

# Resumo

Nesta dissertação, estudamos a existência de solução blow-up para uma classe de problemas e sistemas elípticos. A principal ferramenta usada foi o Método de Sub e Supersolução, além de Regularidade Elíptica e alguns resultados de Equações Diferenciais Ordinárias.

**Palavras-chaves:** Equações Elípticas, Sistemas de Equações Elípticas, Soluções Blow-up, Sub e Supersolução, Estimativas para Equações Elípticas.

# Abstract

In this dissertation, we study the existence of blow-up solution for some classes of elliptic problem, which include scalar problem and elliptic systems. The main tool used is the sub and super-solution methods combined with elliptic regularity and some results of Ordinary Differential Equations.

**Keywords:** Elliptic Equations, Elliptic Equations Systems, Blow-up Solutions, Sub and Supersolution, Estimates for Elliptic Equations.

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Existência de Soluções Blow-up via Método de Sub e Supersolução para uma Classe de Problemas Elípticos

por

Ailton Rodrigues da Silva <sup>†</sup>

sob orientação de

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

e

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

# Existência de Soluções Blow-up via Método de Sub e Supersolução para uma Classe de Problemas Elípticos

por

Ailton Rodrigues da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

---

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG

---

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB

---

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2012

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todo o amor concedido a mim.

À minha querida mãe por todo amor, carinho e dedicação. Te Amo Muito!

Aos meus irmãos e sobrinhos queridos.

Ao professor Claudianor pela paciência e dedicação. Pela ajuda incondicional, mesmo depois de ter passado por problemas de saúde. Pelo apoio nas horas difíceis, pelo carinho, pelas conversas e pelos conselhos de vida. Agradeço não só por toda matemática que me fez aprender, mas principalmente como procurar ser a cada dia uma pessoa melhor, tentar fazer cada dia melhor que o anterior. Devo-lhe Muito! Obrigado por compartilhar com tamanha humildade toda sua experiência. Sinceramente, Muito Obrigado!

Ao professor Júlio, por me conceder à bolsa de seu projeto.

Aos professores Angelo Roncalli e João Marcos pela disponibilidade em me avaliar fazendo parte da banca examinadora.

À todos os professores da Pós-graduação que contribuíram para a formação do meu conhecimento e diretamente para a concretização deste trabalho em especial ao professor Angelo que não mediu esforços para me ajudar.

Aos colegas e amigos de Pós-graduação em especial Fabrício, Marcos, Alex, Kelmem, Bruno Fontes, Annaxsuel e Denilson. Não poderia nem deveria esquecer de Fábio pela confiança, pelas palavras de força e incentivo nos momentos difíceis durante o curso de verão. Agradeço as experiências compartilhadas com vocês e espero que todos tenham um futuro brilhante e uma carreira promissora.

Aos professores que me incentivaram na graduação em especial as professoras Viviane e Gabriela e ao professor Marcelo Gomes.

Aos colegas e amigos de graduação da UFRN, em especial à Dayvid, Elvis, Ana Paula, Hérica, Itailma, Joelson, Samyr, George Augusto, Thiago Jeffersson e aos integrantes do PET de Matemática da UFRN.

À todos os funcionários da UAME.

Sou grato ao Rodrigo e Romildo por me ajudarem quando precisei e pela convivência em harmonia no apartamento.

Ao projeto Casadinho e ao INCT-Matemática.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

À todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, Muito Obrigado!

# Dedicatória

*À minha mãe, Dona Geralda.*

*“...Como é que você reage as quedas que sofre na vida? Como é que você administra os fracassos? Não há receitas mágicas que nos façam vencer os obstáculos, mas ousar dizer que há um jeito interessante de olhar para as quedas que sofremos: É só não permitir que elas sejam definitivas, é só não perder de vista a primavera que o outono prepara. Administre bem os problemas que você tem, não permita que o contrário aconteça, se você não administra-lós eles administrarão você. Deus lhe quer vencedor. A vitória já está preparada feito o presente que está embrulhado e que precisa ser aberto. Não perca tempo! Já começou vencer aquele que se levantou para recomçar o caminho...”*

***Pe. Fábio de Melo***



# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1 Soluções do Tipo Blow-up para Equações Elípticas Semilineares</b>	<b>12</b>
1.1 Resultados Preliminares . . . . .	13
1.1.1 O Método de Sub e Supersolução . . . . .	14
1.1.2 Resultados Técnicos . . . . .	26
1.2 Existência de Solução Blow-up . . . . .	40
1.2.1 Existência de Solução Blow-up em Domínios Limitados . . . . .	41
1.2.2 Existência de Solução Blow-up em Domínios Ilimitados . . . . .	48
<b>2 Soluções do Tipo Blow-up para Equações Elípticas Quasilineares</b>	<b>63</b>
2.1 Resultados Preliminares . . . . .	65
2.1.1 O Método de Sub e Supersolução . . . . .	65
2.1.2 Um Resultado Auxiliar . . . . .	72
2.2 Resultados de Existência de Solução Blow-up . . . . .	77
2.2.1 Existência de Solução Blow-up para Domínios Limitados . . . . .	78
2.2.2 Existência de Solução Blow-up para Domínios Ilimitados . . . . .	84
<b>3 Soluções Radiais do Tipo Blow-up para Sistemas Elípticos em <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>89</b>
3.1 Uma Condição Necessária e Suficiente para Existência de Solução Radial Não-Negativa no $\mathbb{R}^N$ . . . . .	90
3.2 Existência de Solução Radial Positiva: Caso Geral . . . . .	106
<b>A Princípios de Máximo</b>	<b>113</b>
A.1 Princípio do Máximo para Equação de Laplace . . . . .	113
A.2 Princípio do Máximo Clássico . . . . .	115

<b>B Resultados Utilizados na Dissertação</b>	<b>120</b>
B.1 Resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$ e de Teoria da Medida . . . . .	120
B.2 Espaços de Hölder - Espaços de Sobolev - Estimativas de Schauder . .	122
<b>Bibliografia</b>	<b>128</b>

# Introdução

Neste trabalho, estudamos alguns resultados de existência de soluções do tipo Blow-up para equações e sistemas elípticos.

Inicialmente, estudamos a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} \Delta u = h(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) é um domínio limitado ou ilimitado e  $h : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função satisfazendo certas condições.

Em seguida, estudamos a existência de solução radial do tipo Blow-up para a seguinte classe de sistemas

$$\begin{cases} \Delta u = p(|x|)f_1(v)f_2(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \Delta v = q(|x|)g_1(v)g_2(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2)$$

em que  $p, q, f_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  e  $g_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  ( $i = 1, 2$ ) são funções contínuas sujeitas a certas condições que serão apresentadas ao longo do texto.

O estudo de soluções do tipo Blow-up iniciou-se em 1916 com o trabalho de Bieberbach [9] que estudou o caso particular  $\Delta u = e^u$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado motivado por questões na teoria de funções automorfas e também sobre Superfícies Riemannianas com curvatura negativa constante. Ele mostrou que existe uma única solução tal que  $u(x) - \log(\text{dist}^{-2}(x, \partial\Omega))$  é limitada quando  $\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0$ . Problemas desse tipo surgem em Geometria Riemanniana, por exemplo: Se uma métrica Riemanniana da forma  $|ds|^2 = e^{2u(x)} |dx|^2$  possui Curvatura Gaussiana  $-c^2$ , então  $\Delta u = c^2 e^{2u}$ .

Motivado por um problema em Física Matemática com estudos envolvendo Potenciais Elétricos em corpos metálicos, em 1943, Radamacher [42] continuou os estudos de Bieberbach em domínios limitados e regulares de  $\mathbb{R}^3$ .

Em 1957, Keller [24] e Osserman [39], demonstraram de forma independente que o problema  $\Delta u = f(u)$  tem uma solução Blow-up se, e somente se,  $f$  satisfaz a condição

$$\int_1^\infty [2F(t)]^{-\frac{1}{2}} dt < \infty, \quad \text{onde} \quad F(t) = \int_0^t f(s) ds,$$

com  $f \in C^1([0, +\infty))$ ,  $f' \geq 0$ ,  $f(0) = 0$  e  $f > 0$  em  $(0, +\infty)$ .

Motivados por certos problemas de Geometria, em 1974, Loewner e Nirenberg [38], estabeleceram a existência e unicidade de solução para o problema  $\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}}$ ,  $N > 2$ .

Em 1992, Bandle e Marcus [7], estudaram o problema (1) quando  $\Delta u = u^s$ ,  $s > 1$ . Relacionando unicidade de soluções do tipo Blow-up com seu comportamento assintótico na fronteira, estendem os resultados de [38].

Em 1993, Lazer-MacKena [32] estenderam os resultados de Bieberbach e Radamacher para domínios suaves do  $\mathbb{R}^N$  satisfazendo a condição da esfera exterior, considerando não-linearidades da forma  $\Delta u = b(x)e^u$ , onde  $b$  é uma função contínua e estritamente positiva em  $\bar{\Omega}$ .

As referências contidas em [21] e [43] podem ser consultadas para dar uma visão mais ampla das diversas motivações físicas e matemáticas tanto para os problemas (1) quanto para os sistemas (2).

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No **Capítulo 1**, baseados nos trabalhos de Cîrstea & Rădulescu [12] (2002) e Lair [26] (1999) estudamos a existência de soluções do tipo Blow-up para o problema (1) quando  $h(x, u, \nabla u) = p(x)f(u)$ , mais precisamente estudamos a seguinte classe de problemas semilineares

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) é um domínio regular limitado ou ilimitado,  $p : \bar{\Omega} \rightarrow [0, +\infty)$  e  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções satisfazendo hipóteses adequadas. A principal ferramenta usada foi o método de sub e supersolução. Para melhorar a regularidade das soluções usamos um argumento do tipo boot-Strap seguindo idéias de Aires [3] e Vieira [45]. Mostramos que a condição de Keller - Osserman é uma condição necessária e suficiente para a existência de solução Blow-up em domínios limitados.

No **Capítulo 2**, seguindo idéias de um artigo de Ghergu, Niculescu & Rădulescu [17] (2002) estudamos alguns resultados de existência de solução do tipo Blow-up para o problema (1) quando  $h(x, u, \nabla u) = p(x)f(u) - q(x) |\nabla u|^a$ , isto é, estudamos a seguinte classe de problemas quasilineares com termo convectivo

$$\begin{cases} \Delta u + q(x) |\nabla u|^a = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) é um domínio regular limitado ou ilimitado,  $1 \leq a \leq 2$ ,  $p, q : \bar{\Omega} \rightarrow [0, +\infty)$  e  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções satisfazendo certas condições. Neste caso, a função  $f$  é chamado termo de absorção e  $|\nabla u|^a$  é chamado termo convecção. Utilizamos o método de sub e supersolução encontrado em Holanda [21]. Além disso, usamos estimativas de Ladyzhenskaya & Ural'tseva [25] para obter regularidade das soluções. Problemas desse tipo surgem em Teoria de Controle Estocástico estudada por Lasry & Lions em [31].

O **Capítulo 3**, foi dedicado a estudar a existência soluções radiais do Tipo Blow-up para as seguintes classes de sistemas

$$\begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^\alpha & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \Delta v = q(|x|)u^\beta & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta u = p(|x|)f_1(v)f_2(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \Delta v = q(|x|)g_1(v)g_2(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

em que  $p, q, f_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  e  $g_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  ( $i = 1, 2$ ) são funções contínuas sujeitas a certas condições que serão apresentadas ao longo do texto. Baseado nos artigos de Lair [27] e [28] mostramos uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções para o primeiro tipo de sistema. Tomando por base os artigos de Li, Zhang P. & Zhang Z. [34] e [35], usando alguns argumentos de E.D.O., mostramos a existência de solução para o segundo tipo de sistema.

No **Apêndice A** apresentamos o Princípio de Máximo Clássico para a Equação de Laplace e para um operador linear Uniformemente Elíptico de segunda ordem.

Por fim, no **Apêndice B** enunciamos os principais resultados que utilizamos em nossa dissertação tais como um teorema encontrado em Ladyzhenskaya & Ural'tseva [25] e Estimativas de Schauder encontrados no livro do Gilbarg & Trudiguer[19].

# Capítulo 1

## Soluções do Tipo Blow-up para Equações Elípticas Semilineares

Neste capítulo, estudaremos alguns resultados de existência de soluções para a seguinte classe de equações elípticas semilineares:

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) é um domínio regular (limitado ou ilimitado) com fronteira (possivelmente vazia) compacta.

A principal finalidade deste capítulo é mostrar a existência de soluções do tipo Blow-up para o problema (1.1).

No que segue, sejam  $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funções satisfazendo:

$$(p_1) \quad p(x) \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega};$$

$$(p_2) \quad p \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ se } \Omega \text{ é limitado ou } p \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega) \text{ se } \Omega \text{ é ilimitado};$$

$$(f_1) \quad f \in C^1([0, +\infty)), \quad f' \geq 0, \quad f(0) = 0 \text{ e } f > 0 \text{ em } (0, +\infty);$$

$$(KO) \quad \int_1^\infty [2F(t)]^{-\frac{1}{2}} dt < \infty, \text{ onde } F(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

A condição (KO) é chamada condição de Keller-Osserman ver [24] e [39]. Vale ressaltar que a mesma pode ser substituída por

$$(\star) \quad \int_\delta^\infty [F(t)]^{-\frac{1}{2}} dt < \infty;$$

para algum  $\delta > 0$ , uma vez que a condição  $(KO)$  implica na condição  $(\star)$ .

Neste capítulo, a menos que seja mencionado o contrário, as soluções de (1.1) serão soluções no sentido clássico, ou seja, funções em  $C^2(\Omega)$  que satisfazem (1.1).

A seguir, alguns exemplos de funções que satisfazem as condições  $(f_1)$  e  $(KO)$ :

(a)

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = t^r \quad (r > 1) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} h : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto h(t) = e^t - 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} l : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto l(t) = t[\ln(t+1)]^r \quad (r > 2) \end{aligned}$$

Agora, definimos soluções Blow-up de (1.1).

**Definição 1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  e  $u \in C^2(\Omega)$ . Dizemos que  $u$  é uma solução*

(i) *Blow-up se*

$$\lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} u(x) = +\infty \quad \text{quando } \Omega \neq \mathbb{R}^N.$$

(ii) *Blow-up no  $\mathbb{R}^N$  se*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \quad \text{quando } \Omega = \mathbb{R}^N.$$

## 1.1 Resultados Preliminares

Nesta seção, vamos estabelecer alguns resultados de existência de solução para o problema (1.1) em domínios limitados. Para tanto, mostraremos inicialmente alguns resultados técnicos.

### 1.1.1 O Método de Sub e Supersolução

Uma das principais ferramentas usadas para encontrar soluções de problemas elípticos é conhecida como Método de Sub e Supersolução. Iremos usar tal método para estudar, primeiramente, o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado,  $g : \partial\Omega \rightarrow (0, +\infty)$  contínua,  $p$  e  $f$  satisfazem as condições  $(p_1)$ ,  $(p_2)$  e  $(f_1)$ , respectivamente.

**Definição 2.** Uma função  $\underline{u}$  é dita subsolução do problema (1.2) se  $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e satisfaz

$$\begin{cases} \Delta \underline{u} \geq p(x)f(\underline{u}) & \text{em } \Omega, \\ \underline{u} \leq g & \text{em } \partial\Omega, \\ \underline{u} \geq 0, \underline{u} \neq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

**Definição 3.** Uma função  $\bar{u}$  é dita supersolução do problema (1.2) se  $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e satisfaz

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} \leq p(x)f(\bar{u}) & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} \geq g & \text{em } \partial\Omega, \\ \bar{u} \geq 0, \bar{u} \neq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

A seguir, veremos o método de sub e supersolução para o problema (1.2). Iremos mostrar tal resultado seguindo as idéias de Figueiredo [14], que de forma bem elegante demonstra o método para uma classe mais geral de equações semilineares, o qual contém a idéia central da iteração monôtonica encontrada nos celebres trabalhos [4] e [5] devidos à Amann.

**Teorema 1.1.** Suponha que o problema (1.2) tenha uma supersolução  $\bar{u}$  e uma subsolução  $\underline{u}$  com  $\underline{u} \leq \bar{u}$ . Suponha ainda que  $f$  e  $p$  satisfaçam  $(f_1)$ ,  $(p_1)$ ,  $(p_2)$ , respectivamente. Então, o problema (1.2) tem uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

**Demonstração.**

Seja

$$M_0 = \max\{\|\underline{u}\|_\infty, \|\bar{u}\|_\infty\} \quad (1.3)$$



o qual existe, pois  $\underline{u}, \bar{u} \in C(\bar{\Omega})$ . Desde que  $f \in C^1([0, +\infty))$ , considere

$$M = \max_{t \in [0, M_0]} |f'(t)|.$$

Defina a seguinte função

$$\begin{aligned} h : \bar{\Omega} \times [0, M_0] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto h(x, t) = p(x)f(t) - kt, \end{aligned}$$

em que  $k = \|p\|_\infty M$ . Por definição, temos  $\frac{\partial h}{\partial t} \leq 0$ , isto é,  $h$  é não-crescente na variável  $t$ .

Note que a função  $h_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h_0(x) = h(x, \underline{u}(x))$  é localmente Hölder contínua<sup>1</sup> em  $\Omega$ . Com efeito, como  $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , em particular,  $\underline{u} \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$  para algum  $0 < \alpha \leq 1$ . Sendo

$$\frac{|h_0(x) - h_0(y)|}{|x - y|^\alpha} = \frac{|p(x)f(\underline{u}(x)) - k\underline{u}(x) - p(y)f(\underline{u}(y)) + k\underline{u}(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

dados  $x, y \in \Omega$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{|h_0(x) - h_0(y)|}{|x - y|^\alpha} &\leq \frac{|p(x) - p(y)| |f(\underline{u}(y))|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|p(x)| |f(\underline{u}(x)) - f(\underline{u}(y))|}{|x - y|^\alpha} \\ &\quad + k \frac{|\underline{u}(x) - \underline{u}(y)|}{|x - y|^\alpha}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sup_{x \neq y} \frac{|h_0(x) - h_0(y)|}{|x - y|^\alpha} &\leq \sup_{x \neq y} \frac{|p(x) - p(y)| |f(\underline{u}(y))|}{|x - y|^\alpha} \\ &\quad + \sup_{x \neq y} \frac{|p(x)| |f(\underline{u}(x)) - f(\underline{u}(y))|}{|x - y|^\alpha} + k \sup_{x \neq y} \frac{|\underline{u}(x) - \underline{u}(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\stackrel{p, f(\underline{u}) \in L^\infty(\bar{\Omega})}{\leq} c_1 \sup_{x \neq y} \frac{|p(x) - p(y)|}{|x - y|^\alpha} + c_1 \sup_{x \neq y} \frac{|f(\underline{u}(x)) - f(\underline{u}(y))|}{|x - y|^\alpha} + \\ &\quad + k \sup_{x \neq y} \frac{|\underline{u}(x) - \underline{u}(y)|}{|x - y|^\alpha}. \end{aligned}$$

Uma vez que  $p, f(\underline{u}), \underline{u} \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ , segue que

$$\sup_{x \neq y} \frac{|h_0(x) - h_0(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty,$$

<sup>1</sup>ver Apêndice B

o que implica em  $h_0 \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ . Segue do Teorema B.21 que o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u - ku = p(x)f(\underline{u}) - k\underline{u} \quad \text{em } \Omega \\ u = g \quad \text{em } \partial\Omega \\ u \geq 0, u \neq 0 \quad \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

tem uma única solução  $u_1 \in C_{loc}^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

Com o mesmo procedimento feito anteriormente, concluímos que  $h_1 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h_1(x) = h(x, u_1(x))$  é localmente Hölder contínua de expoente  $\alpha$  em  $\Omega$  e, conseqüentemente, o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u - ku = h_1(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u = g \quad \text{em } \partial\Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right.$$

tem uma única solução  $u_2 \in C_{loc}^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

Dessa forma, obtemos indutivamente uma seqüência  $(u_n)_{n \geq 0} \subset C_{loc}^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  de funções tais que  $u_0 = \underline{u}$  e  $u_n$  é a única solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u - ku = h_{n-1}(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u = g \quad \text{em } \partial\Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (P_n)$$

em que  $h_{n-1}(x) = h(x, u_{n-1}(x)) \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ .

Note que a seqüência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é não-decrescente e limitada em  $[\underline{u}, \overline{u}]$ . Com efeito, verifiquemos inicialmente que  $\underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u}$ . Pela definição de supersolução, temos

$$\Delta \overline{u} \leq p(x)f(\overline{u}) \quad \text{em } \Omega,$$

o que implica

$$\Delta \overline{u} - k\overline{u} \leq h(x, \overline{u}(x)) \quad \text{em } \Omega.$$

Por outro lado,

$$\Delta u_1 - ku_1 = h_0(x) = h(x, \underline{u}(x)) \quad \text{em } \Omega,$$

pois  $u_1$  é solução única de  $(P_1)$ . Sendo  $\underline{u} \leq \overline{u}$  e  $h$  não-crescente na variável  $t$ , temos

$$\Delta \overline{u} - k\overline{u} \leq \Delta u_1 - ku_1 \quad \text{em } \Omega.$$

Logo,

$$\begin{cases} \Delta u_1 - k u_1 \geq \Delta \bar{u} - k \bar{u} & \text{em } \Omega, \\ u_1 \leq \bar{u} & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por princípio do máximo<sup>2</sup> segue que  $u_1 \leq \bar{u}$  em  $\Omega$ .

Pela definição de subsolução,

$$p(x)f(\underline{u}) \leq \Delta \underline{u} \quad \text{em } \Omega$$

assim

$$h(x, \underline{u}(x)) \leq \Delta \underline{u} - k \underline{u} \quad \text{em } \Omega.$$

Sendo  $u_1$  solução única de  $(P_1)$ ,

$$\Delta u_1 - k u_1 = h(x, \underline{u}(x)) \quad \text{em } \Omega.$$

Daí,

$$\begin{cases} \Delta u_1 - k u_1 \leq \Delta \underline{u} - k \underline{u} & \text{em } \Omega, \\ u_1 \geq \underline{u} & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por princípio do máximo segue que  $\underline{u} \leq u_1$  em  $\Omega$ .

Agora, por indução, mostraremos que  $u_n \leq u_{n+1}$  para todo  $n \geq 0$  em  $\Omega$ . O caso  $n = 0$  foi feito anteriormente. Suponha que

$$u_{l-1} \leq u_l \quad \text{em } \Omega.$$

Desde que  $u_{l+1}$  é a solução única de  $(P_{l+1})$ , temos

$$\Delta u_{l+1} - k u_{l+1} = h_l(x) \quad \text{em } \Omega$$

usando a hipótese de indução e o fato de  $h$  ser não-crescente na variável  $t$ , temos

$$h(x, u_l(x)) \leq h(x, u_{l-1}(x)) \quad \text{em } \Omega,$$

isto é,  $h_l(x) \leq h_{l-1}(x)$  em  $\Omega$ . sendo  $u_l$  solução única de  $(P_l)$ , segue que

$$\Delta u_l - k u_l = h_{l-1}(x) \quad \text{em } \Omega.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \Delta u_{l+1} - k u_{l+1} \leq \Delta u_l - k u_l & \text{em } \Omega, \\ u_{l+1} \geq u_l & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>ver Corolário A.3

Assim, por princípio de máximo  $u_l \leq u_{l+1}$  em  $\Omega$ , mostrando a monotonicidade da sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Por fim, para concluir que a sequência é limitada basta verificar que  $u_n \leq \bar{u}$  em  $\Omega$  para todo  $n \geq 0$ . O caso  $n = 0$  é satisfeito por hipótese. Suponha, que

$$u_l \leq \bar{u} \quad \text{em } \Omega.$$

Desde que  $u_{l+1}$  é a solução única de  $(P_{l+1})$ , temos

$$\Delta u_{l+1} - k u_{l+1} = h_l(x) \quad \text{em } \Omega.$$

Usando a hipótese de indução e o fato de  $h$  ser não-crescente na variável  $t$ , temos

$$h(\bar{u}) \leq h(x, u_l(x)) \quad \text{em } \Omega,$$

o que implica

$$p(x)f(\bar{u}) - k\bar{u} \leq h_l(x) \quad \text{em } \Omega,$$

e portanto

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} - k\bar{u} \leq \Delta u_{l+1} - k u_{l+1} & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} \geq u_{l+1} & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por princípio de máximo  $u_{l+1} \leq \bar{u}$  em  $\Omega$ , mostrando que  $\underline{u} \leq u_n \leq \bar{u}$  para  $n \geq 0$ .

Uma vez que para cada  $x \in \bar{\Omega}$  a sequência  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é monótona não-decrescente, fica bem definida a função

$$\begin{aligned} u : \bar{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x) = \lim_n u_n(x). \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que  $u$  é solução do problema (1.2), isto é,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e satisfaz (1.2).

Com efeito, sendo  $\underline{u} \leq u_n \leq \bar{u}$  para todo  $n \geq 0$  em  $\bar{\Omega}$  segue

$$|u_n(x)| \leq M_0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \forall n \geq 0, \tag{1.4}$$

isto é,  $(u_n)_{n \geq 0}$  é uniformemente limitada em  $\bar{\Omega}$  por  $M_0$ .

Desde que  $f \in C^1([0, +\infty))$ , segue que

$$h_n \in L^\infty(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $\forall s \geq 1$

$$h_n \in L^s(\Omega) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema B.11<sup>3</sup> segue que

$$u_n \in W^{2,s}(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Escolhendo  $s \geq N$ , temos por Imersão Compacta

$$u_n \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para algum  $0 < \gamma < 1$ , o que implica  $h_n \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ . Pelo Teorema B.15<sup>4</sup>,  $u_n \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$  e existe  $C > 0$  tal que

$$\|u_n\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \|h_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < +\infty.$$

Como

$$C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$$

compactamente, existe uma subsequência  $(u_{n_j})$  e  $\tilde{u} \in C^2(\overline{\Omega})$  tais que

$$u_{n_j} \rightarrow \tilde{u} \quad \text{em } C^2(\overline{\Omega}).$$

Por unicidade do limite

$$u_{n_j} \rightarrow u \quad \text{em } C^2(\overline{\Omega}).$$

O resultado segue passando ao limite em  $(P_{n_j})$  quando  $n_j \rightarrow +\infty$ . ■

**Observação 1.1.** *O Teorema 1.1 continua sendo verdadeiro para uma classe bem mais geral de Equações Elípticas Semilineares. Para maiores detalhes ver [14] p. 92.*

A seguir um resultado de existência de solução positiva para o problema (1.2) que usaremos com frequência no decorrer do capítulo.

**Proposição 1.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado. Suponha  $p \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  uma função não-negativa,  $f$  satisfazendo  $(f_1)$  e  $g : \partial\Omega \rightarrow (0, +\infty)$  uma função contínua. Então, o problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

*tem uma única solução clássica.*

<sup>3</sup>Teorema de Agmon, Douglis e Nirenberg

<sup>4</sup>Teorema de Schauder

**Demonstração.**

Existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$|g(x)| \leq c \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (1.5)$$

pois  $g$  é contínua no compacto  $\partial\Omega$ .

Seja  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > c$  e defina a função

$$\begin{aligned} \bar{u} : \bar{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \bar{u}(x) = n_0. \end{aligned}$$

Note que  $\bar{u}$  é uma supersolução do problema (1.2). Com efeito, sendo  $p$  e  $f$  não-negativas,

$$\Delta \bar{u} = 0 \leq p(x)f(\bar{u}(x)) \quad \text{em } \Omega. \quad (1.6)$$

De (1.5) e (1.6),

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{u} \leq p(x)f(\bar{u}) \quad \text{em } \Omega, \\ \bar{u} \geq g \quad \text{em } \partial\Omega, \\ \bar{u} \geq 0, \bar{u} \neq 0 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right.$$

mostrando que  $\bar{u}$  é uma supersolução de (1.2).

Para obter uma subsolução de (1.2), vamos supor sem perda de generalidade que  $0 \notin \Omega$  e considerar o seguinte problema auxiliar:

$$\Delta v = \Phi(r) \quad \text{em } A_{(\underline{r}, \bar{r})} = \{x \in \mathbb{R}^N; \underline{r} < |x| < \bar{r}\} \quad (1.7)$$

onde

$$\underline{r} = \inf\{\tau > 0; \partial B(0, \tau) \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset\}$$

$$\bar{r} = \sup\{\tau > 0; \partial B(0, \tau) \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset\} \quad (\text{o qual existe pois } \Omega \text{ é limitado})$$

e

$$\begin{aligned} \Phi : [\underline{r}, \bar{r}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto \Phi(r) = \max_{|x|=r} p(x). \end{aligned}$$

A função dada por

$$\begin{aligned} v : [\underline{r}, \bar{r}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto v(r) = 1 + \int_{\underline{r}}^r \left[ \sigma^{1-N} \left( \int_0^\sigma \tau^{N-1} \Phi(\tau) d\tau \right) \right] d\sigma \end{aligned}$$

é uma solução radial de (1.7).

Com efeito, defina a seguinte função

$$\begin{aligned} h : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma &\mapsto h(\sigma) = \int_0^\sigma \tau^{N-1} \Phi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$v(r) = 1 + \int_{\underline{r}}^r \sigma^{1-N} h(\sigma) d\sigma.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\frac{dv}{dr} = r^{1-N} h(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{N-1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{N-1}{r} r^{1-N} h(r) \quad (1.8)$$

e

$$\frac{d^2v}{dr^2} = (1-N)r^{-N} h(r) + r^{1-N} r^{N-1} \Phi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2v}{dr^2} = -\frac{N-1}{r} r^{1-N} h(r) + \Phi(r). \quad (1.9)$$

De (1.8) e (1.9) temos

$$\Delta v = \frac{N-1}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} = \Phi(r),$$

isto é,  $v$  é solução radial de (1.7).

A continuidade de  $g$  em  $\partial\Omega$ , assegura a existência de  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que

$$g_0 := g(x_0) = \min_{\partial\Omega} g > 0.$$

Considere a seguinte função

$$\begin{aligned} \tilde{h} : (0, g_0] &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto \tilde{h}(z) = \int_z^{g_0} \frac{1}{f(t)} dt \end{aligned}$$

e observe que

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \tilde{h}(z) = +\infty. \quad (1.10)$$

De fato, desde  $f'(0)$  existe considere  $L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\zeta > 0$ , tal que  $0 < t \leq \zeta$  implica  $\frac{f(t)}{t} < \epsilon + L$ , ou seja,

$$\frac{1}{t\epsilon'} \leq \frac{1}{f(t)} \quad \forall 0 < t \leq \delta, \quad (1.11)$$

em que  $\epsilon' = L + \epsilon$ . Escolhendo  $\delta$  suficientemente pequeno, de modo que  $0 < \delta \leq g_0$ , ficamos com

$$\int_z^{g_0} \frac{dt}{f(t)} \geq \int_z^\delta \frac{dt}{f(t)}$$

e por (1.11)

$$\int_z^\delta \frac{dt}{f(t)} \geq \int_z^\delta \frac{dt}{t\epsilon'}.$$

Logo,

$$\int_z^{g_0} \frac{dt}{f(t)} \geq \frac{1}{\epsilon'} \ln t \Big|_z^\delta = \frac{1}{\epsilon'} (\ln \delta - \ln z). \quad (1.12)$$

Passando ao limite em (1.12) quando  $z \rightarrow 0^+$ , obtemos

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \int_z^{g_0} \frac{1}{f(t)} dt = +\infty.$$

Sendo  $\tilde{h}$  contínua e  $\tilde{h}(g_0) = 0$ , segue do Teorema Fundamental do Cálculo que  $\frac{d\tilde{h}}{dt} < 0$ , o que implica  $\tilde{h}$  é decrescente.

