

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# A Distribuição Fréchet Generalizada<sup>†</sup>

por

Elizabeth Cardoso Machado

sob orientação do

Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# A Distribuição Fréchet Generalizada

por

**Elizabete Cardoso Machado**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Probabilidade e Estatística

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro - UFPE**

---

**Profa. Dra. Michelli Karinne Barros da Silva - UFCG**

---

**Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti - UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Setembro/2013**

# Resumo

Neste trabalho fizemos um estudo sobre a classe de distribuições generalizadas exponencializadas, a distribuição Fréchet generalizada e a distribuição Weibull inversa log-generalizada. Obtemos algumas propriedades da distribuição Fréchet generalizada. Uma nova distribuição é proposta: a distribuição log-Fréchet generalizada. Esta distribuição é uma extensão da distribuição Fréchet. Outra proposta deste trabalho é introduzir um modelo de regressão log-Fréchet generalizada com censura Tipo I baseado na distribuição log-Fréchet generalizada.

**Palavras-chave:** Distribuições generalizadas exponencializadas, distribuição Fréchet generalizada, distribuição log-Fréchet generalizada.

# Abstract

In this work, we did a research study about the exponentiated generalized class of distributions, the generalized Fréchet distribution and the log-generalized inverse Weibull distribution. We obtain some properties of generalized Fréchet distribution. Furthermore, a new distribution is proposed: the generalized log-Fréchet distribution. This new distribution is an extension of Fréchet distribution. Another propose of this work is to introduce a generalized log-Frechét regression model with Type-I censoring based on the generalized log-Frechét distribution.

**Keywords:** Exponentiated generalized distributions, generalized Fréchet distribution, generalized log-Frechét distribution.

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, pela bênção de ter a vida privilegiada que tenho e por ter mim dado forças para conseguir concretizar este sonho.

Aos meus pais pelos esforços realizados para me proporcionar a oportunidade de estudar, pelos ensinamentos valiosos, pelo exemplo de vida e pela educação que me foram dados, sem eles eu não seria quem sou. Estes sempre serão meus melhores mestres e exemplo a ser seguido.

As minhas irmãs: Valderina, Erisvalda e Chaguinha pelo enorme carinho e incentivo. Vocês são irmãs maravilhosas.

A minha sobrinha Jennifer pela enorme alegria que me trouxe.

Ao meu amor, Bruno Guerra, por sempre está ao meu lado me dando forças nos momentos de "fraqueza", e por se sujeitar a uma distância não mensurável ao longo destes dois anos. É difícil dizer o quanto você representa para minha vida porque a cada dia encontro em mim um novo espaço ocupado por você.

Aos meus Cunhados: Marcos e Paulo que mesmo distantes torceram muito pelo meu sucesso neste trabalho.

As minhas amigas de Cocal dos alves que plantaram essa semente comigo. Em especial: Antônia Araújo, Crediane, Sandra, Francisca Moura e Maria (prima Maria-zinha).

A Maria Siqueira pelos os incentivos em todas as etapas deste trabalho. Você é uma peça fundamental nesta conquista.

A Franciane Vieira pela longa caminhada que permanecemos juntas, desde o ensino médio até a graduação. Por partilhar todos os momentos de tensão e de alegria vivenciados na Residência Universitária da UFPI. Você é uma irmã para mim.

Aos meus amigos: Vitaliano Amaral, Raimundo Alves e Antônia Almeida (prima) pela torcida e incentivo. Vocês são tesouros valiosíssimos em minha vida.

As minhas amigas as quais tive a sorte e o prazer de conhecer e conviver: Emiliana, Jaqueline, Priscila, Jusamara e Maria pelos momentos de descontração, pelas conversas e amizade.

Aos meus tios e primos pela torcida e pelo carinho.

A Socorro Veras (Comadre) e família pelo incentivo e torcida.

Aos meus amigos de Graduação. Em especial, Ítalo Dowell, João Eudson, Leonardo Coimbra, Jailson, Paulo Erison, Fillippe Leitão, Edem Assunção, Thiago Esteves, Sérgio, Jefferson Sousa, Jardel, Adelson, Antônia, Suzane, Viviane Gomes, Viviane Gonçalo e Jainara pelos conhecimentos compartilhados, pela diversão e amizade.

Aos meus Professores do Ensino Médio pela dedicação mesmo diante a tantas dificuldades. Em especial Narjara Benício, Antônio Amaral, João Amaral, Kuerly, Aurilene, Geovane, Darkison e Lindomar. Vocês me ensinaram o verdadeiro valor de uma conquista.

Aos Mestres da Graduação: Jurandir, João Xavier, Vicente, Benício, Newton Santos, Roger, Acacia, Marcos Vinícios, João Mendes, João Batista, Marcílio. Agradeço em especial ao professor Paulo Alexandre, "pai acadêmico", pela paciência em me orientar e pelos valiosos ensinamentos.

A dona Elza Farias (In memórian) por ter me acolhido em sua casa e por ter si tornado uma pessoa tão especial em minha vida, "uma verdadeira mãe".

A dona Maria José e seu Pedro pelo carinho, apoia e incentivo. A dona Francisca (Chicosa) e sua família pela torcida e amizade.

Aos meus amigos do Mestrado os quais tive um enorme prazer de conhecer: Nancy, Sirlene, Débora, Arthur, Brito, José Marcos, Rosilda, Alex, Michel, Jogli, Emanuela, Claudemir, Antonio Marcos, Carlos, Luis, Fabrício, Arlandson, Alan Carlos, Bruno, Misaelle, Levi. Pela a energia, pela dedicação e preocupação com o próximo. Sinto-me orgulhosa de ter feito parte desse grupo unido. Mesmo durante o desenvolvimento da dissertação, as palavras de estímulo, a demonstração de amizade e a solidariedade foram de extrema importância para a conclusão desse trabalho.

Ao amigos: Arthur, Brito e Michel pela ajuda no Latex. Vocês contribuíram muito na confecção desta dissertação.

Aos futuros doutores e doutoras: Romildo, Ailton, Fabiana, Fábio, Aline e Luciano. Pelas palavras de incentivo e amizade.

A Vanessa Santiago, companheira de apartamento, pela excelente convivência, conversas, orações, conselhos, risadas e apoio. Uma pessoa que aprendi a respeitar e admirar. Você se tornou uma pessoa importantíssima em minha história.

Aos amigos: Navilta, Suélio, Raphaela e Rodrigo pela torcida.

Agradeço de forma especial ao Professor Alexsandro Cavalcanti, pela excelente orientação, pela paciência, pelos ensinamentos e conselhos.

A Professora Michelli Barros pelas aulas excepcionais. A senhora nasceu com o dom para ser transmissora do conhecimento.

Ao Professor Gauss Cordeiro e Michelli Barros por terem aceitado participar da minha banca e pelas valiosas sugestões.

Ao Professor Marcelo Bourguignon pela ajuda, correções e sugestões.

Aos Professores Joelson Campos e Manoel Neto, pela amizade e disponibilidade de sempre tirarem minhas dúvidas.

Aos demais professores do PPGMat. Em especial aos Professores Daniel Cordeiro e Marco Antônio.

Aos funcionários com destaque a Andrezza, Claudiana, Renato, Davi, Suênia, Du e Rodrigo. Que sempre fizeram de tudo para me ajudar.

A Capes pelo apoio financeiro, sem o qual jamais teria conseguido.

A todos que participaram direto ou indiretamente na conquista deste sonho.

# Dedicatória

Aos meus pais, Maria de Fátima  
e Cesário.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A classe de distribuições generalizadas exponencializadas</b>	<b>3</b>
2.1	Introdução . . . . .	3
2.2	Expansões para as funções de distribuição e densidade . . . . .	6
2.3	Momentos . . . . .	7
2.4	Função Geradora de Momentos . . . . .	8
2.5	Desvios Médios . . . . .	9
2.6	Estatísticas de ordem . . . . .	11
2.7	Estimação de Máxima Verossimilhança . . . . .	12
2.8	Casos Particulares . . . . .	15
2.8.1	Fréchet Generalizada Exponencializada . . . . .	15
2.8.2	Normal Generalizada Exponencializada . . . . .	18
2.8.3	Gama Generalizada Exponencializada . . . . .	23
2.8.4	Gumbel Generalizada Exponencializada . . . . .	26
2.8.5	Exponencial Generalizada Exponencializada . . . . .	29
2.8.6	Pareto Generalizada Exponencializada . . . . .	33
2.9	Aplicações . . . . .	35
2.10	Conclusões . . . . .	39
<b>3</b>	<b>A distribuição Fréchet Generalizada</b>	<b>41</b>
3.1	A distribuição Fréchet . . . . .	41
3.2	A classe de distribuição generalizada exponencializada . . . . .	42

3.3	A distribuição Fréchet generalizada . . . . .	42
3.4	Propriedades e distribuições relacionadas . . . . .	44
3.5	Uma expansão geral para a função de densidade . . . . .	47
3.6	Momentos e momentos incompletos . . . . .	48
3.7	Função quantil . . . . .	51
3.8	Desvios médios . . . . .	51
3.9	Estatísticas de ordem, momentos das estatísticas de ordem e L-momentos	52
3.9.1	L-momentos . . . . .	54
3.10	Entropias Shannon e Rényi . . . . .	54
3.11	Estimação de Máxima Verossimilhança . . . . .	61
3.12	Aplicação . . . . .	63
3.12.1	Tempos de vida de Alumínio . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Modelo de Regressão Log-Fréchet Generalizada</b>	<b>66</b>
4.1	A distribuição Weibull Inversa Generalizada . . . . .	66
4.2	A distribuição Log-Weibull Inversa Generalizada . . . . .	66
4.3	Conceitos básicos . . . . .	69
4.4	Modelo de Regressão Log-Weibull Inversa Generalizada . . . . .	70
4.5	A Distribuição Log-Fréchet Generalizada . . . . .	72
4.6	Modelo de Regressão Log-Fréchet Generalizada . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>79</b>
5.1	Trabalhos Futuros . . . . .	80
<b>A</b>	<b>Distribuição Generalizada Exponencializada</b>	<b>81</b>
<b>B</b>	<b>Distribuição Fréchet Generalizada</b>	<b>83</b>
<b>C</b>	<b>Distribuição Log-Weibull Inversa Generalizada</b>	<b>88</b>
<b>D</b>	<b>Distribuição Log-Fréchet Generalizada</b>	<b>94</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>100</b>

# Lista de Tabelas

2.1	Dados sobre a superação da inundação do rio Wheaton . . . . .	36
2.2	Dados do nível de estresse . . . . .	37
2.3	Descrição estatística . . . . .	37
2.4	EMVs e critérios de informação . . . . .	38
2.5	Testes da RV ( $\Lambda$ ) . . . . .	39
3.1	Tempo de vida de alumínio . . . . .	63
3.2	EMVs para os parâmetros do modelo e critérios de informações AIC, BIC e CAIC . . . . .	64

# Lista de Figuras

2.1	Função Densidade da EGF $(\sigma, \lambda, \alpha, \beta)$ para alguns valores dos parâmetros. (a) Para $\sigma = 1.5$ e $\lambda = 2.0$ . (b) Para $\alpha = 1.5$ e $\sigma = 1.5$ . . . . .	17
2.2	Função Densidade da EGN $(\sigma, \mu, \alpha, \beta)$ para alguns valores dos parâmetros. (a) Para $\mu = 0$ e $\sigma = 1.0$ . (b) Para $\alpha = 1.5$ e $\mu = 0$ . . . . .	19
2.3	Função Densidade da EGGa $(a, b, \alpha, \beta)$ para alguns valores dos parâmetros. (a) Para $a = 1.5$ e $b = 2.0$ . (b) Para $\alpha = 1.5$ e $a = 1.5$ . . . . .	24
2.4	Função Densidade da EGGu $(\sigma, \mu, \alpha, \beta)$ para alguns valores dos parâmetros. (a) Para $\mu = 0$ e $\sigma = 1.0$ . (b) Para $\beta = 1.5$ e $\mu = 0$ . . . . .	27
2.5	Função Densidade da EGE $(\alpha, \beta, \lambda)$ para alguns valores dos parâmetros. (a) Para $\alpha = 1.5$ e $\beta = 2.0$ . (b) Para $\lambda = 1.5$ . . . . .	30
2.6	Função Densidade da EGPa $(\alpha, \beta, \nu)$ para alguns valores dos parâmetros. (a) Para $\alpha = 2.0$ e $\beta = 1.5$ . (b) Para $\nu = 1.5$ . . . . .	34
2.7	Densidades estimadas dos modelos EG para os conjuntos de dados. . .	40
3.1	Gráfico da função de densidade FrG $(\sigma, \lambda, a, b)$ para alguns valores dos parâmetros. (a) Para $\sigma = 1.5$ e $\lambda = 1.0$ . (b) Para $\sigma = 2.0$ e $\lambda = 1.0$ . . .	45
3.2	Gráfico da função de risco da FrG $(\sigma, \lambda, a, b)$ para alguns valores dos parâmetros. (a) Para $\sigma = 1$ e $\lambda = 1.0$ . (b) Para $\sigma = 1.5$ e $\lambda = 1.0$ . . . .	46
3.3	Densidades e funções de distribuições acumuladas estimadas para os modelos FrG, BF e Fréchet, figuras (a) e (b), respectivamente. . . . .	65
4.1	Gráfico da função de densidade LWIG $(\gamma, \sigma, \mu)$ para alguns valores dos parâmetros. . . . .	67

4.2	Gráfico da função de densidade LFrG $(\phi, \alpha, \mu, b)$ para alguns valores dos parâmetros selecionados. . . . .	73
-----	---	----

# Capítulo 1

## Introdução

A teoria de distribuições generalizadas tem crescido muito nos últimos anos. Muitas formas de distribuições generalizadas podem ser encontradas na literatura. Por exemplo, a Fréchet exponencializada (Nadarajah e Kotz, 2006), a Beta generalizada (Eugene et al., 2002), a Gumbel exponencializada (Nadarajah, 2006) e a Beta Fréchet (Nadarajah e Gupta, 2004).

Nosso trabalho está organizado em cinco Capítulos. No Capítulo 2, estudamos a classe de distribuições generalizadas exponencializadas introduzida por Cordeiro et al. (2013) que generaliza os trabalhos de (Nadarajah, 2006) e (Nadarajah;Kotz, 2006), além de ter como casos particulares diversos outros modelos bastantes conhecidos na literatura. Muitos autores tem estudado as propriedades da distribuição generalizada exponencializada, ver por exemplo, Mudholkar e Srivastana (1993) e Mudholkar et al. (1996) para a distribuição weibull exponencializada, Gupta et al. (1998) para a Pareto exponencializada, Gupta e Kundu (1999) para a exponencial exponencializada, Nadarajah (2005) para a Gumbel exponencializada, Kakde e Shirke (2006) para a log-normal exponencializada, e Nadarajah e Gupta (2007) para a distribuição gama exponencializada. Ainda neste capítulo, discutimos algumas propriedades desta classe de distribuições. No Capítulo 3, apresentamos a principal contribuição deste trabalho. Neste Capítulo fizemos um estudo mais aprofundado da distribuição Fréchet Generalizada (FrG). Esta distribuição tem as seguintes vantagens: fórmulas explícitas para função de distribuição e função quantil que não envolve qualquer função especial, não

depende da função beta, como na distribuição beta Fréchet e não tem problema de identificabilidade como a distribuição Kumaraswamy Fréchet. Apresentamos algumas propriedades desta distribuição baseadas no trabalho de Cordeiro et al. (2013). No Capítulo 4, trabalhamos com a distribuição Weibull inversa log-generalizada introduzida por Gusmão, Ortega e Cordeiro (2011), na qual é considerada uma estrutura de regressão. Ainda neste capítulo, propomos uma transformação logarítmica e em seguida uma reparametrização no modelo FrG, denominado de log-Fréchet generalizada (LFrG). Definimos um modelo de regressão ao qual denominamos de modelo de regressão LFrG. Finalmente, no capítulo 5, apresentamos as considerações finais.

É importante ressaltar que em todos os capítulos foram discutidas expressões para a função de distribuição acumulada, função densidade de probabilidade, expansões para a função densidade de probabilidade, expressões gerais para os momentos, momentos das estatísticas de ordem e, estimação dos parâmetros. No final de cada capítulo aplicamos as distribuições, discutidas ao longo deste trabalho, a conjuntos de dados reais e comparamos os ajustes com outros modelos.

Os gráficos apresentados nesta dissertação foram produzidos utilizando o ambiente de programação *R* em sua versão 2.15.3 para o sistema operacional Windows que se encontra disponível gratuitamente no endereço <http://www.r-project.org>. Para mais detalhes ver Ihaka e Gentleman (1996), Cribari-Neto e Zarkos (1999).

A presente dissertação foi escrita de tal forma que todos os capítulos sejam independentes um dos outros, facilitando assim, a leitura individual dos capítulos. Dessa forma, algumas definições podem aparecer em mais de um capítulo.

# Capítulo 2

## A classe de distribuições generalizadas exponencializadas

Neste capítulo discutimos sobre uma nova classe de distribuições generalizadas exponencializadas obtida adicionando dois parâmetros a uma distribuição contínua, introduzida por Cordeiro, Ortega e Cunha (2013). Assim como estudamos algumas de suas propriedades estruturais.

### 2.1 Introdução

Gupta et al.(1998) propuseram pela primeira vez uma generalização da distribuição exponencial padrão, a qual chamaram de distribuição exponencial exponencializada (EE), cuja função de distribuição acumulada (fda) é  $F(x; \lambda, \alpha) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha$  para  $x > 0$ ,  $\lambda > 0$  e  $\alpha > 0$ , onde os parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$  representam a escala e a forma, respectivamente. Para mais detalhes ver Gupta e Kundu (2001). Segundo Gupta e Kundu (2002), uma das vantagens dessa distribuição é que devido a estrutura simples de suas funções de distribuição e sobrevivência a distribuição EE pode ser usada de forma eficaz na análise de dados de tempo de vida, particularmente, na presença de observações censuradas ou dados correlacionados. De forma semelhante, Nadarajah e Kotz (2006) introduziram três distribuições exponencializadas, a saber; a distribuição gama exponencializada (EG), que é uma generalização da distribuição gama padrão,



a distribuição Fréchet exponencializada (EF), que é uma generalização da distribuição Fréchet e a distribuição Gumbel exponencializada (EGu), que é uma generalização da distribuição Gumbel, embora a forma como eles definiram as fdas das distribuições Fréchet exponencializada e Gumbel exponencializada seja um pouco diferente. Ou seja, os autores geraram esses novos modelos na classe de distribuições exponencializadas a partir da expressão  $F(x; \lambda, \alpha) = 1 - [1 - G(x)]^\alpha$ .

**Definição 2.1** *Seja  $G(x)$  uma função de distribuição acumulada contínua. A classe de distribuições generalizadas exponencializadas (EG) é definida por*

$$F(x) = [1 - \{1 - G(x)\}^\alpha]^\beta, \quad (2.1)$$

em que  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  são dois parâmetros de forma. Sua função densidade é representada por

$$f(x) = \alpha \beta \{1 - G(x)\}^{\alpha-1} [1 - \{1 - G(x)\}^\alpha]^{\beta-1} g(x), \quad (2.2)$$

em que  $g(x) = G'(x)$ .

Note que a função (2.1) é simples e não depende da função beta incompleta, como no caso da família beta generalizada (Eugene et al., 2002).

A distribuição cuja a fda é  $G(x)$  é um caso especial de (2.1) quando  $\alpha = \beta = 1$ . Considerando  $\alpha = 1$  em (2.1) temos a distribuição do tipo exponencializada definida por Gupta et al. (1998). Além disso, as distribuições EE e  $E\Gamma$  são obtidas tomando  $G(x)$  como sendo a fda exponencial e gama, respectivamente. Para  $\beta = 1$ , e  $G(x)$  sendo a distribuição acumulada Gumbel e Fréchet, obtemos as distribuições EGu e EF, respectivamente, tal como definido por Nadarajah e Kotz (2006). Assim, a classe de distribuições (2.1) estende as duas distribuições do tipo exponencializada.

A família de densidades em (2.2) permite maior flexibilidade nas caudas e pode ser aplicada em muitas áreas da biologia e da engenharia. Os novos parâmetros desempenham o papel de introduzir assimetria e variação do peso da cauda. Observamos que, mesmo se  $g(x)$  for uma distribuição simétrica, a distribuição  $f(x)$  não será uma distribuição simétrica, a menos que  $\alpha = \beta = 1$ .

A partir de agora, usaremos a expressão  $X \sim \text{Exp}^c\text{G}$ ,  $c > 0$ , para denotar que a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição cuja fda e fdp são  $H_c(x) = G(x)^c$  e  $h_c(x) =$

$cg(x)G(x)^{c-1}$ , respectivamente. Esta distribuição também é chamada de Lehmann tipo I. Alternativamente, podemos gerar distribuições na classe  $\text{Exp}^c G$  fazendo  $F(x) = 1 - \{1 - G(x)\}^c$ , conhecida como a distribuição Lehmann tipo II. Portanto, a função em (2.1) engloba as distribuições Lehmann tipo I ( $\alpha = 1$ ) e Lehmann tipo II ( $\beta = 1$ ) introduzidas em Lehmann (1953).

A classe de distribuições Exponencializadas Generalizadas parte de uma interpretação física interessante quando  $\alpha$  e  $\beta$  são números inteiros positivos. Considere um dispositivo feito de  $\beta$  componentes independentes em um sistema em paralelo. Além disso, cada um dos componentes é composto de  $\alpha$  subcomponentes independentes e identicamente distribuídos de acordo com  $G(x)$ , em um sistema em série. O dispositivo falha se todos os componentes  $\beta$  falhar e cada um dos componentes falham se houver falha de pelo menos um dos subcomponentes. Sejam  $X_{j1}, \dots, X_{j\alpha}$  os tempo de vida dos subcomponentes dentro do componente  $j$ ,  $j = 1, \dots, \beta$ , com fda  $G(x)$  comum. Denotemos  $X_j$  como sendo o tempo de vida do componente  $j$  e seja  $X$  o tempo de vida do dispositivo. A fda de  $X$  é dada por

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \Pr(X_1 \leq x, \dots, X_\beta \leq x) \\
 &= \Pr(X_1 \leq x)^\beta \\
 &= [1 - \Pr(X_1 > x)]^\beta \\
 &= [1 - \Pr(X_{11} > x, \dots, X_{1\alpha} > x)]^\beta \\
 &= [1 - \{1 - \Pr(X_{11} \leq x)\}^\alpha]^\beta \\
 &= [1 - \{1 - G(x)\}^\alpha]^\beta.
 \end{aligned}$$

Portanto, o tempo de falha do dispositivo obedece à família de distribuições EG. A seguir, apresentamos expansões para as funções de distribuição e densidade do modelo EG.

## 2.2 Expansões para as funções de distribuição e densidade

Se  $\beta$  é qualquer número real não inteiro e  $|z| < 1$ , então a expansão em série binomial é dada por

$$(1 - z)^{\beta-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - k) k!} z^k. \quad (2.3)$$

Aplicando a Identidade (2.3) em (2.1), temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - k) k!} [1 - G(x)]^{\alpha k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - k) k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1 - j) j!} G(x)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - k) \Gamma(\alpha k + 1 - j) k! j!} G(x)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j G(x)^j, \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que

$$w_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - k) \Gamma(\alpha k + 1 - j) k! j!}. \quad (2.5)$$

Portanto,  $F(x)$  pode ser escrita como uma soma infinita de  $G(x)$ .

**Proposição 2.1** Para  $\alpha > 0$ , não inteiro, podemos escrever  $f(x)$  em (2.2) como

$$f(x) = \alpha \beta g(x) \sum_{j=0}^{\infty} t_j G(x)^j,$$

em que

$$t_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha(k + 1))}{\Gamma(\beta - k) \Gamma(\alpha(k + 1) - j) k! j!}.$$

**Demonstração:** Considere  $\alpha > 0$ , não inteiro. Aplicando a expansão (2.3) na equação

(2.2), obtemos

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-k)k!} [1-G(x)]^{\alpha(k+1)-1} g(x) \\
 &= \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-k)k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha(k+1))}{\Gamma(\alpha(k+1)-j)j!} G(x)^j g(x) \\
 &= \alpha\beta g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha(k+1))}{\Gamma(\beta-k) \Gamma(\alpha(k+1)-j) k! j!} G(x)^j \\
 &= \alpha\beta g(x) \sum_{j=0}^{\infty} t_j G(x)^j, \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

$$t_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha(k+1))}{\Gamma(\beta-k) \Gamma(\alpha(k+1)-j) k! j!}. \tag{2.7}$$

■

Por outro lado, podemos reescrever a equação (2.6) como

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* h_{j+1}(x), \tag{2.8}$$

em que  $t_j^* = \alpha\beta t_j / j+1$  e  $h_{j+1}(x) = (j+1)g(x)G(x)^j$  é a função densidade da  $\text{Exp}^{j+1}(G)$ . O que mostra que a função densidade EG é uma combinação linear de funções densidades da distribuição G exponencializadas (Exp-G). Assim, algumas propriedades estruturais da classe de distribuições EG, por exemplo, momentos incompletos e funções geradoras podem ser obtidas diretamente das propriedades da distribuição Exp-G.

## 2.3 Momentos

Seja  $G(\cdot)$  a fda da variável aleatória  $X$  e  $F(\cdot)$  a fda da variável aleatória  $Y$  com densidade dada em (2.2). Os momentos ponderados por probabilidade (MPPs) de  $X$  são definidos por

$$\tau_{r,j} = E[X^r G(x)^j] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r G(x)^j g(x) dx, \tag{2.9}$$

para mais detalhe ver Greenwood et al. (1979).

Os momentos da distribuição EG podem ser obtidos a partir dos momentos ponderados por probabilidade dados por

$$\begin{aligned} E(Y^r) &= \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} t_j \int_{-\infty}^{\infty} y^r G(y)^j g(y) dy \\ &= \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} t_j \tau_{r,j}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Portanto, os momentos de qualquer distribuição EG podem ser expressos como uma soma ponderada infinita de MPPs da distribuição principal.

A segunda fórmula para  $\tau_{r,j}$  é baseada na função quantil  $Q_G(x) = G^{-1}(x)$  como

$$\tau_{r,j} = \int_0^1 Q_G(u)^r u^j du, \quad (2.11)$$

de modo que a integral é calculada agora sobre o intervalo (0,1).

## 2.4 Função Geradora de Momentos

Estudamos três fórmulas para a função geradora de momentos (fgm)  $M(s) = E[\exp(sY)]$  de  $Y$ , com função densidade de probabilidade dada em (2.2). A primeira é obtida expandindo o termo  $\exp(sY)$  em série de Taylor como

$$M(s) = E \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(sY)^r}{r!} \right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu'_r}{r!} s^r, \quad (2.12)$$

em que  $\mu'_r = E[Y^r]$  é obtido a partir da equação (2.10).

A segunda expressão para  $M(s)$  é obtida a partir da função (2.8) como

$$M(s) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* M_{j+1}(s). \quad (2.13)$$

De fato,

$$M(s) = E(e^{sY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sy} f(y) dy.$$

Da equação (2.8) segue que

$$\begin{aligned} M(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{sy} h_{j+1}(y) dy \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* E_{j+1}(e^{sY}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* M_{j+1}(s), \end{aligned}$$

em que  $M_{j+1}(s)$  é a função geradora de momentos da distribuição  $\text{Exp}^{j+1}(G)$ .

A terceira expressão para  $M(s)$  é determinada a partir da função (2.6) dada por

$$M(s) = \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} t_j \rho_j(s). \quad (2.14)$$

De fato, segue da função (2.6) que

$$\begin{aligned} M(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) f(x) dx \\ &= \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} t_j \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) G(x)^j g(x) dx. \end{aligned}$$

Definindo  $\rho_j(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) G(x)^j g(x) dx$  na última expressão, obtemos

$$M(s) = \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} t_j \rho_j(s),$$

em que  $\rho_j(s)$  pode ser obtido a partir da função quantil  $Q_G(u) = G^{-1}(u)$  como

$$\rho_j(s) = \int_0^1 \exp[sQ_G(u)] u^j du. \quad (2.15)$$

Portanto, as fgm's de muitas distribuições EG podem ser obtidas a partir das equações (2.12), (2.13) e (2.14).

A função característica (fch)  $\phi(s) = E[\exp(isX)]$  das distribuições EG são obtidas a partir das equações (2.12)-(2.14) avaliando as respectivas fgm's em  $is$ , em que  $i = \sqrt{-1}$  denota o número imaginário.

