



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

AS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

CLÉSIO EVANGELISTA MOTA

CUITÉ - PB

2015

CLÉSIO EVANGELISTA MOTA

AS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Unidade Acadêmica de Educação do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como complementação aos requisitos para a obtenção do título de Graduado em Física. Realizado sob orientação do Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas, e coorientação do Prof. Dr. João Batista da Silva.

CUITÉ - PB

2015



M917e Mota, Clésio Evangelista.
As equações de Friedmann. / Clésio Evangelista Mota. -
Cuité: [s. n.], 2015.
61 fl. il. color. fot.

Orientador Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas.
Co-orientador Prof. Dr. João Batista.
Monografia do Curso de Licenciatura em Física.

1. Teoria da relatividade geral. 2. Equações de
Friedmann. 3. Energia escura. 4. Campo escolar. I. Dantas,
Joseclécio Dutra. II. Silva, João Batista da (Co-
orientador). III. Universidade Federal de Campina Grande.
IV. Centro de Educação e Saúde. V. Título

CDU 530.12

CLÉSIO EVANGELISTA MOTA

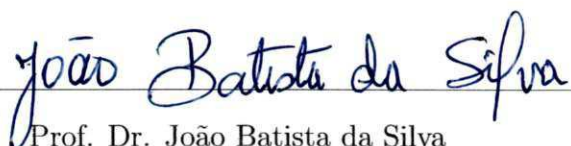
AS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Aprovada em 18 de Março de 2015

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas
Orientador - (UFCG/CES/UAE)



Prof. Dr. João Batista da Silva
Coorientador - (UFCG/CES/UAE)



Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros
Examinador Interno - (UFCG/CES/UAE)



Prof. Dr. Jair Stefanini Pereira de Ataíde
Examinador Suplente - (UFCG/CES/UAE)

*A Deus, aos meus Pais,
a meu ser (Minha Esposa).*

Procuro algo mais fundamental que um quark regido por uma Força da Natureza. Procuro uma Essência capaz de desvendar a dança do universo no momento da Criação. Na vastidão do Cosmos, minha imaginação terá uma existência temporal tão ínfima quanto partículas virtuais em uma flutuação quântica.

(Clésio Evangelista Mota)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela dádiva da vida e pelas bênçãos que proporcionaram alcançar novos horizontes, pela oportunidade do estudo, pela capacidade do conhecimento.

Agradeço aos meus Pais por acreditarem em mim e pelo apoio nessa caminhada ao longo da vida, pelo amor e carinho, por me incentivarem a nunca desistir e buscar sempre o melhor. Meus agradecimentos em especial a eles. Sempre serei grato.

À minha Esposa em ter cruzado o meu destino, pelo amor, apoio e carinho, e todos os momentos felizes que ainda passaremos juntos.

Aos meus amigos *José Joelson, Robson Galdino, Victor Medeiros, Adriano Oliveira, Rosinaldo, Tiago Queiroz, Jabes e Luana, João Carlos Araújo, Francinildo, Joerlly Romão, João Crispim, a Johnyefeson Oliveira*, pela amizade, ajuda e o incentivo; *Acácio e Valeska, Isaac Macedo, Kauan Gerald, Mikael Albuquerque, Érick Caique, Jeancarlo Meira* e aos demais amigos.

A dona *Edileuza* e toda a sua Família pelo acolhimento como um filho e por todas às vezes que me proporcionou um alimento quando tive fome.

Agradeço também a *Marcus Lima* e aos seus Pais, a *Jair Andrade, Desiane Maiara*, a *Guilherme Miller, Mirella Caroene* e sua Mãe; também a *Pablo Lima, Robson, Aléxsandro, Alex Gustavo, José Roberto, Louis Gustavo e Dona Seisinha*.

Ao meu orientador Joseclécio Dutra e ao meu co - orientador João Batista, que me guiaram e me deram ensinamentos neste trabalho e ao longo do curso. Também de coração aos demais professores do CES.

Meus agradecimentos ao professor Fábio Medeiros por ter sido sempre presente a nos ajudar, pela força de incentivo e pelos ensinamentos.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para a concretização desse trabalho.

Estou - lhes grato!

Resumo

As soluções das Equações da Teoria da Relatividade Geral (TRG) para um Universo em expansão foram obtidas pela primeira vez por Alexander Friedmann. Ele observou a possibilidade da existência de um Universo dinâmico, cujo comportamento dependeria exclusivamente da forma de como a matéria e energia fossem distribuídas. Neste trabalho, discutimos a dedução das equações de Friedmann, estudando algumas bases importantes para o entendimento e desenvolvimento da Cosmologia Moderna. Usando uma ação denominada de Einstein - Hilbert como caminho, encontramos as equações de campo da TRG. Reescrevemos as equações de campo da Gravitação na métrica de Friedmann - Robertson - Walker (FRW), onde obtemos duas expressões: uma delas dá informação sobre a aceleração do Universo em termos da densidade de energia ρ e da pressão p ; a outra mostra a evolução do parâmetro de Hubble H em termos da densidade de energia ρ e da constante de curvatura k . São conhecidas como as Equações de Friedmann. Inserimos um exemplo mais simples de um campo escalar ϕ nas equações de Friedmann através da utilização do tensor energia - momento, considerando um universo dominado por Energia Escura. A partir disto, foi possível obter a densidade de energia, pressão e a equação do movimento de ϕ .

Palavras-chave: Teoria da Relatividade Geral, Equações de Friedmann, Energia Escura, Campo Escalar.

Abstract

Solutions of General Relativity Theory of Equations (TRG) for an expanding Universe were obtained first by Alexander Friedmann. He noted the possibility of a dynamic Universe, whose behavior solely depend on the form of how matter and energy were distributed. This paper, we discuss the deduction of the Friedmann equations, studying some important foundations for the understanding and development of Modern Cosmology. Using an action called Einstein - Hilbert way as we find the field equations of TRG. Rewrite the field equations of gravitation in metric Friedmann - Robertson - Walker (FRW), where we get two expressions: one gives information on the acceleration of the universe in terms of energy density ρ and pressure p ; the other shows the evolution of the Hubble parameter H in terms of energy density ρ and the curvature constant k . They are known as Friedmann Equations. Inserted a simple example of a scalar field ϕ in the Friedmann equations by using the tensor energy - moment when considering a universe dominated by Dark Energy. From this, it was possible to obtain the energy density, pressure and motion equation ϕ .

Keywords: General Theory of Relativity, Friedmann Equations, Dark Energy, Scalar Field.

Sumário

1	Introdução	10
2	O Princípio Cosmológico e a Cosmologia Moderna	13
2.1	Princípio Cosmológico	16
2.2	Modelo Cosmológico Padrão	18
2.3	Redshift Cosmológico	19
2.4	Lei de Hubble	21
3	Equações de Einstein	24
3.1	Ação de Einstein - Hilbert	26
4	As equações de Friedmann e a métrica FRW	32
4.1	A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	32
4.2	Tensor de Ricci e o Escalar de Curvatura	36
4.3	Tensor Energia-Momento	39
4.4	As Equações de Friedmann	39
5	Campo Escalar e Energia Escura	44
5.1	A Energia Escura e a Expansão Acelerada	45
5.2	As Equações de Friedmann com Campo Escalar	49
6	Considerações Finais	53
	Referências Bibliográficas	56

Lista de Figuras

2.1	Imagem mostra a CMB medida pela sonda espacial WMAP. Extraída de [10].	15
2.2	Imagem mostra a homogeneidade e a isotropia do Universo em grande escala, aproximadamente 3 milhões de galáxias. Extraída de [17].	17
2.3	Representação gráfica da lei de Hubble, extraída de [7].	22
4.1	Geometria do Universo para $k = 0$, extraído de [42].	34
4.2	Geometria do Universo para $k = +1$, extraído de [42].	35
4.3	Geometria do Universo para $k = -1$, extraído de [42].	35
5.1	Esta figura mostra observações do aglomerado de galáxias Bala. Na imagem à esquerda, é apresentada observação por meio óptico. Já na imagem a direita, apresentam observações em raio-X. Os contornos representam a distribuição da matéria no aglomerado, permitindo mostrar de maneira clara a separação existente entre as duas componentes escura e gás. Extraída de [50].	46

Capítulo 1

Introdução

O conhecimento a respeito do Universo, desde sua origem, sua forma, sua constituição e dinâmica, sempre foram temas que estimularam a curiosidade humana e que agora, mais do que nunca, são focos principais de grandes pesquisas dentro da comunidade científica. A Cosmologia Moderna dispõe de um grande número de evidências observacionais astronômicas que permitem caracterizar um cenário de Universo em larga escala. Essas fontes de pesquisa trouxeram importantes descobertas no século XX, dando origem à novos mecanismos e teorias cosmológicas compatíveis com a observação. Uma das maiores contribuições para o estudo do Cosmos foi feita por Albert Einstein ¹, em 1917, quando ele propôs o seu modelo de universo baseado na Teoria da Relatividade Geral (TRG). Einstein acreditava em um Universo estático e, em larga escala, homogêneo e isotrópico.

O século XX foi um século cheio de grandes descobertas. A proposta de um Universo em expansão foi, de fato, um marco que mudou a nossa concepção do Cosmos. As soluções das equações da TRG que admitiam a expansão do Universo foram obtidas pela primeira vez por Alexander Friedmann ², que mais tarde publicou trabalhos independentes que também resultaram em modelos de Universo em expansão. Atualmente, o problema fundamental da Cosmologia é a aceleração cósmica, tendo como justificativa deste aspecto, a introdução, no contexto da Relatividade Geral, de uma componente exótica, a energia

¹Albert Einstein (1879 - 1955) foi um físico teórico alemão. Dentre as suas obras está a Teoria da Relatividade Geral (TRG), considerada como um dos dois pilares da Física Moderna. Recebeu o Prêmio Nobel de Física no ano de 1921 pela descoberta do Efeito Fotoelétrico, onde, a partir disto proporcionou o estabelecimento da teoria quântica da matéria.

²Alexander Friedmann (1888 - 1925) foi um cosmólogo e matemático russo. É mais conhecido por sua teoria da expansão do Universo. Teoria essa que é regida por um conjunto de equações, conhecidas como as Equações de Friedmann.

escura. Entidade essa que desafia a comunidade científica na busca de novos modelos capazes de descrever este “desconhecido” Universo. Entretanto, até o momento, não há indicação provável da natureza desta componente.

Baseado na Teoria da Relatividade Geral de Einstein, o Modelo Cosmológico Padrão foi construído com o objetivo de explicar as recentes observações astronômicas em grande escala, tendo como base as Equações de Friedmann; equações estas, que possuem uma forma única com as condições de: que o Princípio Cosmológico seja satisfeito e a Relatividade Geral descreva a gravitação, resultando assim na chamada cosmologia padrão de Friedmann - Robertson - Walker, a qual é foco principal deste trabalho.

O desenvolvimento deste trabalho tem por objetivo geral a dedução das Equações de Friedmann, ou mais comumente para alguns leitores, as Equações da Gravitação de Albert Einstein reescritas na métrica de Friedmann - Robertson - Walker (FRW), como bases do Modelo Cosmológico Padrão. Inicialmente no Capítulo 2 serão apresentados alguns conceitos básicos da Cosmologia Moderna, essenciais para o entendimento da evolução do Universo do ponto de vista da Teoria do Big Bang, e que são fundamentais no decorrer do trabalho para o entendimento do que pretendemos discutir. No Capítulo 3, será discutida a formulação de Einstein - Hilbert que, nos permitirá obter a dedução das Equações de Campo de Einstein da Gravitação. No Capítulo 4, como foco do trabalho, deduziremos as Equações de Friedmann, tendo como base o uso da métrica FRW. Em sequência, no Capítulo 5, como complemento, será feita uma aplicação dos resultados alcançados no Capítulo 4. Para isto, consideraremos o Universo dominado por uma forma de energia, onde será representada através de um Campo Escalar ϕ . Na qual, segundo a literatura, essa forma de energia é denominada de Energia Escura. Contudo, é importante deixarmos claro que, não estamos tratando especificamente modelos de Energia Escura e, que ϕ é um candidato a esse fenômeno. Por fim, no Capítulo 6 trataremos das considerações finais numa perspectiva de futuras extensões do que foi desenvolvido neste contexto, finalizando assim este trabalho.