De (1.10) dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < z < \delta$  implica  $\tilde{h}(z) > \epsilon$ . Em particular, existe  $\delta_0 > 0$  tal que para  $0 < z < \delta_0$

$$\tilde{h}(z) > \max_{\partial\Omega} v.^5$$

Considere  $z_0 \in (0, \delta_0)$ , então

$$\int_{z_0}^{g_0} \frac{dt}{f(t)} > \max_{\partial\Omega} v. \quad (1.13)$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário existe  $c \in (z_0, g_0)$  tal que

$$\tilde{h}(c) = \max_{\partial\Omega} v.$$

---

<sup>5</sup>Como  $v$  é contínua no compacto  $[r, \bar{r}]$  existe  $\zeta = \max_{\Omega} v$ . Desde que  $\Delta v \geq 0$ ,  $v$  é uma função subharmônica (cujo máximo é atingido na fronteira), temos

$$\zeta = \max_{\partial\Omega} v.$$



Note que para cada  $x \in \Omega$ , existe um único  $y \in (c, g_0)$  tal que

$$v(x) = \int_c^y \frac{1}{f(t)} dt.$$

De fato, dado  $x \in \Omega$ , temos

$$v(x) \leq \max_{\partial\Omega} v.$$

De (1.13) (existência), da monotonicidade de  $\tilde{h}$  e do Teorema do Valor intermediário (unicidade) existe um único  $\bar{y} \in (c, g_0)$  tal que

$$v(x) = \tilde{h}(\bar{y}).$$

Agora, basta notar que existe um único  $y \in \mathbb{R}$  com  $c < y \leq \bar{y} < g_0$  tal que

$$\tilde{h}(\bar{y}) = \int_c^y \frac{1}{f(t)} dt.$$

Suponha que existem  $y_1, y_2 \in (c, g_0)$  com  $y_1 \neq y_2$  tais que

$$\int_c^{y_1} \frac{1}{f(t)} dt = \int_c^{y_2} \frac{1}{f(t)} dt. \quad (1.14)$$

Supondo, sem perda de generalidade, que  $y_1 < y_2$ , temos

$$\int_c^{y_1} \frac{1}{f(t)} dt \overset{\frac{1}{f} > 0}{<} \int_c^{y_1} \frac{1}{f(t)} dt + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{f(t)} dt,$$

isto é,

$$\int_c^{y_1} \frac{1}{f(t)} dt < \int_c^{y_2} \frac{1}{f(t)} dt,$$

o que é um absurdo com (1.14). Portanto, para cada  $x \in \Omega$ , existe um único  $y \in (c, g_0)$  tal que

$$v(x) = \int_c^y \frac{1}{f(t)} dt.$$

Dessa forma, podemos definir implicitamente a seguinte função

$$\begin{aligned} \underline{u} : \bar{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \underline{u}(x) := y \end{aligned}$$

onde  $y$  é o único número em  $(c, g_0)$  tal que

$$v(x) = \int_c^y \frac{1}{f(t)} dt = \int_c^{\underline{u}(x)} \frac{1}{f(t)} dt. \quad (1.15)$$

Vamos mostrar agora que  $\underline{u}$  é Subsolução de (1.2). Para tanto, observe inicialmente que a aplicação

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto F(x, y) = v(x) - \tilde{h}(y)$$

é de classe  $C^2$  em  $\Omega \times \mathbb{R}$ , pois  $f$  é de classe  $C^1([0 + \infty))$ . Além disso,  $F(x, \underline{u}(x)) = 0$  com  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, \underline{u}(x)) \neq 0$ . Logo, pelo Teorema da Função Implícita<sup>6</sup> existe uma bola  $B = B(x; \delta)$  e um intervalo  $J = (\underline{u}(x) - \epsilon, \underline{u}(x) + \epsilon)$  com as seguintes propriedades:

1.  $B \times \bar{J} \subset \Omega \times \mathbb{R}$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$  para todo  $(x, y) \in B \times \bar{J}$ ;
2. Para todo  $x \in B$  existe um **único**  $y = \underline{u}(x) \in J$  tal que  $F(x, y) = F(x, \underline{u}(x)) = 0$

Ademais, a função  $\underline{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , assim definida, é de classe  $C^2$  e suas derivadas parciais em cada ponto  $x \in B$  são dadas por

$$\frac{\partial \underline{u}(x)}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \underline{u}(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \underline{u}(x))}.$$

Por outro lado  $\underline{u} < g_0$ , o que implica

$$\underline{u}(x) < g(x) \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Assim, basta verificar que

$$\Delta \underline{u} \geq p(x)f(\underline{u}) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Observe que, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo em (1.15)

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{1}{f(\underline{u}(x))} \frac{\partial \underline{u}(x)}{\partial x_i}$$

daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} &= \frac{-f(\underline{u}(x))}{[f(\underline{u}(x))]^2} \frac{\partial \underline{u}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \underline{u}(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{f(\underline{u}(x))} \frac{\partial^2 \underline{u}(x)}{\partial x_i^2} \\ &= \frac{-f(\underline{u}(x))}{[f(\underline{u}(x))]^2} \left[ \frac{\partial \underline{u}(x)}{\partial x_i} \right]^2 + \frac{1}{f(\underline{u}(x))} \frac{\partial^2 \underline{u}(x)}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>ver Teorema B.3

Então,

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \\ &= \frac{-f(\underline{u}(x))}{[f(\underline{u}(x))]^2} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial \underline{u}(x)}{\partial x_i} \right]^2 + \frac{1}{f(\underline{u}(x))} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \underline{u}(x)}{\partial x_i^2} \\ &= \frac{-f(\underline{u}(x))}{[f(\underline{u}(x))]^2} |\nabla \underline{u}(x)|^2 + \frac{1}{f(\underline{u}(x))} \Delta \underline{u}(x). \end{aligned}$$

Sendo  $f \geq 0$ , temos

$$\Delta v(x) \leq \frac{1}{f(\underline{u}(x))} \Delta \underline{u}(x)$$

e por (1.7), concluímos

$$\Delta \underline{u}(x) \geq p(x)f(\underline{u}(x))$$

donde

$$\begin{cases} \Delta \underline{u} \geq p(x)f(\underline{u}) & \text{em } \Omega, \\ \underline{u} \leq g & \text{em } \partial\Omega, \\ \underline{u} \geq 0, \underline{u} \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

mostrando que  $\underline{u}$  é uma subsolução de (1.2). Pelo Teorema 1.1, segue que o problema (1.2) tem uma solução clássica  $u$  tal que

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u}.$$

Uma vez que  $\underline{u}$  é positiva em  $\bar{\Omega}$ , concluímos que a solução do problema (1.2) é positiva.

Por fim, mostraremos que  $u$  é solução única de (1.2). Para isso, suponha que existam  $u_1, u_2$  soluções de (1.2).

Note que  $u_1 \leq u_2$  em  $\Omega$ . De fato, suponha, por contradição, que exista  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u_2(x_0) < u_1(x_0)$ . Dessa forma, o conjunto

$$\omega = \{x \in \Omega ; u_2(x) < u_1(x)\} \neq \emptyset.$$

Sendo  $f$  não-decrescente,

$$f(u_2) \leq f(u_1) \quad \text{em } \omega,$$

o que implica

$$\Delta(u_1(x) - u_2(x)) = p(x)(f(u_1) - f(u_2)) \leq 0 \quad \text{em } \omega.$$

Desde que

$$u_1(x) \leq u_2(x) \quad \text{em } \omega^c,$$

temos

$$u_1(x) = u_2(x) \quad \text{em } \partial\omega.$$

Assim,

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} \geq 0 & \text{em } \omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{em } \partial\omega, \end{cases}$$

em que  $\tilde{u}(x) = u_1(x) - u_2(x)$ . Logo,  $\tilde{u}$  é uma função subharmônica, e portanto o máximo é atingido na fronteira. Assim

$$\tilde{u}(x) \leq \max_{x \in \omega} \tilde{u}(x) \leq 0 \quad \text{em } \omega,$$

ou seja,

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{em } \omega$$

o que é uma contradição. Portanto,  $u_1 \leq u_2$  em  $\Omega$ . De maneira inteiramente análoga, verificamos que  $u_2 \leq u_1$  em  $\Omega$  mostrando, dessa forma, a unicidade da solução. ■

**Observação 1.2.** *Vale ressaltar que quando  $g \equiv C$  constante, a regularidade da sub-solução é melhorada. Neste caso, em verdade, tanto a sub quanto a supersolução são funções  $C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$  para algum  $0 < \gamma < 1$ .*

### 1.1.2 Resultados Técnicos

Tomando como base o artigo do Keller [24], estabelecemos o seguinte resultado:

**Proposição 1.2.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado,  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função satisfazendo  $(f_1)$  e  $(KO)$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução do problema*

$$\Delta u = f(u) \quad \text{em } \Omega. \tag{1.16}$$

*Então, existe uma função contínua não-crescente  $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que*

$$u(x) \leq \mu(\rho(x)) \quad \forall x \in \Omega,$$

*onde  $\rho(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ . A função  $\mu$  satisfaz os limites*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mu(t) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t) = 0.$$

**Demonstração.**

Note que é suficiente mostrar o resultado em bolas. Com efeito, sejam  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  solução do problema (1.16) e  $x_0 \in \Omega$ . Desde que  $\Omega$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$ . Seja  $c > 0$  tal que

$$|u(x)| \leq c \quad \text{em} \quad \partial B(x_0, r).$$

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta v = f(v) & \text{em } B(x_0, r), \\ v = c & \text{em } \partial B(x_0, r). \end{cases} \quad (1.17)$$

Seja  $v$  uma solução de (1.17) a qual existe pela Proposição 1.1. Por princípio de máximo, temos

$$u(x) \leq v(x) \quad \text{em } B(x_0, r). \quad (1.18)$$

De fato, suponha que

$$\omega = \{x \in B(x_0, r); v(x) < u(x)\} \neq \emptyset.$$

Pela monotonicidade de  $f$ , vem

$$f(v(x)) \leq f(u(x)) \quad \text{em } \omega,$$

o que implica

$$\Delta(u(x) - v(x)) \geq 0 \quad \text{em } \omega.$$

Como  $u(x) \leq v(x)$  em  $\omega^c$ , temos  $u(x) = v(x)$  em  $\partial\omega$ . Assim, fazendo  $w = u - v$ , temos

$$\begin{cases} \Delta w \geq 0 & \text{em } \omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\omega, \end{cases}$$

mostrando que  $w$  é uma função subharmônica, logo o máximo é atingido na fronteira, de onde segue

$$w(x) \leq 0 \quad \text{em } \omega,$$

o que é um absurdo. Portanto,  $\omega = \emptyset$  e a desigualdade em (1.18) segue.

Sendo a Proposição válida em bolas, existe  $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que

$$v(x) \leq \mu(\text{dist}(x, \partial B(x_0, r))) \quad \forall x \in B(x_0, r).$$

Em particular,

$$v(x_0) \leq \mu\left(\text{dist}(x_0, \partial B(x_0, r))\right). \quad (1.19)$$

Passando ao limite em (1.19) quando  $\text{dist}(x_0, \partial B(x_0, r)) \rightarrow \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ , vem que

$$v(x_0) \leq \mu(\text{dist}(x_0, \partial\Omega)),$$

pois  $\mu$  é contínua. Portanto, de (1.18) segue

$$u(x_0) \leq \mu(\text{dist}(x_0, \partial\Omega)).$$

Desde que  $x_0 \in \Omega$  foi arbitrário o resultado segue em domínios limitados.

Agora, mostraremos que o resultado é verdadeiro em bolas. Para tanto considere  $B = B(x, R)$  uma bola arbitrária de  $\mathbb{R}^N$ . Sem perda de generalidade, suponha  $x = 0$ . Primeiramente, observe que para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe uma única solução  $u_n$  do problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{em } B, \\ u = n & \text{em } \partial B. \end{cases} \quad (P'_n)$$

assegurada pela Proposição 1.1.

Para cada  $x \in B$  a sequência  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é não-decrescente. Com efeito, seja  $x \in B$  e suponha, por absurdo, que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $u_{n_0+1}(x) < u_{n_0}(x)$ . Logo, o conjunto

$$\omega' = \{y \in B ; u_{n_0+1}(y) < u_{n_0}(y)\} \neq \emptyset.$$

Como  $f$  é não-decrescente, temos

$$f(u_{n_0+1}(y)) \leq f(u_{n_0}(y)) \quad \text{em } \omega'. \quad (1.20)$$

Note que

$$u_{n_0}(y) < u_{n_0+1}(y) \quad \text{em } (\omega')^c$$

o que implica

$$u_{n_0}(y) = u_{n_0+1}(y) \quad \text{em } \partial\omega' \quad (1.21)$$

Assim, de (1.21) e (1.22), temos

$$\begin{cases} \Delta v \leq 0 & \text{em } \omega', \\ v = 0 & \text{em } \partial\omega', \end{cases}$$

onde  $\nu(x) = u_{n_0+1}(x) - u_{n_0}(x)$ . Logo,  $\nu$  é uma função superharmônica e seu ínfimo é atingido na fronteira. Então,

$$\nu \geq 0 \quad \text{em } \omega',$$

isto é,

$$u_{n_0+1}(x) - u_{n_0}(x) \geq 0 \quad \text{em } \omega'$$

o que é um absurdo. Portanto, dado  $x \in B$  a sequência  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é não-decrescente.

Além disso, para todo  $n \geq 1$ ,  $u_n$  é radialmente simétrica. Com efeito, caso contrário, existiria uma função  $u_{n_0}$  tal que dado  $x \in B$ , obteríamos  $y = y(x)$  de tal modo que

$$u_{n_0}(x) \neq u_{n_0}(y).$$

Dessa forma, poderíamos definir  $v_{n_0}$  dada por

$$v_{n_0}(x) = u_{n_0}(y)$$

Desde que o Laplaciano é invariante por rotações, teríamos

$$\Delta v_{n_0}(x) = \Delta u_{n_0}(y)$$

e conseqüentemente

$$\begin{cases} \Delta v_{n_0}(x) = f(v_{n_0}(x)) & \text{em } B, \\ v_{n_0} = n_0 & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

contrariando a unicidade de  $u_{n_0}$ , justificando que  $u_n$  é uma função radial para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sendo  $u_n$  uma função radial, temos

$$v_n(r) := u_n(x) \quad \text{onde } |x| = r \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$v_n''(r) + \frac{N-1}{r} v_n'(r) = f(v_n) \quad \text{em } (0, R) \tag{1.22}$$

$$v_n(R) = n \tag{1.23}$$

Agora, observe que sem perda de generalidade podemos substituir a condição de fronteira (1.24) por

$$v_n(0) = v_{0,n}. \tag{1.24}$$

Com efeito, basta mostrar que cada  $v_n(0)$  é unicamente determinado. Suponha que exista  $\tilde{v}_n$  satisfazendo  $(P'_n)$  tal que

$$\tilde{v}_n(0) = v_{0,n}.$$

Então,

$$v_n(R) = \tilde{v}_n(R).$$

De fato, caso contrário, poderíamos supor, sem perda de generalidade, que

$$v_n(R) < \tilde{v}_n(R).$$

Por Princípio do Máximo teríamos

$$v_n(r) < \tilde{v}_n(r),$$

em particular,  $v_n(0) < \tilde{v}_n(0)$  o que é um absurdo, mostrando que

$$v_n(R) = \tilde{v}_n(R).$$

Consequentemente, podemos substituir a condição de fronteira pela condição na origem

$$v_n(0) = v_{0,n}.$$

Multiplicando ambos os membros de (1.23) por  $r^{N-1}$ , encontramos

$$r^{N-1} \frac{N-1}{r} v'_n(r) + r^{N-1} v''_n(r) = r^{N-1} f(v_n(r)), \quad 0 < r < R.$$

Por outro lado,

$$r^{N-1} \frac{N-1}{r} v'_n(r) + r^{N-1} v''_n(r) = (N-1)r^{N-2} v'_n(r) + r^{N-1} v''_n(r) = \left( r^{N-1} v'_n(r) \right)'$$

Assim,

$$r^{N-1} f(v_n(r)) = \left( r^{N-1} v'_n(r) \right)', \quad 0 < r < R.$$

Integrando de 0 a  $r$  a igualdade anterior, concluimos pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$r^{N-1} v'_n(r) = \int_0^r s^{N-1} f(v_n(s)) ds,$$

isto é,

$$v'_n(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} f(v_n(s)) ds. \tag{1.25}$$



De (1.26) temos  $v'_n(r) \geq 0$ , isto é,  $v_n(r)$  é não-decrescente para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Uma vez que  $f$  também é não-decrescente, segue

$$v'_n(r) \leq r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} f(v_n(r)) ds$$

donde

$$v'_n(r) \leq \frac{r}{N} f(v_n(r)) \quad 0 < r < R. \quad (1.26)$$

De (1.23) e (1.27), temos

$$f(v_n) \leq v''_n(r) + \frac{N-1}{r} \frac{r}{N} f(v_n(r))$$

o que implica

$$\frac{1}{N} f(v_n) \leq v''_n(r). \quad (1.27)$$

Por outro lado, de (1.23)

$$v''_n(r) \leq f(v_n). \quad (1.28)$$

De (1.28) e (1.29), obtemos

$$\frac{1}{N} f(v_n) \leq v''_n(r) \leq f(v_n). \quad (1.29)$$

Multiplicando as desigualdades em (1.30) por  $v'_n(r)$  e integrando de 0 a  $r$ , encontramos

$$\frac{1}{N} \int_0^r v'_n(s) f(v_n) ds \leq \int_0^r v''_n(s) v'_n(s) ds \leq \int_0^r v'_n(s) f(v_n) ds.$$

Se fizermos  $t = v'_n(s)$ , temos  $dt = v''_n(s) ds$ , então

$$\frac{1}{N} \int_0^r v'_n(s) f(v_n) ds \leq \int_{v'_n(0)}^{v'_n(r)} t dt \leq \int_0^r v'_n(s) f(v_n) ds.$$

Agora, fazendo  $\tau = v_n(s)$ , temos  $d\tau = v'_n(s) ds$  e daí

$$\frac{1}{N} \int_{v_n(0)}^{v_n(r)} f(\tau) d\tau \leq \int_{v'_n(0)}^{v'_n(r)} t dt \leq \int_{v_n(0)}^{v_n(r)} f(\tau) d\tau. \quad (1.30)$$

Segue de (1.25) e (1.31) que

$$\frac{1}{N} \int_{v_{0,n}}^{v_n(r)} f(\tau) d\tau \leq \int_{v'_n(0)}^{v'_n(r)} t dt \leq \int_{v_{0,n}}^{v_n(r)} f(\tau) d\tau. \quad (1.31)$$

Um fato importante que devemos observar é:

$$v'_n(0) = 0.$$

De fato, por (1.26)

$$v'_n(r) = \frac{\int_0^r s^{N-1} f(v_n(s)) ds}{r^{N-1}}.$$

Desde que

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{N-1} = 0 = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^r s^{N-1} f(v_n(s)) ds,$$

segue da regra de L'Hôpital e do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\lim_{r \rightarrow 0} v'_n(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{N-1} f(v_n(r))}{(N-1)r^{N-2}},$$

o que implica

$$v'_n(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r f(v_n(r))}{N-1} = 0,$$

pois  $v_n \in C^2(B)$ .

Denote, por simplicidade,

$$H(v_n, v_{0,n}) = 2 \int_{v_{0,n}}^{v_n(r)} f(\tau) d\tau.$$

Por (1.32) vem que

$$\frac{1}{N} H(v_n, v_{0,n}) \leq [v'_n(r)]^2 \leq H(v_n, v_{0,n}),$$

ou seja,

$$\left[ \frac{1}{N} H(v_n, v_{0,n}) \right]^{\frac{1}{2}} \leq v'_n(r) \leq [H(v_n, v_{0,n})]^{\frac{1}{2}}.$$

Desde que  $v'_n > 0$  para  $r \in (0, R)$  multiplicando as desigualdades acima por  $(v'_n(r))^{-1}$  encontramos

$$\left[ \frac{1}{N} H(v_n, v_{0,n}) \right]^{\frac{1}{2}} (v'_n(r))^{-1} \leq 1 \leq [H(v_n, v_{0,n})]^{\frac{1}{2}} (v'_n(r))^{-1} \quad (1.32)$$

e integrando (1.33) de 0 a  $r$ , encontramos

$$\int_0^r [H(v_n, v_{0,n})]^{-\frac{1}{2}} v'_n(s) ds \leq \int_0^r ds \leq \sqrt{N} \int_0^r [H(v_n, v_{0,n})]^{-\frac{1}{2}} v'_n(s) ds. \quad (1.33)$$

Fazendo  $t = v_n(s)$ , obtemos de (1.34)

$$\int_{v_{0,n}}^{v_n(r)} [H(t, v_{0,n})]^{-\frac{1}{2}} dt \leq r \leq \sqrt{N} \int_{v_{0,n}}^{v_n(r)} [H(t, v_{0,n})]^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (1.34)$$

A condição de Keller-Osserman assegura que a função

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ r &\mapsto A(r) := \int_r^{+\infty} [H(t, r)]^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

está bem definida. Em particular, temos

$$A(v_{0,n}) = \int_{v_{0,n}}^{\infty} [H(t, v_{0,n})]^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Além disso, note que

$$\lim_{v_{0,n} \rightarrow +\infty} A(v_{0,n}) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{v_{0,n} \rightarrow 0^+} A(v_{0,n}) = +\infty. \quad (1.35)$$

O segundo limite ocorrendo devido a condição de Keller - Osserman. Observe que se existe  $r \in (0, R)$  tal que

$$v_n(r) = +\infty,$$

então  $r \in [A(v_{0,n}), \sqrt{N}A(v_{0,n})]$ .

De fato, suponha que exista  $r_0 \in (0, R)$  tal que  $v_n$  torne-se infinito. Então, passando ao limite em (1.34) quando  $r \rightarrow r_0$ , concluímos

$$\int_{v_{0,n}}^{+\infty} [H(t, v_{0,n})]^{-\frac{1}{2}} dt \leq r_0 \leq (N)^{\frac{1}{2}} \int_{v_{0,n}}^{+\infty} [H(t, v_{0,n})]^{-\frac{1}{2}} dt,$$

ou seja,

$$r_0 \in [A(v_{0,n}), \sqrt{N}A(v_{0,n})].$$

A pergunta que podemos fazer é: Será que existe pelo menos um

$$r \in [A(v_{0,n}), \sqrt{N}A(v_{0,n})]$$

para o qual  $v_n(r) = +\infty$ ? A resposta para essa pergunta é positiva. Caso contrário, de (1.23), teríamos

$$v_n''(r) + \frac{N-1}{r} v_n'(r) = f(v_n) \quad \text{em} \quad (0, \sqrt{N}A(v_{0,n})).$$

Passando ao limite em (1.35) quando  $r \rightarrow \sqrt{N}A(v_{0,n})$ , obteríamos

$$\sqrt{N}A(v_{0,n}) \leq \sqrt{N} \int_{v_{0,n}}^{v_n(\sqrt{N}A(v_{0,n}))} [H(t, v_{0,n})]^{-\frac{1}{2}} dt < \sqrt{N}A(v_{0,n})$$

o que é um absurdo.

Agora, note que o intervalo máximo de definição da EDO

$$v_n''(r) + \frac{N-1}{r}v_n'(r) = f(v_n) \quad (*)$$

é  $(0, R_0)$  com  $R_0 \in [A(v_{0,n}), \sqrt{N}A(v_{0,n})]$ .

Com efeito, note primeiramente que  $R_0 \neq +\infty$ . Do contrário, a solução de  $(*)$   $v_n(r)$  seria Blow-up globalmente definida, conseqüentemente seria limitada em  $[A(v_{0,n}), \sqrt{N}A(v_{0,n})]$  o que não pode ocorrer. Com o mesmo argumento, justificamos que não pode ocorrer  $\sqrt{N}A(v_{0,n}) < R_0$ . Dessa forma,  $R_0 \in [A(v_{0,n}), \sqrt{N}A(v_{0,n})]$ , pois onde a solução da EDO  $(*)$  é Blow-up se encontra no intervalo máximo de definição.

Dessa forma, podemos definir  $B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  contínua de modo que  $B(v_{0,n}) := r$  onde  $r$  é um número real escolhido em  $[A(v_{0,n}), \sqrt{N}A(v_{0,n})]$  tal que  $v_n(r) = +\infty$ .

Defina a seguinte função

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ s &\mapsto \mu(s) := \min\{v_{0,n} ; B(v_{0,n}) = s\}. \end{aligned}$$

A continuidade de  $\mu$  segue da continuidade da função  $B$ . Não é difícil ver que  $\mu$  é não-crescente. Com efeito, desde que  $B$  é não-crescente quanto menor  $s \in \mathbb{R}^+$  maior será os valores de  $v_{0,n}$  para os quais  $B(v_{0,n}) = s$ . Dessa forma, dados  $s_1, s_2 \in (0, +\infty)$ , com  $s_1 < s_2$ , temos

$$\begin{aligned} \mu(s_2) &\leq \min\{v_{0,n} ; B(v_{0,n}) = s_2\} \\ &\leq \max\{v_{0,n} ; B(v_{0,n}) = s_2\} \\ &\leq \min\{v_{0,n} ; B(v_{0,n}) = s_1\} \\ &\leq \mu(s_1), \end{aligned}$$

ou seja,  $\mu$  é não-crescente.

Agora, observe que por princípio de máximo

$$u(x) \leq v_n(x) \quad \forall x \in \overline{B(0, R)}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $v_n(R) = +\infty$ . Em particular,

$$u(0) \leq v_n(0) \quad n \in \mathbb{N}$$

tal que  $v_n(R) = +\infty$ . Logo,  $u(0)$  é cota inferior para o conjunto  $\{v_{0,n} ; B(v_{0,n}) = R\}$ . Portanto, por definição,

$$u(0) \leq \mu(R) = \mu(\text{dist}(0, \partial\Omega)).$$

Para concluir, recorde que

$$A(v_{0,n}) \leq B(v_{0,n}) \leq \sqrt{N}A(v_{0,n}).$$

Logo, por (1.36) segue que se  $B(v_{0,n}) \rightarrow +\infty$ , então  $v_{0,n} \rightarrow 0$ . Além disso, pela definição da função  $B$ , se  $B(v_{0,n}) \rightarrow 0^+$ , temos  $v_{0,n} \rightarrow +\infty$  o que implica

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \min\{v_{0,n} ; B(v_{0,n}) = R\} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow 0^+} \min\{v_{0,n} ; B(v_{0,n}) = R\} = +\infty,$$

ou seja,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \mu(R) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow 0^+} \mu(R) = +\infty.$$

Como queríamos demonstrar. ■

A seguir, um resultado técnico de fundamental importância no estudo desse capítulo.

**Lema 1.1.** *Se  $f$  é uma função que satisfaz  $(f_1)$  e  $(KO)$ , então*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{f(t)} < +\infty. \tag{1.36}$$

**Demonstração.**

Seja  $R > 0$  e  $B = B(0, R)$ . Segue da Proposição 1.1 que para cada  $n \in \mathbb{N}$  o problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{em } B, \\ u = n & \text{em } \partial B, \end{cases} \tag{P''_n}$$

tem uma única solução  $u_n \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$  positiva. Com os mesmos argumentos feitos na Proposição 1.2, verificamos que para cada  $x \in B$  a sequência  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é não-decrescente.

Além disso,  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente limitada em subdomínios compactos de  $B$ . De fato, sejam  $K \subset B$  um conjunto compacto e  $d_K := \text{dist}(K, \partial B)$  a distância entre  $K$  e  $\partial B$  que é atingida. Pela definição de ínfimo para cada  $x \in K$  temos

$$0 < d_K \leq \text{dist}(x, \partial B).$$

Segue da Proposição 1.2 que existe uma função contínua, não-crescente  $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que

$$u_n(x) \leq \mu\left(\text{dist}(x, \partial B)\right) \quad \forall x \in K,$$

o que implica

$$u_n(x) \leq \mu(d_K) \quad \forall x \in K,$$

mostrando  $u_n \in L^\infty(K)$  para todo subdomínio compacto  $K$  de  $B$ . Consequentemente, para todo subdomínio compacto de  $B$  existe o limite pontual  $u(x) := \lim_n u_n(x)$  em  $B$ . Mostraremos que tal limite é uniforme, e portanto,  $u \in C^2(B)$ , pois  $u_n \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ . Para tanto, seja  $K \subset B$  compacto. Então,

$$u_n \in L^\infty(K) \tag{1.37}$$

de onde segue que

$$f(u_n) \in L^\infty(K). \tag{1.38}$$

Como  $\text{med}(\Omega) < +\infty$ ,

$$f(u_n) \in L^s(K) \quad \forall s \geq 1,$$

em particular, escolhendo  $r > N$  e aplicando o Teorema B.11,

$$u_n \in W^{2,r}(\Omega_1), \quad \bar{\Omega}_1 \subset K$$

e existe  $c > 0$  tal que

$$\|u_n\|_{2,r,\Omega_1} \leq c \left( \|u\|_{r,K} + \|f(u_n)\|_{r,K} \right).$$

De (1.37) e (1.38), existe  $c_1 > 0$  tal que

$$\|u_n\|_{2,r,\Omega_1} \leq c_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, pelo Teorema B.13, temos que

$$u_n \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}_1) \quad \text{para algum } 0 < \gamma < 1 - \frac{N}{r} \tag{1.39}$$

e existe uma constante  $c_2 > 0$  tal que

$$\|u_n\|_{C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}_1)} \leq c_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, sendo  $f$  de classe  $C^1([0, +\infty))$  segue de (1.39) que

$$f(u_n) \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}_1). \quad (1.40)$$

Desde que  $u_n \in C^2(B)$  e  $f$  satisfaz (1.40), pelo Teorema B.24 o problema

$$\begin{cases} \Delta v = f(u_n) & \text{em } \Omega_1, \\ v = u_n & \text{em } \partial\Omega_1, \end{cases}$$

tem uma única solução  $u_n \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_1)$ . Além disso, existe  $c_3 > 0$  tal que

$$\|u_n\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_1)} \leq c_3 \left( \|f(u_n)\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}_1)} + \|u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \right)$$

o que implica na existência de  $c_4 > 0$  tal que

$$\|u_n\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_1)} \leq c_4.$$

Uma vez que

$$C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_1) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega}_1)$$

compactamente, segue que existe uma subsequência que converge uniformemente em  $C^2$ , isto é, existe  $(u_{n_j})$  subsequência de  $(u_n)$  tal que

$$u_{n_j} \rightarrow u \quad \text{em } C^2(\overline{\Omega}_1)$$

uniformemente. Portanto,  $u \in C^2(B)$  e satisfaz

$$\Delta u = f(u) \quad \text{em } B. \quad (1.41)$$

Agora, mostraremos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  temos que  $u_n$  é **radialmente simétrica em  $B$** . Para isso, primeiramente observe que por  $(P_n'')$ , temos

$$\begin{cases} \Delta(u_n - n) \geq 0 & \text{em } B, \\ u_n - n = 0 & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Assim,  $u_n - n$  é uma função subhamônica cujo o supremo é atingido na fronteira. Logo,

$$u_n(x) - n \leq 0 \quad \text{em } B,$$

isto é,

$$u_n(x) \leq n \quad \text{em } B.$$

Dessa forma, a função  $v_n = n - u_n$  verifica

$$\Delta v_n = -\Delta u_n = -f(u_n) = -f(n - v_n).$$

implicando que

$$\begin{cases} \Delta v_n \leq 0 & \text{em } B, \\ v_n = 0 & \text{em } \partial B, \\ v_n \geq 0, v_n \neq 0 & \text{em } B. \end{cases}$$

Defina  $g(t) := f(n - t)$  e considere o problema

$$\begin{cases} \Delta v_n + g(v_n) = 0 & \text{em } B, \\ v_n > 0, & \text{em } B. \end{cases} \quad (P_n''')$$

Aplicando o Teorema B.27<sup>7</sup> em  $(P_n''')$  temos que  $v_n$  é radialmente simétrica em  $B$ , consequentemente  $u_n$  é radialmente simétrica em  $B$ . Ademais,  $u$  é radialmente simétrica, pois é o limite de uma sequência de funções radiais em  $B$ .