## 2.5 Desvios Médios

A quantidade da dispersão em uma população é medida até certo ponto, pela totalidade dos desvios em relação a média ou a mediana. Os desvios da média e

da mediana são expressos como

$$\delta_1(Y) = E(|Y - \mu'_1|) \quad e \quad \delta_2(Y) = E(|Y - M|),$$

respectivamente. Tem-se

$$\delta_1(Y) = 2\mu'_1 F(\mu'_1) - 2m_1(\mu'_1) \quad e \quad \delta_2(Y) = \mu'_1 - 2m_1(M), \quad (2.16)$$

em que  $F(\cdot)$  é a função de distribuição de  $Y$  e  $m_1(z) = \int_{-\infty}^z xf(x)dx$  é o primeiro momento incompleto.

Estudamos duas formas alternativas de calcular  $\delta_1(Y)$  e  $\delta_2(Y)$ . Estas mudanças consistem em reescrever a função geral  $m_1(z)$ . Segue por definição e da equação (2.8) que

$$\begin{aligned} m_1(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* \int_{-\infty}^z xh_{j+1}(x)dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* J_{j+1}(x), \end{aligned} \quad (2.17)$$

com

$$J_{j+1}(x) = \int_{-\infty}^z xh_{j+1}(x)dx. \quad (2.18)$$

Concluimos que,

$$m_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* J_{j+1}(x).$$

Note que a equação (2.18) é a quantidade básica para calcular os desvios médios para as distribuições EG. Note, também, que as quantidades em (2.16) dependem somente do primeiro momento incompleto das distribuições Exp-G. Conseqüentemente,  $\delta_1(Y)$  e  $\delta_2(Y)$  podem ser expressos como

$$\delta_1(Y) = 2\mu'_1 F(\mu'_1) - 2 \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* J_{j+1}(\mu'_1)$$

e

$$\delta_2(Y) = \mu'_1 - 2 \sum_{j=0}^{\infty} t_j^* J_{j+1}(M).$$

Definindo  $u = G(x)$  em (2.8) obtemos a segunda fórmula para  $m_1(z)$  dada por

$$m_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)t_j^* T_j(z), \quad (2.19)$$

com

$$T_j(z) = \int_{-\infty}^{G(z)} Q_G(u) u^j du. \quad (2.20)$$

Uma aplicação dos desvios médios são as curvas de Bonferroni e Lorenz. Dada uma probabilidade  $\pi$ , as curvas são definidas por  $B(\pi) = m_1(q)/\pi\mu_1'$  e  $L(\pi) = m_1(q)/\mu_1'$ , respectivamente, com  $q = Q_G(\pi)$  sendo calculada a partir da função quantil principal.

## 2.6 Estatísticas de ordem

**Definição 2.2** *A função densidade da  $i$ -ésima estatística de ordem  $X_{i:n}$ , digamos  $f_{i:n}(x)$ , de uma amostra aleatória independente e identicamente distribuída de tamanho  $n$  é dado por*

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} F(x)^{i-1} [1-F(x)]^{n-i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que  $f(\cdot)$  e  $F(\cdot)$  são a fdp e fda da distribuição base, respectivamente.

Substituindo (2.1) e (2.2) na equação anterior e usando a expansão binomial, obtemos

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{\alpha\beta\{1-G(x)\}^{\alpha-1}}{B(i, n-i+1)} [1-\{1-G(x)\}^\alpha]^{\beta-1} g(x) [1-\{1-G(x)\}^\alpha]^{\beta i-\beta} \\ &\quad \times \{1-[1-\{1-G(x)\}^\alpha]^\beta\}^{n-i} \\ &= \frac{\alpha\beta}{B(i, n-i+1)} g(x) \{1-G(x)\}^{\alpha-1} \\ &\quad \times [1-\{1-G(x)\}^\alpha]^{\beta i-1} \{[1-\{1-G(x)\}^\alpha]^\beta\}^{n-i} \\ &= \frac{\alpha\beta g(x)}{B(i, n-i+1)} \{1-G(x)\}^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} [1-\{1-G(x)\}^\alpha]^{\beta(i+k)-1}. \end{aligned}$$



Usando (2.3) repetidamente, para  $\beta$  real não inteiro, na expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{\alpha \beta g(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+r+\ell} \Gamma(\beta(i+k)) \Gamma(\alpha(r+1))}{\Gamma(\beta(i+k)-r) \Gamma(\alpha(r+1)-\ell) \ell! r!} \binom{n-i}{k} G(x)^\ell \\ &= \frac{\alpha \beta}{B(i, n-i+1)} g(x) \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+r+\ell} \Gamma(\beta(i+k)) \Gamma(\alpha(r+1))}{\Gamma(\beta(i+k)-r) \Gamma(\alpha(r+1)-\ell) k! \ell! r!} \\ &\quad \frac{\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n-i-k+1)} \times G(x)^\ell. \end{aligned}$$

Na última expressão usamos o fato de que  $\Gamma(n+1) = n!$ . Segue que

$$f_{i:n}(x) = \frac{\alpha \beta}{B(i, n-i+1)} g(x) \sum_{\ell=0}^{\infty} s_\ell G(x)^\ell, \quad (2.21)$$

em que  $s_\ell = s_\ell(\alpha, \beta, i, n)$  tem a forma

$$s_\ell = \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+r+\ell} \Gamma(\beta(i+k)) \Gamma(\alpha(r+1)) \Gamma(n-i+1)}{\Gamma(\beta(i+k)-r) \Gamma(\alpha(r+1)-\ell) \Gamma(n-i-k+1) k! \ell! r!}.$$

Podemos escrever a função em (2.21) em termos das funções densidades da Exp-G como

$$f_{i:n}(x) = \frac{\alpha \beta}{B(i, n-i+1)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{s_\ell h_{\ell+1}(x)}{(\ell+1)}.$$

De fato, temos que  $h_{\ell+1} = (\ell+1)g(x)G(x)^\ell \Rightarrow g(x)G(x)^\ell = h_{\ell+1}/(\ell+1)$ , substituindo essa expressão em (2.21), é imediato que

$$f_{i:n}(x) = \frac{\alpha \beta}{B(i, n-i+1)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{s_\ell h_{\ell+1}(x)}{(\ell+1)}.$$

Portanto, muitas das propriedades matemáticas das estatísticas de ordem, como momentos, momentos incompletos, função geradora de momentos e desvios médios podem ser obtidos a partir das propriedades da distribuição Exp-G.

## 2.7 Estimação de Máxima Verossimilhança

**Definição 2.3** *Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$  com função densidade (ou de probabilidade)  $f(x|\boldsymbol{\theta})$ , com  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ , em que  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^{p+2}$  é o espaço paramétrico e  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \gamma^T)^T$  é o vetor de parâmetros do*

modelo e  $\gamma$  é um vetor de parâmetros  $p \times 1$  desconhecido da distribuição principal  $G(x; \gamma)$ . A função de verossimilhança de  $\theta$  correspondente a amostra aleatória observada  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  é dada por

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

**Definição 2.4** O estimador de máxima verossimilhança (EMV) de  $\theta$  é o valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\theta|\mathbf{x})$ .

Para obtermos o estimador de máxima verossimilhança, vamos considerar o logaritmo da função de verossimilhança de  $\theta$  denotado por

$$\ell(\theta|\mathbf{x}) = \log L(\theta|\mathbf{x}),$$

pois na prática, as vezes, é mais fácil trabalhar com o logaritmo da função  $L(\theta|\mathbf{x})$ . Como a função log é crescente não temos problema.

Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da distribuição Generalizada Exponencializada com parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , denotada por EG( $\alpha, \beta, \gamma$ ), em que  $\gamma$  é um vetor de parâmetros  $p \times 1$  desconhecidos da distribuição principal. A função de verossimilhança é dada por

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^n [\{1 - G(x_i; \gamma)\}^{\alpha-1} [1 - \{1 - G(x_i; \gamma)\}^\alpha]^{\beta-1} g(x_i; \gamma)],$$

com logaritmo da função de verossimilhança correspondente

$$\begin{aligned} \ell(\theta|\mathbf{x}) = & n \log(\alpha) + n \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \log(g(x_i; \gamma)) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log\{1 - G(x_i; \gamma)\} \\ & + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log[1 - \{1 - G(x_i; \gamma)\}^\alpha]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Podemos maximizar o logaritmo da função de verossimilhança usando uma rotina numérica de algum software, por exemplo, o SAS (proc NLMixed) e OX através do MaxBFGS (ver, Doornik, 2007). Ou resolvendo as equações não-lineares obtidas por diferenciação da função (2.22).

Derivando-se  $\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  com relação a  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma_j$ , os elementos da função escore  $U(\boldsymbol{\theta})$  são dados por

$$\begin{aligned}
 U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log[1 - G(x_i; \gamma)] + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{-\log[1 - G(x_i; \gamma)][1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha}{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha} \\
 &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log[1 - G(x_i; \gamma)] \left\{ 1 - \frac{(\beta - 1)[1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha}{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha} \right\}, \\
 U_\beta(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log\{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha\}, \\
 U_{\gamma_j}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{g(x_i; \gamma)} \frac{\partial g(x_i; \gamma)}{\partial \gamma_j} - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - G(x_i; \gamma)} \frac{\partial G(x_i; \gamma)}{\partial \gamma_j} + \\
 &\quad + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha[1 - G(x_i; \gamma)]^{\alpha-1}}{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha} \frac{\partial G(x_i; \gamma)}{\partial \gamma_j} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{[\dot{g}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j}}{g(x_i; \gamma)} - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{[\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j}}{1 - G(x_i; \gamma)} + \\
 &\quad + \alpha(\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{[1 - G(x_i; \gamma)]^{\alpha-1} [\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j}}{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{[\dot{g}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j}}{g(x_i; \gamma)} - \frac{(\alpha - 1)[\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j}}{1 - G(x_i; \gamma)} + \frac{\alpha(\beta - 1)[1 - G(x_i; \gamma)]^{\alpha-1} [\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j}}{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha} \right\},
 \end{aligned}$$

em que  $[\dot{g}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j} = \partial g(x_i; \gamma) / \partial \gamma_j$  e  $[\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j} = \partial G(x_i; \gamma) / \partial \gamma_j$  para  $j = 1, \dots, p$ .

Para a estimativa intervalar e teste de hipóteses dos parâmetros do modelo precisamos da normalidade assintótica. Sob certas condições de regularidade. A distribuição assintótica de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é dada por

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow N_{(p+2)}(0, I(\boldsymbol{\theta})^{-1}),$$

em que  $I(\boldsymbol{\theta})$  é a matriz de informação esperada. Visto que, em muitas situações a matriz  $I(\boldsymbol{\theta})$  é desconhecida, podemos utilizar a matriz de informação observada  $\ddot{J}(\boldsymbol{\theta})$  avaliada em  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  como uma estimativa de  $I(\boldsymbol{\theta})$ . Neste caso, a matriz de informação observada  $\ddot{J}(\boldsymbol{\theta})$  é dada por

$$\ddot{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \ddot{J}_{\alpha,\alpha} & \ddot{J}_{\alpha,\beta} & \ddot{J}_{\alpha,\gamma_j} \\ \ddot{J}_{\beta,\alpha} & \ddot{J}_{\beta,\beta} & \ddot{J}_{\beta,\gamma_j} \\ \ddot{J}_{\gamma_j,\alpha} & \ddot{J}_{\gamma_j,\beta} & \ddot{J}_{\gamma_j,\gamma_s} \end{bmatrix},$$

em que os elementos da matriz  $\ddot{J}(\boldsymbol{\theta})$  encontram-se no Apêndice A.

A distribuição normal assintótica multivariada  $N_{(p+2)}(0, \ddot{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1})$  pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados e regiões de confiança para os parâmetros do modelo. Para comparar o modelo EG com alguns de seus submodelos podemos utilizar um dos três testes de hipóteses conhecidos, a saber, o teste da Razão da Verossimilhanças (RV), o teste de Wald (W) e o teste escore de Rao ( $S_R$ ) que são baseados na normalidade assintótica dos estimadores. Por exemplo, podemos está interessados em testar as hipóteses  $H_0 : \alpha = 1$  contra  $H_1 : \alpha \neq 1$  que é equivalente a comparar a distribuição EG e os tipos de distribuições exponencializadas. Para este caso, a estatística de teste RV é dada por

$$\Lambda = 2\{\ell(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \ell(1, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})\},$$

em que  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\gamma}$  são os EMVs sob  $H_1$  e  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\gamma}$  são os EMVs de  $\beta$  e  $\gamma$  sob  $H_0$ .

A seguir, apresentamos os modelos Fréchet, normal, gama, Gumbel, exponencial e Pareto como modelos especiais para a classe de distribuições generalizadas exponencializadas. Assim, como os gráficos de suas densidades para alguns valores dos parâmetros.

## 2.8 Casos Particulares

Apresentamos, nesta seção, algumas distribuições especiais. A função densidade em (2.2) será mais tratável quando a fda  $G(x)$  e fdp  $g(x)$  tiverem expressões analíticas simples.

### 2.8.1 Fréchet Generalizada Exponencializada

A fda da distribuição Fréchet Generalizada Exponencializada (EGF) é obtida a partir da função em (2.1) considerando  $G(x)$  como sendo a fda da distribuição Fréchet com parâmetros  $\sigma > 0$  e  $\lambda > 0$ , definida por  $G_{\sigma,\lambda}(x) = \exp[-(\sigma/x)^\lambda]$  para  $x > 0$ , de

modo que

$$F(x) = \left[ 1 - \left( 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right\} \right)^\alpha \right]^\beta, \quad x > 0, \quad (2.23)$$

em que  $\sigma > 0$  é um parâmetro de escala e os outros parâmetros  $\lambda > 0$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$  são parâmetros de forma. A função densidade de probabilidade (fdp) associada é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \beta \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{\alpha-1} \\ &\quad \times \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^\alpha \right]^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Se  $\beta = 1$ , obtém-se a distribuição EF definida por Nadarajah e Kotz (2006).

Na Figura 2.1 apresentamos os gráficos da função densidade de probabilidade FGE para alguns valores dos parâmetros selecionados. Observamos que a distribuição EGF é assimétrica à direita. Quando fixamos  $\alpha = 1.5$  e  $\sigma = 1.5$  (Figura (b)) e variamos os valores de  $\beta$  e  $\lambda$  a distribuição fica mais dispersa.

Pela  $F(x)$  dada em (2.4) para  $G(x) = \exp[-(\sigma/x)^\lambda]$ , obtemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \exp \left[ - \left( \frac{\sigma j^{\frac{1}{\lambda}}}{x} \right)^\lambda \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j G_{\sigma^*, \lambda}(x), \end{aligned}$$

em que  $\sigma^* = \sigma j^{\frac{1}{\lambda}}$  e  $G_{\sigma^*, \lambda}(x)$  é a fda da distribuição Fréchet com parâmetros  $\sigma^* > 0$  e  $\lambda > 0$ . A partir da Proposição 2.1, obtemos

$$f(x) = \alpha \beta \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \sum_{j=0}^{\infty} t_j \exp \left[ - (j+1) \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right].$$

em que  $t_j$  é dado na proposição 2.1.

**Proposição 2.2** *O  $(r, j)$ -ésimo MPP da distribuição Fréchet é*

$$\tau_{r,j} = \frac{\sigma^r}{(j+1)^{1-\frac{r}{\lambda}}} \Gamma \left( 1 - \frac{r}{\lambda} \right),$$

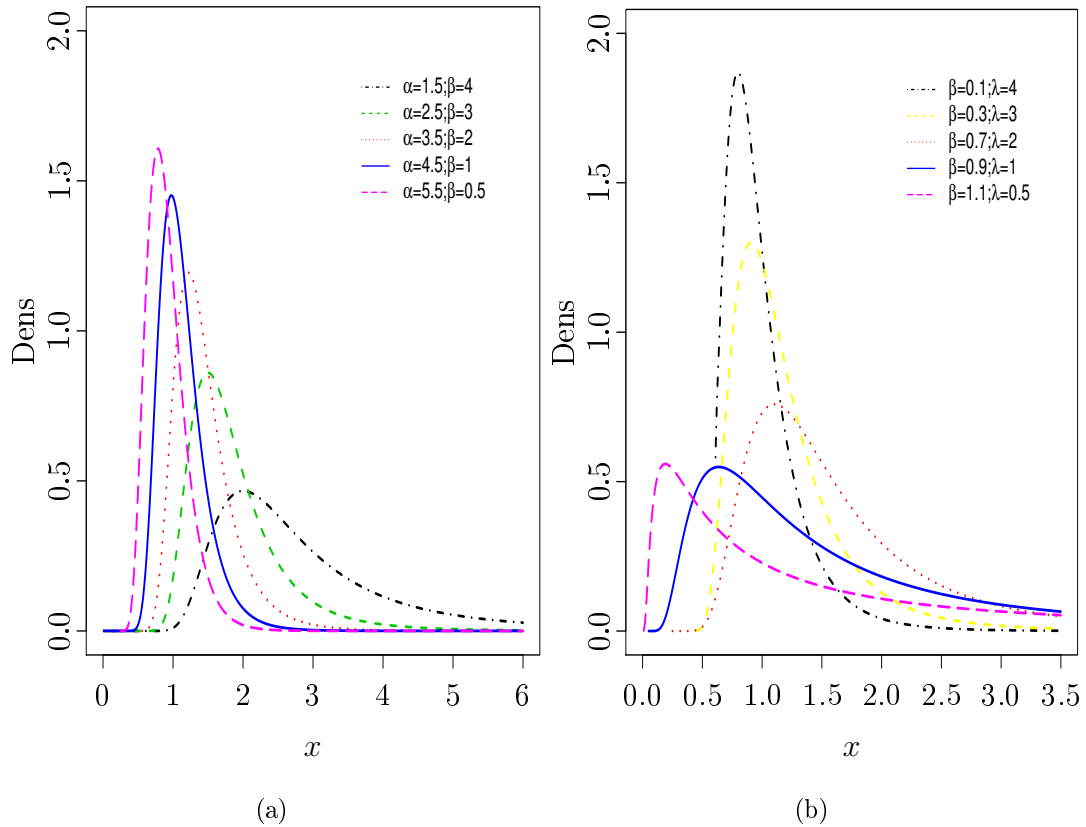


Figura 2.1: Função Densidade da EGF  $(\sigma, \lambda, \alpha, \beta)$  para alguns valores dos parâmetros. (a) Para  $\sigma = 1.5$  e  $\lambda = 2.0$ . (b) Para  $\alpha = 1.5$  e  $\sigma = 1.5$ .

para  $r < \lambda$ .

**Demonstração:** a distribuição Fréchet possui fda dada por

$$G(x) = \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right], x > 0.$$

A fdp correspondente pode ser expressa por

$$g(x) = \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right], x > 0.$$

Substituindo as duas últimas expressões em (2.9) temos

$$\begin{aligned} \tau_{r,j} &= \int_0^\infty x^r \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^j \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] dx \\ &= \lambda \sigma^\lambda \int_0^\infty x^{r-(\lambda+1)} \exp \left[ - (j+1) \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] dx. \end{aligned}$$

Definindo  $u = (j+1)(\sigma/x)^\lambda \Rightarrow x = \sigma(j+1)^{1/\lambda} u^{-1/\lambda} \Rightarrow dx = -\sigma(j+1)^{1/\lambda} \lambda^{-1} u^{-(1/\lambda+1)} du$ .

Segue que

$$\begin{aligned}
 \tau_{r,j} &= \lambda \sigma^\lambda \int_0^\infty [\sigma(j+1)^{\frac{1}{\lambda}} u^{-\frac{1}{\lambda}}]^{r-(\lambda+1)} \exp(-u) \sigma(j+1)^{\frac{1}{\lambda}} \lambda^{-1} u^{-(\frac{1}{\lambda}+1)} du \\
 &= \sigma^r (j+1)^{\frac{r}{\lambda}-1} \int_0^\infty u^{-\frac{r}{\lambda}} \exp(-u) du \\
 &= \frac{\sigma^r}{(j+1)^{1-\frac{r}{\lambda}}} \int_0^\infty u^{-\frac{r}{\lambda}} \exp(-u) du \\
 &= \frac{\sigma^r}{(j+1)^{1-\frac{r}{\lambda}}} \Gamma\left(1 - \frac{r}{\lambda}\right).
 \end{aligned}$$

■

A integral  $\int_0^\infty u^{-\frac{r}{\lambda}} \exp(-u) du$  converge absolutamente para  $r < \lambda$ . Consequentemente para  $r < \lambda$ , temos que

$$E(Y^r) = \alpha \beta \sigma^r \Gamma\left(1 - \frac{r}{\lambda}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t_j}{(j+1)^{1-\frac{r}{\lambda}}}.$$

### 2.8.2 Normal Generalizada Exponencializada

A distribuição Normal Generalizada Exponencializada (EGN) é expressa por

$$F(x) = \left[1 - \left\{1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right\}^\alpha\right]^\beta. \quad (2.24)$$

Consequentemente, a densidade da distribuição EGN corresponde a

$$f(x) = \alpha \beta \sigma^{-1} \left\{1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right\}^{\alpha-1} \left[1 - \left\{1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right\}^\alpha\right]^{\beta-1} \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad (2.25)$$

em que  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  é um parâmetro de locação,  $\sigma > 0$  é um parâmetro de escala,  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , e  $\Phi(\cdot)$  e  $\phi(\cdot)$  são a fda e fdp da distribuição normal padrão, respectivamente.

A Figura 2.2 apresenta o comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição EGN para alguns valores dos parâmetros. Observe que a medida que aumentamos o valor de  $\beta$  e diminuimos o valor de  $\alpha$  (para  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1.0$  fixados), mais assimétrica torna-se a distribuição. O mesmo ocorre quando diminuimos o valores de  $\beta$  e  $\sigma$  (para  $\alpha = 1.5$  e  $\mu = 0$  fixados).

Os momentos de  $X \sim N(\mu, \sigma)$  podem ser obtidos utilizando  $E(X^r) = \sum_{k=0}^r \mu^{r-t} \sigma^r E(Z^r)$ , em que  $Z \sim N(0, 1)$ . Assim, passamos a trabalhar com a distribuição normal padrão. Considere a fda da distribuição normal definida por

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right\}, \quad (2.26)$$

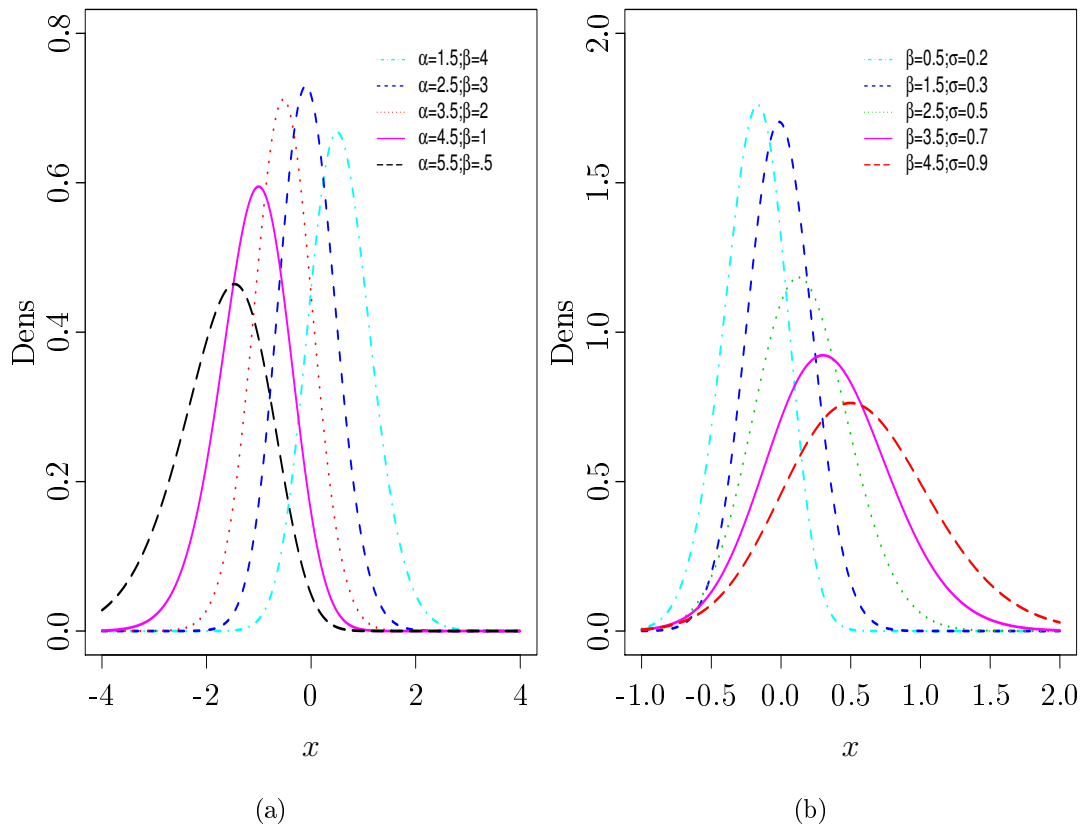


Figura 2.2: Função Densidade da EGN  $(\sigma, \mu, \alpha, \beta)$  para alguns valores dos parâmetros. (a) Para  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1.0$ . (b) Para  $\alpha = 1.5$  e  $\mu = 0$ .

em que

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt,$$

é a função erro. Considerando em (2.4) a distribuição normal padrão com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ , obtemos

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j [\Phi(x)]^j,$$

em que  $w_j$  é dado em (2.5). Usando a expressão (2.26) e a expansão binomial podemos



reescrever a equação anterior como

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \left[ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right\} \right]^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} w_j \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right\}^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} w_j \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]^\ell. \end{aligned}$$

Logo,

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} w_j \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]^\ell.$$

Obteremos, agora uma expansão para a função em (2.25) (com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ ).

Considere a Identidade

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)m!}. \quad (2.27)$$

Tomando  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$  na equação (2.25), temos que

$$f(x) = \alpha\beta [1 - \Phi(x)]^{\alpha-1} \{1 - [1 - \Phi(x)]^\alpha\}^{\beta-1} \phi(x).$$

Utilizando a equação (2.6) segue que

$$f(x) = \alpha\beta \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) 2^{-1/2} \pi^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} t_j \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]^j.$$

Usando a expansão binomial e a expansão em série para a função erro (2.27), respectivamente, na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\beta \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) 2^{-1/2} \pi^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} t_j \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^\ell \\ &= \alpha\beta \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) 2^{-1/2} \pi^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} t_j \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} 2^{\ell/2} \pi^{-\ell/2} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^m (2m+1)m!} \right]^\ell \\ &= \alpha\beta \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) 2^{-1/2} \pi^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} t_j \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} 2^{\ell/2} \pi^{-\ell/2} \\ &\quad \times \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_\ell} x^{2(m_1+\dots+m_\ell)+\ell}}{2^{m_1+\dots+m_\ell} (2m_1+1)\dots(2m_\ell+1)m_1!\dots m_\ell!}. \end{aligned}$$

**Definição 2.5** A função Lauricella do tipo A (Exton, 1978; Aarts, 2000) é dada por

$$F_A^{(n)}(a; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n} m_1! \dots m_n!}, \quad (2.28)$$

em que  $(a)_i = a(a+1)\dots(a+i-1)$  é o fatorial ascendente (com a convenção  $(a)_0 = 1$ ).

**Proposição 2.3** O  $(r, j)$ -ésimo MPP da distribuição normal podem ser expresso em termos da função Lauricella do tipo A como

$$\tau_{r,j} = 2^{r/2} \pi^{-(j+1)/2} \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} 2^{-\ell} \pi^{\ell/2} \Gamma\left(\frac{r+j-\ell+1}{2}\right) \times F_A^{(j-\ell)}\left(\frac{r+j-\ell+1}{2}; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}; -1, \dots, -1\right),$$

para  $r+j-\ell$  par.

