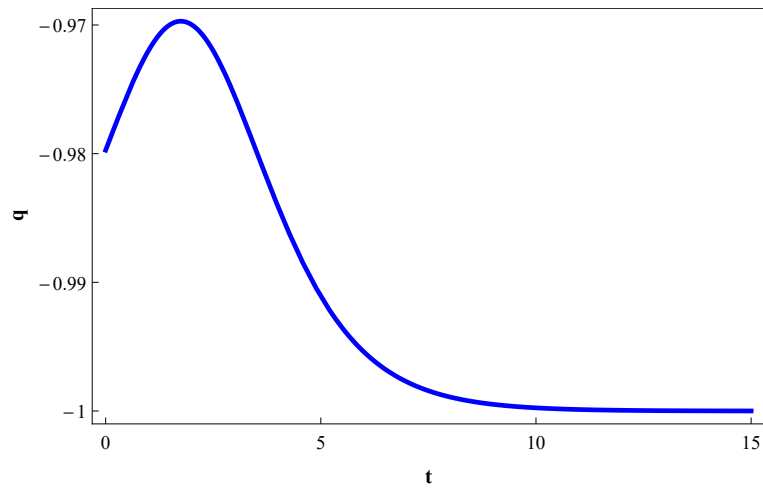


Figura 5.4: Parâmetro da taxa de desaceleração \bar{q} com $b = 0.301$, $c_1 = -0.375$, $c_2 = 0.5$ e $c_3 = 1.953$.

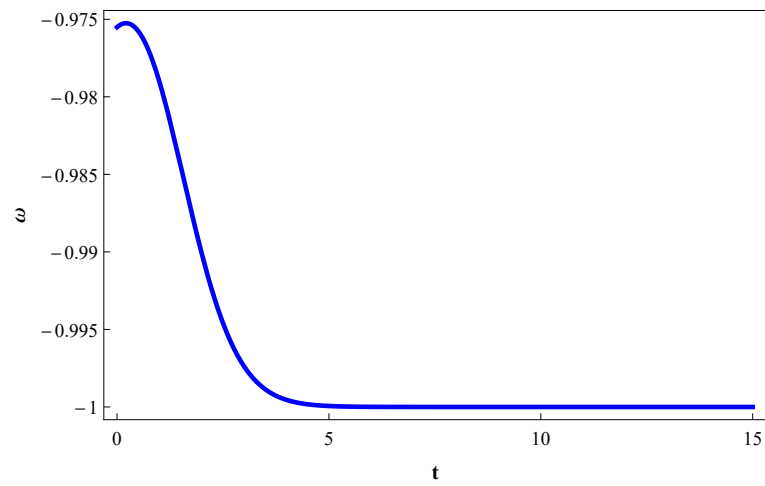


Figura 5.5: Parâmetro da equação de estado ω , para valores de $b = 0.301$, $c_1 = -0.375$, $c_2 = 0.5$ e $c_3 = 1.953$, $\alpha = 0.053$ e $\beta = 0.280$

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste capítulo está uma síntese das principais ideias e resultados obtidos ao longo desta dissertação.

Começamos nosso estudo apresentando no capítulo 2 tópicos sobre a teoria escalar real que descreve modelos unidimensionais. A partir disso, abordamos a definição de defeitos topológicos e estudamos suas propriedades. Como foi relatado na introdução, esses defeitos topológicos estão imersos em diversas áreas, tais como em física de altas energias [4, 5], em modelos cosmológicos [6, 7], em física de matéria condensada [8] e cenários de branas [9]. Diante disso, há inúmeras aplicações no que tange a área de defeitos em teoria clássica de campos [129]. Também no capítulo 2, discutiremos sobre a importância do método BPS [42, 43] para a determinação de modelos analiticamente solúveis não-triviais que apresentam energia mínima. Finalizamos este capítulo estudando os conceitos de cargas topológicas e o método da deformação [83]. Essa última, é uma técnica muito útil que possibilita a criação de novas teorias analíticas baseadas em uma teoria original bem conhecida.

No capítulo 3, fizemos uma revisão sobre a relatividade geral, partindo do contexto histórico, transcorrendo pela minimização da ação de Einstein Hilbert até a caracterização dos parâmetros cosmológicos. O nosso primeiro objetivo foi abordar o acoplamento da ação de Einstein-Hilbert com a ação de uma lagrangiana formada por um campo escalar real. A exploração da dinâmica do campo escalar e das equações de Friedmann proporcionou verificar como o campo escalar atua diretamente no comportamento dos parâmetros cosmológicos. Existe um elo entre o capítulo 2 e o 3 que é o formalismo de primeira ordem. Esse formalismo, apresentado por [84], é empregado como base para a assimilação de soluções do tipo defeitos no contexto da descrição cosmológica do universo.