O ponto fundamental em desenvolver este trabalho, e por assim dizer a justificativa,

é realizar uma abordagem mais minuciosa do tema escolhido. Já que, de forma geral, não é encontrado na literatura, uma análise tão detalhada como da forma que propomos, onde queremos explorar com mais cuidados os elementos teóricos como um todo, para que o leitor se sinta suficientemente seguro pelo fácil acesso na leitura e no entendimento. Ao mesmo tempo, procuramos dar ênfase em apresentar as passagens matemáticas de maneira explicativa, priorizando a linguagem acessível para novos alunos que pretendam iniciar nessa área, podendo ser considerado este, como o ponto mais importante de todo o nosso trabalho.

Capítulo 2

O Princípio Cosmológico e a Cosmologia Moderna

Neste capítulo, discutimos alguns conceitos e princípios essenciais para o entendimento de como pode ser a evolução do Universo, do ponto de vista da Teoria do Big Bang. De uma maneira geral, abordamos Princípio Cosmológico, Modelo Cosmológico Padrão, Redshift Cosmológico e Lei de Hubble. Segundo os estudos, a Cosmologia Moderna teve início em 1917 com Albert Einstein [1]. A descoberta do universo em expansão foi o maior avanço científico do século XX. A partir disto, surgiram novas teorias e novas interpretações matemáticas sobre a origem e o destino do universo em uma cronologia de pensamentos . Uma delas é teoria da Relatividade Espacial de Albert Einstein, como citado em [1, 2, 3].

Desde o início do século XX, a Cosmologia vem passando por grandes avanços, tanto teóricos quanto experimentais [1, 3, 4, 5, 6]. Instrumentos modernos de pesquisas espaciais como o Telescópio Hubble [1], o Satélite COBE [5] e a sonda espacial Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [7, 8], o laboratório Fermi de Chicago (Fermilab) [3], o Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN), o experimento Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [7, 8], entre outras observações no laboratório observacional no Monte Wilson [6], todos buscam sondar a natureza e suas profundezas, trazendo compreensões sobre o Cosmos.

O telescópio Hubble foi o primeiro grande telescópio óptico a ser lançado no espaço. Tinha por foco observar as estrelas e as galáxias mais distantes, além dos planetas do nosso

sistema solar. Lançado em Abril de 1990, o telescópio Hubble marcou o maior avanço significativo astronômico após o telescópio de Galileu Galilei [1, 9]. Funcionou juntamente com centros observacionais, forçando alguns cientistas a criar teorias que englobassem os fenômenos naturais mais detalhadamente. Desde então, novas fronteiras do conhecimento vão sendo superadas e ao mesmo tempo novas técnicas de pesquisa têm sido aprimoradas, juntamente com novos questionamentos.

O satélite COBE foi o primeiro satélite responsável pela descoberta original da radiação cósmica de microondas de fundo, um fóssil do Big Bang. Importantes observações desse tipo se deram gradativamente com outros projetos em estudo do nosso Universo. As observações foram sendo aprimoradas com o passar do tempo. Realizar tais observações é a missão espacial feita pela sonda Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, mais comumente conhecida pela sigla WMAP. Sucessora ao COBE foi lançada em 30 de Junho de 2001. Composto por dois receptores de micro-ondas de aproximadamente 1,6 metros de diâmetro, tem por objetivo medir as diferenças de temperaturas da polarização da radiação cósmica de fundo na faixa de microondas [7, 8].

A sonda espacial WMAP mapeia o universo em larga escala, buscando informações dos primeiros momentos após a criação. Medições da radiação cósmica de fundo polarizada possibilita o estudo das amplitudes das flutuações de densidade existente no Cosmos ao produzirem as primeiras galáxias. A partir disto, podem ser obtidas informações sobre a idade do Universo, densidade dos átomos e densidades de elementos não - atômicos do período primordial. O Universo inicial se encontrava em um estado quente e denso, expandindo e resfriando até então, com flutuações minúsculas que foram geradas e eventualmente cresceram para formar as galáxias [10]. Previsões apoiadas nas medidas da WMAP modificam a visão da cosmologia de uma ciência especulosa à uma ciência de precisão. Notavelmente, a WMAP também confirma previsões de que as variações na densidade do Universo em grande escala devem ser maiores do que em pequena escala [10].

O modelo do Big Bang descreve um universo superquente e superdenso no pas-

sado. Toda a radiação existente se encontravam acoplada aos bárions através do efeito de espalhamento Compton. O Universo foi se resfriando conforme a sua expansão, chegando a um momento que os fótons existentes não possuíam mais energia suficiente no processo de ionização do hidrogênio. Segundo a literatura, esse evento é conhecido como recombinação, momento em que os fótons passaram a se propagar livremente. Restando assim um fóssil do Big Bang, denominado radiação cósmica de fundo (CMB - do inglês cosmic microwave background) [10]. Vejamos a (Figura 2.1).

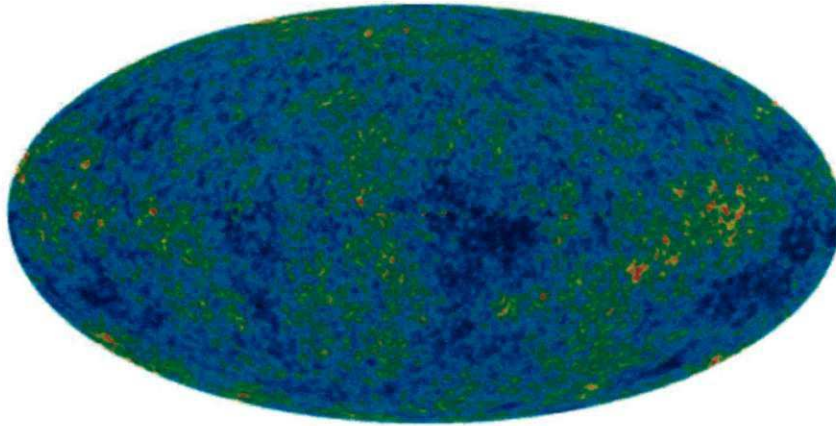


Figura 2.1: Imagem mostra a CMB medida pela sonda espacial WMAP. Extraída de [10].

A detecção da CMB ocorreu de maneira inesperada no ano de 1965, quando dois engenheiros; Robert Wilson e Arno Penzias dos Laboratórios Bell identificaram um sinal isotrópico, o calor gerado pelo Big Bang sob forma de radiação. Por permear todo o Universo, essa radiação é denominada de radiação cósmica de fundo (CMB) [10].

O laboratório Fermi de Chicago (Fermilab) e o Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN) vem buscando melhorar a compreensão da estrutura do Universo. Construído desde de 1967, o Fermilab foi o primeiro laboratório na área de Física de Partículas nos Estados Unidos [3, 11]. Trabalha com aceleradores de partículas mais avançados na “quebra de matéria”. Busca também sondar os confins do Universo em busca da natureza da Matéria e Energia Escura.

A Organização Europeia em Pesquisa Nuclear (CERN) dispõe de instrumentos

maiores e complexos para estudar a composição intrínseca da matéria e suas interações, as partículas fundamentais. Criado em 1954, o CERN possui aceleradores e detectores projetados para colidir pedaços de matéria em altas velocidades, próximas a da luz. Busca criar uma aproximação do que se tinha instantes após o Big Bang [12].

O experimento Sloan Digital Sky Survey (SDSS) tem por base criar mapas tridimensionais das distribuições das galáxias [7]. O SDSS deu início ao estudo do Cosmo no ano de 2000 em uma sequência de fases até os dias atuais; dentre elas se encontram SDSS-I (2000-2005), SDSS-II (2005-2008), SDSS-III (2008-2014), e SDSS-IV (2014-). Cada um destes experimentos possui objetivos científicos específicos. Medindo as composições, posições e movimentos de estrelas individuais, devem revelar como as galáxias evoluíram de um passado distante para hoje [7, 13].

O Universo expande aceleradamente, segundo as observações. Surge uma nova Essência responsável pela aceleração, de natureza desconhecida e exótica, com pressão negativa e que permeia todo o Universo, denominada de Quintessência ou Energia Escura. Ligada à física moderna, a Cosmologia busca entender os mecanismos do Universo com observações e ao mesmo tempo ligada a um grande suporte teórico, especialmente a Teoria da Gravitação de Albert Einstein de 1915, mais conhecida como Teoria da Relatividade Geral [1, 5, 14, 15].

2.1 Princípio Cosmológico

O Princípio Cosmológico defende a ideia de que a localização do planeta Terra ou do Sistema Solar não é privilegiada no Universo. Afirma que o Universo é homogêneo e isotrópico em todos os pontos [3]. Um exemplo disto seria se fixássemos um ponto no Universo com uma coordenada central e tentássemos calcular a densidade das galáxias, seriam obtidos valores independentes das distâncias a este ponto, não havendo uma geografia privilegiada de observação [3]. Este princípio foi proposto por Edward Milne (1896 - 1950) e mais tarde aprimorado através de observações por Walter Baade (1893 - 1960) [16].

Ao observar o Cosmos em pequenas escalas talvez não pudéssemos notar tal homogeneidade. O fato se resume na observação que em pequenas distâncias temos inúmeras concentrações de estrelas e galáxias. Este fator ocorre na ordem de aproximadamente 20 a 30 Mpc ¹. A medida que ultrapassarmos distâncias da ordem de 100 Mpc o Universo se torna cada vez mais homogêneo, não importando a direção considerada [16]. Assim, a esta homogeneidade e isotropia em grande escala chamamos Princípio Cosmológico. Para melhor entendermos este princípio, a figura abaixo (Figura 2.2) nos mostra como a distribuição das galáxias parece uniforme em grande escala [17].

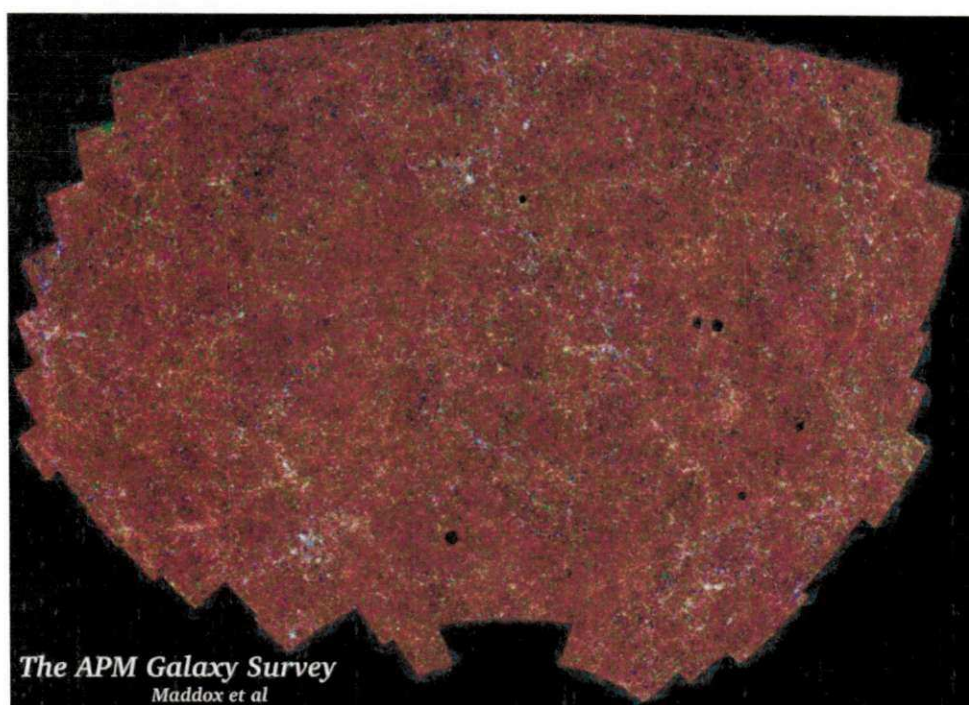


Figura 2.2: Imagem mostra a homogeneidade e a isotropia do Universo em grande escala, aproximadamente 3 milhões de galáxias. Extraída de [17].