**Demonstração:** da definição, dada em (2.9),

$$\begin{aligned} \tau_{r,j} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r \Phi(x)^j \phi(x) dx \\ &= \frac{1}{2^j \sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} \int_{-\infty}^{\infty} x^r \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{j-\ell} dx \\ &= \frac{1}{2^j \sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} I(j, \ell). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Usando a expansão (2.27), a integral  $I(j, \ell)$  em (2.29) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} I(j, \ell) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{m+\frac{1}{2}} (2m+1)m!} \right]^{j-\ell} dx \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{j-\ell} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{j-\ell}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_{j-\ell}}}{2^{m_1+\dots+m_{j-\ell}+\frac{j-\ell}{2}} (2m_1+1)\dots(2m_{j-\ell}+1)m_1!\dots m_{j-\ell}!} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(m_1+\dots+m_{j-\ell})+r+j-\ell} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{j-\ell} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{j-\ell}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_{j-\ell}}}{2^{m_1+\dots+m_{j-\ell}+\frac{j-\ell}{2}} (2m_1+1)\dots(2m_{j-\ell}+1)m_1!\dots m_{j-\ell}!} \\ &\quad \times 2^{m_1+\dots+m_{j-\ell}+\frac{r+j-\ell+1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{(m_1+\dots+m_{j-\ell}+\frac{r+j-\ell+1}{2})-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{j-\ell} 2^{\frac{r+1}{2}} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{j-\ell}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_{j-\ell}}}{2^{j-\ell}(m_1+\frac{1}{2})\dots(m_{j-\ell}+\frac{1}{2})m_1!\dots m_{j-\ell}!} \\
 &\quad \times \Gamma\left(m_1+\dots+m_{j-\ell}+\frac{r+j-\ell+1}{2}\right) \\
 &= \pi^{\frac{\ell-j}{2}} 2^{\frac{r+1}{2}} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{j-\ell}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_{j-\ell}}}{(m_1+\frac{1}{2})\dots(m_{j-\ell}+\frac{1}{2})m_1!\dots m_{j-\ell}!} \\
 &\quad \times \Gamma\left(m_1+\dots+m_{j-\ell}+\frac{r+j-\ell+1}{2}\right), \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

se  $r+j-\ell$  é par. Agora, usando o fato de que  $(f)_k = \Gamma(f+k)/\Gamma(f)$  e a definição em (2.28), podemos simplificar (2.30) para

$$\begin{aligned}
 I(j, \ell) &= \pi^{\frac{\ell-j}{2}} 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma\left(\frac{r+j-\ell+1}{2}\right) \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{j-\ell}=0}^{\infty} \frac{(r+j-\ell+1)_{m_1+\dots+m_{j-\ell}} (-1)^{m_1+\dots+m_{j-\ell}}}{(m_1+\frac{1}{2})\dots(m_{j-\ell}+\frac{1}{2})m_1!\dots m_{j-\ell}!} \\
 &= \pi^{\frac{\ell-j}{2}} 2^{\frac{r+1}{2}+j-\ell} \Gamma\left(\frac{r+j-\ell+1}{2}\right) \times \\
 &\quad F_A^{j-\ell}\left(\frac{r+j-\ell+1}{2}; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}; -1, \dots, -1\right). \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

Combinando (2.29) e (2.31), obtemos a expressão

$$\begin{aligned}
 \tau_{r,j} &= 2^{r/2} \pi^{-(j+1)/2} \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} 2^{-\ell} \pi^{\ell/2} \Gamma\left(\frac{r+j-\ell+1}{2}\right) \times \\
 &\quad F_A^{(j-\ell)}\left(\frac{r+j-\ell+1}{2}; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}; -1, \dots, -1\right).
 \end{aligned}$$

Portanto, o  $(r, j)$ -ésimo MPP da distribuição normal é

$$\begin{aligned}
 \tau_{r,j} &= 2^{r/2} \pi^{-(j+1)/2} \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} 2^{-\ell} \pi^{\ell/2} \Gamma\left(\frac{r+j-\ell+1}{2}\right) \times \\
 &\quad F_A^{(j-\ell)}\left(\frac{r+j-\ell+1}{2}; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}; -1, \dots, -1\right),
 \end{aligned}$$

para  $r+j-\ell$  par. Note que a expressão anterior é uma soma de funções Lauricella do tipo A. ■

### 2.8.3 Gama Generalizada Exponencializada

A fda da distribuição gama com parâmetros  $a > 0$  (forma) e  $b > 0$  (escala) é  $G_{a,b}(x) = \gamma(a, bx)/\Gamma(a)$  (para  $x > 0$ ), em que

$$\gamma(a, x) = \int_0^x w^{a-1} e^{-w} dw$$

é a função gama incompleta, que é facilmente implementada em vários *softwares* estatísticos. A distribuição Gama Generalizada Exponencializada (EGGa) tem fda dada por

$$F(x) = \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\gamma(a, bx)}{\Gamma(a)} \right]^\alpha \right\}^\beta, \quad x > 0$$

e função densidade associada

$$f(x) = \frac{\alpha \beta b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} \left\{ 1 - \frac{\gamma(a, bx)}{\Gamma(a)} \right\}^{\alpha-1} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\gamma(a, bx)}{\Gamma(a)} \right]^\alpha \right\}^{\beta-1}, \quad (2.32)$$

em que  $a$  é um parâmetro de locação,  $b$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros de forma

A distribuição EGGa é uma família que possui alguns casos particulares. Quando  $\alpha = \beta = 1$  na equação (2.32) temos uma distribuição gama, quando  $\alpha = \beta = a = 1$  temos a distribuição exponencial.

Na Figura 2.3 estão os gráficos da função densidade em (2.32) para alguns valores dos parâmetros selecionados. Note que a medida que aumentamos o valor de  $\alpha$  e diminuímos o valor de  $\beta$  (com  $a = 1.5$  e  $b = 2.0$  fixos), mais assimétrica torna-se a distribuição. Veja, também, que de acordo com os valores de  $\beta$  e  $b$  (com  $\alpha = 1.5$  e  $a = 1.5$  fixos) a forma da distribuição se altera.

**Definição 2.6** *Uma expansão em série de potências para a função gama incompleta é dada por*

$$G_{a,b}(x) = \frac{(bx)^a}{\Gamma(a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-bx)^m}{(a+m)m!}. \quad (2.33)$$

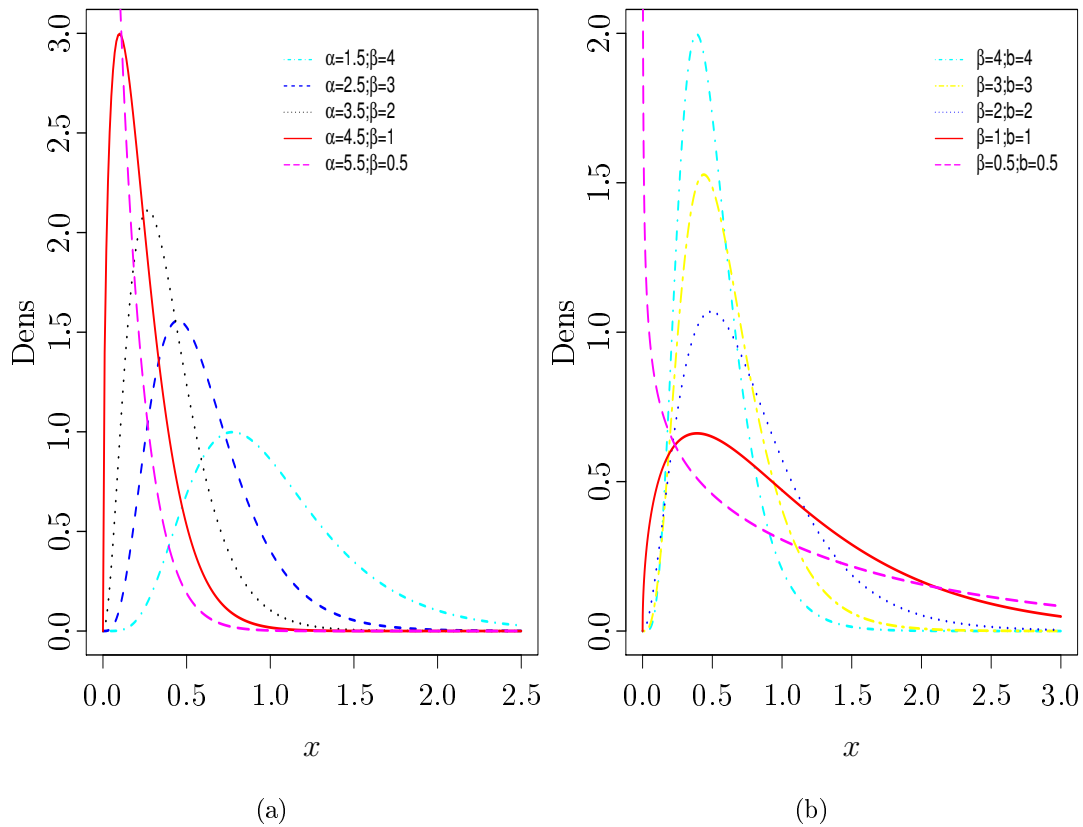


Figura 2.3: Função Densidade da EGGa  $(a, b, \alpha, \beta)$  para alguns valores dos parâmetros. (a) Para  $a = 1.5$  e  $b = 2.0$ . (b) Para  $\alpha = 1.5$  e  $a = 1.5$ .

A partir da função em (2.6) e da expansão em (2.33), obtemos:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\alpha \beta b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} t_j \left[ \frac{\gamma(a, bx)}{\Gamma(a)} \right]^j \\
 &= \frac{\alpha \beta b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} t_j [G_{a,b}(x)]^j \\
 &= \frac{\alpha \beta b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} t_j \left[ \frac{(bx)^a}{\Gamma(a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-bx)^m}{(a+m)m!} \right]^j \\
 &= \frac{\alpha \beta b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} t_j \frac{(bx)^{aj}}{\Gamma(a)^j} \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{(-bx)^{m_1}}{(a+m_1)m_1!} \cdots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(-bx)^{m_j}}{(a+m_j)m_j!} \\
 &= \frac{\alpha \beta b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} t_j \frac{(bx)^{aj}}{\Gamma(a)^j} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(-bx)^{m_1+\dots+m_j}}{(a+m_1)\dots(a+m_j)m_1!\dots m_j!}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{\alpha \beta b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} t_j \frac{(bx)^{aj}}{\Gamma(a)^j} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(-bx)^{m_1+\dots+m_j}}{(a+m_1)\dots(a+m_j)m_1!\dots m_j!},$$

em que  $t_j$  é dado em (2.7).

**Proposição 2.4** *O  $(r, j)$ -ésimo MPP da distribuição gama é dado por*

$$\tau_{r,j} = \frac{\Gamma(r+a(j+1))}{a^j b^j \Gamma(a)^{j+1}} F_A^{(j)}(r+a(j+1); a, \dots, a; a+1, \dots, a+1; -1, \dots, -1).$$

**Demonstração:** da definição, dada em (2.9)

$$\begin{aligned} \tau_{r,j} &= \int_0^{\infty} x^r G(x)^j g(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^r \left[ \frac{(bx)^a}{\Gamma(a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-bx)^m}{(a+m)m!} \right]^j \frac{b^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-bx) dx \\ &= \frac{(b)^a}{\Gamma(a)^{j+1}} \int_0^{\infty} x^{r+a-1} \exp(-bx) \left[ (bx)^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-bx)^m}{(a+m)m!} \right]^j dx. \end{aligned}$$

Definindo  $u = bx \Rightarrow x = u/b$  e  $dx = du/b$ , temos

$$\begin{aligned} \tau_{r,j} &= \frac{(b)^{-r}}{\Gamma(a)^{j+1}} \int_0^{\infty} u^{r+a-1} \exp(-u) \left[ u^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-u)^m}{(a+m)m!} \right]^j du \\ &= \frac{(b)^{-r}}{\Gamma(a)^{j+1}} I(r, j). \end{aligned} \tag{2.34}$$

A integral em (2.34) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} I(r, j) &= \int_0^{\infty} u^{r+a-1} \exp(-u) \left[ u^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-u)^m}{(a+m)m!} \right]^j du \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_j}}{(a+m_1)\dots(a+m_j)m_1!\dots m_j!} \int_0^{\infty} u^{r+a(j+1)+m_1+\dots+m_j-1} \exp(-u) du \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\dots+m_j}}{(a+m_1)\dots(a+m_j)m_1!\dots m_j!} \\ &\quad \times \Gamma(r+a(j+1)+m_1+\dots+m_j). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Usando o fato de que  $(f)_k = \Gamma(f+k)/\Gamma(f)$  e a definição em (2.28), respectivamente, podemos reescrever (2.35) como

$$\begin{aligned} I(r, j) &= \Gamma(r + a(j + 1)) \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(r + a(j + 1))_{m_1+\dots+m_j} (-1)^{m_1+\dots+m_j}}{(a + m_1)\dots(a + m_j) m_1! \dots m_j!} \\ &= \frac{\Gamma(r + a(j + 1))}{a^j} \times \\ &\quad F_A^{(j)}(r + a(j + 1); a, \dots, a; a + 1, \dots, a + 1; -1, \dots, -1). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Substituindo (2.36) em (2.34), obtemos a expressão

$$\tau_{r,j} = \frac{\Gamma(r + a(j + 1))}{b^r a^j \Gamma(a)^{j+1}} F_A^{(j)}(r + a(j + 1); a, \dots, a; a + 1, \dots, a + 1; -1, \dots, -1).$$

■

### 2.8.4 Gumbel Generalizada Exponencializada

**Definição 2.7**  $X$  tem distribuição Gumbel com parâmetros  $\mu > 0$  e  $\sigma > 0$  se sua função de distribuição acumulada é dada por

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Substituindo a fda anterior na equação (2.1), obtemos a fda Gumbel Generalizada Exponencializada (EGGu) dada por

$$F(x) = \left\{ 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right]^\alpha \right\}^\beta, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.37)$$

cuja fdp é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \beta \sigma^{-1} \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right]^{\alpha-1} \\ &\quad \times \exp \left\{ \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \left\{ 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right]^\alpha \right\}^{\beta-1}, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

em que  $\sigma > 0$  é um parâmetro de escala,  $\mu \in \mathbb{R}$  é um parâmetro de locação,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros de forma.

Observamos na Figura 2.4 a representação gráfica desta função densidade para alguns valores dos parâmetros selecionados. Veja que de acordo com os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\sigma$  (com  $\beta = 1.5$  e  $\mu = 0$  fixos) a distribuição torna-se mais assimétrica.

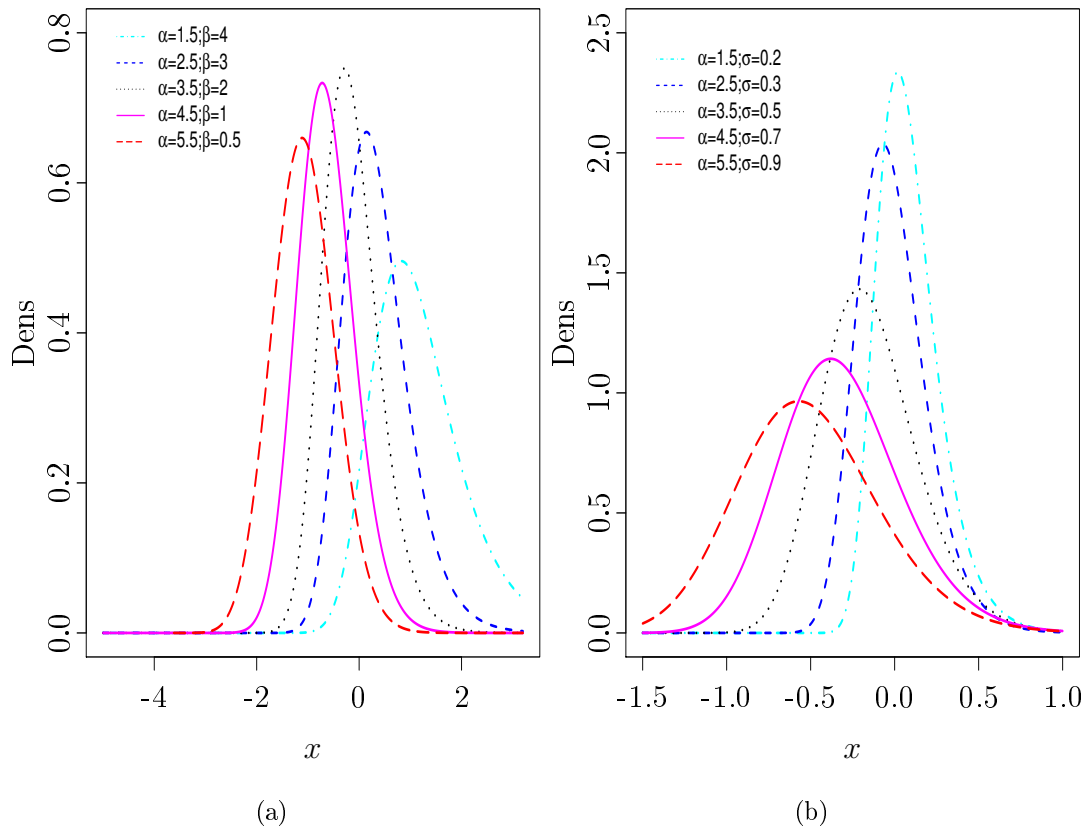


Figura 2.4: Função Densidade da EGGu  $(\sigma, \mu, \alpha, \beta)$  para alguns valores dos parâmetros. (a) Para  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1.0$ . (b) Para  $\beta = 1.5$  e  $\mu = 0$ .

Agora, determinaremos as funções densidade e distribuição expandidas para a distribuição EGGu. Substituindo  $G(x)$  em (2.4) pela a fda da distribuição Gumbel resulta

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \exp \left\{ -j \exp \left( -\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \exp \left\{ -\exp \left( \log(j) - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{x - (\mu - \sigma \log(j))}{\sigma} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Definindo  $\mu^* = \mu - \sigma \log(j)$  na expressão anterior, segue que

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{x - \mu^*}{\sigma} \right) \right\} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j G_{\mu^*, \sigma}(x).
 \end{aligned}$$



Derivando  $F(x)$  com relação a  $x$  obtemos,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j g_{\mu^*, \sigma}(x),$$

em que  $G_{\mu^*, \sigma}(x)$  e  $g_{\mu^*, \sigma}(x)$  são a fda e a fdp da distribuição Gumbel com parâmetros  $\mu^* = \mu - \sigma \log(j)$  e  $\sigma$ , respectivamente. Portanto, a função densidade (ou fda) do modelo EGGu pode ser expressa como uma combinação linear infinita de densidades (ou fda) Gumbel.

**Proposição 2.5** *O  $(r, j)$ -ésimo MPP da distribuição Gumbel pode ser expresso por*

$$\tau_{r,j} = \sum_{\ell=0}^r \binom{r}{\ell} (-\sigma)^\ell \mu^{r-\ell} \left( \frac{\partial}{\partial a} \right)^\ell [(j+1)^{-a} \Gamma(a)] \Big|_{a=1}.$$

**Demonstração:** segue por definição,

$$\begin{aligned} \tau_{r,j} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r \left[ \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right]^j \sigma^{-1} \exp \left\{ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} dx \\ &= \sigma^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x^r \exp \left\{ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} \exp \left\{ -(j+1) \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Definindo na integral acima,  $u = \exp\{-(x - \mu)/\sigma\} \Rightarrow x = \mu - \sigma \log(u)$ . Segue que

$$\begin{aligned} \tau_{r,j} &= \sigma^{-1} \int_0^{\infty} [\mu - \sigma \log(u)]^r u \exp[-(j+1)u] \left( \frac{\sigma}{u} \right) du \\ &= \int_0^{\infty} [\mu - \sigma \log(u)]^r \exp[-(j+1)u] du. \end{aligned}$$

Usando a expansão binomial na expressão anterior reduz-a

$$\begin{aligned} \tau_{r,j} &= \int_0^{\infty} \sum_{\ell=0}^r \binom{r}{\ell} [-\sigma \log(u)]^\ell \mu^{r-\ell} \exp[-(j+1)u] du \\ &= \sum_{\ell=0}^r \binom{r}{\ell} (-\sigma)^\ell \mu^{r-\ell} \int_0^{\infty} \log(u)^\ell \exp[-(j+1)u] du. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Pela equação (2.6.21.1) em Prudnikov et al. (1986)) definida (para  $\mu, a \in \mathbb{R}$  e  $p > 0$ ) por

$$\int_0^\infty x^{a-1} \exp(-px\mu)(\log x)^n dx = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial a} \right)^n \left[ p^{-a/\mu} \Gamma \left( \frac{a}{\mu} \right) \right].$$

Podemos reescrever a expressão em (2.38) na forma

$$\tau_{r,j} = \sum_{\ell=0}^r \binom{r}{\ell} (-\sigma)^\ell \mu^{r-\ell} \left( \frac{\partial}{\partial a} \right)^\ell [(j+1)^{-a} \Gamma(a)] \Big|_{a=1}.$$

■

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} E(Y^r) &= \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} t_j \tau_{r,j} \\ &= \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} t_j \sum_{\ell=0}^r \binom{r}{\ell} (-\sigma)^\ell \mu^{r-\ell} \left( \frac{\partial}{\partial a} \right)^\ell [(j+1)^{-a} \Gamma(a)] \Big|_{a=1}. \end{aligned}$$

### 2.8.5 Exponencial Generalizada Exponencializada

A fda da distribuição Exponencial Generalizada Exponencializada (EGE) é obtida considerando  $G(x)$  em (2.1) como sendo a fda da distribuição exponencial definida por  $G(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ , com parâmetro  $\lambda > 0$ . Dessa forma, a fda da distribuição EGE é expressa por

$$F(x) = [1 - \{\exp(-\lambda x)\}^\alpha]^\beta, \quad x > 0,$$

cuja função densidade de probabilidade associada é dada por

$$f(x) = \alpha \beta \lambda \exp(-\lambda x) [\exp(-\lambda x)]^{\alpha-1} \{1 - [\exp(-\lambda x)]^\alpha\}^{\beta-1}, \quad x > 0,$$

em que  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  são parâmetros de forma e  $\lambda > 0$  é um parâmetro de escala.

A Figura 2.5 apresenta o comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição EGE para alguns valores dos parâmetros selecionados. Note que quando

fixamos  $\alpha = 1.5$  e  $\beta = 2.0$  (Figura (a)) e aumentamos o valor de  $\lambda$  os dados ficam mais dispersos, ou seja, a escala muda de acordo com os valores de  $\lambda$ . Observe, também, que de acordo com os valores de  $\beta$  e  $\alpha$  (com  $\lambda = 1.5$  fixo) a forma da distribuição se altera (Figura (b)).

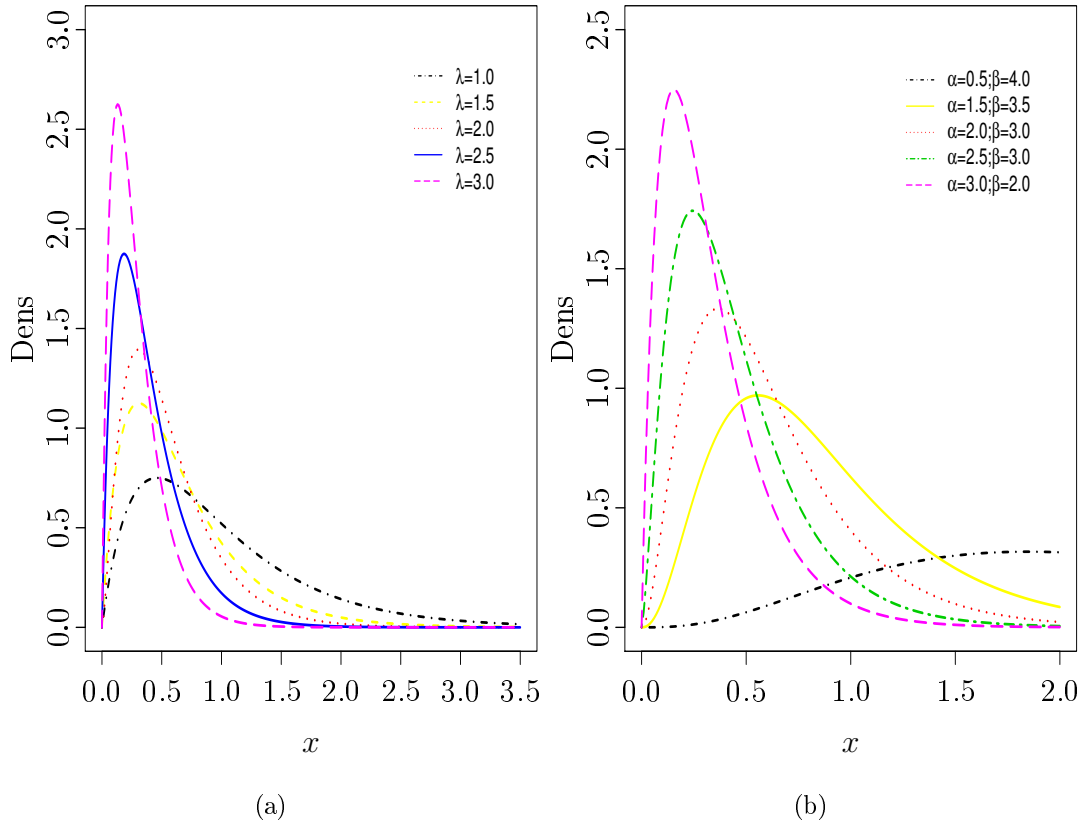


Figura 2.5: Função Densidade da EGE  $(\alpha, \beta, \lambda)$  para alguns valores dos parâmetros. (a) Para  $\alpha = 1.5$  e  $\beta = 2.0$ . (b) Para  $\lambda = 1.5$ .

A função quantil para a distribuição exponencial é  $Q_G(x) = -\lambda^{-1} \log(1 - u)$ . Substituindo  $Q_G(x)$  na função (2.11), temos

$$\tau_{r,j} = (-1)^r (\lambda)^{-r} \int_0^1 \log(1 - u)^r u^j du.$$

Definindo  $t = \log(1 - u) \Rightarrow u = 1 - \exp(t)$  e  $du = -\exp(t)dt$ . Assim, a integral reduz-a

$$\int_0^1 \log(1 - u)^r u^j du = \int_0^\infty t^r (1 - \exp(t))^j (-\exp(t)) dt.$$

Usando a expansão binomial na última integral, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1-u)^r u^j du &= \int_0^\infty t^r \sum_{m=0}^\infty \binom{j}{m} (-\exp(t))^{m+1} dt \\ &= \sum_{m=0}^\infty (-1)^{m+1} \binom{j}{m} \int_0^\infty t^r \exp(t(m+1)) dt \end{aligned}$$

Completando a integral no segundo membro de modo que apareça a função densidade da distribuição gama, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1-u)^r u^j du &= \sum_{m=0}^\infty (-1)^{m+1} \binom{j}{m} \frac{\Gamma(r+1)}{(-1)(m+1)^{r+1}} \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{(-1)(m+1)^{r+1}}{\Gamma(r+1)} t^{r+1-1} \exp(t(m+1)) dt \\ &= \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \binom{j}{m} \frac{\Gamma(r+1)}{(m+1)^{r+1}} \\ &= \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \binom{j}{m} \frac{r!}{(m+1)^{r+1}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\tau_{r,j} = r!(\lambda)^{-r} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{m+1} \binom{j}{m}}{(m+1)^{r+1}}.$$

Portanto, a partir da equação (2.10) temos que o  $r$ -ésimo momento da distribuição Exponencial Generalizada Exponencializada é dada por

$$E(Y^r) = \alpha \beta \sum_{j=0}^\infty t_j r!(\lambda)^{-r} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{m+1} \binom{j}{m}}{(m+1)^{r+1}}.$$

Vamos determinar, agora, a fgm para o modelo EGE. Para esta distribuição temos que  $Q_G(u) = -\lambda^{-1} \log(1-u)$ . Da equação (2.15), é imediato obtermos

$$\begin{aligned} \rho_j(s) &= \int_0^1 \exp[-s\lambda^{-1} \log(1-u)] u^j du \\ &= \int_0^1 u^j (1-u)^{-s\lambda^{-1}} du \\ &= B(j+1, 1-\lambda^{-1}s). \end{aligned}$$

E conseqüentemente, da equação (2.14), temos

$$M(s) = \alpha \beta \sum_{j=0}^\infty t_j B(j+1, 1-\lambda^{-1}s).$$

Para mostrar o quanto é simples o cálculo dos desvios médios combinando as equações (2.19)-(2.20). Iremos obter o desvio médio da distribuição EGE (com parâmetro  $\lambda$ ). E a quantidade  $T_j(z)$  será obtida a partir das seguintes integrais (para  $a > 0$ ) usando o software Maple (<http://www.maplesoft.com/products/maple>) ou o software gratuito Mathematica (<http://www.wolfram.com/mathematica>):

$$(i) \int_1^a x^j \log(x) dx = \frac{1 - a^{j+1}}{(j+1)^2} + \frac{a^{j+1} \log(a)}{(j+1)}, (ii) \int_0^a x^j \log(x) dx = \frac{a^{j+1}}{(j+1)^2} [(j+1) \log(a) - 1].$$

A partir da equação (2.20), é imediato que

$$T_j(z) = \int_0^{G(z)} -\lambda^{-1} \log(1-u) u^j du.$$

Considerando a mudança de variável  $r = 1 - u \Rightarrow du = -dr$ . Obtemos,

$$T_j(z) = \int_1^{1-G(z)} \lambda^{-1} \log(r) (1-r)^j dr.$$

Usando a expansão binomial, a expressão anterior pode ser escrita como

$$T_j(z) = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} \int_1^{1-G(z)} (r)^k \log(r) dr.$$

Aplicando, agora a integral em (i), concluímos que

$$T_j(z) = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} \left[ \frac{1 - \{1 - G(z)\}^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{\{1 - G(z)\}^{k+1} \log\{1 - G(z)\}}{(k+1)} \right].$$

Portanto,

$$m_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \lambda^{-1} (-1)^k (j+1) t_j^* \binom{j}{k} \left[ \frac{1 - \{1 - G(z)\}^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{\{1 - G(z)\}^{k+1} \log\{1 - G(z)\}}{(k+1)} \right],$$

com  $t_j^* = \alpha \beta t_j / (j+1)$ .

