Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a Existência e Decaimento Uniforme de uma Equação Hiperbólica com Condições de Fronteira Não-Linear

por

Emanuela Régia de Sousa Coelho †

sob orientação do

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Sobre a Existência e Decaimento Uniforme de uma Equação Hiperbólica com Condições de Fronteira Não-Linear

por

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda - UEPB

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2014

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a meus pais e meus irmãos que estiveram sempre comigo, incondicionalmente, em todos os momentos dessa caminhada.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFCG tanto pelo conhecimento compartilhado em sala de aula, quanto pelo amparo fora dela. Em especial, agradeço ao professor Jeferson Abrantes por nos acompanhar, em seminários, durante todo o ano de 2013 sem que essa fosse sua obrigação.

Agradeço, também, aos funcionários do DME-UFCG pela disponibilidade sempre que solicitada. Especialmente, agradeço a Andrezza(secretária) e Aninha(faxineira).

Agradeço a meus colegas de curso, todos que aqui passaram enquanto eu estava na luta. Cada um se tornou especial a sua forma e, por isso, eles são inesquecíveis. Em particular, gostaria de agradecer a Claudemir(Cacau), Brito, Alex, Arlandson, Débora, Fábio, Fabrício, Michel, Jogli, Carlos e Marcos (Pajé), alguns destes são, hoje, mais que irmãos e fizeram com que essa caminhada fosse menos árdua.

Agradeço a meus amigos extra-UFCG que se fizeram presentes sempre que precisei de um ombro amigo, bem como, sempre que quis celebrar. Entre estes, destaco: Helry, André, Dany, Matheus, Lincoln, Eliene, Manu e Jaqueline.

Agradeço a toda minha família: meus tios, primos e avós. Agradeço pelo apoio incondicional e pela força em momentos difíceis.

Agradeço aos professores Manuel Milla Miranda (M^3) e Severino Horácio por aceitarem avaliar esse trabalho.

Por fim, agradeço ao professor Aldo Trajano Lourêdo pelos três anos e meio de orientação e pelo exemplo de profissional e de ser humano que é. Sem ele, este trabalho não seria possível.

A todos, meu obrigada!

Dedicatória

À Vovó Chiquinha (In Memoriam).

Resumo

Neste trabalho mostramos a existência de solução, bem como, o comportamento assintótico do funcional energia associado ao problema

$$\begin{cases} y'' - \Delta y + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial y'}{\partial x_j} = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty) \\ y = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) + g(y') = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ y(x,0) = y^0; \ \ y'(x,0) = y^1 \ \text{ em } \ \Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e b_j, f e g são, respectivamente, os coeficientes e funções não lineares satisfazendo algumas propriedades gerais.

Palavras-chave: Método de Faedo-Galerkin, Decaimento uniforme, Condições de fronteira não-lineares.

Abstract

In this work we prove the existence of solution, as well as, the asymptotic behavior of the energy functional associated to the problem

$$\begin{cases} y'' - \Delta y + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial y'}{\partial x_j} = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty) \\ y = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) + g(y') = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ y(x,0) = y^0; \ \ y'(x,0) = y^1 \ \text{ em } \ \Omega \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ and b_j, f and g are, respectively, the nonlinear functions and coefficients satisfying some general properties.

Keywords: Faedo-Galerkin's method, Uniform decay, Non-linear boundary conditions.

Conteúdo

Introdução 6

1 Resultados Preliminares **9**

1.1 Noções de Derivada Fraca 9

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$ 12

1.3 Espaços de Sobolev 14

1.4 Espaços $L^p(0, T; X)$ 18

1.5 Teoria do Traço 24

1.5.1 Traço em $L^2(0, T; H^m(\Omega))$ 27

1.5.2 Traço em $H^{-1}(0, T; H^m(\Omega))$ 27

1.6 Resultados Auxiliares 28

2 Existência e Unicidade da Solução **33**

2.1 Existência de Solução 36

2.1.1 Estimativas a Priori 39

2.1.2 Análise dos termos não lineares 53

2.1.3 Passagem ao Limite 56

2.2 Condições Iniciais 59

2.3 Unicidade 61

3 Existência da Solução Fraca **64**

3.1 Existência de Solução 65

3.1.1 Passagem ao Limite 68

3.2 Condições Iniciais 71

4 Taxas de Decaimento do Funcional Energia **74**

4.1 Decaimento Uniforme da Solução Forte 75

4.2 Comportamento Assintótico da Solução Fraca 87

A O Teorema de Carathéodory **89**

A.1 Existência de solução para o problema aproximado (2.13) 90

Bibliografia **97**

Introdução

Este trabalho aborda de forma didática o artigo intitulado: *On the Existence and the Uniform Decay of a Hyperbolic Equation with Non-Linear Boundary Conditions* dos autores Juan Soriano, Luiz Adauto Medeiros, Marcelo Cavalcanti e Valéria Domingos Cavalcanti [6] que trata da existência de solução, bem como, do comportamento assintótico do funcional energia associado ao problema

$$(*) \qquad \begin{cases} y'' - \Delta y + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial y'}{\partial x_j} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \\ y = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) + g(y') = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ y(x,0) = y^0; \;\; y'(x,0) = y^1 \text{ em } \Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e b_j, f e g são, respectivamente, os coeficientes e funções não lineares satisfazendo algumas propriedades gerais.

Nos últimos anos, progressos significativos foram feitos acerca da estabilização, dissipação e controlabilidade de sistemas distribuídos de evolução. Foram desenvolvidas novas técnicas que permitem estabilizar um sistema por meio de sua fronteira, bem como, controlá-lo a partir de uma condição inicial e um estado final dado. Esta nova tendência de estabilização ou controle de um sistema através da fronteira recebeu um forte impulso após a introdução do *Hilbert Uniqueness Method* (HUM), desenvolvido por Lions [19]. Cabe salientar que, na época em que o artigo base deste trabalho foi publicado, não havia muita literatura sobre a existência e o comportamento assintótico de equações de evolução com condições de contorno não-lineares, mas vale ressaltar as seguintes obras: Chen e Wong [7], Lagnese e Leugering [15], Zuazua [34], You [33], Cipollati, Machtyngier e San Pedro Siqueira [8], Lasiecka e Tataru [17], e Favini, Horn, Lasiecka e Tataru [11], entre outros. Além destes, utilizando uma base especial introduzida por Milla Miranda e L. A. Medeiros em [27], Araruna e Maciel [1] mostraram a existência de solução e o decaimento da energia da equação semilinear com condição de fronteira linear e, ainda, Louredo e Milla Miranda [21] e Vitillare [32] mostraram esses resultados para o problema com condições de fronteira não linear e bem gerais.

O principal objetivo desse texto é mostrar a existência e unicidade de solução forte e a existência de solução fraca para o problema $(*)$ e ainda provar que a energia associada a essas soluções decai para zero quando t cresce, sob as hipóteses de uma fronteira não linear e um amortecimento implícito vindo dos coeficientes b_j.

Para tratar da existência de soluções usaremos o Método de Faedo-Galerkin, o qual foi desenvolvido pelo matemático italiano Sandro Faedo[10], em 1949, como um aprimoramento ao método criado, trinta anos antes, pelo matemático e engenheiro, nascido em Polotsk[1], Boris Galerkin[12]. Este método foi idealizado, exatamente, para encontrar soluções para problemas de evolução e consiste em aproximar uma solução para o problema estudado a partir de soluções de problemas aproximados, porém, em dimensão finita. Entretanto, trabalhando com esse método nós encontramos dificuldades técnicas para estimar o valor de alguns termos que dependem dos dados iniciais e aparecem no decorrer do desenvolvimento, então, para contornar esse déficit trabalharemos com um problema equivalente a $(*)$ mas, com dados iniciais nulos que será obtido através de uma mudança de variáveis. Esse procedimento já havia sido adotado pelos mesmos autores Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Soriano em [5] e por Lar'kin e Medeiros em [16].

No que diz respeito ao estudo do comportamento assintótico do funcional energia utilizaremos um método de perturbação da energia, desenvolvido por Vilmos Komornik, matemático húngaro, e Enrique Zuazua, matemático espanhol, em 1990 [13] e construiremos um funcional de Lyapunov adequado, de modo a mostrar que o funcional energia

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |y'(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla y(t)|^2 dx + \int_{\Gamma_0} F(y) d\Gamma$$

decai exponencialmente para zero quando t tende ao infinito.

O desenvolvimento deste trabalho se dará em quatro capítulos os quais estão or-

[1]Atual Bielo-Rússia.

ganizados do seguinte modo: No primeiro capítulo apresentaremos algumas notações e resultados básicos que serão úteis à leitura do texto. O segundo capítulo trata da existência e unicidade da solução forte para o problema $(*)$, que, como dito anteriormente, será feito utilizando o Método de Faedo-Galerkin. Na penúltima parte do trabalho, trataremos do estudo da solução fraca do problema $(*)$ por meio de argumentos de densidade e dos resultados obtidos para a solução forte e por fim, o último capítulo apresentará as taxas de decaimento uniforme do funcional energia.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

O capítulo que se inicia tem por objetivo apresentar os principais resultados que são necessários ao desenvolvimento deste trabalho, bem como fixar as notações que serão utilizadas nos próximos capítulos.

No que segue, faremos uma breve introdução à teoria dos espaços de funções, cabe salientar que não provaremos os resultados, mas citaremos a referência onde as provas estão feitas.

1.1 Noções de Derivada Fraca

Uma exposição completa do que iremos enunciar nesta seção pode ser encontrada em L.A. Medeiros e M.M. Miranda [24].

Muitos problemas descritos pelas Equações Diferenciais Parciais, possuem como dados iniciais funções que não são regulares o suficiente para possuírem derivadas no sentido clássico. Para tentar sanar essa necessidade, em 1936, S.Sobolev introduziu um novo conceito de derivada que é chamada de Derivada Fraca. Para compreender tal conceito, necessitamos do seguinte:

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é denominada *multi-índice* e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Representamos por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ definimos $D^0 u$ como o operador identidade.

Definição 1.1 *Sejam* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Definimos o suporte de* f*, e denotamos por supp*(f)*, como sendo o fecho em* Ω *do conjunto* $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$*. Se este conjunto for um compacto do* $\mathbb{R}^n$*, então dizemos que* f *possui suporte compacto.*

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto.

Definição 1.2 *Seja* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$*. Uma sequência* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$*, quando existe um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que:*
i) *supp*(φ), *supp*$(\varphi_n) \subset K, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
ii) *Para todo multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, tem-se* $D^\alpha(\varphi_n - \varphi) \to 0$ *uniformemente em* K*.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$*, munido dessa noção de convergência, é chamado de* Espaço das Funções Teste sobre Ω *e é representado por* $\mathcal{D}(\Omega)$*.*

Definição 1.3 *Uma distribuição sobre um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um funcional linear* $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *contínuo no sentido da convergência em* $\mathcal{D}(\Omega)$*, isto é,*
i) $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \forall a, b \in \mathbb{R}$ *e* $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$*;*
ii) *Se* φ_n *converge para* φ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$*, então* $T(\varphi_n)$ *converge para* $T(\varphi)$ *em* $\mathbb{R}$*.*

O espaço das distribuições sobre Ω *é denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Se $T \in \mathcal{D}(\Omega)$, representamos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi\rangle$. Com isso, dizemos que

$$T_n \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando,

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Exemplo 1 (Distribuição) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. O funcional* $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$*, definido por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

é uma distribuição.

Lema 1.1 (Du Bois Raymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova. Para a prova ver [24]. ■

Observação 1.1 *Segue do Lema de Du Bois Raymond que se* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$*, então* $T_u = T_v$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *se, e somente, se* $u = v$*. Desta forma, temos uma correspondência biunívoca entre as distribuições do tipo* T_u *com o espaço* $L^1_{loc}(\Omega)$.

Sejam u, v definidos num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Supondo que u e v possuem derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v se anula sobre Γ, obtemos da fórmula de Green que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)dx.$$

Essa expressão motivou a definição de derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx.$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

A introdução desse conceito de derivada é considerado um marco na evolução das Equações Diferenciais Parciais, mas ainda apresentava um grave defeito: nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada nesse sentido. Daí, com o intuito de sanar esse problema, Laurent Schwartz, em 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual será apresentada a seguir:

Definição 1.4 *Seja* T *uma distribuição sobre* Ω *e* α *um multi-índice. A derivada* $D^\alpha T$ *de ordem* $|\alpha|$ *de* T *é um funcional* $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Além disso, $D^\alpha T$ *é uma distribuição sobre* Ω.

Observação 1.2 *Decorre da definição acima que uma distribuição tem derivadas de todas as ordens.*

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções reais f definidas em Ω cuja p-ésima potência é integrável no sentido de Lebesgue e por $L^\infty(\Omega)$ denotamos o conjuntos das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|_{\mathbb{R}}$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, denotamos o espaço das (classes de) funções reais definidas em Ω, cuja p-ésima potência é integrável à Lebesgue sobre qualquer subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω e por $L^\infty_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em qualquer subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω.

A seguir apresentaremos alguns resultados relacionados aos Espaços $L^p(\Omega)$.

Proposição 1.5 (Desigualdade de Young) *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova. Para a prova ver [23]. ■

Corolário 1.6 (Desigualdade de Young para ε) *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{q(\varepsilon p)^{q/p}} b^q.$$

com $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Prova. Ver [2]. ■

Proposição 1.7 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $f, g \in L^p(\Omega)$, *então*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Prova. Ver [23]. ■

Proposição 1.8 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$, *com* $1 \leq p, q \leq \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Prova. Para a prova ver [23]. ■

Corolário 1.9 (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Sejam* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *funções reais, tais que* $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq p_i$ *para* $i = 1, \ldots, k$, *e ainda,* $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p} \leq 1$. *Então* $u = u_1 u_2 \ldots u_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_p \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} \ldots \|u_k\|_{p_k}.$$

Teorema 1.10 (Teorema de Representação de Riesz) *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\phi \in (L^p(\Omega))'$. *Então existe uma única função* $u \in L^q(\Omega)$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *tal que*

$$\langle \phi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx \qquad \forall v \in L^p(\Omega).$$

Mais ainda,

$$\|u\|_q = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

E, se $p = 1$ *e* $\phi \in (L^1(\Omega))'$, *existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \phi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \qquad \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_\infty = \|\phi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Prova. A prova pode ser encontrada em [2]. ■

Observação 1.3 *Nas condições do Teorema de Representação de Riesz, a aplicação* $\phi \mapsto u$ *é um operador linear isométrico e sobrejetivo, e portanto, podemos identificar* $(L^p(\Omega))'$ *com* $L^q(\Omega)$.

Além destes, valem os seguintes resultados:

- $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$.

- $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$.

Definição 1.11 *Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Seja $i : X \to Y$ a injeção canônica de X em Y, que a cada elemento $x \in X$ fazemos corresponder $i(x) = x$ como um elemento de Y. Dizemos que a* imersão é contínua *quando existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|x\|_X \leq C\|x\|_Y, \ \forall x \in X.$$

onde $\|.\|_X$ e $\|.\|_Y$ denotam as normas de X e Y, respectivamente.