Nesse trabalho poderíamos abordar somente campos escalares como forma de explicar a expansão acelerada do universo, mas resolvemos tratar das teorias alternativas de gravitação. Como vimos no capítulo 4, há uma gama de teorias de gravidade modificada e optamos pela Teoria $f(R)$. Essa teoria já está sendo discutida desde 1970, com estudos relativos a aceleração cósmica [17, 18, 105–107], inflação [98–104], entre outros trabalhos.

No capítulo 4, apresentamos um estudo sobre as generalidades da teoria $f(R)$, lá calculamos as equações de Friedmann e verificamos que estas recuperam o cenário da Relatividade Geral se $f = -R$. Na seção seguinte, falamos sobre o modelo de Starobinsky e por fim, utilizando um *Ansatz* para o parâmetro de Hubble fomos capazes de encontrar parâmetros cosmológicos analíticos para este modelo. Os parâmetros cosmológicos obtidos revelam que o modelo desenvolvido por nós descreve a fase atual da expansão do universo. Esses parâmetros encontrados estão de acordo com a recente publicação de Malekjani

et al. [130], na qual os autores investigaram modelos de energia escura holográficos e determinaram vínculos para os parâmetros cosmológicos.

Uma primeira extensão das ideias contidas neste artigo seria investigar um campo de interação híbrido, composto por no mínimo dois campos escalares [84, 131]. Além disso, outra ideia interessante consiste em analisar os parâmetros de perturbação espectral para este caso e averiguar se os valores batem com aqueles obtidos pelo telescópio PLANCK. Outra perspectiva de aplicação desta metodologia é no contexto de gravidade tipo $f(R, T^\phi)$, como estudado em [132].

Na referência [84], estabeleceu-se modelos cosmológicos a partir de dinâmica taquiônica. Esta também seria uma linha interessante a ser seguida por nossas investigações. Outra abordagem factível seria a aplicação da metodologia apresentada nesta dissertação no contexto de modelos com constante cosmológica dependente do tempo, tal como visto em [133].

Apêndice A

Minimização da Ação

A densidade lagrangiana mais simples associada a um campo escalar real ϕ é descrita como sendo

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - V, \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi),\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde T é a parte cinética e $V(\phi)$ é o potencial conexas ao campo. Tal densidade de lagrangiana está vinculada com a seguinte ação

$$S = \int dt L_{mc}(\dot{x}, x, t),\tag{A.2}$$

cujo L_{mc} é a lagrangiana da mecânica clássica.

O princípio variacional nos revela a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\delta S &= 0, \\ &= \int \delta L_{mc} dt,\end{aligned}\tag{A.3}$$

$$= \int dt \left[\frac{\partial L_{mc}}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt}(\delta x) + \frac{\partial L_{mc}}{\partial x} \delta x \right].\tag{A.4}$$

Focando no primeiro termo do integrando, teremos

$$\frac{\partial L_{mc}}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt}(\delta x) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{mc}}{\partial \dot{x}} \delta x \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{mc}}{\partial \dot{x}} \delta x.$$

Usando o resultado anterior e aplicando na equação (A.4), obteremos

$$\delta S = \int dt \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{mc}}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L_{mc}}{\partial x} \right] \delta x + \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{mc}}{\partial \dot{x}} \delta x \right).\tag{A.5}$$

A segunda integral será zero pois a variação $\delta x = 0$ para t em $\pm\infty$. Ou seja,

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Vamos ter, no final, a seguinte expressão

$$\delta S = \int dt \left(\frac{\partial L_{mc}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{mc}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x = 0. \quad (\text{A.7})$$

Concluimos que

$$\frac{\partial L_{mc}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{mc}}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (\text{A.8})$$

esta equação é a equação do movimento ou equação de Euler-Lagrange [134].

Essa equação é similar a segunda Lei de Newton, se a lagrangeana for descrita como $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$. Substituindo, então, na equação (A.8), teremos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \right) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \right) \right] = 0. \quad (\text{A.9})$$

As derivadas da lagrangeana (L) em relação a posição (x) e em relação a velocidade (\dot{x}) são, reespectivamente

$$\frac{\partial L_{mc}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial L_{mc}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (\text{A.10})$$

Voltando para a equação (A.9) e substituindo as derivadas encontrada acima, obteremos

$$\begin{aligned} -\frac{dV}{dx} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= -\frac{dV}{dx}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{dV}{dx}, \end{aligned}$$

onde p é denominado de momento.