### 2.8.6 Pareto Generalizada Exponencializada

A fda da distribuição Pareto Generalizada Exponencializada (EGPa) é obtida considerando  $G(x)$  em (2.1) como sendo a fda da distribuição Pareto com parâmetro  $\nu > 0$ , definida por  $G(x) = 1 - (1 + x)^{-\nu}$ , de modo que

$$F(x) = [1 - (1 + x)^{-\nu}]^\beta, \quad x > 0,$$

cuja densidade associada é dada por

$$f(x) = \alpha \beta \nu (1 + x)^{-\alpha\nu-1} [1 - (1 + x)^{-\alpha\nu}]^{\beta-1}, \quad x > 0,$$

em que  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  são parâmetros de forma e  $\nu > 0$  é um parâmetro de escala.

Na Figura 2.6 apresentamos o comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição EGPa para alguns valores dos parâmetros selecionados. Note que ao fixarmos  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 1.5$  (Figura (a)) a escala muda de acordo com os valores de  $\nu$ . Então,  $\nu$  é um parâmetro de escala. Note, ainda, que de acordo com os valores de  $\beta$  e  $\alpha$  (com  $\nu = 1.5$  fixo) a forma da distribuição se altera (Figura (b)).

O  $r$ -ésimo momento da distribuição EGPa é dado por

$$E(Y^r) = \alpha \beta \sum_{j,m=0}^{\infty} (-1)^{r+m} \binom{r}{m} t_j B\left(j+1, 1 - \frac{m}{\nu}\right), \quad \nu > 0.$$

De fato, neste caso temos que  $Q_G(u) = (1 - u)^{-1/\nu} - 1$ . Substituindo esta expressão em (2.11) obtemos

$$\tau_{r,j} = \int_0^1 (-1)^r [1 - (1 - u)^{-\frac{1}{\nu}}]^r u^j du.$$

Utilizando a expansão binomial na última integral temos que

$$\begin{aligned} \tau_{r,j} &= \int_0^1 (-1)^r \sum_{m=0}^{\infty} \binom{r}{m} (-1)^m (1 - u)^{-\frac{m}{\nu}} u^j du \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{r+m} \binom{r}{m} \int_0^1 u^j (1 - u)^{-\frac{m}{\nu}} du \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{r+m} \binom{r}{m} B\left(j+1, 1 - \frac{m}{\nu}\right). \end{aligned}$$

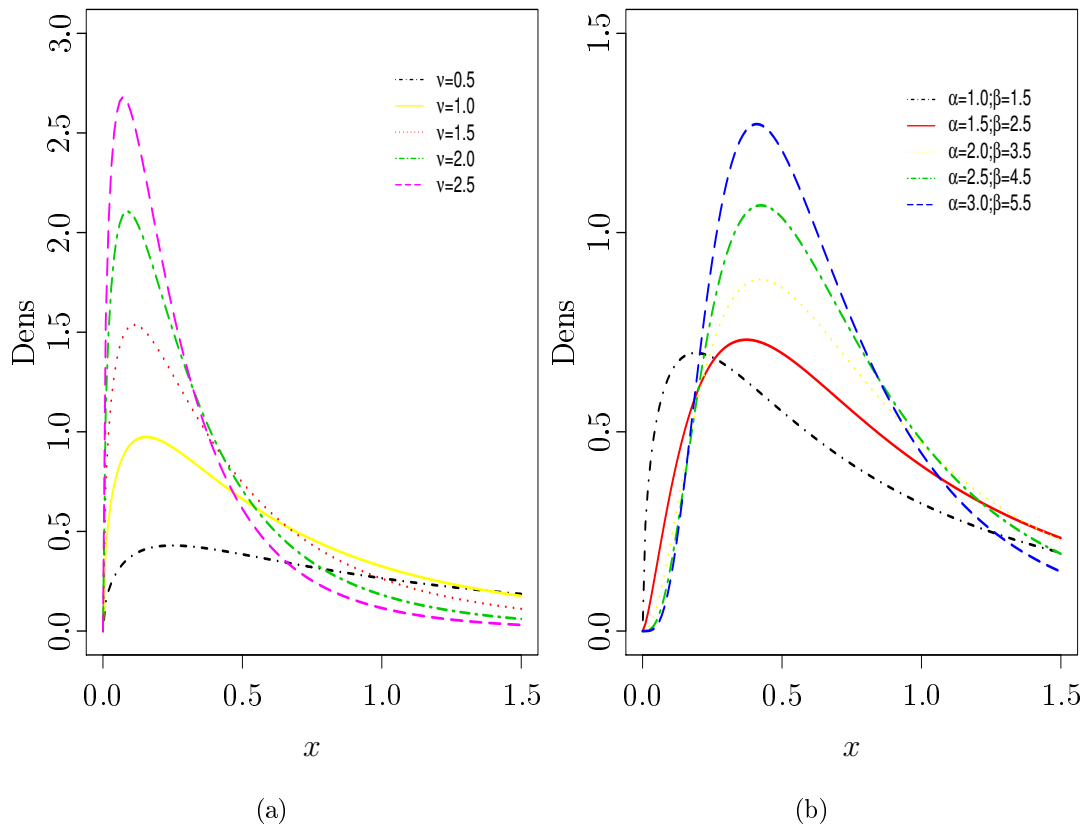


Figura 2.6: Função Densidade da EGPa  $(\alpha, \beta, \nu)$  para alguns valores dos parâmetros. (a) Para  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 1.5$ . (b) Para  $\nu = 1.5$ .

Da função dada em (2.10), temos

$$E(Y^r) = \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} t_j \tau_{r,j}.$$

Portanto,

$$E(Y^r) = \alpha \beta \sum_{j,m=0}^{\infty} (-1)^{r+m} \binom{r}{m} t_j B\left(j+1, 1 - \frac{m}{\nu}\right).$$

A partir da equação em (2.15), obtemos

$$\rho_j(s) = e^{-s} \int_0^1 \exp[s(1-u)^{-\frac{1}{\nu}}] u^j du.$$

Além disso, usando a Identidade

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \rho_j(s) &= e^{-s} \int_0^1 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s(1-u)^{-\frac{1}{\nu}})^r}{r!} du \\ &= e^{-s} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r}{r!} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{r}{\nu}} u^j du \\ &= e^{-s} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B(j+1, 1-r\nu^{-1}) s^r}{r!}. \end{aligned}$$

Segue da equação (2.14) que a fgm para a distribuição EGPa é dada por,

$$M(s) = \alpha\beta \sum_{j,r=0}^{\infty} \frac{t_j B(j+1, 1-r\nu^{-1}) s^r}{r!}.$$

Encontraremos, agora, o desvio médio para o modelo EGPa combinando as equações (2.19)-(2.20). A partir da equação em (2.20), obtemos

$$\begin{aligned} T_j(z) &= \int_0^{G(z)} [(1-u)^{-\nu^{-1}} - 1] u^j du \\ &= \int_0^{G(z)} (1-u)^{-\nu^{-1}} u^j du - \int_0^{G(z)} u^j du \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\nu^{-1}}{k} \int_0^{G(z)} u^{j+1} du - \int_0^{G(z)} u^j du. \end{aligned}$$

Usando as integrais (i) e (ii), da seção 2.8.6, obtemos

$$T_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-\nu^{-1}}{k} G(z)^{k+j+1}}{(k+j+1)} - \frac{G(z)^{j+1}}{(j+1)}.$$

De modo que

$$m_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) t_j^* \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-\nu^{-1}}{k} G(z)^{k+j+1}}{(k+j+1)} - \frac{G(z)^{j+1}}{(j+1)} \right],$$

com  $t_j^* = \alpha\beta t_j / (j+1)$ .

## 2.9 Aplicações

Ilustramos a superioridade das distribuições EG, em comparação com três submodelos, a saber, as distribuições Lehmann tipo I e II e a distribuição base. Usamos



dois conjuntos de dados reais. Em cada caso, os parâmetros são estimados por máxima verossimilhança usando a sub-rotina NLMixed no SAS. Os dados são descritos abaixo.

i) Dados do rio Wheaton

Os dados foram analisados por Akinsete et al. (2008) e representam a superação dos picos de cheias (em  $m^3/s$ ) do rio Wheaton perto de Carcross no território de Yukon, Canadá. Os dados consistem de 72 excedências para os anos 1958-1984, arredondados para uma casa decimal. O conjunto de dados é apresentado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Dados sobre a superação da inundação do rio Wheaton

1.7	2.2	14.4	1.1	0.4	20.6	5.3	0.7	1.9	13.0	12.0	9.3
1.4	18.7	8.5	25.5	11.6	14.1	22.1	1.1	2.5	14.4	1.7	37.6
0.6	2.2	39.0	0.3	15.0	11.0	7.3	22.9	1.7	0.1	1.1	0.6
9.0	1.7	7.0	20.1	0.4	2.8	14.1	9.9	10.4	10.7	30.0	3.6
5.6	30.8	13.3	4.2	25.5	3.4	11.9	21.5	27.6	36.4	2.7	64.0
1.5	2.5	27.4	1.0	27.1	20.2	16.8	5.3	9.7	27.5	2.5	27.0

ii) Dados do nível de estresse

O conjunto de dados consiste de 101 observações da resistência de vida à ruptura de 49 kevlar com fios de epóxi, que foram submetidos à pressão contínua constante no nível de tensão de 90% até que todas tenham falhado, de modo que os dados foram completados com tempos de falha exatos obtidos por Cooray e Ananda (2008). Os dados estão disponíveis na Tabela 2.2.

A Tabela 2.3 fornece uma análise descritiva de cada amostra. Podemos notar que os dados do rio Wheaton e nível de estresse apresentam mediana menor do que a média, o que sugere que as distribuições sejam assimétricas à direita, fato reforçado pelos valores positivos dos coeficientes de assimetria. Este valor é maior nos dados do nível de estresse.

Tabela 2.2: Dados do nível de estresse

0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.07	0.08
0.09	0.09	0.10	0.10	0.11	0.11	0.12	0.13	0.18	0.19	0.20	0.23	0.24
0.24	0.29	0.34	0.35	0.36	0.38	0.40	0.42	0.43	0.52	0.54	0.56	0.60
0.60	0.63	0.65	0.67	0.68	0.72	0.72	0.72	0.73	0.79	0.79	0.80	0.80
0.83	0.85	0.90	0.92	0.95	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05	1.10	1.10
1.11	1.15	1.18	1.20	1.29	1.31	1.33	1.34	1.40	1.43	1.45	1.50	1.51
1.52	1.53	1.54	1.54	1.55	1.58	1.60	1.63	1.64	1.80	1.80	1.81	2.02
2.05	2.14	2.17	2.33	3.03	3.03	3.34	4.20	4.69	7.89			

Tabela 2.3: Descrição estatística

Dados	Média	Med.	Md	SD	Var.	Assimétria	Curt.	Min.	Max.
Wheaton	12.20	9.5	1.7	12.3	151.22	1.5	3.19	0.1	64
Nível de estresse	1.03	0.8	0.02	1.12	1.25	3.05	14.51	0.01	7.89

Para os dados do rio Wheaton, comparamos a distribuição EGGu com a distribuição Gumbel Exponencializada (EGu), a distribuição Gumbel Lehmann II (LIIGu) e a distribuição Gumbel. Além disso, para os dados do nível de estresse, a distribuição EGF é comparada com a distribuição Fréchet exponencializada (EF), Fréchet Lehmann II (LIIF) e a distribuição Fréchet. Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros (com respectivos valores-p entre parênteses), os valores do critério de informação AIC, BIC e CAIC para cada conjunto de dados são fornecidos na Tabela 2.4. Como podemos ver os três critérios de informação apresentam os menores valores numéricos para o caso das distribuições EG quando comparadas com os seus submodelos, indicando que os modelos EG são os mais adequados para ajustar os dados analisados.

Utilizamos a estatística RV para testar os modelos encaixados. Os resultados da aplicação do teste da razão de verossimilhança para os nossos conjuntos de dados são apresentados na Tabela 2.5. Observe que, para os dois conjuntos de dados, rejeitamos a hipótese nula em todos os três testes da razão de verossimilhanças em favor das novas distribuições. Observamos ainda que a rejeição é extremamente significativa para os

dados de nível de estresse, e altamente significativa para os dados do rio Wheaton, o que evidência a necessidade dos parâmetros extras no modelo proposto na modelagem desses dados reais.

Tabela 2.4: EMVs e critérios de informação

Rio Wheaton	$\alpha$	$\beta$	$\mu$	$\sigma$	AIC	CAIC	BIC
EGGu	0.0988	0.4769	2.6317	1.6639	521.8	522.4	530.9
	(0.0243)	(0.1439)	(0.7863)	(0.0529)			
EGu	1	1.0312	6.7165	8.1893	544.9	545.2	551.7
	-	(14.99)	(15.43)	(0.8185)			
LIIGu	0.1474	1	0.5571	1.7214	524.5	524.8	531.3
	(0.0186)	-	(0.5291)	(0.0544)			
Gumbel	1	1	6.9684	8.1893	542.9	543.0	547.4
	-	-	(1.0093)	(0.8185)			

Nível de estresse	$\alpha$	$\beta$	$\mu$	$\sigma$	AIC	CAIC	BIC
EGF	606.36	0.1761	1095.66	0.3104	217.4	217.8	227.9
	(184.53)	(0.0186)	(375.16)	(0.0105)			
EF	1	0.3383	1.4333	0.6136	271.9	272.2	279.8
	-	(0.2146)	(1.4935)	(0.0427)			
LIIF	29.4149	1	177.49	0.2289	227.8	228.0	235.6
	(12.0856)	-	(16.90)	(0.0209)			
Fréchet	1	1	0.2451	0.6136	269.9	270.1	275.2
	-	-	(0.0423)	(0.0422)			

Os histogramas para todos os dados e os gráficos das funções densidades estimadas EGGu, Gumbel exponencializada (EGu), Gumbel Lehmann II (LIIGu), EGF, Fréchet exponencializada (EF), Fréchet Lehmann II (LIIF), Gumbel e Fréchet são exibidos na Figura 2.7. Com base nos critérios de informação (Tabela 2.4) e nos testes de

Tabela 2.5: Testes da RV ( $\Lambda$ )

Rio Wheaton	Hipoteses	Estatística $\Lambda$	p-valor
EGGu vs EGu	$H_0: \alpha = 1$ vs $H_1: \alpha \neq 1$	25.1	< 0.00001
EGGu vs LIIGu	$H_0: \beta = 1$ vs $H_1: \beta \neq 1$	4.7	0.0302
EGGu vs Gumbel	$H_0: \alpha = \beta = 1$ vs $H_1: \alpha \neq 1$ ou $\beta \neq 1$	26.1	< 0.00001
Nível de estresse	Hipoteses	Estatística $\Lambda$	p-valor
EGF vs EF	$H_0: \alpha = 1$ vs $H_1: \alpha \neq 1$	56.5	< 0.00001
EGF vs LIIF	$H_0: \beta = 1$ vs $H_1: \beta \neq 1$	12.4	0.0004
EGF vs Fréchet	$H_0: \alpha = \beta = 1$ vs $H_1: \alpha \neq 1$ ou $\beta \neq 1$	57.5	< 0.00001

hipóteses (Tabela 2.5) podemos concluir que as distribuições EG são as que mais se adequam aos dados analisados o que também podemos confirmar observando os gráficos e histogramas na Figura 2.7.

## 2.10 Conclusões

Estudamos uma nova classe de distribuições Generalizadas Exponencializadas (EG) que inclui como casos especiais as distribuições Lehmann do tipo I e Lehmann do tipo II introduzidas em Lehmann (1953). Esse novo modelo estende várias distribuições estudadas recentemente, bem como outras distribuições, por exemplo, a Weibull exponencializada, a Fréchet exponencializada e a Gumbel exponencializada (ver, por exemplo, Mudholkar e Srivastava, 1993; Gupta et al,1998; Gupta e Kundu, 2001; Nadarajah e Kotz, 2006), entre outros autores. Para quaisquer distribuições base, podemos facilmente definir a distribuição EG correspondente. A maioria das propriedades estruturais da nova classe têm propriedades matemáticas tratáveis. Algumas destas propriedades podem ser obtidas a partir das propriedades das distribuições base.

Além disso, apresentamos duas aplicações das distribuições EG para dados reais para mostrar a viabilidade dessa nova classe.

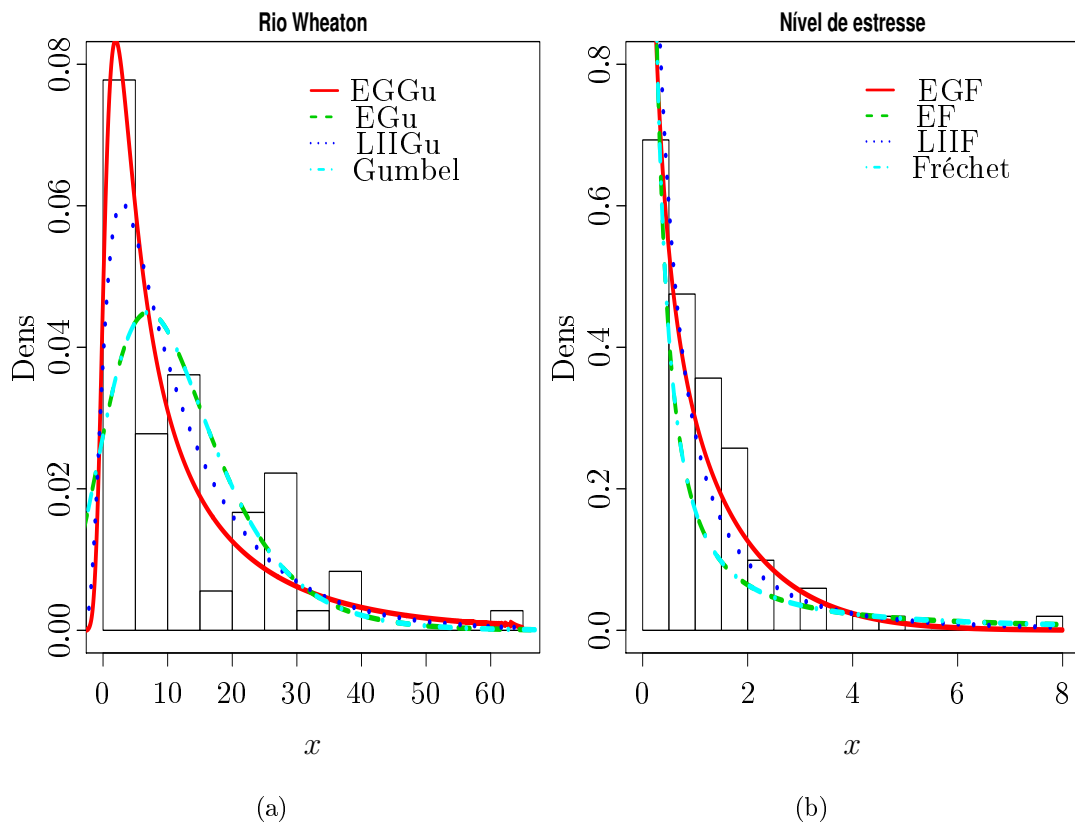


Figura 2.7: Densidades estimadas dos modelos EG para os conjuntos de dados.

# Capítulo 3

## A distribuição Fréchet Generalizada

Neste capítulo, estudamos uma generalização para a distribuição Fréchet e obtemos algumas de suas propriedades estruturais. A extensão da distribuição Fréchet é motivada pelo trabalho de Cordeiro et al.(2013).

### 3.1 A distribuição Fréchet

A distribuição Fréchet tem sido utilizada com grande frequência em estudos de fenômenos ambientais principalmente para solucionar problemas relacionados à áreas de engenharia, entre os quais, análise de frequência de inundações, engenharias de redes e engenharia nuclear. Kotz e Nadarajah (2000) demonstram, em seu livro, a aplicabilidade da distribuição Fréchet em várias áreas. A distribuição Fréchet, ou Valor Extremo Tipo II, possui função de distribuição acumulada (fda) dada por

$$G(x; \sigma, \lambda) = \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right], \quad x > 0, \quad (3.1)$$

em que  $\sigma > 0$  e  $\lambda > 0$  são, respectivamente, parâmetros de escala e de forma. A partir da expressão em (3.1) obtém-se a função densidade de probabilidade da distribuição Fréchet dada por

$$g(x; \sigma, \lambda) = \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right]. \quad (3.2)$$

## 3.2 A classe de distribuição generalizada exponencializada

**Definição 3.1** *Seja  $G(x)$  uma função de distribuição acumulada (fda) contínua, definimos a classe de distribuição generalizada exponencializada por*

$$F(x) = [1 - \{1 - G(x)\}^a]^b, \quad (3.3)$$

em que  $a > 0$  e  $b > 0$  são dois parâmetros de forma adicionais. Com função densidade de probabilidade correspondente

$$f(x) = a b \{1 - G(x)\}^{a-1} [1 - \{1 - G(x)\}^a]^{b-1} g(x).$$

## 3.3 A distribuição Fréchet generalizada

A distribuição Fréchet generalizada, denotada aqui por FrG, é obtida a partir de (3.3) considerando  $G(x)$  como sendo a função de distribuição acumulada Fréchet com parâmetros  $\sigma > 0$  e  $\lambda > 0$ , definida em (3.1). Realizando esta substituição, obtemos

$$F(x; \sigma, \lambda, a, b) = \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^b, \quad x > 0, \quad (3.4)$$

em que  $\sigma > 0$  é um parâmetros de escala e os outros parâmetros  $\lambda > 0$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$  são parâmetros de forma. A função densidade de probabilidade associada a (3.4) é dada por

$$\begin{aligned} f(x; \sigma, \lambda, a, b) &= a b \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{a-1} \\ &\quad \times \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^{b-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

As vantagens de se trabalhar com esta distribuição é o fato de possuir fórmulas explícitas para função de distribuição e função quantil que não envolve qualquer função especial, não depende da função beta, como a distribuição beta Fréchet e não tem problema de identificabilidade como a distribuição Kumaraswamy Fréchet.

**Definição 3.2** *Seja  $X$  uma variável aleatória com fda  $F(x)$ . Sua função de Sobrevivência  $S(x)$  é definida por*

$$S(x) = 1 - F(x).$$

A função de Sobrevivência da distribuição FrG é dada por

$$\begin{aligned} S(x; \sigma, \lambda, a, b) &= 1 - F(x; \sigma, \lambda, a, b) \\ &= 1 - \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^b, x > 0. \end{aligned}$$

Vamos verificar que  $f(x; \sigma, \lambda, a, b)$  é uma função densidade de probabilidade de uma distribuição contínua. Como  $f(x; \sigma, \lambda, a, b) > 0$ , resta mostrar que  $\int_0^\infty f(x; \sigma, \lambda, a, b) dx = 1$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x; \sigma, \lambda, a, b) dx &= \int_0^\infty a b \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - (\sigma/x)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - (\sigma/x)^\lambda \right] \right\}^{a-1} \\ &\quad \times \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - (\sigma/x)^\lambda \right] \right\}^a \right]^{b-1} dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \sigma^\lambda x^{-\lambda}$  segue que  $dx = -\sigma \lambda^{-1} u^{-(1/\lambda+1)} du$  na integral acima, obtemos

$$\int_0^\infty f(x; \sigma, \lambda, a, b) dx = \int_0^\infty a b \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{a-1} [1 - \{1 - \exp(-u)\}^a]^{b-1} du.$$

Considere, agora  $t = \exp(-u)$  temos  $dt = -\exp(-u) du$ , então a integral anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x; \sigma, \lambda, a, b) dx &= \int_0^1 a b (1-t)^{a-1} [1 - (1-t)^a]^{b-1} dt \\ &= \left[ 1 - (1-t)^a \right]^b \Big|_0^1 = 1 \end{aligned}$$

O que mostra que  $f(x; \sigma, \lambda, a, b)$  é de fato a fdp de uma distribuição contínua. A partir de agora denotaremos uma variável aleatória  $X$  com função densidade dada em (3.5)



por  $X \sim \text{FrG}(\sigma, \lambda, a, b)$ .

**Definição 3.3** *A função de risco (ou taxa de insucesso) de uma variável aleatória  $X$  com densidade  $g(x)$  e uma distribuição acumulada  $G(x)$  é dada por*

$$\tau(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)}.$$

Usando as equações (3.4) e (3.5), a função de risco da FrG pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \tau(x; \sigma, \lambda, a, b) &= \frac{a b \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right] \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}^{a-1}}{1 - \left[1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}^a\right]^b} \\ &\quad \times \left[1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}^a\right]^{b-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observe que se considerarmos  $\alpha = 1 = \beta$  em (3.6), temos

$$\tau(x) = \frac{\lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]}{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]}, x > 0.$$

Portanto, para  $\alpha = 1 = \beta$  em  $\tau(x)$ , tem-se a função de risco da distribuição Fréchet. As Figuras (3.1) e (3.2) mostram a função densidade e a função de risco da distribuição FrG para alguns valores dos parâmetros, respectivamente. Observamos na Figura (3.1) que a distribuição Fréchet generalizada é assimétrica à direita e a medida que aumentamos os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  as curvas desta distribuição passam a ter caudas mais pesadas. Além disso, a distribuição Fréchet generalizada possui função de risco unimodal como podemos ver na Figura (3.2).

### 3.4 Propriedades e distribuições relacionadas

A distribuição FrG apresenta algumas propriedades e submodelos particulares que são apresentados a seguir.

**Propriedade 1** Se  $X \sim \text{FrG}(\sigma, \lambda, a, b)$ , então  $Y = cX \sim \text{FrG}(c\sigma, \lambda, a, b)$ .