Sendo  $u$  radialmente simétrica

$$\frac{N-1}{r}u'(r) + u''(r) = f(u(r)) \quad 0 < r < R. \quad (1.42)$$

Multiplicando por  $r^{N-1}$  ambos os membros de (1.42), encontramos

$$r^{N-1}f(u(r)) = r^{N-1}\frac{N-1}{r}u'(r) + r^{N-1}u'' \quad 0 < r < R.$$

Uma vez que,

$$r^{N-1}\frac{N-1}{r}u'(r) + r^{N-1}u''(r) = (N-1)r^{N-2}u'(r) + r^{N-1}u''(r) = \left(r^{N-1}u'(r)\right)'$$

obtemos

$$f(u(r)) = \left(r^{N-1}u'(r)\right)' \quad 0 < r < R. \quad (1.43)$$

Integrando (1.43) de 0 a  $r$ , concluímos pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$r^{N-1}u'(r) = \int_0^r s^{N-1}f(u(s))ds,$$

isto é,

$$u'(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1}f(u(s))ds \quad 0 < r < R. \quad (1.44)$$

---

<sup>7</sup>Gidas-Ni-Nirenberg



Daí,  $u'(r) \geq 0$  e sendo  $f$  não-decrescente,

$$u'(r) \leq r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} f(u(s)) ds$$

donde

$$u'(r) \leq \frac{r}{N} f(u(r)) \quad 0 < r < R. \quad (1.45)$$

Com um procedimento análogo, verificamos que  $u_n$  também satisfaz as propriedades (1.44) e (1.45) para  $n \geq 1$ , ou seja,

$$u'_n(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} f(u_n(s)) ds \quad (1.46)$$

e

$$u'_n(r) \leq \frac{r}{N} f(u_n(r)) \quad 0 < r < R. \quad (1.47)$$

Agora, mostraremos que  $u$  é solução Blow-up do problema (1.41), equivalentemente, provaremos que

$$u(r) \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad r \uparrow R^-.$$

Suponha, por contradição que exista  $C > 0$  tal que

$$u(r) < C, \quad \forall r \in (0, R).$$

Considere  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $n_0 > 2C$ . Desde que

$$\lim_{r \uparrow R} u_{n_0}(r) = \lim_{\text{dist}(x, \partial B) \rightarrow 0} u_{n_0}(x) = n_0.$$

Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|r - R| < \delta$  implica

$$|u_{n_0}(r) - n_0| < \epsilon,$$

em particular, existe  $\delta_0 > 0$  tal que para  $0 < R - \delta_0 < r < R$ , temos

$$n_0 - C < u_{n_0}(r) < n_0 + C.$$

Assim, para  $r \in (r_0, R)$ , temos

$$C \overset{n_0 > 2C}{<} u_{n_0}(r). \quad (1.48)$$

onde  $r_0 = R - \delta_0$ .

Desde que para cada  $r \in (0, R)$  ( $u_n(r)$ ) é não-decrescente segue que,

$$u_{n_0}(r) \leq u_{n_0+1}(r) \leq \dots \leq u_n(r) \leq u_{n+1}(r) \leq \dots \quad \forall r \in (r_0, R),$$

isto é,

$$C < u_n(r) \quad \forall r \in (r_0, R),$$

implicando

$$C \leq \lim_n u_n(r) = u(r) \quad \forall r \in (r_0, R),$$

o que é uma contradição, mostrando que  $u$  é solução Blow-up de (1.41).

Para concluir (1.36), observe que integrando de 0 a  $r$  ambos os membros da desigualdade em (1.47), ficamos com

$$\int_0^r \frac{u'(s)}{f(u(s))} ds \leq \int_0^r \frac{s}{N} ds,$$

ou seja,

$$\int_0^r \frac{u'(s)}{f(u(s))} ds \leq \frac{r^2}{2N}.$$

Se fizermos  $t = u(s)$ , temos  $dt = u'(s)ds$ , então

$$\int_{u(0)}^{u(r)} \frac{dt}{f(t)} ds \leq \frac{r^2}{2N}. \tag{1.49}$$

Passando ao limite em (1.49) quando  $r \rightarrow R$ , concluímos

$$\int_{u(0)}^{+\infty} \frac{dt}{f(t)} ds \leq \frac{R^2}{2N} < +\infty.$$

como queríamos demonstrar. ■

## 1.2 Existência de Solução Blow-up

Nesta seção, estudaremos alguns resultados de existência de solução Blow-up.

No que segue, considere as seguintes condições

( $\bar{p}_1$ ) Para todo  $x_0 \in \Omega$  com  $p(x_0) = 0$ , existe um domínio  $\Omega_0 \ni x_0$  tal que  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$  e  $p > 0$  em  $\partial\Omega_0$ .

( $\bar{p}_1$ )' Existe uma sequência de domínios limitados  $(\Omega_n)_{n \geq 1}$  tais que  $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$ ,

$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  e ( $p_1$ ) vale em  $\Omega_n \forall n \geq 1$ .

( $\bar{p}_2$ )  $\int_0^{\infty} r\phi(r)dr < +\infty$ , onde  $\phi(r) = \max\{p(x); |x| = r\}$ .

### 1.2.1 Existência de Solução Blow-up em Domínios Limitados

Nosso próximo resultado estabelece existência de solução Blow-up para o problema (1.1) quando  $\Omega$  é um domínio limitado.

**Teorema 1.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado. Suponha que  $p$  não-negativa e  $f$  satisfaçam as condições  $(p_2)$ ,  $(\bar{p}_1)$ ,  $(f_1)$  e  $(KO)$ , respectivamente. Então, o problema (1.1) tem uma solução Blow-up a qual é positiva.*

**Demonstração.**

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a Proposição 1.1 assegura que o problema

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = n & \text{em } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução  $v_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Com argumentos similares aos anteriores verificamos que a sequência  $(v_n)_{n \geq 1}$  é não-decrescente.

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta \zeta = \|p\|_\infty f(\zeta) & \text{em } \Omega, \\ \zeta = 1 & \text{em } \partial\Omega, \\ \zeta > 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Segue da Proposição 1.1 que o problema acima tem uma única solução  $\zeta$ .

Observe que  $\zeta \leq v_n$  em  $\Omega$ . De fato, suponha que existem  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in \Omega$  tal que  $v_{n_0}(x_0) < \zeta(x_0)$ . Dessa forma, o conjunto

$$\omega = \{x \in \Omega ; v_{n_0}(x) < \zeta(x)\} \neq \emptyset.$$

Desde que  $f$  é não-decrescente, temos

$$f(v_{n_0}) \leq f(\zeta) \quad \text{em } \omega$$

o que implica

$$\Delta(\zeta(x) - v_{n_0}(x)) = p(x)(f(\zeta) - f(v_{n_0})) \quad \text{em } \omega.$$

Como

$$\zeta(x) \leq v_{n_0}(x) \quad \text{em } \omega^c,$$

segue que

$$\zeta(x) = v_{n_0}(x) \quad \text{em } \partial\omega.$$

Logo,

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} \geq 0 & \text{em } \omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{em } \partial\omega, \end{cases}$$

onde  $\tilde{u}(x) = \zeta(x) - v_{n_0}(x)$ . Então,  $\tilde{u}$  é uma função subharmônica cujo o máximo é atingido na fronteira. Assim

$$\tilde{u}(x) \leq \max_{x \in \omega} \tilde{u}(x) \leq 0 \quad \text{em } \omega,$$

ou seja,

$$\zeta \leq v_{n_0} \quad \text{em } \omega$$

o que é uma contradição. Portanto,

$$0 < \zeta \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \quad \text{em } \Omega.$$

Agora, note que dado  $x_0 \in \Omega$  existem um aberto  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  com  $x_0 \in \Omega_0$  e  $M_0 = M_0(x_0) > 0$  tais que

$$v_n \leq M_0 \quad \text{em } \Omega_0 \quad \forall n \geq 1.$$

Com efeito, seja  $x_0 \in \Omega$ . Estudaremos dois casos, à saber,

(i)  $p(x_0) > 0$ ;

(ii)  $p(x_0) = 0$ .

**Caso (i)**

Desde que  $p$  é contínua existe  $r > 0$  tal que

$$p(x) > 0 \quad \text{em } \overline{B}(x_0, r) \quad \text{com } B(x_0, r) \subset\subset \Omega.$$

Dessa forma, existe

$$m_0 = \min_{x \in \overline{B}(x_0, r)} p(x) > 0.$$

Defina

$$\begin{aligned} h : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto h(t) = m_0 f(t). \end{aligned}$$

Segue do Lema 1.1 que o problema

$$\Delta w = h(w) \quad \text{em } B(x_0, r)$$

tem uma solução  $w \in C^2(B(x_0, r))$  a qual é Blow-up.

Por outro lado, mostramos por princípio de máximo que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n(x) \leq w(x) \quad \text{em } B(x_0, r).$$

Além disso,  $w$  é limitada em  $\overline{B}(x_0, \frac{r}{2})$ , pois  $w \in C^2(B(x_0, r))$  o que implica na existência  $M_{x_0} = \sup_{x \in \overline{B}(x_0, \frac{r}{2})} w(x)$ . Portanto, para  $n \geq 1$ , temos

$$v_n(x) \leq w(x) \leq M_{x_0} \quad \text{em } \Omega_0$$

onde  $\Omega_0 = B(x_0, \frac{r}{2})$ .

### Caso (ii)

Por hipótese, existe  $\Omega_0$ , com  $x_0 \in \Omega_0$  e  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  tal que  $p > 0$  em  $\partial\Omega_0$ . Dado  $x \in \partial\Omega_0$ , temos  $p(x) > 0$  e pelo Caso (i), existem  $B(x, r_x) \subset\subset \Omega$  e uma constante  $M_x > 0$  tais que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$v_n \leq M_x \quad \text{em } B(x, \frac{r_x}{2}).$$

Uma vez que  $(B(x, \frac{r_x}{2}))_{x \in \partial\Omega_0}$  é uma cobertura aberta para  $\partial\Omega_0$  que é compacta, podemos extrair uma cobertura finita  $B(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}), B(x_2, \frac{r_{x_2}}{2}), \dots, B(x_{k_0}, \frac{r_{x_{k_0}}}{2})$ . Considerando

$$M_0 = \max\{M_{x_1}, \dots, M_{x_{k_0}}\},$$

temos

$$v_n \leq M_0 \quad \text{em } \partial\Omega_0 \quad \forall n \geq 1.$$

Aplicamos princípio de máximo, de modo similar ao que já fizemos, para concluir que  $v_n \leq M_0$  em  $\Omega_0$  como queríamos.

Dessa forma, podemos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto v(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x). \end{aligned}$$

Considere o seguinte problema linear

$$\begin{cases} -\Delta z = p(x) & \text{em } \Omega \\ z = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ z > 0, z \neq 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Desde que  $p \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , o Teorema B.15 garante que o problema acima tem uma única solução  $z \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Segue do Lema 1.1 que a função

$$\begin{aligned} h : (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto h(r) = \int_r^\infty \frac{dt}{f(t)} \end{aligned}$$

está bem definida.

Agora, mostraremos que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$h(v_n(x)) \leq \epsilon \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} + z(x) \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.50)$$

Com efeito, não é difícil notar que (1.50) ocorre em  $\partial\Omega$ , pois dado  $x \in \partial\Omega$

$$h(v_n(x)) = \int_{v_n(x)}^\infty \frac{dt}{f(t)} = \int_n^\infty \frac{dt}{f(t)} = h(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(v_n(x)) = 0 = z(x).$$

Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$h(v_n(x)) < \epsilon \left(1 + R^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

onde  $R$  é escolhido de modo que  $\overline{\Omega} \subset B(0, R)$ . Donde

$$h(v_n(x)) < \epsilon \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} + z(x) \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (1.51)$$

Suponha, por absurdo, que (1.50) não ocorra em  $\Omega$ . Assim, existem  $\epsilon_0 > 0$ ,  $x_0 \in \Omega$  e  $n' \geq n_0$  tais que

$$h(v_{n'}(x_0)) - z(x_0) - \epsilon_0 \left(1 + |x_0|^2\right)^{-\frac{1}{2}} > 0.$$

De (1.51), deve existir  $x_1 \in \Omega$  tal que

$$\Delta \left[ h(v_{n'}(x)) - z(x) - \epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} \leq 0. \quad (1.52)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), vem

$$\begin{aligned} h(v_{n'}(x)) &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{v_{n'}(x)}^b \frac{dt}{f(t)} \\ &\stackrel{TFC}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} [G(b) - G(v_{n'}(x))] \end{aligned}$$

onde  $G$  é a primitiva da função  $\frac{1}{f(t)}$ . Desde que o  $\lim_{b \rightarrow +\infty} [G(b)]$  existe, pois

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} [G(b)] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{v_{n'}(x)}^b \frac{dt}{f(t)} + \lim_{b \rightarrow +\infty} [G(v_{n'}(x))].$$

Segue que

$$h(v_{n'}(x)) = \lim_{b \rightarrow +\infty} [G(b)] - [G(v_{n'}(x))].$$

Novamente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), ficamos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h(v_{n'}(x)) = -\frac{1}{f(v_{n'}(x))} \frac{\partial}{\partial x_i} v_{n'}(x),$$

o que implica

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} h(v_{n'}(x)) = \frac{f(v_{n'}(x))}{[f(v_{n'}(x))]^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} v_{n'}(x) \right]^2 - \frac{1}{f(v_{n'}(x))} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v_{n'}(x)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta \left[ h(v_{n'}(x)) \right] &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} h(v_{n'}(x)) \\ &= \frac{f(v_{n'}(x))}{[f(v_{n'}(x))]^2} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} v_{n'}(x) \right]^2 - \frac{1}{f(v_{n'}(x))} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v_{n'}(x) \\ &= \frac{f(v_{n'}(x))}{[f(v_{n'}(x))]^2} |v_{n'}(x)|^2 - \frac{1}{f(v_{n'}(x))} \Delta v_{n'}(x) \\ &= \frac{f(v_{n'}(x))}{[f(v_{n'}(x))]^2} |v_{n'}(x)|^2 - p(x) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta \left[ h(v_{n'}(x)) - z(x) - \epsilon_0 (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} &= \left[ \frac{f(v_{n'}(x))}{[f(v_{n'}(x))]^2} |v_{n'}(x)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \epsilon_0 \Delta (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2} \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(1 + \sum_{i=1}^N x_i^2\right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2x_i \\ &= -\left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} x_i. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{3}{2} \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}} 2x_i x_i - \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \\ &= 3 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}} x_i^2 - \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^N 1 \\ &= 3 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}} |x|^2 - N \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= 3 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}} |x|^2 - N \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \\ &\quad + 3 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}} - 3 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}} \\ &= (3 - N) \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} = (3 - N) \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}}. \quad (1.53)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta \left[ h(v_{n'}(x)) - z(x) - \epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} &= \left[ \frac{f(v_{n'}(x))}{[f(v_{n'}(x))]^2} |v_{n'}(x)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_0 (N - 3) \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + 3\epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} > 0 \end{aligned}$$



o que é um absurdo com (1.52), mostrando (1.50).

Para concluir, provaremos que  $v$  é solução Blow-up de (1.1). Note que, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  em (1.50), ficamos com

$$h(v_n(x)) \leq z(x) \quad \forall x \in \Omega$$

para todo  $n$  suficientemente grande, o que implica

$$h(v(x)) \leq z(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Então

$$0 \leq \lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} h(v(x)) \leq \lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} z(x) = 0,$$

isto é,

$$\lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} h(v(x)) = 0 \tag{1.61}$$

consequentemente

$$\lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} v(x) = +\infty.$$

■

**Observação 1.3.** *De maneira geral, o Teorema 1.2 afirma que sob certas hipóteses a condição de Keller-Osserman é uma condição necessária para a existência de solução Blow-up em domínios limitados. Uma pergunta natural que podemos questionar é: A existência de solução Blow-up implica na condição de Keller-Osserman? A resposta a essa questão é positiva como mostra o próximo resultado.*

**Teorema 1.3.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado. Suponha que  $p$  e  $f$  satisfaçam as condições  $(p_1)$ ,  $(p_2)$ ,  $(\bar{p}_1)$  e  $(f_1)$ , respectivamente. Se  $u$  é solução Blow-up do problema (1.1), então  $f$  satisfaz (KO).*

**Demonstração.**

Com efeito, seja  $u$  uma solução Blow-up de (1.1). Suponha, por absurdo, que

$$\int_1^\infty \left[ \int_0^t f(s) ds \right]^{-\frac{1}{2}} dt = +\infty. \tag{*}$$

Desde que  $p \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ , existe uma constante positiva  $M_0$  tal que

$$p(x) \leq M_0 \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sabemos pela Proposição 1.1 que o problema

$$\begin{cases} \Delta u = M_0 f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = n & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução  $u_n$  a qual é positiva. Com os mesmos argumentos do Lema 1.1, verificamos que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para uma função  $\tilde{u}$  solução Blow-up de

$$\Delta \zeta = M_0 f(\zeta) \quad \text{em } \Omega. \quad (\star)$$

Por princípio de máximo  $u_n \leq u$  em  $\Omega$ , e conseqüentemente,  $\tilde{u} \leq u$  em  $\Omega$ .

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $0 \in \Omega$ . Como  $\tilde{u}$  é Blow-up, existe uma constante  $a > 0$  tal que  $\tilde{u}(0) < a$ .

Seja  $R > 0$  o maior número real tal que a bola  $B(0, R) \subset \Omega$  e considere  $w$  uma solução radial<sup>8</sup> de  $(\star)$  em  $B_R(0)$  tal que

$$w(0) = a \quad \text{e} \quad w'(0) = 0.$$

Como  $w$  é limitada em  $B_R(0)$ , podemos definir uma função  $\tilde{w}$  até  $\partial\Omega$  tal que  $\tilde{w}|_{B_R(0)} = w$  de modo que ainda seja limitada. Novamente por princípio de máximo, temos  $\tilde{w} \leq \tilde{u}$  em  $\Omega$  contrariando o fato de  $\tilde{u}(0) \leq \tilde{w}(0)$ . ■

Portanto, segue dos Teoremas 1.2 e 1.3 que a condição de Keller-Oserman é uma condição necessária e suficiente para a existência de solução Blow-up para o problema (1.1) em domínios limitados.

### 1.2.2 Existência de Solução Blow-up em Domínios Ilimitados

Nessa seção estudaremos a existência de soluções em domínios ilimitados. Os resultados que seguem nos oferecem um método que estabelece uma relação direta entre solução maximal e qualquer solução Blow-up. Uma solução maximal  $U$  é caracterizada pelo seguinte fato: Se  $u$  é solução do mesmo problema, então  $u(x) \leq U(x)$  para todo  $x \in \Omega$ .

O próximo resultado mostra a existência de solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$ , isto é, quando  $\Omega = \mathbb{R}^N$ .

**Teorema 1.4.** *Suponha que  $p$  e  $f$  satisfaçam  $(p_1)$ ,  $(p_2)$  e  $(f_1)$ ,  $(KO)$ , respectivamente. Se  $p$  satisfaz a condição  $(\bar{p}_1)'$  para  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , então existe uma solução  $U$  do problema (1.1) a qual é maximal e positiva. Além disso, se  $p$  também verifica a condição  $(\bar{p}_2)$ , então  $U$  é uma solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$ .*

<sup>8</sup> $w(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \left[ \int_0^t s^{N-1} M_0 f(w(s)) ds \right] dt$

**Demonstração.**

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , segue de  $(\bar{p}_1)'$  que  $(\bar{p}_1)$  é válido em  $\Omega_n$ . Logo, o Teorema 1.2 nos assegura que o problema

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) & \text{em } \Omega_n, \\ u > 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega_n, \end{cases} \quad (\bar{P}_n)$$

tem uma única solução  $v_n \in C^2(\Omega_n)$  a qual é Blow-up em  $\Omega_n$ . Com argumentos similares aos que vem sendo usados, verificamos que  $(v_n(x))_{n \geq 1}$  é não-crescente para todo  $x \in \Omega_{n_0}$  com  $n_0$  fixado.

Desde que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  com  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ , dado  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$x_0 \in \Omega_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Como

$$0 < v_n(x_0) \leq \dots \leq v_{n_0+1}(x_0) \leq v_{n_0}(x_0) \quad \forall n \geq n_0$$

podemos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x_0) \end{aligned}$$

Observe que  $U \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ . Com efeito, seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado. Por  $(\bar{p}_1)'$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\Omega \subset \Omega_n \quad \forall n \geq n_1.$$

Mostraremos que

$$v_n \rightarrow U \quad \text{em } C^2(\Omega).$$

Desde que  $(v_n)$  é não-crescente, vem

$$v_n \in L^\infty(K)$$

para todo compacto  $K \subset \Omega$ .

Seja  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  um compacto. Existe  $M > 0$  tal que

$$\|u\|_\infty \leq M,$$

o que implica

$$f := f|_{[0,M]} \in L^\infty(\tilde{\Omega}).$$

Logo,

$$f \in L^s(\tilde{\Omega}) \quad \forall s \geq 1.$$

Em particular, para  $r > N$ , temos pelo Teorema B.11

$$v_n \in W^{2,r}(\hat{\Omega}), \quad \hat{\Omega} \subset \tilde{\Omega}.$$

e existe uma constante positiva  $c$  tal que

$$\|v_n\|_{2,r,\hat{\Omega}} \leq c \left( \|v_n\|_{r,\tilde{\Omega}} + \|f\|_{r,\tilde{\Omega}} \right)$$

o que implica na existência de  $c_1 > 0$  tal que

$$\|v_n\|_{2,q,\hat{\Omega}} \leq c_1.$$

Por imersão, temos

$$v_n \in C^{1,\nu}(\tilde{\Omega}).$$

Agora, para cada  $n \in \mathbb{N}$  considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta v = p(x)f(v_n) & \text{em } \hat{\Omega} \\ v = v_n & \text{em } \partial\hat{\Omega} \end{cases} \quad (\bar{P}_n)$$

Como  $pf(v_n) \in C^{0,\nu}(\hat{\Omega})$  e  $v_n \in C(\partial\hat{\Omega})$ , segue do Teorema B.24 que o problema  $(\bar{P}_n)$  tem uma única solução  $u_n \in C^{2,\nu}(\hat{\Omega})$ . Por unicidade de solução

$$v_n \in C^{2,\nu}(\hat{\Omega}).$$

Além disso, existe constante  $c_2 > 0$  tal que

$$\|v_n\|_{C^{2,\nu}(\hat{\Omega})} = \|u_n\|_{C^{2,\nu}(\hat{\Omega})} \leq c_2 \left( \|f(v_n)\|_{C^{0,\nu}(\hat{\Omega})} + \|v_n\|_{C^{0,\nu}(\hat{\Omega})} \right),$$

o que implica na existência de  $c_3$  constante positiva tal que

$$\|v_n\|_{C^{2,\nu}(\hat{\Omega})} \leq c_3.$$

Desde que

$$C^{2,\nu}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\hat{\Omega})$$

compactamente, segue que existe uma subsequência  $(v_{n_j})$  que converge em  $C^2(\hat{\Omega})$ , isto é, existe  $\tilde{U} \in C_{loc}^{2,\nu}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$v_{n_j} \rightarrow \tilde{U} \quad \text{em } C^2(\hat{\Omega})$$

e por unicidade de limite  $U = \tilde{U}$ . Portanto, de  $(\bar{P}_n)$ , temos

$$\Delta v_{n_j} = p(x)f(v_{n_j}) \quad \text{em } \Omega_{n_j}. \quad (1.54)$$

Passando ao limite quando  $j \rightarrow +\infty$  em (1.54), concluímos que  $U$  é solução de (1.1), ou seja,

$$\Delta U = p(x)f(U)$$

com  $U \in C_{loc}^{2,\nu}(\mathbb{R}^N)$ .

Supondo que  $p > 0$ , mostraremos que  $U$  é solução maximal. Seja  $u$  uma solução arbitrária de (1.1). Por princípio de máximo, dado  $n \in \mathbb{N}$  temos  $u \leq v_n$  em  $\Omega_n$ . Dessa forma, dado  $x \in \mathbb{R}^N$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in \Omega_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Assim,  $u(x) \leq v_n(x)$  para todo  $n \geq n_0$ , donde

$$u(x) \leq \lim_n v_n(x) = U(x),$$

isto é,  $U$  é solução maximal de (1.1).

Por fim, suponha que vale  $(\bar{p}_2)$ , ou seja,

$$\int_0^\infty r\phi(r)dr < +\infty.$$

Mostraremos que  $U$  é Blow-up no  $\mathbb{R}^N$ , em outras palavras

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty.$$

Supondo  $(\bar{p}_2)$ , provaremos que

$$K = \int_0^\infty r^{1-N} \left[ \int_0^r \sigma^{N-1} \phi(\sigma) d\sigma \right] dr < +\infty.$$

Com efeito, note que para cada  $R > 0$ , fazendo integração por partes (IP), temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^R r^{1-N} \left( \int_0^r \sigma^{N-1} \phi(\sigma) d\sigma \right) dr &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^R \left( \frac{1}{2-N} \frac{d}{dr} r^{2-N} \right) \left( \int_0^r \sigma^{N-1} \phi(\sigma) d\sigma \right) dr \\
 &= \frac{1}{2-N} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ R^{2-N} \int_0^R \sigma^{N-1} \phi(\sigma) d\sigma \Big|_\epsilon^R - \right. \\
 &\quad \left. + \int_\epsilon^R r^{2-N} r^{N-1} \phi(r) dr \right] \\
 &\stackrel{IP}{=} \frac{1}{2-N} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \left( R^{2-N} \int_0^R r^{N-1} \phi(r) dr - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \epsilon^{2-N} \int_0^\epsilon r^{N-1} \phi(r) dr \right) - \int_\epsilon^R r \phi(r) dr \right] \\
 &= \frac{1}{2-N} \left[ \left( R^{2-N} \int_0^R r^{N-1} \phi(r) dr - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{2-N} \int_0^\epsilon r^{N-1} \phi(r) dr \right) - \int_0^R r \phi(r) dr \right].
 \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$\epsilon^{2-N} \int_0^\epsilon r^{N-1} \phi(r) dr = \int_0^\epsilon \frac{r^{N-1}}{\epsilon^{N-2}} \phi(r) dr$$

e

$$\int_0^\epsilon \frac{r^{N-1}}{\epsilon^{N-2}} \phi(r) dr \leq \int_0^\epsilon \frac{\epsilon^{N-1}}{\epsilon^{N-2}} \phi(r) dr$$

temos

$$0 < \epsilon^{2-N} \int_0^\epsilon r^{N-1} \phi(r) dr \leq \epsilon \int_0^\epsilon \phi(r) dr. \quad (*)$$

Daí, passando ao limite em (\*) quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , concluímos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{2-N} \int_0^\epsilon r^{N-1} \phi(r) dr = 0$$

o que implica

$$\int_0^R r^{1-N} \left( \int_0^r \sigma^{N-1} \phi(\sigma) d\sigma \right) dt = \frac{1}{N-2} \left( \int_0^R r \phi(r) dr - R^{2-N} \int_0^R r^{N-1} \phi(r) dr \right)$$

donde

$$\int_0^R r^{1-N} \left( \int_0^r \sigma^{N-1} \phi(\sigma) d\sigma \right) dt \leq \frac{1}{N-2} \int_0^R r \phi(r) dr \quad (1.55)$$

passando ao limite em (1.55) quando  $R \rightarrow +\infty$ , temos

$$\int_0^\infty r^{1-N} \left( \int_0^r \sigma^{N-1} \phi(\sigma) d\sigma \right) dt \leq \frac{1}{N-2} \int_0^\infty r \phi(r) dr \stackrel{(\bar{p}_2)}{<} +\infty$$

mostrando que  $K < +\infty$ .

Dessa forma podemos definir a seguinte função

$$z : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$r \mapsto z(r) = K - \int_0^r \sigma^{1-N} \left[ \int_0^\sigma \tau^{N-1} \phi(\tau) \right] dr$$

Não é difícil verificar, pelo Teorema Fundamental do Cálculo que  $z$  é solução radial para o problema

$$\begin{cases} -\Delta \zeta = \phi(r), & r = |x| < +\infty \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 0 \end{cases}$$

e por princípio de máximo concluímos que  $z$  é a única solução do problema acima.