Diante disso, utilizaremos esta mesma ideia para encontrar a equação de movimento relativa ao campo escalar. Como vimos na equação (2.1), considerando um campo estático, ou seja, independente do tempo $\phi = \phi(x)$, descrevemos a seguinte lagrangeana para um campo escalar real

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (\text{A.11})$$

A ação para o campo ϕ ficará

$$S = \int dt d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (\text{A.12})$$

onde \mathcal{L} é a densidade lagrangiana que é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \int d^3x L(\phi, \partial_\mu \phi), \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Aplicando o princípio de Hamilton, obteremos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi; x), \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Concentrando-se, apenas, no segundo termo da integral, encontra-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi), \\ &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Usando o resultado (A.15) e aplicando na equação (A.14), obtemos a seguinte expressão

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi + \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right]. \quad (\text{A.16})$$

Já que o último termo será zero, a nossa equação (A.16) será escrita como sendo

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0.$$

E definimos a nossa equação do movimento da seguinte forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Apêndice B

Equações de Friedmann

Como vimos, os símbolos de Christoffel é dado por

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}g^{lk} [g_{ki;j} + g_{jk;i} - g_{ij;k}]. \quad (\text{B.1})$$

E constatamos que os símbolos de Christoffel, para o modelo FLRW, não nulos serão descritos como sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} [g_{01;1} + g_{10;1} - g_{11;0}] = \frac{1}{2} \left[-\frac{d}{dt} \frac{-a^2}{(1-kr^2)} \right] = \frac{a(t)}{1-kr^2} \dot{a}; \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} [g_{02;2} + g_{20;2} - g_{22;0}] = \frac{1}{2} \left[-\frac{d}{dt} -a^2 r^2 \right] = r^2 a(t) \dot{a}; \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} [g_{03;3} + g_{30;3} - g_{33;0}] = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = \sin^2 \theta r^2 a(t) \dot{a}; \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} [g_{10;1} + g_{11;0} - g_{01;1}] = \frac{1}{2} \frac{-a^2}{(1-kr^2)} \left[\frac{d}{dt} \frac{-a^2}{1-kr^2} \right] = \frac{\dot{a}}{a(t)} = \Gamma_{10}^1; \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} [g_{11;1} + g_{11;1} - g_{11;1}] = \frac{-1}{2} \frac{1-kr^2}{a^2} \left[\frac{d}{dr} \frac{-a^2}{(1-kr^2)} \right] = \frac{kr}{(1-kr^2)}; \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} [g_{12;2} + g_{21;2} - g_{22;1}] = \frac{-1}{2} \frac{(1-kr^2)}{a^2} \left[\frac{d}{dr} (a^2 r^2) \right] = -r(1-kr^2); \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} [g_{13;3} + g_{31;3} - g_{33;1}] = \frac{1}{2} \frac{(1-kr^2)}{a^2} \left[\frac{d}{dr} (-a^2 r^2 \sin^2 \theta) \right] = -r \sin^2 \theta (1-kr^2); \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} [g_{20;2} + g_{22;0} - g_{02;2}] = \frac{1}{2} \frac{-1}{a^2 r^2} \left[\frac{d}{dt} (-a^2 r^2) \right] = \frac{\dot{a}}{a(t)} = \Gamma_{20}^2; \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} [g_{21;2} + g_{22;1} - g_{12;2}] = \frac{-1}{2} (-a^2 r^2) \left[\frac{d}{dr} a^2 r^2 \right] = \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2; \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} [g_{23;3} + g_{32;3} - g_{33;2}] = \frac{1}{2} \frac{-1}{a^2 r^2} \left[\frac{d}{d\theta} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} [g_{30;3} + g_{33;0} - g_{03;3}] = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{d}{dt} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{\dot{a}}{a} = \Gamma_{30}^3; \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} [g_{31;3} + g_{33;1} - g_{13;3}] = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{d}{dr} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{1}{r} = \Gamma_{31}^3; \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} [g_{32;3} + g_{33;2} - g_{23;3}] = \frac{1}{2} \frac{-1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{d}{d\theta} a^2 \sin^2 \theta r^2 \right] = \cot \theta = \Gamma_{32}^3. \end{aligned}$$

Conforme vimos no livro [134], tensor de Ricci, definido como sendo tensor de Riemann na forma contraída, pode ser escrito da seguinte maneira

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha. \quad (\text{B.2})$$

Como estamos interessados em determinar o tensor de Einstein, precisamos calcular os tensores de Ricci para cada coordenada da métrica FLRW. Então, para a componente temporal, ou seja R_{00} , teremos

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{00}^\alpha + \\ &\quad - \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{01}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^2 \Gamma_{02}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^3 \Gamma_{03}^\alpha, \\ &= -\frac{d}{dt} [\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3] - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3, \\ &= -\frac{d}{dt} [\dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1}] - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= \frac{-3}{a^2}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) - \frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= \frac{-3\ddot{a}}{a}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para a coordenada radial, R_{11}