Dizemos que a *imersão* é *compacta* quando a imagem de subespaços limitados de X por i são relativamente compactos em Y.

Denotamos as imersões contínua e compacta de X em Y, respectivamente, por

$$X \hookrightarrow Y \qquad \text{e} \qquad X \overset{c}{\hookrightarrow} Y.$$

Sabendo disso, vale:

- Se Ω é limitado e $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $u \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, sabemos, da observação (1.1) e da definição de derivada distribucional, que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, em [26] podemos encontrar a prova desta afirmação. Isto é o que motivou a definição dos espaços de funções denominados *Espaços de Sobolev*.

Dado um número inteiro $m > 0$, representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, temos que a derivada de u no sentido das distribuições $D^\alpha u$, pertence a $L^p(\Omega)$. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u pondo

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ quando } p = \infty.$$

Observação 1.4 *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Observação 1.5 *Para $p = 2$, representamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, graças a sua estrutura Hilbertiana.*

Proposição 1.12 *O espaço $H^m(\Omega)$ munido do produto interno*

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

é um espaço de Hilbert.

Prova. Para a prova ver [24] . ■

O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Outros espaços importantes, que nos serão bastante úteis, são os espaços $H^s(\Omega)$ com $s \in \mathbb{R}$, os quais serão caracterizados agora.

Consideremos

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^k D^\alpha \varphi(x) = 0, \text{ para quaisquer } k \in \mathbb{N} \text{ e } \alpha \in \mathbb{N}^n\}$$

o espaço das funções rapidamente decrescentes no infinito (ou Espaço de Schwartz), $\mathcal{S}'$ o dual topológico de $\mathcal{S}$ e, para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u que é dada por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy$$

onde, (x,y) denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$, ou seja, $(x,y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Exemplo 2 *Se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi \in \mathcal{S}$.*

De fato, sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto, tal que $supp\varphi \subset K$ e $\sigma > 0$ tal que $K \subset B_\sigma(0)$. Assim, dados $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\|x\| > \sigma$, que

$$\|x\|^k |D^\alpha \varphi(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Conscientes do exposto acima, definimos para $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Observação 1.6 *Se $s \geq 0$, temos que $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

A prova da observação anterior, bem como da próxima proposição podem ser encontradas em [24].

Proposição 1.13 *O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$, munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^s \hat{u}(x)\hat{v}(x)dx$$

é um espaço de Hilbert.

Quando Ω é um aberto limitado e regular de $\mathbb{R}^n$, definimos

$$H^s(\Omega) = \{u|_\Omega; u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

cuja norma é dada por

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; v|_\Omega = u\}.$$

Proposição 1.14 *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$.*

Prova. Para a prova ver [24]. ■

Proposição 1.15 *Quando s é um inteiro as definições de $H^s(\Omega)$ dadas acima e na observação (1.5) são equivalentes.*

Prova. Ver [24]. ■

No que segue listamos algumas propriedades importantes dos Espaços de Sobolev.

Teorema 1.16 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção, digamos $pr_i(\Omega) \subset (a,b)$, onde $pr_i(\Omega)$ denota a projeção de Ω na direção i e (a,b) é um intervalo aberto e limitado de $\mathbb{R}$. Então,*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

A prova deste resultado pode ser encontrada em [24]. Nesta mesma referência podemos encontrar a prova do seguinte corolário.

Corolário 1.17 *Em $H_0^m(\Omega)$, com Ω nas condições do Teorema (1.16), as normas $\|u\|_{H^m(\Omega)}$ e*

$$\|u\|_{H_0^m(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

são equivalentes.

Lema 1.2 (Imersões de Sobolev) *Seja Ω um aberto regular de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$, as imersões abaixo são contínuas.*
i) *Se $m < \dfrac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), q \in \left[1, \dfrac{np}{n-mp}\right)$;*
ii) *Se $m = \dfrac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), q \in [1, \infty)$;*
iii) *Se $m > \dfrac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$,*
onde $C^j(\overline{\Omega})$ é o conjunto das funções contínuas limitadas.

Prova. Para a prova ver [24]. ∎

Teorema 1.18 (Rellich-Kondrachov) *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1, $j \in \mathbb{N}$. Então as imersões a seguir são compactas:*
i) Se $m < \dfrac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-mp}\right)$;
ii) Se $m = \dfrac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$.

Prova. Para a prova ver [24]. ∎

Proposição 1.19 *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1, $j \in \mathbb{N}$. Então vale o seguinte:*
i) *Se Ω é limitado e $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para, $1 \leq \dfrac{np}{n-mp}$;*
ii) *Se Ω é limitado e $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para, $1 \leq \dfrac{np}{n-p} = p^*$*

Prova. Ver [24]. ∎

Observação 1.7 *O número p^* é conhecido como* expoente crítico de Sobolev.

Teorema 1.20 (Fórmula de Green) *Seja Ω um aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então para $1 \leq j \leq n$ temos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx + \int_\Gamma u v \nu^j d\sigma^1$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ denota o vetor unitário normal a Γ.

E, se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v dx.$$

Prova. Para a prova ver [4]. ∎

[1]Aqui, u e v estão identificadas com a imagem da aplicação traço, γ_0, que será apresentada na penúltima seção deste capítulo.

Proposição 1.21 (Regra do Produto) *Consideremos um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Prova. A prova pode ser encontrada em [2]. ■

Pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema (1.10)), temos a seguinte cadeia de imersões contínuas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega)) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

com cada espaço denso no seguinte.

1.4 Espaços $L^p(0, T; X)$

Seja X um espaço de Banach. O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T,X)$, isto é, $T \in \mathcal{D}'(0,T,X)$, quando $T : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é linear e se $\theta_n \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle T, \theta_n\rangle \to \langle T, \theta\rangle$ em X. Diremos que $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(0,T,X)$ se $\langle T_n, \theta\rangle \to \langle T, \theta\rangle$ em X, $\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T,X)$ munido da convergência acima é denominado *Espaço das distribuições vetorias de* $(0,T)$ *com valores em* X.

Observação 1.8 *O conjunto $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(0,T), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}'(0,T,X)$. Além disso, mostra-se que o conjunto $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(0,T), \xi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ é denso em $\mathcal{D}(\Omega \times (0,T)) = \mathcal{D}(Q)$.*

Definição 1.22 *Dizemos que $u : (0,T) \to X$ é fortemente mensurável quando existir uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n : (0,T) \to X$ tal que*

$$|\varphi_n(t) - u(t)|_X \to 0, \ \textit{quase sempre em } (0,T).$$

Denotaremos por $L^p(0,T,X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue. Neste espaço definimos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T,X)$ representamos o espaço das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$, a norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{0<t<T} ess\|u(t)\|_X. \tag{1.2}$$

Os espaços $L^p(0,T,X)$ e $L^\infty(0,T,X)$ são espaços de Banach com suas respectivas normas.

Proposição 1.23 *O espaço $L^p(0,T;X)$ é denso em $\mathcal{D}'(0,T;X)$.*

Prova. Ver [3]. ■

Observação 1.9 *Quando $p=2$ e X é um espaço de Hilbert, segue que $L^2(0,T,X)$ também é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u,v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

Se X é reflexivo, podemos identificar

$$[L^p(0,T;X)]' = L^q(0,T;X'),$$

onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. E, no caso em que $p=1$, identificamos

$$[L^1(0,T;X)]' = L^\infty(0,T;X')$$

Podemos encontrar a prova dessas identidades em [29].

Observação 1.10 *Uma identificação que, eventualmente, usaremos é a seguinte: consideremos $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $T>0$ e $Q=\Omega\times(0,T)$ um cilindro em $\mathbb{R}^{n+1}$, então, para $1\le p<\infty$ temos*

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q).$$

Definição 1.24 *Dada $T\in\mathcal{D}'(0,T,X)$, definimos a derivada de ordem n de T como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por:*

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n},\varphi\right\rangle = (-1)^n\left\langle T,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right\rangle, \forall\varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Representamos por $C([0,T],X)$ o espaço de Banach das funções contínuas u, definidas em $[0,T]$ com valores em X, cuja norma é dada por

$$\|u\|_{C([0,T],X)} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Denotaremos por $H_0^1(0,T,X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0,T,X) = \{u \in L^2(0,T,X); u' \in L^2(0,T,X), u(0) = u(T) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((u,v))_{H_0^1(0,T,X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt + \int_0^T (u'(t),v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0,T,X)$ com o seu dual $(L^2(0,T,X))'$, via Teorema de Riesz (Teorema (1.10)), obtemos a seguinte cadeia

$$\mathcal{D}(0,T,X) \hookrightarrow H_0^1(0,T,X) \hookrightarrow L^2(0,T,X) \equiv L^2(0,T,X) \hookrightarrow H^{-1}(0,T,X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T,X),$$

onde

$$(H_0^1(0,T,X))' = H^{-1}(0,T,X).$$

Proposição 1.25 *Seja $u \in L^2(0,T,X)$. Então, existe uma única $f \in H^{-1}(0,T,X)$ que verifica*

$$\langle f,\theta\xi\rangle = (\langle u',\theta\rangle,\xi), \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\xi \in X$$

Prova. Ver M.M. Miranda [28] ou [29]. ■

A proposição anterior nos permite identificar u' com f. Desse modo, diremos que se $u \in L^2(0,T,X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T,X)$.

Proposição 1.26 *Seja X um espaço de Hilbert, então a aplicação*

$$u \in L^2(0,T,X) \mapsto u' \in H^{-1}(0,T,X)$$

é linear e contínua.

Prova. Ver M.M. Miranda [28] ou [29]. ■

Proposição 1.27 *Suponhamos que $u, g \in L^1(0,T,X)$. Então, as condições abaixo são equivalentes:*

i) *Existe $\xi \in X$, independente de t, tal que $u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds$ quase sempre em $(0,T)$, (u é quase sempre uma primitiva de g);*

ii) *Para cada* $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ *tem-se* $\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt$, *(*$g = \frac{du}{dt}$ *derivada no sentido das distribuições);*

iii) *Para cada* $y \in X'$, $\frac{d}{dt}\langle u(t), y\rangle = \langle g(t), y\rangle$ *no sentido das distribuições.*

Prova. Ver [22] ou [31] . ■

Sejam X e Y espaços de Hilbert, com $X \hookrightarrow Y$. Definimos o espaço $W(0,T;X,Y)$ como sendo

$$W(0,T;X,Y) = \{u \in L^2(0,T;X); u' \in L^2(0,T;Y)\}.$$

o qual, munido da norma

$$||u||^2_{W(0,T;X,Y)} = ||u||^2_{L^2(0,T;X)} + ||u'||^2_{L^2(0,T;Y)},$$

também é um espaço de Hilbert. Além disso, está imerso continuamente em $C([0,T];Y)$. Então, faz sentido avaliar os elementos de $W(0,T;X,Y)$ em 0 e T. Isto é consequência do seguinte resultado.

Teorema 1.28 *Sejam* X, Y *espaços de Hilbert tais que* $X \hookrightarrow Y$, $u \in L^p(0,T,X)$ *e* $u' \in L^p(0,T,Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, *então* $u \in C([0,T];Y)$.

Prova. Ver [22] ■

Teorema 1.29 *Sejam* $u \in [L^q(0,T,X)]'$ *e* $v \in L^p(0,T,X)$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *então*

$$\langle u, v\rangle_{[L^q(0,T,X)]' \times L^p(0,T,X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{X' \times X} dt.$$

Prova. Ver [22]. ■

Até aqui, definimos os espaços $H^s(\Omega)$, com Ω sendo um aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$. Nos resta, agora, introduzir os espaços $H^s(\Gamma)$, onde Γ é a fronteira de Ω.

Consideremos $\{(U_1,\varphi_1),\ldots,(U_k,\varphi_k)\}$ um sistema de cartas locais para Γ. A cobertura aberta $\Omega, U_1, \ldots, U_k$ de $\overline{\Omega}$ determina uma partição C^∞ da unidade subordinada à mesma. Mais precisamente, existem $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

(i) $supp(\theta_0) \subset \Omega$; $supp(\theta_i) \subset U_i$ para $i = 1, \ldots, k$;

(ii) $\sum_{i=0}^k \theta_i(x) = 1$; para todo $x \in \overline{\Omega}$;

(iii) $0 \leq \theta_i \leq 1$ para $i = 1, \ldots, k$.

Se u é uma função definida sobre Γ, temos por (ii) que

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} (\theta_i u)(x) \qquad \text{q.t.p. em } \Gamma.$$

Definimos, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$u_i(y) = (\theta_i u)(\varphi_i^{-1}(y))$$

onde $y \in \Sigma = (0,1)^{n-1}$.

Notemos que

$$S(u\theta_i) = \overline{\{x \in \Gamma; (u\theta_i)(x) \neq 0\}} \subset supp(\theta_i) \cap \Gamma \subset U_i \cap \Gamma$$

o que mostra que $S(u\theta_i)$ é um compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em $U_i \cap \Gamma$. Segue daí que o conjunto:

$$S(u_i) = \overline{\{x \in (0,1)^{n-1}; u_i(x) \neq 0\}}$$

é um compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$ contido no aberto Σ, pois como φ_i é contínua e $S(u\theta_i)$ é compacto, temos

$$\varphi_i(S(u\theta_i)) = S(u_i).$$

Além disso, como,

$$supp(u_i) \subset S(u_i) \subset \Sigma$$

podemos estender u_i a uma função $\tilde{u}_i$ pondo-se zero fora de Σ, ou seja,

$$\tilde{u}_i(y) = \begin{cases} (u\theta_i)(\varphi_i^{-1}(y)) & \text{se} \quad y \in \Sigma \\ 0 & \text{se} \quad y \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Sigma. \end{cases}$$

Com isso, temos que $\tilde{u}_i$ herda as mesmas características de u_i. Daí, se u é integrável, então $\tilde{u}_i$ também o é. E ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)dy = \int_{U_i \cap \Gamma} u(x)\theta_i(x)J_i(x)d\Gamma$$

onde $J_i(x)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\Gamma_i = U_i \cap \Gamma$. Por outro lado, se $\tilde{u}_i$ for integrável em $\mathbb{R}^{n-1}$ para todo $i = 1, 2 \ldots, k$, temos que u também será e

$$\int_\Gamma u(x)d\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \int_\Gamma (u\theta_i)(x)d\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)\overline{J}(y)dy$$

onde, $\overline{J}(y)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\mathbb{R}^{n-1}$.

Denotando por $d\Gamma$ a medida superficial sobre Γ induzida pela medida de Lebesgue, designaremos por $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das funções integráveis sobre Γ para a medida superficial $d\Gamma$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \|u\|_{p,\Gamma} = \left(\int_\Gamma |u(x)|^p d\Gamma\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.3}$$

se $1 \leq p < \infty$ e,

$$\|u\|_{\infty,\Gamma} = \sup_{x\in\Gamma} ess|u(x)|.$$

Usando a partição da unidade $\{\theta_i\}_{0\leq i\leq k}$ introduzida anteriormente, temos

$$L^p(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R}; u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \ldots, k\},$$

além disso, a norma

$$u \in L^p(\Gamma) \mapsto \|u\|_{p,\Gamma} = \left(\sum_{i=1}^{k} \|\tilde{u}_i\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{\frac{1}{p}}$$

é equivalente a norma dada em (1.3).