O Princípio Cosmológico é a base para a construção de grande parte de todas as teorias cosmológicas. É baseado na hipótese de que qualquer lugar no Universo é fundamentalmente análogo, em se tratar de grandes escalas. O termo isotrópico prediz que todas as direções do espaço são equivalentes para um observador; nenhuma direção de observação se sobressai sobre a outra. Isso é válido para qualquer lei fundamental da

¹Parsec (pc) é uma medida de distância astronômica que equivale a 3,26 anos-luz.

Física. Um espaço homogêneo, de um modo simplificado, é aquele em que todas as regiões são equivalentes; as leis físicas são as mesmas em qualquer ponto do Universo [18, 19].

2.2 Modelo Cosmológico Padrão

Fundamentado na teoria do Big Bang, o Modelo Cosmológico Padrão se baseia no Princípio Cosmológico e nas Equações de Einstein. Por longos anos imaginou-se que o Universo seria estático e ao mesmo tempo imutável. No início do Século XX, surgiram evidências controvertidas relacionadas a esse paradigma. O cientista Albert Einstein acreditava em um universo estático, o qual suas equações da relatividade descreviam. Considerada como o maior erro de sua vida, a Constante Cosmológica para Albert Einstein seria de fato uma solução inviável [20, 21]. Entretanto, no ano de 1929, o astrônomo norte americano Edwin Powell Hubble (1889-1953) constatou que as galáxias estariam se afastando de nós. Constatou que haveria uma expansão [5, 21].

A Constante Cosmológica Λ surgiu a partir da hipótese de um universo em colapso, assim venceria a inércia gerada pela matéria que o compõe. Desmitificaria a natureza atrativa da gravidade com um efeito de repulsão. Para Einstein Λ traria um modelo de universo instável [5, 22].

Pesquisas relacionadas continuaram a ser exploradas por outros cientistas. Um dos trabalhos importantes dessa época foi o de Georges Lemaître, no qual descreveu o surgimento do Universo baseado no decaimento radioativo segundo o núcleo de um átomo, o átomo primordial [7].

A ideia do átomo primordial era concebida de forma a preencher todo o espaço, por apenas um pequeno intervalo de tempo, instável, e que se desintegrava em um rápido processo. Esse modelo do universo se dividia em três momentos distintos, sendo o primeiro um momento de expansão rápida causada pela desintegração inicial do átomo primitivo. O segundo momento se denominou como “ Marcha por Inércia ”, um período de desaceleração drástica, sem intervalo de tempo necessário para a formação das estrelas. O terceiro período se deu por um momento de expansão acelerada, momento este que dá

um maior suporte para a Λ [7].

O átomo primordial proposto por Lemaître não pressupõe que o universo tenha se originado de um ponto, o qual chamamos de singularidade primordial, mas poderia ter havido um estado estático, sem nenhuma contração ou expansão. Os modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), demonstram através de cálculos matemáticos que toda a matéria do Universo se encontrava concentrada em um tempo finito nos momentos iniciais, com altas temperaturas e altas densidades. É a partir desta comprovação matemática que surge o conceito de Big Bang [15, 18]. O modelo FLRW será discutido mais a frente neste trabalho.

Com as evidências da expansão do Universo, o modelo cosmológico do Big Bang entrou em cena. Toda a matéria e a energia existentes no Universo estaria concentrada em apenas um ponto nos tempos primordiais. Segundo o astrônomo e físico Belga Georges Lemaître, este estado se denominava de átomo primordial, um estado de densidade do Universo muito elevada. Lemaître foi o primeiro cientista a iniciar com estudos sobre a origem do Cosmos denominado atualmente grande explosão inicial [15, 22].

2.3 Redshift Cosmológico

Após observações de Edwin Powell Hubble no ano de 1929, constatou-se que as galáxias estavam em movimento de recessão, como evidência da expansão do Universo. Hubble em suas observações verificou que grupos de galáxias fora de alguns grupos locais possuíam um certo Redshift, ou seja, um pequeno deslocamento espectral para o comprimento de onda na faixa do vermelho [20]. O fenômeno de Redshift ocorre quando uma radiação eletromagnética é refletida ou emitida por alguns corpos celestes e assim se desloca para um comprimento de onda λ maior, e ao mesmo tempo com energia menor [19].

Quando um átomo é excitado, o mesmo se torna instável. Há liberação do excesso de energia, pela emissão de luz, no processo de decaimento em busca do estado de maior estabilidade. Cada átomo ou molécula possui uma faixa espectral bem definida, ou seja,

um espectro de emissão e absorção característico. Essa faixa espectral se assemelha a decomposição da luz a partir de um prisma. Os espectros de emissão das galáxias são conhecidos. A partir disto foi criada uma expressão que possibilita o cálculo da velocidade de afastamento das galáxias em referência ao planeta Terra. Esta expressão é definida por:

$$z = \frac{\lambda_{observado} - \lambda_{emitido}}{\lambda_{emitido}}, \quad (2.1)$$

onde o termo z é o redshift, que é uma medida de quão distante as galáxias estão, $\lambda_{observado}$ representa o comprimento de onda de luz observado, e $\lambda_{emitido}$ o comprimento de onda de luz no referencial da fonte. Por outro lado, para $z < 0$, então $\lambda_{observado} < \lambda_{emitido}$ indica uma aproximação da fonte. Esse efeito é denominado de Blueshift que se dá através do espectro de menor comprimento de λ , ou comumente desvio para o azul [23].

O efeito Doppler Relativístico possibilita a observação de redshift. O fenômeno Doppler Relativístico ocorre quando a luz se desloca com diferentes velocidades (v) entre dois referenciais, e deve satisfazer as condições das transformações de Lorentz [19].

A expansão do Universo é uma outra componente diferente causadora do fenômeno de redshift cosmológico, segundo o fator de escala do universo $a(t)$. Os redshifts de alguns corpos celestes cresce proporcionalmente de acordo com suas distâncias, ou podemos dizer segundo a Lei de Hubble [19]. Este redshift é representado por:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1, \quad (2.2)$$

onde o termo t_0 representa o tempo presente do Universo [5, 19].

O fator de escala $a(t)$ da métrica FLRW se relaciona com o redshift cosmológico. Dados sobre $a(t)$ de fase de crescimento, regressão ou constante são obtidos através da observação nas mudanças de suas frequências das linhas espectrais de algumas galáxias longínquas com a comparação de dados obtidos nos laboratórios [8, 16].

2.4 Lei de Hubble

Edwin Powell Hubble (1889 - 1953) ² recebeu seu Ph.D. em Astronomia no ano de 1917 pela Universidade de Chicago. A base de seus trabalhos era o estudo fotográfico das nebulosas, palavra originada do latim que significa nuvem. Hubble queria encontrar a resposta para o enigma da época: Qual é o tamanho do Universo? Para isto Hubble utilizou o telescópio refletor Hooker de 2,5 m localizado no observatório Monte Wilson na Califórnia [7, 8].

No ano de 1923, Hubble descobriu a primeira estrela variável em uma das maiores nebulosas, a constelação de Andrômeda (M31). Mais tarde cefeida espiral M33 e as nebulosas NGC 6822. As estrelas variáveis são bolas de gás que pulsam, brilhando e se apagando em um ciclo regular. A luminosidade das estrelas varia lentamente em pequenas escalas; passa por fases subsequentes com uma variação temporal drástica de luminosidade. Nesse estágio são denominadas de variáveis. As estrelas variáveis em magnitude e luminosidade denomina-se variáveis cefeidas; à medida que aumenta em magnitude seu brilho abranda [7, 8].

Com base em um grande número de dados observacionais, Edwin Hubble demonstrou que esses corpos celestes descritos acima se situavam fora da Via Láctea. Em sequência, mais precisamente no ano de 1912, o astrônomo estadunidense Vesto Melvin Slipher (1875 - 1969), considerado o primeiro astrônomo a medir a velocidade radial de uma galáxia, no Observatório Lowell, deu início ao estudo de deslocamentos Doppler no espectro das nebulosas espirais, concluindo que as mesmas estavam em movimento mais aceleradamente que as próprias estrelas em nossa Galáxia [7].

A partir desses resultados, Hubble aprimorou suas medições das distâncias as galáxias mais longínquas, utilizando as estrelas variáveis encontradas nas galáxias mais próximas. Utilizando as distâncias das galáxias mais próximas, Hubble era capaz de encontrar

²Edwin Powell Hubble (1889 - 1953) foi um astrônomo americano. É geralmente considerado como um dos cosmólogos observacionais mais importantes do século XX. Demonstrou que a velocidade de recessão das galáxias aumenta à medida que se afasta da Terra (Lei de Hubble), detectando assim a expansão do Universo.

a magnitude das estrelas que brilhavam com mais intensidade. Com base nesses dados, seria possível encontrar a distância estimada segundo a relação módulo distância. No ano de 1929, em seus trabalhos, publicou um artigo que detalhava um novo método que se caracterizava pelas distâncias encontradas *versus* a velocidade radial das galáxias de Vesto Slipher.

Foi estudando a luz das galáxias que Hubble fez a sua descoberta: observou que a luz que essas galáxias emitiam se deslocava para a faixa de frequência do vermelho, o que significava que estavam se distanciando. Descobriu também que a velocidade com que se distanciavam era proporcional à distância delas. Concluiu que quanto mais distante se localizavam maior era a velocidade de recessão, conforme Figura 2.3 [7].

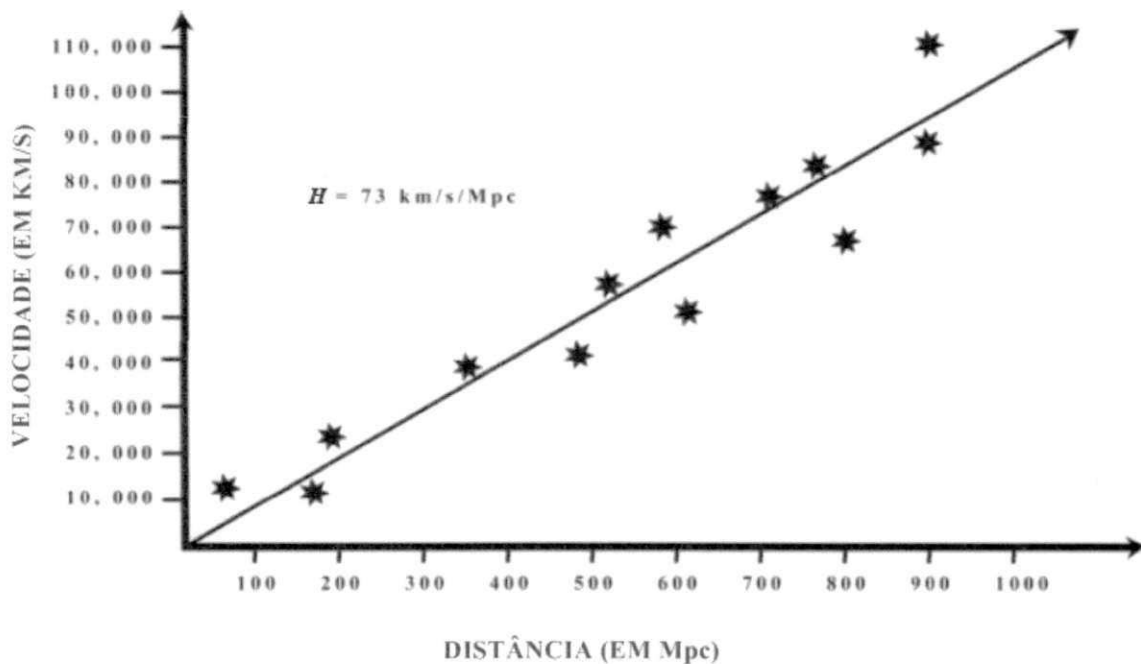


Figura 2.3: Representação gráfica da lei de Hubble, extraída de [7].

A Figura 2.3 representa a lei de Hubble. O mesmo descobriu que a velocidade das galáxias é igual à distância multiplicada por uma constante, a constante é representada pela inclinação do gráfico (Figura 2.2) [7, 14]. Matematicamente a lei de Hubble,

$$v_g = d_g \times H. \quad (2.3)$$

O termo V_g representa a velocidade de afastamento da galáxia que está a uma distância d_g do referencial planeta Terra, multiplicado pelo fator H que denominamos como Parâmetro de Hubble ou mais comumente conhecida como constante de Hubble [14]. A Equação acima (2.3) nos mostra que a velocidade de afastamento das galáxias é diretamente proporcional a sua distância, exprime assim a chamada expansão do Universo [24]. O valor do termo H muda como o passar do tempo de acordo com a evolução do Universo, permite obter o tempo de início da expansão. A chamada constante de Hubble vale $H = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, onde a constante adimensional $h = 0.67 \pm 0.12$ [16].