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha - \partial_1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^0 \Gamma_{10}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{11}^\alpha + \\ &\quad - \Gamma_{1\alpha}^2 \Gamma_{12}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^3 \Gamma_{13}^\alpha, \\ &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \\ &\quad - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3, \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{a\dot{a}}{(1-kr^2)} \right] - \frac{d}{dr} \frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \frac{1}{r} + \frac{kr}{1-kr^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] - \frac{2\dot{a}}{a} \left[\frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \right] - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \\ &= \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{2k}{1-kr^2} - \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \\ &= \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Para a coordenada θ , R_{22} , obteremos

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^0 \Gamma_{20}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^1 \Gamma_{21}^\alpha + \\ &\quad - \Gamma_{2\alpha}^2 \Gamma_{22}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^3 \Gamma_{23}^\alpha, \\ &= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \\ &\quad + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3, \\ &= \frac{d}{dt} (r^2 a \dot{a}) + \frac{d}{dr} [-r(1-kr^2)] - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{d}{d\theta} (\cot \theta) + a \dot{a} r^2 \left(\frac{2\dot{a}}{a} \right) + \frac{\dot{a}}{a} a \dot{a} r^2 + \\ &\quad - r(1-kr^2) \left[\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{1}{r} \right] - \frac{\dot{a}}{a} r^2 a \dot{a} - \cot^2 \theta + \frac{1}{r} [r(1-kr^2)], \\ &= r^2 (a\ddot{a} + \dot{a}^2) - 1 + 3kr^2 + \text{cossec}^2 \theta + 2\dot{a}r^2 - kr^2 - 1 + kr^2 - \dot{a}^2 r^2 - \cot^2 \theta + \\ &\quad \dot{a}^2 r^2 + 1 - kr^2, \\ &= r^2 (a\ddot{a} + 2k + 2\dot{a}^2). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Para a coordenada ϕ , R_{33} , temos:

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^0 \Gamma_{30}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^1 \Gamma_{31}^\alpha + \\
&\quad - \Gamma_{3\alpha}^2 \Gamma_{32}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^3 \Gamma_{33}^\alpha, \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \\
&\quad + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1, \\
&= \frac{d}{dr} (a\dot{a} \sin^2 \theta r^2) + \frac{d}{dr} [-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] + \frac{d}{d\theta} (-\sin \theta \cos \theta) + \frac{2\ddot{a}}{a} (\sin^2 \theta r^2 a\dot{a}) + \\
&\quad - \sin^2 \theta r (1 + kr^2) \left[\frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{1}{r} \right] + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta r^2 \dot{a}^2 + \frac{1}{r} \sin^2 \theta (1 - kr^2), \\
&= r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2 \theta (1 - 3kr^2) - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\dot{a}r^2 \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta + \\
&\quad - \sin^2 \theta (1 - kr^2) - \sin^2 \theta r^2 \dot{a}^2 + \sin^2 \theta (1 - kr^2) + \cos^2 \theta, \\
&= \sin^2 \theta r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2 \theta + 3kr^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta, \\
&= \sin^2 \theta r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Apêndice C

Variacional do Tensor Métrico

Demonstraremos a seguinte identidade

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\delta\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{C.1})$$

Partindo de uma matriz qualquer

$$\text{Tr}(\log M) = \log(\det M), \quad (\text{C.2})$$

podemos aplicar o princípio variacional, de modo a ficar com

$$\delta\text{Tr}\left(\frac{1}{M}\delta M\right) = \frac{1}{\det M}\delta(\delta M), \quad (\text{C.3})$$

Assumindo $\text{Tr}(M) = M_{ii}$, obteremos a seguinte relação

$$\left(M^{-1}\delta M\right)_{ij} = \sum_k (M^{-1})_{ik}\delta M_{kj}. \quad (\text{C.4})$$

Reescrevendo a equação (C.3), teremos:

$$\text{Tr}(M^{-1}\delta M)_{ii} = \sum_k (M^{-1})_{ik}\delta M_{ki}. \quad (\text{C.5})$$

Agora, definimos o seguinte vínculo

$$\text{Tr}(M^{-1}\delta M) = \sum_i \sum_k (M^{-1})_{ik}\delta M_{ki}. \quad (\text{C.6})$$

Considerando que $M = g^{\mu\nu}$, $M^{-1} = g_{\mu\nu}$ e $\det(M) = g$, a equação (C.6) ficará da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} &= g^{-1}\delta g, \\ \delta g &= g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Tendo em vista que a variação de $\sqrt{-g}$ pode ser escrita como sendo