Seja $m \in \mathbb{N}$, representamos por $C^m(\Gamma)$ o espaço das funções $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ de classe C^m e por $\mathcal{D}(\Gamma)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis sobre Γ, isto é,

$$C^m(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R}; u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \ldots, k\}$$

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R}; u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{e } i = 1, \ldots, k\}.$$

Considereremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \phi_i : \mathcal{D}(\Gamma) & \to & \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u & \mapsto & \phi_i(u) = \tilde{u}_i = u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} \end{array} \tag{1.4}$$

assim, se $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_i(u), v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)v(y)dy \\ &= \int_{U_i\cap\Gamma} u(x)\theta_i(x)v(\varphi_i(x))J_i(x)d\Gamma \end{aligned}$$

onde $J_i(x)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\Gamma_i = U_i \cap \Gamma$.

Definindo

$$\psi_i(v) = \begin{cases} \theta_i(x)v(\varphi_i(x))J_i(x) & \text{se} \quad x \in U_i \cap \Gamma \\ 0 & \text{se} \quad x \in \Gamma \setminus U_i \cap \Gamma \end{cases}$$

então, podemos escrever

$$\langle \phi_i(u), v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_\Gamma u(x)\psi_i(v)(x)d\Gamma$$

ou ainda, como $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma)$, temos

$$\langle \phi_i(u), v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \langle u, \psi_i(v)\rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma)\times\mathcal{D}(\Gamma)}$$

daí, e do fato de $\mathcal{D}(\Gamma)$ ser denso em $\mathcal{D}'(\Gamma)$, resulta que a aplicação definida em (1.4) se prolonga, por continuidade a uma aplicação que ainda denotaremos por ϕ_i de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$. E, com isso, definimos para $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\Gamma) = \{u; \phi_i(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, k\}$$

dotado da norma

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^{k} \|\phi_i(u)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

É possível mostrar, como feito em [24], que as definições acima, não dependem do sistema de cartas locais de Γ. E, com isso, temos a boa definição do espaço $H^s(\Gamma)$ e da norma da qual é munido esse espaço.
Além disso, vale o seguinte:

- $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.
- O espaço $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$.

As provas dos resultados acima, podem ser encontrados em [20].

1.5 Teoria do Traço

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{D}(\Gamma)$ o espaço das funções reais definidas em Γ que possuem derivadas parciais de todas as ordens e por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ o conjunto de todas as funções $\rho : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que são restrições de funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\phi \mid_{\overline{\Omega}} = \rho, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representaremos por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ.

Proposição 1.30 *Existe uma constante positiva C, tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Prova. Para a prova, ver [24]. ∎

Desde que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$ e de posse da proposição anterior, podemos estender a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

a uma única aplicação linear e contínua, que ainda vamos representar por γ_0,

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

a qual chamamos de *aplicação traço de ordem zero.*

Teorema 1.31 *O núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Prova. A prova pode ser encontrada em [24]. ∎

Considerando, agora, Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular e denotando por ν o vetor normal unitário exterior a Γ. Para todo $j = 1, \ldots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_j = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Gamma$ a derivada normal de ordem j de u e $\gamma_0 u = u\big|_\Gamma$, assim, da densidade de $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ no espaço de Hilbert $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos o seguinte resultado:

Teorema 1.32 *Existe uma única aplicação linear e contínua γ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, com núcleo $\gamma^{-1}(\{0\}) = H_0^m(\Omega)$ verificando o seguinte*

$$\gamma u = \left(u\big|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\bigg|_\Gamma \right); u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

com o espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ munido da topologia natural que é dada por

$$\|w\|_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \|w_0\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|w_1\|_{H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \ldots + \|w_{m-1}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

onde $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1})$.

Prova. A demonstração encontra-se em [24]. ∎

Teorema 1.33 *Sejam $1 \leq p < n$ e $q = \frac{np-p}{n-p}$, então, existe uma única aplicação linear contínua $\mathfrak{R} : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Gamma)$ tal que $\mathfrak{R}u = u\big|_\Gamma$ para toda $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Prova. Ver [14]. ■

Teorema 1.34 *Seja $p \geq n$, então para todo $q \geq 1$ existe uma única aplicação linear contínua $\mathfrak{R} : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Gamma)$ tal que $\mathfrak{R}u = u\big|_{\Gamma}$ para toda $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Prova. Ver [14]. ■

Observação 1.11 *De posse dos teoremas acima, escrevemos que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Gamma)$ no sentido que existe uma constante C positiva tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Gamma)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

mas alertamos que $\hookrightarrow$, aqui, possui conotação distinta do introduzido na definição (1.11).

Além destes, consideremos o espaço $\mathcal{H}$ definido abaixo:

Definição 1.35 *Denotamos por $\mathcal{H}$ o seguinte conjunto*

$$\mathcal{H} = H(\Omega, \Delta) = \{u \in L^2(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

o qual, munido do produto interno,

$$((u, v))_{\mathcal{H}} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall u, v \in \mathcal{H}$$

e norma

$$u \mapsto [\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}]^{1/2}$$

é um espaço de Hilbert.

Lema 1.3 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}$;*

(b) *Existe uma aplicaçãao linear e contínua definida em $\mathcal{H}$ tal que*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathcal{H} & \to & H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma) \\ u & \mapsto & (\gamma_0(u), \gamma_1(u)) \end{array}$$

e ainda,a aplicação γ acima coincide com a aplicação traço de ordem 2.

(c) *Se $u \in \mathcal{H} \cap H^1(\Omega)$, então $\gamma_1 u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. E, ainda, a aplicação γ_1 é contínua de $\mathcal{H} \cap H^1(\Omega)$ em $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Prova. Ver [4]. ■

1.5.1 Traço em $L^2(0,T;H^m(\Omega))$

Nesta seção e na seguinte, todos os resultados enunciados podem ser encontrados em [28].

De acordo com o apresentado anteriormente, sabemos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{1.5}$$

que é linear, contínua e sobrejetora.

Definamos, então, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \hat{\gamma} : L^2(0,T;H^m(\Omega)) & \to & L^2(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \\ u & \longmapsto & \hat{\gamma}u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t) \end{array} \tag{1.6}$$

onde $\gamma u(t)$ é a aplicação γ de (1.5), aplicada em $u(t) \in H^m(\Omega)$.

Observação 1.12 *A aplicação $\hat{\gamma}$ é linear, contínua e sobrejetora.*

Proposição 1.36 *Seja $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$, então $\hat{\gamma}u' = (\hat{\gamma}u)'$.*

1.5.2 Traço em $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$

Consideremos o espaço $\mathcal{L} = L^2(0,T;H^m(\Omega)) \times L^2(0,T;H^m(\Omega))$, $\mathcal{M}$ o subespaço fechado de $\mathcal{L}$ dos vetores $\{\alpha,\beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}$$

para todo $v \in H_0^1(0,T;H^m(\Omega))$ e $\mathcal{E}_f = \{\{\phi_f^0,\psi_f^0\} \in \mathcal{L}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v') = \langle f, v\rangle, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega)\}$, ou seja, $\mathcal{E}$ é o conjunto dos $\{\phi_f^0,\psi_f^0\} \in \mathcal{L}$ tais que $f = \phi_f - \psi_f$, então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \sigma : H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \longrightarrow & \mathcal{M}^{\perp} \\ f & \longmapsto & \{\phi_f^0,\psi_f^0\} \end{array}$$

onde $\{\phi_f^0,\psi_f^0\} \in \mathcal{E}$ é tal que $\|f\| = \|\{\phi_f^0,\psi_f^0\}\|$ é uma isometria linear sobrejetora.

Para $f \in H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$, definimos $\tilde{\gamma}f$ da seguinte forma

$$\langle \tilde{\gamma}f, w\rangle = \int_0^T (\gamma\phi_f^0, w)_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt + \int_0^T (\gamma\psi_f^0, w)_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt$$

com $w \in H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$.
Assim, temos estabelecido uma aplicação linear e contínua

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\gamma}: H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \longrightarrow & H^{-1}\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ f & \longmapsto & \tilde{\gamma} f\end{array}$$

a qual é denominada *aplicação traço para as funções de* $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$.

Teorema 1.37 *A aplicação traço $\tilde{\gamma}$ é sobrejetora e seu núcleo é $H^{-1}(0,T;H_0^m(\Omega))$.*

Proposição 1.38 *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$, então*

$$\gamma u\big|_{H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} = \tilde{\gamma} u.$$

Proposição 1.39 *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$, então $\tilde{\gamma} u' = (\gamma u)'$.*

Observação 1.13 *Se considerarmos o espaço $\mathcal{H}$ em substituto a H^m, obtemos uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva*

$$\gamma: H^{-1}(0,T;\mathcal{H}) \longrightarrow H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)).$$

1.6 Resultados Auxiliares

Para concluir esse capítulo enunciaremos alguns resultados importantes que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Proposição 1.40 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, então*

$$|x.y| \leq |x||y|.$$

Definição 1.41 *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E,E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.*

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de E a qual converge para $x \in E$ na topologia fraca $\sigma(E,E')$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.42 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então:*

(i) *$x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ para todo $f \in E'$;*

(ii) *Se $x_n \to x$ em E, então, $x_n \rightharpoonup x$ em E ;*

(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E*, então* $\|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq \lim_n inf \|x_n\|_E$*;*

(iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *em* E'*, então,* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$*.*

Prova. É possível encontrar a prova em [2]. ■

Seja E um espaço de Banach e fixemos $x \in E$. Definimos a aplicação $J_x : E' \to \mathbb{R}$ pondo

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Nessas condições, $J_x \in E''$, para todo $x \in E$. Assim, podemos definir $J : E \to E''$, onde $J(x) = J_x$.

Definição 1.43 *A topologia fraca* $*$*, denotada por* $\sigma(E', E)$ *é a topologia menos fina sobre* E' *que torna contínuas todas as aplicações* J_x*.*

Seja $(f_n)_n \in E'$, se (f_n) converge para f em E' na topologia $\sigma(E', E)$, então escrevemos

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'$$

Proposição 1.44 *Seja* $(f_n)_n$ *uma sequência em* E'*, então:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ *para todo* $x \in E$*;*

(ii) *Se* $f_n \to f$ *em* E'*, então,* $f_n \rightharpoonup f$ *em* E' *;*

(iii) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'*, então* $f_n \rightharpoonup^* f$ *em* E'*.*

Prova. Para a prova ver [2]. ■

Lema 1.4 *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* $(x_n)_n$ *uma sequência limitada em* E*, então existe uma subsequência* $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ *e* $x \in E$*, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \textit{ fracamente em } E.$$

Prova. Ver [2] ■

Lema 1.5 (Desigualdade de Gronwall) *Sejam* $z \in L^\infty(0,T)$ *e* $f \in L^1(0,T)$ *tais que* $z(t)$*,* $f(t) \geq 0$ *e seja* c *uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds \qquad \forall t \in [0,T]$$

então,

$$f(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds} \qquad \forall t \in [0,T].$$

Prova. Ver [26]. ■

Lema 1.6 (Desigualdade de Gronwall Generalizada) *Sejam z e f funções integráveis, não negativas e $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, não negativa que satisfaz:*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)ds + \int_0^t g(s)f(s)ds \qquad \forall t \in [0,T],$$

onde c é uma constante não negativa. Então

$$f(t) \leq \left(c + \int_0^t z(s)ds\right) e^{\int_0^t g(s)ds}.$$

Proposição 1.45 (Teorema de Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach, tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, com B_0 e B_1 reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T,B_1) \right\}$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$,o qual munido da norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)}$$

é um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Prova. A demonstração encontra-se em [18]. ■

Proposição 1.46 (Lema de Lions) *Seja $(u_n)_n \subset L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

(i) *$u_n \to u$ quase sempre em Q;*

(ii) *$\|u_n\| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

então,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^q(Q).$$

Prova. Ver [18]. ■

Proposição 1.47 (Regularidade para problemas elípticos) *Seja Ω um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ com $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$, em particular, se $m > \frac{n}{2}$, então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Prova. Para a prova ver [2]. ■

Proposição 1.48 *Para todo $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$ tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Prova. Ver [4]. ■

Consideremos Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde Γ_0, Γ_1 são fechados e disjuntos e seja ν o vetor normal unitário exterior à Γ.

Definamos

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_0\} \tag{1.7}$$

temos que V, munido do produto interno induzido por $H^1(\Omega)$, é um espaço de Hilbert e, ainda, considerando em V a norma

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in V$$

segue que

$$\|.\|_V \text{ e } \|.\|_{H^1(\Omega)}$$

são equivalentes. Assim, considerando o produto interno

$$((u, v)) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \qquad \forall u, v \in V$$

concluímos que $(V, ((\cdot, \cdot)))$ é um espaço de Hilbert.

Agora, supondo

- $0 < \gamma \leq \frac{1}{n-2}$ se $n \geq 3$ ou $\gamma > 0$ se $n = 1, 2$
- $0 < \rho \leq \frac{1}{n-2}$ se $n \geq 3$ ou $\rho > 0$ se $n = 1, 2$

segue das equivalências entre as normas de $H^1(\Omega)$ e de V e dos teoremas (1.33) e (1.34) que

$$V \hookrightarrow L^{2(\gamma+1)}(\Gamma) \text{ e } V \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Gamma)$$

e, desde que $u \in V$ implica $u = 0$ em Γ_1 e $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, temos

$$V \hookrightarrow L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0) \text{ e } V \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Gamma_0). \tag{1.8}$$

Proposição 1.49 *Em V vale a desigualdade de Poincaré.(Ver Teorema (1.16)).*

Prova. Ver [30]. ■

Observação 1.14 *O espaço* $V \cap H^2(\Omega)$ *é denso em* V.

A fim de simplificar a notação, denotaremos, no decorrer do trabalho,

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \qquad (u,v)_{\Gamma_0} = \int_{\Gamma_0} u(x)v(x)d\Gamma,$$
$$|u|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx, \quad |u|^2_{\Gamma_0} = \int_{\Gamma_0} |u(x)|^2 d\Gamma, \quad \|u\|^p_{p,\Gamma_0} = \int_{\Gamma_0} |u(x)|^p d\Gamma.$$

Capítulo 2

Existência e Unicidade da Solução

No que segue, iremos omitir, eventualmente, as variáveis das funções com o intuito de não sobrecarregar a notação.

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$. Nosso objetivo consiste em provar a existência e unicidade da solução forte do seguinte problema:

$$(*) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \frac{\partial y'}{\partial x_j} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \\ y = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) + g(y') = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ y(x,0) = y^0; \;\; y'(x,0) = y^1 \text{ em } \Omega \end{cases}$$

onde ν é o vetor unitário normal à Γ na direção do exterior de Ω e b_j, f e g são, respectivamente, os coeficientes e funções não lineares satisfazendo algumas propriedades gerais, as quais serão apresentadas a seguir.