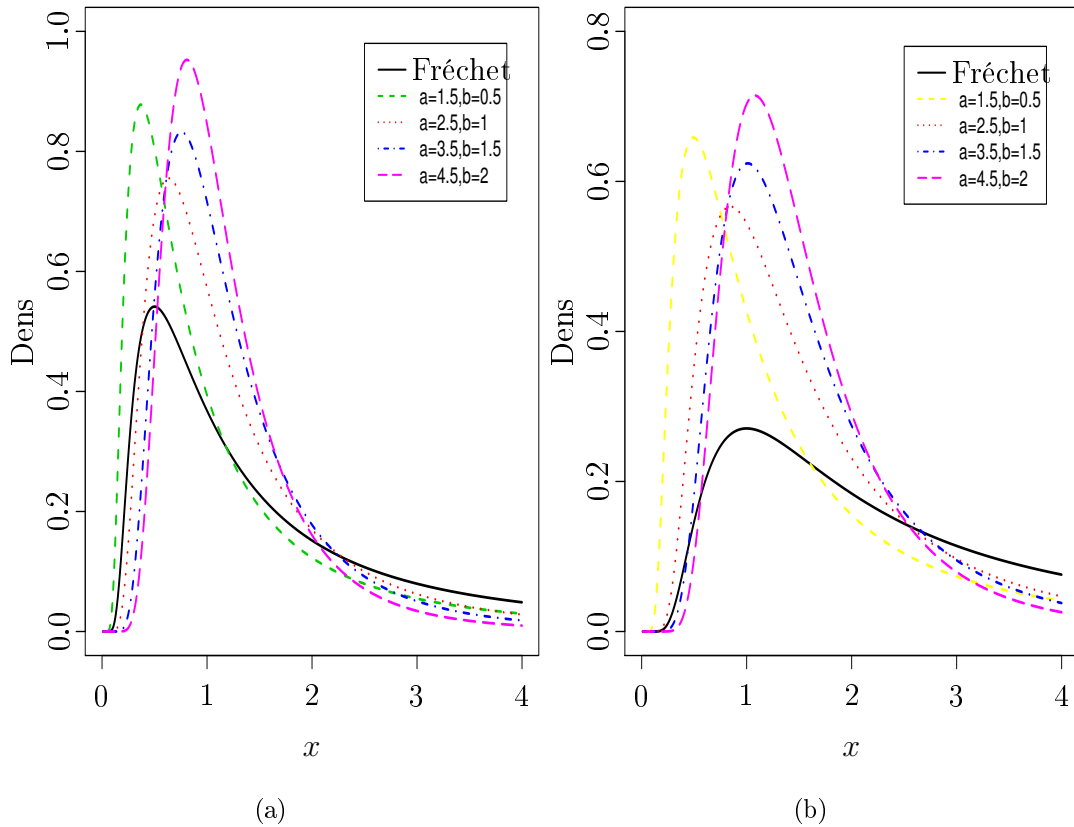


Figura 3.1: Gráfico da função de densidade  $FrG(\sigma, \lambda, a, b)$  para alguns valores dos parâmetros. (a) Para  $\sigma = 1.5$  e  $\lambda = 1.0$ . (b) Para  $\sigma = 2.0$  e  $\lambda = 1.0$ .

**Prova:**

$$\begin{aligned}
 \Pr(Y \leq y) &= \Pr(cX \leq y) = \Pr(X \leq y/c) \\
 &= [1 - \{1 - \exp[-(\sigma/(y/c))^\lambda]\}]^{a^b} \\
 &= [1 - \{1 - \exp[-(c\sigma/y)^\lambda]\}]^{a^b}.
 \end{aligned}$$

**Propriedade 2** Se  $X_i \sim FrG(\sigma, \lambda, a, b)$  são independentes e identicamente distribuídas, então  $Y = \max(X_1, \dots, X_n) \sim FrG(\sigma, \lambda, a, nb)$ .

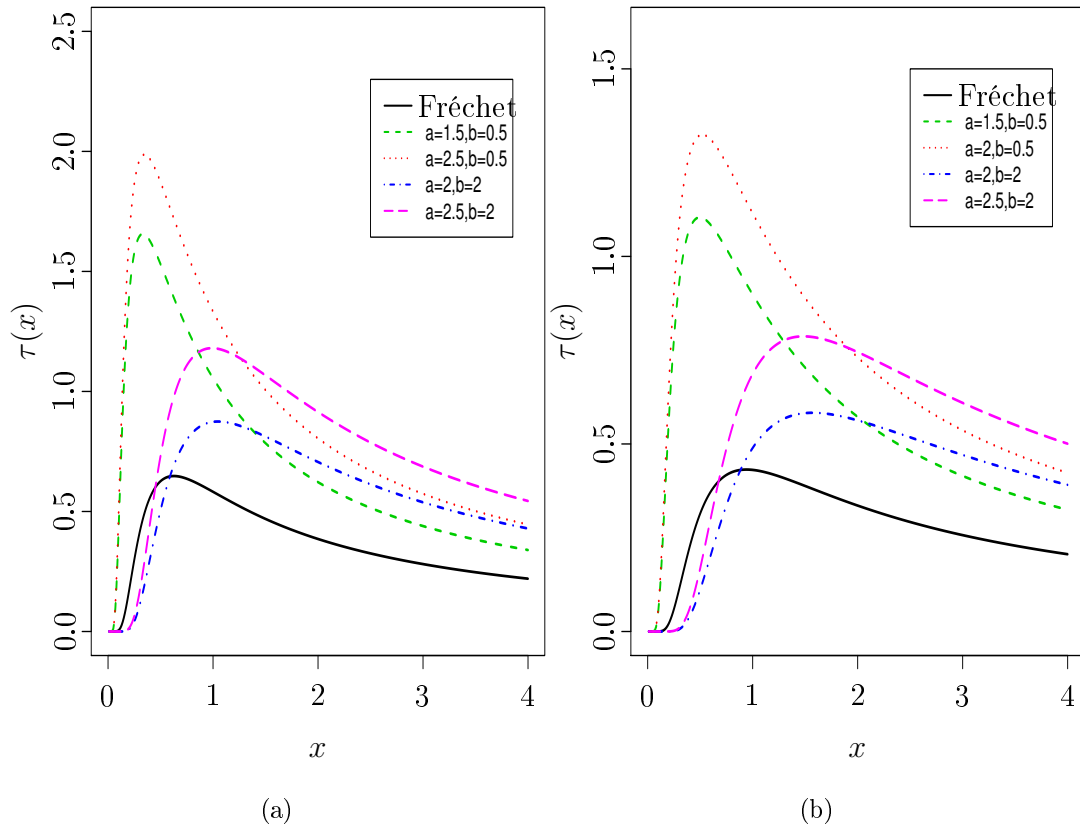


Figura 3.2: Gráfico da função de risco da  $FrG(\sigma, \lambda, a, b)$  para alguns valores dos parâmetros. (a) Para  $\sigma = 1$  e  $\lambda = 1.0$ . (b) Para  $\sigma = 1.5$  e  $\lambda = 1.0$ .

**Prova:**

$$\begin{aligned}
 \Pr(Y \leq y) &= \Pr(\max(X_1, \dots, X_n) \leq y) \\
 &= \Pr(X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y) \\
 &= \Pr(X_1 \leq y) \dots \Pr(X_n \leq y) \\
 &= [\Pr(X \leq y)]^n \\
 &= [1 - \{1 - \exp[-(\sigma/y)^\lambda]\}]^n.
 \end{aligned}$$

**Propriedade 3** Se  $X_i \sim FrG(\sigma, \lambda, a, b)$  são independentes e identicamente distribuídas e  $1/Y = \min(1/X_1, \dots, 1/X_n)$ , então  $Y \sim FrG(\sigma, \lambda, a, nb)$ .

De fato,

$$\begin{aligned}
 \Pr(Y \leq y) &= \Pr(1/Y \geq 1/y) \\
 &= \Pr(\min(1/X_1, \dots, 1/X_n) \geq 1/y) \\
 &= \Pr(1/X_1 \geq 1/y, \dots, 1/X_n \geq 1/y) \\
 &= \Pr(1/X_1 \geq 1/y) \dots \Pr(1/X_n \geq 1/y) \\
 &= \Pr(X_1 \leq y) \dots \Pr(X_n \leq y) \\
 &= [\Pr(X \leq y)]^n \\
 &= [1 - \{1 - \exp[-(\sigma/y)^\lambda]\}^a]^{nb}.
 \end{aligned}$$

A distribuição FrG generaliza algumas distribuições conhecidas. Por exemplo, se considerarmos  $b = 1$  na equação (3.5) temos a distribuição Fréchet Exponencializada (EF) definida por Nadarajah e Kotz (2003). Se considerarmos  $a = b = 1$  na equação (3.5) obtemos a distribuição Fréchet.

### 3.5 Uma expansão geral para a função de densidade

Nesta seção, mostramos que a fdp da distribuição FrG pode ser escrita como uma combinação linear infinita de funções densidades Fréchet. Considere a expansão binomial (para  $0 < z < 1$ )

$$(1 + z)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} z^j, \tag{3.7}$$

em que

$$\binom{a}{j} = \frac{n(n-1)\dots(a-j+1)}{j!}.$$

Aplicando a identidade (3.7) em (3.5) e depois de algumas manipulações algébricas, obtemos

$$f(x) = ab\lambda\sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{j+k} \binom{b-1}{j} \binom{a(j+1)-1}{k} \exp\left[-(k+1)\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right].$$

Considerando a mudança de variável  $\sigma_k = \sigma(k+1)^{1/\lambda}$ , então, a expressão acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{j+k} \frac{(b-1)!}{(b-j-1)!j!} \frac{[a(j+1)-1]!}{[a(j+1)-k-1]!} \frac{ab}{(k+1)} \lambda \sigma_k^\lambda x^{-(\lambda+1)} \\
 &\quad \times \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_k}{x} \right)^\lambda \right] \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{j+k} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} \frac{\Gamma[a(j+1)]}{\Gamma[a(j+1)-k]k!} \frac{ab}{(k+1)} g(x; \sigma_k, \lambda) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{j,k} g(x; \sigma_k, \lambda), \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

em que

$$w_{j,k} = \frac{(-1)^{j+k} \Gamma(b) \Gamma[a(j+1)] ab}{\Gamma(b-j) \Gamma[a(j+1)-k] j! k! (k+1)}$$

e  $g(x; \sigma_k, \lambda)$  denota a função densidade Fréchet com parâmetros  $\sigma_k = \sigma(k+1)^{1/\lambda}$  e  $\lambda$ . Portanto, a função densidade da distribuição FrG pode ser expressa como uma combinação linear infinita de densidades de variáveis aleatórias com distribuição Fréchet. Dessa forma, podemos obter algumas de suas propriedades diretamente das propriedades da distribuição Fréchet. Por exemplo, os momentos fatoriais da distribuição FrG seguem diretamente das quantidades da distribuição Fréchet.

### 3.6 Momentos e momentos incompletos

Algumas das características interessantes de uma distribuição são aquelas que pode ser estudadas através dos momentos. Derivamos expressões explícitas para os momentos da variável aleatória  $X$  com função de distribuição FrG. Primeiro,

introduzimos a seguinte notação (para qualquer  $d$  real e  $b$  positivo)

$$S_{d,b} = \int_0^{\infty} x^{d-1} \exp(-x) [1 - \exp(-x)]^{b-1} dx. \quad (3.9)$$

**Definição 3.4** *O  $r$ -ésimo momento de uma variável aleatória  $Y$  com fdp  $f(y)$  é dado por*

$$E(Y^r) = \int_0^{\infty} y^r f(y) dy. \quad (3.10)$$

Seja  $X \sim FrG(\sigma, \lambda, a, b)$ . A partir de (3.5) e (3.10), para  $r \in \mathbb{N}$ , o  $r$ -ésimo momento de  $X$  é expresso por

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_0^{\infty} a b \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1-r)} \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right] \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}^{a-1} \\ &\quad \times \left[1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}^a\right]^{b-1} dx. \end{aligned}$$

Seja a substituição  $u = (\sigma/x)^\lambda$ , então

$$E(X^r) = a b \sigma^r \int_0^{\infty} u^{-\frac{r}{\lambda}} \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{a-1} \{1 - [1 - \exp(-u)]^a\}^{b-1} du.$$

Aplicando a expansão dada em (3.7) na equação anterior, decorre que

$$E(X^r) = a b \sigma^r \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{b-1}{j} \int_0^{\infty} u^{-\frac{r}{\lambda}} \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{a(j+1)-1} du.$$

Utilizando, agora a função dada em (3.9), a expressão anterior pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} E(X^r) &= a b \sigma^r \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{b-1}{j} \int_0^{\infty} u^{1-\frac{r}{\lambda}-1} \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{a(j+1)-1} du, \quad 1 - \frac{r}{\lambda} > 0 \\ &= a b \sigma^r \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{b-1}{j} S_{1-r/\lambda, a(j+1)}, \quad r < \lambda. \end{aligned}$$

**Proposição 3.1** *Se  $X \sim FrG(\sigma, \lambda, a, b)$ , então a partir de (3.8) o  $r$ -ésimo momento da distribuição  $FrG$  pode ser escrito na forma de combinação como*

$$E(X^r) = a b \sigma^r \Gamma(b) \Gamma\left(1 - \frac{r}{\lambda}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k} \Gamma(a(j+1)) (k+1)^{\frac{r}{\lambda}-1}}{\Gamma(b-j) \Gamma(a(j+1)-k) j! k!}, \quad r < \lambda.$$

**Demonstração:** temos, por definição e da função dada em (3.8)

$$E(X^r) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{j,k} \int_0^{\infty} \lambda \sigma_k^\lambda x^{-(\lambda+1-r)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_k}{x} \right)^\lambda \right] dx.$$

Considerando a mudança de variável  $u = (\sigma_k/x)^\lambda$  e depois de algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{j,k} \sigma_k^r \Gamma \left( 1 - \frac{r}{\lambda} \right) \\ &= ab \sigma^r \Gamma(b) \Gamma \left( 1 - \frac{r}{\lambda} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k} \Gamma[a(j+1)] (k+1)^{\frac{r}{\lambda}-1}}{\Gamma(b-j) \Gamma[a(j+1)-k] j! k!}, \quad r < \lambda. \end{aligned}$$

■

Seja  $X \sim FrG(\sigma, \lambda, a, b)$ , o  $r$ -ésimo momento incompleto de  $X$  é expresso por

$$M_r(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{j,k} \sigma_k^r \Gamma \left[ 1 - \frac{r}{\lambda}, \left( \frac{\sigma_k}{z} \right)^\lambda \right], \quad r < \lambda. \quad (3.11)$$

De fato, por definição, o  $r$ -ésimo momento incompleto de  $X$  é dado por

$$M_r(z) = \int_0^z x^r f(x) dx.$$

A partir das equações (3.8) e (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} M_r(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{j,k} \int_0^z x^r g(x; \sigma_k, \lambda) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{j,k} \int_0^{\infty} \lambda \sigma_k^\lambda x^{-(\lambda+1-r)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_k}{x} \right)^\lambda \right] dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $u = (\sigma_k/y)^\lambda$ , temos que

$$\begin{aligned} M_r(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{j,k} \sigma_k^r \int_{(\frac{\sigma_k}{z})^\lambda}^{\infty} u^{-\frac{r}{\lambda}} \exp(-u) du \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{j,k} \sigma_k^r \Gamma \left[ 1 - \frac{r}{\lambda}, \left( \frac{\sigma_k}{z} \right)^\lambda \right], \quad r < \lambda, \end{aligned}$$

em que  $\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} x^{a-1} \exp(-x) dx$ .

### 3.7 Função quantil

O quantil da distribuição FrG, denotado por  $x = Q(u)$ , pode ser obtido invertendo  $F(x)$  em (3.4). Portanto,

$$Q(u) = F^{-1}(u; \sigma, \lambda, a, b) = \frac{\sigma}{\{-\log[1 - (1 - u^{1/b})^{1/a}]\}^{1/\lambda}}.$$

Em particular, a mediana é

$$Q(0,5) = \frac{\sigma}{\{-\log[1 - (1 - (0,5)^{1/b})^{1/a}]\}^{1/\lambda}}.$$

Um número aleatório  $X$  com distribuição FrG pode ser gerado por

$$X = \frac{\sigma}{\{-\log[1 - (1 - U^{1/b})^{1/a}]\}^{1/\lambda}},$$

em que  $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$ .

### 3.8 Desvios médios

Os desvios médios da média e da mediana são uma boa maneira de medir dispersão em uma população. Seja  $\mu = E(X)$  e  $m$  a mediana da distribuição FrG, respectivamente. Os desvios médios em relação a média  $\mu$  e a mediana  $m$  são definidos, respectivamente, por

$$D(\mu) = E(|X - \mu|) = \int_0^{\infty} |x - \mu|f(x)dx$$

e

$$D(m) = E(|X - m|) = \int_0^{\infty} |x - m|f(x)dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} D(\mu) = E(|X - \mu|) &= \int_0^{\infty} |x - \mu|f(x)dx \\ &= \int_0^{\mu} (\mu - x)f(x)dx + \int_{\mu}^{\infty} (x - \mu)f(x)dx \\ &= 2\mu \int_0^{\mu} f(x)dx - 2 \int_0^{\mu} xf(x)dx \\ &= 2\mu F(\mu) - 2M_1(\mu). \end{aligned}$$



Portanto,

$$D(\mu) = 2\mu F(\mu) - 2M_1(\mu),$$

em que  $F(\cdot)$  é a função de distribuição de  $X$  e  $M_1(\mu)$  denota o primeiro momento incompleto de  $X$ . O primeiro momento incompleto de  $X$  podem ser obtidos a partir da função (3.11) para  $r = 1$ . De forma análoga, o desvio médio da mediana pode ser expresso como

$$D(m) = \mu - 2M_1(m).$$

### 3.9 Estatísticas de ordem, momentos das estatísticas de ordem e L-momentos

**Definição 3.5** A função densidade da  $i$ -ésima estatística de ordem  $X_{i:n}$ , digamos  $f_{i:n}(x)$ , de uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da distribuição FrG é dada por

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(x) F(x)^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i}, i = 1, \dots, n,$$

em que  $f(\cdot)$  e  $F(\cdot)$  são a fdp e fda da distribuição FrG, respectivamente.

Utilizando a expansão (3.7), a equação acima se reduz a

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(x) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n-i}{j} F(x)^{i+j-1}.$$

A partir das funções (3.4) e (3.5) a fdp da  $i$ -ésima estatística de ordem pode ser escrita como

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} a b \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{a-1} \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n-i}{j} \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^{b(i+j)-1}.$$

Aplicando a expansão (3.7) na expressão anterior, para  $b > 0$  real não inteiro, temos

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} a b \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{j+k} \\ &\quad \times \binom{n-i}{j} \binom{b(i+j)-1}{k} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{a(k+1)-1} \\ &= \frac{n! a b}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{j+k+\ell} \binom{n-i}{j} \binom{b(i+j)-1}{k} \\ &\quad \times \binom{a(k+1)-1}{\ell} \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma[\ell+1]^{\frac{1}{\lambda}}}{x} \right)^\lambda \right]. \end{aligned}$$

Defina  $\sigma_\ell = \sigma[\ell+1]^{1/\lambda}$ . Então, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{n! a b}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k+\ell}}{\ell+1} \binom{n-i}{j} \binom{b(i+j)-1}{k} \\ &\quad \times \binom{a(k+1)-1}{\ell} \lambda \sigma_\ell^\lambda x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_\ell}{x} \right)^\lambda \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{i:n}^{(j)} g(x; \sigma_\ell, \lambda), \end{aligned} \tag{3.12}$$

em que

$$\begin{aligned} \delta_{i:n}^{(j)} &= \frac{n! a b}{(i-1)!(n-i)!} \frac{(-1)^{j+k+\ell}}{\ell+1} \binom{n-i}{j} \binom{b(i+j)-1}{k} \\ &\quad \times \binom{a(k+1)-1}{\ell} \end{aligned}$$

e  $g(x; \sigma_\ell, \lambda)$  é a função densidade Fréchet com parâmetros  $\sigma_\ell = \sigma[\ell+1]^{1/\lambda}$  e  $\lambda > 0$ .

**Proposição 3.2** Para  $b > 0$ , real não inteiro, o  $r$ -ésimo momento da  $i$ -ésima estatística de ordem com fdp dada em (3.12) é dado por

$$E(X_{i:n}^r) = \sigma^r \Gamma \left( 1 - \frac{r}{\lambda} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{i:n}^{(j)} (\ell+1)^{\frac{r}{\lambda}}, \quad r < \lambda.$$

**Demonstração:** considere  $b > 0$ , real não inteiro, segue pela definição de momentos e usando a fdp em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} E(X_{i:n}^r) &= \int_0^\infty x^r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{i:n}^{(j)} g(x; \sigma_\ell, \lambda)(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{i:n}^{(j)} \int_0^\infty \lambda \sigma_\ell^\lambda x^{-(\lambda+1-r)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_\ell}{x} \right)^\lambda \right] dx. \end{aligned}$$

Definindo  $u = (\sigma_\ell/x)^\lambda$ , temos

$$\begin{aligned} E(X_{i:n}^r) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{i:n}^{(j)} \sigma_\ell^r \int_0^\infty u^{-\frac{r}{\lambda}} \exp(-u) du \\ &= \sigma^r \Gamma\left(1 - \frac{r}{\lambda}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{i:n}^{(j)} (\ell + 1)^{\frac{r}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$E(X_{i:n}^r) = \sigma^r \Gamma\left(1 - \frac{r}{\lambda}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{i:n}^{(j)} (\ell + 1)^{\frac{r}{\lambda}}, \quad r < \lambda.$$

■

### 3.9.1 L-momentos

Os L-momentos, denotados por  $\eta$ , são análogos aos momentos ordinários, mas podem ser estimados por combinações lineares de estatísticas de ordem. Eles são funções lineares das estatísticas de ordem esperada definidos por (Hosking,1990) como

$$\eta_{s+1} = (s + 1)^{-1} \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} E(X_{s+1-k:s+1}), \quad s = 0, 1, \dots$$

## 3.10 Entropias Shannon e Rényi

A entropia é uma medida de incerteza associada a uma variável aleatória. A entropia de uma variável aleatória é definida em termos de sua função de densidade.

**Definição 3.6** *Seja  $X$  uma variável aleatória com densidade  $f(x; \sigma, \lambda, a, b)$  definida em (3.5) e seja  $\boldsymbol{\theta} = (\sigma, \lambda, a, b)^T$ , um vetor de parâmetros. A entropia de Shannon,  $I_S(X)$ , é definida por*

$$I_S(X) = E\{-\log[f(X; \boldsymbol{\theta})]\}.$$

O logaritmo da função densidade de probabilidade dada em (3.5) é expresso por

$$\begin{aligned} \log[f(x; \boldsymbol{\theta})] &= \log(ab\lambda\sigma^\lambda) - (\lambda + 1)\log(x) - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda + \log\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\} \\ &\quad \times (a - 1) + (b - 1)\log\left[1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}^a\right]. \end{aligned}$$

Dessa forma, a entropia de Shannon de  $X$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty \log[f(x; \boldsymbol{\theta})]f(x; \boldsymbol{\theta})dx &= -\log(ab\lambda\sigma^\lambda)\int_0^\infty f(x; \boldsymbol{\theta})dx - (\lambda + 1)\int_0^\infty \log(x) \\ &\quad \times f(x; \boldsymbol{\theta})dx + \sigma^\lambda\int_0^\infty x^{-\lambda}f(x; \boldsymbol{\theta})dx \\ &\quad - (a - 1)\int_0^\infty \log\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}f(x; \boldsymbol{\theta})dx \\ &\quad \times -\int_0^\infty \log\left[1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}^a\right] \\ &\quad \times (b - 1)f(x; \boldsymbol{\theta})dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A primeira das cinco integrais da expressão (3.13) é igual a 1. Na segunda integral,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log(x)f(x; \boldsymbol{\theta})dx &= \int_0^\infty \log(x)ab\lambda\sigma^\lambda \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}^{a-1} \\ &\quad \times x^{-(\lambda+1)}\left[1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\lambda\right]\right\}^a\right]^{b-1} dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $u = (\sigma/x)^\lambda$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log(x)f(x; \boldsymbol{\theta})dx &= \int_0^\infty \log(\sigma u^{-\frac{1}{\lambda}})ab \exp(-u)[1 - \exp(-u)]^{a-1} \\ &\quad \times \{1 - [1 - \exp(-u)]^a\}^{b-1} du \\ &= \int_0^\infty [\log(\sigma) - \frac{1}{\lambda}\log(u)]ab \exp(-u)[1 - \exp(-u)]^{a-1} \\ &\quad \times \{1 - [1 - \exp(-u)]^a\}^{b-1} du \\ &= \int_0^\infty \log(\sigma)ab \exp(-u)[1 - \exp(-u)]^{a-1} \\ &\quad \times \{1 - [1 - \exp(-u)]^a\}^{b-1} du - \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\log(u)ab \exp(-u) \\ &\quad \times [1 - \exp(-u)]^{a-1}\{1 - [1 - \exp(-u)]^a\}^{b-1} du. \end{aligned}$$

Usando a expansão binomial

$$(1 - z)^{\beta-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - j)j!} z^j, \quad (3.14)$$

em que  $|z| < 1$  e  $\beta > 0$  real não inteiro, na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \log(x) f(x; \boldsymbol{\theta}) dx &= b \log(\sigma) \Gamma(b) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^\infty a \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{a(j+1)-1} \\
 &\quad - \frac{ab}{\lambda} \sum_{j=0}^\infty \int_0^\infty \log(u) \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{a(j+1)-1} du \\
 &= b \log(\sigma) \Gamma(b) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \left\{ \frac{1}{j+1} [1 - \exp(-u)]^{a(j+1)} \right\} \Big|_0^\infty \\
 &\quad - \frac{ab}{\lambda} \sum_{j=0}^\infty \int_0^\infty \log(u) \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{a(j+1)-1} du \\
 &= b \log(\sigma) \Gamma(b) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!(j+1)} - \sum_{j=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \frac{(-1)^{j+\ell} \Gamma(a(j+1))}{\Gamma(a(j+1)-\ell)j!\ell!} \\
 &\quad \times \frac{ab \Gamma(b)}{\lambda \Gamma(b-j)} \int_0^\infty \log(u) \exp[-u(\ell+1)] du.
 \end{aligned}$$

Seja  $I(\ell) = \int_0^\infty \log(u) \exp[-u(\ell+1)] du$ . Assim

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \log(x) f(x; \boldsymbol{\theta}) dx &= b \Gamma(b) \log(\sigma) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!(j+1)} - \\
 &\quad - \frac{ab}{\lambda} \sum_{j=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \frac{(-1)^{j+\ell} \Gamma(b) \Gamma(a(j+1))}{\Gamma(b-j) \Gamma(a(j+1)-\ell)j!\ell!} I(\ell). \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x^{-\lambda} f(x; \boldsymbol{\theta}) dx &= \int_0^\infty ab \lambda \sigma^\lambda x^{-(2\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{a-1} \\
 &\quad \times \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^{b-1} dx.
 \end{aligned}$$

Aplicando a expansão (3.14), na última expressão, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x^{-\lambda} f(x; \boldsymbol{\theta}) dx &= \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^\infty ab \lambda \sigma^\lambda x^{-(2\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \\
 &\quad \times \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{a(j+1)-1} dx.
 \end{aligned}$$

Definindo  $u = (\sigma/x)^\lambda$ , temos

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} f(x; \boldsymbol{\theta}) dx = \frac{ab}{\sigma^\lambda} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^\infty u \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{a(j+1)-1} du.$$

Consideremos agora a mudança de variável  $t = \exp(-u)$ , na última integral, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{-\lambda} f(x; \boldsymbol{\theta}) dx &= -\frac{ab}{\sigma^\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 \log(t)(1-t)^{a(j+1)-1} dt \\ &= \frac{b}{\sigma^\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!(j+1)} \{\gamma + \psi[a(j+1) + 1]\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni e  $\psi(\cdot)$  é a função digama.