Por outro lado, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^\delta \frac{dt}{f(t)} = +\infty. \quad (**)$$

Com efeito, desde que  $f'(0)$  existe podemos considerar  $L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ . Assim, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para  $0 < t < \delta$  temos

$$\frac{f(t)}{t} < L + \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t(L + \epsilon)} < \frac{1}{f(t)}. \quad (1.56)$$

Seja  $r \in (0, \delta)$ . Observe que por (1.56)

$$\frac{1}{(L + \epsilon)} \int_r^\delta \frac{dt}{t} < \int_r^\delta \frac{dt}{f(t)}.$$

Além disso, uma vez que

$$\frac{1}{(L + \epsilon)} \int_r^\delta \frac{dt}{t} = \frac{\ln \delta - \ln r}{(L + \epsilon)},$$

temos

$$\frac{\ln \delta - \ln r}{L + \epsilon} < \int_r^\delta \frac{dt}{f(t)}. \quad (1.57)$$

Passando ao limite quando  $r \rightarrow 0^+$  em (1.57) obtemos (\*\*). Sendo  $\lim_{r \rightarrow +\infty} z(r) = 0$ , temos que  $z$  é limitada, assim podemos fazer um argumento similar como na Proposição 1.1, para mostramos que dado  $x \in \mathbb{R}^N$ , existe um único número real  $y \in (0, \delta]$ , tal que

$$z(x) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$$

O que nos permite definir de maneira implícita uma função

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto w(x) = y \end{aligned}$$

onde  $y$  é o único número real positivo para o qual

$$z(x) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{f(t)} = \int_{w(x)}^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}. \quad (1.58)$$

Daí, passando ao limite quando  $|x| \rightarrow +\infty$  em (1.58), obtemos

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \int_{w(x)}^{+\infty} \frac{dt}{f(t)} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} w(x) = +\infty$$

Para concluir nossa demonstração, basta verificarmos que

$$w(x) \leq v_n(x) \quad \text{em } \Omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.59)$$

Desde que  $v_n$  é Blow-up em  $\Omega_n$ , segue que (1.59) é satisfeita em  $\partial\Omega_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Dessa forma, basta notar que (1.59) também ocorre em  $\Omega_n$  para  $n \geq 1$ .

Desde que dado  $\epsilon > 0$

$$w(x) \leq v_n(x) + \epsilon \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{em } \Omega_n^9.$$

Da arbitrariedade de  $\epsilon$ , concluímos (1.59), e conseqüentemente

$$w(x) \leq \lim_n v_n(x) = U(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (1.60)$$

Passando ao limite em (1.60) quando  $|x| \rightarrow +\infty$ , temos

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$$

como queríamos demonstrar. ■

**Observação 1.4.** Quando  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , toda solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$  é positiva. Com efeito, dado uma solução explosiva  $u$  de (1.1), suponha por contradição, que existe

---

<sup>9</sup>A verificação é similar procedendo como na demonstração do Teorema 1.2, trocando apenas  $\Omega$  por  $\Omega_n$ .



$x_0 \in \mathbb{R}^N$  tal que  $u(x_0) = 0$ . Desde que  $u$  é Blow-up no  $\mathbb{R}^N$ , existe uma constante positiva  $R > |x_0|$  tal que

$$u > 0 \quad \text{em } \partial B(x_0, r).$$

Segue da Proposição 1.1 que o problema

$$\begin{cases} \Delta \zeta = p(x)f(\zeta) & \text{em } B(x_0, r), \\ \zeta = u & \text{em } \partial B(x_0, r), \\ \zeta > 0, \zeta \neq 0 & \text{em } B(x_0, r), \end{cases}$$

tem uma única solução. Sendo  $u$  também solução do problema acima, por unicidade,  $u$  deve ser positiva o que é uma contradição.

Como consequência do Teorema 1.4, temos o seguinte resultado de existência de solução para domínios ilimitados  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ .

**Corolário 1.1.** *Suponha que  $p$  e  $f$  satisfaçam  $(p_1)$ ,  $(p_2)$  e  $(f_1)$ ,  $(KO)$ , respectivamente. Se  $p$  satisfaz a condição  $(\bar{p}_1)'$  em  $\Omega$ , então existe uma solução  $U$  do problema (1.1) a qual é maximal e positiva.*

**Observação 1.5.** *Se  $p(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  com  $|x|$  suficientemente grande, então  $(\bar{p}_1)'$  é automaticamente satisfeita.*

*De fato, se  $p(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  com  $|x|$  suficientemente grande, deve existir  $R > 0$  tal que*

$$p(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N \cap \left(\overline{B(0, R)}\right)^c.$$

*Logo, os possíveis  $x \in \mathbb{R}^N$  onde  $p$  pode se anular estão na bola  $B(0, R)$ . Assim, basta considerar uma sequência  $(\Omega_n)$  com  $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$  cuja  $\overline{B(0, R)} \subset \Omega_1$ , por exemplo, de bolas centradas na origem e raio  $R + n$ .*

A observação anterior nos faz pensar na seguinte questão : Existe  $p \geq 0$  satisfazendo  $(\bar{p}_1)'$  e  $(\bar{p}_2)$  que se anule para  $x \in \mathbb{R}^N$  com  $|x|$  suficientemente grande? A resposta para essa pergunta é verdadeira, veja o seguinte exemplo:

**Exemplo 1.1.** *Considere uma função  $p \in C^1([0, +\infty))$  com*

$$\max_{r \in [n, n+1]} p(r) = \frac{2}{n^2(2n+1)}$$

*tal que*

$$\begin{cases} p(r) = 0 & \text{para } |x| = r \in \left[n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}\right], n \geq 1, \\ p(r) > 0 & \text{em } \mathbb{R}^+ \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}\right]\right)^c. \end{cases}$$

O próximo resultado é um caso particular bem interessante, pois mostra a existência de solução **Blow-up na fronteira e no infinito**. para um caso particular de domínio exterior, à saber, o exterior de uma bola.

**Teorema 1.5.** *Sejam  $R > 0$  e  $\Omega = \mathbb{R}^N \cap \left(\overline{B(0, R)}\right)^c$ . Suponha que  $p$  e  $f$  satisfaçam  $(p_1)$ ,  $(p_2)$ ,  $(\bar{p}_1)'$  e  $(f_1)$ ,  $(KO)$ , respectivamente. Se  $p$  satisfaz a condição  $(\bar{p}_2)$  em  $\Omega$ , com  $\phi(r) = 0$  para  $r \in [0, R]$ , então a solução maximal<sup>10</sup>  $U$  é uma solução Blow-up na fronteira de  $B(0, R)$  e no infinito do problema (1.1).*

**Demonstração.**

Com efeito, usaremos um argumento similar ao do Teorema 1.2, ou seja, mostraremos que existe uma função  $w \in C(\mathbb{R}^N \cap \left(\overline{B(0, R)}\right)^c)$ ,  $w \leq U$  tal que

$$\lim_{|x| \downarrow R} w(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} w(x) = +\infty.$$

Considere o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \zeta = \phi(r), \quad |x| = r > R, \\ \lim_{r \downarrow R} \zeta(r) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \zeta(r) = 0. \end{array} \right. \quad (1.61)$$

Supondo que hipótese  $(\bar{p}_2)$  seja satisfeita, vem

$$\int_0^\infty r^{1-N} \left[ \int_0^r \sigma^{N-1} \phi(\sigma) \right] dr < +\infty.$$

Logo, a função

$$\begin{aligned} z : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto z(r) = \left( \frac{1}{R^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right) \int_R^\infty \sigma^{1-N} \left( \int_0^\sigma \tau^{N-1} \phi(\tau) d\tau \right) d\sigma + \\ &\quad - \frac{1}{R^{N-2}} \int_R^r \sigma^{1-N} \left( \int_0^\sigma \tau^{N-1} \phi(\tau) \right) d\sigma \end{aligned}$$

está bem definida. Além disso, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo não é difícil mostrar que  $z$  é solução de (1.61), e por princípio do máximo verificamos que a mesma é a única solução de (1.61). Observe que os limites

$$\lim_{r \downarrow R} z(r) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} z(r) = 0 \quad (1.62)$$

<sup>10</sup>A existência segue do Colorário 1.1

implicam que  $z$  é limitada. Portanto, existe  $c_0 = \max_{x \in \Omega} z(x)$  e com argumentos similares aos da Proposição 1.1, justificamos que dado  $x \in \Omega$ , existe um único  $y \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$z(x) = \int_y^\infty \frac{dt}{f(t)}.$$

Então, podemos definir

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R}^N \cap \left(\overline{B(0, R)}\right)^c &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto w(x) = y \end{aligned}$$

onde  $y$  é o único número real tal que

$$z(x) = \int_y^\infty \frac{dt}{f(t)}.$$

Segue da definição de  $w$  e (1.62) que

$$\lim_{|x| \downarrow R} w(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} w(x) = +\infty. \quad (1.63)$$

Por princípio de máximo, verificamos que

$$w(x) \leq v_n \quad \text{em} \quad \Omega_n.$$

onde  $v_n$  é uma solução do problema  $(\overline{P}_n)$ . Dessa forma,

$$w(x) \leq U(x) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Basta observar que dado  $x \in \Omega$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in \Omega_n$  para todo  $n \geq n_0$ , implicando  $w(x) \leq v_n$  em  $\Omega_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Portanto, de (1.63) segue o resultado.

■

A seguir, mostraremos uma condição necessária para a existência de solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$  para o problema (1.1).

**Teorema 1.6.** *Sejam  $p \in C(\mathbb{R}^N)$  não-negativa (não identicamente nula) satisfazendo  $(\overline{p}_2)$  e  $f$  satisfazendo  $(f_1)$ . Se  $u$  é uma solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$  do problema (1.1), então*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{f(t)} < +\infty.$$

**Demonstração.**

Seja  $u$  uma solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$  de (1.1). Considere  $a \in (0, u_0)$ , em que  $u_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} u(x) > 0$  e defina a seguinte função

$$v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$r \mapsto v(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(0)} \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dS.$$

Mostraremos que existe uma constante positiva  $k$  tal que

$$|v(r)| \leq k.$$

De fato, considere

$$g(x) = \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)}$$

assim,

$$v(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(0)} g(x) dS. \quad (1.64)$$

Observe que pelo Teorema de Mudança de Variáveis<sup>11</sup>

$$v(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_1(0)} g(r\xi) dS. \quad (1.65)$$

Sendo  $f \in C^1$ , de (1.65) temos

$$\begin{aligned} v'(r) &= \frac{1}{\omega_N} \frac{d}{dr} \int_{\partial B_1(0)} g(r\xi) dS \\ &= \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} \frac{d}{dr} g(r\xi) dS. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ficamos com

$$v'(r) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{f(u(r\xi))} \frac{\partial}{\partial r} u(r\xi) dS \quad (1.66)$$

Pela Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} u(r\xi) &= \frac{\partial}{\partial r} u(r\xi_1, r\xi_2, \dots, r\xi_N) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} u(r\xi) \frac{d}{dr} r\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u(r\xi) \frac{d}{dr} r\xi_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_N} u(r\xi) \frac{d}{dr} r\xi_N \\ &= \nabla u(r\xi) \xi, \end{aligned}$$

o que implica

$$v'(r) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{f(u(r\xi))} \nabla u(r\xi) \xi dS.$$

<sup>11</sup>Ver Teorema B.5

isto é,

$$v'(r) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{f(u(y))} \nabla u(y) y dS. \quad (1.67)$$

Por outro lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^{u(y)} \frac{dt}{f(t)} = \frac{1}{f(u(y))} \frac{\partial}{\partial x_i} u(y)$$

logo

$$\nabla \left( \int_a^{u(y)} \frac{dt}{f(t)} \right) = f(u(y)) \nabla u(y).$$

De (1.67), temos

$$v'(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(0)} \nabla \left( \int_a^{u(y)} \frac{dt}{f(t)} \right) \frac{y}{r} dS,$$

ou seja,

$$v'(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \int_a^{u(y)} \frac{dt}{f(t)} \right) dS. \quad (1.68)$$

Segue de (1.68) e do Teorema do Divergente que

$$v'(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{B_r(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dx. \quad (1.69)$$

Daí,

$$\Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) = \left[ \left( \frac{1}{f} \right)' (u(x)) |u(x)|^2 + \frac{1}{f(u(x))} \Delta u(x) \right]. \quad (1.70)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) &\leq \frac{1}{f(u(x))} p(x) f(u(x)) \\ &\stackrel{p \in C_{loc}^{0,\alpha}(\overline{B_r(0)})}{\leq} \|p\|_\infty, \quad x \in \overline{B_r(0)}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Mudança de Variáveis

$$\begin{aligned} v'(r) &\leq \frac{\|p\|_\infty}{\omega_N r^{N-1}} \int_{B_r(0)} 1 dx \\ &\leq \frac{\|p\|_\infty}{\omega_N r^{N-1}} \int_{B_1(0)} r^N dx \\ &\leq \frac{\|p\|_\infty r}{\omega_N}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$v'(r) \leq \|p\|_{\infty} r.$$

Então,

$$\lim_{r \rightarrow 0} v'(r) = 0. \quad (1.71)$$

De (1.69), temos

$$\omega_N r^{N-1} v'(r) = \int_{B_r(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dx. \quad (1.72)$$

Daí, para  $0 < r < R$  temos

$$\begin{aligned} \omega_N \left( R^{N-1} v'(R) - r^{N-1} v'(r) \right) &= \int_{B_R(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dx - \int_{B_r(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dx \\ &= \int_r^R \left[ \int_{\partial B_z(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dS \right] dz. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade anterior por  $R - r$ , obtemos

$$\frac{\omega_N \left( R^{N-1} v'(R) - r^{N-1} v'(r) \right)}{R - r} = \frac{\int_r^R \left[ \int_{\partial B_z(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dS \right] dz}{R - r}. \quad (1.73)$$

Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$G(R) - G(r) = \int_r^R \left[ \int_{\partial B_z(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dS \right] dz, \quad (1.74)$$

onde  $G$  é a primitiva de  $\int_{\partial B_z(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dS$ . De (1.73) e (1.74), encontramos

$$\frac{\omega_N \left( R^{N-1} v'(R) - r^{N-1} v'(r) \right)}{R - r} = \frac{G(R) - G(r)}{R - r}. \quad (1.75)$$

Passando ao limite quando  $r \rightarrow R$  em (1.75), obtemos

$$\lim_{R \rightarrow r} \frac{\omega_N \left( R^{N-1} v'(R) - r^{N-1} v'(r) \right)}{r - R} = \lim_{R \rightarrow r} \frac{G(R) - G(r)}{R - r},$$

isto é,

$$\omega_N \left( r^{N-1} v'(r) \right)' = \frac{d}{dr} G(r).$$

Por (1.74), ficamos com

$$\omega_N \left( r^{N-1} v'(r) \right)' = \int_{\partial B_r(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dS$$

de onde segue de (1.70)

$$\begin{aligned}\omega_N \left( r^{N-1} v'(r) \right)' &= \int_{\partial B_r(0)} \Delta \left( \int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)} \right) dS \\ &= \int_{\partial B_r(0)} \left[ \left( \frac{1}{f} \right)' (u(x)) |u(x)|^2 + \frac{1}{f(u(x))} \Delta u(x) \right] dS.\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}\omega_N \left( r^{N-1} v'(r) \right)' &\leq \int_{\partial B_r(0)} \left[ \frac{1}{f(u(x))} \Delta u(x) \right] dS \\ &\leq \int_{\partial B_r(0)} p(x) dS \\ &\leq \max_{|x|=r} p(x) \int_{\partial B_r(0)} 1 dS \\ &\leq \phi(r) r^{N-1} \int_{\partial B_1(0)} 1 dS \\ &\leq \phi(r) \omega_N r^{N-1}\end{aligned}$$

o que implica

$$\left( r^{N-1} v'(r) \right)' \leq r^{N-1} \phi(r). \quad (1.76)$$

Segue de (1.71)  $v'(0) = 0$ . Logo, integrando de 0 a  $r$  ambos os mebrs da desigualdade em (1.76), podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para concluir

$$t^{N-1} v'(t) \Big|_0^r \leq \int_0^r t^{N-1} \phi(t) dt$$

isto é,

$$r^{N-1} v'(r) \leq \int_0^r t^{N-1} \phi(t) dt.$$

Dessa forma,

$$v'(r) \leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r t^{N-1} \phi(t) dt. \quad (1.77)$$

Integrando de 0 a  $r$  ambos os membros da desigualdade em (1.77), vem

$$v(r) - v(0) \leq \int_0^r \sigma^{1-N} \left[ \int_0^\sigma \tau^{N-1} \phi(\tau) d\tau \right] d\sigma \quad \forall r \geq 0. \quad (1.78)$$

Supondo  $(p_2)$ , temos

$$K = \int_0^\infty r^{1-N} \left[ \int_0^r \sigma^{N-1} \phi(\sigma) d\sigma \right] dr < +\infty.$$

e por (1.78), obtemos

$$v(r) \leq k, \tag{1.79}$$

onde  $k = v(0) + K$ . Mostrando que  $v$  é limitada.

Por fim, suponha, por absurdo, que

$$\int_1^\infty \frac{dt}{f(t)} = +\infty. \tag{1.80}$$

Sendo  $u$  solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$  de (1.1), segue que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r\xi) = \lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = +\infty,$$

para qualquer  $\xi \in \mathbb{R}^N$  vetor unitário. Então, de (1.80)

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^{u(r\xi)} \frac{dt}{f(t)} = \int_a^\infty \frac{dt}{f(t)} = +\infty.$$

Então, dado  $A > 0$ , existe  $B > 0$  tal que  $r > B$  implica

$$\int_a^{u(r\xi)} \frac{dt}{f(t)} > A. \tag{1.81}$$

Recorde que

$$v(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_1(0)} \left( \int_a^{u(r\xi)} \frac{dt}{f(t)} \right) dS. \tag{1.82}$$

Por (1.81) e (1.82), para  $r > B$ ,

$$v(r) \geq \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B_1(0)} AdS.$$

Logo, Teorema de Mudança de Variáveis, existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$v(r) \geq cA.$$

o que implica

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) = +\infty,$$

obtendo um absurdo com (1.79), e portanto,

$$\int_1^\infty \frac{dt}{f(t)} < +\infty,$$

como queríamos demonstrar. ■



## Capítulo 2

# Soluções do Tipo Blow-up para Equações Elípticas Quasilineares

Neste capítulo, seguindo as idéias de Ghergu, Niculescu, & Rădulescu [17] estudaremos alguns resultados de existência de solução Blow-up para a seguinte classe de equações elípticas quasilineares:

$$\begin{cases} \Delta u + q(x) |\nabla u|^a = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) é um domínio regular (limitado ou ilimitado) com fronteira (possivelmente vazia) compacta. Assumiremos que  $a \in [1, 2]$ ,  $p, q : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções não-negativas tais que

( $p_1$ )  $p, q \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  se  $\Omega$  é limitado ou  $p, q \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$  se  $\Omega$  é ilimitado

e  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz,

( $f_1$ )  $f \in C^1([0, +\infty))$ ,  $f' > 0$ ,  $f(0) = 0$  e  $f > 0$  em  $(0, +\infty)$ ;

( $f_2$ )  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{[f(t)]^{\frac{2}{a}}} = 0$ ;

( $KO$ )  $\int_1^\infty [F(t)]^{-\frac{1}{2}} dt < +\infty$ , onde  $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ .

Recorde que, no Capítulo 1, estudamos o problema (2.1) quando  $q \equiv 0$ . Nosso principal objetivo, neste capítulo, é estudar o quanto o termo não-linear  $|\nabla u|^a$  influencia na existência e no comportamento assintótico das soluções Blow-up de (2.1).

A seguir algumas funções que satisfazem as condições ( $f_1$ ), ( $f_2$ ) e ( $KO$ ):

(a)

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) = t^s \left( s > 1 \text{ e } 0 < a < \frac{2s}{s+1} \right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = e^t - 1 \end{aligned}$$

Vale salientar que para  $a = 2$  e  $q \equiv 1$ , podemos reduzir o problema (2.1) a um problema semilinear, sem o termo não-linear, que estudamos no capítulo anterior.

Com efeito, se  $u$  é solução Blow-up de

$$\begin{cases} \Delta u + |\nabla u|^2 = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Defina

$$\begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto v(x) = e^{u(x)}. \end{aligned}$$

Daí,  $v$  é solução do problema semilinear

$$\begin{cases} \Delta v = p(x)g(v) & \text{em } \Omega, \\ v(x) \rightarrow +\infty & \text{quando } \text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $g(v) = vf(\ln v)$ <sup>1</sup>.

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i} = e^u \frac{\partial u}{\partial x_i} &\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = e^u \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right] \\ &\Rightarrow \Delta v = e^u \left( |\nabla u|^2 + \Delta u \right) \\ &\Rightarrow \Delta v = e^u \left[ p(x)f(u) \right] \quad \text{em } \Omega, \end{aligned}$$

isto é,

$$\Delta v = v \left[ p(x)f(\ln v) \right] \quad \text{em } \Omega. \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Observe que  $g$  satisfaz a condição de (KO).

Por outro lado, uma vez que  $\lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} u(x) = +\infty$  segue da definição de  $v$  que

$$v(x) \rightarrow +\infty \quad \text{se} \quad \text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

De (2.4) e (2.5), temos que  $v$  é solução de (2.3) e não é difícil notar que vale a recíproca. Nesse sentido, iremos nos concentrar principalmente nos casos quando  $1 \leq a < 2$ .

A menos que seja mencionado o contrário, soluções de (2.1) serão soluções clássicas.

## 2.1 Resultados Preliminares

Nesta seção, baseado em Holanda [21] iremos estudar o método de sub e supersolução para uma equação quasilinear envolvendo o Laplaciano. Em seguida, veremos um resultado auxiliar.

### 2.1.1 O Método de Sub e Supersolução

No que segue, seja  $\Omega$  um domínio limitado e  $s \in [1, +\infty)$ . Estudaremos o método de sub e supersolução para o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u = h(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega, \\ u = \vartheta & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

A seguir, definiremos sub e supersoluções para o problema (2.6).

**Definição 2.1.** Uma função  $\underline{u} \in W^{2,s}(\Omega)$  é chamada de subsolução de (2.6) se

$$\begin{cases} \Delta \underline{u} \geq h(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) & \text{em } \Omega, \\ \underline{u} \leq \vartheta & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Definição 2.2.** Uma função  $\bar{u} \in W^{2,s}(\Omega)$  é chamada de supersolução de (2.6) se

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} \leq h(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} \geq \vartheta & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma solução de (2.6) é uma função  $u \in W^{2,s}(\Omega)$  que satisfaz (2.6).

O próximo resultado é uma das principais ferramentas usadas para encontrar soluções de (2.1), trata-se do método de Sub e Supersolução. Iremos demonstrar tal resultado usando um teorema devido à Leray-Schauder<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Ver Teorema B.20.

**Teorema 2.1.** *Suponha que  $h : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua satisfazendo*

$$|h(x, t, \xi)| \leq H(t)(1 + \Lambda |\xi|^2) \quad x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (2.7)$$

em que  $H$  é uma função contínua não-decrescente e  $\Lambda$  é uma constante positiva. Se  $\underline{u}$  e  $\bar{u}$  são sub e supersoluções de (2.6) com  $\underline{u} \leq \bar{u}$ , então existe  $u = u_0 \in W^{2,s}(\Omega)$ , solução de (2.6) tal que  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ .

**Demonstração.**

Defina a seguinte função

$$h_\theta(x, t, \xi) := h(x, t + \theta, \xi) \quad x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Observe que resolver o problema (2.6) é equivalente a resolver,

$$\begin{cases} \Delta v = h_\theta(x, v, \nabla v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

em que  $v := u - \theta$ .

Com efeito, por (2.6) escrevendo  $u = v + \theta$  ficamos com

$$\begin{cases} \Delta(v + \theta) = h(x, v + \theta, \nabla(v + \theta)) & \text{em } \Omega, \\ u - \theta = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} \Delta v = h(x, v + \theta, \nabla v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue da definição de  $h_\theta$  que os problemas (2.6) e (2.8) são equivalentes.

Além disso,  $\underline{u}$  é subsolução ( $\bar{u}$  é supersolução) de (2.8) se, e somente se,  $\underline{v} := \underline{u} - \theta$  é subsolução ( $\bar{v} := \bar{u} - \theta$  é supersolução) de (2.6). Mais ainda,  $\underline{v}$  e  $\bar{v}$  são funções em  $W^{2,s}(\Omega)$  com  $p > N$  e por imersão  $\underline{v}, \bar{v} \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$  para algum  $0 < \nu < 1$ , sendo as mesmas ordenadas, isto é,  $\underline{v} \leq \bar{v}$ .

Considere o seguinte operador  $T$  dado por

$$(Tv)(x) \begin{cases} \bar{v}(x) & \text{se } v(x) \geq \bar{v}(x), \\ v(x) & \text{se } \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \bar{v}(x), \\ \underline{v}(x) & \text{se } v(x) \geq \underline{v}(x). \end{cases} \quad (2.9)$$

Desde que  $\underline{v}, \bar{v} \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$ , existe uma constante positiva  $M$  tal que

$$\underline{v} \leq M + 1 \text{ e } \bar{v} \geq 1 - M \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

Defina as seguintes funções

$$v_M := \underline{v} - M \quad \text{e} \quad v^M := \bar{v} + M.$$

Logo,  $v_M \leq 1 \leq v^M$ . Agora, defina

$$a := \max\{-\Delta v_M, \Delta v^M, 1\}.$$

Como  $\underline{v}, \bar{v} \in W^{2,s}(\bar{\Omega})$  segue que  $a \in L^s(\Omega)$ .

Para cada  $t \in [0, 1]$  considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta v - [t + (1-t)a]v = t[h_\theta(x, Tv, \nabla v) - Tv] & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.10)$$

Mostraremos que  $v_M$  e  $v^M$  são respectivamente sub e supersolução de (2.10) para cada  $t \in [0, 1]$ . De fato, observe que

$$Tv_M = T\underline{v} = \underline{v} \quad \text{e} \quad \nabla v_M = \nabla \underline{v}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta v_M - [t + (1-t)a]v_M &= \Delta v_M - (1-t)av_M - tv_M \\ &\geq \Delta v_M - (1-t)\Delta v_M - tv_M \\ &= t\Delta v_M - tv_M \\ &= t[\Delta(\underline{v} - M) - (\underline{v} - M)] \\ &\geq t(\Delta \underline{v} - \underline{v}) \\ &\geq t[h_\theta(x, \underline{v}, \nabla \underline{v}) - \underline{v}] \\ &= t[h_\theta(x, Tv_M, \nabla v_M) - Tv_M] \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Além disso,

$$v_M = \underline{v} - M \leq \underline{v} \quad \text{em } \partial\Omega,$$

mostrando que  $v_M$  é subsolução de (2.10). Com um procedimento similar mostra-se que  $v^M$  é supersolução de (2.10).

Agora, observe que se  $v \in W^{2,p}(\Omega)$  é solução de (2.10), então

$$v_M \leq v \leq v^M.$$

Com efeito, vamos verificar apenas que  $v_M \leq v$ , pois a outra desigualdade obtemos de modo análogo. Suponha que  $v \in W^{2,p}(\Omega)$  é solução de (2.10) e defina  $w := v - v_M$ . Sendo  $w$  contínua definida no compacto  $\bar{\Omega}$  existe  $x_0$  um ponto de mínimo de  $w$ .

Suponha, por absurdo, que  $w(x_0) < 0$ , pela continuidade de  $w$  existe uma vizinhança  $V_\delta(x_0)$  de  $x_0$  tal que  $w < 0$  em  $V_\delta(x_0)$ , o que implica

$$v(x) < v_M(x) \quad \text{em} \quad V_\delta(x_0).$$

Segue da definição do operador  $T$  que

$$Tv = Tv_M = \underline{v} \quad \text{em} \quad V_\delta(x_0). \quad (2.11)$$

Por outro lado,

$$\Delta w - [t + (1-t)a]w \leq t[h_\theta(x, Tv, \nabla v) - Tv] - t[h_\theta(x, Tv_M, \nabla v_M) - Tv_M] \quad \text{em} \quad V_\delta(x_0),$$

e por (2.11) segue que

$$\Delta w - [t + (1-t)a]w \leq t[h_\theta(x, \underline{v}, \nabla v) - h_\theta(x, \underline{v}, \nabla v_M)] \quad \text{em} \quad V_\delta(x_0).$$

Por definição  $a \geq 1$  e sendo  $w < 0$  em  $V_\delta(x_0)$ , temos

$$\Delta w < \Delta w - w \leq \Delta w - [t + (1-t)a]w \quad \text{em} \quad V_\delta(x_0),$$

consequentemente

$$\Delta w < t[h_\theta(x, \underline{v}, \nabla v) - h_\theta(x, \underline{v}, \nabla v_M)] \quad \text{em} \quad V_\delta(x_0), \quad (2.12)$$

pois  $\nabla v(x_0) = \nabla v_M(x_0)$ . Assim,

$$\Delta w(x_0) < 0. \quad (2.13)$$

Escolhendo  $\delta$  suficientemente pequeno de modo que

$$t[h_\theta(x, \underline{v}, \nabla v) - h_\theta(x, \underline{v}, \nabla v_M)] < -\frac{w}{2} \quad \text{em} \quad V_\delta(x_0)$$

e por (2.12) ficamos com

$$\Delta w < 0 \quad \text{em} \quad V_\delta(x_0).$$

Então,  $w$  é uma função superhamônica em  $V_\delta(x_0)$  que tem mínimo no interior de  $\Omega$ , ou seja,  $w$  é constante em  $V_\delta(x_0)$  o que é um absurdo com (2.13). Portanto,  $v_M \leq v$  em  $\bar{\Omega}$ .

Agora, mostraremos que para algum  $\nu \in (0, 1)$ ,

$$\|v\|_{C^{1,\nu}(\bar{\Omega})} \leq M_0,$$

onde a constante positiva  $M_0$  independe de  $t$ .