(A.1) Hipóteses sobre os coeficientes:

$$b_j \in W^{1,\infty}(0,\infty; C(\overline{\Omega})), \quad \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \in L^1(0,\infty, L^\infty(\Omega)) \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Também assumimos que existe uma constante positiva δ tal que

$$b.\nu \geq \delta > 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0,\infty) \tag{2.2}$$

onde $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

(A.2) Hipóteses sobre f:

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e satisfaz[1]:

$$f(s)s \geq 0 \;\; \text{para todo} \;\; s \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Além disso, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_0(1 + |s|^{\gamma+1}) \,, \quad s \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

onde $0 < \gamma \leq \frac{1}{n-2}$ se $n \geq 3$ ou $\gamma > 0$ se $n = 1, 2$ e

$$|f'(s)| \leq C_0(1 + |s|^{\gamma}) \,, \;\; s \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Definindo

$$F(s) = \int_0^s f(\lambda) d\lambda$$

assumimos que existem $\alpha, C > 0$ tais que

$$C|s|^{\gamma+2} \leq F(s) \leq \alpha s f(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

e ainda,

$$(f(\xi) - f(\widehat{\xi}))(\eta - \widehat{\eta}) \geq -D_1(|\xi|^{\gamma} + |\widehat{\xi}|^{\gamma})|\xi - \widehat{\xi}||\eta - \widehat{\eta}| \tag{2.7}$$

para algum $D_1 > 0$ e para todo $\xi, \widehat{\xi}, \eta, \widehat{\eta} \in \mathbb{R}$.

(A.3) Hipóteses sobre g:

A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é não decrescente, de classe C^1 e satisfaz:

$$g(s)s \geq 0 \;\; \text{para todo} \;\; s \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Além disso, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1|s|^{\rho+2} \leq g(s)s \leq C_2|s|^{\rho+2} \,, \quad s \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

onde $0 < \rho \leq \frac{1}{n-2}$ se $n \geq 3$ ou $\rho > 0$ se $n = 1, 2$.

Observação 2.1 *As funções $f(s) = |s|^{\gamma} s$ e $g(s) = |s|^{\rho} s$ satisfazem todas as condições acima.*
De fato

i) $f(s)s = |s|^{\gamma} s^2 \geq 0,$ *para todo $s \in \mathbb{R}$;*

[1]Essa propriedade é conhecida como Condição de Strauss.

ii) $|f(s)| = |s|^{\gamma+1} \leq C_0(1+|s|^{\gamma+1})$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$ *e para qualquer* $C_0 > 0$*;*

iii) $|f'(s)| = (\gamma+1)|s|^{\gamma} \leq C_0(\gamma+1)(1+|s|^{\gamma})$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$*;*

iv) *Como* $F(s) = \displaystyle\int_0^s |\lambda|^{\gamma}\lambda d\lambda = \frac{|s|^{\gamma+2}}{\gamma+2}$, *considerando* $\alpha \geq \frac{1}{\gamma+2}$ *e* $0 < C \leq \frac{1}{\gamma+2}$ *, temos*

$$C|s|^{\gamma+2} \leq F(s) \leq \alpha s f(s) \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R};$$

v) *Sejam* $\xi, \widehat{\xi}, \eta, \widehat{\eta} \in \mathbb{R}$*, assim*

$$\begin{aligned}
(f(\xi) - f(\widehat{\xi}))(\eta - \widehat{\eta}) &= (|\xi|^{\gamma}\xi - |\widehat{\xi}|^{\gamma}\widehat{\xi})(\eta - \widehat{\eta}) \\
&= ((|\xi|^{\gamma} + |\widehat{\xi}|^{\gamma})(\xi - \widehat{\xi}) - |\widehat{\xi}|^{\gamma}\xi + |\xi|^{\gamma}\widehat{\xi})(\eta - \widehat{\eta}) \\
&\geq -|((|\xi|^{\gamma} + |\widehat{\xi}|^{\gamma})(\xi - \widehat{\xi}) - |\widehat{\xi}|^{\gamma}\xi + |\xi|^{\gamma}\widehat{\xi})(\eta - \widehat{\eta})| \\
&\geq -(||\xi|^{\gamma} + |\widehat{\xi}|^{\gamma}||\xi - \widehat{\xi}| + ||\xi|^{\gamma}\widehat{\xi} - |\widehat{\xi}|^{\gamma}\xi|)|\eta - \widehat{\eta}| \\
&\geq -(|\xi|^{\gamma} + |\widehat{\xi}|^{\gamma})|\xi - \widehat{\xi}||\eta - \widehat{\eta}|
\end{aligned}$$

Donde $f(s) = |s|^{\gamma}s$ *satisfaz as hipóteses* $(2.3)-(2.7)$*. De maneira inteiramente análoga mostra-se que* $g(s) = |s|^{\rho}s$ *satisfaz as hipóteses* $(2.8)-(2.9)$*.*

(A.4) Hipóteses sobre os dados iniciais:

Consideramos os dados iniciais verificando

$$\{y^0, y^1\} \in (V \cap H^2(\Omega))^2 \text{ e } \frac{\partial y^0}{\partial \nu} + f(y^0) + g(y^1) = 0 \text{ em } \Gamma_0. \tag{2.10}$$

onde V é o espaço definido em (1.7).

Observação 2.2 *Observe que, de acordo com a escolha de* γ *e* ρ *e por (1.8) , temos as seguintes imersões:*

$$V \hookrightarrow L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0) \ \ e \ \ V \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Gamma_0).$$

Note que, das hipóteses (2.4) *e* (2.9)*, temos*

$$|f(y^0)| \leq C_0(1+|y^0|^{\gamma+1}) \quad e \quad |g(y^1)| \leq C_2|y^1|^{\rho+1}$$

assim, elevando ao quadrado ambos os membros e calculando a integral sobre Γ_0*, obtemos*

$$|f(y^0)|^2_{\Gamma_0} \leq \widetilde{C_0} + C_0\|y^0\|^{2(\gamma+1)}_{2(\gamma+1),\Gamma_0} \quad e \quad |g(y^1)|^2_{\Gamma_0} \leq C_2\|y^1\|^{2(\rho+1)}_{2(\rho+1),\Gamma_0}$$

onde $\widetilde{C_0} = C_0\, med(\Gamma_0)$ *, concluímos então, pelas imersões acima, que*

$$f(y^0), g(y^1) \in L^2(\Gamma_0).$$

Apresentadas as hipóteses gerais estamos, então, em condições de enunciar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.1 *Sob as hipóteses* $(A.1)-(A.4)$, *o problema* $(*)$ *possui uma única solução forte* $y : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *de modo que*

$$y \in L^\infty_{loc}(0, \infty; V),\ \ y' \in L^\infty_{loc}(0, \infty; V) \text{ e } y'' \in L^\infty_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega))$$

2.1 Existência de Solução

Nosso principal objetivo, nesta seção, é provar a existência de solução forte para o problema $(*)$ – quando os dados iniciais são suaves – e o faremos utilizando o método de Faedo-Galerkin que consiste em aproximar a solução de $(*)$ por uma sequência de soluções de problemas aproximados de $(*)$. Além disso, considerando as dificuldades técnicas para estimar o valor de $|y''(0)|$ trabalharemos com um problema equivalente a $(*)$, porém com condições iniciais nulas que será obtido através de uma mudança de variáveis.

Observamos que uma formulação variacional do problema $(*)$ nos leva para a equação

$$(y''(t), w) + (\nabla y(t), \nabla w) + (f(y), w)_{\Gamma_0} + (g(y'), w)_{\Gamma_0} + \sum_{j=1}^{n} (b_j(t) \frac{\partial y'}{\partial x_j}(t), w) = 0 \quad (2.11)$$

para todo $w \in V$.

De fato, se y é solução de $(*)$, então

$$y''(t) - \Delta y(t) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \frac{\partial y'}{\partial x_j}(t) = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty)$$

assim, dado $w \in V$, calculando o produto interno em $L^2(\Omega)$ de ambos os membros da igualdade acima por w, obtemos

$$(y''(t), w) - (\Delta y(t), w) + \sum_{j=1}^{n} (b_j(x,t) \frac{\partial y'}{\partial x_j}(t), w) = 0$$

agora, pela fórmula de Green (teorema (1.20)) , temos que

$$\begin{aligned}
-(\Delta y, w) &= \int_\Omega -\Delta y(x) w(x) dx = \int_\Omega \nabla y(x) \nabla w(x) dx - \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma) d\sigma \\
&= (\nabla y, \nabla w) - \Big(\int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma) d\sigma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma) d\sigma \Big) \\
&= (\nabla y, \nabla w) - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma) d\sigma
\end{aligned}$$

a última igualdade segue do fato de $w \in V$ e assim, $w = 0$ sobre Γ_1. Do nosso problema,

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) + g(y') = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0, \infty)$$

logo,

$$-\int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu}(\sigma) w(\sigma) d\sigma = \int_{\Gamma_0} (f(y) + g(y'))(\sigma) w(\sigma) d\sigma = (f(y), w)_{\Gamma_0} + (g(y'), w)_{\Gamma_0}$$

portanto,

$$-(\Delta y, w) = (\nabla y, \nabla w) + (f(y), w)_{\Gamma_0} + (g(y'), w)_{\Gamma_0}$$

e assim obtemos a formulação variacional (2.11) para o problema $(*)$.

Soluções fortes para $(*)$ com condição de fronteira não linear, $(f(y) + g(y'), w)_{\Gamma_0}$, não podem ser obidas através do método de 'base especial', isto é, uma base formada por autofunções do operador $-\Delta$. Assim, devemos diferenciar (2.11) com respeito a t porém, isso nos traz sérias dificuldades técnicas para estimar o valor de $|y''(0)|$. Daí, para contornar essa dificuldade, transformaremos $(*)$ em um problema equivalente com valor inicial igual a zero.

Consideremos, então,

$$v(x,t) = y(x,t) - \phi(x,t) \tag{2.12}$$

onde

$$\phi(x,t) = y^0(x) + t y^1(x)$$

daí,

$$v''(x,t) = y''(x,t) - \phi''(x,t) = y''(x,t)$$

pois $\phi'(x,t) = y^1(x)$ e, portanto, $\phi''(x,t) = 0$. Ainda,

$$\Delta v(x,t) = \Delta y(x,t) - \Delta \phi(x,t) \ \text{ e } \ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x,t) = \frac{\partial y}{\partial \nu}(x,t) - \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t).$$

cabe observar que tem sentido calcular $\Delta \phi$, visto que $y^0, y^1 \in H^2(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x,t) - \Delta y(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \frac{\partial y'}{\partial x_j}(x,t) \\ &= v''(x,t) - \Delta v(x,t) - \Delta \phi(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \Big(\frac{\partial v'}{\partial x_j}(x,t) + \frac{\partial \phi'}{\partial x_j}(x,t) \Big) \end{aligned}$$

e assim,

$$v''(x,t) - \Delta v(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \frac{\partial v'}{\partial x_j}(x,t) = \widehat{F}(x,t)$$

onde $\widehat{F}(x,t) = \Delta\phi(x,t) - \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \frac{\partial \phi'}{\partial x_j}(x,t)$.

Portanto, o problema $(*)$ é equivalente a

$$(*)_1 \begin{cases} v'' - \Delta v + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial v'}{\partial x_j} = \widehat{F} \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty) \\ v = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + f(v+\phi) + g(v'+\phi') = G \ \text{ em } \ \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ v(x,0) = 0 = v'(x,0) \ \text{ em } \ \Omega \end{cases}$$

onde $\widehat{F} = \Delta\phi - \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \phi'}{\partial x_j}$ e $G = -\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$.

Notemos que se v é uma solução de $(*)_1$ em algum intervalo do tipo $[0,T]$, então $y(x,t) = v(x,t) + \phi(x,t)$ é uma solução de $(*)$ no mesmo intervalo. Assim, é suficiente mostrar que $(*)_1$ possui solução local, o que garante que $(*)$ possui solução local e, utilizando métodos conhecidos, conseguimos estender a solução ao intervalo $[0,\infty)$. É a esta prova que vamos nos ater agora, a qual será feita utilizando o método de Faedo-Galerkim.

Sejam $(w_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana em $V \cap H^2(\Omega)$, $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ o subespaço gerado por $w_1, w_2, \ldots, w_m$ e seja

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^{n} g_{im}(t) w_i(x) \quad \in V_m$$

a solução do problema de Cauchy[2]

$$\left| \begin{array}{l} (v''_m(t), w) + (\nabla v_m(t), \nabla w) + (f(v_m(t)+\phi(t)), w)_{\Gamma_0} + (g(v'_m(t)+\phi'(t)), w)_{\Gamma_0} \\ + \sum_{j=1}^{n} (b_j(t) \frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), w) = (\widehat{F}(t), w) + (G(t), w)_{\Gamma_0} \qquad \forall w \in V_m \\ v_m(0) = v'_m(0) = 0 \end{array} \right. \tag{2.13}$$

onde cada solução é local em algum intervalo da forma $[0, t_m]$. A extensão destas soluções para o intervalo $[0,T]$ é uma consequência da primeira estimativa, obtida a seguir.

[2]A prova que este problema tem soluçãono intervalo $[0, t_m]$ encontra-se no apêndice deste trabalho.

2.1.1 Estimativas a Priori

A primeira estimativa

Considerando $w = v'_m(t)$, temos $w \in V_m$ pois $v'_m(t) = \sum_{i=1}^{n} g'_{im}(t)w_i(x) \in V_m$ e substituindo em (2.13), obtemos

$$
\begin{aligned}
&(v''_m(t), v'_m(t)) + (\nabla v_m(t), \nabla v'_m(t)) + (f(v_m(t) + \phi(t)), v'_m(t))_{\Gamma_0} \\
&+(g(v'_m(t) + \phi'(t)), v'_m(t))_{\Gamma_0} + \sum_{j=1}^{n}(b_j(t)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), v'_m(t) \\
&= (\widehat{F}, v'_m(t)) + (G(t), v'_m(t))_{\Gamma_0}
\end{aligned}
$$

Agora, observemos que

$$
\frac{d}{dt}(v'_m(t), v'_m(t)) = 2(v''_m(t), v'_m(t)) \tag{2.14}
$$

logo,

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|v'_m(t)|^2\right] = (v''_m(t), v'_m(t)).
$$

Analogamente,

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2\right] = (\nabla v_m(t), \nabla v'_m(t)).
$$

Como $F(s) = \int_0^s f(\lambda)d\lambda$, temos

$$
F(v_m(t) + \phi(t)) = \int_0^{v_m(t)+\phi(t)} f(\lambda)d\lambda
$$

acarretando

$$
\frac{d}{dt}(F(v_m(t) + \phi(t)) = f(v_m(t) + \phi(t))(v'_m(t) + \phi'(t))
$$

donde

$$
\int_{\Gamma_0} \frac{d}{dt}(F(v_m(t) + \phi(t))d\Gamma = \int_{\Gamma_0} f(v_m(t) + \phi(t))v'_m(t)d\Gamma + \int_{\Gamma_0} f(v_m(t) + \phi(t))\phi'(t)d\Gamma.
$$

Reescrevendo (2.13) a partir dos comentários acima e somando $(g(v'_m(t)+\phi'(t)), \phi'(t))_{\Gamma_0}$ a ambos os membros da igualdade, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2 + \int_{\Gamma_0}(F(v_m(t) + \phi(t))d\Gamma\right] \\
&+(g(v'_m(t) + \phi'(t)), v'_m(t) + \phi'(t))_{\Gamma_0} + \sum_{j=1}^{n}(b_j\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), v'_m(t)) \\
&= (\widehat{F}(t), v'_m(t)) + (G(t), v'_m(t))_{\Gamma_0} + (f(v_m(t) + \phi(t)), \phi'(t))_{\Gamma_0} + \\
&+(g(v'_m(t) + \phi'(t)), \phi'(t))_{\Gamma_0}.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

A seguir, faremos uma análise de alguns termos da igualdade acima de modo a obter as seguintes estimativas:

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(b_j(t)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), v'_m(t)) \geq -\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|v'_m|^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_{\Gamma_0}|v'_m|^2 d\Gamma;$
- $|(f(v_m(t)+\phi(t)), \phi'(t))_{\Gamma_0}| \leq k_3 + k_2\|v_m+\phi\|^{\gamma+2}_{\gamma+2,\Gamma_0}$;
- $|(g(v'_m(t)+\phi'(t)), \phi'(t))_{\Gamma_0}| \leq \eta\|v'_m+\phi'\|^{\rho+2}_{\rho+2,\Gamma_0} + k_4(\eta)\|\phi'\|^{\rho+2}_{\rho+2,\Gamma_0}$

e

- $(\widehat{F}(t), v'_m(t)) + (G(t), v'_m(t))_{\Gamma_0} \leq k_8 + \frac{1}{2}|v'_m|^2 + \eta|v'_m(t)|^2_{\Gamma_0},$

onde k_3, k_2, k_8 são constantes positivas e $\eta > 0$ é arbitrário.