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}}, \quad (\text{C.8})$$

relacionando as equações (C.7) e (C.8), podemos obter a seguinte identidade

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{C.9})$$

Apêndice D

Equação da Continuidade de um fluido cosmológico

Utilizando a expressão (3.40), constatamos que

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (\text{D.1})$$

agora, aplicaremos essa equação na expressão (3.29) e teremos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{3}(\rho + 3p), \\ \dot{H} &= -\frac{1}{3}(\rho + 3p) - H^2, \\ \dot{H} &= -\frac{1}{3}(\rho + 3p) - \frac{2}{3}\rho. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Fazendo a derivada temporal da equação (3.28), considerando um Universo plano, ou seja, $k = 0$, vamos ter

$$\begin{aligned} 2H \left[-\frac{1}{3}(\rho + 3p) - \frac{2}{3}\rho \right] &= \frac{2}{3}\dot{\rho}, \\ \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Referências Bibliográficas

- 1 SANTOS, J. R. L. d. et al. *Tópicos em defeitos deformados e o movimento Browniano*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- 2 CUSTODIO, M. *Revisitando Modelos de Inflação Híbrida*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Campina Grande, Programa de Pós-Graduação em Física, Campina Grande, 2018.
- 3 RUSSELL, J. S. Report on waves. In: *14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*. [S.l.: s.n.], 1844. v. 311, n. 390, p. 1844.
- 4 TOHARIA, M.; TRODDEN, M. Metastable kinks in the orbifold. *Physical review letters*, APS, v. 100, n. 4, p. 041602, 2008.
- 5 DUTTA, S.; STEER, D.; VACHASPATI, T. Creating kinks from particles. *Physical review letters*, APS, v. 101, n. 12, p. 121601, 2008.
- 6 ARMENDARIZ-PICON, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V. kinfation. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 458, n. 2-3, p. 209–218, 1999.
- 7 SCHERRER, R. J. Purely kinetic k-essence as unified dark matter. *Phys. Rev. Lett*, v. 93, p. 011301, 2004.
- 8 WALGRAEF, D. *Spatiotemporal pattern formation*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1997.
- 9 RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, APS, v. 83, n. 23, p. 4690, 1999.
- 10 SCHULZ, P. A. et al. Duas nuvens ainda fazem sombra na reputação de lord kelvin. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, 2007.
- 11 ALMEIDA, C. R. *Cosmologia quântica em teorias escalares-tensoriais: aspectos físicos e matemáticos*. Universidade Federal do Espírito Santo, 2017.
- 12 EINSTEIN, A. Cosmological considerations on the general theory of relativity. *Philosophical Problems in Science*, v. 63, p. 183–204, 2017.
- 13 CARMELI, M. *Classical fields: general relativity and gauge theory*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2001.
- 14 RESNICK, R.; WATANABE, S. *Introdução à relatividade especial*. Editora da Universidade de São Paulo, 1971. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=oArNZwEACAAJ>>.

- 15 EINSTEIN, A. *The meaning of relativity*. [S.l.]: Routledge, 2003.
- 16 HAWKING, S. *Uma breve história do tempo*. [S.l.]: Editora Intrínseca, 2015.
- 17 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.
- 18 PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.
- 19 ADE, P. A. et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 594, p. A13, 2016.
- 20 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- 21 ABBOTT, B. et al. Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. *Physical Review Letters*, APS, v. 116, n. 24, p. 241103, 2016.
- 22 ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, APS, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.
- 23 KIRSHNER, R. P. Hubble's diagram and cosmic expansion. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 101, n. 1, p. 8–13, 2004.
- 24 GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, APS, v. 23, n. 2, p. 347, 1981.
- 25 SANTOS, J. J. R. d. et al. Tópicos em cosmologia com campos escalares. Universidade Federal da Paraíba, 2011.
- 26 ZEL'DOVICH, Y. B. Cosmological constant and elementary particles. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, v. 6, p. 883, 1967.
- 27 ZEL'DOVICH, Y. B. The cosmological constant and the theory of elementary particles. *Physics-Uspekhi*, Turpion Ltd, v. 11, n. 3, p. 381–393, 1968.
- 28 WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Reviews of modern physics*, APS, v. 61, n. 1, p. 1, 1989.
- 29 LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 108, n. 6, p. 389–393, 1982.
- 30 ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Physical Review Letters*, APS, v. 48, n. 17, p. 1220, 1982.
- 31 COPELAND, E. J. Ej copeland, m. sami, and s. tsujikawa, int. j. mod. phys. d 15, 1753 (2006). *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 15, p. 1753, 2006.