De fato, desde que

$$v_M \leq v \leq v^M \quad \text{em } \bar{\Omega}, \quad t \in [0, 1].$$

Segue da definição de  $T$  que

$$v_M \leq Tv \leq v^M \quad \text{em } \bar{\Omega}, \quad t \in [0, 1].$$

Sendo  $v_M, v^M \in C^1(\bar{\Omega})$ , existe  $m > 0$  tal que

$$|v(x)| \leq m, \quad |Tv(x)| \leq m \quad \text{em } \bar{\Omega}, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.14)$$

Defina as seguintes funções  $\tilde{a}, b_t : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\tilde{a}(x) = 1 + ma(x) \quad \text{e} \quad b_t(x) = \frac{t[h_\theta(x, Tv(x), \nabla v(x)) - Tv(x)] + (1-t)(a(x) - 1)v(x)}{\tilde{a}(x) + \Lambda |\nabla v(x)|^2}.$$

Note que,

$$|b_t(x)| \leq \frac{|h_\theta(x, Tv(x), \nabla v(x))| + |Tv(x)| + (1-t)(a(x) - 1)|v(x)|}{\tilde{a}(x) + \Lambda |\nabla v(x)|^2}.$$

De (2.7), temos

$$|b_t(x)| \leq \frac{H(Tv(x) + \theta)(1 + \Lambda |\nabla v(x)|^2) + |Tv(x)| + (1-t)(a(x) - 1)|v(x)|}{\tilde{a}(x) + \Lambda |\nabla v(x)|^2}.$$

Sendo  $H$  não-decrescente segue da desigualdade acima e (2.14), vem

$$\begin{aligned} |b_t(x)| &\leq \frac{H(m + \theta)(1 + \Lambda |\nabla v(x)|^2) + m + (1-t)(a(x) - 1)m}{\tilde{a}(x) + \Lambda |\nabla v(x)|^2} \\ &\leq \frac{H(m + \theta)(1 + \Lambda |\nabla v(x)|^2)}{\tilde{a}(x) + \Lambda |\nabla v(x)|^2} + \frac{a(x)m}{\tilde{a}(x) + \Lambda |\nabla v(x)|^2} \\ &\leq \frac{H(m + \theta)(1 + \Lambda |\nabla v(x)|^2)}{1 + \Lambda |\nabla v(x)|^2} + \frac{a(x)m}{\tilde{a}(x)} \\ &\leq H(m + \theta) + 1 \equiv C(m, \theta). \end{aligned}$$

Da definição de  $b(t)$  temos

$$b_t(x)(\tilde{a}(x) + \Lambda |\nabla v(x)|^2) - (1-t)(a(x) - 1)v(x). \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.10), ficamos com

$$\Delta v - [t + (1-t)a]v + (1-t)(a-1)v = b_t(x)[\tilde{a}(x) + \Lambda |\nabla v|^2] \quad \text{em } \Omega,$$

isto é,

$$\Delta v - v = bt(x)[\tilde{a}(x) + \Lambda |\nabla v|^2] \quad \text{em } \Omega. \quad (2.16)$$

Por outro lado, observando que  $\tilde{a} \in L^s(\Omega)$  segue do Teorema B.17 que o problema

$$\begin{cases} \Delta z - z = b_t(x)\tilde{a}(x) & \text{em } \Omega, \\ z = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.17)$$

tem uma única solução  $z \in W^{2,s}(\Omega)$ . Além disso,

$$\|z\|_{2,s} \leq C \|b_t q\|_s \leq C_1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.18)$$

Considere  $w = v - z$  e defina

$$\beta_t(x) = \frac{\Lambda b_t(x) |\nabla(w+z)|^2}{1 + |\nabla w|^2}$$

De (2.16) e (2.17) segue que

$$\begin{cases} \Delta w - w = \beta_t(x)(1 + |\nabla w|^2) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que, agora, que para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $\beta_t$  é uniformemente limitada em  $\Omega$ .

Com efeito, por (2.18) segue que

$$\begin{aligned} |\beta_t(x)| &= \frac{\Lambda b_t(x) |\nabla(w+z)|^2}{1 + |\nabla w|^2} \\ &\leq 4\Lambda |b_t(x)| \left( \frac{|\nabla w|^2}{1 + |\nabla w|^2} + \frac{|\nabla z|^2}{1 + |\nabla w|^2} \right) \\ &\leq 4\Lambda |b_t(x)| (1 + |\nabla z|^2) \\ &\leq \Lambda \tilde{C}(m, \theta). \end{aligned}$$

mostrando que  $\beta_t \in L^\infty(\Omega)$ . Pelo Teorema B.18 devido à Amann e Grandall existe uma constante positiva  $C_2$  independente de  $t \in [0, 1]$  tal que

$$\|w\|_{2,s} \leq C_2.$$

Portanto,

$$\|v\|_{2,s} = \|w+z\|_{2,s} \leq \|w\|_{2,s} + \|z\|_{2,s} \leq C_1 + C_2.$$



Uma vez que  $p > N$ , segue do Teorema B.13 que existe  $\nu \in (0, 1)$  tal que

$$\|v\|_{C^{1,\nu}(\bar{\Omega})} \leq M_0, \quad (2.19)$$

para algum  $M_0$  independente de  $t$ . Mostrando a limitação uniforme em  $C^{1,\nu}(\bar{\Omega})$ .

Para concluir, para cada  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  considere o seguinte problema linear

$$\begin{cases} \Delta w - [t + (1-t)a]w &= t[h_\theta(x, Tv, \nabla v) - Tv] & \text{em } \Omega, \\ w &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.20)$$

Segue do Teorema B.19 que o problema (2.20) tem solução única  $w \in W^{2,s}(\Omega)$ . Dessa forma, podemos definir o seguinte operador

$$\begin{aligned} S : C^1(\bar{\Omega}) \times [0, 1] &\rightarrow W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega}), \\ (v, t) &\mapsto S(v, t) := w \end{aligned}$$

em que  $w$  é a única solução associada ao problema (2.20).

Por unicidade de solução vem que

$$S(v, 0) = 0.$$

Ainda do Teorema B.19 temos que  $S : C^1(\bar{\Omega}) \times [0, 1] \rightarrow C^1(\bar{\Omega})$  é um operador contínuo e compacto. Desde que,

$$\|v\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq M_0, \quad t \in [0, 1]$$

para toda  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  verificando  $S(v, t) = v$ . Segue do Teorema do Ponto Fixo de Leray - Schauder<sup>3</sup> que a equação  $S(v, 1) = v$  tem uma solução  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ . Sendo  $S(C^1(\bar{\Omega}) \times [0, 1] \subset W^{2,s}(\Omega))$ , vem que  $v \in W^{2,s}(\Omega)$  e satisfaz

$$\begin{cases} \Delta v - v &= h_\theta(x, Tv, \nabla v) - Tv & \text{em } \Omega, \\ v &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, com o mesmo raciocínio utilizado para provar que  $v_M \leq v \leq v^M$  mostramos que

$$\underline{v} \leq v \leq \bar{v}. \quad (2.21)$$

---

<sup>3</sup>Ver Teorema B.20

o que implica que  $Tv = v$  de onde segue que  $v$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta v = h_\theta(x, v, \nabla v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.22)$$

De (2.21), (2.22) e das definições de  $h_\theta, v, \underline{v}$  e  $\bar{v}$  concluímos que  $u = v + \theta$  é solução de

$$\begin{cases} \Delta v = h(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

com  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ , como queríamos demonstrar. ■

### 2.1.2 Um Resultado Auxiliar

A seguir um resultado com condição de fronteira.

**Proposição 2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado. Suponha que  $p, q \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  sejam funções não-negativas e  $1 \leq a \leq 2$ . Suponha ainda que  $p > 0$ ,  $f$  satisfaz  $(f_1)$  e  $g \in C(\partial\Omega)$  é uma função positiva. Então, o problema*

$$\begin{cases} \Delta u + q(x) |\nabla u|^a = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.23)$$

*tem uma única solução clássica.*

#### Demonstração.

Desde que  $g$  é contínua no compacto  $\partial\Omega$ , existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$|g(x)| \leq c \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (2.24)$$

Considere  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > c$  e defina a função

$$\begin{aligned} \bar{u} : \bar{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \bar{u}(x) = n_0 \end{aligned}$$

Note que  $\bar{u}$  é uma supersolução do problema (2.23). Com efeito, sendo  $p$  e  $f$  são não-negativas, temos

$$\Delta \bar{u} + q(x) |\nabla \bar{u}|^a = 0 \leq p(x)f(\bar{u}(x)) \quad \text{em } \Omega. \quad (2.25)$$

Por (2.24) e (2.25), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{u} + q(x) |\nabla \bar{u}|^a \leq p(x)f(\bar{u}) \text{ em } \Omega, \\ \bar{u} \geq g \text{ em } \partial\Omega, \\ \bar{u} \geq 0, \bar{u} \neq 0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right.$$

isto é,  $\bar{u}$  é uma supersolução de (2.23).

Agora, encontraremos uma subsolução para o problema (2.23). Para tanto, iremos considerar o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = p(x)f(u) \text{ em } \Omega, \\ u = g \text{ em } \partial\Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

Segue da Proposição 1.1 e da Observação 1.2 que o problema acima tem uma única solução  $\underline{u} \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$  a qual é positiva. Observe que  $\underline{u}$  é uma subsolução do problema (2.23). De fato, uma vez que

$$\Delta \underline{u} = p(x)f(\underline{u}) \text{ em } \Omega,$$

e  $q \geq 0$ , temos

$$\Delta \underline{u} + q(x) |\nabla \bar{u}|^a \geq p(x)f(\underline{u}) \text{ em } \Omega.$$

Consequentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \underline{u} + q(x) |\nabla \bar{u}|^a \geq p(x)f(\underline{u}) \text{ em } \Omega, \\ \underline{u} \leq g \text{ em } \partial\Omega, \\ \underline{u} \geq 0, \underline{u} \neq 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

ou seja, é uma subsolução do problema (2.23).

Agora, mostraremos que sem perda de generalidade podemos substituir a condição de fronteira por  $g = 0$ . Para isso, considere o seguinte problema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u - \alpha u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = g \text{ em } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (2.26)$$

onde  $\alpha$  uma constante positiva. Segue de um Teorema Schauder que o problema acima tem uma única solução  $w \in C^{2,\lambda}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  para algum  $0 < \lambda \leq 1$ .

Defina

$$h_0 : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \xi, \eta) \mapsto h_0(x, \xi, \eta) = h(x, \xi + w(x), \eta + \nabla w(x)) - \alpha w(x),$$

onde  $h(x, \xi, \eta) = p(x)f(\xi) - q(x) |\eta|^a$ . Então, uma função  $u$  é solução de (2.23) se, e somente se,  $v = u - w$  é solução de

$$\begin{cases} \Delta v = h_0(x, v, \nabla v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.27)$$

Com efeito, por (2.26) se  $u$  é solução de (2.23), então

$$u - w = g - g = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (2.28)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} h_0(x, v, \nabla v) &= h(x, v + w(x), \nabla v(x) + \nabla w(x)) - \alpha w(x) \\ &= h(x, u, \nabla u) - \alpha w(x) \\ &= \Delta u - \Delta w \\ &= \Delta(u - w) \quad \text{em } \Omega, \end{aligned}$$

isto é,

$$\Delta v = h_0(x, v, \nabla v) \quad \text{em } \Omega. \quad (2.29)$$

Por (2.28) e (2.29), concluímos que  $v = u - w$  é solução de (2.27).

Reciprocamente, por (2.26) se  $u - w$  é solução de (2.27), então

$$u = (u - w) + w = g \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (2.30)$$

Ademais,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta((u - w) + w) \\ &= \Delta(u - w) + \Delta w \\ &= h_0(x, u - w, \nabla(u - w)) + \Delta w \\ &= h(x, u, \nabla u) \quad \text{em } \Omega, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta u = h(x, u, \nabla u) \quad \text{em } \Omega. \quad (2.31)$$

Segue de (2.30) e (2.31) que  $u$  é solução de (2.23).

Por outro lado,  $u$  é subsolução (supersolução) de (2.23) se, e somente se,  $u - w$  é subsolução (supersolução) de (2.27).

De fato, por (2.26) se  $u$  é subsolução de (2.23), então

$$v = u - w \leq g - g = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (2.32)$$

Observe também que

$$\begin{aligned} h_0(x, v, \nabla v) &= h(x, v + w(x), \nabla v + \nabla w(x)) - \alpha w(x) \\ &= h(x, u, \nabla u) - \alpha w(x) \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

e daí, uma vez que  $u$  é subsolução de (2.23),

$$h_0(x, v, \nabla v) \leq \Delta u - \Delta w = \Delta v \quad \text{em } \Omega, \quad (2.33)$$

Por (2.32) e (2.33), segue que  $v = u - w$  é subsolução de (2.27).

Com um procedimento inteiramente análogo mostramos que  $u$  é supersolução de (2.23) se, e somente se,  $u - w$  é supersolução de (2.27). Ademais, não é difícil notar que uma subsolução  $\underline{u}$  e uma supersolução  $\bar{u}$  de (2.23) estão ordenadas<sup>4</sup> se, e somente se,  $\underline{u} - w$  e  $\bar{u} - w$  estão ordenadas com relação ao problema (2.27).

Desde que  $h_0$  dada por

$$h_0(x, \xi, \eta) = h(x, \xi + w(x), \eta + \nabla w(x)) - \alpha w(x)$$

satisfaz as mesmas condições de regularidade e crescimento de  $h$ , sem perda de generalidade, podemos assumir  $g = 0$  em (2.23).

Escolha  $n_0$  suficientemente grande de modo que  $\underline{u}$  e  $\bar{u}$  estejam ordenadas. Desde que,  $\underline{u}, \bar{u} \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ , em particular,  $\underline{u}, \bar{u} \in W^{2,s}(\Omega)$ . Segue do Teorema 2.1 que existe  $u \in W^{2,s}(\Omega)$  tal que  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ , solução de (2.23). Iremos verificar que  $u \in C^{2,\beta} \cap C(\bar{\Omega})$

---

<sup>4</sup>No sentido de que  $\underline{u} \leq \bar{u}$ .

para algum  $0 < \beta \leq 1$ , mostrando que  $u$  é solução clássica do problema (2.23). Para tanto considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta w = h_0(x, u(x), \nabla u(x)) & \text{em } \Omega, \\ w = u & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.34)$$

em que  $h_0(x, u(x), \nabla u(x)) = p(x)f(u(x)) - q(x) |\nabla u(x)|^a$ .

Pelo Teorema B.25 de Ladyzenskaya e Ural'tseva de estimativa interior do gradiente, para  $\Omega_1 \subset\subset \Omega$  existe uma constante positiva  $C_1$  tal que

$$\max_{x \in \Omega_1} |\nabla u(x)| \leq C_1 \max_{x \in \Omega} |u(x)|. \quad (2.35)$$

Sendo  $u \leq \bar{u}$  em  $\Omega$ , vem

$$C_1 \max_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C_1 \max_{x \in \Omega} |\bar{u}(x)| < C_1 \|\bar{u}\|_\infty. \quad (2.36)$$

Por (2.35) e (2.36), segue que  $|\nabla u|^a \in L^\infty(\Omega_1)$  o que implica  $h_0 \in L^\infty(\Omega_1)$ , em particular,  $h_0 \in L^s(\Omega_1)$  para todo  $s \geq 1$ . Assim, pelo Teorema B.11 concluímos que  $u \in W^{2,s}(\Omega_1)$  para todo  $s \geq 1$ . Escolhendo  $q > N$  e aplicando o pelo Teorema de Imersões<sup>5</sup>, existe  $0 < \beta < 1 - \frac{N}{q}$  tal que  $u \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ . Considerando, o problema

$$\begin{cases} \Delta w = h_0(x, u(x), \nabla u(x)) & \text{em } \Omega, \\ w = u & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.37)$$

Segue que  $h_0 \in C^{0,\beta}(\Omega)$  e pelo Teorema de Schauder o problema acima tem uma solução  $w \in C^{2,\beta}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , e por unicidade  $u \in C^{2,\beta}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Portanto,  $u$  é uma solução clássica de (2.27), conseqüentemente  $u$  é solução clássica de (2.23).

Por fim, mostraremos a unicidade da solução. Sejam  $u_1$  e  $u_2$  soluções de (2.23). Afirmamos que

$$u_1 = u_2 \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

Uma vez que  $u_1 = g = u_2$  na fronteira, basta mostrar

$$u_1 = u_2 \quad \text{em } \Omega.$$

Note que

$$u_1 \geq u_2 \quad \text{em } \Omega.$$

---

<sup>5</sup>Teorema B.13

De fato, suponha, por absurdo, que existe algum  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u_1(x_0) < u_2(x_0)$ . Logo,

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} \{u_2(x) - u_1(x)\} > 0$$

é atingido em algum ponto  $x_1 \in \Omega$ . Então,  $\nabla(u_2 - u_1)(x_1) = 0$  e  $\Delta(u_2 - u_1)(x_1) \leq 0$  daí

$$|\nabla u_2(x_1)|^a = |\nabla u_1(x_1)|^a. \quad (2.38)$$

Sendo  $f$  é crescente e  $p > 0$ , temos

$$p(x_0)(f(u_2(x_1)) - f(u_1(x_1))) > 0.$$

Assim,

$$0 \geq \Delta(u_2 - u_1)(x_1) \stackrel{(2.38)}{=} p(x_0)(f(u_2(x_1)) - f(u_1(x_1))) > 0$$

o que é um absurdo. Então,  $u_1 \geq u_2$  em  $\bar{\Omega}$ . Com um procedimento análogo verificamos que  $u_1 \geq u_2$  em  $\bar{\Omega}$ , e portanto,

$$u_1 = u_2 \quad \text{em} \quad \bar{\Omega}$$

■

## 2.2 Resultados de Existência de Solução Blow-up

Nesta seção, estudaremos a existência de solução Blow-up para o problema (2.1).

Considere as seguintes condições:

( $\bar{p}_1$ ) Para todo  $x_0 \in \Omega$  com  $p(x_0) = 0$ , existe um domínio  $\Omega_0 \ni x_0$  tal que  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$  e  $p > 0$  em  $\partial\Omega_0$ .

( $\bar{p}_1$ )' Existe uma sequência de domínios limitados  $(\Omega_n)_{n \geq 1}$  tal que  $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ ,

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \text{ e } (p_1) \text{ vale em } \Omega_n \forall n \geq 1.$$

( $\bar{p}_2$ )  $\int_0^{\infty} r\phi(r)dr < +\infty$ , onde  $\phi(r) = \max\{p(x); |x| = r\}$ .

### 2.2.1 Existência de Solução Blow-up para Domínios Limitados

No que segue, sejam  $p, q$  e  $f$  funções satisfazendo as condições  $(p_1), (p_2), (f_1), (f_2)$  e  $(KO)$ , respectivamente.

**Teorema 2.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado. Se  $p$  satisfaça  $(\bar{p}_1)$ , então, o problema (2.1) tem uma solução Blow-up a qual é positiva.*

**Demonstração.**

Pela Proposição 2.1, para cada  $n \in \mathbb{N}$  o problema

$$\begin{cases} \Delta v_n + q(x) |\nabla v_n|^a = \left[ p(x) + \frac{1}{n} \right] f(v_n) & \text{em } \Omega, \\ v_n = n & \text{em } \partial\Omega, \\ v_n \geq 0, v_n \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução  $v_n$  positiva.

Note que a sequência  $(v_n)_{n \geq 1}$  é não-decrescente em  $\Omega$ . De fato, seja  $k' = \|p\|_\infty + 1$  e considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta \zeta + q(x) |\nabla \zeta|^a = k' f(\zeta) & \text{em } \Omega, \\ \zeta = 1 & \text{em } \partial\Omega, \\ \zeta > 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.39)$$

A Proposição 2.1 assegura que o problema (2.39) tem uma única solução, pois  $f$  é crescente e  $k' > 0$ .

Observe que

$$0 < \zeta \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots, \quad \text{em } \Omega. \quad (2.40)$$

De fato, suponha, por absurdo, que existe algum  $x_0 \in \Omega$  tal que  $v_1(x_0) < \zeta(x_0)$ . Logo,

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} \{ \zeta(x) - v_1(x) \}$$

é atingido em algum ponto  $x_1 \in \Omega$ , pois (2.40) é satisfeita em  $\partial\Omega$ . Então,

$$\nabla(\zeta - v_1)(x_1) = 0 \quad \text{e} \quad \Delta(\zeta - v_1)(x_1) \leq 0.$$

Assim,

$$|\nabla \zeta(x_1)|^a = |\nabla v_1(x_1)|^a. \quad (2.41)$$



Sendo  $f$  crescente,

$$(p(x_1) + 1)(f(\zeta(x_1)) - f(v_1(x_1))) > 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta - v_1)(x_1) &= k'f(\zeta(x_1)) - q(x_1) |\nabla\zeta(x_1)|^a + \\ &\quad - \left[ (p(x_1 + 1)f(v_1(x_1))) - q(x_1) |\nabla v_1(x_1)|^a \right] \\ &= k'f(\zeta(x_1)) - [p(x_1) + 1]f(v_1(x_1)) \geq (p(x_1) + 1)[f(\zeta(x_1)) - f(v_1(x_1))] > 0. \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Então,  $v_1 \geq \zeta$  em  $\bar{\Omega}$ . De maneira analoga, mostramos que  $v_n \leq v_{n+1}$  em  $\Omega$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Agora, mostraremos que dado  $x_0 \in \Omega$  existem um aberto  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  com  $x_0 \in \Omega_0$  e  $M_0 = M_0(x_0) > 0$  tais que para  $n \geq 1$ ,

$$v_n \leq M_0 \quad \text{em } \Omega_0.$$

De fato, seja  $x_0 \in \Omega$ . Analizaremos os seguintes casos:

- (i)  $p(x_0) > 0$ ;
- (ii)  $p(x_0) = 0$ .

**Caso (i)**

Sendo  $p \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  existe  $r > 0$  tal que

$$p(x) > 0 \quad \text{em } \overline{B(x_0, r)} \quad \text{com } B(x_0, r) \subset\subset \Omega.$$

Defina

$$m_0 = \min_{x \in B(x_0, r)} p(x).$$

Seja  $v$  solução clássica Blow-up<sup>6</sup> do problema

$$\begin{cases} \Delta z + |q|_{\infty} |\nabla z|^a = m_0 f(z) & \text{em } B(x_0, r), \\ z > 0 & \text{em } B(x_0, r), \end{cases} \quad (2.42)$$

Considere para cada  $n \in \mathbb{N}$  o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u + q(x) |\nabla u|^a = m_0 f(u) & \text{em } B(x_0, r), \\ u = n & \text{em } \partial B(x_0, r). \end{cases} \quad (P_n)$$

---

<sup>6</sup>A existência de tal solução é assegurada por um resultado encontrado em [6] com a mudança de variável  $z(x) = u(\|q\|_{\infty}^{\frac{1}{2-a}} x)$ .

Segue da Proposição 2.1 que o problema  $(P_n)$  tem uma solução  $w_n$ . Com os mesmos argumentos usados para mostrar a unicidade da solução na Proposição 2.1, verificamos que

$$w_n(x) \leq w_{n+1}(x) \leq v(x), \quad x \in B(x_0, r).$$

Logo, podemos definir  $w(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(x)$ . Mostraremos que tal limite é uniforme em subconjuntos compactos. Para isso considere  $\Omega_1$  um subconjunto compactamente contido em  $B(x_0, r)$ . Assim,

$$w_n \in L^\infty(\overline{\Omega}_1). \quad (2.43)$$

Pelo Teorema B.25 de estimativas interiores do gradiente existe uma constante positiva  $c_1$  tal que para  $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$

$$\max_{x \in \overline{\Omega}_2} |\nabla w_n(x)| \leq c_1 \max_{x \in \overline{\Omega}_1} |w_n(x)|, \quad (2.44)$$

o que implica por (2.43) que  $h_n$  dada por

$$h_n(x) := m_0 f(w_n(x)) - q(x) |\nabla w_n|^a$$

pertence a  $L^\infty(\Omega_2)$ , em particular,  $h_n \in L^s(\Omega_2)$  para todo  $s \geq 1$ . Dessa forma, pelo Teorema de B.11  $w_n \in W^{2,s}(\Omega_2)$  para todo  $s \geq 1$  e existe uma constante positiva  $c_2$  tal que

$$\|w_n\|_{2,s,\Omega_3} \leq c_2 (\|w_n\|_{s,\Omega_2} + \|h_n(x)\|_{s,\Omega_2}), \quad \Omega_3 \subset\subset \Omega_2$$

donde segue que, existe  $c_3 > 0$  tal que

$$\|w_n\|_{2,s,\Omega_3} \leq c_3.$$

Além disso, escolhendo  $q > N$ , por Imersões temos  $w_n \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}_1)$  e existe  $c_4 > 0$  tal que

$$\|w_n\|_{C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}_1)} \leq c_4.$$

Conseqüentemente, pelo Teorema de estimativas interiores de Schauder  $w_n \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_4)$  com  $\overline{\Omega}_4 \subset \Omega_3$  e existe  $c_5 > 0$  tal que

$$\|w_n\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_4)} \leq c_5.$$

Uma vez que

$$C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_4) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega}_4)$$

compactamente, existe uma subsequência  $(w_{n_j})$  que converge em  $C^2(\Omega_4)$  uniformemente, isto é, existe  $\tilde{w} \in C^2(\Omega_4)$  tal que

$$w_{n_j} \rightarrow \tilde{w} \quad \text{em } C^2(\Omega_4). \quad (2.30)$$

Por unicidade de limite temos  $w = \tilde{w}$ . Portanto, por (2.42) segue que  $w$  é solução Blow-up do problema

$$\begin{cases} \Delta u + q(x) |\nabla u|^a = m_0 f(u) & \text{em } B(x_0, r) \\ u > 0 & \text{em } B(x_0, r) \end{cases}$$

Desde que  $v_n \leq w$  em  $B(x_0, r)^7$  e  $w$  é limitada em  $B(x_0, \frac{r}{2})$ , existem um aberto, à saber,  $\Omega_0 = B(x_0, \frac{r}{2})$  e  $M_0 = \sup_{\Omega_0} w$ , tal que

$$v_n(x) \leq w(x) \leq M_0 \quad \text{em } B(x_0, \frac{r}{2}).$$

**Caso (ii)**

Por hipótese, existe  $\Omega_0$ , com  $x_0 \in \Omega_0$  e  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  tal que  $p > 0$  em  $\partial\Omega_0$ . Dado  $x \in \partial\Omega_0$ , temos  $p(x) > 0$  e pelo Caso (i), existem  $B(x, r_x) \subset\subset \Omega$  e uma constante  $M_x > 0$  tais que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$v_n \leq M_x \quad \text{em } B(x, \frac{r_x}{2}).$$

Uma vez que  $(B(x, \frac{r_x}{2}))_{x \in \partial\Omega_0}$  é uma cobertura aberta para  $\partial\Omega_0$  que é compacta, podemos extrair uma cobertura finita  $B(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}), B(x_2, \frac{r_{x_2}}{2}), \dots, B(x_{k_0}, \frac{r_{x_{k_0}}}{2})$ .

Considerando

$$M_0 = \max\{M_{x_1}, \dots, M_{x_{k_0}}\},$$

temos

$$v_n \leq M_0 \quad \text{em } \partial\Omega_0 \quad \forall n \geq 1.$$

Com o mesmo procedimento que vem sendo usado concluímos que  $v_n \leq M_0$  em  $\Omega_0$ .

Uma vez que para cada  $x \in \bar{\Omega}$  a sequência  $(v_n(x))$  é limitada, podemos definir

$$\begin{aligned} v : \bar{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto v(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>A verificação segue de modo similar como na demonstração do Proposição 2.1

Mostraremos que

$$\lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} v(x) = +\infty.$$

Para isso, considere o seguinte problema linear

$$\begin{cases} -\Delta z = p(x) & \text{em } \Omega, \\ z = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ z > 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Desde que  $p \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  pelo Teorema de Schauder o problema acima tem uma única solução  $z \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

Pelo Lema 1.1 do Capítulo 1 a função

$$\begin{aligned} h : (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto h(r) = \int_r^\infty \frac{dt}{f(t)} \end{aligned}$$

está bem definida.

Note que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$

$$h(v_n(x)) \leq \epsilon \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} + z(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.45)$$

Com efeito, observe que (2.45) ocorre em  $\partial\Omega$ , pois para todo  $x \in \partial\Omega$ , temos

$$h(v_n(x)) = h(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(v_n(x)) = 0 = z(x).$$

Considere  $R > 0$  de modo que  $\bar{\Omega} \subset B(0, R)$ . Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , à saber,

$$n_0 > \frac{1}{\epsilon(N-3)(1+R^2)^{-\frac{3}{2}} + 3\epsilon(1+R^2)^{-\frac{5}{2}}}, \quad (2.46)$$

tal que

$$h(v_n(x)) < \epsilon \left(1 + R^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

o que implica

$$h(v_n(x)) < \epsilon \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} + z(x) \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (2.47)$$

Suponha, por absurdo, que (2.45) não ocorra em  $\Omega$ . Dessa forma, existem  $\epsilon_0 > 0$ ,  $x_0 \in \Omega$  e  $n' \geq n_0$  tais que

$$h(v_{n'}(x_0)) - z(x_0) - \epsilon_0 \left(1 + |x_0|^2\right)^{-\frac{1}{2}} > 0.$$

De (2.47), deve existir  $x_1 \in \Omega$  tal que

$$h(v_{n'}(x_1)) - z(x_1) - \epsilon_0 \left(1 + |x_1|^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \max\{h(v_{n'}(x)) - z(x) - \epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

Daí,

$$\Delta \left[ h(v_{n'}(x)) - z(x) - \epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} \leq 0. \quad (2.48)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta \left[ h(v_{n'}(x)) - z(x) - \epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} &= \left[ \frac{f(v_{n'}(x))}{[f(v_{n'}(x))]^2} |v_{n'}(x)|^2 - \frac{1}{n} \right. \\ &\quad \left. + q(x) \frac{|\nabla v_{n'}|^a}{f(v_{n'})} + (N-3) \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{5}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} \\ &= \left[ q(x) \frac{|\nabla v_{n'}|^a}{f(v_{n'})} \right] \Big|_{x=x_1} + \frac{f(v_{n'}(x_1))}{[f(v_{n'}(x_1))]^2} \\ &\quad |v_{n'}(x_1)|^2 + \epsilon_0 (N-3) \left(1 + |x_1|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad + \epsilon_0 3 \left(1 + |x_1|^2\right)^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{n} > 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo com (2.48).

Desde que  $\epsilon > 0$  foi arbitrário, passando ao limite em (2.45) quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos

$$h(v_n(x)) \leq z(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

para todo  $n$  suficientemente grande, o que implica

$$h(v(x)) \leq z(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Então

$$0 \leq \lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} h(v(x)) \leq \lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} z(x) = 0.$$

isto é,

$$\lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} h(v(x)) = 0$$

mostrando que

$$\lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} v(x) = +\infty$$

■

### 2.2.2 Existência de Solução Blow-up para Domínios Ilimitados

O próximo resultado mostra a existência de solução Blow-up quando  $\Omega = \mathbb{R}^N$ .

**Teorema 2.3.** *Suponha que  $p$  satisfaça a condição  $(\bar{p}_1)'$ . Então, existe uma solução  $U$  do problema (2.1) a qual é maximal. Além disso, se  $p$  também verifica a condição  $(\bar{p}_2)$ , então  $U$  é uma solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$ .*

**Demonstração.**

Segue do Teorema 2.1 e da hipótese  $(\bar{p}_1)'$  que para cada  $n \in \mathbb{N}$  o problema

$$\begin{cases} \Delta v + q(x) |\nabla v|^a = p(x)f(v) & \text{em } \Omega_n \\ v > 0 & \text{em } \Omega_n \end{cases} \quad (2.49)$$

tem uma solução  $v_n$  Blow-up em  $\Omega_n$ .