Capítulo 3

Equações de Einstein

Neste capítulo, discutimos a dedução das equações de Einstein. As mesmas são a base para a teoria da gravitação, conhecida como Teoria da Relatividade Geral (TRG) publicada no ano de 1916 [25]. A TRG descreve como a Gravidade é gerada a partir da curvatura do espaço pela distribuição da matéria e da radiação [26]. E, inversamente, como a gravidade afeta a matéria.

A TRG é uma generalização da Teoria da Relatividade Restrita de 1905, com a conjunção da matematização de Minkowski ampliada para espaços-tempos curvos [27]. Após a construção da Relatividade Restrita, Albert Einstein concluiu que esta se tratava de uma teoria incompleta em pelo menos duas situações [28]. De início, surgia afirmação de que nenhuma interação física da natureza poderia ocorrer mais rápido do que a velocidade da luz. A outra limitação da sua teoria era que descrevia apenas movimentos relativos entre referenciais inerciais [27].

A partir disto, Einstein se propôs a generalizar a sua teoria da Relatividade Restrita para referencias não - inerciais, ou seja, referenciais acelerados [27, 29]. Na busca de uma teoria mais aprimorada que englobassem uma maior generalização dos fenômenos da natureza, o mesmo foi acometido por um pensamento, o princípio denominado como Princípio de Equivalência. Este princípio afirma que as massas inerciais e as massas gravitacionais são equivalentes, ou seja, a propriedade da matéria se comportar de duas maneiras, ora como Gravidade, ora como Inércia [30].

Fundamentalmente, a TRG é uma teoria de campo que descreve os resultados

gravitacionais causados pela curvatura do espaço-tempo. Alguns resultados importantes são a deflexão de um raio luminoso na presença de um campo gravitacional intenso, a qual se denomina como Redshift Gravitacional, a explicação da precessão do Periélio do planeta Mercúrio, e além disto, algumas previsões de ondas gravitacionais ¹ [31, 32].

Falaremos agora sobre o Princípio de Mínima Ação. É importante apresentarmos este princípio para fazermos a dedução das Equações de Einstein. Joseph - Louis Lagrange ² no ano de 1788 criou uma formulação matemática a qual chamamos de Mecânica Analítica [33], abrangendo de forma mais unânime algumas definições de força e momento linear do que a Formulação Newtoniana, e ao mesmo tempo com um rigor matemático maior. Por se tratar de um princípio, assim como as Leis de Newton, não é demonstrado [34].

Segundo Lagrange, a trajetória real descrita pelo sistema é aquela cuja ação S possui um valor mínimo [33]. Tal ação S possui uma semelhança com o princípio de Maupertuis, que afirma: “ a natureza, na produção de seus efeitos, sempre age da maneira mais simples ” [34, 35].

O Princípio de Mínima Ação depende das energias Cinética T e Potencial V do sistema. Afirma que a ação S realizada entre dois estados A e B no movimento é mínima [36]. A ação é definida como a integral da função escalar denominada por função de Lagrange ou Lagrangiana $L = T - V$ do sistema em relação ao tempo [35, 36].

$$S = \int_A^B L dt \quad (3.1)$$

Para um sistema de partículas, a função Lagrangeana é expressa em termos das coordenadas generalizadas q_i , das velocidades generalizadas e do tempo. Utilizando o cálculo variacional, obtemos da condição (3.1), a seguinte expressão matemática

¹Ondas Gravitacionais são flutuações cósmicas primordiais geradas durante o período de uma rápida expansão acelerada do Universo, conhecido como período inflacionário (Inflação). Período este que foi originado frações de segundos após a criação do Cosmos. Ondas Gravitacionais se caracteriza como perturbações na estrutura do espaço-tempo, na própria geometria do Universo [31, 32].

²Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) foi um matemático, físico e astrônomo italiano. Suas descobertas tiveram grande importância no desenvolvimento da ciência, dentre elas, contribuições para a teoria dos números e a mecânica celeste.

$$\delta S = \delta \int_A^B L dt = 0. \quad (3.2)$$

3.1 Ação de Einstein - Hilbert

As Equações de Campo, como foram denominadas por Einstein, tinham por intuito descrever o campo gravitacional. Resumia-se em um conjunto de equações diferenciais lançado em um de seus trabalhos do ano de 1915 (As Equações de Campo da Gravitação [37]). A partir de um princípio caracterizado como Princípio Variacional, David Hilbert³, matemático alemão, de forma autônoma obteve as mesmas equações de campo [38]. Hilbert utilizou uma ação para obter tais equações. Esta ação ficou conhecida como ação de Einstein - Hilbert [39].

Como enfoque deste capítulo, agora deduziremos as Equações de Einstein. De maneira geral, uma ação em quatro dimensões espaço-temporais tem a forma

$$S = \int d^4x L, \quad (3.3)$$

onde L representa a lagrangeana do sistema.

No vácuo, a ação que leva às Equações de Einstein é representada por

$$S = K \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.4)$$

onde $K = \frac{-c^2}{16\pi G}$ é uma constante e R é o escalar de Ricci, mais conhecido como o escalar de curvatura [27, 39], definido por $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

Agora, considerando um universo com, além de curvatura, preenchido por matéria, a ação fica dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{-1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) \quad (3.5)$$

³David Hilbert (1862 - 1943) foi um matemático alemão que deu grandes contribuições no desenvolvimento da matemática no decorrer do século XX. É considerado como o criador da análise funcional. Desenvolveu também o espaço infinito dimensional, caracterizado como espaço de Hilbert. Dentre as suas obras, pode se destacar o desenvolvimento da teoria cinética dos gases e teoria da radiação.

onde em cosmologia é comum escolhermos $\frac{4\pi G}{c^2} = 1$. O termo $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ representa a densidade lagrangeana da energia e matéria [39]. Ou seja, traz informação sobre o conteúdo do universo. No termo multiplicador $\sqrt{-g}$, g é definido como o determinante do tensor métrico a partir de $g = |g_{\mu\nu}|$ [25]. R representa a curvatura.

O que iremos fazer agora é uma pequena perturbação na ação S . Estamos estudando qual a resposta da ação com respeito a pequenas variações na métrica. Seja a variação sofrida pela ação da seguinte forma:

$$S \rightarrow S + \delta S. \quad (3.6)$$

Voltemos para a expressão (3.5). Simplesmente aplicando a regra do produto das derivadas aos termos da ação, podemos escrever

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{-1}{4} (\sqrt{-g} \delta R + R \delta \sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \delta \sqrt{-g} \right]. \quad (3.7)$$

As grandezas que estão variando são escritas em termos do $g_{\mu\nu}$. Utilizando então a regra da cadeia, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{-1}{4} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Por questão de simplicidade, vamos encontrar as variações δR , $\delta \sqrt{-g}$ e $\delta \mathcal{L}$ separadamente e depois voltar para a expressão (3.8). Iniciaremos com δR .

Para obter δR , partiremos do tensor de curvatura de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$. Um tensor de quatro índices descrito em termos dos símbolos de Christoffel:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (3.9)$$

os símbolos de Christoffel são definidos pela seguinte relação

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (3.10)$$

onde, formas simplificadas de escrever os termos ∂_μ , ∂_ν e ∂_ρ são expressas nas relações a seguir:

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad ; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad ; \quad \partial_\rho = \frac{\partial}{\partial x^\rho}. \quad (3.11)$$

Da analogia do Teorema de Gauss, só há contribuição para o integrando da hiper-superfície que apresenta o contorno [26], onde segundo o princípio variacional apresenta $\delta\Gamma = 0$. Dessa forma a grandeza $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 0$. Logo

$$\delta R = g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

Assim, como consequência de $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 0$, resulta apenas que

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

Para um maior entendimento, é importante citar que a contração do tensor de Riemann resulta no tensor de Ricci. Também podemos contrair o tensor de Ricci e assim construir o escalar de Ricci, também denominado como escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Encontraremos agora a variação $\delta\sqrt{-g}$. Utilizando as técnicas simples de derivação, esta variação é escrita como:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g. \quad (3.14)$$

Para isto, será necessário investigar δg em termos de um tensor geral K_μ^ν . Partiremos da seguinte relação

$$4! |K_\theta^\omega| = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} K_\mu^\alpha K_\nu^\beta K_\sigma^\gamma K_\tau^\delta, \quad (3.15)$$

onde $|K_\omega^\theta|$ é definido como o determinante da matriz K_ω^θ e $\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ é o símbolo de Levi-Civita totalmente antissimétrico [25].

Faremos agora dois procedimentos com a expressão (3.15). Primeiramente, multipliquemos toda a expressão por um K_ρ^ϕ .

$$4 !K_{\phi}^{\rho}K = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} K_{\rho}^{\phi} K_{\mu}^{\alpha} K_{\nu}^{\beta} K_{\sigma}^{\gamma} K_{\tau}^{\delta}, \quad (3.16)$$

feito isto, obtemos:

$$4 !K_{\phi}^{\rho}K = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} g_{\mu}^{\phi} g_{\rho}^{\alpha} K_{\alpha}^{\mu} K_{\mu}^{\alpha} K_{\nu}^{\beta} K_{\sigma}^{\gamma} K_{\tau}^{\delta}, \quad (3.17)$$

assim,

$$4.3 !K_{\phi}^{\rho}K = 4\epsilon_{\rho\beta\gamma\delta}\epsilon^{\phi\nu\sigma\tau} K_{\nu}^{\beta} K_{\sigma}^{\gamma} K_{\tau}^{\delta}, \quad (3.18)$$

logo, deste procedimento realizado na expressão (3.15), conseguimos chegar ao seguinte resultado:

$$3 !K_{\alpha}^{\mu}K = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} K_{\nu}^{\beta} K_{\sigma}^{\gamma} K_{\tau}^{\delta}. \quad (3.19)$$

Agora faremos o segundo procedimento em (3.15). Considerando a natureza tensorial das operações, podemos ver que, derivando a expressão (3.15)

$$4 !dK = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} (4dK_{\mu}^{\alpha}) K_{\nu}^{\beta} K_{\sigma}^{\gamma} K_{\tau}^{\delta} \quad (3.20)$$

podemos obter:

$$3!dK = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} K_{\nu}^{\beta} K_{\sigma}^{\gamma} K_{\tau}^{\delta} dK_{\mu}^{\alpha}. \quad (3.21)$$

Comparando (3.21) com (3.19), podemos obter a seguinte expressão

$$dK = K_{\alpha}^{\mu}K dK_{\mu}^{\alpha}, \quad (3.22)$$

dessa forma, encontramos que

$$\delta g = g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.23)$$

Voltando para (3.14) e substituindo δg encontrado, a variação $\delta\sqrt{-g}$ fica descrita da seguinte maneira:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Obter $\delta\mathcal{L}$ depende da forma específica da lagrangeana utilizada, se padrão, taquiônica ou outra forma mais geral. Deixamos, então, a variação $\delta\mathcal{L}$ como está, representando a variação de uma lagrangeana geral. Retornando a (3.8), e substituindo δR e $\delta\sqrt{-g}$, obtemos

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.25)$$

Como consequência do Princípio Variacional ou, mais comumente, Princípio de Mínima Ação, devemos ter $\delta S = 0$. Dessa forma, a relação (4.2) nos dá as equações de campo da Gravitação. Logo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2 \left(2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right). \quad (3.26)$$

Segundo o Princípio de Equivalência descrito anteriormente, e as equações de campo da Gravitação, a Teoria da Relatividade Geral (TRG) propõem uma relação entre geometria e o conteúdo de matéria do Universo. O lado esquerdo de (3.26) diz respeito à geometria. O lado direito representa a matéria e energia. Podemos reescrever (3.26) da forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci, R é o escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ tensor de energia-momento integrado a campos de matéria e informa sobre o conteúdo do universo, e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. É importante citar que, em algumas literaturas, as Equações de Campo da Gravitação (3.27) são encontradas da seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu}, \quad (3.28)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor geométrico de Einstein, que nos informa a respeito da curvatura do espaço-tempo. Antes de passarmos ao próximo capítulo, faremos uma breve discussão a respeito da equação (3.27) com o objetivo de entendermos melhor o seu efeito físico.