- 32 PERLMUTTER, S. et al. Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 391, n. 6662, p. 51, 1998.
- 33 KOLB, E. *The early universe*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- 34 MAIA, J. M. F. *Algumas Aplicações de Campos Escalares em Cosmologia*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2000.
- 35 GASPERINI, M.; VENEZIANO, G. Pre-big-bang in string cosmology. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 1, n. 3, p. 317–339, 1993.
- 36 PEEBLES, P.; RATRA, B. Cosmology with a time-variable cosmological constant. *The Astrophysical Journal*, v. 325, p. L17–L20, 1988.
- 37 BUCHDAHL, H. A. Non-linear lagrangians and cosmological theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 150, n. 1, p. 1–8, 1970.
- 38 VANAZZI, J. V. B. Teorias alternativas para a gravitação: f (r) e brans-dicke. 2016.
- 39 STELLE, K. Ks stelle, phys. rev. d 16, 953 (1977). *Phys. Rev. D*, v. 16, p. 953, 1977.
- 40 SOUZA, M. et al. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol*, v. 6, n. 1, p. 47, 2012.
- 41 OLIVEIRA, S. V. d. et al. *Uma abordagem sobre a teoria do campo escalar real*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.
- 42 BOGOMOL'NYI, E. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)*, LD Landau Theoretical Physics Institute, USSR Academy of Sciences, Moscow, v. 24, n. 4, 1976.
- 43 PRASAD, M.; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the hooft monopole and the julia-zee dyon. *Physical Review Letters*, APS, v. 35, n. 12, p. 760, 1975.
- 44 LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- 45 WESS, J.; BAGGER, J. *Supersymmetry and supergravity*. [S.l.]: Princeton university press, 1992.
- 46 CAMPOS Escalares em Ação, author=Bazeia, Dionisio, address=João Pessoa, school=Universidade Federal da Paraíba, year=1999. Tese (Doutorado).
- 47 JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 49, n. 3, p. 681, 1977.
- 48 FLEMING, H. *Quebra Espontânea de Simetria de Modelos Cosmológico*. [S.l.].
- 49 MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- 50 BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J. Deformed defects. *Physical Review D*, APS, v. 66, n. 10, p. 101701, 2002.

- 51 GRAÇAS, C. *Eletromagnetismo: Física 3*. Universidade Federal de Santa Maria: Série Didática, 2012.
- 52 SILVA, R. M. M. d. Experiências históricas para a determinação da velocidade da luz. Universidade do Porto. Reitoria, 2002.
- 53 D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992.
- 54 OLIVEIRA, T. B. R. d. F. *Teorias $f(R)$ de Gravidade na Formulação de Palatini*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.
- 55 HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. *General relativity: an introduction for physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- 56 FRANK, P.; ROSEN, G.; KUSAKA, S. *Einstein: His life and times*. [S.l.]: AA Knopf New York, 1947.
- 57 SANTOS, A. N. dos; AURETTA, C. *Eddington e Einstein: verificação experimental da teoria da relatividade generalizada na Ilha do Príncipe*. [S.l.: s.n.], 1992.
- 58 TOLMASQUIM, A. Einstein: o viajante da relatividade na américa do sul. 2003.
- 59 MOREIRA, I. de C.; VIDEIRA, A. A. P. *Einstein e o Brasil*. [S.l.]: Editora UFRJ, 1995.
- 60 SOARES, D. O universo estático de einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 34, n. 1, p. 1302, 2012.
- 61 GAMOW, G. My world line: An informal autobiography. *My world line: An informal autobiography., by Gamow, G.. New York, NY (USA): Viking Press, 178 p., 1970*.
- 62 BAGDONAS, A. O maior erro de einstein? debatendo o papel dos erros na ciência através de um jogo didático sobre cosmologia. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 35, n. 1, p. 97–117, 2018.
- 63 FAGUNDES, H. V. Modelos cosmológicos e a aceleração do universo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 24, n. 2, p. 247, 2002.
- 64 EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. *Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932*, Wiley Online Library, p. 88–92, 2005.
- 65 BARRETO, A. B. Modelo cosmológico de flrw com constante cosmológica e dominado por um fluido de yang-mills. Universidade Federal Itajubá, 2012.
- 66 PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, v. 142, p. 419–421, 1965.
- 67 PADMANABHAN, T. *Structure formation in the universe*. [S.l.]: Cambridge university press, 1993.
- 68 WMAP and Dark Matter / Dark energy. Map.gsfc.nasa.gov. Accessed: 2018-09-30.
- 69 RINDLER, W. *Relativity: Special, general, and cosmological*. [S.l.: s.n.], 2006.