Desde que  $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$  podemos aplicar os mesmos argumentos que vem sendo usados para verificamos que dado  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$x_0 \in \Omega_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim

$$0 < v_n(x_0) \leq \dots \leq v_{n_0+1}(x_0) \leq v_{n_0}(x_0), \quad \forall n \geq n_0. \quad (2.50)$$

Logo, podemos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x). \end{aligned}$$

Seja  $\Omega'_1 \subset \mathbb{R}^N$ . Por  $(p_1)'$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\Omega'_1 \subset \Omega_n, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Por (2.50)

$$v_n \in L^\infty(\overline{\Omega'_1}). \quad (2.51)$$

Segue do Teorema de Ladyzenskaya e Ural'tseva<sup>8</sup> de estimativa interior do gradiente que existe uma constante positiva  $c_1$  tal que para  $\Omega'_2 \subset\subset \Omega'_1$

$$\max_{x \in \Omega'_2} |\nabla v_n(x)| \leq c_1 \max_{x \in \Omega'_1} |v_n(x)|, \quad (2.52)$$

o que implica por (2.51) que  $h_n$  dada por

$$h_n(x) := m_0 f(v_n(x)) - q(x) |\nabla v_n|^a$$

pertence a  $L^\infty(\Omega'_2)$ , em particular,  $h_n \in L^s(\Omega'_2)$  para todo  $s \geq 1$ . Pelo Teorema de Agmon, Douglis e Nirenberg,  $v_n \in W^{2,s}(\Omega'_2)$  para todo  $s \geq 1$  e existe uma constante positiva  $c_2$  tal que

$$\|v_n\|_{2,s,\Omega'_3} \leq c_2 (\|v_n\|_{s,\Omega'_2} + \|h_n(x)\|_{s,\Omega'_2}),$$

isto é,  $\|v_n\|_{2,s,\Omega'_3}$  é uniformemente limitada.

Escolhendo  $p > N$  e aplicando o Teorema B.13 segue que  $\|v_n\|_{C^{1,\gamma}(\overline{\Omega'_3})}$  é uniformemente limitada. Consequentemente, pelo Teorema de estimativas interiores de Schauder  $v_n \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega'_4})$  para algum  $0 < \gamma < 1$  e existe  $c_3 > 0$  tal que

$$\|v_n\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega'_4})} \leq c_3 (\|h_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega'_3})} + \|v_n\|_{C^{0,\gamma}(\Omega'_3)}). \quad (2.53)$$

Segue de (2.53) que existe  $c_4 > 0$  tal que

$$\|v_n\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega'_4})} \leq c_4. \quad (2.54)$$

Uma vez que

$$C^{2,\gamma}(\overline{\Omega'_4}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega'_4})$$

compactamente, existe uma subsequência  $(v_{n_j})$  que converge em  $C^2(\Omega'_4)$  uniformemente, isto é, existe  $\tilde{U} \in C^2(\Omega_4)$  tal que

$$v_{n_j} \rightarrow \tilde{U} \quad \text{em} \quad C^2(\Omega'_4). \quad (2.55)$$

---

<sup>8</sup>Ver Teorema B.25

Por unicidade de limite  $U = \tilde{U}$ . Portanto,  $U \in C_{loc}^{2,\gamma}(\mathbb{R}^N)$  e por (2.49) concluímos que  $U$  é solução do problema (2.1).

Mostraremos agora que  $U$  é solução maximal de (2.1). Para tanto, note que dada uma solução  $u$  de (2.1), temos pelos argumentos que vem sendo usados que

$$u(x) \leq v_n \quad \text{em} \quad \Omega_n.$$

Por  $(p_1)'$  dado  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$u(x_0) \leq v_n(x_0) \quad \text{em} \quad \Omega_n \quad \forall n \geq n_0,$$

o que implica

$$u(x_0) \leq U(x_0).$$

Segue da arbitrariedade de  $x_0$  que

$$u(x) \leq U(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Por fim, suponha que  $p$  satisfaça  $(p_2)$ . Mostraremos que  $U$  é Blow-up no  $\mathbb{R}^N$ . Para tanto considere o problema

$$\begin{cases} \Delta w = p(x)f(w) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ w \geq 0, w \neq 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Segue do Teorema 1.3 que o problema acima tem uma solução maximal  $V$  Blow-up. Assim sendo, para concluir a demonstração do teorema, basta verificar que dado  $\epsilon > 0$

$$V(x) \leq v_n(x) + \epsilon \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall x \in \Omega_n, \quad \forall n \geq 1. \quad (2.56)$$

De fato, por (2.56) teríamos

$$V(x) \leq v_n(x) \quad \text{em} \quad \Omega_n \quad \forall n \geq 1,$$

e portanto,

$$V(x) \leq U(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Dessa forma, verifiquemos (2.56). Suponha, por absurdo, que existe  $\epsilon_0 > 0$  e um ponto  $x_0 \in \Omega$  tal que

$$V(x_0) > v_n(x_0) + \epsilon_0 \left(1 + |x_0|^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$



Uma vez que a desigualdade (2.56) se verifica em  $\partial\Omega_n$ , existe  $x_1 \in \Omega$  tal que

$$V(x_1) - v_n(x_1) - \epsilon_0 \left(1 + |x_1|^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \max_{x \in \bar{\Omega}} \left[ V(x) - v_n(x) - \epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Assim,

$$\Delta \left[ V(x) - v_n(x) - \epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} \leq 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta \left[ V(x) - v_n(x) - \epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} &= \Delta \left[ V(x_1) - v_n(x_1) \right] + \epsilon_0 (N-3) \left(1 + |x_1|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad + 3\epsilon_0 \left(1 + |x_1|^2\right)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\Delta \left[ V(x) - v_n(x) - \epsilon_0 \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=x_1} > 0,$$

pois

$$\Delta \left[ V(x_1) - v_n(x_1) \right] = p(x_1) \left[ f(V(x_1)) - f(v_n(x_1)) \right] + q(x_1) |v_n(x_1)|^a,$$

o que é um absurdo. Portanto, vale (2.56), como queríamos demonstrar.  $\blacksquare$

Nosso próximo resultado assegura a existência de solução Blow-up para domínios ilimitados  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ . Omitiremos sua demonstração, pois é essencialmente a mesma do Teorema anterior.

**Corolário 2.1.** *Suponha que  $p$  satisfaça a condição  $(\bar{p}_1)'$  em  $\Omega$ . Então, existe uma solução  $U$  do problema (2.1) a qual é maximal. Além disso, se  $p$  também verifica a condição  $(\bar{p}_2)$ , então  $U$  é uma solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$ .*

A seguir, mostraremos a existência de solução Blow-up para um caso interessante de domínio ilimitado, à saber,  $\Omega = \mathbb{R}^N \cap \left(\overline{B(0, R)}\right)^c$ . Veremos que o problema (2.1) tem uma solução Blow-up na  $\partial B(0, R)$  e Blow-up no infinito.

**Teorema 2.4.** *Suponha que  $p$  satisfaça as condições  $(\bar{p}_1)'$  e  $(\bar{p}_2)$  no exterior de uma bola, isto é, em  $\Omega = \mathbb{R}^N \cap \left(\overline{B(0, R)}\right)^c$ , com  $\phi(r) = 0$  para  $r \in [0, R]$ . Então, o problema (2.1) tem uma solução  $U$  tal que*

$$\lim_{|x| \downarrow R} U(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty. \quad (2.57)$$

**Demonstração.**

Seja  $U$  uma solução<sup>9</sup> de (2.1). Mostraremos os limites em (2.57). Para isso, recorde que pelo Teorema 1.4 o problema

$$\begin{cases} \Delta w = p(x)f(w) & \text{em } \Omega, \\ w \geq 0, w \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

tem uma solução maximal  $V$  tal que

$$\lim_{|x| \downarrow R} V(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty.$$

Agora, basta notar que

$$V(x) \leq U(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Justificamos tal desigualdade com o mesmo raciocínio usado para mostrar a desigualdade (2.56), trocando  $v_n$  por  $U$  e  $\Omega_n$  por  $\Omega$ . ■

A seguir, uma condição necessária para a existência de solução Blow-up para o problema (2.1) sem a condição de Keller-Osermann. O Teorema 1.6 ainda continua sendo verdadeiro para o problema (2.1). Não faremos aqui sua demonstração, pois é inteiramente análoga a prova do Teorema 1.6. No entanto, devido a sua importância enunciamos:

**Teorema 2.5.** *Suponha que  $f$  satisfaça apenas a condição  $(f_1)$  e  $p \in C(\mathbb{R}^N)$  seja não-negativa satisfazendo  $(p_2)$ . Então,*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{f(t)} < +\infty$$

*é uma condição necessária para a existência de solução Blow-up de (2.1).*

---

<sup>9</sup>A existência de solução Maximal segue do Corolário 2.1.

## Capítulo 3

# Soluções Radiais do Tipo Blow-up para Sistemas Elípticos em $\mathbb{R}^N$

Nosso objetivo, no presente capítulo, é estudar a existência de solução radial positiva do tipo Blow-up para a seguinte classe de sistemas elípticos

$$\begin{cases} \Delta u = p(|x|)f_1(v)f_2(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \Delta v = q(|x|)g_1(v)g_2(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $N \geq 3$  e  $p, q, f_i, g_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  ( $i = 1, 2$ ) são funções contínuas.

Em [29], Lair e Wood mostraram que a equação

$$\Delta u = p(|x|)u^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (N \geq 3)$$

tem uma solução radial Blow-up não-negativa se, e somente se,  $p$  satisfaz

$$\int_0^{+\infty} \tau p(\tau) d\tau = +\infty. \quad (3.2)$$

No entanto, segundo Lair [27] não existe um resultado equivalente para sistemas com apenas essa hipótese, mas uma condição suficiente que assegura a existência de solução radial do tipo Blow-up ver ([29], [13]) é supor que  $p$  satisfaça (3.2) e  $q$  satisfaça

$$\int_0^{+\infty} \tau q(\tau) d\tau = +\infty. \quad (3.3)$$

Os mesmos autores também mostraram que se  $p$  e  $q$  satisfazem

$$(a) \int_0^{+\infty} \tau p(\tau) d\tau < +\infty \quad , \quad (b) \int_0^{+\infty} \tau q(\tau) d\tau < +\infty, \quad (3.4)$$

então o sistema (3.2) não tem solução radial Blow-up .

Baseado nos artigos [27] e [28], veremos resultados que analisam também os casos em que  $p$  e  $q$  satisfaçam as condições (3.4) (a) e (3.3), respectivamente, ou que  $p$  satisfaça (3.2) e que  $q$  satisfaça (3.4) (b).

A seguir definimos solução radial Blow-up para o sistema (3.1).

**Definição 3.1.** *Sejam  $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ . Dizemos que o par  $(u, v)$  é uma solução radial Blow-up para (3.1) se  $(u, v)$  satisfazem (3.1) e*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty. \quad (3.5)$$

### 3.1 Uma Condição Necessária e Suficiente para Existência de Solução Radial Não-Negativa no $\mathbb{R}^N$

Nesta seção, mostraremos alguns resultados de existência quando  $f_2, g_1 \equiv 1$ ,  $f_1 = v^\alpha$  e  $g_2 = u^\beta$ . Mais precisamente, mostraremos a existência de solução para o seguinte sistema

$$\begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^\alpha & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \Delta v = q(|x|)u^\beta & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.6)$$

em que  $\alpha, \beta$  são constantes positivas com  $\alpha\beta \leq 1$  e  $p, q : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  são funções contínuas.

No que segue, considere  $P, Q : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  funções dadas por

$$P(r) = \int_0^r \tau p(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad Q(r) = \int_0^r \tau q(\tau) d\tau.$$

**Lema 3.1.** *Se  $p$  e  $q$  satisfazem*

(i) (3.2) e (3.3), respectivamente, então

$$\int_0^{+\infty} tp(t) \left( t^{2-N} \int_0^t s^{N-3} Q(s) ds \right)^\alpha dt = +\infty \quad (3.7)$$

e

$$\int_0^{+\infty} tq(t) \left( t^{2-N} \int_0^t s^{N-3} P(s) ds \right)^\beta dt = +\infty. \quad (3.8)$$

(ii) (3.4), então (3.7) e (3.8) são falsas.

**Demonstração.**

(i) Com efeito, defina

$$\begin{aligned} G : (0, +\infty) &\rightarrow (0, +\infty) \\ r &\mapsto G(r) = r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} P(t) dt. \end{aligned}$$

Note que podemos escrever

$$G(r) = \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right) dt. \quad (3.9)$$

De fato, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} G(r) &= r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} P(t) dt \\ &= r^{2-N} \left[ \frac{r^{N-2}}{N-2} P(r) - \int_0^r \frac{t^{N-2}}{N-2} t p(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{N-2} \left[ \int_0^r t p(t) dt - r^{2-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) dt \right], \end{aligned}$$

Ou seja,

$$G(r) = \frac{1}{N-2} \left[ \int_0^r t p(t) dt - r^{2-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) dt \right]. \quad (3.10)$$

Por outro lado, novamente fazendo integração por partes, vem

$$\begin{aligned} \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right) dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^r \left( \frac{1}{2-N} \frac{d}{dt} t^{2-N} \right) \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right) dt \\ &= \frac{1}{2-N} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ t^{2-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right]_{\epsilon}^r - \int_{\epsilon}^r t^{2-N} t^{N-1} p(t) dt \\ &= \frac{1}{2-N} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \left( r^{2-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) dt - \epsilon^{2-N} \int_0^{\epsilon} t^{N-1} p(t) dt \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_{\epsilon}^r t p(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2-N} \left[ \left( r^{2-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) dt - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{2-N} \int_0^{\epsilon} t^{N-1} p(t) dt \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^r t p(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Desde que

$$\epsilon^{2-N} \int_0^{\epsilon} t^{N-1} p(t) dt = \int_0^{\epsilon} \frac{t^{N-1}}{\epsilon^{N-2}} p(t) dt$$

e

$$\int_0^\epsilon \frac{t^{N-1}}{\epsilon^{N-2}} p(t) dt \leq \int_0^\epsilon \frac{\epsilon^{N-1}}{\epsilon^{N-2}} p(t) dt,$$

segue que

$$0 < \epsilon^{2-N} \int_0^\epsilon t^{N-1} p(t) dt \leq \epsilon \int_0^\epsilon p(t) dt. \quad (3.11)$$

Daí, passando ao limite em (3.11) quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , concluímos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{2-N} \int_0^\epsilon t^{N-1} p(t) dt = 0,$$

o que implica

$$\int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right) dt = \frac{1}{N-2} \left( \int_0^r t p(t) dt - r^{2-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) dt \right). \quad (3.12)$$

Logo, (3.9) segue de (3.10) e (3.12).

De modo análogo, verificamos que a função

$$\begin{aligned} H : (0, +\infty) &\rightarrow (0, +\infty) \\ r &\mapsto H(r) = r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} Q(t) dt \end{aligned}$$

pode ser dada por

$$H(r) = \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} q(s) ds \right) dt. \quad (3.13)$$

Mostraremos que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} G(r) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} H(r) = +\infty. \quad (3.14)$$

se, e somente se, (3.2) e (3.3) valem, respectivamente. Verifiquemos apenas

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} G(r) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} P(r) = +\infty, \quad (3.15)$$

pois a prova da equivalência

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} H(r) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} Q(r) = +\infty.$$

é feita de modo análogo.

Suponha que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} G(r) = +\infty$ . Como  $p \geq 0$ , temos

$$\frac{1}{N-2} \left( \int_0^r t p(t) dt - r^{2-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) dt \right) \leq \frac{1}{N-2} \int_0^r t p(t) dt. \quad (3.16)$$

De (3.12) e (3.16), segue

$$\int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right) dt \leq \frac{1}{N-2} \int_0^r tp(t) dt. \quad (3.17)$$

Passando ao limite quando  $r \rightarrow +\infty$  em (3.17), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} G(r) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{N-2} \int_0^r tp(t) dt,$$

e, portanto,

$$\int_0^{\infty} tp(t) dt = +\infty.$$

Agora, suponha

$$\int_0^{+\infty} tp(t) dt = +\infty.$$

Seja  $0 < t \leq r$ . Por (3.12),

$$\int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right) dt = \frac{1}{N-2} \frac{1}{r^{N-2}} \int_0^r (r^{N-2} - t^{N-2}) tp(t) dt. \quad (3.18)$$

Desde que,

$$\frac{1}{r^{N-2}} \int_0^r (r^{N-2} - t^{N-2}) tp(t) dt \geq \frac{1}{r^{N-2}} \left[ r^{N-2} - \left(\frac{r}{2}\right)^{N-2} \right] \int_0^{\frac{r}{2}} tp(t) dt. \quad (3.19)$$

De (3.18) e (3.19), temos

$$\int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right) dt \geq \frac{1}{N-2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2} \right] \int_0^{\frac{r}{2}} tp(t) dt. \quad (3.20)$$

Passando ao limite em (3.20) quando  $r \rightarrow +\infty$ , concluimos

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} G(r) = +\infty. \quad (3.21)$$

mostrando (3.15). De maneira inteiramente análoga justificamos que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} H(r) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} Q(r) = +\infty. \quad (3.22)$$

Suponha que  $p$  e  $q$  satisfaçam (3.2) e (3.3), respectivamente. Por (3.21), existe  $B_1 > 0$  tal que  $r > B_1$  implica

$$G(r) > 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} tq(t) (G(t))^\beta dt &\geq \int_{B_1}^{+\infty} tq(t) (G(t))^\beta dt \\ &\geq \int_{B_1}^{+\infty} tq(t) dt \stackrel{(3.3)}{=} +\infty. \end{aligned}$$

Obtendo (3.8). Por outro lado, de (3.22) existe  $B_2 > 0$  tal que  $r > B_2$  implica

$$H(r) > 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} tp(t)(H(t))^\alpha dt &\geq \int_{B_2}^{+\infty} tp(t)(H(t))^\alpha dt \\ &\geq \int_{B_2}^{+\infty} tp(t)dt \stackrel{(3.2)}{=} +\infty. \end{aligned}$$

Obtendo (3.9).

(ii) Sejam  $M_1 = \int_0^{+\infty} \tau p(\tau)d\tau$  e  $M_2 = \int_0^{+\infty} \tau q(\tau)d\tau$ . Note que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} tq(t)(G(t))^\beta dt &\leq \int_0^{+\infty} tq(t) \left[ r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} \left( \int_0^{+\infty} \tau p(\tau)d\tau \right) dr \right]^\beta dt \\ &\leq M_1^\beta \int_0^{+\infty} tq(t) \left( r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} dr \right)^\beta dt \\ &\leq \frac{M_1^\beta}{(N-2)^\beta} \int_0^{+\infty} tq(t)dt = \frac{M_1^\beta}{(N-2)^\beta} M_2. \end{aligned}$$

De modo similar verificamos que

$$\int_0^{+\infty} tp(t)(H(t))^\alpha dt < +\infty.$$

Como queríamos demonstrar. ■

Nossos próximos dois resultados servirão de base para justificar a existência de solução para o sistema (3.6).

**Lema 3.2.** *Sejam  $a$  e  $b$  constantes não-negativas tais que  $a + b > 0$ . Suponha que  $p$ ,  $q$  sejam contínuas. Então, o sistema de equações integrais*

$$u(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v^\alpha(s) ds dt \quad (3.23)$$

$$v(r) = b + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) u^\beta(s) ds dt \quad (3.24)$$

tem uma solução.

**Demonstração.**

Sem perda de generalidade suponha que  $a \leq b$  e considere  $u_0 = a$  e  $v_0 = b$ . Defina indutivamente as sequências  $(u_n)$  e  $(v_n)$  por

$$u_n(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v_{n-1}^\alpha(s) ds dt \quad (3.25)$$



e

$$v_n(r) = b + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) u_n^\beta(s) ds dt. \quad (3.26)$$

Observe que

$$u_1(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) b^\alpha ds dt \geq a = u_0,$$

consequentemente

$$v_1(r) = b + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) u_1^\beta(s) ds dt \geq b = v_0.$$

Além disso,

$$u_1(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) b^\alpha ds dt \leq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v_1^\alpha(s) ds dt = u_2,$$

o que implica

$$v_1(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) u_1^\beta(s) ds dt \leq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) u_2^\beta(s) ds dt = v_2.$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, verificamos que para todo  $r \geq 0$

$$u_n(r) \leq u_{n+1}(r) \quad \text{e} \quad v_n(r) \leq v_{n+1}(r) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo em (3.26), concluímos que  $v_n'(r) \geq 0$ .

Assim,

$$\begin{aligned} u_n(r) &\stackrel{(3.27)}{\leq} a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v_n^\alpha(s) ds dt \\ &\stackrel{v_n'(r) \geq 0}{\leq} a + v_n^\alpha(r) \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right) dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$u_n(r) \leq a + v_n^\alpha(r) G(r), \quad (3.28)$$

onde  $G$  está definida no Lema 3.1. Consequentemente, de (3.26) e (3.28), vem

$$v_n(r) \leq b + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) \left[ a + v_n^\alpha(s) G(s) \right]^\beta ds dt.$$

Logo,

$$v_n(r) \leq b + \frac{1}{2-N} \int_0^r \frac{d}{dt} t^{2-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) 2^\beta \left[ a^\beta + v_n^{\alpha\beta}(s) G^\beta(s) \right] ds dt. \quad (3.29)$$

Integrando por partes (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} v_n(r) &\leq b + \frac{2^\beta}{N-2} \int_0^r \left(1 - \frac{t^{N-2}}{r^{N-2}}\right) tq(t) \left[ a^\beta + v_n^{\alpha\beta}(t) G^\beta(t) \right] dt \\ &\leq b + 2^\beta \int_0^r tq(t) \left[ a^\beta + v_n^{\alpha\beta}(t) G^\beta(t) \right] dsdt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$v_n(r) \leq b + 2^\beta \int_0^r tq(t) \left[ a^\beta + v_n^{\alpha\beta}(t) G^\beta(t) \right] dt. \quad (3.30)$$

Recorde que  $b \leq v_n(r)$  para  $n \geq 0$ . Desde que  $\alpha\beta \leq 1$  temos  $v_n(t)^{\alpha\beta-1} \leq b^{\alpha\beta-1}$  o que implica

$$v_n(t)^{\alpha\beta} \leq v_n(t) b^{\alpha\beta-1}. \quad (3.31)$$

Por (3.30) e (3.31), obtemos

$$v_n(r) \leq b + 2^\beta \int_0^r tq(t) \left[ a^\beta + v_n(t) b^{\alpha\beta-1} G^\beta(t) \right] dt,$$

de onde segue

$$v_n(r) \leq b + 2^\beta a^\beta \int_0^r tq(t) dt + 2^\beta \int_0^r tq(t) b^{\alpha\beta-1} G^\beta(t) v_n(t) dt, \quad (3.32)$$

Considere  $c_0 > r$ . Por (3.32),

$$v_n(r) \leq b + 2^\beta a^\beta \int_0^{c_0} tq(t) dt + \int_0^r 2^\beta tq(t) b^{\alpha\beta-1} G^\beta(t) v_n(t) dt.$$

Assim, existe uma constante positiva  $\bar{c}_0$  tal que

$$v_n(r) \leq \bar{c}_0 + \int_0^r tq(t) 2^\beta b^{\alpha\beta-1} G^\beta(t) v_n(t) dt \quad \forall r \in [0, c_0]. \quad (3.33)$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall<sup>1</sup> em (3.33), segue que existe uma constante positiva  $C$  tal que

$$v_n(r) \leq C e^{\int_0^r 2^\beta tq(t) b^{\alpha\beta-1} G^\beta(t) dt} \quad \forall r \in [0, c_0]. \quad (3.34)$$

Logo,  $(v_n)$  é uniformemente limitada em  $[0, c_0]$ . Consequentemente de (3.28), concluímos que  $(u_n)$  também é uniformemente limitada em  $[0, c_0]$ .

---

<sup>1</sup>Ver Teorema B.26 Apêndice B

Agora, mostraremos que  $(v_n), (u_n)$  são equicontínuas em  $[0, c_0]$ . Basta mostrar que existem constantes positivas  $K_{c_0}$  e  $K'_{c_0}$  tais que

$$|u'_n(r)| \leq K_{c_0} \quad \text{e} \quad |v'_n(r)| \leq K'_{c_0}.$$

Por (3.25) e (3.26), vem

$$u'_n(r) = r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) v_{n-1}^\alpha(t) dt \quad \text{e} \quad v'_n(r) = r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} q(t) u_n^\beta(t) dt. \quad (3.35)$$

Note que por (3.35), temos

$$\begin{aligned} |u'_n(r)| &\leq \int_0^r \left| \frac{t^{N-1}}{r^{N-1}} \right| \|p\|_\infty v_{n-1}^\alpha(t) dt \\ &\leq \int_0^r \|p\|_\infty v_{n-1}^\alpha(t) dt. \end{aligned}$$

Desde que  $v_n$  e  $u_n$  são uniformemente limitadas em  $[0, c_0]$ , existe  $M_{c_0} > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |u'_n(r)| &\leq \int_0^{c_0} \|p\|_\infty M_{c_0} dt \\ &\leq \|p\|_\infty M_{c_0} c_0 = K_{c_0}. \end{aligned}$$

De modo similar, verificamos que existe  $K'_{c_0} > 0$  tal que

$$|v'_n(r)| \leq K'_{c_0} \quad \text{em} \quad [0, c_0].$$

Por outro lado, dado  $\epsilon > 0$ , considere  $\delta = \frac{\epsilon}{K_{c_0} + K'_{c_0}}$ . Segue do Teorema do Valor Médio, que existem  $\theta_1, \theta_2 \in [0, c_0]$  tais que

$$|u_n(r) - u_n(s)| \leq u'_n(\theta_1) |r - s| \quad \text{e} \quad |v_n(r) - v_n(s)| \leq v'_n(\theta_2) |r - s|,$$

para  $|r - s| < \delta$ , temos

$$|u_n(r) - u_n(s)| \leq K_{c_0} \frac{\epsilon}{K_{c_0} + K'_{c_0}} \quad \text{e} \quad |v_n(r) - v_n(s)| \leq K'_{c_0} \frac{\epsilon}{K_{c_0} + K'_{c_0}},$$

o que implica

$$|u_n(r) - u_n(s)| < \epsilon \quad \text{e} \quad |v_n(r) - v_n(s)| < \epsilon.$$

mostrando que  $(v_n), (u_n)$  são equicontínuas em  $[0, c_0]$ .

Portanto, segue do Teorema de Ascoli-Arzelá que existem  $u_{c_0}, v_{c_0}$  e subsequências  $(v_{n_j}), (u_{n_l})$  tais que

$$u_{n_j} \rightarrow u_{c_0} \quad \text{e} \quad v_{n_l} \rightarrow v_{c_0}$$

uniformemente em  $[0, c_0]$ .

Note que, a menos de subsequências,

$$\begin{aligned} u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}, \dots &\longrightarrow u_1 && \text{em } [0, 1] \\ u_{2,3}, u_{2,4}, u_{2,5}, \dots &\longrightarrow u_2 && \text{em } [0, 2] \\ u_{3,4}, u_{3,5}, u_{3,6}, \dots &\longrightarrow u_3 && \text{em } [0, 3] \\ &&& \vdots \end{aligned}$$

tais que  $u_{j+1}|_{[0,j]} = u_j$ . Dessa forma, defina

$$\begin{aligned} u : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto u(r) = u_i \quad \text{quando } r \in [0, i] \end{aligned}$$

e observe que subsequência diagonal  $(u_{n,2n})$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) converge uniformemente para  $u$  em intervalos compactos.

Fazendo o mesmo procedimento com as subsequências  $(v_{n,j})$  encontramos uma função  $v$  a qual é limite uniforme em intervalos compactos. Desde que os limites são uniformes, concluímos por passagem ao limite em (3.25) e (3.26),

$$u(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v^\alpha(s) ds dt$$

e

$$v(r) = b + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) u^\beta(s) ds dt.$$

isto é, o par  $(u, v)$  é uma solução do sistema de equações integrais (3.23) e (3.24). ■

**Lema 3.3.** *Para quaisquer constantes não-negativas  $a$  e  $b$  com  $a + b > 0$  uma solução  $(u, v)$  do sistema de equações integrais (3.23) e (3.24) é uma solução radial do sistema (3.6). Uma solução radial de (3.6) é uma solução de (3.23) e (3.24) para uma escolha conveniente das constantes  $a$  e  $b$ .*

### Demonstração.

Seja  $(u, v)$  solução do sistema de equações integrais (3.23) e (3.24). Recorde que o laplaciano de uma função radial  $w$  é dado por

$$\Delta w = w'' + \frac{N-1}{r} w'.$$

Dessa forma, para mostrar que  $(u, v)$  é solução de (3.6), basta verificarmos que

$$p(r)v^\alpha(r) = u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) \quad \text{e} \quad q(r)u^\beta(r) = v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r).$$

Por (3.23), temos

$$u''(r) = (1-N)r^{-N} \int_0^r t^{N-1}p(t)v^\alpha(t)dt + p(r)v^\alpha(r) \quad (3.36)$$

Logo,

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) &= (1-N)r^{-N} \int_0^r t^{N-1}p(t)v^\alpha(t)dt + r^{1-N}r^{N-1}p(r)v^\alpha(r) + \\ &\quad + \frac{N-1}{r}r^{1-N} \int_0^r t^{N-1}p(t)v^\alpha(t)dt \\ &= p(r)v^\alpha(r). \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos

$$v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) = q(r)u^\beta(r),$$

ou seja, o par  $(u, v)$  é solução de (3.6).

Se  $(u, v)$  é solução do sistema (3.6), então existem constantes apropriadas  $a, b$  não-negativas com  $a + b > 0$  de modo que  $(u, v)$  também é solução de (3.23) e (3.24). Basta escolher  $a = u(0)$  e  $b = v(0)$ .

Com efeito, multiplicando ambos os membros de (3.23) por  $r^{N-1}$ , encontramos

$$r^{N-1}p(r)v^\alpha(r) = r^{N-1}\frac{N-1}{r}u'(r) + r^{N-1}u''(r)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} r^{N-1}\frac{N-1}{r}u'(r) + r^{N-1}u''(r) &= (N-1)r^{N-2}u'(r) + r^{N-1}u''(r) \\ &= \left(r^{N-1}u'(r)\right)', \end{aligned}$$

temos

$$p(r)v^\alpha(r) = \left(r^{N-1}u'(r)\right)'. \quad (3.37)$$

Integrando de 0 a  $r$  (3.37), concluímos pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$r^{N-1}u'(r) = \int_0^r s^{N-1}p(s)v^\alpha(s)ds,$$

isto é,

$$u'(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} v^\alpha(s) ds.$$

Integrando de 0 a  $r$  a igualdade acima, concluímos novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$u(r) - u(0) = \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v^\alpha(s) ds dt,$$

ou seja,

$$u(r) = u(0) + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v^\alpha(s) ds dt.$$

De maneira similar, concluímos

$$v(r) = v(0) + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) u^\beta(s) ds dt,$$

justificando que  $(u, v)$  também é solução de (3.23) e (3.24). Como queríamos demonstrar. ■

A seguir, o resultado mais importante desta seção. Mostramos uma condição necessária e suficiente para a existência de solução radial Blow-up do sistema (3.6).

**Teorema 3.1.** *Sejam  $p$  e  $q$  funções contínuas não-negativas. Então, o sistema (3.6) tem uma solução  $(u, v)$  radial Blow-up no  $\mathbb{R}^N$  se, e somente se, as funções  $p$  e  $q$  satisfazem as condições (3.7) e (3.8).*

### Demonstração.

Segue do Lema 3.3 que soluções radiais de (3.6) são soluções do sistema de equações integrais (3.23) e (3.24) as quais existem pelo Lema 3.2. Dessa forma, mostraremos que uma solução de (3.23) e (3.24) é uma solução Blow-up no  $\mathbb{R}^N$  se, e somente se, as funções  $p$  e  $q$  satisfazem as condições (3.7) e (3.8).