De fato, pela fórmula de Gauss, temos

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial b_j}{\partial x_j} + b_j\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}\Big)v'_m dx = -\int_\Omega b_j v'_m \frac{\partial v'_m}{\partial x_j}dx + \int_{\Gamma_0} b_j|v'_m|^2\nu^j d\Gamma$$

onde ν^j é a j-ésima entrada do vetor unitário normal ν.

Daí,

$$\int_\Omega b_j v'_m\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial b_j}{\partial x_j}|v'_m|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} b_j\nu^j|v'_m|^2 d\Gamma$$

o que implica em

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega b_j v'_m\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}dx &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j}{\partial x_j}|v'_m|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}\sum_{j=1}^{n} b_j\nu^j|v'_m|^2 d\Gamma\\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|v'_m|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} b.\nu|v'_m|^2 d\Gamma\end{aligned}$$

e, por (2.2),

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega b_j v'_m\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}dx \geq -\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|v'_m|^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_{\Gamma_0}|v'_m|^2 d\Gamma \tag{2.16}$$

Para a análise de $(f(v_m(t)+\phi(t)), \phi'(t))_{\Gamma_0}$, observamos que

$$\begin{aligned}|(f(v_m(t)+\phi(t)), \phi'(t))_{\Gamma_0}| &= \Big|\int_{\Gamma_0} f(v_m+\phi)\phi' d\Gamma\Big| \leq \int_{\Gamma_0}|f(v_m+\phi)\phi'|d\Gamma\\ &= \int_{\Gamma_0}|f(v_m+\phi)||\phi'|d\Gamma\end{aligned}$$

e, desde que (2.4) vale,

$$\begin{aligned}|(f(v_m(t)+\phi(t)),\phi'(t))_{\Gamma_0}| &\leq C_0\int_{\Gamma_0}(1+|v_m+\phi|^{\gamma+1})|\phi'|d\Gamma\\ &= C_0\int_{\Gamma_0}|\phi'|d\Gamma + C_0\int_{\Gamma_0}|v_m+\phi|^{\gamma+1}|\phi'|d\Gamma\\ &\leq k_1 + C_0\int_{\Gamma_0}|v_m+\phi|^{\gamma+1}|\phi'|d\Gamma\end{aligned}$$

Recordemos que $\phi'(x,t)=y^1(x)\in V$ e como $V\hookrightarrow L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0)$ pela observação (2.2) e $L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0)\hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$, pois $2(\gamma+1)>2$, temos $y^1\in L^2(\Gamma_0)$, daí

$$C_0|\phi'|^2_{\Gamma_0} = C_0|y^1|^2_{\Gamma_0} = k_1.$$

Agora, notemos que $\frac{1}{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}+\frac{1}{\gamma+2}=1$ assim, pela desigualdade de Young (proposição (1.5)),

$$|v_m+\phi|^{\gamma+1}|\phi'|\leq \frac{1}{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(|v_m+\phi|^{\gamma+1})^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}+\frac{1}{\gamma+2}|\phi'|^{\gamma+2}$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0}|v_m+\phi|^{\gamma+1}|\phi'|d\Gamma &\leq \frac{\gamma+1}{\gamma+2}\int_{\Gamma_0}|v_m+\phi|^{\gamma+2}d\Gamma+\frac{1}{\gamma+2}\int_{\Gamma_0}|\phi'|^{\gamma+2}d\Gamma\\ &= \frac{\gamma+1}{\gamma+2}\|v_m+\phi\|^{\gamma+2}_{\gamma+2,\Gamma_0}+\frac{1}{\gamma+2}\|\phi'\|^{\gamma+2}_{\gamma+2,\Gamma_0}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$|(f(v_m(t)+\phi(t)),\phi'(t))_{\Gamma_0}|\leq k_3+k_2\|v_m+\phi\|^{\gamma+2}_{\gamma+2,\Gamma_0} \tag{2.17}$$

onde $k_2=\frac{\gamma+1}{\gamma+2}$ e $k_3=k_1+\frac{1}{\gamma+2}\|\phi'\|^{\gamma+2}_{\gamma+2,\Gamma_0}$.

Observação 2.3 *As normas* $\|v_m+\phi\|_{\gamma+2,\Gamma_0}, \|\phi'\|_{\gamma+2,\Gamma_0}$ *fazem sentido pois* $v_m,\phi,\phi'\in V$, $V\hookrightarrow L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0)$ *e* $L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0)\hookrightarrow L^{\gamma+2}(\Gamma_0)$, *visto que* $2(\gamma+1)>\gamma+2$.

Vamos analisar, aqui, o termo $(g(v'_m(t)+\phi'(t)),\phi'(t))_{\Gamma_0}$.

Por (2.9) temos

$$g(s)s\leq C_2|s|^{\rho+2}$$

o que implica em

$$|g(s)|\leq C_2|s|^{\rho+1}.$$

Assim, das propriedades de integração e da relação acima,

$$\begin{aligned}|(g(v'_m(t)+\phi'(t)),\phi'(t))_{\Gamma_0}| &= \Big|\int_{\Gamma_0}g(v'_m+\phi')\phi'd\Gamma\Big|\leq\int_{\Gamma_0}|g(v'_m+\phi')\phi'|d\Gamma\\ &= \int_{\Gamma_0}|g(v'_m+\phi')||\phi'|d\Gamma\leq C_2\int_{\Gamma_0}|v'_m+\phi'|^{\rho+1}|\phi'|d\Gamma.\end{aligned}$$

Como $\dfrac{1}{\frac{\rho+2}{\rho+1}} + \dfrac{1}{\rho+2} = 1$ segue da desigualdade de Young para η (corolário (1.6))

$$|v_m' + \phi'|^{\rho+1}|\phi'| \leq \widetilde{\eta}(|v_m' + \phi'|^{\rho+1})^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} + \widetilde{k}_4(\widetilde{\eta})|\phi'|^{\rho+2}$$

com $\widetilde{\eta} > 0$ arbitrário.

Logo,

$$\begin{aligned} |(g(v_m'(t) + \phi'(t)), \phi'(t))_{\Gamma_0}| &\leq C_2\Big(\widetilde{\eta}(|v_m' + \phi'|^{\rho+1})^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} + \widetilde{k}_4(\widetilde{\eta})|\phi'|^{\rho+2}\Big) \\ &= \eta\|v_m' + \phi'\|_{\rho+2,\Gamma_0}^{\rho+2} + k_4(\eta)\|\phi'\|_{\rho+2,\Gamma_0}^{\rho+2} \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde, η é uma constante positiva arbitrária.

Por fim, observemos que,

$$\begin{aligned} (\widehat{F}(t), v_m'(t)) + (G(t), v_m'(t))_{\Gamma_0} &= \int_\Omega \Delta\phi(t)v_m'(t)dx - \sum_{j=1}^n \int_\Omega b_j(t)\frac{\partial \phi'}{\partial x_j}(t)v_m'(t)dx \\ &- \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(t)v_m'(t)d\Gamma \end{aligned} \tag{2.19}$$

Como (2.1) vale, existe, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $c_j > 0$ tal que $|b_j(t)| \leq c_j$ para todo $t \in [0, \infty)$. Sejam

$$c = \max_{1\leq j\leq n} c_j \text{ e } \alpha = \max_{1\leq j\leq n}\left|\frac{\partial y^1}{\partial x_j}\right|.$$

Logo, da desigualdade de Cauchy-Schwarz e do comentário acima

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_\Omega b_j(t)\frac{\partial \phi'}{\partial x_j}(t)v_m'(t)dx &\leq \sum_{j=1}^n \Big|\int_\Omega b_j(t)\frac{\partial \phi'}{\partial x_j}(t)v_m'(t)dx\Big| \\ &\leq c\sum_{j=1}^n \Big|\frac{\partial \phi'}{\partial x_j}(t)\Big||v_m'(t)| \leq nc\alpha|v_m'(t)| \end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Young (com $\eta = 1$), temos que

$$nc\alpha|v_m'(t)| \leq (nc\alpha)^2 + \frac{1}{4}|v_m'(t)|^2$$

portanto,

$$\sum_{j=1}^n \int_\Omega b_j(t)\frac{\partial \phi'}{\partial x_j}(t)v_m'(t)dx \leq (nc\alpha)^2 + \frac{1}{4}|v_m'(t)|^2.$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \int_\Omega b_j(t)\frac{\partial \phi'}{\partial x_j}(t)v_m'(t)dx \leq k_5 + \frac{1}{4}|v_m'(t)|^2. \tag{2.20}$$

onde $k_5 = (nc\alpha)^2$.

Por outro lado, das desigualdades de Cauchy- Schwarz e Young(com $\eta = 1$), obtemos

$$\int_\Omega \Delta\phi(t)v_m'(t)dx \leq |\Delta\phi(t)||v_m'(t)| \leq |\Delta\phi(t)|^2 + \frac{1}{4}|v_m'(t)|^2.$$

Recordemos que $\phi(x,t) = y^0(x) + ty^1(x)$ daí, pela linearidade do operador "Δ" e pelo fato de $t < T$, segue que

$$|\Delta\phi(t)| = |\Delta y^0 + t\Delta y^1| \leq |\Delta y^0| + T|\Delta y^1| \leq C_T < \infty,$$

notemos que a desigualdade acima faz sentido pois $y^1, y^0 \in H^2(\Omega)$. Donde

$$\int_\Omega \Delta\phi(t)v_m'(t)dx \leq k_6 + \frac{1}{4}|v_m'(t)|^2. \tag{2.21}$$

com $k_6 = (|\Delta y^0| + T|\Delta y^1|)^2$. E,das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, obtemos

$$\int_{\Gamma_0} -\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(t)v_m'(t)d\Gamma \leq \Big|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(t)\Big|_{\Gamma_0}|v_m'(t)|_{\Gamma_0} \leq \widetilde{k}_7(\eta)\Big|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(t)\Big|^2_{\Gamma_0} + \eta|v_m'(t)|^2_{\Gamma_0}$$

e

$$\Big|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(t)\Big|_{\Gamma_0} \leq \Big|\frac{\partial y^0}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_0} + T\Big|\frac{\partial y^1}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_0}$$

e, por resultados do estudo do traço de ordem 1(seção (1.5)) existe $c_1 > 0$ tal que

$$\Big|\frac{\partial y^1}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_0} \leq c_1\|y^1\|_{H^2(\Omega)} < \infty \quad e \quad \Big|\frac{\partial y^0}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_0} \leq c_1\|y^0\|_{H^2(\Omega)} < \infty$$

pois, por hipótese, $y^0, y_1 \in H^2(\Omega)$.

Logo,

$$\int_{\Gamma_0} -\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(t)v_m'(t)d\Gamma \leq k_7(\eta) + \eta|v_m'(t)|^2_{\Gamma_0}. \tag{2.22}$$

onde $k_7(\eta) = \widetilde{k}_7(\eta)\Big(\Big|\frac{\partial y^0}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_0} + T\Big|\frac{\partial y^1}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_0}\Big)$.

Segue então de $(2.19), (2.31), (2.21)$ e (2.22) que

$$(\widehat{F}(t), v_m'(t)) + (G(t), v_m'(t))_{\Gamma_0} \leq k_8(\eta) + \frac{1}{2}|v_m'|^2 + \eta|v_m'(t)|^2_{\Gamma_0} \tag{2.23}$$

onde $k_8(\eta) = k_5 + k_6 + k_7(\eta) > 0$.

Estamos, enfim, em condições de obter nossa primeira estimativa. Para tal, vamos integrar (2.15) em $(0,t)$, $t < T$, o que acarreta

$$\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2 - \frac{1}{2}|v_m'(0)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2 - \frac{1}{2}|\nabla v_m(0)|^2 + \int_{\Gamma_0}(F(v_m(t)+\phi(t)))d\Gamma$$
$$-\int_{\Gamma_0}(F(v_m(0)+\phi(0)))d\Gamma + \int_0^t (g(v_m'(s)+\phi'(s)), v_m'(s)+\phi'(s))_{\Gamma_0}ds$$
$$+\sum_{j=1}^n \int_0^t (b_j(s)\frac{\partial v_m'}{\partial x_j}(s), v_m'(s))ds = \int_0^t \left\{(\widehat{F}(s), v_m'(s)) + (G(s), v_m'(s))_{\Gamma_0}\right\}ds$$
$$+\int_0^t (f(v_m(s)+\phi(s)), \phi'(s))_{\Gamma_0}ds + \int_0^t (g(v_m'(s)+\phi'(s)), \phi'(s))_{\Gamma_0}ds$$

Usando o fato de $v_m'(0) = 0 = v_m(0)$(consequentemente, $\nabla v_m(0) = 0$) como também, (2.6) e (2.9), obtemos

$$\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2 \leq -C\int_{\Gamma_0}|v_m(t)+\phi(t)|^{\gamma+2}d\Gamma$$
$$+C\int_{\Gamma_0}|v_m(0)+\phi(0)|^{\gamma+2}d\Gamma - C_1\int_0^t\int_{\Gamma_0}|v_m'(s)+\phi'(s)|^{\rho+2}d\Gamma ds$$
$$-\sum_{j=1}^n \int_0^t (b_j(s)\frac{\partial v_m'}{\partial x_j}(s), v_m'(s))ds + \int_0^t \left\{(\widehat{F}(s), v_m'(s)) + (G(s), v_m'(s))_{\Gamma_0}\right\}ds$$
$$+\int_0^t (f(v_m(s)+\phi(s)), \phi'(s))_{\Gamma_0}ds + \int_0^t (g(v_m'(s)+\phi'(s)), \phi'(s))_{\Gamma_0}ds.$$

Pelas estimativas encontradas em $(2.16), (2.17), (2.18)$ e (2.23), segue

$$\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2 + C\|v_m(t)+\phi(t)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2} +$$
$$(C_1-\eta)\int_0^t \|v_m'(s)+\phi'(s)\|_{\rho+2,\Gamma_0}^{\rho+2}ds + (\frac{\delta}{2}-\eta)\int_0^t |v_m'(s)|_{\Gamma_0}^2 ds$$
$$\leq C\|v_m(0)+\phi(0)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2} + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega div(b(s))|v_m'(s)|^2 dxds$$
$$+\int_0^t \left\{k_8(\eta) + \frac{1}{2}|v_m'(s)|^2\right\}ds + \int_0^t k_4(\eta)\|\phi'(s)\|_{\rho+2,\Gamma_0}^{\rho+2}ds$$
$$+\int_0^t \left\{k_3 + k_2\|v_m(s)+\phi(s)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2}\right\}ds$$

Consideremos $\eta < \min\{C_1, \frac{\delta}{2}\}$ e $k_0 = C\|v_m(0)+\phi(0)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2} + Tk_8 + Tk_3 + k_4\|\phi'(s)\|_{\rho+2,\Gamma_0}^{\rho+2}$, nessas condições, temos

$$\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2 + C\|v_m(t)+\phi(t)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2}$$
$$+(C_1-\eta)\int_0^t \|v_m'(s)+\phi'(s)\|_{\rho+2,\Gamma_0}^{\rho+2}ds + (\frac{\delta}{2}-\eta)\int_0^t |v_m'(s)|_{\Gamma_0}^2 ds$$
$$\leq k_0 + \int_0^t \left\{\frac{1}{2}|v_m'(s)|^2 + k_2\|v_m(s)+\phi(s)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2}\right\}ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega div(b(s))|v_m'(s)|^2 dxds$$

onde k_0 é uma constante positiva que depende de T.