- 70 SANTOS, F. *Fluidos Ideais em Relatividade Geral e Cosmologia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2016.
- 71 WEINBERG, S.; DICKE, R. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. *american journal of physics* 41,598-599 (1973). *American Journal of Physics*, v. 41, p. 598–599, 1973.
- 72 MORAES, P.; SANTOS, J. Two scalar field cosmology from coupled one-field models. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 8, p. 083516, 2014.
- 73 WEINBERG, S. *Cosmology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2008.
- 74 NETO, G. P. d. S. Estimating cosmological parameters from observational data. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 40, n. 2, p. e2318, 2018.
- 75 LAHAV, O.; LIDDLE, A. R. The Cosmological Parameters 2014. 2014.
- 76 ALPHER, R. A.; BETHE, H.; GAMOW, G. The origin of chemical elements. *Physical Review*, APS, v. 73, n. 7, p. 803, 1948.
- 77 HOLANDA, R. F. L. d. *Análogos clássicos para cosmologias relativísticas aceleradas: uma abordagem lagrangeana*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007.
- 78 PEEBLES, P. Book review: Principles of physical cosmology/princeton u press, 1993. *Space Science Reviews*, v. 72, p. 680, 1995.
- 79 COLAÇO, L. R. *Cosmologia newtoniana e lagrangeana: aplicações e limitações*. 2014.
- 80 HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.
- 81 HUBBLE, E.; HUMASON, M. L. The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae. *The Astrophysical Journal*, v. 74, p. 43, 1931.
- 82 MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. Oxford: Cambridge University Press, 2005.
- 83 BAZEIA, D.; LOSANO, L.; SANTOS, J. Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 25-27, p. 1615–1620, 2013.
- 84 BAZEIA, D. et al. First-order formalism and dark energy. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 633, n. 4-5, p. 415–419, 2006.
- 85 OLIVEIRA, T. B. R. d. F. *Teorias $f(R)$ de Gravidade na Formulação de Palatini*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.
- 86 WEYL, H. H. weyl, ann. phys.(berlin) 59, 129 (1919). *Ann. Phys.(Berlin)*, v. 59, p. 129, 1919.
- 87 EDDINGTON, A. The mathematical theory of relativity (cambridge, 1924). *Google Scholar*, p. 105, 1952.

- 88 ANDRADE, T. *Modelos cosmológicos inflacionários tipo Starobinsky*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2016.
- 89 KINNEY, W. H.; TZIRAKIS, K. Quantum modes in dbi inflation: exact solutions and constraints from vacuum selection. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 10, p. 103517, 2008.
- 90 CAPOZZIELLO, S.; FARAONI, V. *Beyond Einstein gravity: A Survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 170.
- 91 UTIYAMA, R. R. utiyama and bs dewitt, j. math. phys. 3, 608 (1962). *J. Math. Phys.*, v. 3, p. 608, 1962.
- 92 SOLA, J. The cosmological constant and entropy problems: mysteries of the present with profound roots in the past. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 24, n. 12, p. 1544027, 2015.
- 93 PADMANABHAN, T. Cosmological constant—the weight of the vacuum. *Physics Reports*, Elsevier, v. 380, n. 5-6, p. 235–320, 2003.
- 94 JAMIL, M.; RAHAMAN, F.; KALAM, M. Cosmic-coincidence problem and variable constants of physics. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 60, n. 1, p. 149–156, 2009.
- 95 AMARZGUIOUI, M. et al. Cosmological constraints on $f(r)$ gravity theories within the palatini approach. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 454, n. 3, p. 707–714, 2006.
- 96 TSUJIKAWA, S. Observational signatures of $f(r)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 2, p. 023507, 2008.
- 97 FAY, S.; TAVAKOL, R.; TSUJIKAWA, S. $f(r)$ gravity theories in palatini formalism: Cosmological dynamics and observational constraints. *Physical Review D*, APS, v. 75, n. 6, p. 063509, 2007.
- 98 RINALDI, M. et al. Reconstructing the inflationary $f(r)$ from observations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2014, n. 08, p. 015, 2014.
- 99 HUANG, Q.-G. A polynomial $f(r)$ inflation model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2014, n. 02, p. 035, 2014.
- 100 MYRZAKULOV, R.; SEBASTIANI, L.; VAGNOZZI, S. Inflation in $f(r, \phi)$ -theories and mimetic gravity scenario. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 75, n. 9, p. 444, 2015.
- 101 ELIZALDE, E. et al. Unifying inflation with dark energy in modified $f(r)$ hořava–lifshitz gravity. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 70, n. 1-2, p. 351–361, 2010.
- 102 MYRZAKUL, S.; MYRZAKULOV, R.; SEBASTIANI, L. Chaotic inflation in higher derivative gravity theories. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 75, n. 3, p. 111, 2015.