O lado esquerdo da equação (3.27), como já mencionado, trata da geometria do espaço-tempo, representada pelo $G_{\mu\nu}$. O tensor de curvatura de Ricci $R_{\mu\nu}$ faz uma medida de como n -espaço (espaço n -dimensional) em estudo se diferencia de um n -espaço euclidiano. O escalar de curvatura, ou mais comumente chamado de escalar de Ricci, R é associado ao tensor de curvatura de Ricci $R_{\mu\nu}$, afinal $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Juntamente ao escalar de curvatura R se encontra $g_{\mu\nu}$, um termo métrico que descreve a geometria do espaço-tempo em estudo [40]. Já no lado direito de (3.27) se localiza o tensor energia - momento $T_{\mu\nu}$. Para facilitar melhor a compreensão de $T_{\mu\nu}$, vamos explicá-lo de acordo com suas componentes. A matriz que representa o $T_{\mu\nu}$ é da forma:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Cada componente desse tensor possui um significado diferente. A primeira componente T_{00} é a densidade de energia do campo em estudo. As componentes à esquerda T_{i0} onde $(i = 1, 2, 3)$ são as componentes da densidade de momento. Já T_{0i} descreve o fluxo de energia de um campo através de uma superfície representada por x^i , e as componentes T_{ij} , para $(i \neq j)$ descrevem o fluxo de momento através de uma superfície x^j . Por fim, T_{ii} são as componentes que descrevem a pressão do campo [40]. Dessa forma, fica claro que o lado direito de (3.27) está associado à geometria, e o lado esquerdo se associa com o conteúdo de matéria do Universo. Ambos os lados da igualdade possuem relação mútua entre si, como propõe a Teoria da Relatividade Geral (TRG). Dessa maneira, a TRG entende o campo gravitacional como sendo a curvatura do espaço-tempo quadridimensional curvado a partir de um conteúdo matéria-energia. Expresso nas equações de campo da gravitação, mais comumente as Equações de Einstein (3.27).

Capítulo 4

As equações de Friedmann e a métrica FRW

Neste capítulo, reescrevemos as equações de campo de Einstein em termos da métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW), a métrica para o espaço-tempo. Através de (FRW) será obtido o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Apresentaremos o Tensor Energia-Momento para um fluido perfeito, e encontramos as equações de Friedmann através da resolução das equações de Einstein para tal métrica. Veremos ainda o papel fundamental que o Princípio Cosmológico desempenha no modelo (FRW). Veremos que no elemento de linha da métrica (FRW), o termo constante k está associado à curvatura da seção espacial. Faremos uma breve discussão de k nas três geometrias possíveis de Universo.

4.1 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

A evolução do Universo é teoricamente descrita pelas equações de campo da Teoria da Relatividade Geral (TRG). Baseado no Princípio Cosmológico, o Modelo Padrão atual de Universo é a solução de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), o qual admite que o Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala [41, 42]. É importante discutirmos que matematicamente o termo homogeneidade denota que o tensor geométrico $g_{\mu\nu}$ é invariante à translação. Ou seja, isso implica que uma métrica é válida a qualquer ponto do espaço-tempo no Universo [43].

Para tanto, o Princípio Cosmológico assume que o nosso lugar no Universo não é privilegiado. Ligado ao fato de um observador obter as mesmas informações equivalente a direção de observação, reforça a ideia de isotropia em todos os pontos do espaço, e conseqüentemente de um espaço homogêneo [43].

O Modelo Padrão foi construído levando em consideração todo o espaço que compreende o Universo completamente preenchido uniformemente por matéria e radiação. As observações atuais sugerem que é uma boa aproximação considerar o Universo espacialmente homogêneo e isotrópico. Tal consideração nos leva à métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW). A mesma abriu caminho para estabelecermos matematicamente o Princípio Cosmológico que fundamenta o Modelo Cosmológico Padrão [25]

Procuramos uma métrica que descreva a geometria de nosso Universo. Para tal, precisamos determinar o elemento de linha que descreve o espaço-tempo quadridimensional de um universo homogêneo e isotrópico. Esse elemento de linha é dado pela métrica (FRW) [41, 25], que em coordenadas esféricas é apresentada da seguinte maneira

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (4.1)$$

onde $a(t)$ representa um fator que expande a seção espacial, o fator de escala no tempo t , é o parâmetro relacionado com o tamanho do Universo; k é constante e está associado a curvatura espacial, e (r, θ, ϕ) são um sistema de coordenadas comóveis, ou seja, as coordenadas espaciais das partículas não se alteram ao longo da expansão do Universo. A curvatura espacial k admite três geometrias espaciais possíveis de Universo que satisfazem o Princípio Cosmológico [44]. São elas:

- $k = 0$ Geometria Plana (Universo “plano”)
- $k = +1$ Geometria Esférica (Universo “fechado”)
- $k = -1$ Geometria Hiperbólica (Universo “aberto”)

Dessa maneira, é importante citarmos que a curvatura do espaço é uma descrição matemática, onde o teorema de Pitágoras pode ser válido ou não nas coordenadas

espaciais. Para um maior entendimento, faremos agora uma discussão sucinta das três geometrias possíveis ($k = 0$), ($k = +1$) e ($k = -1$), representando-as em figuras bidimensionais, as quais implicam em um universo Euclidiano, ou seja (“plano”), Esférico (“fechado”) ou Hiperbólico (“aberto”), respectivamente.

Geometria Plana: $k = 0$

Tem por base os axiomas da geometria Euclidiana e descreve um Universo “plano”, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre $= 180^\circ$. Sua linha Geodésica apresenta uma reta. Nessa geometria, o Universo tem volume infinito e plano (curvatura nula $k = 0$). Segundo dados observacionais, essa é a que mais se aproxima da geometria do atual Universo. O termo Geodésica se refere a uma trajetória reta no espaço-tempo, livre da ação de forças externas representa um caminho mais curto entre dois eventos. Forças essas não gravíticas [42, 25]. Neste caso, é possível ver que para um valor de $k = 0$ a métrica dada torna-se a métrica de Minkowski, e portanto o espaço-tempo torna-se plano, como pode ser visto na (Figura 4.1).

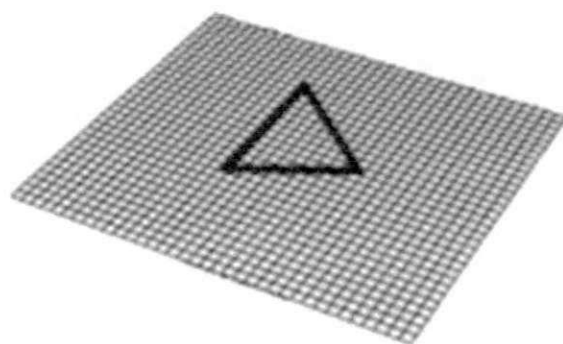


Figura 4.1: Geometria do Universo para $k = 0$, extraído de [42].

Geometria Esférica: $k = +1$

Nesta geometria o Universo é “fechado”, curvo como a superfície tridimensional de uma hipersfera (Figura 4.2). A geometria deste universo é não-euclidiana; como exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° . Além do mais, o Universo possui volume finito, embora seja sem limites ou barreiras. As linhas paralelas partem do

equador e se cruzam nos polos, descrevendo um universo fechado com comprimento de uma circunferência menor que $2\pi r$ [42, 25].

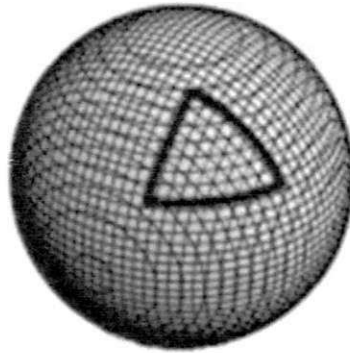


Figura 4.2: Geometria do Universo para $k = +1$, extraído de [42].

Geometria Hiperbólica: $k = -1$

A geometria do Universo neste caso é Hiperbólica (Figura 4.3). As linhas paralelas tendem a se distanciar uma das outras, descrevendo um Universo “aberto”. Apresenta volume infinito, com comprimento de uma circunferência maior que $2\pi r$ e, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° . A geometria é não-euclidiana [42, 25].

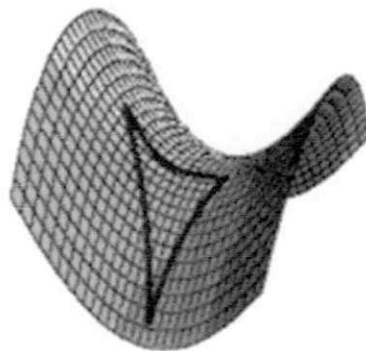


Figura 4.3: Geometria do Universo para $k = -1$, extraído de [42].

Por questão de completeza, apresentaremos agora a forma geral de um intervalo diferencial ds^2 invariante para um espaço-tempo de geometria qualquer:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.2)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é denominado como o tensor geométrico covariante, que pode ser representado por uma matriz. Para o caso em questão um universo cuja métrica é a FRW, sua forma matricial (4.3) é obtida comparando (4.2) com (4.1). Dessa forma, temos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Analisando (4.3) vemos que os únicos elementos que não se anulam são os da diagonal ($g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}$). Isso é necessário, de forma a concordar com o Princípio Cosmológico, que garante a não-existência de direções preferenciais para o Universo em grande escala.

4.2 Tensor de Ricci e o Escalar de Curvatura

Primeiramente calcularemos o Tensor de Ricci e, em seguida o Escalar de Curvatura (comumente Escalar de Ricci) na métrica (4.1). Inicialmente encontraremos as componentes dos símbolos de Christoffel diferentes de zero para tal métrica. Para isto, usaremos a relação (4.4) a seguir.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (4.4)$$

Lembrando que os $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ apresentam a propriedade de simetria $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ [45], obtemos todas as componentes não nulas:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}; \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2; \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (4.5)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}; \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2); \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta \quad (4.6)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot \theta ; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta ; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad (4.7)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} , \quad (4.8)$$

onde um ponto sobre uma variável representa uma derivada com relação ao tempo cósmico t .

Antes de darmos continuidade ao objetivo dessa seção, seria interessante falarmos mais um pouco sobre o Tensor de Ricci e o Escalar de Ricci. Primeiramente o tensor de curvatura de Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$ é definido em termos dos símbolos de Christoffel, da forma

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} . \quad (4.9)$$

Da contração entre dois dos índices do Tensor de Riemann, podemos obter o Tensor de Ricci $R_{\sigma\nu}$:

$$R_{\sigma\nu} = R^{\rho}{}_{\sigma\rho\nu} = \partial_{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} . \quad (4.10)$$

Ainda, tomando uma contração do Tensor de Ricci, obtemos o Escalar de Ricci R , ou mais comumente “escalar de curvatura”:

$$R = R^{\sigma}{}_{\sigma} = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} . \quad (4.11)$$

Vale salientar que o Tensor de Ricci (4.10) e o Escalar de Ricci (4.11) juntos formam o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, um tensor muito importante que está associado com a parte métrica do lado esquerdo das equações de campos da Gravitação. Feito isto, calcularemos agora o tensor de Ricci (4.10) para a métrica (4.1) usando a definição do tensor de curvatura de Riemann (4.9). Levando em consideração apenas as componentes não nulas, obtemos

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (4.12)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (4.13)$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2, \quad (4.14)$$

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.15)$$

Logo, partindo da definição (4.11) foi calculado o escalar de curvatura R para a métrica (4.1). Por definição, o escalar de curvatura é a soma de cada termo do Tensor de Ricci multiplicado pelo Tensor Métrico (4.3) em cada coordenada, uma temporal e três espaciais: $(0, 1, 2, 3)$ ou (t, r, θ, ϕ) . Vejamos,

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}, \quad (4.16)$$

ou

$$R = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi}, \quad (4.17)$$

onde

$$g^{\mu\nu} = \frac{\text{cof} g_{\mu\nu}}{|g_{\mu\nu}|} \quad (4.18)$$

Dessa maneira, obtemos o escalar de curvatura para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (4.1):

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (4.19)$$

4.3 Tensor Energia-Momento

Nesta seção iremos obter o tensor Energia-Momento $T_{\mu\nu}$. O Tensor Energia-Momento $T_{\mu\nu}$ fornece o fluxo de energia e momento por uma hipersuperfície que engloba as fontes de campos [44]. Tratando do espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker, $T_{\mu\nu}$ é regido pela isotropia e homogeneidade [46]. Descrito para um fluido perfeito em um sistema de coordenadas comóveis obedece a seguinte expressão [45]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (4.20)$$

onde $U^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ é a quadrivelocidade do fluido, ρ é sua densidade de energia; p é sua pressão e $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico [44].