Em relação a quarta integral em (3.13), temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\} f(x; \boldsymbol{\theta}) dx &= \int_0^\infty \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\} a b \lambda \sigma^\lambda \\ &\quad \times x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \\ &\quad \times \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{a-1} \\ &\quad \times \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^{b-1} dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $u = (\sigma/x)^\lambda$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\} f(x; \boldsymbol{\theta}) dx &= b \int_0^\infty \log[1 - \exp(-u)][1 - \exp(-u)]^{a-1} \\ &\quad \times a \exp(-u) \{1 - [1 - \exp(-u)]^a\}^{b-1} du. \end{aligned}$$

Considerando a expansão

$$-\log(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \quad (3.17)$$

a integral anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\} f(x; \boldsymbol{\theta}) dx &= -ab \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp[-u(k+1)]}{k} [1 - \\ &\quad - \exp(-u)]^{a-1} \{1 - [1 - \exp(-u)]^a\}^{b-1} du. \end{aligned}$$

Aplicando a expansão (3.14) na equação acima e após alguma álgebra, obtemos

$$\int_0^\infty \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\} f(x; \boldsymbol{\theta}) dx = ab \sum_{j=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{j+\ell+1} \Gamma[a(j+1)]}{\Gamma[a(j+1) - \ell] j! \ell! k} \times \frac{\Gamma(b)}{(k + \ell + 1) \Gamma(b - j)}. \quad (3.18)$$

Finalmente, utilizando a expansão em (3.17), na última integral da expressão (3.13), obtemos

$$\int_0^\infty \log \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right] f(x; \boldsymbol{\theta}) dx = - \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda \sigma^\lambda}{k} x^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \times ab \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{a(k+1)-1} \times \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^{b-1} dx.$$

Usando a expansão em (3.14) podemos reescrever a expressão acima como

$$\int_0^\infty \log \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right] f(x; \boldsymbol{\theta}) dx = \sum_{j=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{k=1}^\infty (-1)^{j+\ell+1} \times \frac{\Gamma(b) \Gamma[a(k+j+1)] a b \lambda \sigma^\lambda}{\Gamma[a(k+j+1) - \ell] j! \ell! k} \times \frac{1}{\Gamma(b-j)} \int_0^\infty x^{-(\lambda+1)} \times \exp \left[ -(\ell+1) \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] dx.$$

Seja a mudança de variável  $u = (\ell+1)(\sigma/x)^\lambda$ . Então

$$\int_0^\infty \log \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right] f(x; \boldsymbol{\theta}) dx = \sum_{j=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{k=1}^\infty (-1)^{j+\ell+1} \times \frac{\Gamma(b) \Gamma[a(k+j+1)] a b}{\Gamma(b-j) \Gamma[a(k+j+1) - \ell] j! \ell! k} \times \int_0^\infty \frac{\exp(-u)}{\ell+1} du.$$

De modo que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right] f(x; \boldsymbol{\theta}) dx &= \sum_{j=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{k=1}^\infty (-1)^{j+\ell+1} \\ &\times \frac{\Gamma[a(k+j+1)]}{\Gamma(b-j)\Gamma[a(k+j+1)-\ell]j!\ell!} \\ &\times \frac{ab\Gamma(b)}{k(\ell+1)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo (3.15), (3.16), (3.18) e (3.19) em (3.13), e após alguma álgebra decorre que

$$\begin{aligned} I_S(X) &= -\log(ab\lambda\sigma^\lambda) + b \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \binom{b-1}{j} \left\{ \frac{(\lambda+1)\log(\sigma)}{j+1} + \frac{\{\gamma + \psi[a(j+1)+1]\}}{j+1} \right\} \\ &\quad - \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell \binom{a(j+1)-1}{\ell} \left[ \frac{a}{\lambda} I(\ell) + \sum_{k=1}^\infty \left[ \frac{a(a+1)}{k(k+\ell+1)} \right] + \frac{a(b-1)}{k(\ell+1)} \right] \}. \end{aligned}$$

**Definição 3.7** A entropia Rényi de uma variável aleatória com densidade  $f(x; \boldsymbol{\theta})$  é definida como

$$I_R(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \log[I(\alpha)],$$

em que  $I(\alpha) = \int_{\mathcal{R}} f(x; \boldsymbol{\theta})^\alpha dx$ ,  $x > 0$  e  $\alpha \neq 0$ . Observe que quando  $\alpha \rightarrow 1$ , a entropia Rényi converge para a entropia Shannon. A entropia Rényi para a distribuição FrG é expressa por

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= a^\alpha b^\alpha \lambda^\alpha \sigma^{\lambda\alpha} \int_0^\infty x^{-\alpha(\lambda+1)} \exp \left[ -\alpha \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{\alpha(a-1)} \\ &\quad \times \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^{\alpha(b-1)} dx. \end{aligned}$$

Utilizando a expansão (3.7) na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= a^\alpha b^\alpha \lambda^\alpha \sigma^{\lambda\alpha} \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty (-1)^{i+j} \binom{\alpha(b-1)}{i} \binom{a(\alpha+i)-\alpha}{j} \int_0^\infty x^{-\alpha(\lambda+1)} \\ &\quad \times \exp \left[ -(\alpha+j) \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] dx. \end{aligned}$$



Aplicando a integral  $\int_0^\infty x^{p-1} \exp(-\delta x^c) dx = c^{-1} \delta^{-p/c} \Gamma(p/c)$ , temos

$$I(\alpha) = a^\alpha b^\alpha \lambda^\alpha \sigma^{\lambda\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{\alpha(b-1)}{i} \binom{a(\alpha+i)-\alpha}{j} (-\lambda)^{-1} \Gamma \left[ \frac{1-\alpha(\lambda+1)}{(-\lambda)} \right] \\ \times [\sigma^\lambda(a+j)]^{-[1-\alpha(\lambda+1)]/(-\lambda)}.$$

Definindo  $c(\lambda) = -\lambda$ ,  $p(\alpha, \lambda) = 1 - \alpha(\lambda + 1)$  e  $\delta(\alpha, j) = \sigma^\lambda(a + j)$ . Podemos reescrever a expressão acima como

$$I(\alpha) = a^\alpha b^\alpha \lambda^\alpha \sigma^{\lambda\alpha} c(\lambda)^{-1} \Gamma \left[ \frac{p(\alpha, \lambda)}{c(\lambda)} \right] \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{\alpha(b-1)}{i} \binom{a(\alpha+i)-\alpha}{j} \\ \times [\delta(\alpha, j)]^{-p(\alpha, \lambda)/c(\lambda)}.$$

De onde segue,

$$I_R(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \alpha \log(ab\lambda\sigma^\lambda) - \log(c(\lambda)) + \log \left\{ \Gamma \left[ \frac{p(\alpha, \lambda)}{c(\lambda)} \right] \right\} + \log \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \right. \right. \\ \left. \left. (-1)^{i+j} \binom{\alpha(b-1)}{i} \binom{a(\alpha+i)-\alpha}{j} [\delta(\alpha, j)]^{-p(\alpha, \lambda)/c(\lambda)} \right] \right\}.$$

Portanto, a entropia Rényi para a distribuição FrG é dada por

$$I_R(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \alpha \log(ab\lambda\sigma^\lambda) - \log(c(\lambda)) + \log \left\{ \Gamma \left[ \frac{p(\alpha, \lambda)}{c(\lambda)} \right] \right\} + \log \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \right. \right. \\ \left. \left. (-1)^{i+j} \binom{\alpha(b-1)}{i} \binom{a(\alpha+i)-\alpha}{j} [\delta(\alpha, j)]^{-p(\alpha, \lambda)/c(\lambda)} \right] \right\}.$$

### 3.11 Estimação de Máxima Verossimilhança

**Definição 3.8** *Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$  com função densidade (ou de probabilidade)  $f(x|\theta)$ , com  $\theta \in \Theta$ , em que  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^{p+2}$  é o espaço paramétrico e  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma^T)^T$  é o vetor de parâmetros do modelo e  $\gamma$  é um vetor de parâmetros  $p \times 1$  desconhecido da distribuição principal  $G(x; \gamma)$ . A função de verossimilhança de  $\theta$  correspondente a amostra aleatória observada  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  é dada por*

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

**Definição 3.9** *O estimador de máxima verossimilhança (EMV) de  $\theta$  é o valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\theta|\mathbf{x})$ .*

Para obtermos o estimador de máxima verossimilhança, vamos considerar o logaritmo da função de verossimilhança de  $\theta$  denotado por

$$\ell(\theta|\mathbf{x}) = \log L(\theta|\mathbf{x}),$$

pois na prática, as vezes, é mais fácil trabalhar com o logaritmo da função  $L(\theta|\mathbf{x})$ . Como a função log é crescente não temos problema.

Considerando  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  com distribuição FrG e  $\theta = (\sigma, \lambda, a, b)^T$  o vetor de parâmetros do modelo, a função de verossimilhança para o parâmetro  $\theta$  é expressa como

$$\begin{aligned} L(\theta; \mathbf{x}) &= (ab\lambda\sigma^\lambda)^n \prod_{i=1}^n \left\{ x_i^{-(\lambda+1)} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^{a-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^{b-1} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, o logaritmo da função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) &= n \log(a) + n \log(b) + n \log(\lambda) + n \lambda \log(\sigma) - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \\ &\quad - \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} + (a-1) \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\} + \\ &\quad + (b-1) \sum_{i=1}^n \log \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A função log-verossimilhança pode ser maximizada usando diretamente o software R ou resolvendo as equações não-lineares obtidas diferenciando a expressão (3.20). As componentes para o vetor escore, denotado por  $U(\boldsymbol{\theta})$ , são dadas por

$$\begin{aligned} U_\sigma(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n \lambda}{\sigma} - \lambda \sigma^{\lambda-1} \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} + \lambda \sigma^{\lambda-1} \sum_{i=1}^n \frac{\exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]}{x_i^\lambda \{1 - \exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]\}} \\ &\quad \times \left\{ (a-1) + \frac{a(b-1) \{1 - \exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]\}^a}{[1 - \{1 - \exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]\}^a]} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_\lambda(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n}{\lambda} + n \log(\sigma) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sigma^\lambda \log(\sigma) \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} + \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} \log(x_i) + \\ &\quad + \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\log(\frac{\sigma}{x_i}) \exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]}{x_i^\lambda \{1 - \exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]\}} \left\{ (a-1) + \frac{a(b-1) \{1 - \exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]\}^a}{[1 - \{1 - \exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]\}^a]} \right\}, \end{aligned}$$

$$U_a(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\} \left\{ 1 - \frac{(b-1) \{1 - \exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]\}^a}{[1 - \{1 - \exp[-(\frac{\sigma}{x_i})^\lambda]\}^a]} \right\},$$

e

$$U_b(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \log \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right].$$

Para construir estimativas intervalares e realizar teste de hipótese necessitamos da matriz de informação de Fisher. A matriz de informação de Fisher observada para  $\boldsymbol{\theta} = (\sigma, \lambda, a, b)^T$ , denotada por  $\ddot{J}(\boldsymbol{\theta})$ , é

$$\ddot{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \ddot{J}_{a,a} & \ddot{J}_{a,b} & \ddot{J}_{a,\sigma} & \ddot{J}_{a,\lambda} \\ \ddot{J}_{b,a} & \ddot{J}_{b,b} & \ddot{J}_{b,\sigma} & \ddot{J}_{b,\lambda} \\ \ddot{J}_{\sigma,a} & \ddot{J}_{\sigma,b} & \ddot{J}_{\sigma,\sigma} & \ddot{J}_{\sigma,\lambda} \\ \ddot{J}_{\lambda,a} & \ddot{J}_{\lambda,b} & \ddot{J}_{\lambda,\sigma} & \ddot{J}_{\lambda,\lambda} \end{bmatrix},$$

em que os elementos da matriz  $\ddot{J}(\boldsymbol{\theta})$  encontram-se no Apêndice B.

## 3.12 Aplicação

Nesta seção, ilustramos a utilidade da distribuição FrG estudada neste capítulo utilizando um conjunto de dados reais, ao qual ajustamos e comparamos as distribuições Fréchet generalizada, Beta Fréchet (BF) e Fréchet. Estimamos os parâmetros desses modelos pelo método de máxima verossimilhança usando o pacote `maxLik` do *Software R*. O conjunto de dados está descritos a seguir.

### 3.12.1 Tempos de vida de Alumínio

Os dados apresentados na Tabela 3.1 foram obtidos de Birnbaum e Saunders (1969 b) e representa o número de ciclos até a falha de 101 tiras de lâmina de alumínio 6061-T6 cortadas paralelamente ao sentido do rolo e sob oscilação de 18 ciclos por segundo. Cada tira de alumínio foi submetida a uma pressão máxima de 31.000 psi, em que psi (Pounds per Square Inch) é uma medida de pressão.

Tabela 3.1: Tempo de vida de alumínio

70	90	96	97	99	100	103	104	104	105	107	108	108
108	109	109	112	112	113	114	114	114	116	119	120	120
120	121	121	123	124	124	124	124	124	128	128	129	129
130	130	130	131	131	131	131	131	132	132	132	133	134
134	134	134	134	136	136	137	138	138	138	139	139	141
141	142	142	142	142	142	142	144	144	145	146	148	148
149	151	151	152	155	156	157	157	157	157	158	159	162
163	163	164	166	166	168	170	174	196	212			

Tabela 3.2: EMVs para os parâmetros do modelo e critérios de informações AIC, BIC e CAIC

Modelos	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	AIC	CAIC	BIC
FG	290.9828 (0.9565 )	1.7609 (0.1739 )	35.2982 (4.3934 )	0.9593 (0.4084 )	911.5367	921.9574	911.9578
BF	185.3211 (1.2467 )	0.4994 (0.0289 )	68.4989 (1.0789 )	155.1565 ( 0.5342 )	914.2177	924.6384	914.6387
Fréchet	121.0209 (3.2558 )	5.0370 (0.3358 )			945.8490	951.0594	945.9727

Apresentamos na Tabela (3.2) as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos, juntamente com os respectivos erros-padrão (entre parênteses), e os valores dos critérios de informações AIC (Critério de Informação Akaike), BIC (Critério de Informação Bayesiano) e CAIC (Critério de Informação Akaike Corrigido). Observe que o AIC possui o menor valor numérico no caso da distribuição Fréchet Generalizada, indincando que o modelo FrG é o mais adequado para ajustar esses dados, quando comparado as distribuições BF e Fréchet. Na Figura (3.3) apresentamos os histogramas e a função de distribuição acumulada estimadas a partir das estimativas na Tabela (3.2).

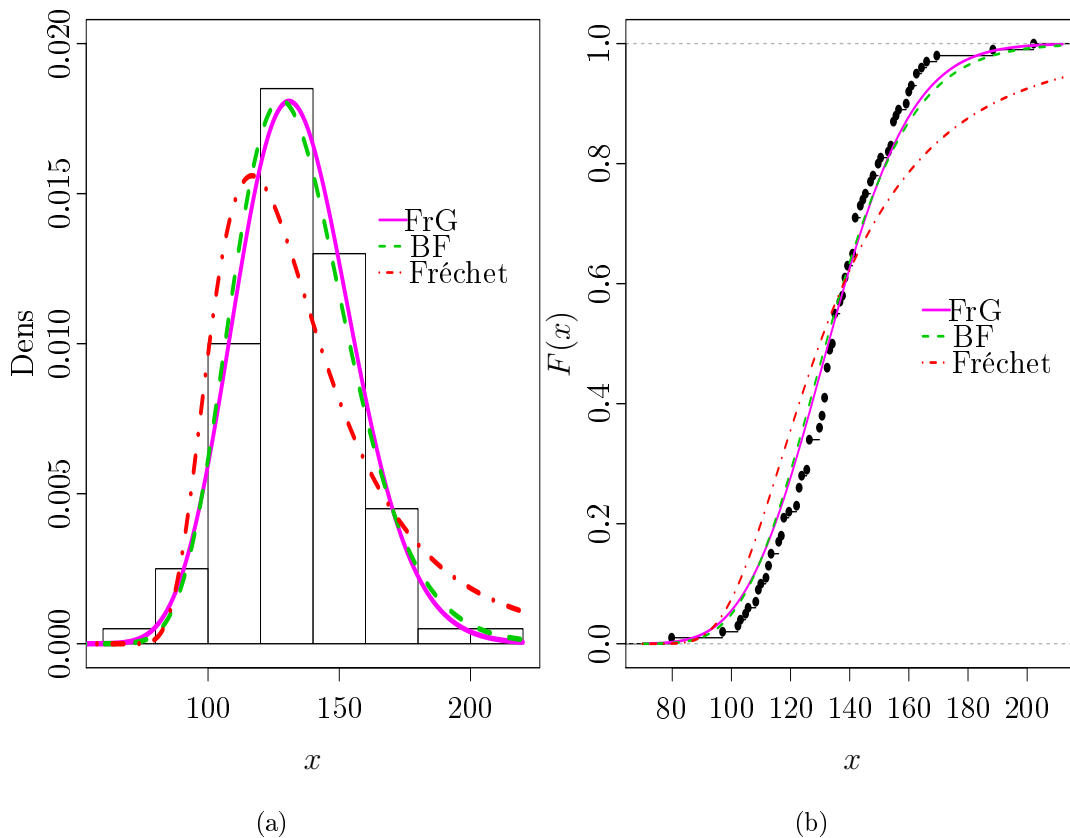


Figura 3.3: Densidades e funções de distribuições acumuladas estimadas para os modelos FrG, BF e Fréchet, figuras (a) e (b), respectivamente.

# Capítulo 4

## Modelo de Regressão Log-Fréchet Generalizada

Neste capítulo, estudamos a distribuição Log-Weibull Inversa Generalizada e um modelo de regressão introduzidos por Gusmão, Ortega e Cordeiro (2011). Ainda neste capítulo, propomos a distribuição Log-Fréchet Generalizada e um modelo de regressão baseado nesta distribuição.

### 4.1 A distribuição Weibull Inversa Generalizada

A distribuição Weibull Inversa Generalizada (WIG) foi introduzida por Gusmão, Ortega e Cordeiro (2011) e possui função de distribuição acumulada (fda) dada por

$$F(x; \alpha, \beta, \gamma) = \exp \left[ -\gamma \left( \frac{\alpha}{x} \right)^\beta \right], \quad x > 0, \quad (4.1)$$

e função de densidade (fdp) correspondente

$$g(x; \alpha, \beta, \gamma) = \gamma \beta \alpha^\beta x^{-(\beta+1)} \exp \left[ -\gamma \left( \frac{\alpha}{x} \right)^\beta \right]. \quad (4.2)$$

### 4.2 A distribuição Log-Weibull Inversa Generalizada

Seja  $T$  uma variável aleatória da distribuição WIG com densidade dada em (4.2). Considere  $Y = \log(T)$ , então  $Y$  possui distribuição log-Weibull Inversa Generalizada

(LWIG). Parametrizando a função densidade de  $Y$  tomando  $\sigma = 1/\beta$  e  $\mu = \log(\alpha)$ , obtemos

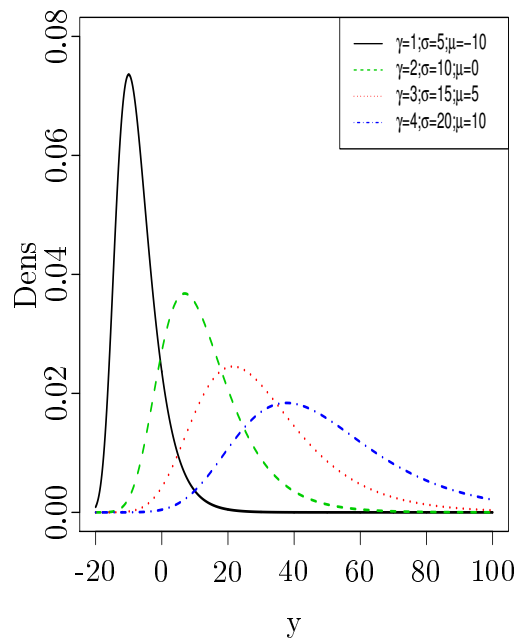
$$f(y; \gamma, \sigma, \mu) = \frac{\gamma}{\sigma} \exp \left\{ - \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) - \gamma \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, \quad -\infty < y < \infty, \quad (4.3)$$

com fda associada

$$F(y; \gamma, \sigma, \mu) = \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, \quad -\infty < y < \infty,$$

em que  $\gamma > 0$ ,  $\sigma > 0$  são parâmetros de escala e  $-\infty < \mu < \infty$  é um parâmetro de locação.

Apresentamos na Figura (4.1) o gráfico da função densidade da distribuição LWIG com parâmetros  $\gamma$ ,  $\sigma$  e  $\mu$ , denotada por  $LWIG(\gamma, \sigma, \mu)$ , para alguns valores dos parâmetros. Observamos que a distribuição LWIG é assimétrica. E a medida que aumentamos os valores dos parâmetros o grau de assimetria diminui.



(a)

Figura 4.1: Gráfico da função de densidade LWIG  $(\gamma, \sigma, \mu)$  para alguns valores dos parâmetros.



A função de sobrevivência para a distribuição LWIG é dada por

$$S(y) = 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}.$$

Considere a variável aleatória padronizada  $Z = (Y - \mu)/\sigma$ . Portanto, a função densidade de  $Z$  é dada por

$$\pi(z; \gamma) = \gamma \exp [-z - \gamma \exp(-z)], \quad -\infty < y < \infty, \quad \lambda > 0. \quad (4.4)$$

Se considerarmos  $\gamma = 1$  na expressão (4.4), obtemos a distribuição Weibull inversa ou valor extremo inversa. Seja  $\mu'_k = E(Z^k)$  o  $k$ -ésimo momento ordinário da distribuição com densidade dada em (4.4), então

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} z^k \gamma \exp [-z - \gamma \exp(-z)] dz.$$

Considere a mudança de variável  $u = \exp(-z)$ . Então, a integral anterior pode ser reescrita como

$$\mu'_k = (-1)^k \gamma \int_0^{\infty} [\log(u)]^k \exp(-\gamma u) du. \quad (4.5)$$

Utilizando a integral definida por Prudnikon et al., (1986) e Nadarajah (2006)  $\mu'_k$  pode ser reescrito como

$$\int_0^{\infty} [\log(u)]^k \exp(-\sigma u) du = \frac{\partial^k [\sigma^{-a} \Gamma(a)]}{\partial a^k} \Bigg|_{a=1}. \quad (4.6)$$

A expressão (4.5) pode ser expressa como

$$\mu'_k = (-1)^k \gamma \frac{\partial^k [\gamma^{-a} \Gamma(a)]}{\partial a^k} \Bigg|_{a=1}.$$

**Proposição 4.1** *Se  $Y \sim LWIG(\gamma, \sigma, \mu)$ , então o  $k$ -ésimo momento ordinário de  $Y$  pode ser expresso como*

$$\mu'_k = \gamma \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \mu^{k-i} \sigma^i \frac{\partial^i [\gamma^{-a} \Gamma(a)]}{\partial a^i} \Bigg|_{a=1}.$$

**Demonstração:** temos por definição que

$$\mu'_k = \frac{\gamma}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y^k \exp \left\{ - \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) - \gamma \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} dy.$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \exp [-(y - \mu)/\sigma]$ , obtemos

$$\mu'_k = \int_0^\infty [\mu - \sigma \log(u)]^k \exp(-\gamma u) du.$$

Aplicando a expansão binomial na expressão acima, obtemos

$$\mu'_k = \gamma \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \mu^{k-i} \sigma^i \int_0^\infty [\log(u)]^i \exp(-\gamma u) du.$$

Utilizando o resultado em (4.6), a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\mu'_k = \gamma \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \mu^{k-i} \sigma^i \frac{\partial^i [\gamma^{-a} \Gamma(a)]}{\partial a^i} \Big|_{a=1}.$$

■

### 4.3 Conceitos básicos

Os dados em análise de sobrevivência são compostos pelos tempos de sobrevivência e, geralmente, pelas censuras e as covariáveis.

Os tipos de censuras são:

- Censura à direita - se o tempo de falha é maior do que um período pré- estabelecido de tempo;
- Censura à esquerda - se o tempo registrado é maior do que o tempo de falha;
- Censura intervalar - acontece quando se sabe somente que o evento de interesse ocorreu em um certo intervalo de tempo.

A censura à direita é a que ocorre com maior frequência nos dados de sobrevivência. Existe vários tipos de censura à direita, dentre as quais destacamos:

- Censura do Tipo I - ocorre naqueles estudos que ao serem finalizados após um certo período pré-estabelecido de tempo, registram alguns elementos que ainda não apresentaram o evento de interesse;
- Censura do Tipo II - acontece quando o estudo é finalizado após ter ocorrido o evento de interesse em um número pré-estabelecido de elementos;

- Censura aleatória - acontece quando o elemento deixa o estudo sem que o evento de interesse tenha ocorrido.

Nesta dissertação abordamos, unicamente, mecanismos de censura do Tipo I.

## 4.4 Modelo de Regressão Log-Weibull Inversa Generalizada

Sabemos que o tempo de vida das pessoas pode ser influenciado por variáveis explicativas tais como o nível de colesterol, a pressão arterial entre outras. Seja  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$  o vetor de variáveis explicativas associadas a  $i$ -ésima variável resposta  $y_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . O modelo de regressão linear para  $y_i$  baseado na densidade da LWIG (Gusmão et al., 2011) é dado por

$$y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sigma z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.7)$$

em que o erro aleatório  $z_i$  tem distribuição dada em (4.4),  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ ,  $\sigma > 0$  e  $\gamma > 0$  são parâmetros escalares desconhecidos e  $\mathbf{x}_i$  o vetor de variáveis explicativas que modela o parâmetro de locação  $\mu_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ . Dessa forma, o vetor de parâmetros de locação  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$  pode ser expresso como uma função linear  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}$ , em que  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$ . O modelo de regressão Log-Weibull Inversa generalizada apresenta como caso particular, quando  $\gamma = 1$ , o modelo de regressão Log-Weibull Inversa (LWI).

Seja  $(y_1, \dots, y_n)$  uma amostra de  $n$  observações independentes provenientes de uma distribuição LWIG, em que  $y_i = \min\{\log(t_i), \log(c_i)\}$  para  $i = 1, \dots, n$ ,  $t_i$  e  $c_i$  são os tempos de vida e censura, respectivamente. Suponha censura não informativa e que o tempo de vida observado e o tempo de censura são independentes. Considere  $F$  e  $C$  conjuntos de indivíduos para os quais  $y_i = \log(t_i)$  ou  $y_i = \log(c_i)$ , respectivamente. Neste caso, a função de verossimilhança para o parâmetro do modelo  $\boldsymbol{\theta} = (\gamma, \sigma, \boldsymbol{\beta}^T)^T$

considerando tempo de falha e censura pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i \in F} f(y_i; \boldsymbol{\theta}) \prod_{i \in C} S(y_i; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i \in F} \frac{\gamma}{\sigma} \exp \left\{ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) - \gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right] \right\} \\ &\quad \times \prod_{i \in C} \left[ 1 - \exp \left\{ - \gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right] \right\} \right], \end{aligned}$$

em que  $f(y_i; \boldsymbol{\theta})$  e  $S(y_i; \boldsymbol{\theta})$  são as funções de densidade e sobrevivência, respectivamente.

Então o logaritmo da função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= r[\log(\gamma) - \log(\sigma)] - \sum_{i \in F} \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) - \gamma \sum_{i \in F} \exp \left[ \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right] + \\ &\quad + \sum_{i \in C} \log \left[ 1 - \exp \left\{ - \gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right] \right\} \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que  $r$  é o número de falhas observadas.

Podemos obter os estimadores de máxima verossimilhança, digamos  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , de  $\boldsymbol{\theta}$  maximizando a função (4.8) usando o *Software* estatístico OX (função MaxBFGS) (ver Doornik 2007), por exemplo.

Sob certas condições de regularidade. A distribuição assintótica de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é dada por

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) - N_{(p+2)}(0, K(\boldsymbol{\theta})^{-1}),$$

em que  $K(\boldsymbol{\theta})^{-1}$  é a matriz de informação de Fischer. Visto que o cálculo da matriz  $K(\boldsymbol{\theta})^{-1}$  não é possível devido a presença de censura, podemos utilizar alternativamente a matriz de informação observada, denotada por  $J(\boldsymbol{\theta})$ , avaliada em  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Neste caso, a matriz de informação observada é dada por

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \{-\ddot{L}_{r,s}\} = \begin{bmatrix} -L_{\gamma\gamma} & -L_{\gamma\sigma} & -L_{\gamma\beta_j} \\ -L_{\sigma\gamma} & -L_{\sigma\sigma} & -L_{\sigma\beta_j} \\ -L_{\beta_j\gamma} & -L_{\beta_j\sigma} & -L_{\beta_j\beta_s} \end{bmatrix},$$

em que os elementos da matriz  $J(\boldsymbol{\theta})$  encontram-se no Apêndice C.

Portanto, um intervalo assintótico para cada parâmetro  $\theta_r$ , considerando  $100(1 - \alpha)$  é dado por

$$ICA_r = \left( \hat{\theta}_r - z_{\alpha/2} \sqrt{-\hat{L}^{r,r}}, \hat{\theta}_r + z_{\alpha/2} \sqrt{-\hat{L}^{r,r}} \right),$$

em que  $-\hat{L}^{\widehat{L}^{r,r}}$  é o  $r$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $J(\hat{\theta})^{-1}$  e  $z_{\alpha/2}$  é o quantil  $1-\alpha/2$  da distribuição normal padrão. Para comparar os modelos podemos usar o teste da Razão de Verossimilhança (RV) que é baseado na normalidade assintótica dos estimadores. Podemos comparar LWIG com o modelo LWI que equivalente a testar  $H_0 : \gamma = 1$  versus  $H_1 : \gamma \neq 1$ . Neste caso, o teste RV é dado por

$$\Lambda = 2\{\ell(\hat{\theta}) - \ell(\tilde{\theta})\},$$

em que  $\hat{\theta}$  é o EMVs sob  $H_1$  e  $\tilde{\theta}$  é o EMVs sob  $H_0$ .