Notemos que $(C_1-\eta),(\frac{\delta}{2}-\eta)>0$ de acordo com a escolha de η, logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2+C\|v_m(t)+\phi(t)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2} &\leq \frac{1}{2}|v_m'(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2+C\|v_m(t)+\phi(t)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2}\\ &+(C_1-\eta)\int_0^t\|v_m'(s)+\phi'(s)\|_{\rho+2,\Gamma_0}^{\rho+2}ds+(\frac{\delta}{2}-\eta)\int_0^t|v_m'(s)|_{\Gamma_0}^2ds\\ &\leq k_0+\int_0^t\Big\{\frac{1}{2}|v_m'(s)|^2+\frac{k_2}{C}C\|v_m(s)+\phi(s)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2}\Big\}ds\\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega div(b(s))|v_m'(s)|^2dxds.\end{aligned}$$

Tomando $\widetilde{C}=\max\{1,\frac{K_2}{C}\}$, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2+C\|v_m(t)+\phi(t)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2}\leq k_0+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega div(b(s))|v_m'(s)|^2dxds\\ &+\int_0^t\widetilde{C}\Big\{\frac{1}{2}|v_m'(s)|^2+C\|v_m(s)+\phi(s)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2}\Big\}ds.\end{aligned}$$

Assim, estamos em condições de usar a Desigualdade de Gronwall Generalizada (lema (1.6))e, portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2+C\|v_m(t)+\phi(t)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2} &\leq \Big(k_0+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega div(b(s))|v_m'(s)|^2dxds\Big)\exp^{\int_0^t\widetilde{C}ds}\\ &\leq \widetilde{k}_0+\widetilde{C}_0\int_0^t\int_\Omega div(b(s))|v_m'(s)|^2dxds\end{aligned}$$

onde, $\widetilde{k}_0=k_0\exp^{\int_0^T\widetilde{C}ds}$ e $\widetilde{C}_0=\frac{1}{2}\exp^{\int_0^T\widetilde{C}ds}$.

Desde que $b_j\in W^{1,\infty}(0,\infty;C(\overline{\Omega}))$ temos $div(b)\in L^\infty(\Omega)$, donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2 &\leq \frac{1}{2}|v_m'(t)|^2+C\|v_m(t)+\phi(t)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2}\\ &\leq \widetilde{k}_0+\widetilde{C}_0\int_0^t\int_\Omega div(b(s))|v_m'(s)|^2dxds\\ &\leq \widetilde{k}_0+\widetilde{C}_0\int_0^t2\|div(b(s))\|_\infty\Big(\frac{1}{2}|v_m'(s)|^2\Big)ds\end{aligned}$$

o que acarreta, da Desigualdade de Gronwall (lema (1.5)),

$$\frac{1}{2}|v_m'(t)|^2\leq\widetilde{k}_1$$

com $\widetilde{k}_1>0$ e dependendo apenas de T.E assim, existe $L_1>0$ que independe de $t\in[0,T]$ e $m\in\mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned}&|v_m'(t)|^2+|\nabla v_m(t)|^2+\|v_m(t)+\phi(t)\|_{\gamma+2,\Gamma_0}^{\gamma+2}\\ &+\int_0^t\|v_m'(s)+\phi'(s)\|_{\rho+2,\Gamma_0}^{\rho+2}ds+\int_0^t|v_m'(s)|_{\Gamma_0}^2ds\leq L_1.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Donde concluímos que

$$\begin{aligned}
&\{v'_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\\
&\{v_m\} \ \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V)\\
&\{v_m\} \text{ é limitada em} L^\infty(0,T;L^{\gamma+2}(\Gamma_0))\\
&\{v'_m\} \text{ é limitada em} L^2(0,T;L^{\rho+2}(\Gamma_0))\\
&\{v'_m\} \text{ é limitada em} L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)).
\end{aligned}$$

A Segunda Estimativa

Nesta seção, nosso objetivo inicial é estimar o valor de $|y''(0)|$. Para tal, considere $w = v''_m(0)$ em (2.13). Assim,

$$\begin{aligned}
&(v''_m(t), v''_m(0)) + (\nabla v_m(t), \nabla v''_m(0)) + (f(v_m(t) + \phi(t)), v''_m(0))_{\Gamma_0}\\
&+(g(v'_m(t) + \phi'(t)), v''_m(0))_{\Gamma_0} + \sum_{j=1}^{n}(b_j(t)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), v''_m(0))\\
&= (\widehat{F}(t), v''_m(0)) + (G(t), v''_m(0))_{\Gamma_0}, \quad \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Em particular, quando $t = 0$,

$$\begin{aligned}
&|v''_m(0)|^2 + (\nabla v_m(0), \nabla v''_m(0)) + (f(v_m(0) + \phi(0)), v''_m(0))_{\Gamma_0}\\
&+(g(v'_m(0) + \phi'(0)), v''_m(0))_{\Gamma_0} + \sum_{j=1}^{n}(b_j(0)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(0), v''_m(0))\\
&= (\widehat{F}(0), v''_m(0)) + (G(0), v''_m(0))_{\Gamma_0}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Como $v_m(0) = v'_m(0) = 0$, temos $\nabla v_m(0) = 0$ e $\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(0) = 0$, para $j \in \{1,\ldots,n\}$ e ainda, recordando que $\phi'(0) = y^1$ e $\phi(0) = y^0$, segue que

- $(\nabla v_m(0), \nabla v''_m(0)) = \sum_{j=1}^{n}(b_j(0)\dfrac{\partial v'_m}{\partial x_j}(0), v''_m(0)) = 0;$
- $(f(v_m(0) + \phi(0)), v''_m(0))_{\Gamma_0} = (f(y^0), v''_m(0))_{\Gamma_0};$
- $(g(v'_m(0) + \phi'(0)), v''_m(0))_{\Gamma_0} = (g(y^1), v''_m(0))_{\Gamma_0}.$

Portanto, das considerações acima e de $\widehat{F}(0) = \Delta y^0 - \sum_{j=1}^{n} b_j(0)\frac{\partial y^1}{\partial x_j}$ e $G(0) = -\frac{\partial y^0}{\partial \nu}$ a equação (2.25) se reduz a

$$\begin{aligned}
&|v''_m(0)|^2 + (f(y^0), v''_m(0))_{\Gamma_0} + (g(y^1), v''_m(0))_{\Gamma_0} = (\Delta y^0, v''_m(0))\\
&- \sum_{j=1}^{n}(b_j(0)\frac{\partial y^1}{\partial x_j}, v''_m(0)) + (-\frac{\partial y^0}{\partial \nu}, v''_m(0))_{\Gamma_0},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|v''_m(0)|^2 + (f(y^0) + g(y^1) + \frac{\partial y^0}{\partial \nu}, v''_m(0))_{\Gamma_0} = (\Delta y^0, v''_m(0)) - \sum_{j=1}^{n}(b_j(0)\frac{\partial y^1}{\partial x_j}, v''_m(0)).$$

Mas, $f(y^0) + g(y^1) + \frac{\partial y^0}{\partial \nu} = 0$ sobre Γ_0 por (2.10), o que acarreta

$$|v''_m(0)|^2 = (\Delta y^0, v''_m(0)) - \sum_{j=1}^{n}(b_j(0)\frac{\partial y^1}{\partial x_j}, v''_m(0)).$$

Agora, usando as desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |v''_m(0)|^2 &\leq |(\Delta y^0, v''_m(0))| + \sum_{j=1}^{n}|(b_j(0)\frac{\partial y^1}{\partial x_j}, v''_m(0))| \\ &\leq |\Delta y^0||v''_m(0)| + \sum_{j=1}^{n}|(b_j(0)\frac{\partial y^1}{\partial x_j}||v''_m(0)| \\ &\leq \left(|\Delta y^0| + \sum_{j=1}^{n}\left|b_j(0)\frac{\partial y^1}{\partial x_j}\right|\right)|v''_m(0)|, \end{aligned}$$

portanto, (supondo $v''_m(0) \neq 0$)

$$|v''_m(0)| \leq \left(|\Delta y^0| + \sum_{j=1}^{n}\left|b_j(0)\frac{\partial y^1}{\partial x_j}\right|\right).$$

Desde que $b_j(0) \in C^1(\overline{\Omega})$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $y^1 \in H^2(\Omega)$, temos $b_j(0)\frac{\partial y}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n}\left|b_j(0)\frac{\partial y^1}{\partial x_j}\right| < \infty.$$

E assim, existe $L_2 > 0$ tal que

$$|v''_m(0)| \leq L_2 \ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Seguindo, agora, para a segunda estimativa derivemos (2.13) com respeito a t. Logo,

$$\begin{aligned} &(v'''_m(t), w) + (\nabla v'_m(t), \nabla w) + (f'(v_m(t) + \phi(t))(v'_m(t) + \phi'(t)), w)_{\Gamma_0} \\ &+(g'(v'_m(t) + \phi'(t))(v''_m(t) + \phi''(t)), w)_{\Gamma_0} + \sum_{j=1}^{n}(b'_j(t)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), w) \\ &+\sum_{j=1}^{n}(b_j(t)\frac{\partial v''_m}{\partial x_j}(t), w) = (\widehat{F}'(t), w) + (G'(t), w)_{\Gamma_0} \ \ \forall w \in V_m. \end{aligned}$$

Fazendo $w = v''_m(t) = \sum_{i=1}^m g''_{im}(t)w_i \in V_m$ e observando que $\phi''(0) = 0$, obtemos

$$(v'''_m(t), v''_m(t)) + (\nabla v'_m(t), \nabla v''_m(t)) + (f'(v_m(t) + \phi(t))(v'_m(t) + \phi'(t)), v''_m(t))_{\Gamma_0}$$
$$+(g'(v'_m(t) + \phi'(t))v''_m(t), v''_m(t))_{\Gamma_0} + \sum_{j=1}^n (b'_j(t)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), v''_m(t))$$
$$+\sum_{j=1}^n (b_j(t)\frac{\partial v''_m}{\partial x_j}(t), v''_m(t)) = (\widehat{F}'(t), v''_m(t)) + (G'(t), v''_m(t))_{\Gamma_0}.$$

Assim, usando o mesmo argumento de (2.14),

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v'_m(t)|^2\right\} + \int_{\Gamma_0} f'(v_m(t) + \phi(t))(v'_m(t) + \phi'(t))v''_m(t)d\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_0} g'(v'_m(t) + \phi'(t))|v''_m(t)|^2 d\Gamma + \sum_{j=1}^n (b'_j(t)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), v''_m(t)) \tag{2.26}$$
$$+\sum_{j=1}^n (b_j(t)\frac{\partial v''_m}{\partial x_j}(t), v''_m(t)) = (\widehat{F}'(t), v''_m(t)) + (G'(t), v''_m(t))_{\Gamma_0}.$$

Vamos, então, estimar alguns termos da igualdade acima. São eles:

- $\displaystyle\sum_{j=1}^n (b_j(t)\frac{\partial v''_m}{\partial x_j}(t), v''_m(t)).$
- $\displaystyle\int_{\Gamma_0} f'(v_m(t) + \phi(t))(v'_m(t) + \phi'(t))v''_m(t)d\Gamma.$

Fazendo uso dos mesmos argumentos utilizados para estimar (2.16), obtemos

$$\sum_{j=1}^n (b_j(t)\frac{\partial v''_m}{\partial x_j}(t), v''_m(t)) \geq -\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|v''_m(t)|^2 dx + \frac{\delta}{2}|v''_m|^2_{\Gamma_0}. \tag{2.27}$$

Para analisar $\displaystyle\int_{\Gamma_0} f'(v_m(t) + \phi(t))(v'_m(t) + \phi'(t))v''_m(t)d\Gamma$ observemos que

$$|f'(s)| \leq C_0(1 + |s|^\gamma) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

por (2.5), e assim,

$$|f'(v_m(t) + \phi(t))| \leq C_0(1 + |v_m(t) + \phi(t)|^\gamma).$$

Logo,

$$\left|\int_{\Gamma_0} f'(v_m(t) + \phi(t))(v'_m(t) + \phi'(t))v''_m(t)d\Gamma\right|$$
$$\leq \int_{\Gamma_0} |f'(v_m(t) + \phi(t))(v'_m(t) + \phi'(t))v''_m(t)|d\Gamma$$
$$\leq \int_{\Gamma_0} |f'(v_m(t) + \phi(t))||v'_m(t) + \phi'(t)||v''_m(t)|d\Gamma$$
$$\leq C_0\int_{\Gamma_0} (1 + |v_m + \phi|^\gamma)|v'_m(t) + \phi'(t)||v''_m(t)|d\Gamma$$

ou seja,

$$\left|\int_{\Gamma_0} f'(v_m(t)+\phi(t))(v_m'(t)+\phi'(t))v_m''(t)d\Gamma\right| \leq C_0\int_{\Gamma_0}|v_m'(t)+\phi'(t)||v_m''(t)|d\Gamma$$
$$+C_0\int_{\Gamma_0}|v_m(t)+\phi(t)|^\gamma|v_m'(t)+\phi'(t)||v_m''(t)|d\Gamma.$$