- 103 BARVINSKY, A. O.; KAMENSHCHIK, A. Y.; NESTEROV, D. Origin of inflation in cft driven cosmology: r^2 -gravity and non-minimally coupled inflaton models. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 75, n. 12, p. 584, 2015.
- 104 BAMBA, K.; ODINTSOV, S. D.; TRETYAKOV, P. V. Inflation in a conformally invariant two-scalar-field theory with an extra r^2 term. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 75, n. 7, p. 344, 2015.
- 105 CAPOZZIELLO, S. S. capozziello, vf cardone, and a. troisi, mon. not. r. astron. soc. 375, 1423 (2007). *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 375, p. 1423, 2007.
- 106 LUBINI, M. et al. Probing the dark matter issue in $f(r)$ -gravity via gravitational lensing. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 71, n. 12, p. 1834, 2011.
- 107 SHOJAI, F.; SHOJAI, A. An $f(r)$ model for dark matter: rotation curves and gravitational lensing. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 46, n. 4, p. 1704, 2014.
- 108 CHIBA, T. $1/r$ gravity and scalar-tensor gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 575, n. 1-2, p. 1–3, 2003.
- 109 AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. Phantom crossing, equation-of-state singularities, and local gravity constraints in $f(r)$ models. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 660, n. 3, p. 125–132, 2008.
- 110 SOTIRIOU, T. P. Unification of inflation and cosmic acceleration in the palatini formalism. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 6, p. 063515, 2006.
- 111 SOTIRIOU, T. P. The nearly newtonian regime in non-linear theories of gravity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 38, n. 9, p. 1407–1417, 2006.
- 112 DOLGOV, A. D.; KAWASAKI, M. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? *Physics Letters B*, Elsevier, v. 573, p. 1–4, 2003.
- 113 STAROBINSKY, A. Aa starobinsky, phys. lett. 91b, 99 (1980). *Phys. Lett.*, v. 91, p. 99, 1980.
- 114 SANTOS, J. et al. Latest supernovae constraints on $f(r)$ cosmologies. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 669, n. 1, p. 14–18, 2008.
- 115 CARVALHO, F. et al. Cosmological constraints from the hubble parameter on $f(r)$ cosmologies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2008, n. 09, p. 008, 2008.
- 116 FARAONI, V. Matter instability in modified gravity. *Physical Review D*, APS, v. 74, n. 10, p. 104017, 2006.
- 117 NOJIRI, S. S. nojiri and sd odintsov, phys. rev. d 68, 123512 (2003). *Phys. Rev. D*, v. 68, p. 123512, 2003.
- 118 OLMO, G. J. Violation of the equivalence principle in modified theories of gravity. *Physical review letters*, APS, v. 98, n. 6, p. 061101, 2007.

- 119 BARAUSSE, E.; SOTIRIOU, T. P.; MILLER, J. C. A no-go theorem for polytropic spheres in palatini $f(r)$ gravity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 25, n. 6, p. 062001, 2008.
- 120 BARAUSSE, E.; SOTIRIOU, T. P.; MILLER, J. C. Curvature singularities, tidal forces and the viability of palatini $f(r)$ gravity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 25, n. 10, p. 105008, 2008.
- 121 MENG, X. H.; WANG, P. Cosmological evolution in $1/r$ -gravity theory. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 4, p. 951, 2004.
- 122 FARAONI, V. Matter instability in modified gravity. *Physical Review D*, APS, v. 74, n. 10, p. 104017, 2006.
- 123 DAS, A. *Lectures on gravitation*. [S.l.]: World scientific, 2011.
- 124 ARFKEN, G.; WEBER, H.; HARRIS, F. *Mathematical methods for physicists* 5th edn (new york: Academic). 2005.
- 125 FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. $f(r)$ theories. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 13, n. 1, p. 3, 2010.
- 126 STAROBINSKII, A. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. *JETP Letters*, v. 30, p. 682–685, 1979.
- 127 MUKHANOV, V. F.; CHIBISOV, G. Quantum fluctuations and a nonsingular universe. *JETP Lett.*, v. 33, p. 532–535, 1981.
- 128 D.BAZEIA A.S.LOBÃO JR, R. A. A. S. Braneworld solutions for $f(r)$ models with non-constant curvature. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 729, p. 127, 2014.
- 129 RAJARAMAN, R. *Solitons and instantons*. 1982.
- 130 MALEKJANI MEHDI REZAEI, I. A. A. M. Can holographic dark energy models fit the observational data? *Physical Review D*, APS, v. 98, p. 063533, 2018.
- 131 KINNEY, W. H. Hamiltonjacobi approach to non-slowroll inflation. *Physical Review D*, APS, v. 56, n. 4, p. 2002, 1997.
- 132 MORAES, P. H. R. S.; SANTOS, J. R. L. A complete cosmological scenario from $f(R, T^\phi)$ gravity theory. *Eur. Phys. J.*, C76, p. 60, 2016.
- 133 SANTOS, P. H. R. S. M. J. R. L. Cosmological features of a quintessence-running vacuum model. *arXiv:1806.07493 [gr-qc]*.
- 134 GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 2011.