## 4.5 A Distribuição Log-Fréchet Generalizada

Considere  $X$  uma variável aleatória com distribuição FrG. A variável aleatória  $Y = \log(X)$  tem uma distribuição Log-Fréchet Generalizada (LFrG) cuja densidade, parametrizada em termos de  $\phi = 1/\lambda$  e  $\mu = \log(\sigma)$ , é dada por

$$f(y) = \exp \left\{ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) \right] \right\} \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^{\alpha-1} \phi^{-1} \alpha b \left( 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^{\alpha} \right)^{b-1}, \quad -\infty < y < \infty, \quad (4.9)$$

em que  $\phi > 0$ ,  $\alpha > 0$  são parâmetros de escala,  $-\infty < \mu < \infty$  e  $b > 0$  são parâmetros de locação. A fda correspondente é

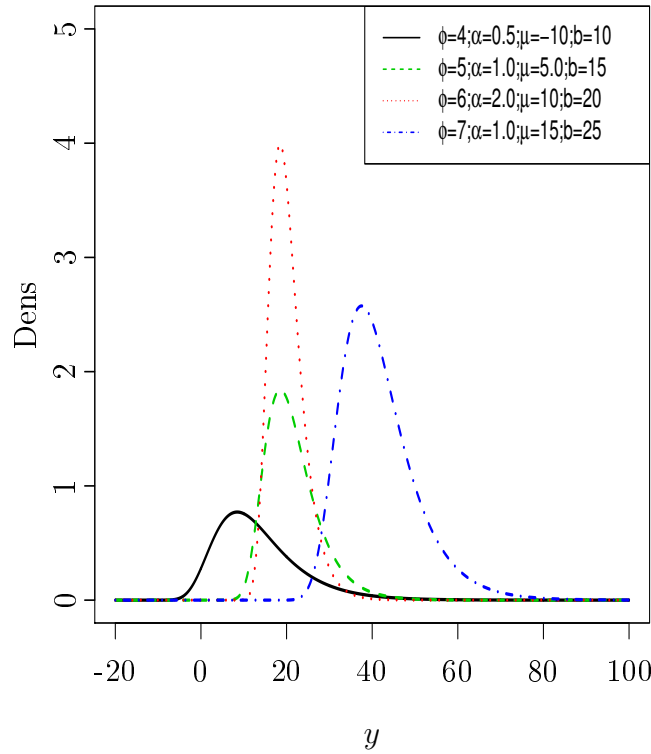
$$F(y) = \left( 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^{\alpha} \right)^b. \quad (4.10)$$

A função de sobrevivência correspondente a (4.10) é dada por

$$S(y) = 1 - \left( 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^{\alpha} \right)^b. \quad (4.11)$$

A representação gráfica da densidade da distribuição LFrG com parâmetros  $\phi$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  e  $b$ , denotada por LFrG  $(\phi, \mu, \alpha, b)$ , para alguns valores dos parâmetros selecionados está representada na Figura (4.2). Note que de acordo com os valores dos parâmetros a distribuição torna-se mais assimétrica.

Definindo a variável aleatória normalizada  $Z = (Y - \mu)/\phi$ . A função de densidade da variável aleatória  $Z$  pode ser obtida usando o método da transformação. Neste caso



(a)

Figura 4.2: Gráfico da função de densidade LFrG  $(\phi, \alpha, \mu, b)$  para alguns valores dos parâmetros selecionados.

a densidade da variável aleatória  $Z$  é dada por

$$f(z) = \alpha b \exp[-z - \exp(-z)][1 - \exp\{-\exp(-z)\}]^{\alpha-1} (1 - [1 - \exp\{-\exp(-z)\}]^\alpha)^{b-1}, \quad -\infty < y < \infty, \quad (4.12)$$

cuja função de sobrevivência é dada por

$$S(z) = 1 - (1 - [1 - \exp\{-\exp(-z)\}]^\alpha)^b.$$

O  $r$ -ésimo momento ordinário de  $Z$  com densidade dada em (4.12), denotado por  $\mu'_r = E(Z^r)$ , é

$$\mu'_r = \alpha b \int_{-\infty}^{\infty} z^r \exp[-z - \exp(-z)][1 - \exp\{-\exp(-z)\}]^{\alpha-1} (1 - [1 - \exp\{-\exp(-z)\}]^\alpha)^{b-1} dz.$$

Fazendo a mudança de variável,  $u = \exp(-z)$  temos que

$$\mu'_r = (-1)^r \alpha b \int_0^\infty [\log(u)]^r \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{\alpha-1} \{1 - [1 - \exp(-u)]^\alpha\}^{b-1} du. \quad (4.13)$$

Considere a expansão binomial

$$(1 - z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} z^j, \quad (4.14)$$

para  $|z| < 1$ . Aplicando a expansão (4.14) em (4.13) repetidamente, obtemos

$$\mu'_r = (-1)^r \alpha b \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+\ell} \Gamma(b) \Gamma(\alpha(j+1))}{\Gamma(b-j) \Gamma(\alpha(j+1) - \ell) j! \ell!} \int_0^\infty [\log(u)]^r \exp(-u(\ell+1)) du \quad (4.15)$$

Utilizando a integral definida em (4.6), a expressão (4.15) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \alpha b \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+\ell+r} \Gamma(b) \Gamma(\alpha(j+1))}{\Gamma(b-j) \Gamma(\alpha(j+1) - \ell) j! \ell!} \left. \frac{\partial^r [(\ell+1)^{-a} \Gamma(a)]}{\partial a^r} \right|_{a=1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} w_{j,\ell} \left. \frac{\partial^r [(\ell+1)^{-a} \Gamma(a)]}{\partial a^r} \right|_{a=1}, \end{aligned}$$

em que

$$w_{j,\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+\ell+r} \Gamma(b) \Gamma(\alpha(j+1)) \alpha b}{\Gamma(b-j) \Gamma(\alpha(j+1) - \ell) j! \ell!}.$$

**Proposição 4.2** *Seja  $Y \sim LrFG(\phi, \mu, \alpha, b)$ , dada na equação (4.9), então o  $r$ -ésimo momento da distribuição  $LrFG$  é dado por*

$$\mu'_r = \sum_{j=0}^{\infty} w_{j,\ell} \left. \frac{\partial^r [(\ell+1)^{-a} \Gamma(a)]}{\partial a^r} \right|_{a=1},$$

em que

$$w_{j,\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i=0}^r \frac{(-1)^{j+\ell+i} \Gamma(b) \Gamma(\alpha(j+1)) \alpha b}{\Gamma(b-j) \Gamma(\alpha(j+1) - \ell) j! \ell!} \binom{r}{i} \mu^{r-i}.$$

**Demonstração:** pela definição de momentos temos que o  $r$ -ésimo momento pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \int_{-\infty}^{\infty} y^k \phi^{-1} \alpha b \exp \left\{ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) \right] \right\} \\ &\quad \times \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^{\alpha-1} \\ &\quad \times \left( 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^\alpha \right)^{b-1} dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \exp [-(y - \mu)/\phi]$ , temos

$$\mu'_r = \alpha b \int_0^\infty [\mu - \phi \log(u)]^r \exp(-u) [1 - \exp(-u)]^{\alpha-1} \{1 - [1 - \exp(-u)]^\alpha\}^{b-1} du.$$

Aplicando a expansão (4.14) na expressão acima repetidamente, obtemos

$$\mu'_r = \alpha b \sum_{j=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \frac{(-1)^{j+\ell} \Gamma(b) \Gamma(\alpha(j+1))}{\Gamma(b-j) \Gamma(\alpha(j+1) - \ell) j! \ell!} \int_0^\infty [\mu - \phi \log(u)]^r \exp(-(\ell+1)u) du.$$

Usando agora, a expansão binomial, tem-se

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \alpha b \sum_{j=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{i=0}^r \frac{(-1)^{j+\ell+i} \Gamma(b) \Gamma(\alpha(j+1))}{\Gamma(b-j) \Gamma(\alpha(j+1) - \ell) j! \ell!} \binom{r}{i} \mu^{r-i} \phi^i \\ &\quad \times \int_0^\infty [\log(u)]^i \exp(-(\ell+1)u) du. \end{aligned}$$

Utilizando o resultado em (4.6), a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \alpha b \sum_{j=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{i=0}^r \frac{(-1)^{j+\ell+i} \Gamma(b) \Gamma(\alpha(j+1))}{\Gamma(b-j) \Gamma(\alpha(j+1) - \ell) j! \ell!} \binom{r}{i} \mu^{r-i} \phi^i \frac{\partial^i [(\ell+1)^{-a} \Gamma(a)]}{\partial a^i} \Bigg|_{a=1} \\ &= \sum_{j=0}^\infty w_{j,\ell} \frac{\partial^i [(\ell+1)^{-a} \Gamma(a)]}{\partial a^i} \Bigg|_{a=1}, \end{aligned}$$

em que

$$w_{j,\ell} = \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{i=0}^r \frac{(-1)^{j+\ell+i} \Gamma(b) \Gamma(\alpha(j+1)) \phi^i \alpha b}{\Gamma(b-j) \Gamma(\alpha(j+1) - \ell) j! \ell!} \binom{r}{i} \mu^{r-i}.$$

■

## 4.6 Modelo de Regressão Log-Fréchet Generalizada

Em muitas aplicações práticas, por exemplo, a saúde das pessoas é afetada por variáveis explicativas tais como o nível de colesterol, a pressão arterial, peso, idade e muitos outras. Baseado na densidade LFrG, propomos um modelo de regressão linear



locação-escala ligando a variável resposta  $y_i$  e  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$  o vetor de variáveis explicativas como:

$$y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \phi z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.16)$$

em que o erro aleatório  $z_i$  tem distribuição dada em (4.12),  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ ,  $\phi > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $b > 0$  são parâmetros desconhecidos e  $x_i$  o vetor de variáveis explicativas que modela o parâmetro de locação  $\mu_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ . O vetor de parâmetros de locação  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$  é representado pela função linear  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ , em que  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$ . O modelo LFrG (4.16) apresenta como caso especial, para  $\alpha = \beta = 1$ , o seguinte modelo de regressão:

- Modelo de regressão log-Weibull inversa

Cuja a função de sobrevivência é dada por

$$S(y) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right] \right\}.$$

Considere uma amostra  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $n$  observações independentes provenientes de uma distribuição LFrG de tal forma que cada resposta aleatória é definida por  $y_i = \min\{\log(t_i), \log(c_i)\}$  para  $i = 1, \dots, n$ , em que  $t_i$  e  $c_i$  são o tempo de vida e tempo de censura, respectivamente. Suponha censura não informativa de modo que o tempo de vida observada e o tempo de censura são independentes. Seja  $F$  e  $C$  conjuntos de indivíduos para os quais a variável resposta  $y_i$  é a log-vida ou log-censura, respectivamente. A partir das equações (4.9) e (4.11), a função de verossimilhança total para os parâmetros do modelo  $\boldsymbol{\theta} = (\phi, \alpha, b, \beta^T)^T$ , considerando tempo de falha e censura, pode ser expressa como

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i \in F} f(y_i; \boldsymbol{\theta}) \prod_{i \in C} S(y_i; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i \in F} \left[ \phi^{-1} \alpha \beta \exp \left\{ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) \right] \right\} \right] \\ &\quad \times \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^{\alpha-1} \\ &\quad \times \left( 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^{\alpha} \right)^{b-1} \\ &\quad \times \prod_{i \in C} \left[ 1 - \left( 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^{\alpha} \right)^b \right]. \end{aligned}$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) = & r(\log(\alpha) + \log(b) - \log(\phi)) - \sum_{i \in F} \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) - \sum_{i \in F} \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) \right] \\ & + (\alpha - 1) \sum_{i \in F} \log \left( 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) \right] \right\} \right) + \\ & + (b - 1) \sum_{i \in F} \log \left( 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^\alpha \right) + \\ & + \sum_{i \in C} \log \left( \left[ 1 - \left( 1 - \left[ 1 - \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi} \right) \right] \right\} \right]^\alpha \right)^b \right] \right), \quad (4.17) \end{aligned}$$

em que  $r$  é o número de falhas observadas. Os estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) ( $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ) do vetor de parâmetro  $\boldsymbol{\theta}$  pode ser obtido maximizando a função em (4.17). Podemos maximizar a função em (4.17) usando uma rotina numérica de algum software, por exemplo, o SAS (proc NLMixed) e OX (MaxBFGS) (ver, Doornik, 2007).

Sob certas condições de regularidade, a distribuição assintótica de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é definida como

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) - N_{(p+3)}(0, K(\boldsymbol{\theta})^{-1}),$$

em que  $K(\boldsymbol{\theta})^{-1}$  é a matriz de informação de Fisher. Como o cálculo da matriz  $K(\boldsymbol{\theta})^{-1}$  não é possível devido a presença de censura, podemos utilizar alternativamente a matriz de informação observada, denotada por  $J(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ , avaliada em  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Neste caso, a matriz de informação observada é dada por

$$J(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \{-\ddot{\mathbf{L}}_{\mathbf{r},\mathbf{s}}\} = \begin{bmatrix} -L_{\phi\phi} & -L_{\phi\alpha} & -L_{\phi b} - L_{\phi\beta_j} \\ -L_{\alpha\phi} & -L_{\alpha\alpha} & -L_{\alpha b} - L_{\alpha\beta_j} \\ -L_{b\phi} & -L_{b\alpha} & -L_{bb} - L_{b\beta_j} \\ -L_{\beta_j\phi} & -L_{\beta_j\alpha} & -L_{\beta_j b} - L_{\beta_j\beta_s} \end{bmatrix},$$

em que os elementos da matriz  $J(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  encontram-se no Apêndice D.

Portanto, um intervalo de confiança assintótico para cada parâmetro  $\theta_i$ , considerando  $100(1 - \alpha)$  é dado por

$$ICA_i = \left( \hat{\theta}_i - z_{\alpha/2} \sqrt{-\hat{L}^{i,i}}, \hat{\theta}_i + z_{\alpha/2} \sqrt{-\hat{L}^{i,i}} \right),$$

em que  $-\hat{L}^{i,i}$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $J(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$  e  $z_{\alpha/2}$  é o quantil  $1 - \alpha/2$  da distribuição normal padrão. Para comparar os modelos podemos usar

---

um dos três testes de hipóteses conhecidos, a saber, o teste da Razão de verossimilhança (RV), o teste de Wald (W) e o teste escore de Rao ( $S_R$ ) que são baseados na normalidade assintótica dos estimadores.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

No desenvolvimento deste trabalho de dissertação, estudamos a classe de distribuições generalizadas exponencializadas, proposta por Cordeiro, Ortega e Cunha (2013). Também estudamos expressões para calcular os momentos desta distribuição usando somas infinitas. Estudamos ainda algumas propriedades tais como: desvio médio e estatísticas de ordem para a distribuição referida. No final de cada capítulo utilizamos bancos de dados reais para analisar a qualidade dos ajustes dessa distribuição. O que se concluiu é que para cada situação analisada, as novas distribuições tinham um ajuste melhor quando comparadas aos seus submodelos. Ainda neste trabalho, estudamos a distribuição aqui denotada por Fréchet Generalizada. Apresentamos algumas propriedades para esta nova distribuição. Mostramos que os momentos dessa distribuição podem ser expressos explicitamente em termos de somas infinitas da distribuição Fréchet. O mesmo acontece para a densidade das estatísticas de ordem. Abordamos ainda o modelo de regressão com censura à direita utilizando a distribuição log-Weibull inversa generalizada. Propomos a distribuição log-Fréchet generalizada e um modelo de regressão baseado nesta distribuição considerando censura à direita. Tanto para a distribuição log-Weibull inversa generalizada quanto para a distribuição Fréchet generalizada explicitamos fórmulas para os momentos.

As principais contribuições científicas deste trabalho de dissertação concentram-se nos Capítulos 3 e 4, onde obtemos algumas propriedades da distribuição Fréchet generalizada e propomos um modelo de regressão baseado no logaritmo desta distribuição,

respectivamente.

## 5.1 Trabalhos Futuros

Dando continuidade a esta pesquisa, diversos trabalhos podem ser desenvolvidos futuramente. Por exemplo:

- Análise de diagnóstico baseados na teoria de influência local e global;
- Análise residual do modelo de regressão e mediante simulação estudar a distribuição empírica desses resíduos;
- Aplicações do modelo de regressão LFrG.

# Apêndice A

## Distribuição Generalizada

## Exponencializada

Os elementos da matriz de informação observada  $\ddot{J}(\boldsymbol{\theta})$  para a distribuição Generalizada Exponencializada com parâmetros  $(\alpha, \beta, \lambda)$  são

$$\ddot{J}_{\alpha,\alpha} = -\frac{n}{\alpha^2} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{[1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha \{\log[1 - G(x_i; \gamma)]\}^2}{\{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha\}^2},$$

$$\ddot{J}_{\alpha,\beta} = - \sum_{i=1}^n \frac{[1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha \{\log[1 - G(x_i; \gamma)]\}}{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha},$$

$$\begin{aligned} \ddot{J}_{\alpha,\gamma_j} &= - \sum_{i=1}^n \frac{[\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j}}{1 - G(x_i; \gamma)} + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{[\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j} [1 - G(x_i; \gamma)]^{\alpha-1}}{\{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha\}} \{ \\ &\times \{1 + \alpha \log[1 - G(x_i; \gamma)]\} \{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]\} + \alpha \log[1 - G(x_i; \gamma)] [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha \}, \end{aligned}$$

$$\ddot{J}_{\beta,\beta} = -\frac{n}{\beta^2},$$

$$\ddot{J}_{\beta,\gamma} = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{[1 - G(x_i; \gamma)]^{\alpha-1} [\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j}}{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha},$$

$$\begin{aligned}
\ddot{J}_{\gamma_j, \gamma_s} &= \sum_{i=1}^n \frac{[\ddot{g}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j \gamma_s} g(x_i; \gamma) - [\dot{g}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j} [\dot{g}(x_i; \gamma)]_{\gamma_s}}{[g(x_i; \gamma)]^2} - \\
&\quad - \alpha(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{[\ddot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j \gamma_s} [1 - G(x_i; \gamma)] + [\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j} [\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_s}}{[1 - G(x_i; \gamma)]^2} - \\
&\quad - \alpha(\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{[1 - G(x_i; \gamma)]^{\alpha-2}}{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha} \left\{ \alpha [\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j} [\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_s} - \right. \\
&\quad \left. - [\ddot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j \gamma_s} [1 - G(x_i; \gamma)] \right\} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{[\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j} [\dot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_s} [1 - G(x_i; \gamma)]^{2(\alpha-1)}}{\{1 - [1 - G(x_i; \gamma)]^\alpha\}^2},
\end{aligned}$$

em que  $[\ddot{g}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j \gamma_s} = \partial^2 g(x_i; \gamma) / \partial \gamma_j \partial \gamma_s$  e  $[\ddot{G}(x_i; \gamma)]_{\gamma_j \gamma_s} = \partial^2 G(x_i; \gamma) / \partial \gamma_j \partial \gamma_s$  para  $j, s = 1, \dots, p$ .

## Apêndice B

### Distribuição Fréchet Generalizada

Os elementos da matriz de informação observada  $\ddot{J}(\boldsymbol{\theta})$  para a distribuição Fréchet Generalizada com parâmetros  $(\sigma, \lambda, a, b, )$  são

$$\begin{aligned}
 J_{\sigma\sigma} &= -\frac{n\lambda}{\sigma^2} - \lambda(\lambda-1)\sigma^{\lambda-2} \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} + \lambda(\lambda-1)\sigma^{\lambda-2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\lambda} \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right]}{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right]} \times \\
 &\quad \times \left\{ (a-1) - \frac{(b-1)\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right]\}^a}{1 - \{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right]\}^a} \right\} \\
 &\quad - \lambda^2 \sigma^{2(\lambda-1)} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-2\lambda} \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right]}{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right]} \left\{ (a-1) + \frac{a(b-1)\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right]\}^a}{1 - \{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right]\}^a} \right\} \times \\
 &\quad \times \left[ a - \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right] \right\} - 1 + \frac{a \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right] \right\}^a}{1 - \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right] \right\}} \right], \\
 J_{\sigma b} &= -a\lambda\sigma^{\lambda-1} \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right] \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right] \right\}^{a-1}}{x_i^{-\lambda} \left[ 1 - \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda\right] \right\}^a \right]},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 J_{\lambda\lambda} &= -\frac{n}{\lambda^2} - \sigma^\lambda \log(\sigma) \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} [\log(\sigma) - 2 \log(x_i)] - \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} [\log(x_i)]^2 + \\
 &+ \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\lambda} \left[ \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) \right]^2 \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} \left\{ (a-1) - \frac{a(b-1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} \right\} - \\
 &- \sigma^{2\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-2\lambda} \left[ \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) \right]^2 \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} \left[ (a-1) \left\{ 1 - \frac{\exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} \right\} - \right. \\
 &\left. \frac{a(b-1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \left\{ 1 - \frac{\exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} \right\}}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} \right] \\
 &- a^2(b-1) \sigma^{2\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\lambda} \left[ \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) \right]^2 \exp \left[ -2 \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^{2(a-1)}}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}, \\
 J_{\sigma a} &= \lambda \sigma^{\lambda-1} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\lambda} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} \left\{ 1 - \frac{(b-1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} - \right. \\
 &\left. \frac{a(b-1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} - \right. \\
 &\left. \frac{a(b-1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^{2a} \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}}{\left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^2} \right\} \\
 &= \lambda \sigma^{\lambda-1} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\lambda} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} \left\{ 1 - \frac{(b-1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} \right\} - \\
 &- a(b-1) \lambda \sigma^{\lambda-1} \sum_{i=1}^n \frac{\exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}}{x_i^\lambda \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\} \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{aa} &= -\frac{n}{a^2} - (b-1) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\left[ \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\} \right]^2 \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left[ \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\} \right]^2 \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^{2a}}{\left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^2} \right\} \\
 &= -\frac{n}{a^2} - (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{\left[ \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\} \right]^2 \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}{\left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{a\lambda} &= \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{x_i^\lambda \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}} \left\{ 1 - \frac{(b-1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} \right\} \\
 &\quad - a(b-1) \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{x_i^\lambda \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\} \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]} \times \\
 &\quad \times \left\{ 1 + \frac{\left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} \right\} \\
 &= \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{x_i^\lambda \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}} \left\{ 1 - \frac{(b-1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} \right\} \\
 &\quad - a(b-1) \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{x_i^\lambda \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\} \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^2},
 \end{aligned}$$

$$J_{ab} = - \sum_{i=1}^n \frac{\left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\} \log \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a},$$

$$J_{bb} = -\frac{n}{b^2},$$

$$\begin{aligned} J_{b\lambda} &= a \sum_{i=1}^n \frac{\exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\}^a (-\sigma^\lambda x_i^{-\lambda}) [\log(\sigma) - \log(x_i)]}{\left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\} \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\}^a \right]} \\ &= -a \sigma^\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\}^{a-1} \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{x_i^\lambda \left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\}^a \right]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\sigma\lambda} &= \frac{n}{\sigma} - (\lambda \sigma^{\lambda-1} \log(\sigma) + \sigma^{\lambda-1}) \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} + \lambda \sigma^{\lambda-1} \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} \log(x_i) - \\ &\quad - (a-1) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\lambda \sigma^{2\lambda-1} x_i^{-2\lambda} \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\lambda \sigma^{\lambda-1} x_i^{-\lambda} \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) + \sigma^{\lambda-1} x_i^{-\lambda}) \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right]}{1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\exp \left[ -2 \left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \lambda \sigma^{2\lambda-1} x_i^{-2\lambda} \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{\left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\}^2} \right\} - \\ &\quad - (b-1) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{a^2 \lambda \sigma^{2\lambda-1} x_i^{-2\lambda} \exp \left[ -2 \left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\}^{a-2} \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\}^a} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a \lambda \sigma^{2\lambda-1} x_i^{-2\lambda} \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\}^{a-1} \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ -\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\lambda \right] \right\}^a} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^{a-1} \left( \lambda \sigma^{\lambda-1} x_i^{-\lambda} \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) + \sigma^{\lambda-1} x_i^{-\lambda} \right)}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} \\
& - \frac{a \exp \left[ -2 \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^{a-2} \lambda \sigma^{2\lambda-1} x_i^{-2\lambda} \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} + \\
& \left. + \frac{a^2 \exp \left[ -2 \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^{2(a-1)} \lambda \sigma^{2\lambda-1} x_i^{-2\lambda} \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{\left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^2} \right\} \\
= & \frac{n}{\sigma} - (\lambda \sigma^{\lambda-1} \log(\sigma) + \sigma^{\lambda-1}) \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} + \lambda \sigma^{\lambda-1} \sum_{i=1}^n x_i^{-\lambda} \log(x_i) - \\
& - (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda \sigma^{2\lambda-1} x_i^{-2\lambda} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} + \\
& \left\{ (a-1) - \frac{a(b-1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a} \right\} \times \left\{ \sigma^{\lambda-1} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\lambda} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} \right\} \times \\
& \times \left( \lambda \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right) + 1 \right) - \lambda \sigma^{2\lambda-1} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-2\lambda} \exp \left[ -2 \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} - \\
& - \lambda \sigma^{2\lambda-1} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-2\lambda} \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right]} \left. \right\} - \\
& - a^2 (b-1) \lambda \sigma^{2\lambda-1} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-2\lambda} \exp \left[ -2 \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^{a-2} \log \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)}{\left[ 1 - \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{x_i} \right)^\lambda \right] \right\}^a \right]^2}.
\end{aligned}$$