Estamos interessados em solução Blow-up, por esse motivo não vamos considerar o caso em que  $p$  e  $q$  satisfaçam (3.4) (Ver Teorema 1 em [13]). Nosso objetivo é estudar os casos onde as hipóteses são misturadas, isto é,

(i)  $p$  e  $q$  satisfaçam (3.4)-(a) e (3.3), respectivamente;

(ii)  $p$  e  $q$  satisfaçam (3.2) e (3.4)-(b), respectivamente.

Nesse sentido, também não vamos analisar o caso em que  $p$  e  $q$  satisfaçam (3.2) e (3.3), respectivamente, no entanto, podemos encontrar sua demonstração em [13] (Ver Teorema 1) ou em Lair & Wood [29].

Suponha, inicialmente, que  $p$  e  $q$  satisfazem as condições (3.7) e (3.8). Seja  $(u, v)$  uma solução de (3.6). Mostraremos que o par  $(u, v)$  é Blow-up.

**CASO (i):**

Sejam  $a$  e  $b$  como no Lema 3.2. Suponha, sem perda de generalidade, que  $a > 0$ . Desde que  $u(r) \geq a > 0$ ,

$$\begin{aligned} v(r) = b + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) u^\beta(s) ds dt &\geq b + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) a^\beta ds dt \\ &\geq a^\beta \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q(s) ds dt \\ &\geq \frac{a^\beta}{N-2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{N-2} \right] \int_0^{\frac{r}{2}} tq(t) dt. \end{aligned}$$

Então, passando ao limite na desigualdade acima quando  $r \rightarrow +\infty$  e usando a hipótese (3.3), concluimos

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) \geq \frac{a^\beta}{N-2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{N-2} \right] \int_0^{+\infty} tq(t) dt = +\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) = +\infty.$$

Agora, mostraremos que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = +\infty.$$

De (3.23), temos

$$u(r) = a + \frac{1}{2-N} \int_0^r \frac{d}{dt} t^{2-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v^\alpha(s) ds dt,$$

equivalentemente

$$u(r) = a + \frac{1}{2-N} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^r \frac{d}{dt} t^{2-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v^\alpha(s) ds dt.$$

Integrando por partes e aplicando a regra de L'Hôspital, obtemos

$$\begin{aligned} u(r) &= a + \frac{1}{2-N} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ t^{2-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v^\alpha(s) ds \right]_\delta^r - \frac{1}{2-N} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^r tp(t) v^\alpha(t) dt \\ &= a + \frac{1}{N-2} \int_0^r \left( 1 - \frac{t^{N-2}}{r^{N-2}} \right) tp(t) v^\alpha(t) dt. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$u(r) = a + \frac{1}{N-2} \int_0^r \left(1 - \frac{t^{N-2}}{r^{N-2}}\right) \left[ \frac{d}{dt} \int_0^t sp(s)v^\alpha(s) ds \right] dt.$$

Fazendo integração por partes, temos

$$\begin{aligned} u(r) &= a + \left\{ \left[ \left(1 - \frac{t^{N-2}}{r^{N-2}}\right) \int_0^t sp(s)v^\alpha(s) ds \right] \Big|_0^r \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N-2} \int_0^r \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{t^{N-2}}{r^{N-2}}\right) \int_0^t sp(s)v^\alpha(s) ds \right\} \\ &= a - \frac{1}{N-2} \int_0^r \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{t^{N-2}}{r^{N-2}}\right) \int_0^t sp(s)v^\alpha(s) ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(r) = a + r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} \int_0^t sp(s)v^\alpha(s) ds dt. \quad (3.38)$$

Analogamente, temos

$$v(r) = b + r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} \int_0^t sq(s)u^\beta(s) ds dt. \quad (3.39)$$

Desde que  $u(r) \geq a > 0$ , de (3.39) temos

$$v(r) = b + r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} \int_0^t sq(s)u^\beta(s) ds dt \geq b + a^\beta r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} \int_0^t sq(s) ds dt$$

ou seja,

$$v(r) \geq a^\beta r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} Q(t) dt. \quad (3.40)$$

Dessa forma, segue de (3.38) e (3.40) que

$$\begin{aligned} u(r) &\geq a + r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} \int_0^t sp(s) \left( a^\beta s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} Q(\xi) d\xi \right)^\alpha ds dt \\ &\geq a^{\alpha\beta} r^{2-N} \int_{\frac{r}{2}}^r t^{N-3} \int_0^t sp(s) \left( s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} Q(\xi) d\xi \right)^\alpha ds dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$u(r) \geq a^{\alpha\beta} r^{2-N} \int_{\frac{r}{2}}^r t^{N-3} \int_0^t sp(s) \left( s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} Q(\xi) d\xi \right)^\alpha ds dt. \quad (3.41)$$

Definindo

$$h(t) = \int_0^t sp(s) \left( s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} Q(\xi) d\xi \right)^\alpha ds, \quad (3.42)$$



segue do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$h'(t) = tp(t) \left( t^{2-N} \int_0^t s^{N-3} Q(s) \right) ds \geq 0. \quad (3.43)$$

Então, por (3.42) e (3.43), obtemos

$$h\left(\frac{r}{2}\right) \leq h(t) \quad \forall t \in \left[\frac{r}{2}, r\right]. \quad (3.44)$$

De (3.41) e (3.44) segue

$$\begin{aligned} u(r) &\geq a^{\alpha\beta} r^{2-N} \int_{\frac{r}{2}}^r t^{N-3} \int_0^{\frac{r}{2}} sp(s) \left( s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} Q(\xi) d\xi \right)^\alpha ds dt \\ &\geq a^{\alpha\beta} r^{2-N} \int_{\frac{r}{2}}^r t^{N-3} dt \int_0^{\frac{r}{2}} sp(s) \left( s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} Q(\xi) d\xi \right)^\alpha ds \\ &\geq \frac{a^{\alpha\beta}}{n-2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2} \right] \int_0^{\frac{r}{2}} sp(s) \left( s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} Q(\xi) d\xi \right)^\alpha ds, \end{aligned}$$

isto é,

$$u(r) \geq \frac{a^{\alpha\beta}}{n-2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2} \right] \int_0^{\frac{r}{2}} sp(s) \left( s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} Q(\xi) d\xi \right)^\alpha ds. \quad (3.45)$$

passando ao limite quando  $r \rightarrow +\infty$  em (3.45), obtemos por (3.7)

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) \geq \frac{a^{\alpha\beta}}{n-2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2} \right] \int_0^{+\infty} sp(s) \left( s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} Q(\xi) d\xi \right)^\alpha ds = +\infty.$$

**CASO (ii):**

Note que dado  $\epsilon > 0$ ,  $v(r) > 0$  para todo  $r \geq \epsilon$ , pois  $v'(r) \geq 0$ . Daí,

$$\begin{aligned} u(r) &\geq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) v^\alpha ds dt \\ &\geq a + \int_\epsilon^r t^{1-N} \int_\epsilon^t s^{N-1} p(s) v^\alpha ds dt \\ &\geq v(\epsilon)^\alpha \int_\epsilon^r t^{1-N} \int_\epsilon^t s^{N-1} p(s) ds dt \\ &\geq \frac{v(\epsilon)^\alpha}{N-2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2} \right] \int_\epsilon^{\frac{r}{2}} tp(t) dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(r) \geq \frac{v(\epsilon)^\beta}{N-2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2} \right] \int_\epsilon^{\frac{r}{2}} tp(t) dt. \quad (3.46)$$

Assim, passando ao limite quando  $r \rightarrow +\infty$  em (3.46), concluímos de (3.2)

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = +\infty.$$

Por outro lado, de (3.38) segue que

$$\begin{aligned} u(r) &\geq r^{2-N} \int_{\epsilon}^r t^{N-3} \int_{\epsilon}^t sp(s)v^{\alpha}(s)dsdt \\ &\geq v^{\alpha}(\epsilon)r^{2-N} \int_{\epsilon}^r t^{N-3} \int_{\epsilon}^t sp(s)dsdt, \end{aligned}$$

isto é,

$$u(r) \geq v^{\alpha}(\epsilon)r^{2-N} \int_{\epsilon}^r t^{N-3} P_{\epsilon}(t)dt$$

onde  $P_{\epsilon}(r) = \int_{\epsilon}^r sp(s)ds$ . Assim, seguindo de modo similar ao caso anterior, vem

$$\begin{aligned} v(r) &\geq b + r^{2-N} \int_{\epsilon}^r t^{N-3} \int_{\epsilon}^t sq(s)u^{\beta}(s)dsdt \\ &\geq \frac{v^{\alpha\beta}(\epsilon)}{n-2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{N-2} \right] \int_{\epsilon}^{\frac{r}{2}} sq(s) \left( s^{2-N} \int_0^s \xi^{N-3} P_{\epsilon}(\xi)d\xi \right)^{\beta} ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$v(r) \geq \frac{b^{\alpha\beta}}{n-2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{N-2} \right] \int_{\epsilon}^{\frac{r}{2}} sq(s) \left( s^{2-N} \int_{\epsilon}^s \xi^{N-3} P_{\epsilon}(\xi)d\xi \right)^{\beta} ds. \quad (3.47)$$

Passando ao limite em (3.47) quando  $r \rightarrow \infty$ , obtemos por (4.8)

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) = +\infty.$$

Mostraremos a recíproca pela contra-positiva. Para tanto, suponha sem perda de generalidade que

$$\int_0^{+\infty} tp(t) \left( t^{2-N} \int_0^t s^{N-3} Q(s)ds \right)^{\alpha} dt < +\infty. \quad (3.48)$$

É suficiente provar que  $u$  é limitada<sup>2</sup>, pois o par  $(u, v)$  não poderá ser solução Blow-up de (3.6).

Defina  $H$  como no Lema 3.1 e recorde que  $H'(r) \geq 0$ , isto é,  $H$  é não-decrescente. Escolha  $\delta > 0$  de maneira que  $H(\delta) \neq 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} tp(t) \left( H(t) \right)^{\alpha} dt &\geq \int_{\delta}^{+\infty} tp(t) \left( H(\delta) \right)^{\alpha} dt \\ &\geq \left( H(\delta) \right)^{\alpha} \int_{\delta}^{+\infty} tp(t) dt. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Caso (3.8) seja falsa, a demonstração segue de maneira análoga. Neste caso, mostramos que  $v$  é limitada.

Logo, por (3.48)

$$\int_{\delta}^{+\infty} tp(t)dt < +\infty.$$

e portanto,

$$\int_0^{+\infty} tp(t)dt < +\infty. \quad (3.49)$$

Sendo  $u'(r) \geq 0$  segue de (3.39)

$$v(r) \leq b + u^\beta(r)H(r).$$

Substituindo em (3.38), ficamos com

$$u(r) \leq a + r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} \left( \int_0^t sp(s)(b + H(s)u^\beta(s))^\alpha ds \right) dt \quad (3.50)$$

Por outro lado,

$$r^{2-N} \int_0^r t^{N-3} \left( \int_0^t sp(s)(b + H(s)u^\beta(s))^\alpha ds \right) dt \leq \left( \int_0^r sp(s)(b + H(s)u^\beta(s))^\alpha ds \right) t^{2-N} \int_0^r t^{N-3} dt,$$

pois  $sp(s)(b + H(s)u^\beta(s))^\alpha$  é uma função contínua e não-negativa. Segue de (3.50) que

$$u(r) \leq a + \frac{1}{N-2} \int_0^r tp(t)(b + H(t)u^\beta(t))^\alpha dt,$$

donde

$$u(r) \leq a + \frac{1}{N-2} \int_0^r tp(t)2^\alpha (b^\alpha + H^\alpha(t)u^{\alpha\beta}(t)) dt. \quad (3.51)$$

Desde que  $\alpha\beta \leq 1$ , temos

$$u^{\alpha\beta-1}(s) \leq a^{\alpha\beta-1},$$

pois  $a \leq u(r)$ , o que implica

$$u^{\alpha\beta}(s) \leq u(s)a^{\alpha\beta-1} \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) em (3.51), obtemos

$$\begin{aligned} u(r) &\leq a + \frac{1}{N-2} \int_0^r tp(t)2^\alpha (b^\alpha + H^\alpha(t)u(t)a^{\alpha\beta-1}) dt \\ &\leq a + \frac{2^\alpha b^\alpha}{N-2} \int_0^r tp(t)dt + \int_0^r \frac{2^\alpha a^{\alpha\beta-1}}{N-2} tp(t)H^\alpha(t)u(t)dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$u(r) \leq a + \frac{2^\alpha b^\alpha}{N-2} \int_0^r tp(t)dt + \int_0^r \frac{2^\alpha a^{\alpha\beta-1}}{N-2} tp(t)H^\alpha(t)u(t)dt, \quad (3.53)$$

Considere

$$C = a + \frac{2^\alpha b^\alpha}{N-2} \int_0^{+\infty} tp(t)dt.$$

Segue de (3.49) que  $C$  é um número real positivo e por (3.53),

$$u(r) \leq C + \int_0^r \tilde{H}(t)u(t)dt, \quad (3.54)$$

onde  $\tilde{H}(t) = \frac{2^\alpha a^{\alpha\beta-1}}{N-2} tp(t)H^\alpha(t)$ . Aplicando a Desigualdade de Gronwall em (3.54)

$$u(r) \leq C \int_0^r \tilde{H}(t) \left[ e^{\int_t^r \tilde{H}(s)ds} \right] dt$$

e por (3.48), segue que  $u$  é limitada. Como queríamos demonstrar. ■

## 3.2 Existência de Solução Radial Positiva: Caso Geral

Nesta seção, estudaremos a existência de solução radial do tipo Blow-up para o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u = p(|x|)f_1(v)f_2(u), & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \Delta v = q(|x|)g_1(v)g_2(u), & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (3.55)$$

sob as seguintes condições:

( $H_1$ ) As funções  $p, q, f_i, g_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  são contínuas;

( $H_2$ ) as funções  $f_i$  e  $g_i$  são não-decrescentes em  $[0, +\infty)$ ;

( $H_3$ )  $f_1(s)f_2(s) + g_1(s)g_2(s) > 0, \quad \forall s \neq 0$ .

Denote

$$G(+\infty) := \lim_{r \rightarrow +\infty} H(r), \quad H(r) = \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) ds \right) dt, \quad r \geq 0,$$

$$H(+\infty) := \lim_{r \rightarrow +\infty} G(r), \quad G(r) = \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} q(s) ds \right) dt, \quad r \geq 0,$$

$$F(+\infty) := \lim_{r \rightarrow +\infty} F(r), \quad F(r) = \int_a^r \frac{ds}{f_1(s)f_2(s) + g_1(s)g_2(s)}, \quad r \geq a > 0.$$

Note que  $F'(r) = \frac{1}{f_1(r)f_2(r) + g_1(r)g_2(r)} > 0 \forall r > a$ , isto é,  $F$  é crescente, sobrejetora sobre  $F([a, +\infty))$ , portanto tem inversa  $F^{-1}$ , a qual é monótona não-decrescente.

Observe que se valem  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  e  $F(+\infty) = +\infty$ , então

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{f_1(s)f_2(s)} &= +\infty, \\ \int_0^{+\infty} \frac{ds}{g_1(s)g_2(s)} &= +\infty. \end{aligned}$$

De fato, de  $(H_1)$  segue que  $f_i, g_i$  são não negativas. Assim,

$$\int_0^r \frac{ds}{f_1(s)f_2(s) + g_1(s)g_2(s)} \leq \int_0^r \frac{ds}{f_1(s)f_2(s)},$$

para todo  $r > 0$ , logo passando ao limite quando  $r \rightarrow +\infty$ ,

$$F(+\infty) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{f_1(s)f_2(s) + g_1(s)g_2(s)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{ds}{f_1(s)f_2(s)}.$$

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{f_1(s)f_2(s)} = +\infty.$$

Analogamente, temos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{g_1(s)g_2(s)} = +\infty.$$

**Teorema 1.** *Suponha que as condições  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  e  $(H_3)$  são satisfeitas. Então, o sistema (3.55) tem uma solução radial positiva  $(u, v) \in C^2([0, +\infty)) \times C^2([0, +\infty))$ . Além disso, se*

$$G(+\infty) < +\infty \quad e \quad H(+\infty) < +\infty,$$

*$u$  e  $v$  são limitadas. Se*

$$G(+\infty) = H(+\infty) = +\infty,$$

*o par  $(u, v)$  é solução Blow-up.*

### Demonstração.

Sabemos que soluções radiais de (3.55) são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) = p(r)f_1(v)f_2(u), \\ v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) = p(r)g_1(v)g_2(u). \end{cases} \quad (3.56)$$

Mostraremos, inicialmente, que o sistema acima tem solução. Desde que soluções do sistema (3.56) são soluções do sistema integral

$$\begin{cases} u(r) = b + \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) f_1(v(s)) f_2(u(s)) ds \right) dt, & r \geq 0, \\ v(r) = c + \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} q(s) g_1(v(s)) g_2(u(s)) ds \right) dt, & r \geq 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

De fato, basta notar que

$$u'(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} p(s) f_1(v(s)) f_2(u(s)) ds$$

e

$$u''(r) = (1-N)r^{-N} \int_0^r s^{N-1} p(s) f_1(v(s)) f_2(u(s)) ds + r^{1-N} r^{N-1} p(r) f_1(v(r)) f_2(u(r)),$$

portanto

$$u''(r) + \frac{N-1}{r} u'(r) = p(r) f_1(v) f_2(u).$$

De maneira análoga, obtemos

$$v''(r) + \frac{N-1}{r} v'(r) = q(r) g_1(v) g_2(u).$$

Sejam  $u_0(r) = b, v_0(r) = c$ , com  $b + c > 0$  e defina as seguintes sequências  $(u_n)$  e  $(v_n)$  por

$$\begin{cases} u_{n+1}(r) = b + \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) f_1(v_n(s)) f_2(u_n(s)) ds \right) dt, & r \geq 0, \\ v_{n+1}(r) = c + \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} q(s) g_1(v_n(s)) g_2(u_n(s)) ds \right) dt, & r \geq 0. \end{cases} \quad (P_n)$$

Como  $p(r) f_1(v_n(r)) f_2(u_n(r)) \geq 0$  e  $q(r) g_1(v_n(r)) g_2(u_n(r)) \geq 0$ , para todo  $r \geq 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $u_n \geq b, v_n \geq c$  e

$$v_0 \leq v_1, \quad u_0 \leq u_1 \quad \forall r \geq 0.$$

Segue da monotonicidade das funções  $f_i$  e  $g_i$  ( $i=1, 2$ ) que

$$u_1 \leq u_2 \quad v_1 \leq v_2 \quad \forall r \geq 0.$$

Continuando com o mesmo raciocínio, concluímos que as sequências  $(u_n)$  e  $(v_n)$  são não-decrescentes em  $[0, +\infty)$ . Desde que

$$G'(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} p(s) ds.$$

Seque de  $(H_1)$  e  $(H_2)$  que para todo  $r > 0$

$$\begin{aligned}
 u'_{n+1}(r) &\leq r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} p(s) f_1(v_n(r)) f_2(u_n(r)) ds \\
 &\leq f_1(v_n(r)) f_2(u_n(r)) r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} p(s) ds \\
 &\leq f_1(v_n(r)) f_2(u_n(r)) G'(r) \\
 &\leq f_1(v_n(r) + u_n(r)) f_2(u_n(r) + v_n(r)) G'(r) \\
 &\leq [f_1(v_n(r) + u_n(r)) f_2(u_n(r) + v_n(r)) + \\
 &\quad + g_1(v_n(r) + u_n(r)) g_2(u_n(r) + v_n(r))] G'(r) \\
 &\leq [f_1(v_{n+1}(r) + u_{n+1}(r)) f_2(u_{n+1}(r) + v_{n+1}(r)) + \\
 &\quad + g_1(v_{n+1}(r) + u_{n+1}(r)) g_2(u_{n+1}(r) + v_{n+1}(r))] G'(r).
 \end{aligned}$$

De modo similar encontramos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
 v'_{n+1}(r) &\leq [f_1(v_{n+1}(r) + u_{n+1}(r)) f_2(u_{n+1}(r) + v_{n+1}(r)) + \\
 &\quad + g_1(v_{n+1}(r) + u_{n+1}(r)) g_2(u_{n+1}(r) + v_{n+1}(r))] H'(r),
 \end{aligned}$$

pois

$$H'(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} q(s) ds$$

daí

$$\begin{aligned}
 u'_{n+1}(r) + v'_{n+1}(r) &\leq [f_1(v_{n+1}(r) + u_{n+1}(r)) f_2(u_{n+1}(r) + v_{n+1}(r)) + \\
 &\quad + g_1(v_{n+1}(r) + u_{n+1}(r)) g_2(u_{n+1}(r) + v_{n+1}(r))] (G'(r) + H'(r)),
 \end{aligned}$$

então

$$\frac{u'_{n+1}(r) + v'_{n+1}(r)}{\prod_{i=1}^2 [f_i(v_{n+1}(r) + u_{n+1}(r))] + \prod_{i=1}^2 [g_i(v_{n+1}(r) + u_{n+1}(r))]} \leq G'(r) + H'(r). \quad (3.58)$$

Integrando de 0 a  $r$  ambos os membros da desigualdade em (3.58), vem

$$\int_0^r \frac{u'_{n+1}(s) + v'_{n+1}(s)}{\prod_{i=1}^2 [f_i(v_{n+1}(s) + u_{n+1}(s))] + \prod_{i=1}^2 [g_i(v_{n+1}(s) + u_{n+1}(s))]} ds \leq \int_0^r (G'(s) + H'(s)) ds.$$

Fazendo uma mudança de variáveis,

- $u_{n+1}(s) + v_{n+1}(s) = \tau \implies (u'_{n+1}(s) + v'_{n+1}(s))ds = d\tau;$
- $s = 0 \implies \tau = b + c, \quad s = r \implies \tau = u_{n+1}(r) + v_{n+1}(r),$

vem

$$\int_{b+c}^{v_{n+1}(r)+u_{n+1}(r)} \frac{d\tau}{f_1(\tau)f_2(\tau) + g_1(\tau)g_2(\tau)} \leq H(r) + G(r).$$

Consequentemente, pela definição de  $F$ ,

$$F(v_n(r) + u_n(r)) - F(b + c) \leq G(r) + H(r) \quad \forall r \geq 0.$$

Uma vez que  $F^{-1}$  é não-decrescente, pois  $F$  é crescente em  $[0, +\infty)$ , segue que

$$v_n(r) + u_n(r) \leq F^{-1}(G(r) + H(r) + F(b + c)) \quad \forall r \geq 0, \tag{3.59}$$

mostrando que as sequências  $(u_n)$  e  $(v_n)$  são uniformemente limitadas em  $[0, c_0]$ , para todo  $c_0 > 0$ . Com efeito, segue de (3.59) e da monotonicidade de  $u_n$  que

$$u_n(r) < u_n(c_0) \leq F^{-1}(P(c_0) + Q(c_0) + F(b + c)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

em  $[0, c_0]$ , ou seja, existe uma constante  $K > 0$ , à saber  $C = F^{-1}(P(c_0) + Q(c_0) + F(b + c))$  tal que

$$|u_n(r)| < C \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{em} \quad [0, c_0].$$

Analogamente, verificamos que

$$|v_n(r)| < C \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{em} \quad [0, c_0].$$

Mostraremos agora que  $(u_n)$  e  $(v_n)$  são equicontínuas em  $[0, c_0]$ . Para tanto, observe inicialmente que  $u'_k$  e  $v'_k$  também são uniformemente limitadas em  $[0, c_0]$ . De fato, de  $(H_1)$  existem  $c_1, c_2 > 0$  tais que

$$\left| f_i \Big|_{[-C, C]} \right| \leq c_1 \quad , \quad \left| g_i \Big|_{[-C, C]} \right| \leq c_2.$$

Além disso, para  $s < r$ , temos  $\frac{s^{N-1}}{r^{1-N}} < 1$ , o que implica<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} u'_n(r) &= \int_0^r \frac{s^{N-1}}{r^{1-N}} p(s) f_1(v_{n-1}(s)) f_2(u_{n-1}(s)) ds \leq \int_0^r p(s) f_1(v_{n-1}(s)) f_2(u_{n-1}(s)) ds \\ &\leq \int_0^r \|p\|_\infty c_1 c_2 ds \\ &\leq \|p\|_\infty c_0 c_1 c_2 \quad \text{em} \quad [0, c_0]. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Recorde que

$$u'_n(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} p(s) f_1(v_n(r)) f_2(u_n(r)) ds,$$



Seja  $C' = \|p\|_\infty c_0 c_1 c_2$ . Dado  $\epsilon > 0$ , considere  $\delta = \frac{\epsilon}{K'}$ . Segue do Teorema do Valor Médio que existe  $\theta \in [0, c_0]$  tal que para  $|r - s| < \delta$ , temos

$$|u_n(r) - u_n(s)| \leq u_n'(\theta)\delta,$$

o que implica

$$|u_n(r) - u_n(s)| \leq K'\delta,$$

ou seja,

$$|u_n(r) - u_n(s)| < \epsilon.$$

isto é,  $(u_n)$  é equicontínua. Analogamente, mostra-se que  $(v_n)$  é equicontínua. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá existem  $(u, v)$  e subsequências  $(u_{n_j}) \subset (u_n)$  e  $(v_{n_j}) \subset (v_n)$  tais que

$$u_{n_j} \rightarrow u \quad \text{em} \quad v_{n_j} \rightarrow v.$$

uniformemente em  $[0, c_0]$ .

Note que,

$$u(r) = b + \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) f_1(v(s)) f_2(u(s)) ds \right) dt, \quad r \geq 0$$

Por  $(H_1)$  segue que

$$f_1(v_{n_j}(s)) f_2(u_{n_j}(s)) \longrightarrow f_1(v(s)) f_2(u(s)).$$

Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_j \geq n_0$  implica

$$|f_1(v_{n_j}(s)) f_2(u_{n_j}(s)) - f_1(v(s)) f_2(u(s))| < \frac{2\epsilon}{\|p\|_\infty c_0^2}. \quad (3.60)$$

Por simplicidade, denote  $\bar{f}_n(s) = f_1(v_{n_j}(s)) f_2(u_{n_j}(s)) - f_1(v(s)) f_2(u(s))$ . Assim, para  $r \in [0, c_0]$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) \bar{f}_n(s) ds \right) dt \right| &\leq \int_0^r \left( \int_0^t \frac{s^{N-1}}{t^{1-N}} \|p\|_\infty |\bar{f}_n(s)| ds \right) dt \\ &\leq \int_0^r \left( \int_0^t \|p\|_\infty |\bar{f}_n(s)| ds \right) dt \end{aligned} \quad (3.61)$$

De (3.60) e (3.61), segue que

$$\left| \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) \bar{f}_n(s) ds \right) dt \right| < \epsilon.$$

Portanto,

$$u(r) = b + \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} p(s) f_1(v(s)) f_2(u(s)) ds \right) dt.$$

De modo similar, justificamos que

$$v(r) = c + \int_0^r t^{1-N} \left( \int_0^t s^{N-1} q(s) g_1(v(s)) g_2(u(s)) ds \right) dt.$$

Desde que  $c_0$  foi arbitrário, fazendo um procedimento similar ao Lema 3.2, concluimos que  $(u, v)$  é solução radial de (3.57).

Agora, suponha que  $G(+\infty) < +\infty$  e  $H(+\infty) < +\infty$ . Passando ao limite em (3.59) quando  $n_j \rightarrow +\infty$ , temos

$$v(r) \leq F^{-1}(G(r) + H(r) + F(b + c)) \quad \forall r \geq 0. \quad (3.62)$$

e

$$u(r) \leq F^{-1}(G(r) + H(r) + F(b + c)) \quad \forall r \geq 0. \quad (3.63)$$

Passando ao limite em (3.62), (3.63) quando  $r \rightarrow +\infty$ , segue da continuidade de  $F^{-1}$  ficamos com

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) \leq F^{-1} \left[ G(+\infty) + H(+\infty) + F(b + c) \right] < +\infty$$

e

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) \leq F^{-1} \left[ G(+\infty) + H(+\infty) + F(b + c) \right] < +\infty.$$

Logo,  $(u, v)$  é solução limitada de (3.55).

Por fim, suponha que  $G(+\infty) = +\infty$  e  $H(+\infty) = +\infty$ . Segue de (3.57), da monotonicidade das sequências  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  e das hipóteses  $H_1$  e  $(H_2)$  que

$$u(r) \geq b + f_1(c) f_2(b) H(r) \quad \text{e} \quad v(r) \geq c + g_1(c) g_2(b) G(r). \quad (3.64)$$

Passando ao limite em (3.64) quando  $r \rightarrow +\infty$ , observamos que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) \geq b + f_1(c) f_2(b) H(+\infty),$$

e

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) \geq c + g_1(c) g_2(b) G(+\infty),$$

mostrando que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) = +\infty,$$

de onde segue que  $(u, v)$  é uma solução Blow-up. ■

# Apêndice A

## Princípios de Máximo

A maioria das equações diferenciais surgem de modelos físicos. Uma outra importante classe surge de problemas de geometria diferencial. Como exemplo de áreas que são altamente dependentes do estudo de EDPs, destacamos as seguintes: acústica, aerodinâmica, elasticidade, eletrodinâmica, dinâmica dos fluidos, geofísica (propagação de ondas sísmicas), transferência do calor, meteorologia, oceanografia, ótica, prospecção de petróleo, física do plasma, mecânica quântica, relatividade, circulação de fluidos e formação de tecidos e padrões dentro de organismos vivos e crescimento de tumores.

### A.1 Princípio do Máximo para Equação de Laplace

Os Princípios do Máximo para equações diferenciais parciais elípticas é uma das principais ferramentas para provar unicidade de soluções e estimativas a priori. Veremos, a seguir, alguns resultados envolvendo a equação de Laplace.

**Teorema A.1.** *Suponha que  $u \in C^2(\Omega)$  satisfaça a equação de Laplace, isto é,  $\Delta u = 0$ . Se  $\Omega$  é conexo e existe um ponto  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0) = \max_{\Omega} u$ , então  $u$  é constante. Em outras palavras, uma função harmônica não pode assumir um máximo no interior a menos que ela seja constante.*

**Demonstração.**

Seja  $M = \max_{\Omega} u$  e considere o seguinte conjunto

$$\omega = \{x \in \Omega; u(x) = M\}.$$

Sendo  $\omega$  não-vazio, por hipótese, e  $u$  uma função contínua em  $\Omega$  segue que  $\omega$  é fechado em  $\Omega$ . Para mostrar que  $u$  é constante, basta provar que  $\omega = \Omega$ , para tanto como  $\Omega$

é conexo basta provar que  $\omega$  também é aberto em  $\Omega$ . Assim, seja  $x \in \omega$  e uma bola  $B_r = B(x, r) \subset\subset \Omega$ . Segue da desigualdades do valor médio para funções harmônicas que

$$M = u(x) = \frac{1}{w_n} \int_{B_r} u \leq \frac{1}{w_n} \int_{B_r} M = M.$$

Se houvesse pelo menos um ponto  $x_1 \in B_r$  no qual  $u(x_1) < M$ , teríamos uma contradição. Logo,  $u(x) = M$  para todo  $x \in B_r$ , mostrando que  $\omega$  é aberto em  $\Omega$  donde concluímos a demonstração. ■

**Observação A.1.** *De modo similar, pode-se provar que se uma função harmônica assume um mínimo no interior, então ela é constante. Analogamente, podemos concluir que se  $u$  é uma função subharmônica, (superharmônica)  $\Delta u \geq 0$  ( $\Delta u \leq 0$ ) e  $u$  assume um máximo (mínimo) interior, então  $u$  é constante;*

Mais formalmente,

**Teorema A.2. (Princípio do Máximo Forte)** *Seja  $u \in C^2(\Omega)$  uma função Subharmônica ( Superharmônica ) em  $\Omega$ . Suponha que exista  $y \in \Omega$  tal que*

$$u(y) = \sup_{\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u),$$

então  $u$  é constante.