Recordemos, da observação (2.2), que $V\hookrightarrow L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0)$, com isso

$$|v_m+\phi|^\gamma \in L^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma}}(\Gamma_0) \text{ e } |v_m'+\phi'|\in L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0)$$

e notemos que

$$\frac{1}{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma}}+\frac{1}{2(\gamma+1)}+\frac{1}{2}=1$$

donde, pela desigualdade generalizada de Hölder(Corolário (1.9)), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_0}|v_m(t)+\phi(t)|^\gamma|v_m'(t)+\phi'(t)||v_m''(t)|d\Gamma\\ &\qquad\leq \|v_m(t)+\phi(t)\|^\gamma_{2(\gamma+1),\Gamma_0}\|v_m'(t)\quad+\quad\phi'(t)\|_{2(\gamma+1),\Gamma_0}|v_m''(t)|_{\Gamma_0}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Agora, pela desigualdade de Young para $\eta>0$ arbitrário,

$$|v_m'(t)+\phi'(t)||v_m''(t)|\leq\frac{1}{4\eta}|v_m'(t)+\phi'(t)|^2+\eta|v_m''(t)|^2$$

assim,

$$\int_{\Gamma_0}|v_m'(t)+\phi'(t)||v_m''(t)|d\Gamma\leq\frac{1}{4\eta}|v_m'(t)+\phi'(t)|^2_{\Gamma_0}+\eta|v_m''(t)|^2_{\Gamma_0}.\tag{2.29}$$

Seja $\lambda_{2(\gamma+1)}>0$, tal que

$$\|v_m(t)+\phi(t)\|_{2(\gamma+1),\Gamma_0}\leq\lambda_{2(\gamma+1)}\|v_m(t)+\phi(t)\|_V=\lambda_{2(\gamma+1)}|\nabla v_m(t)+\nabla\phi(t)|.$$

Analogamente,

$$\|v_m'(t)+\phi'(t)\|_{2(\gamma+1),\Gamma_0}\leq\lambda_{2(\gamma+1)}|\nabla v_m'(t)+\nabla\phi'(t)|.$$

E, ainda, de $V\hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$, temos

$$|v_m'(t)+\phi'(t)|_{\Gamma_0}\leq\lambda_2|\nabla v_m'(t)+\nabla\phi'(t)|.$$

Portanto, das considerações acima e de (2.28) e (2.29), obtemos

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Gamma_0}f'(v_m(t)+\phi(t))(v_m'(t)+\phi'(t))v_m''(t)d\Gamma\right|\\ &\qquad\leq k_5(\eta)|\nabla v_m'+\nabla\phi'|^2+\eta|v_m''|^2_{\Gamma_0}\quad+\quad k_6|\nabla v_m+\nabla\phi|^\gamma|\nabla v_m'+\nabla\phi'||v_m''|_{\Gamma_0}\end{aligned}\tag{2.30}$$

onde $k_5(\eta)=\frac{\lambda_2}{4\eta}$ e $k_6=\lambda^{\gamma+1}_{2(\gamma+1)}$.

Observação 2.4 *Observe que as normas acima fazem sempre sentido, visto que v_m, v_m', ϕ e $\phi' \in V$.*

Na primeira estimativa obtemos

$$|\nabla v_m(t)| \leq L_1$$

portanto,

$$\begin{aligned}
&k_6|\nabla v_m(t) + \nabla\phi(t)|^\gamma |\nabla v_m'(t) + \nabla\phi'(t)||v_m''(t)|_{\Gamma_0} \\
&\leq k_6(|\nabla v_m(t)| + |\nabla\phi(t)|)^\gamma |\nabla v_m'(t) + \nabla\phi'(t)||v_m''(t)|_{\Gamma_0} \\
&\leq L_1^*|\nabla v_m'(t) + \nabla\phi'(t)||v_m''(t)|_{\Gamma_0}
\end{aligned}$$

onde $L_1^* = k_6(L_1 + |\nabla\phi(t)|)^\gamma$.

Utilizando novamente a desigualdade de Young, obtemos

$$L_1^*|\nabla v_m'(t) + \nabla\phi'(t)||v_m''(t)|_{\Gamma_0} \leq k_5'(\eta)(L_1^*)^2|\nabla v_m'(t) + \nabla\phi'(t)|^2 + \eta|v_m''(t)|_{\Gamma_0}^2$$

e, assim,

$$k_6|\nabla v_m(t)+\nabla\phi(t)|^\gamma|\nabla v_m'(t)+\nabla\phi'(t)||v_m''(t)|_{\Gamma_0} \leq k_5'(\eta)(L_1^*)^2|\nabla v_m'(t)+\nabla\phi'(t)|^2+\eta|v_m''(t)|_{\Gamma_0}^2$$

o que, substituindo em (2.30), implica

$$\left|\int_{\Gamma_0} f'(v_m(t) + \phi(t))(v_m'(t) + \phi'(t))v_m''(t)d\Gamma\right| \leq k_7(\eta)|\nabla v_m'(t) + \nabla\phi'(t)|^2 + 2\eta|v_m''(t)|_{\Gamma_0}^2 \tag{2.31}$$

com $k_7(\eta) = k_5(\eta) + k_5'(\eta)(L_1^*)^2$. Assim, de (2.26),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|v_m''(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_m'(t)|^2\right\} &= -\int_{\Gamma_0} f'(v_m(t) + \phi(t))(v_m'(t) + \phi'(t))v_m''(t)d\Gamma - \\
&- \int_{\Gamma_0} g'(v_m'(t) + \phi'(t))|v_m''(t)|^2 d\Gamma - \sum_{j=1}^n (b_j'(t)\frac{\partial v_m'}{\partial x_j}(t), v_m''(t)) - \\
&- \sum_{j=1}^n (b_j(t)\frac{\partial v_m''}{\partial x_j}(t), v_m''(t)) + (\widehat{F}'(t), v_m''(t)) + (G'(t), v_m''(t))_{\Gamma_0}
\end{aligned}$$

e, pelas estimativas obtidas em (2.27) e (2.31)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|v_m''(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_m'(t)|^2\right\} \leq k_7(\eta)|\nabla v_m' + \nabla\phi'|^2 + 2\eta|v_m''|_{\Gamma_0}^2 \\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|v_m''(t)|^2 dx - \frac{\delta}{2}|v_m''(t)|_{\Gamma_0}^2 - \int_{\Gamma_0} g'(v_m'(t) + \phi'(t))|v_m''(t)|^2 d\Gamma \\
&- \sum_{j=1}^n (b_j'(t)\frac{\partial v_m'}{\partial x_j}(t), v_m''(t)) + (\widehat{F}'(t), v_m''(t)) + (G'(t), v_m''(t))_{\Gamma_0}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Agora, observemos que

- $-\displaystyle\int_{\Gamma_0} g'(v'_m(t)+\phi'(t))|v''_m(t)|^2 d\Gamma \leq 0;$

- $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(b'_j(t)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), v''_m(t))\right| \leq k_8(|\nabla v_m(t)|^2 + |v''_m(t)|^2);$

- $(\widehat{F}'(t), v''_m(t)) \leq \dfrac{1}{2}|\widehat{F}'(t)|^2 + \dfrac{1}{2}|v''_m(t)|^2;$

- $(G'(t), v''_m(t))_{\Gamma_0} \leq k_9(\eta)|G'(t)|^2_{\Gamma_0} + \eta|v''_m(t)|^2_{\Gamma_0}.$

De fato, como g é, por hipótese, não decrescente, segue que

$$g'(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

logo

$$g'(v'_m(t)+\phi'(t)) \geq 0$$

acarretando em

$$-\int_{\Gamma_0} g'(v'_m(t)+\phi'(t))|v''_m(t)|^2 d\Gamma \leq 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}(b'_j(t)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), v''_m(t))\right| &\leq n\max_{1\leq j\leq n}(\|b_j\|_\infty \left|\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t)\right| |v''_m(t)| \\ &\leq n\max_{1\leq j\leq n}\|b_j\|_\infty |\nabla v'_m(t)||v''_m(t)| \\ &\leq \frac{n\max\limits_{1\leq j\leq n}\|b_j\|_\infty}{2}(|\nabla v'_m(t)|^2 + |v''_m(t)|^2)\end{aligned}$$

onde, a última desigualdade segue da desigualdade de Young. Portanto, escrevendo $k_8 = \dfrac{n\max\limits_{1\leq j\leq n}\|b_j\|_\infty}{2}$, segue

$$\left|\sum_{j=1}^{n}(b'_j(t)\frac{\partial v'_m}{\partial x_j}(t), v''_m(t))\right| \leq k_8(|\nabla v'_m(t)|^2 + |v''_m(t)|^2).$$

Por fim, utilizando mais uma vez as desigualdades de Young, obtemos

$$(\widehat{F}'(t), v''_m(t)) \leq \frac{1}{2}|\widehat{F}'(t)|^2 + \frac{1}{2}|v''_m(t)|^2$$

$$(G'(t), v''_m(t))_{\Gamma_0} \leq k_9(\eta)|G'(t)|^2_{\Gamma_0} + \eta|v''_m(t)|^2_{\Gamma_0}$$

para $\eta > 0$ arbitrário.

Assim, substituindo as estimativas obtidas acima em (2.32), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla v'_m(t)|^2\right\}\leq k_7(\eta)|\nabla v'_m(t)+\nabla\phi'(t)|^2$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|v''_m(t)|^2dx+(3\eta-\frac{\delta}{2})|v''_m(t)|^2_{\Gamma_0}$$
$$+k_8(|\nabla v_m(t)|^2+|v''_m(t)|^2)+\frac{1}{2}|\widehat{F}'(t)|^2+\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2+k_9(\eta)|G'(t)|^2_{\Gamma_0}.$$

Mas,

- $\displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|v''_m(t)|^2dx\leq\frac{1}{2}\|div(b)\|_\infty|v''_m(t)|^2;$
- $\displaystyle|\widehat{F}'(t)|^2=\left|\Delta\phi'(t)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi''}{\partial x_j}(t)\right|^2=|\Delta\phi'(t)|^2=|\Delta y^1|^2<\infty;$
- $\displaystyle|G'(t)|^2_{\Gamma_0}=\left|\frac{\partial\phi'}{\partial\nu}(t)\right|^2_{\Gamma_0}=\left|\frac{\partial y^1}{\partial\nu}\right|^2_{\Gamma_0}<\infty;$

logo,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla v'_m(t)|^2\right\}+(\frac{\delta}{2}-3\eta)|v''_m(t)|^2_{\Gamma_0}$$
$$\leq L_3(\eta)+(\|div(b)\|_\infty+1+2k_8)\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2+2k_8\frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2$$

onde $L_3(\eta)=\dfrac{1}{2}|\widehat{F}'(t)|^2+k_9(\eta)|G'(t)|^2_{\Gamma_0}$.

Escolha $\eta>0$ de tal forma que $\eta<\frac{\delta}{6}$, e seja $k_{10}=(\|div(b)\|_\infty+1+2k_8)$, assim

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla v'_m(t)|^2\right\}+(\frac{\delta}{2}-3\eta)|v''_m(t)|^2_{\Gamma_0}$$
$$\leq L_3+k_{10}\Big(\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2\Big).$$

Agora, integrando a desigualdade acima em $(0,t)$ $(t\leq T)$, obtemos

$$\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla v'_m(t)|^2-\frac{1}{2}|v''_m(0)|^2-\frac{1}{2}|\nabla v'_m(0)|^2+(\frac{\delta}{2}-3\eta)\int_0^t|v''_m(s)|^2_{\Gamma_0}ds$$
$$\leq TL_3+\int_0^t k_{10}\Big(\frac{1}{2}|v''_m(s)|^2+\frac{1}{2}|\nabla v_m(s)|^2\Big)ds$$

implicando em

$$\frac{1}{2}|v''_m(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla v'_m(t)|^2+(\frac{\delta}{2}-3\eta)\int_0^t|v''_m(s)|^2_{\Gamma_0}ds$$
$$\leq TL_3+L_2+\int_0^t k_{10}\Big(\frac{1}{2}|v''_m(s)|^2+\frac{1}{2}|\nabla v_m(s)|^2\Big)ds$$

pois $\frac{1}{2}|v''_m(0)|^2 \leq |v''_m(0)|^2 \leq L_2$ e $\frac{1}{2}|\nabla v'_m(0)|^2 = 0$.

Daí, pela desigualdade de Gronwall, obtemos

$$|v''_m(t)|^2 + |\nabla v'_m(t)|^2 + \int_0^t |v''_m(s)|^2_{\Gamma_0} ds \leq L_4$$

onde L_4 é uma constante positiva que independe de $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,T]$. Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\{v''_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\
&\{v'_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V) \\
&\{v''_m\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)).
\end{aligned}$$

2.1.2 Análise dos termos não lineares

Nosso próximo objetivo é passar o limite no problema aproximado (2.13), mas antes precisamos obter estimativas para as condições de contorno não lineares no lado esquerdo de (2.13) contendo f e g. É importante observar que estes termos não foram incluídos na primeira tampouco na segunda estimativa e, por isso, iremos analisá-los aqui.

Note que, pela hipótese (2.5), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Gamma_0} |f(v_m+\phi)|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}} d\Gamma dt &\leq C_0^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (1+|v_m+\phi|^{\gamma+1})^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}} d\Gamma dt \\
&= C_0^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}} \int_0^T \|1+|v_m+\phi|^{\gamma+1}\|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}_{\frac{\gamma+2}{\gamma+1},\Gamma_0} dt \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade triangular e o fato de $\|v_m+\phi\|_{\gamma+2} \leq L_1$ (pela primeira estimativa), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|1+|v_m+\phi|^{\gamma+1}\|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}_{\frac{\gamma+2}{\gamma+1},\Gamma_0} dt &\leq \int_0^T (med(\Gamma_0) + \|v_m+\phi\|_{\gamma+2,\Gamma_0})^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}} dt \\
&\leq \int_0^T (med(\Gamma_0) + L_1)^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}} dt
\end{aligned}$$

portanto, escrevendo $L = C_0^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}} T (med(\Gamma_0)+L_1)^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} |f(v_m+\phi)|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}} d\Gamma dt \leq L,$$

ou seja,

$$f(v_m+\phi) \in L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(\Sigma_{0,T})$$

onde $\Sigma_{0,T} = \Gamma_0 \times [0,T]$.

Utilizando argumentos análogos, a partir de (2.9), obtemos

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} |g(v_m' + \phi')|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} d\Gamma dt \leq L,$$

assim,

$$g(v_m' + \phi') \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma_{0,T}),$$

e ainda, como L independe de $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\{f(v_m + \phi)\} \text{ e } \{g(v_m' + \phi')\}$$

são limitadas em $L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(\Sigma_{0,T})$ e $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma_{0,T})$, respectivamente.

Desde que $L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(\Sigma_{0,T})$ e $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma_{0,T})$ são reflexivos, existem subsequências de $\{f(v_m+\phi)\}$ e de $\{g(v_m'+\phi')\}$, as quais continuaremos denotando por $\{f(v_m+\phi)\}$ e $\{g(v_m'+\phi')\}$ tais que

$$f(v_m + \phi) \rightharpoonup \chi \text{ fraco em } L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(\Sigma_{0,T})$$

$$g(v_m' + \phi') \rightharpoonup \zeta \text{ fraco em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma_{0,T}).$$

Mostraremos que, existe v tal que

$$\chi = f(v + \phi) \text{ e } \zeta = g(v' + \phi').$$

Sabemos, da teoria do traço que

$$\|v_m\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \leq \lambda_0 |\nabla v\|, \quad \forall v \in V$$

e, da primeira estimativa,

$$|\nabla v_m| \leq L_1, \quad \forall t \in [0,T], \forall m \in \mathbb{N}$$

logo, $\{v_m\}$ é limitada em $L^2(0,T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))$.