O $T_{\mu\nu}$ escrito na forma T_{ν}^{μ} é uma matriz cuja diagonal são: $(\rho, -p, -p, -p)$ ou seja

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (4.21)$$

Matricialmente,

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

4.4 As Equações de Friedmann

Após termos obtido na métrica FRW (4.1), o Tensor de Riemann, o Tensor de Ricci e o Escalar de Curvatura, estamos aptos a obter as Equações de Friedmann através da resolução das Equações de Einstein para tal métrica. Dessa maneira, é interessante primeiro escrever as equações de Einstein subindo um índice.

Temos as Equações de Einstein na forma mais geral:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu}. \quad (4.23)$$

Multipliquemos (4.23) por $g^{\alpha\mu}$. Dessa forma,

$$g^{\alpha\mu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu}R = 2g^{\alpha\mu}T_{\mu\nu}, \quad (4.24)$$

onde o termo $g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu}$ resulta em um Delta de Kronecker, e é dado pela expressão seguinte,

$$\delta_{\nu}^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \nu \\ 1, & \text{se } \alpha = \nu. \end{cases} \quad (4.25)$$

De qualquer forma, só teremos termos em que $\alpha = \nu$, ou seja na diagonal (4.22).

Logo, a expressão (4.24) resulta na forma

$$R_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2}R = 2T_{\nu}^{\alpha}. \quad (4.26)$$

Podemos trocar α por μ em (4.26). Assim,

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}R = 2T_{\nu}^{\mu}. \quad (4.27)$$

Feito isto, agora utilizando os resultados das componentes não nulas do Tensor de Ricci (4.38, 4.13, 4.14, 4.15), o Tensor Geométrico (4.3), o Escalar de Curvatura (4.19) e o Tensor Energia-Momento (4.22), escrevemos a relação (4.27) nas componentes temporal e espaciais. Considerando primeiramente a componente temporal, temos

$$g^{00}R_{00} - \frac{1}{2}R = 2T_0^0. \quad (4.28)$$

Dessa forma, feita a substituição da componente temporal em (4.28), o resultado desse passo matemático se resume na equação a seguir

$$1 \left(-3\frac{\ddot{a}}{a} \right) + 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 2\rho. \quad (4.29)$$

Assim, reorganizando os termos em (4.29), conseguimos obter a Equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (4.30)$$

Esta é considerada como uma das equações mais importantes na Cosmologia, pois nos informa sobre o tamanho da expansão do Universo devido ao modelo que utilizamos [45]. É importante deixarmos claro que a equação (4.30) pode ainda ser escrita em termos de um fator H , o qual segundo a literatura é denominado como o parâmetro de Hubble [45]. Na expressão seguinte podemos ver como este parâmetro é dado:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (4.31)$$

Este informa sobre a taxa de variação do fator de escala $a(t)$ do Universo. Podemos escrever (4.30) em termos do parâmetro de Hubble H ; dessa maneira, resulta na seguinte forma

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (4.32)$$

Esta equação (Equação de Friedmann) faz uma relação da taxa de crescimento do fator de escala $a(t)$ com a densidade de energia total do Universo, ou seja

$$\rho = \frac{3}{2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right). \quad (4.33)$$

Para um Universo plano, em que $k = 0$, a densidade de energia é dada por

$$\rho_c = \left(\frac{3}{2} \right) H^2, \quad (4.34)$$

denominada densidade crítica. Pode-se dizer que a densidade crítica é aquele valor exato da densidade de energia e matéria que coincide com um Universo de geometria plana.

Feito isto, faremos o mesmo processo de anteriormente, mas agora substituímos as componentes espaciais. Dessa maneira, obtemos:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = -2p. \quad (4.35)$$

Combinando (4.30) com (4.35) o resultado é a expressão seguinte, onde, para qualquer componente espacial conseguimos obter a mesma equação. É conhecida como a

equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p). \quad (4.36)$$

É possível observar que a equação de Friedmann (4.30) não possui utilidade sem uma equação que mostre a evolução temporal da densidade ρ dos constituintes do Universo. Essa equação deve conter a pressão p do fluido, e é conhecida como equação do fluido ou da continuidade. Vamos obtê-la, derivando a equação de Friedmann (4.32) com relação ao tempo:

$$2H\dot{H} = \frac{2}{3}\dot{\rho} + \frac{2k\dot{a}}{a^3}. \quad (4.37)$$

Isolando \dot{H} , a expressão toma a seguinte forma:

$$\dot{H} = \frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{H} + \frac{k}{a^2}. \quad (4.38)$$

Feito isto, derivamos agora em relação ao tempo o parâmetro de Hubble (4.31)

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.39)$$

e obtemos

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \quad (4.40)$$

Reorganizando os termos e isolando $\frac{\ddot{a}}{a}$, temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2. \quad (4.41)$$

Agora, substituindo as expressões (4.38) e (4.36) em (4.41), obtemos

$$-\frac{1}{3}(\rho + 3p) = \frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{H} + \frac{k}{a^2} + H^2. \quad (4.42)$$

Da expressão acima, podemos observar que $\frac{2}{3}\rho = \frac{k}{a^2} + H^2$. Logo,

$$-\frac{1}{3}\rho - p = \frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{H} + \frac{2}{3}\rho \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{H} = -\rho - p. \quad (4.43)$$

Reorganizando os termos, chegamos à equação da conservação da energia ou equação da continuidade (4.44) [40]. Esta equação nos informa que o conteúdo do Universo tem natureza contínua, ou seja, sem fonte e sem sumidouro:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (4.44)$$

As expressões (4.30) e (4.36) são conhecidas como as equações de Friedmann. Elas permite-nos determinar a evolução do fator de escala $a(t)$ e, como consequência disto, a dinâmica de expansão do Universo. Dessa forma, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) nos permite descrever um universo homogêneo e isotrópico e que evolui com o tempo. Contudo, a descrição da evolução do Cosmos depende do conteúdo considerado. A equação (4.30) informa que as diferentes componentes da densidade ρ , ou seja, diferentes fases de conteúdo presente na evolução do Universo, é importante para diferentes momentos da expansão, relacionando a taxa de crescimento de $a(t)$ com a densidade. Nesse cenário de Universo, quando $a(t)$ era pequeno, havia predominância de radiação, em sequência um período predominado por matéria.

Capítulo 5

Campo Escalar e Energia Escura

A natureza da expansão acelerada do Universo é considerada atualmente como um dos mistérios da Cosmologia Moderna. Segundo alguns conjuntos de dados observacionais como, por exemplo, supernovas (tipo Ia)¹, Radiação Cósmica de Fundo em Microondas e o mapeamento da estrutura do universo em larga escala, indicam, à controvérsia, que vivemos em um Universo de baixa densidade de matéria, e cuja expansão vem ganhando velocidade aceleradamente [47]. A fonte geradora responsável pela aceleração cósmica é ainda, no entanto, mal compreendida. Apenas o nome Energia Escura entra em cena.

Dito isto, vale ressaltar que neste capítulo não teremos o intuito de provar a existência da Energia Escura, mais sim discutir uma proposta de descrever um universo dominado por ela. Para isto, representaremos esta energia como um campo escalar ϕ homogêneo e isotrópico que permeia todo o Universo como um fluido perfeito, considerando que este campo admita uma dinâmica padrão, onde será representada através de uma Lagrangeana \mathcal{L} . A justificativa pela qual utilizaremos um campo escalar ϕ vem do fato deste campo não depender das coordenadas espaciais (x, y, z) ; evolui apenas no tempo t .

Introduziremos este capítulo fazendo uma breve discussão a respeito da Energia Escura. Em seguida, fazendo uso das Equações de Friedmann (4.30) e (4.36) apresentadas no capítulo anterior, abordaremos a dinâmica padrão de um campo escalar ϕ . Após isso, para este ϕ calcularemos a densidade de energia ρ e a pressão p . Em seguida, a Equação de Movimento do Campo Escalar.

¹Supernovas (tipo Ia) são explosões termonucleares de estrelas pequenas e muito densas, denominadas de anãs - brancas. Libera alta luminosidade, proporcionando obter resultados até distâncias muito grandes.

5.1 A Energia Escura e a Expansão Acelerada

Em meados do século passado (séc. XX), pensava-se que a expansão do Universo devia estar ocorrendo presente a uma dinâmica dominada pela ação gravitacional da matéria que o constitui, ou seja, de forma desacelerada. A controvérsia surgiu recentemente, no ano de (1998) quando dois grupos de astrônomos americanos mediram as distâncias de galáxias longínquas a partir de explosões de supernovas (tipo Ia) [48]. Os dados obtidos indicaram o contrário, isto é, que a taxa na qual o Universo está se expandindo ocorre de forma aceleradamente ($\ddot{a} > 0$). Resultados esses inesperados, pois, segundo o Modelo Cosmológico Padrão previa que o Universo estaria em expansão desacelerada [47]. Contudo, a fonte responsável por esta aceleração ainda permanece desconhecida. A taxa de expansão nas proximidades de nossa galáxia seria menor do que em grandes escalas segundo o modelo teórico. De fato, pois quando observamos o Cosmos em grandes distâncias, o que vemos é o passado. Esse fato se deve à velocidade finita da luz c . Dessa forma, o Universo devia estar em expansão mais rapidamente do que em nosso tempo presente.

Uma maneira de encontrar uma responsável por essa expansão acelerada seria admitir que o Universo estaria dominado por uma forma de energia contrária a atração gravitacional e com pressão negativa. Esta pressão negativa contrabalança a força da gravidade e assim leva à expansão acelerada do Universo. Essa estranha forma de energia foi denominada de Energia Escura. A Energia Escura ainda não foi identificada, no entanto, tem natureza diferente da matéria ordinária, como bárions e a radiação [49]. Vale salientar que a Energia Escura não deve ser confundida com a Matéria Escura, onde, na literatura devemos ser cautelosos a não causar uma certa confusão ao leitor. Além do mais, a Matéria Escura surge da necessidade de explicar a velocidade orbital das estrelas no centro das galáxias. Tal velocidade é maior do que os valores previstos com base na matéria luminosa existente. A conclusão seria que além da matéria luminosa existiria uma outra preenchendo o Universo, pelo fato que apenas a quantidade de matéria existente calculada com base na luminosidade das galáxias, não seria suficiente em gerar a força gravitacional a qual as estrelas estão submetidas, segundo medidas de suas velocidades

orbitais em torno do centro galáctico [47, 49]. Observações apontam para a necessidade da existência da Matéria Escura para explicar a atração gravitacional existente em diversas escalas, de galáxias e aglomerados de galáxias. A (Figura 5.1) a seguir, possibilita uma melhor análise da existência da Matéria Escura.