Segue do Princípio do Máximo Forte o seguinte resultado

**Teorema A.3. (Princípio do Máximo Fraco)** *Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  uma função tal que  $\Delta u \geq 0$  ( $\Delta u \leq 0$ ) em  $\Omega$ . Se  $\Omega$  for limitado, então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

Consequentemente,

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad x \in \Omega.$$

**Demonstração.**

Para primeira parte basta observar que

$$\sup_{\partial\Omega} u = \sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\Omega} u \quad \left( \inf_{\partial\Omega} u = \inf_{\bar{\Omega}} u = \inf_{\Omega} u \right).$$

A segunda parte segue de

$$\inf_{\partial\Omega} u = \inf_{\bar{\Omega}} u \leq u(x) \leq \sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

■

**Corolário A.1.** *Se  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , satisfazem*

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{em } \Omega, \\ u = v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então  $u = v$ .

**Demonstração.**

De fato, fazendo  $w = u - v$ , temos

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e pelo Teorema anterior

$$0 = \inf_{\partial\Omega} w \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Portanto,  $u = v$  em  $\Omega$ . ■

**Observação A.2.** *Se  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  são funções tais que*

$$\begin{cases} \Delta u \geq \Delta v & \text{em } \Omega, \\ u \leq v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então  $u \leq v$  em  $\Omega$ .

*Com efeito, basta fazer  $w = u - v$  e aplicar o Princípio do Máximo Fraco.*

## A.2 Princípio do Máximo Clássico

Nesta seção, estudaremos a generalização do princípio de máximo para uma classe maior de operadores de segunda ordem, à saber:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \quad (\text{A.1})$$

atuando em funções  $u \in C^2(\Omega)$ , onde  $\Omega$  é um aberto em  $\mathbb{R}^N$ . Assumiremos que a matriz  $(a_{ij}(x))$  é simétrica para todo  $x \in \Omega$ . Note que essa hipótese não implica em perda de generalidade para operadores lineares de segunda ordem atuando sobre funções de classe  $C^2(\Omega)$ . Com efeito, se  $u \in C^2(\Omega)$  e

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

é um operador linear de segunda ordem arbitrário, então pelo Teorema de Schwarz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Assim, se definirmos

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2},$$

obtemos o operador (A.1) com a matriz  $(a_{ij}(x))$  simétrica. Além dessa hipótese, assumiremos que o operador  $L$  satisfaz as seguintes condições adicionais:

- (i)  $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$ ;
- (ii)  $L$  é elíptico, ou seja, a matriz  $(a_{ij}(x))$  é positiva definida para todo  $x \in \Omega$ , isto é, se  $\lambda(x)$  e  $\Lambda(x)$  denotam o menor e o maior autovalor de  $(a_{ij}(x))$ , então

$$0 < \lambda(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x) |\xi|^2$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ .

Diremos que  $L$  é **estritamente elíptico** se existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $\lambda(x) \geq \lambda_0$  para todo  $x \in \Omega$ . Se  $\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$  é limitada em  $\Omega$ , então dizemos que  $L$  é **uniformemente elíptico**. Vale observar que, por continuidade, qualquer operador elíptico em  $\Omega$  é uniformemente elíptico em subconjuntos compactos de  $\Omega$ .

**Observação A.3.** *Sob uma transformação ortogonal de coordenadas, não apenas a elipticidade do operador é preservada, como também as funções  $\Lambda(x)$  e  $\lambda(x)$ . Dessa forma, o fato do operador ser estritamente elíptico ou uniformemente elíptico continua verdadeiro após uma mudança de coordenadas ortogonal.*

**Lema A.1. (Princípio do Máximo Forte)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $c = 0$ . Se  $Lu > 0$ , então  $u$  não pode atingir um ponto de máximo interior em  $\Omega$ .*

**Demonstração.**

De fato, se existisse  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0) = \max_{\Omega} u$ , teríamos  $\nabla u(x_0) = 0$ . Além disso, a matriz hessiana

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1,\dots,N}$$

seria negativa semidefinida. Desde que a matriz  $(a_{ij})$  é positiva definida, teríamos

$$Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x_0) \frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0.$$

o que contraria o fato de  $Lu > 0$ . ■

**Teorema A.4. (Princípio de Máximo Fraco)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $c = 0$ .*

- Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

- Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

**Demonstração.**

Suponha que  $Lu \geq 0$ . Para cada  $\epsilon, \gamma > 0$  defina a função  $u_\epsilon : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$  dada por

$$u_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon e^{\gamma x_1}.$$

Desde que  $L$  é elíptico para cada  $x \in \Omega$ , temos

$$0 < \lambda(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x) |\xi|^2$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Em particular, para  $\xi = (1, 0, \dots, 0)$ , temos

$$\lambda(x) \leq a_{11} \quad \forall x \in \Omega.$$

Considere  $\gamma \in (0, +\infty)$  tal que  $\gamma^2 - k\gamma > 0$ . Assim,

- $\gamma^2 a_{11}(x) \geq \gamma^2 \lambda(x)$ ;
- $|b_1(x)| \leq \lambda(x)k$  o que implica  $\gamma |b_1(x)| \leq -\gamma \lambda(x)k$ .

De onde segue que

$$\gamma^2 a_{11}(x) + \gamma b_1(x) \geq \lambda(x)(\gamma^2 - \gamma k) > 0. \quad (\star)$$

Note que

$$Le^{\gamma x_1}(x) = \gamma^2 a_{11}(x)e^{\gamma x_1} + \gamma b_1(x)e^{\gamma x_1} = e^{\gamma x_1}(\gamma^2 a_{11}(x) + \gamma b_1(x)).$$

e por  $(\star)$  segue que  $Le^{\gamma x_1}(x) > 0$ . Logo,

$$Lu_\epsilon = Lu + \epsilon Le^{\gamma x_1}(x) > 0.$$

Então, pelo Lema A.1, segue

$$\sup_{\Omega} u_\epsilon = \sup_{\partial\Omega} u_\epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Como

$$u(x) + \epsilon e^{\gamma x_1} \leq \sup_{\Omega} u_{\epsilon}.$$

e

$$\sup_{\partial\Omega} u_{\epsilon} \leq \sup_{\partial\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} \epsilon^{\gamma x_1}$$

segue que

$$u(x) + \epsilon^{\gamma x_1} \leq \sup_{\partial\Omega} u + \sup_{\partial\Omega} \epsilon^{\gamma x_1}.$$

Sendo  $\epsilon > 0$  arbitrário, passando ao limite na desigualdade acima, ficamos com

$$u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega,$$

o que implica

$$\sup_{\bar{\Omega}} u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u. \tag{A.2}$$

Sendo  $\partial\Omega \subset \Omega$ , vem

$$\sup_{\partial\Omega} u(x) \leq \sup_{\bar{\Omega}} u. \tag{A.3}$$

Por (A.2) e (A.3) segue o resultado. ■

**Observação A.4.** *Este resultado continua válido se  $L$  é um operador apenas elíptico, desde que a condição*

$$\frac{|b_i(x)|}{\lambda(x)} \leq b_0 \in \mathbb{R} \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

*seja satisfeita.*

Definimos a **parte positiva** e a **parte negativa** de  $u$ , respectivamente por

$$u^+ = \max(u, 0) \quad u^- = \min(u, 0).$$

**Corolário A.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $c \leq 0$ .*

- *Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

- *Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-.$$



Consequentemente, se  $Lu = 0$  em  $\Omega$ , então

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Para maiores detalhes ver [19].

**Corolário A.3. (Princípio da Comparação)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $c \leq 0$ . Se  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , satisfazem*

$$\begin{cases} Lu = Lv & \text{em } \Omega, \\ u = v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então  $u = v$ . Em particular, se o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possuir uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , então a solução é única. Além disso, se

$$\begin{cases} Lu \geq Lv & \text{em } \Omega, \\ u \leq v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então  $u \leq v$  em  $\Omega$ .

### Demonstração.

Considere  $w = u - v$ . No primeiro caso,  $w$  satisfaz

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e consequentemente

$$\max_{\bar{\Omega}} |w| = \max_{\partial\Omega} |w| = 0.$$

de onde segue que  $u = v$  em  $\Omega$ . No segundo caso,  $w$  satisfaz

$$\begin{cases} Lw \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ w \leq 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

$$\max_{\bar{\Omega}} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+ \leq 0.$$

■

Tal resultado motiva a seguinte definição

**Definição A.1.** *Seja  $L$  um operador elíptico. Dizemos que  $u$  é uma **subsolução** de  $L$  se  $Lu \geq 0$ , e quando  $Lu \leq 0$   $u$  será chamada **supersolução** de  $L$ .*

# Apêndice B

## Resultados Utilizados na Dissertação

Neste apêndice, enunciaremos os principais resultados que utilizamos no decorrer do nosso trabalho. Não demonstraremos tais resultados, no entanto, será citado onde a prova pode ser encontrada.

### B.1 Resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$ e de Teoria da Medida

**Teorema B.1. (Teorema do Valor Médio)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  um caminho contínuo, diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Se  $|f'(t)| \leq M$  para todo  $t \in (a, b)$ , então  $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot (b - a)$ .*

Ver [37] p. 89.

**Teorema B.2. (Teorema Fundamental do Cálculo)** *Se uma função integrável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui primitiva  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ .*

Ver [36] p. 324.

**Teorema B.3. (Teorema da Função Implícita)** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Se um ponto  $p = (x_0, y_0) \in U$  é tal que  $f(p) = c$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ , então existem uma bola  $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$  e um intervalo  $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  tais que  $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$  é o gráfico de uma função  $\xi : B \rightarrow J$ , de classe  $C^k$ . Para todo  $x \in B$ , tem-se*

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}, (i = 1, \dots, n)$$

ver [37] p. 164.

**Teorema B.4. (Integração Por Partes)** Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possuem derivadas integráveis então

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt,$$

onde  $f.g \Big|_a^b = f(b).g(b) - f(a).g(a)$ .

Ver [36] p. 327.

**Teorema B.5. (Teorema de Mudança de Variáveis)** Sejam  $h : U \rightarrow V$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  entre abertos  $U, V \subset \mathbb{R}^m$ ,  $X \subset U$  um compacto  $J$ -mensurável e  $f : h(X) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então  $f \circ h : X \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))|det.h'(x)|dx.$$

Ver [37] p. 385.

**Teorema B.6. (Teorema de Ascoli-Arzelà)** Seja  $K \subset \mathbb{R}$  compacto. Toda sequência equicontínua e simplesmente limitada de funções  $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$  possui uma subsequência uniformemente convergente.

Ver [36] p. 412.

**Teorema B.7. (Desigualdade de Young envolvendo  $\epsilon$ )** Sejam  $a, b > 0$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , temos

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q, \quad (a, b > 0, \epsilon > 0),$$

para  $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ .

Ver [15] pag. 622.

**Teorema B.8. (Desigualdade de Holder)** Sejam  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$  com  $p > 1$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,  $fg \in L^1$  e  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

Ver [8] p. 56.

**Teorema B.9. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)** Sejam  $(f_n)$  uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. para uma função mensurável  $f$ . Se existe uma função integrável  $g$  tal que  $|f_n| \leq g$  para todo  $n$ , então  $f$  é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Ver [8] p. 44.

## B.2 Espaços de Hölder - Espaços de Sobolev - Estimativas de Schauder

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $0 < \gamma \leq 1$ .

**Definição 4.** *Seja  $x_0 \in \Omega$ . Dizemos que  $u$  é Hölder contínua de expoente  $\gamma$  em  $x_0 \in \Omega$  se*

$$[u]_{\gamma, x_0} = \sup_{\Omega} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\gamma} < +\infty.$$

**Definição 5.** *Dizemos que  $u$  é uniformemente Hölder contínua de expoente  $\gamma$  em  $\Omega$ , ou simplesmente, Hölder contínua em  $\Omega$  se*

$$[u]_{\gamma, \Omega} = \sup_{x, y \in \Omega; x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} < +\infty.$$

Diremos que  $u$  é **localmente Hölder contínua de expoente  $\gamma$  em  $\Omega$**  quando  $u$  for uniformemente Hölder contínua em subconjuntos compactos de  $\Omega$ .

**Observação B.1.** *Uma função Hölder contínua de expoente  $\gamma = 1$  é chamada Lipschitziana.*

Recorde que uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita Lipschitziana quando existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y| \quad \forall x, y \in \Omega.$$

**Definição 6.** *O espaço de Hölder  $C^{k, \gamma}(\bar{\Omega})$  ( $C^{k, \gamma}(\Omega)$ ) é definido como sendo o subespaço de  $C^k(\bar{\Omega})$  ( $C^k(\Omega)$ ) consistindo das funções  $k$ -vezes diferenciáveis cuja as  $k$ -ésimas derivadas são limitadas e Hölder contínuas de expoente  $\gamma$ .*

**Observação B.2.** *Por simplicidade escrevemos*

$$C^{0, \gamma}(\bar{\Omega}) = C^\gamma(\bar{\Omega}), \quad C^{0, \gamma}(\Omega) = C^\gamma(\Omega).$$

para  $0 < \gamma < 1$ .

Denotaremos por  $C_0^{k, \gamma}(\Omega)$  o espaço das funções em  $C^{k, \gamma}(\Omega)$  com suporte compacto em  $\Omega$ .

**Teorema B.10.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio de classe  $C^\infty$ . Então, vale a seguinte imersão contínua*

$$W^{1, 2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [2, 2^*].$$

Ver [1] p. 97.

**Teorema B.11. (Teorema de Agmon, Douglis e Nirenberg)** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira suave,  $f \in L^s(\Omega)$  com  $1 < s < \infty$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$  solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Então,  $u \in W^{2,s}(\Omega)$  e existe uma constante  $C > 0$  (independente de  $u$ ) tal que

$$\|u\|_{2,s} \leq C \|f\|_s.$$

Em particular, se  $s > \frac{N}{2}$  e  $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ , então existe uma única solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ver [2] p. 46.

**Observação B.3.** *O teorema acima afirma que dado  $f \in L^s(\Omega)$  existe uma única solução  $u \in W^{2,s}(\Omega) \cap W_0^{1,s}(\Omega)$  do problema (B.1). Além disso, vale a seguinte afirmação*

$$f \in W^{k,s}(\bar{\Omega}) \Rightarrow u \in W^{k+2,s}(\bar{\Omega}).$$

**Teorema B.12. (Imersões de Sobolev)** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira suave, um inteiro  $m \geq 1$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então, vale as seguintes imersões contínuas*

(i) Se  $\frac{1}{s} - \frac{m}{N} > 0$ , então  $W^{m,s}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  onde  $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - \frac{m}{N}$

(ii) Se  $\frac{1}{s} - \frac{m}{N} = 0$ , então  $W^{m,s}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \forall q \in [s, +\infty)$

(iii) Se  $\frac{1}{s} - \frac{m}{N} < 0$ , então  $W^{m,s}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

Ver [1] p. 97.

**Teorema B.13.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira suave. Se  $s > N$ , então*

$$W^{2,s}(\Omega) \subset C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \quad , \quad 0 < \gamma < 1 - \frac{N}{s}$$

Ver [1] p. 98.

**Teorema B.14.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  tal que  $\text{med}(\Omega) < +\infty$ . Se  $s > q$ , então*

$$L^s(\Omega) \subset L^q(\Omega).$$

**Teorema B.15. (Teorema de Schauder)** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira suave e  $f \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ . Então, existe  $u \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$  solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe  $C > 0$  (independente de  $u$ ) tal que

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

Ver [19], p. 56 (Teorema 4.3) e p. 106 (Teorema 6.13).

**Teorema B.16.** *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico em um domínio limitado  $\Omega$ , com  $c \leq 0$ . Suponha que  $f$  e os coeficientes de  $L$  sejam limitados e pertencem a  $C^{0,\alpha}(\Omega)$ . Suponha ainda que  $\Omega$  satisfaz a condição da esfera exterior em todo ponto de  $\partial\Omega$ . Se,  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

Ver [19], p. 106 (Teorema 6.13).

**Teorema B.17.** *Sejam  $c$  uma constante positiva,  $f \in L^s(\Omega)$  e  $\phi \in W^{2,s}(\Omega)$  com  $1 < p < +\infty$ . Então, o problema*

$$\begin{cases} \Delta u - cu = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u - \phi \in W_0^{1,s}(\Omega) \end{cases}$$

tem solução única  $u \in W^{2,s}(\Omega)$ . Além disso, existe uma constante  $K$ , independente de  $u$  tal que

$$\|u\|_{2,s} \leq K \|f\|_s$$

para todo  $u \in W^{2,s}(\Omega) \cap W_0^{1,s}(\Omega)$ .

Ver [22] p. 46 (Teorema 11.2).

**Teorema B.18. (Amann e Grandall)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Para cada  $b \in L^\infty(\Omega)$  o problema*

$$\begin{cases} \Delta u - u = b(1 + |\nabla u|^2) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

admite uma única solução  $u_b \in W^{2,s}(\Omega)$ . Além disso, existe uma função não-decrescente  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , dependendo apenas de  $N, \Omega$  e  $s$  tal que

$$\|u_b\|_{2,s} \leq \phi(\|b\|_\infty).$$

Ver [5] (Lema 4).

**Teorema B.19.** *Sejam  $c$  uma constante positiva. Suponha que  $f, a \in L^s(\Omega)$  com  $s > N$  e  $a \geq c$ . Então, se  $Lu = \Delta u - au$ , existe uma constante  $K$  tal que*

$$\|u\|_{2,s} \leq \|Lu\|_s \quad \text{para toda } u \in W^{2,s}(\Omega).$$

Além disso, o problema

$$\begin{cases} Lu = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução única  $u \in W^{2,s}(\Omega)$ .

Ver [23] ((3.11) e (3.13)).

**Teorema B.20. (Teorema do Ponto Fixo de Leray - Schauder)** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $T$  uma aplicação compacta de  $X \times [0, 1]$  em  $X$  tal que  $T(x, 0) = 0$  para todo  $x \in X$ . Suponha que existe uma constante  $M$  tal que*

$$\|x\|_X < M$$

para todo  $(x, t) \in X \times [0, 1]$  satisfazendo  $x = T(x, t)$ . Então, a aplicação dada por  $T_1x = T(x, 1)$  tem um ponto fixo.

Ver [19] p. 286 (Teorema 11.6).

**Teorema B.21.** *Seja  $c \geq 0$ . Se  $f \in C_{loc}^{0,\gamma}(\Omega)$  e  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ , então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u - cu = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem solução única  $u \in C_{loc}^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

Ver [19] p. 106 (Teorema 6.13).

**Teorema B.22.** *Suponha que  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $c \geq 0$  é uma constante. Se*

$$\begin{cases} \Delta u - cu \geq \Delta v - cv & \text{em } \Omega, \\ u \leq v, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então,  $u \leq v$ .

Ver [19] p. 33 (Teorema 3.3).

**Teorema B.23.** *Sejam  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^N$  e  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $f \in C_{loc}^{0,\gamma}(\Omega)$  tal que  $\Delta u = f$  em  $\Omega$ . Então,  $u \in C_{loc}^{2,\gamma}(\Omega)$  e para  $\Omega_0, \Omega_1 \subset \Omega$  com  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ ,  $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$  e  $\bar{\Omega}_1$  compacto, temos*

$$\|u\|_{C_{loc}^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq K(\|u\|_{\infty, \Omega_1} + \|f\|_{C^{0,\gamma}(\Omega_1)}),$$

onde  $K \equiv K(\Omega_0, \Omega_1)$

Ver [19] p. 60 (Teorema 4.6).

**Teorema B.24.** *Seja  $c \geq 0$ . Se  $f \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$  e  $\varphi \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ , então*

$$\begin{cases} \Delta u - cu = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

*tem solução única  $u \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ . Além disso,*

$$\|u\|_{C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq K(\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} + \|f\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}),$$

*onde  $K \equiv K(\Omega, \gamma)$ .*

Ver [22] p. 46 (Teorema 11.2).

Antes de enunciar o Teorema de Ladyzhenskaya & Ural'tseva considere a seguinte equação

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u(x), v) + a(x, u(x), v) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Suponha para cada  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $u$  e  $v$  as funções  $a_i$  e  $a$  são funções mensuráveis, diferenciáveis com respeito a  $x, u$  e  $v$  e satisfazem

$$\begin{aligned} \psi(|u|)(1+|v|)^{m-2} \sum_{i=1}^N \xi_i &\leq \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_i(x, u, v)}{\partial v_j} \xi_j \xi_i \\ &\leq \phi(|u(x)|)(1+|v|)^{m-2} \sum_{i=1}^N \xi_i \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

e

$$\sum_{i=1}^N \left( \left| \frac{\partial a_i}{\partial u} \right| + |a_i| \right) (1+|v|) + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial a_i}{\partial u} \right| + |a| \leq \phi(|u|)(1+|v|)^m \quad (\text{B.4})$$

para funções positivas  $\psi, \phi, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$  e  $m > 1$ .

**Teorema B.25. (Teorema de Ladyzhenskaya & Ural'tseva)** *Suponha que as condições (B.3) e (B.4) são satisfeitas. Se  $u \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$  é solução da equação (B.2), então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\max_{x \in \Omega'} |\nabla u(x)| \leq C \max_{x \in \Omega} |u(x)|$$

*para  $\Omega' \subset\subset \Omega$ . Em particular, dados  $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^N$  tais que  $\bar{\Omega}_2 \subset \Omega_1$ . Se  $u \in L^\infty(\bar{\Omega}_1)$  satisfaz*

$$\Delta u = h(x, u, \nabla u)^1 \quad \text{em } \Omega_1,$$

*então existe uma constante positiva  $C$  tal que*

$$\max_{x \in \Omega_2} |\nabla u(x)| \leq C \max_{x \in \Omega_1} |u(x)|.$$

<sup>1</sup>h satisfazendo as condições (B.3) e (B.3).



Ver [25] p. 266 (Teorema 3.1).

**Teorema B.26.** (*Desigualdade de Gronwall - Forma Integrável*) Sejam  $f, g$  e  $h$  funções contínuas em  $[a, b]$ , tais que  $g \geq 0$  e

$$h(x) \leq f(x) + \int_a^x g(s)h(s)ds \quad x \in [a, b].$$

Então,

$$h(x) \leq f(x) + \int_a^x g(s)f(s)e^{\int_s^x g(t)dt}ds$$

Em particular, se  $f \equiv K$  constante, temos

$$h(x) \leq Ke^{\int_a^x g(s)ds}.$$

Ver [44] p. 37 ou [15] p. 625.

**Teorema B.27.** (*Gidas, Ni & Nirenberg*) Seja  $B(x, R) \subset \mathbb{R}^N$  uma bola centrada em  $x$  e raio  $R$ . Se  $u > 0$  é tal que  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  e satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } B(x, R), \\ u = 0, & \text{em } |x| = R, \end{cases}$$

em que  $f \in C^1$ . Então,  $u$  é radialmente simétrica e satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0, \quad r \in (0, R).$$

Ver [18] p. 209 (Teorema 1).

# Bibliografia

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Agmon S., Douglis A. & Nirenberg L., *Estimates Near The Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations satisfying General Boundary Value Conditions I*, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727.
- [3] Aires, Juarez Everton de Farias, *Existência, Regularidade e Decaimento Exponencial de Solução para Problemas Elípticos Semilineares em  $\mathbb{R}^N$* , Dissertação de Mestrado, Paraíba: UFPB - Campos I, [1998].
- [4] Amann, H., *Existence and Multiplicity Theorems for Semi-linear Elliptic Boundary Value Problems*, Math. Z. 150, (1976), 281-295.
- [5] Amann, H., *On Some Existence Theorems for Semi-linear Elliptic Equations*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 27, 5, (1978), 779-790.
- [6] Bandle, C. & Giarrusso, E., *Boundary Blow-up for Semilinear Elliptic Equations with Nonlinear Gradient Terms*, Adv. Differential Equations, 1, (1996), 133-150.
- [7] Bandle, C. & Marcus, M., *'Large' Solutions Semilinear Elliptic Equations: Existence, Uniqueness, and Asymptotic Behaviour*, J. Anal. Math., 58, (1992), 9-24.
- [8] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, 1995.
- [9] Bieberbach, L.,  *$\Delta u = e^u$  und die Automorphen Funktionen*, Math. Ann., 77, (1916), 173-212.
- [10] Boccardo, L., Murat, F. & Puel, J. P., *Résultats d'Existence pour certains Problèmes Elliptiques Quasilineaires*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série, tome 11, n<sup>o</sup> 2 (1984), 213-235.

- [11] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext, 2010.
- [12] Cîrstea, F. St. & Rădulescu, V. D., *Blow-up Boundary Solutions of Semilinear Elliptic Problems*, *Nonlinear Analysis*, n° 48, (2002), 521-534.
- [13] Cîrstea, F. St. & Rădulescu, V. D., *Entire Solutions Blowing up at Infinity for Semilinear Elliptic Systems*, *J. Math. Pures Appl.*, 81, (2002), 827-846.
- [14] de Figueiredo, D. G., *Equações Elípticas não Lineares*, 11° Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Calcas, IMPA, 1977.
- [15] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [16] Galaktionov, V., & Vázquez, J.-L., *The Problem of Blow-up in Nonlinear Parabolic Equations*, *Discrete Contin. Dynam. Systems, Ser. A*, 8, (2002), 399-433.
- [17] Ghergu, M., Niculescu, C. & Rădulescu, V., *Explosive Solutions of Equations With Absorption and Non-linear Gradient Term*, *Proc. Indian Acad. Sci (Math. Sci.)*, Vol. 112, n° 3, (2002), 441-451.
- [18] Gidas, B., Ni, W. M. & Nirenberg, L., *Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle*, *Comm. Math. Phys.*, 68, 209-243 (1979).
- [19] Gilbarg, D., & Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer - Verlag Berlin, 1998.
- [20] Holanda, Angelo Roncalli Furtado de, *Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Equações Elípticas*. Dissertação de Mestrado, Paraíba: UFPB - Campos I, [2000].
- [21] Holanda, Angelo Roncalli Furtado de, *Soluções Positivas de Problemas Singulares Tipo Blow-up*. Tese de Doutorado, Brasília: Unb, [2005].
- [22] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer - Verlag, Heidelberg, 1993.
- [23] Kazdan, J. L. & Warner, F. W. *Curvature functions for compact 2-manifolds*, *Ann. of Math.* 99 (1974), 14-47.

- [24] Keller, J. B., *On Solutions of  $\Delta u = f(u)$* , Comm. Pure. Appl. Math., n° 10, (1957), 503-510.
- [25] Ladyzhenskaya, Olga A. & Ural'tseva, Nina N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press. New York and London, Vol. 46, 1968.
- [26] Lair, A. V., *A necessary and Suficient Condition for Existence of Large Solutions to Semilinear Elliptic Equations*, Journal of Math. Anal. and Appl., n° 240, (1999), 205-218.
- [27] Lair, A. V., *A necessary and Suficient Condition for Existence of Large Solutions to Sublinear Elliptic Systems*, Journal of Math. Anal. and Appl., 365, (2010), 103-108.
- [28] Lair, A. V., *Entire Large Solutions to Semilinear Elliptic Systems*, Journal of Math. Anal. and Appl., (2011).
- [29] Lair, A. V., & Wood, A. W., *Existence of Entire Large Positive Solutions of Semilinear Elliptic Systems*, Journal of Diffrential Equations, 164, (2000), 380-394.
- [30] Lair, A. V., & Wood, A. W., *Large Solutions of Sublinear Elliptic Equations*, Nonlinear Anal, 39, (2000), 745-753.
- [31] Lasry, J. M., & Lions, P.-L., M. C., *Nonlinear Elliptic Equations with Singular Boundary Conditions and Stochastic Control with State Constraints*, The Model Problem, Math. Ann., 283, (1989), 583-630.
- [32] Lazer, A. C. & Mckenna, P. J., *On a Problem of Bieberbach and Rademacher*, Nonlinear Anal, TMA 21, 327-335, 1993.
- [33] Leon, M. C., *Existence Results for Quasilinear Problems via Ordered Sub and Supersolutions*, Annales de la Faculé des Sciences de Toulouse, 6<sup>e</sup> Série, Tome 6, n°4 (1997), 591-608.
- [34] Li, H., Zhang, P. & Zhang, Z., *A Remark on The Existence of Entire Positive Solutions for class of Semilinear Elliptic Systems*, J. Math. Pures Appl., 365, (2010), 338-341.

- [35] Li, H., Zhang, P. & Zhang, Z., *Existence of Entire Positive Solutions for a class of Semilinear Elliptic Systems*, Electronic Journal of Differential Equation, 16, (2010), 1-5.
- [36] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Impa, 2007.
- [37] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Vol. 2, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Impa, 2006.
- [38] Loewner, C. & Nirenberg, L., *Partial Differential Equations Invariant under Conformal or Projective Transformations*, Contribution to Analysis, Academic Press, New York, (1974), 245-272.
- [39] Osserman, R., *On Solutions of  $\Delta u \geq f(u)$* , Pacific J. Math., n° 7, (1957), 1641-1647.
- [40] Peng, Y. & Song, Y., *Existence of entire Large Positive Solutions of a Semilinear Elliptic System*, Appl. Math. Comp., 155, (2004), 687-698.
- [41] Quittner, P., *Blow-up for Semilinear Parabolic Equations with a Gradient Term*, Math. Methods Appl. Sci., 14, (1991), 413-417.
- [42] Rademacher, H., *Einige Besondere Probleme der Partiellen Differentialgleichungen*, Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik I, second ed., P. Frank and R. von Mises, eds, Rosenberg, New York, (1943), 838-845.
- [43] Rădulescu, V. D., *Singular phenomena in nonlinear elliptic problems*. Handbook of Differential Equation, Stationary Partial Differential Equations, Vol. 4, Edited by Michel Chipot, (2007), 485-593.
- [44] Sotomayor, Jorge, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, Impa (1979).
- [45] Vieira, Aldo Freitas, *Existência, Unicidade e Regularidade para Problemas Elípticos Sublineares no  $\mathbb{R}^N$* , Dissertação de Mestrado, Brasília-DF:UNB, [1997].