# Apêndice C

## Distribuição Log-Weibull Inversa Generalizada

Os elementos da matriz de informação observada  $J(\boldsymbol{\theta})$  para a distribuição Log-Weibull Inversa Generalizada com parâmetros  $(\gamma, \sigma, \mu)$  são

$$\begin{aligned} L_{\gamma\gamma} &= -\frac{r}{\gamma^2} - \sum_{i \in C} \frac{\exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]^2 \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} \\ &= -\frac{r}{\sigma^2} - \sum_{i \in C} \exp(-2z_i) \exp[-\gamma \exp(-z_i)] \{1 - \exp[-\gamma \exp(-z_i)]\}^{-2} \\ &= -\frac{r}{\sigma^2} - \sum_{i \in C} \exp(-2z_i) h_i (1 - h_i)^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\gamma\sigma} &= \sum_{i \in F} \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma^2} \right) \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] + \\
&+ \sum_{i \in C} \left\{ \frac{\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma^2} \right) \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} + \right. \\
&+ \frac{\exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]^2 \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma^2} \right) \gamma \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} \times \\
&\times \frac{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} - \frac{\exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]^2 \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma^2} \right)}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} \times \\
&\times \left. \frac{\gamma \left[ \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} \right\} \\
&= \sum_{i \in F} \left( -\frac{z_i}{\sigma} \right) \exp(-z_i) + \sum_{i \in C} \frac{\left[ \left( \frac{z_i}{\sigma} \right) \exp(-z_i) h_i + \left( -\frac{z_i}{\sigma} \right) \gamma \exp(-2z_i) h_i \right] (1 - h_i)}{(1 - h_i)^2} + \\
&+ \sum_{i \in C} \frac{\gamma \left( -\frac{z_i}{\sigma} \right) \exp(-2z_i) h_i^2}{(1 - h_i)^2} \\
&= \sum_{i \in F} (\dot{z}_i)_\sigma \exp(-z_i) + \sum_{i \in C} h_i (\dot{z}_i)_\sigma \exp(-z_i) [\gamma \exp(-z_i) - 1] (1 - h_i)^{-1} + \\
&+ \sum_{i \in C} \gamma \exp(-2z_i) h_i^2 (\dot{z}_i)_\sigma (1 - h_i)^{-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\gamma\beta} &= \sum_{i \in F} \left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] + \\
&+ \sum_{i \in C} \left\{ \frac{\left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} + \right. \\
&+ \frac{\exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]^2 \left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \gamma \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} \times \\
&\times \frac{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} - \frac{\exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]^2 \left( \frac{x_{ij}}{\sigma} \right)}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} \times \\
&\times \left. \frac{\gamma \left[ \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} \right\} \\
&= \sum_{i \in F} \exp(-z_i) \left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) + \sum_{i \in C} \left[ h_i \left( \frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \exp(-z_i) + h_i \left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \exp(-2z_i) \gamma \right] (1 - h_i)^{-1} \\
&+ \sum_{i \in C} \gamma \left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \exp(-2z_i) h_i^2 (1 - h_i)^{-2} \\
&= \sum_{i \in F} \exp(-z_i) (z_i)_{\beta_j} + \sum_{i \in C} h_i \exp(-z_i) (z_i)_{\beta_j} (\gamma \exp(-z_i) - 1) (1 - h_i)^{-1} + \\
&+ \sum_{i \in C} \gamma (z_i)_{\beta_j} \exp(-2z_i) h_i^2 (1 - h_i)^{-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\sigma\sigma} &= \frac{r}{\sigma^2} - \sum_{i \in F} \left[ 2 \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma^3} \right) \right] - \gamma \sum_{i=1}^n \left[ -2 \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma^3} \right) \right] \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] - \\
&- \gamma \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma^2} \right)^2 \exp \left[ \left( -\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] + \\
&\sum_{i \in C} \left\{ \frac{\left( -\frac{2(y_i - x_i^T \beta)}{\sigma^3} \right) \gamma \exp \left[ \left( -\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} + \right. \\
&+ \gamma \frac{\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma^2} \right)^2 \exp \left[ \left( -\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} \left. \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i \in C} \frac{\left(\frac{(y_i - x_i^T \beta)}{\sigma^2}\right)^2 \gamma^2 \left[\exp\left[-\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right]\right]^2 \exp\left\{-\gamma \exp\left[-\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right]\right\}}{\left[1 - \exp\left\{-\gamma \exp\left[-\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right]\right\}\right]^2} \\
 = & \frac{r}{\sigma^2} - \sum_{i \in F} \left(2 \frac{z_i}{\sigma^2}\right) - \gamma \sum_{i \in F} \left(2 \frac{z_i}{\sigma^3}\right) \exp(-z_i) - \gamma \sum_{i \in C} \left(\frac{z_i}{\sigma}\right)^2 \exp(-z_i) + \\
 & \sum_{i \in C} \left\{ \frac{\left(-\frac{2z_i}{\sigma^2}\right) \gamma \exp(-z_i) \exp[-\gamma \exp(-z_i)]}{\{1 - \exp[-\gamma \exp(-z_i)]\}^2} + \gamma \frac{\left(\frac{z_i}{\sigma}\right)^2 \exp(-z_i) \exp[-\gamma \exp(-z_i)]}{\{1 - \exp[-\gamma \exp(-z_i)]\}^2} \right\} - \\
 & - \sum_{i \in C} \frac{\left(\frac{z_i}{\sigma}\right)^2 \gamma^2 \exp(-2z_i) \exp[-\gamma \exp(-z_i)]}{\{1 - \exp[-\gamma \exp(-z_i)]\}^2} \\
 = & \frac{r}{\sigma^2} + \sum_{i \in F} \{-\ddot{z}_i\}_{\sigma\sigma} + \gamma \exp(-z_i) [\ddot{z}_i]_{\sigma\sigma} - \sum_{i \in C} h_i \exp(-z_i) \times \\
 & \times \{[\dot{z}_i]_{\sigma}^2 [\gamma \exp(-z_i) - 1] + \ddot{z}_i\}_{\sigma\sigma} (1 - h_i)^{-1} - \\
 & - \gamma^2 \sum_{i \in C} h_i^2 \exp(-2z_i) [\dot{z}_i]_{\sigma}^2 (1 - h_i)^{-2},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
L_{\sigma\beta_j} &= -\sum_{i \in F} \left( \frac{x_{ij}}{\sigma^2} \right) + \gamma \sum_{i \in F} \left\{ \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma^2} \right) \right] \left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{x_{ij}}{\sigma^2} \right) \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} - \sum_{i \in C} \left\{ \frac{\gamma \left( \frac{x_{ij}}{\sigma^2} \right) \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]}{1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}} \right\} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} + \frac{\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]}{1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}} \times \\
&\quad \times \left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} - \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \times \\
&\quad \times \left. \frac{\gamma^2 \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}} \right\} - \\
&\quad - \sum_{i \in C} \frac{\gamma^2 \exp \left[ -2 \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \left[ \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2}{1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}^2 \\
&\quad \times \left[ -\left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \left( -\frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \\
&= -\sum_{i \in F} \left( \frac{x_{ij}}{\sigma^2} \right) + \gamma \sum_{i \in F} \left[ -\exp(z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\sigma} + \exp(-z_i) \left( \frac{x_{ij}}{\sigma^2} \right) \right] - \\
&\quad - \sum_{i \in F} \frac{\gamma \exp(-z_i) (\ddot{z}_i)_{\beta_j \sigma} h_i - \exp(-z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\sigma} h_i + (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\sigma} \gamma^2 [\exp(-z_i)]^2 h_i}{1 - h_i} - \\
&\quad - \gamma^2 \sum_{i \in C} \exp(-2z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\sigma} h_i^2 (1 - h_i)^{-2} \\
&= -\sum_{i \in F} (\ddot{z}_i)_{\beta_j \sigma} + \gamma \sum_{i \in F} \left[ -\exp(z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\sigma} + \exp(-z_i) (\ddot{z}_i)_{\beta_j \sigma} \right] - \\
&\quad \gamma \sum_{i \in C} h_i \exp(z_i) \left\{ (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\sigma} [\gamma \exp(-z_i) - 1] + (\ddot{z}_i)_{\beta_j \sigma} \right\} (1 - h_i)^{-1} - \\
&\quad - \gamma^2 \sum_{i \in C} \exp(-2z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\sigma} h_i^2 (1 - h_i)^{-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\beta_j \beta_s} &= -\gamma \sum_{i \in F} \left( \frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \left( \frac{x_{is}}{\sigma} \right) \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] + \\
&+ \gamma \sum_{i \in C} \left[ \frac{\left( \frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \left( \frac{x_{is}}{\sigma} \right) \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} + \right. \\
&+ \left. \gamma \frac{\left( \frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \left( \frac{x_{is}}{\sigma} \right) \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}^2 \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}}{1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}} \right] + \\
&+ \gamma^2 \sum_{i \in C} \left[ \frac{\left( \frac{x_{ij}}{\sigma} \right) \left( \frac{x_{is}}{\sigma} \right) \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}^2 \left[ \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2}{\left[ 1 - \exp \left\{ -\gamma \exp \left[ - \left( \frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\} \right]^2} \right] \\
&= \sum_{i \in F} [-\gamma \exp(-z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\beta_s}] - \gamma \sum_{i \in C} h_i \exp(-z_i) \{ (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\beta_s} [\gamma \exp(-z_i) - 1] \} (1 - h_i)^{-1} - \\
&- \gamma^2 \sum_{i \in C} \exp(-2z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\beta_s} h_i^2 (1 - h_i)^{-2},
\end{aligned}$$

em que  $h_i = \exp[-\gamma \exp(-z_i)]$ ,  $(\dot{z}_i)_\sigma = -z_i/\sigma$ ,  $(\dot{z}_i)_{\beta_j} = -x_{ij}/\sigma$ ,  $(\dot{z}_i)_{\beta_s} = -x_{is}/\sigma$ ,  $(\ddot{z}_i)_{\sigma\sigma} = 2z_i/\sigma^2$ ,  $(\ddot{z}_i)_{\beta_j\sigma} = x_{ij}/\sigma^2$  e  $z_i = (y_i - x_i^T \beta)/\sigma$ .



## Apêndice D

### Distribuição Log-Fréchet Generalizada

Os elementos da matriz de informação observada  $J(\dot{\theta})$  para a distribuição Log-Fréchet Generalizada com parâmetros  $(\phi, \alpha, \mu, b)$  são

$$\begin{aligned}
L_{\phi\phi} = & -\frac{r}{\phi^2} + \sum_{i \in F} \left( -\frac{2z_i}{\phi^2} \right) \exp(-z_i) - \sum_{i \in F} \left( \frac{z_i}{\phi^2} \right)^2 \exp(-z_i) + \\
& + (\alpha - 1) \sum_{i \in F} \left\{ \left[ \left( -\frac{2z_i}{\phi^2} \right) \exp(-z_i) + \left( \frac{z_i}{\phi} \right)^2 \exp(-z_i) \right] \times \right. \\
& \times \left[ \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^{-1} - \left( \frac{z_i}{\phi} \right)^2 [\exp(-z_i)]^2 \{ \exp[-\exp(-z_i)] \}^2 \right] \times \\
& \times \left. \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^2 + \left( \frac{z_i}{\phi} \right)^2 [\exp(-z_i)]^2 \exp[-\exp(-z_i)] \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\} \right\} + \\
& (b - 1) \sum_{i \in F} \{ \alpha(\alpha - 1) \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^{\alpha-2} [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^\alpha] + \\
& + \alpha^2 \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^{2(\alpha-1)} \left( \frac{z_i}{\phi} \right) \exp(-z_i) \exp[-\exp(-z_i)] \} \times \\
& \times [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{-2} \left( \frac{z_i}{\phi} \right) \exp(-z_i) \exp[-\exp(-z_i)] + \\
& + \frac{\alpha \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^{\alpha-1}}{1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}} \left\{ \left( -\frac{2z_i}{\phi^2} \right) \exp(-z_i) + \left( \frac{z_i}{\phi} \right)^2 \exp(-z_i) \exp[-\exp(-z_i)] - \right. \\
& - \left. \left( \frac{z_i}{\phi} \right)^2 [\exp(-z_i)]^2 \exp[-\exp(-z_i)] \right\} - \sum_{i \in C} \{ \alpha^2 b(b - 1) [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{b-1} \times \\
& \times \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^{2(\alpha-1)} \left( \frac{z_i}{\phi} \right) \exp(-z_i) \exp[-\exp(-z_i)] + \\
& + \alpha b(\alpha - 1) [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{b-1} \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^{\alpha-2} \left( \frac{z_i}{\phi} \right) \times \\
& \times \exp(-z_i) \exp[-\exp(-z_i)] \} \{1 - [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^a\}^{b-1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i \in C} [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{2(b-1)} \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^{2(a-1)} \left(\frac{z_i}{\phi}\right)^2 \times \\
 & \times \exp(-z_i) \exp[-\exp(-z_i)] \{1 - [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{a^b}\}^{-2} + \\
 & \sum_{i \in C} \alpha b [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{a^{b-1}} \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}^{a-1} \times \\
 & \times \left\{ \left(-\frac{2z_i}{\phi^2}\right) \exp(-z_i) + \left(\frac{z_i}{\phi}\right)^2 \exp(-z_i) \right\} \\
 = & -\frac{r}{\phi^2} + \sum_{i \in F} (\ddot{z}_i)_{\phi\phi} - \sum_{i \in F} \exp(-z_i) \{(\ddot{z}_i)_{\phi\phi} + [(\dot{z}_i)_{\phi}]^2\} + \\
 & + (\alpha - 1) \sum_{i \in F} \{(1 - h_i)^{-2} \exp(-z_i) \{(\ddot{z}_i)_{\phi\phi} + [(\dot{z}_i)_{\phi}]^2\} \{(1 - h_i)^{-1} - [(\dot{z}_i)_{\phi}]^2 [\exp(-z_i)]^2 h_i^2\} + \\
 & + (\alpha - 1) (\dot{z}_i)_{\phi}^2 [\exp(-z_i)]^2 h_i (1 - h_i)\} + (b - 1) \sum_{i \in F} \{\alpha (1 - h_i)^{\alpha-1} [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^{-2} \times \\
 & \times [\exp(-z_i)]^2 h_i (1 - h_i) [(\alpha - 1) [1 - (1 - h_i)^{\alpha}] + a (1 - h_i)^{\alpha} (\dot{z}_i)_{\phi} \exp(-z_i) h_i] + \\
 & + \alpha (1 - h_i)^{\alpha-1} [1 - (1 - h_i)^{\alpha}] (\ddot{z}_i)_{\phi\phi} \exp(-z_i)\} - \\
 & - \sum_{i \in C} \alpha b [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^{b-1} (1 - h_i)^{\alpha-2} (\dot{z}_i)_{\phi} \exp(-z_i) h_i \{\alpha (b - 1) (1 - h_i)^{\alpha} + (\alpha - 1)\} \times \\
 & \times \{1 - [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^b\}^{-1} - \sum_{i \in C} \alpha b (1 - h_i)^{\alpha-1} [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^{b-1} \exp(-z_i) \{(1 - h_i)^{\alpha-1} \times \\
 & \times [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^{b-1} \exp(-z_i) [(\dot{z}_i)_{\phi}]^2 h_i \{1 - [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^{b-1}\}^{-2} + [(\ddot{z}_i)_{\phi\phi} + (\dot{z}_i)_{\phi}]\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha\alpha} = & -\frac{r}{\alpha^2} - (b - 1) \sum_{i \in F} \frac{[\log(1 - h_i)]^2 (1 - h_i)^{\alpha}}{1 - (1 - h_i)^{\alpha}} \left\{1 - \frac{(1 - h_i)^{\alpha}}{1 - (1 - h_i)^{\alpha}}\right\} + \\
 & \sum_{i \in C} \frac{[\log(1 - h_i)]^2 (1 - h_i)^{\alpha}}{1 - [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^b} \{b [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^{b-1} - (1 - h_i)^{\alpha}\} - \\
 & - \sum_{i \in C} \frac{[b^2 \log(1 - h_1)]^2 (1 - h_i)^{\alpha-1} [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^{2(b-1)}}{\{1 - [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^b\}^2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{bb} = & \frac{r}{b^2} + \sum_{i \in C} \left\{ \log[1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^a \right\}^2 \left\{ \frac{[1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{a^b}}{1 - [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{a^b}} \right. \\
 & \left. + \frac{[1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{2b}}{\{1 - [1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^{a^b}\}^2} \right\} \\
 = & \frac{r}{b^2} + \sum_{i \in C} \frac{[1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^b \{\log[1 - \{1 - \exp[-\exp(-z_i)]\}]^a\}^2}{1 - [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^b} \left\{ 1 + \frac{[1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^b}{1 - [1 - (1 - h_i)^{\alpha}]^b} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\beta_j \beta_s} &= - \sum_{i \in F} (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\beta_s} \exp(-z_i) + (\alpha - 1) \sum_{i \in F} \frac{(\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\beta_s} \exp(-z_i)}{1 - (1 - h_i)^\alpha} \times \\
&\times \left\{ 1 - \exp(-z_i) \left( \frac{h_i}{1 - h_i} \right) \right\} - \alpha (b - 1) \sum_{i \in F} (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\beta_s} \exp(-z_i) (1 - h_i)^{\alpha-1} h_i \times \\
&\times \left\{ \frac{\exp(-z_i) h_i}{1 - h_i} \left[ (\alpha - 1) + \frac{\alpha (1 - h_i)^\alpha}{1 - (1 - h_i)^\alpha} \right] - \exp(z_i) \right\} + \\
&+ \sum_{i \in C} \frac{\alpha b [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1} (1 - h_i)^{\alpha-1} h_i (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\beta_s} \exp(-z_i)}{[1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \times \\
&\times \left\{ 1 + \exp(-z_i) [(\alpha - 1) h_i (1 - h_i)^{-1}] - 1 \right\} - \sum_{i \in C} \frac{\alpha^2 b [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1}}{[1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \times \\
&\times (1 - h_i)^{2(\alpha-1)} h_i^2 (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_{\beta_s} \exp(-z_i) \left\{ 1 - \frac{b [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1}}{1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\alpha \phi} &= \sum_{i \in F} (\dot{z}_i)_\phi h_i (1 - h_i)^{-1} - (b - 1) \sum_{i \in F} \frac{(\dot{z}_i)_\phi \exp(-z_i) h_i (1 - h_i)^{\alpha-1}}{1 - (1 - h_i)^\alpha} \times \\
&\times \left\{ 1 + \alpha \log(1 - h_i) \left[ 1 - \frac{(1 - h_i)^\alpha}{1 - (1 - h_i)^\alpha} \right] \right\} + \\
&+ \sum_{i \in F} \frac{b \exp(-z_i) (\dot{z}_i)_\phi h_i (1 - h_i)^{\alpha-1} [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1}}{1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \times \\
&\left\{ 1 + \alpha \log(1 - h_i) [1 + (b - 1)(1 - h_i)^\alpha [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{-1}] - \right. \\
&\left. - \frac{\alpha b (1 - h_i)^\alpha [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1}}{1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\alpha b} &= - \sum_{i \in F} \frac{\log(1 - h_i) (1 - h_i)^\alpha}{1 - (1 - h_i)^\alpha} + \sum_{i \in C} \log(1 - h_i) \left\{ (1 - h_i)^\alpha [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1} - \right. \\
&- b (1 - h_i)^\alpha \log(1 - h_i) [1 - \log(1 - h_i)]^{b-1} \left. \right\} \left\{ 1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b \right\}^{-1} + \\
&+ \sum_{i \in C} b [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{2b-1} \log[1 - (1 - h_i)] [1 - \log(1 - h_i)]^{b-1} \left\{ 1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b \right\}^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta_j} &= \sum_{i \in F} (\dot{z}_i)_{\beta_j} h_i (1 - h_i)^{-1} - (b-1) \sum_{i \in F} \frac{(\dot{z}_i)_{\beta_j} \exp(-z_i) h_i (1 - h_i)^{\alpha-1}}{1 - (1 - h_i)^\alpha} \times \\
&\quad \times \{1 + \alpha \log(1 - h_i) [1 - 2(1 - h_i)^\alpha]\} + \\
&\quad + \sum_{i \in F} \frac{b \exp(-z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} h_i (1 - h_i)^{\alpha-1} [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1}}{1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \times \\
&\quad \left\{ 1 + \alpha \log(1 - h_i) [1 + (b-1)(1 - h_i)^\alpha [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{-1}] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha b (1 - h_i)^\alpha [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1}}{1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{b\phi} &= -\alpha \sum_{i \in F} \frac{(\dot{z}_i)_\phi \exp(z_i) h_i (1 - h_i)^{\alpha-1}}{(1 - h_i)^\alpha} - \sum_{i \in C} (\dot{z}_i)_\phi \exp(z_i) h_i (1 - h_i)^{\alpha-1} [(1 - h_i)^\alpha]^{b-1} \times \\
&\quad \left\{ \alpha b \log[1 - (1 - h_i)^\alpha] + \alpha + \frac{\log[1 - (1 - h_i)^\alpha] [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b}{1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{b\beta_j} &= -\alpha \sum_{i \in F} \exp(-z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} h_i (1 - h_i)^{\alpha-1} [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{-1} - \\
&\quad - \sum_{i \in C} \frac{\exp(-z_i) (\dot{z}_i)_{\beta_j} h_i (1 - h_i)^{\alpha-1} [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1}}{1 - (1 - h_i)^\alpha} \times \\
&\quad \times \left\{ \alpha b \log[1 - (1 - h_i)^\alpha] + \alpha + \frac{\log[1 - (1 - h_i)^\alpha] [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b}{1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\beta_j\phi} &= \sum_{i \in F} (\ddot{z}_i)_{\beta_j\phi} - \sum_{i \in F} \exp(-z_i) [(\ddot{z}_i)_{\beta_j\phi} + (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_\phi] + \\
&\quad + (\alpha - 1) \sum_{i \in F} \frac{\exp(z_i) h_i}{1 - h_i} \left\{ (\ddot{z}_i)_{\beta_j\phi} + (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_\phi \left[ 1 - \exp(-z_i) - \frac{\exp(z_i) h_i}{1 - h_i} \right] \right\} - \\
&\quad - (b-1) \sum_{i \in F} \frac{\alpha \exp(z_i) h_i (1 - h_i)^{\alpha-1}}{1 - (1 - h_i)^\alpha} \left\{ (\ddot{z}_i)_{\beta_j\phi} + (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_\phi [1 + \right. \\
&\quad \left. + (\alpha - 1)(1 - h_i)^{-1} \exp(z_i) h_i - \exp(z_i) + \frac{\alpha(1 - h_i)^{\alpha-1} h_i \exp(z_i)}{1 - (1 - h_i)^\alpha} \right\} + \\
&\quad \sum_{i \in F} \frac{\alpha \exp(z_i) h_i (1 - h_i)^{\alpha-1} [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1}}{1 - [1 - (1 - h_i)^\alpha]^b} \left\{ (\ddot{z}_i)_{\beta_j\phi} + (\dot{z}_i)_{\beta_j} (\dot{z}_i)_\phi [1 + \right. \\
&\quad \left. - \alpha(1 - h_i)^{\alpha-1} \exp(z_i) h_i + (\alpha - 1)(1 - h_i)^{-1} \exp(z_i) h_i - \exp(-z_i) - \right. \\
&\quad \left. - \alpha b (1 - h_i)^{\alpha-1} \exp(z_i) h_i [1 - (1 - h_i)^\alpha]^{b-1} \right\},
\end{aligned}$$

em que  $h_i = \exp[-\gamma \exp(-z_i)]$ ,  $(\dot{z}_i)_\phi = z_i/\phi$ ,  $(\dot{z}_i)_{\beta_j} = x_{ij}/\phi$ ,  $(\dot{z}_i)_{\beta_s} = x_{is}/\phi$ ,  $(\ddot{z}_i)_{\phi\phi} = -2z_i/\phi^2$ ,  $(\ddot{z}_i)_{\beta_j\phi} = -x_{ij}/\phi^2$  e  $z_i = (y_i - x_i^T \beta)/\phi$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] Arul, A.J., Kumar, C.S., Marimuthu, S. and Singh, O.P. (2003). *The power law character of off-side power failures*. Ann. Nuclear Energy, **30**, 1401-1408.
- [2] Aarts, R. M. (2000). *Lauricella functions*. From MathWorld, A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. (<http://mathworld.wolfram.com/LauricellaFunctions.html>).
- [3] Akinsete, A.; Famoye, F.; Lee, C. (2008). *The beta-Pareto distribution*. Statistics. Statistics, **42**, 547-563.
- [4] Barreto-Souza, W., Cordeiro, G.M. and Simas, A. (2011). *Some Results for Beta Frechet Distribution*. Communications in Statistics. Theory and Methods , **40**, 798-811.
- [5] Birnbaum, Z.W.; Saunders, S.C. (1969). *Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue*. Journal of Applied Probability , **6**, 328-347.
- [6] Chaudhry, M. A.; Zubair, S. M. (2002) . *On a Class of Incomplete Gamma Functions with Applications*. Chapman and Hall, Boca Raton, Florida.
- [7] Cooray, K.; Ananda, M. M. A. (2008). *A generalization of the half-normal distribution with applications to lifetime data*. Communications in Statistics - Theory and Methods , **37**, 1323-1337.
- [8] Cordeiro G. M. and de Castro, M. (2011). *A new family of generalized distributions*. Journal of Statistical Computation and Simulation, **81**, 883-898.
- [9] Cordeiro, G. M. ; Ortega, E. M. M. ; CUNHA, D. C. C. (2013). *The Exponentiated Generalized Class of Distributions*. Journal of Data Science (Online), **11**, 777-803.

- [10] Cordeiro, G.M., Nadarajah, S. and Ortega, E.M.M. (2011). *The Kumaraswamy Gumbel distribution*. Statistical Methods and Applications, **21**, 139-168.
- [11] Cribari-Neto, F.; Zarkos, S. G. (1999). *Econometric and statistical computing using Ox*. Computational Economics, **21**, 277-295.
- [12] Doornik, J. A. (2007). *A new version of OxMPI is available for downloading*. Details are in the included documentation, <http://www.doornik.com>.
- [13] Eugene, N., Lee, C. and Famoye, F. (2002). *Beta-normal distribution and its applications*. Communications in Statistics: Theory and Methods, **31**, 497-512.
- [14] Exton, H. (1978). *Handbook of Hypergeometric Integrals: Theory, Applications, Tables, Computer Programs*. Halsted Press, New York.
- [15] Greenwood, JA, Landwehr, JM, Matalas, NC, Wallis, JR (1979). *"Probability Weighted Moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressed in inverse form"*. Water Resources Research, **15**, 1049-1054.
- [16] Gupta, R. C., Gupta, R. D., and Gupta, P. L. (1998). *Modeling failure time data by Lehmann alternatives*. Communications in Statistics, Theory and Methods, **27**, 887-904.
- [17] Gupta, R. D.; Kundu, D. (1999). *Generalized exponential distributions*. Australian and New Zealand Journal of Statistics, **41**, 173-188.
- [18] Gupta, R. D.; Kundu, D. (2001). *Exponentiated exponential distribution: an alternative to gamma and Weibull distributions*. Biometrical Journal, **43**, 117-130.
- [19] Gupta, R. D.; Kundu, D. (2002). *Generalized exponential distribution: Statistical inferences*. Journal of Statistical Theory and Applications, **1**, 101-118.
- [20] Guess, F.; Proschan, F. (1985). *Mean residual life: theory and application*. In Handbook of Statistics, Volume 7, Quality Control and Reliability (P. R. Krishnaiah, ed.).
- [21] Gusmão, F. R. S. ; Ortega, E. M. M. ; Cordeiro, G. M. (2011). *The generalized inverse Weibull distribution*. Statistical Papers (1988), **52**, 591-619.

- [22] Ihaka, R.; Gentleman, R. (1996). *R: A language for data analysis and graphics*. Journal of Computational and Graphical Statistics, **5**, 299–314.
- [23] Harlow, D.G. (2002). *Applications of the Fréchet distribution function*. Inter. J. Mat. Prod. Tech., **17**, 482-495.
- [24] Hosking, J.R.M (1990). *L-moments: analysis and estimation of distribution using linear combinations of order statistics*. J.R.Stat Soc. B, **52**, 105-124.
- [25] Kakde, C. S.; Shirke, D. T. (2006). *On exponentiated log-normal distribution*. International Journal of Agricultural and Statistical Sciences, **2**, 319-326.
- [26] Kotz, S.; Nadarajah, S. (2000). *Extreme Value Distributions: Theory and Applications*. Imperial College Press.
- [27] Lehmann, E. L. (1953). *The power of rank tests*. The Annals of Mathematical Statistics, **24**, 23–43.
- [28] Mathai, A. M. (1993). *Hypergeometric Functions of Several Matrix Arguments: A Preliminary Report*. Centre for Mathematical Sciences, Trivandrum.
- [29] Mudholkar, G. S.; Srivastava, D. K. (1993). *Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data*. IEEE Transactions on Reliability, **42**, 299-302.
- [30] Mudholkar, G. S.; Srivastava, D. K.; Kollia, G. D. (1996). *A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data*. Journal of American Statistical Association, **91**, 1575-1583.
- [31] McDonald, J.B. (1984). *Some generalized functions for the size distribution of income*. Econometrica, **52**, 647-663.
- [32] Nadarajah S. (2005). *A generalized normal distribution*. Journal of Applied Statistics, **32**, 685–694.
- [33] Nadarajah S. (2006). *The exponentiated Gumbel distribution with climate application*. Environmetrics, **17**, 13-23.

- [34] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2003). *The exponentiated Fréchet distribution*. InterStat. Available online at <http://interstat.statjournals.net/YEAR/2003/abstracts/0312001.php>.
- [35] Nadarajah, S.; Kotz, S. (2004). *The beta Gumbel distribution*. Mathematical Problems in engineering, **4**, 323–332.
- [36] Nadarajah, S.; Kotz, S. (2006). *The Exponentiated Type Distributions*. Acta Applicandae Mathematicae, **92**, 97–111.
- [37] Nadarajah, S.; Gupta, A. K. (2004). *The beta Fréchet distribution*. Far East Journal of Theoretical Statistics, **14**, 15-24.
- [38] Nadarajah, S.; Gupta, A. K. (2007). *The exponentiated gamma distribution with application to drought data*. Calcutta Statistical Association Bulletin, **59**, 29-54.
- [39] Paranaíba, P.F.; Ortega, E.M.M.; Cordeiro, G.M.; Pascoa, M.A.R. (2012). *The Kumaraswamy Burr XII distribution: theory and practice*. Journal of Statistical Computation and Simulation, **82**, 1-27.
- [40] Pascoa, A.R.M., Ortega, E.M.M. and Cordeiro, G.M. (2011). *The Kumaraswamy generalized gamma distribution with application in survival analysis*. Statistical Methodology, **8**, 411-433.
- [41] Prudnikov, A. P.; Brychkov, Y. A.; Marichev, O. I. (1986). *Integrals and Series (vol. 1-3)*. Breach Science, Amsterdam, Netherlands.
- [42] Saulo, H., Le ao, J. and Bourguignon, M. (2012). *The Kumaraswamy Birnbaum-Saunders Distribution*. Journal of Statistical Theory and Practice, DOI:10.1080/15598608.2012.698212.
- [43] Wagner, N. (2003). *Estimating financial risk under time-varying extremal return behavior*. OR Spectrum, **25**, 317-328.