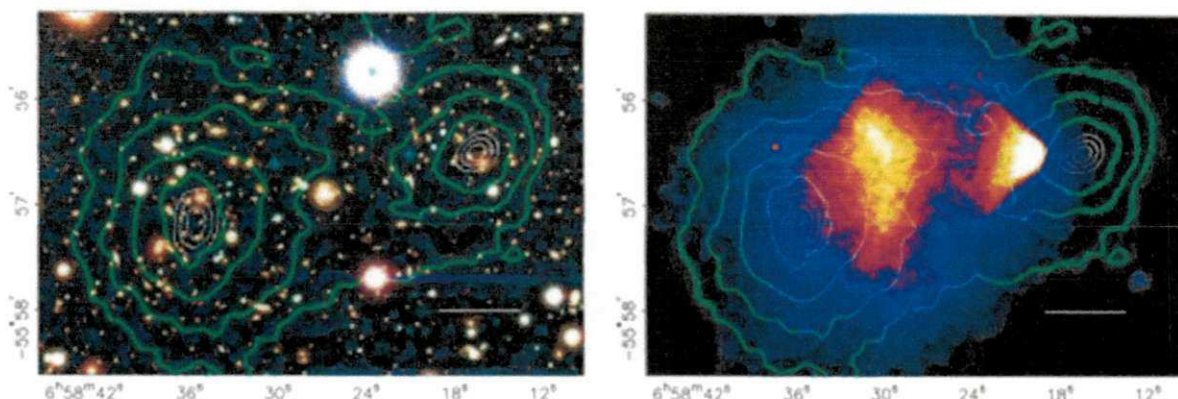


Figura 5.1: Esta figura mostra observações do aglomerado de galáxias Bala. Na imagem à esquerda, é apresentada observação por meio óptico. Já na imagem a direita, apresentam observações em raio-X. Os contornos representam a distribuição da matéria no aglomerado, permitindo mostrar de maneira clara a separação existente entre as duas componentes escura e gás. Extraída de [50].

Da mesma forma que a matéria convencional, a Matéria Escura interage gravitacionalmente, e foi denominada como escura pelo fato de não admitir interação com a radiação eletromagnética, dessa forma não permitindo o seu detectamento em nenhuma faixa de frequência do espectro eletromagnético [49].

O que seria essa essência desconhecida causadora da aceleração cósmica? Qual é a sua origem? O nosso Universo continuará a se expandir indefinidamente? Ainda são questionamentos cruciais para os quais ainda não temos nenhuma resposta. Existem algumas possíveis alternativas, mas no entanto, segundo dados observacionais, não nos permitem definir com uma certa precisão a mais adequada em efeito. Dentre as alternativas, existe uma considerada como a mais radical possível: seria admitir que a Teoria da Gravitação usada na observação dos fenômenos cosmológicos estaria incorreta ou incompleta [23]. Dentro deste contexto originaram-se alternativas que discutiremos agora. A primeira delas seria uma modificação na Teoria da Gravitação de Albert Einstein, na qual

seria necessário acrescentar um novo termo que fosse relevante somente quando a curvatura do espaço-tempo fosse suficientemente pequena. Uma segunda possibilidade também diz respeito a uma modificação da Gravitação com um fator mais extremo. Neste caso, a aceleração da expansão cosmológica seria devida à existência de uma dimensão espacial extra manifestando este efeito [23]. Contudo, ambas as alternativas teóricas apresentam certa complexidade de serem interpretadas. Mas, no entanto, não podemos descartá-las enquanto não houver melhores fundamentos.

No contexto da Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein, a alternativa de manter válida tal teoria, mas admitir uma constante a qual se referencia como constante cosmológica Λ é a mais conservadora. A constante cosmológica Λ , introduzida por Einstein em seu primeiro modelo cosmológico, é considerada como a candidata responsável mais bem estruturada geradora dessa repulsão cósmica. Inicialmente, Λ foi introduzida nas equações de campo da Teoria da Relatividade Geral no intuito de compensar a ideia de Universo dinâmico como Einstein obtinha em suas equações. Para tal, o motivo da constante cosmológica ser a melhor candidata atualmente, vem do fato que existindo uma componente exótica (dependente ou não do tempo) com pressão negativa ($-p$), toda a massa geradora da gravitação “massa efetiva” também será negativa e, dessa forma, teremos uma repulsão gravitacional, levando em conta que para a Relatividade Geral toda a energia é a fonte da Gravitação [23].

Embora não se conheça a verdadeira natureza dessa responsável pela aceleração cósmica (Energia Escura), é fundamental determinar se a sua densidade é constante no decorrer do tempo ou se existe a possibilidade de pequenas variações temporais. Conhecer a evolução da densidade desta energia traz a possibilidade de se obter informações sobre um universo futuro. Dentre elas; se a sua densidade for constante no decorrer do tempo, o Universo continuará a se expandir de forma acelerada indefinidamente; se não, chegará a um ponto em que haverá um recolapso (Big Crunch), retornando novamente ao estado inicial [23]. Observações recentes apontam que a densidade de energia total do Universo é compreendida como sendo 72,2% constituída de energia escura, 23,2% constituída de

matéria escura, 4,6% constituída de matéria bariônica (Prótons e Nêutrons), e cerca de 0,005% constituída de radiação [50].

Fica evidente que na Cosmologia atual é de extrema importância buscar novas teorias alternativas que possam ser capazes de explicar a aceleração cósmica, dando ênfase à importância de levar em conta que possa existir erros sistemáticos presentes em alguns modelos. Talvez em breve possamos alcançar um maior referencial teórico e consequentemente o entendimento da natureza da Energia Escura. Teorias essas que tentam explicar a origem, a expansão e o futuro do Universo.

5.2 As Equações de Friedmann com Campo Escalar

Uma opção de descrever o Universo dominado por Energia Escura é representar esta energia como um campo escalar. Neste intuito, representaremos esta energia como um campo escalar ϕ homogêneo e isotrópico que permeia todo o Universo como um fluido perfeito, considerando que este campo admita uma dinâmica padrão. Esta dinâmica padrão, será dada através da Lagrangeana \mathcal{L} , e assim encontraremos a Equação de Movimento deste campo. No decorrer da discussão, iremos obter as expressões da densidade de energia ρ e da pressão p de ϕ que permeia todo o Universo [51]. Nosso objetivo não é tratar de nenhum modelo específico de Energia Escura, o que seria possível assumindo uma forma específica para $V(\phi)$. Temos interesse em discutir como dever ser, em linhas gerais, uma teoria de campo escalar que se proponha a descrever um universo preenchido por Energia Escura. Modelos mais detalhados vão além da equação de movimento do campo ϕ , permitindo obter o comportamento do fator de escala e de outros parâmetros relevantes para comparação com os dados observacionais.

A dinâmica padrão de um campo escalar homogêneo em um universo de FRW é dada pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (5.1)$$

Estamos fazendo um breve resumo de um modelo simples capaz de explicar a expansão acelerada do Universo. Como foi descrito anteriormente, envolve um campo escalar ϕ como energia escura, que, segundo a literatura é denominado de quintessência [51]. Variando a ação S (3.5) em termos de $g^{\mu\nu}$, o tensor energia - momento para o campo escalar ϕ é expresso da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.2)$$

Vamos aplicar $g^{\alpha\mu}$ em (5.2), no intuito de obter T^μ_ν e assim poderemos usar o tensor energia-momento para um fluido perfeito:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (5.3)$$

Aplicando agora $g^{\alpha\mu}T_{\mu\nu}$, obtemos

$$T_{\nu}^{\alpha} = g^{\alpha\mu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu}\mathcal{L} = \partial^{\alpha}\phi\partial_{\nu}\phi - \mathcal{L}. \quad (5.4)$$

Logo, a expressão que iremos utilizar para o tensor energia-momento será

$$T_{\nu}^{\mu} = \partial^{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \mathcal{L}. \quad (5.5)$$

Esta permite determinar a densidade de energia ρ e a pressão p do campo escalar [42]. Primeiramente calculemos ρ . De acordo com (4.22), ρ equivale à componente T_0^0 . Dessa maneira,

$$\rho = T_0^0 = \partial^0\phi\partial_0\phi - \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\phi\partial_{\beta}\phi - V(\phi) \right], \quad (5.6)$$

onde $\partial^0\phi = \partial_0\phi = \dot{\phi}$ e $g^{00} = 1$. Assim, em um universo homogêneo e isotrópico segundo a métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW), obtemos a densidade de energia ρ do campo escalar como sendo

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (5.7)$$

Agora, iremos calcular a pressão p de ϕ . Faremos o mesmo processo feito anteriormente, contudo, agora consideraremos as outras componentes da diagonal do tensor energia-momento para um fluido perfeito (5.3). Podemos representar estas outras componentes do tensor como sendo $-p = T_i^i$, onde $i = (1, 2, 3)$. Isto implica que, é equivalente escolhermos qualquer destes números inteiros em i , pois, como consequência disto obteremos o mesmo valor para p . Para melhor entendermos o que foi dito acima, vejamos a representação abaixo.

$$T_1^1 = -p; \quad T_2^2 = -p; \quad T_3^3 = -p. \quad (5.8)$$

Calculemos p :

$$-p = T_1^1 = \partial^1 \phi \partial_1 \phi - \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right], \quad (5.9)$$

onde $g^{11} = -1$. Para garantir a isotropia é necessário que $\partial^1 \phi = \partial_1 \phi = 0$. Logo, em um universo homogêneo e isotrópico segundo a métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW), obtemos a pressão p do campo escalar:

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (5.10)$$

Resumindo, para um universo homogêneo e isotrópico, obtemos as seguintes expressões para ρ e p :

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (5.11)$$

Como foi dito no início deste capítulo, encontraremos agora a equação de movimento do campo escalar ϕ . Para isto, será utilizada a equação que nos informa a densidade de energia (5.7) deste campo ϕ . Temos

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (5.12)$$

Agora, derivando no tempo, obtemos

$$\dot{\rho} = \dot{\phi} \ddot{\phi} + V_\phi \dot{\phi}. \quad (5.13)$$

Feito isto, voltemos agora para a equação da continuidade (4.44) do capítulo anterior e nela substituiremos as expressões (5.7), (5.10) e (5.13). Temos

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (5.14)$$

O resultado da substituição é

$$\dot{\phi} \ddot{\phi} + V_\phi \dot{\phi} + 3H \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right], \quad (5.15)$$

no qual, reorganizando os termos e dividindo uma vez toda a expressão por $\dot{\phi}$, conseguimos obter a equação seguinte, conhecida como equação de movimento do campo escalar ϕ [51]:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi} = 0. \quad (5.16)$$

Esta equação (5.16) mostra como o campo ϕ evolui no tempo t , desde que seja conhecido o potencial $V(\phi)$. Potenciais diferentes descrevem modelos diferentes. Como previsto, considerando um universo dominado por Energia Escura, admitindo que esta é representada através de um campo escalar ϕ , conseguimos obter algumas expressões que nos informam a respeito da densidade de energia ρ , da pressão p , e por fim, a equação de movimento. Como podemos ver em (5.16), a dinâmica de ϕ é relacionada com a dinâmica do parâmetro de Hubble H . Além disso, a escolha de um $V(\phi)$ específico na expressão (5.16), nos leva a um conjunto de comportamentos diferentes para a dinâmica do Universo.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos a dedução das Equações de Friedmann. Esta dedução foi obtida reescrevendo as equações de campo da Gravitação de Albert Einstein na métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), levando em consideração o Princípio Cosmológico, o qual foi discutido no Capítulo 2. A Teoria da Relatividade Geral é uma teoria de gravitação e admite inúmeras soluções, cada uma delas referente a uma situação física diferente. Especificamente, o nosso trabalho trata apenas das soluções cosmológicas de Friedmann. Neste contexto, serve de base para entendermos como se deu a evolução do Universo.

Inicialmente fizemos uma abordagem dos conceitos básicos que deram início à Cosmologia Moderna: conceitos que, de fato, foram essenciais para desenvolvermos o nosso trabalho. Fizemos uma breve discussão a respeito dos instrumentos modernos de observações. Tratamos do Princípio Cosmológico, dentre outros temas importantes, até a lei de Hubble. Desde o fato de que não vivemos em uma localização privilegiada no Universo, tratando da isotropia e homogeneidade como um marco na construção das teorias cosmológicas. Da observância do desvio para o vermelho da luz de galáxias distantes, a hipótese do movimento regular de recessão das galáxias, evidências estas de que vivemos em um universo em expansão.

Deduzimos as Equações de Campo da Gravitação no Capítulo 3, a partir da ação de Einstein-Hilbert. Partimos de uma ação S na forma geral, e através de uma pequena variação na métrica, utilizando o princípio variacional de mínima ação, obtemos as chamadas

equações de campo de Einstein (3.27). Foi mostrado o significado físico dos dois tensores presentes na expressão (3.27). Um está relacionado com a geometria do espaço-tempo e é denominado tensor de Einstein; e o outro está relacionado com o conteúdo do Universo, denominado o tensor energia-momento. Podemos perceber que as equações de Einstein descrevem como a matéria gera a gravidade e, inversamente, como a gravidade afeta a matéria. A gravidade é dada aqui em termos de um tensor métrico, uma quantidade que descreve as propriedades geométricas do espaço-tempo quadridimensional. A matéria é descrita por seu tensor de energia-momento, uma quantidade que contém informação sobre a densidade e a pressão da matéria.

Reescrevemos as equações de Einstein para uma métrica específica, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Para tal geometria do Universo, o elemento de linha é o da Equação (4.1). Segundo (4.1), vimos a existência do termo de curvatura k , que informa sobre as possíveis geometrias que o Universo pode descrever. Para um melhor entendimento sobre o papel da constante k , foi feita uma breve discussão das três geometrias possíveis (plana, esférica e hiperbólica). Assumida a métrica, as equações de Einstein foram, portanto, reescritas na forma das equações de Friedmann. As soluções destas equações representam um universo dinâmico e em evolução, caracterizado por uma função dependente do tempo, denominada fator de escala $a(t)$. A velocidade de expansão do Universo é medida através do parâmetro de Hubble H , que, depende somente da função $a(t)$ e de sua variação no tempo. Podemos ver que a dinâmica do Universo pode assumir duas situações distintas quanto ao sinal de H . Para o sinal positivo, o Universo passa por uma fase de expansão, se sinal de H for negativo, o Universo entra em uma fase de colapso. As evidências nos levam a pensar que a geometria do Universo idealizada por Friedmann, de modo geral, é como um fluido contínuo e perfeito, que se caracteriza por uma densidade de energia ρ e uma pressão p ; e que de acordo com a homogeneidade da geometria espacial, depende somente do tempo t . Geralmente, um fluido deve satisfazer uma fase de equilíbrio, segue-se a existência de uma equação de continuidade, onde relaciona a pressão e a densidade de energia. A existência desta equação, significa que o

conteúdo do Universo é contínuo, não existindo nem fonte e nem sumidouro.

Investigamos ainda a existência de um universo dominado por Energia Escura. Esta energia foi representada como sendo um campo escalar homogêneo e isotrópico ϕ , com a capacidade de permear todo o Universo como um fluido perfeito. Também foi considerado que ϕ admitia uma dinâmica padrão representada através de uma densidade Lagrangeana \mathcal{L} . Desenvolvemos a expressão do tensor energia-momento de um fluido perfeito, e obtemos expressões para a densidade de energia ρ , e para, a pressão p . Em seguida, deduzimos a equação de movimento de ϕ (5.16). A expressão (5.16) mostra que, conhecendo o potencial $V(\phi)$, podemos ter informações de como ϕ evolui no tempo t . Como a dinâmica do campo ϕ se relaciona com a dinâmica do parâmetro de Hubble H , podemos calcular parâmetro como fator de escala, parâmetro de aceleração, equação de estado, que, devem estar em concordância com os dados experimentais, para que o modelo seja uma boa representação da evolução do Universo.

Este trabalho é uma revisão que abre caminho para estudos mais aprofundados. Como perspectivas de continuidade, podemos citar pesquisas que envolvem cenários de Energia Escura com diferentes potenciais, com associações de conteúdos distintos, com ou sem campo escalar, e utilizando dinâmicas diferentes da dinâmica padrão. A natureza da Energia Escura é um campo no qual podem ainda existir muitas possibilidades de pesquisa. O objetivo do trabalho, no entanto, foi tratar das equações de Friedmann. Estas devem estar em quaisquer modelos cosmológicos no contexto da Teoria do Big Bang.

Referências Bibliográficas

- [1] HAWKING, Stephen. O Universo Numa Casca de Noz. Cambridge: Copyright, 2001. Disponível em: <[http://www.projetoemser.com.br/blog/wp-includes/downloads/Stephen Hawking - O Universo Numa Casca de Noz.pdf](http://www.projetoemser.com.br/blog/wp-includes/downloads/Stephen%20Hawking%20-%20O%20Universo%20Numa%20Casca%20de%20Noz.pdf)>. Acesso em: 18 nov. 2014.
- [2] SOUZA, Ronaldo Eustáquio de. Introdução à Cosmologia. 59. ed. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2004. 328 p.
- [3] NOVELLO, Mário. Do Big Bang ao Universo Eterno. 2. ed. Rio de Janeiro: Copyright, 2010.
- [4] LONGAIR, Malcolm. The Origins of our Universe. Cambridge: Copyright, 1991.
- [5] GIMENES, Humberto Scalco. Análise em Conjunta de Testes Cosmológicos. 2013. 111 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.
- [6] WAGA, Ioav. A Expansão do Universo. Revista Brasileira de Ensino de Física, Rio de Janeiro, v. 22, n. 2, p.163-175, jun. 2000.
- [7] LARSEN, Kristine M.. COSMOLOGY 101. United States Of America: Copyright, 2007.
- [8] WEINBERG, Steven. COSMOLOGY. New York: Oxford University Press, 2008.
- [9] The Hubble Story. 2014. Disponível em: <<http://goo.gl/cvBZz2>>. Acesso em: 07 jan. 2015.

- [10] WMAP - WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE: WMAP PRODUCES NEW RESULTS. 2013. Disponível em: <<http://map.gsfc.nasa.gov/news/>>. Acesso em: 05 jan. 2015.
- [11] About Fermilab: Fermilab is America's particle physics and accelerator laboratory.. 2014. Disponível em: <<http://goo.gl/fu9Y67>>. Acesso em: 07 jan. 2015.
- [12] About CERN: What is the universe made of? How did it start? Physicists at CERN are seeking answers, using some of the world's most powerful particle accelerators. Disponível em: <<http://goo.gl/dv7xF>>. Acesso em: 08 jan. 2015.
- [13] Fermilab Center for Particle Astrophysics (FCPA): Projects: Sloan Digital Sky Survey (SDSS); The Sloan Digital Sky Survey: Mapping the Universe. Disponível em: <<http://astro.fnal.gov/projects/DarkEnergy/sdss.html>; <http://www.sdss.org/>>. Acesso em: 05 jan. 2015.
- [14] ABRAMO, Luís Raul Weber. Geografia do Universo. Revista Usp, São Paulo, v. 62, n. 62, p.52-65, ago. 2004.
- [15] MATSAS, George E.a.. Gravitação Semiclássica. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 27, n. 1, p.137-145, 2005.
- [16] COLLODEL, Lucas Gardai. Tópicos de Cosmologia. Universidade Federal do Paraná, 2014.
- [17] GRAMS, Guilherme. Modelos Cosmológicos com Campos Fermiônicos. 2013. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.
- [18] RIBEIRO, Marcelo Byrro. Cosmologia e Representação. Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Rio de Janeiro.
- [19] STEINKIRCH, Marina Von. Uma Análise sobre a Constante Cosmológica, novembro de 2007

- [20] ABRAMO, Luís Raul Weber. Geografia do Universo. Revista Usp, São Paulo, v. 62, n. 62, p.52-65, ago. 2004.
- [21] ROSENFELD, Rogério. A Cosmologia. Física na Escola, São Paulo, v. 6, n. 1, p.31-37, 2005.
- [22] SOARES, Domingos. O Universo Estático de Einstein. Revista Brasileira de Ensino de Física, Belo Horizonte, v. 34, n. 1, p.1-4, 27 fev. 2012.
- [23] WAGA, Ioav. Cem anos de descobertas em cosmologia e novos desafios para o Século XXI. Revista Brasileira de Ensino de Física, Rio de Janeiro, v. 27, n. 1, p.157-173, 2005.
- [24] FAGUNDES, Helio V.. Modelos Cosmológicos e a Aceleração do Universo. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 24, n. 2, p.247-253, 2002.
- [25] SANTOS, José Jamilton Rodrigues dos. TÓPICOS EM COSMOLOGIA COM CAMPOS ESCALARES. 2011. 129 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011.
- [26] PEREZ, Rafael Serra. Modificações da Relatividade Geral e a Aceleração do Universo. 2006. 59 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2006.
- [27] OLIVEIRA, Thiago Bruno Rafael de Freitas. TEORIAS F(R) DE GRAVIDADE NA FORMULAÇÃO DE PALATINI. 2010. 77 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.
- [28] ISAACSON, Walter. Einstein: SUA VIDA, SEU UNIVERSO. São Paulo: Copyright, 2007.
- [29] PAIS, Abraham. "Sutil é o Senhor"....: A ciência e a vida de Albert Einstein. 2. ed. Editora Nova Fronteira, 1995. 637 p.

- [30] EINSTEIN, Albert. A Teoria da Relatividade Especial e Geral. Rio de Janeiro: Contraponto Editora Ltda, 2009. 132 p.
- [31] CLEMENCE, G. M.. Astronomical Time. Reviews Of Modern Physics, Washington, v. 29, n. 2, 1957.
- [32] SILVA, Paulo Michel Longo Tavares da. UMA DESCRIÇÃO DA EXPANSÃO E ACELERAÇÃO DO UNIVERSO NO CONTEXTO DAS TEORIAS $f(R)$. 2012. 46 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Departamento de Física, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.
- [33] LAGRANGE, Joseph-louis. Mécanique Analytique. Cambridge University Press, 2009.
- [34] MONERAT, Germano Amaral. Introduzindo o Formalismo Variacional no Ensino de Mecânica Básica na Graduação em Engenharia. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Resende.
- [35] SILVA, Ana Paula Bispo da; MARTINS, Roberto de Andrade. Maupertuis e o princípio mecânico de ação mínima: uma análise crítica. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 4, p.625-633, 2007.
- [36] MARTINS, Roberto de Andrade; SILVA, Ana Paula Bispo da. Maupertuis, d'Arcy, d'Alembert e o princípio de ação mínima na óptica: uma análise crítica. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 3, p.455-463, 2007.
- [37] BRAGANÇA, Vinícius Miranda. Singularidades em Teorias $f(R)$ da Gravitação. 2010. 57 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- [38] RAY, D'inverno. Introducing Einstein's Relativity. New York: Oxford University Press, Usa, 1992. 383 p.

- [39] CARAMÊS, Thiago Roberto da Possa. Soluções esfericamente simétricas em teorias $f(R)$ da gravitação em dimensões superiores. 2009. 64 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.
- [40] LIMA, Gustavo Gazzola de. Teoria de Casimir para a Energia Escura Revisitada. 2009. 55 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.
- [41] PATIÑO, Giovanni Otalora. Energia Escura Acoplada. 2010. 56 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, 2010.
- [42] COSTA FILHO, Francisco Geraldo da. Formalismo de primeira ordem em Cosmologia de Branas. 2009. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.
- [43] SECCO, Lucas Frozza. Um Modelo de Energia Escura na Determinação da Dinâmica do Universo. 2012. 54 f. TCC (Graduação) - Curso de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- [44] ANDRÉ, Raíla. Análise de campo escalar não-minimamente acoplado através do formalismo de Palatini e simetria de Noether. 2013. 98 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.
- [45] GRAMS, Guilherme. Modelos Cosmológicos com Campos Fermiônicos. 2013. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.
- [46] OLIVARI, Lucas Collis. Influência da Transferência de Momento - Energia na Interação entre Matéria e Energia Escura. 2014. 128 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ciências, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

- [47] SOUZA, Rudinei Celso de. MODELOS COSMOLÓGICOS PARA O UNIVERSO ATUAL E PRIMORDIAL. 2012. 164 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.
- [48] SOBREIRA, Flavia. Estimativas de Parâmetros Cosmológicos para o Dark Energy Survey. 2011. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2011.
- [49] FERREIRA, Carolina Gribel de Vasconcelos. CONFRONTANDO MODELOS DE ENERGIA ESCURA COM A TAXA DE FORMAÇÃO ESTELAR CÓSMICA, LGRB E FUNDOS ESTOCÁSTICOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS. 2014. 138 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Astrofísica, Inpe, São José dos Campos, 2014.
- [50] SILVA, Gloriza Paiva. ESTUDO SOBRE MODELOS DE ENERGIA ESCURA E MATÉRIA ESCURA NO UNIVERSO. 2006. 20 f. TCC (Graduação) - Curso de Física, Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2006.
- [51] SANTOS, José Jamilton Rodrigues dos. FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM COM CAMPOS ESCALARES EM COSMOLOGIA. 2007. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2007.