Desde que $V \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$, temos

$$|v_m'|_{\Gamma_0} \leq \lambda_2 |\nabla v_m'|$$

portanto, $\{v_m'\}$ é limitada em $L^2(0,T; L^2(\Gamma_0))$. Agora, como a imersão $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$ é contínua e compacta, pelo Teorema de Aubin-Lions (teorema (1.45)) existe uma subsequência $\{v_{mk}\} \subset \{v_m\}$, a qual continuaremos denotando por $\{v_m\}$, que converge forte em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$. Seja, então, $v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$ este limite.

Analogamente, pela limitação de $\{\nabla v'_m\}$ obtida na segunda estimativa, temos $\{v'_m\}$ limitada em $L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))$ e,também da segunda estimativa, temos que $\{v''_m\}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$. Assim, pelo Teorema de Aubin-Lions, temos que $\{v'_m\}$ converge forte para v' em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$.

De acordo com as convergências acima, podemos concluir que existem subsequências de $\{v_m\}$ e de $\{v'_m\}$, as quais continuaremos denotando por $\{v_m\}$ e $\{v'_m\}$, tais que

$$\begin{aligned} v_m &\longrightarrow v \;\text{ q.t.p em }\; \Sigma_{0,T}, \\ v'_m &\longrightarrow v' \;\text{ q.t.p em }\; \Sigma_{0,T}. \end{aligned}$$

Agora, como $f, g \in C^1$, segue que

$$\begin{aligned} f(v_m+\phi) &\longrightarrow f(v+\phi) \;\text{ q.t.p em }\; \Sigma_{0,T}, \\ g(v'_m+\phi') &\longrightarrow g(v'+\phi') \;\text{ q.t.p em }\; \Sigma_{0,T} \end{aligned}$$

daqui e das limitações de $f(v_m+\phi)$ e $g(v'_m+\phi')$ em $L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(\Sigma_{0,T})$ e $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma_{0,T})$, respectivamente e utilizando o Lema de Lions (lema (1.46)), obtemos

$$\begin{aligned} f(v_m+\phi) &\longrightarrow f(v+\phi) \;\text{ fraco em }\; L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(\Sigma_{0,T}), \\ g(v'_m+\phi') &\longrightarrow g(v'+\phi') \;\text{ fraco em }\; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma_{0,T}). \end{aligned}$$

Das imersões $V \hookrightarrow L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0)$ e $V \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Gamma_0)$, das hipóteses (2.5) e (2.10) e, utilizando os mesmos argumentos de (2.33), obtemos uma constante L que independe de $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma_0} |f(v_m+\phi)|^2 d\Gamma dt \leq L, \\ \int_0^T \int_{\Gamma_0} |g(v'_m+\phi')|^2 d\Gamma dt \leq L \end{aligned}$$

donde concluímos, pelo Lema de Lions que

$$\begin{aligned} f(v_m+\phi) &\longrightarrow f(v+\phi) \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)), \\ g(v'_m+\phi') &\longrightarrow g(v'+\phi') \;\text{ fraco em }\; L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)) \end{aligned}$$

o que é suficiente para passar o limite no problema aproximado (2.13).

2.1.3 Passagem ao Limite

Tome $j \in \mathbb{N}$, $m \geq j$ e seja $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Multiplicando a equação de (2.13) por θ e integrando em $[0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (v_m''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v_m(t), \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(v_m(t)+\phi(t)), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t)), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \sum_{j=1}^n \int_0^T (b_j(t)\frac{\partial v_m'}{\partial x_j}(t), w_j)\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (\widehat{F}(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (G(t), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt\end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $w_j \in \{w_\lambda\}$ que é a base Hilbertiana de $V \cap H^2(\Omega)$.

Pelas limitações de $\{v_m''\}$ e de $\{\nabla v_m\}$ obtidas na segunda e primeira estimativas, respectivamente, e da reflexividade de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, obtemos subsequências $\{v_{mk}''\} \subset \{v_m''\}$ e $\{\nabla v_{mk}\} \subset \{\nabla v_m\}$, as quais continuaremos denotando por $\{v_m''\}$ e $\{\nabla v_m\}$ tais que

$$\begin{aligned} v_m'' &\longrightarrow v'' \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \nabla v_m &\longrightarrow \nabla v \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Assim, fazendo $m \to \infty$ em (2.34), e utilizando as convergências obtidas acima, segue que

$$\begin{aligned}&\int_0^T (v''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v(t), \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(v(t)+\phi(t)), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (g(v'(t)+\phi'(t)), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \sum_{j=1}^n \int_0^T (b_j(t)\frac{\partial v'}{\partial x_j}(t), w_j)\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (\widehat{F}(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (G(t), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Agora, desde que $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V, o resultado acima vale para todo $w \in V$, isto é, fazendo $j \to \infty$ na equação acima encontramos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (v''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v(t), \nabla w)\theta(t)dt + \int_0^T (f(v(t)+\phi(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (g(v'(t)+\phi'(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \sum_{j=1}^n \int_0^T (b_j(t)\frac{\partial v'}{\partial x_j}(t), w)\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (\widehat{F}(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (G(t), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt, \ \ \forall w \in V, \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T),\end{aligned} \tag{2.35}$$

em particular, a equação acima é válida para $w \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$, isto é,

$$\begin{aligned}&\int_0^T (v''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v(t), \nabla w)\theta(t)dt + \sum_{j=1}^n \int_0^T (b_j(t)\frac{\partial v'}{\partial x_j}(t), w)\theta(t)dt = \\ &= \int_0^T (\widehat{F}(t), w)\theta(t)dt, \;\; \forall w \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T),\end{aligned} \tag{2.36}$$

visto que w se anula na fronteira de Ω, e ainda, pela fórmula de Green, temos

$$(\nabla v(t), \nabla w) = -(\Delta v(t), w) \;\; \forall w \in \mathcal{D}(\Omega)$$

o que, substituindo em (2.36), acarreta

$$\begin{aligned}&\int_0^T (v''(t), w)\theta(t)dt - \int_0^T (\Delta v(t), w)\theta(t)dt + \sum_{j=1}^n \int_0^T (b_j(t)\frac{\partial v'}{\partial x_j}(t), w)\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (\widehat{F}(t), w)\theta(t)dt, \;\; \forall w \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).\end{aligned} \tag{2.37}$$

Tomemos $w\theta$, com $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, logo

- $\displaystyle\int_0^T (v''(t), w)\theta(t)dt = \langle v'', w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$;
- $\displaystyle\int_0^T (\Delta v(t), w)\theta(t)dt = \langle \Delta v, w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$;
- $\displaystyle\int_0^T (b_j(t)\frac{\partial v'}{\partial x_j}(t), w)\theta(t)dt = \langle b_j\frac{\partial v'}{\partial x_j}, w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$;
- $\displaystyle\int_0^T (\widehat{F}(t), w)\theta(t)dt = \langle \widehat{F}, w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$,

onde $Q = \Omega \times (0,T)$. Assim, substituindo as igualdades acima em (2.37),

$$\langle v'', w\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)} - \langle \Delta v, w\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)} + \sum_{j=1}^n \langle b_j\frac{\partial v'}{\partial x_j}, w\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)} = \langle \widehat{F}, w\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)}$$

e, usando o fato de $w\theta$, com $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ ser denso em $\mathcal{D}(Q)$, obtemos

$$\langle v'', \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \langle \Delta v, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \sum_{j=1}^n \langle b_j\frac{\partial v'}{\partial x_j}, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = \langle \widehat{F}, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(Q)$. Ou ainda,

$$\left\langle v'' - \Delta v + \sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial v'}{\partial x_j} - \widehat{F}, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(Q)$. Donde, concluímos

$$v'' - \Delta v + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial v'}{\partial x_j} - \widehat{F} = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Agora, desde que $v'', b_j \dfrac{\partial v'}{\partial x_j}$ e $\widehat{F} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$, obtemos $-\Delta v \in L^2(Q)$, e portanto,

$$v'' - \Delta v + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial v'}{\partial x_j} - \widehat{F} = 0 \text{ em } L^2(Q).$$

Fazendo $v(x,t) = y(x,t) - \phi(x,t)$, obtemos

$$y'' - \Delta y + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j} = 0 \text{ em } L^2(Q). \tag{2.38}$$

Mostremos que $y(x,t) = v(x,t) + \phi(x,t)$ satisfaz as condições de fronteira de $(*)$.

Multiplicando a equação de (2.38) por $w\theta$ com $w \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando em $(0,t)$, obtemos

$$\int_0^T (y''(t), w)\theta(t)dt - \int_0^T (\Delta y(t), w)\theta(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \int_0^T (b_j(t)\frac{\partial y'}{\partial x_j}(t), w)\theta(t)dt = 0. \tag{2.39}$$

Como $y, \Delta y \in L^2(Q)$, resulta que $y \in \mathcal{H} \cap H^1(\Omega)$, logo, do lema (1.3)

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} \in L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0))$$

daí, usando a fórmula de Green generalizada em $(\Delta y(t), w)$ e substituindo em (2.39), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (y''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla y(t), \nabla w)\theta(t)dt - \int_0^T \langle \frac{\partial y}{\partial \nu}, w\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\theta(t)dt \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^T (b_j(t)\frac{\partial y'}{\partial x_j}(t), w)\theta(t)dt = 0 \ \forall w \in V, \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).\end{aligned} \tag{2.40}$$

Por outro lado, substituindo $y = v + \phi$ em (2.35), encontramos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (y''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla y(t), \nabla w)\theta(t)dt + \int_0^T (f(y(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (g(y'(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \int_0^T (b_j(t)\frac{\partial y'}{\partial x_j}(t), w)\theta(t)dt = 0, \ \ \forall w \in V, \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)\end{aligned} \tag{2.41}$$

e, comparando (2.40) e (2.41), obtemos

$$\int_0^T \langle \frac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) + g(y'), w\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\theta(t)dt = 0, \ \ \forall w \in V, \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$$

portanto,

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) + g(y') = 0 \text{ em } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0).$$

Mas, $f(y), g(y') \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$, donde podemos concluir

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)),$$

e assim,

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) + g(y') = 0 \text{ em } \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)).$$

Por fim, devemos mostrar que

$$y \in L^2_{loc}(0,\infty; H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \cap V)$$

para tal, considere o problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta y(t) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial y'}{\partial x_j}(t) - y''(t) \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ y(t) = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0,T) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu}(t) = -f(y(t)) - g(y'(t)) \text{ em } \Sigma_{0,T} \end{array} \right.$$

que, para quase todo t fixado é um problema elíptico, do qual y é solução. E, portanto, pela regularidade dos problemas elípticos (Proposição 1.47) temos a regularidade de y.

2.2 Condições Iniciais

Nosso objetivo, aqui, é mostrar que y satisfaz as condições iniciais inerentes ao problema $(*)$, ou seja, $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_1$. Para tal, vamos nos utilizar das informações conhecidas de v e, a partir delas, mostraremos o resultado para y.

Note que, de $\nabla v_m \rightharpoonup \nabla v$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, temos

$$|\nabla v(t)| \leq \liminf_{m} |\nabla v_m(t)| \leq L_1, \quad \forall t \in [0,T]$$

logo,

$$\|v(t)\|_V \leq L_1, \quad \forall t \in [0,T]$$

e, portanto,

$$v \in L^\infty(0,T;V). \tag{2.42}$$

Analogamente, temos

$$v' \in L^\infty(0,T;V). \tag{2.43}$$

Agora, temos $v''_m \rightharpoonup v''$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, portanto, pelo argumento utilizado acima, temos

$$v'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.44}$$

Assim, de (2.42), (2.43) e pela proposição (1.28), temos

$$v \in C([0,T];V)$$

ainda, desde que, $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos $v' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, e somando ao fato de valer (2.44) e pela proposição (1.28) obtemos

$$v' \in C([0,T];L^2(0,T)),$$

donde

$$v \in C([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(0,T)) \tag{2.45}$$

por isso, faz sentido calcular $v(0)$ e $v'(0)$ e, consequentemente, podemos falar de $y(0)$ e $y'(0)$.

Seja $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. De $v'_m \rightharpoonup v'$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, temos

$$\int_0^T (v'_m(t),w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (v'(t),w)\theta(t)dt \ \ \forall w \in L^2(\Omega)$$

daí, por integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}(v_m(T),w)\theta(T) \quad & -(v_m(0),w)\theta(0) - \int_0^T (v_m(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow (v(T),w)\theta(T) \\ & -(v(0),w)\theta(0) - \int_0^T (v(t),w)\theta'(t)dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega),\end{aligned}$$

ou seja,

$$-(v_m(0),w) - \int_0^T (v_m(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow -(v(0),w) - \int_0^T (v(t),w)\theta'(t)dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega)$$

e, pela convergência de $v_m \rightharpoonup v$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, podemos concluir que

$$\int_0^T (v_m(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (v(t),w)\theta'(t)dt \ \ \forall w \in L^2(\Omega).$$

Assim,

$$\begin{aligned}(v_m(0),w) &= \int_0^T (v_m(t),w)\theta'(t)dt - \Big\{ -(v_m(0),w) - \int_0^T (v_m(t),w)\theta'(t)dt\Big\} \\ &\longrightarrow \int_0^T (v(t),w)\theta'(t)dt - \Big\{ -(v(0),w) - \int_0^T (v(t),w)\theta'(t)dt\Big\} \\ &= (v(0),w), \quad \forall w \in L^2(\Omega).\end{aligned}$$

Como $v_m(0) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, temos

$$(v(0),w) = 0 \ \ \forall w \in L^2(\Omega),$$

portanto,

$$v(0) = 0.$$

Por argumentos inteiramente análogos, concluímos

$$v'(0) = 0.$$

Daí, pelo exposto acima e por

$$y(x,t) = v(x,t) + \phi(x,t)$$

obtemos,

$$y(x,0) = v(x,0) + \phi(x,0) = y_0(x) \ \text{ e } \ y'(x,0) = v'(x,0) + \phi'(x,0) = y_1(x).$$

2.3 Unicidade

Para mostrar a unicidade da solução de $(*)$, vamos tomar duas soluções que satisfazem o problema e, nos utilizando da desigualdade de Gronwall, concluíremos que elas são, necessariamente, a mesma.

Sejam y_1 e y_2 duas soluções regulares para o problema $(*)$. Então $z = y_1 - y_2$ verifica

$$\begin{aligned}&(z''(t),w) + (\nabla z(t),\nabla w) + \sum_{j=1}^{n}(b_j(t),\frac{\partial z'}{\partial x_j}(t),w) = (g(y_2'(t)) - g(y_1'(t)),w)_{\Gamma_0} \\ &+(f(y_2(t)(t)) - f(y_1),w)_{\Gamma_0}, \quad \forall w \in V,\end{aligned}$$

em particular, quando $w = z'(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z(t)|^2\Big\} + \sum_{j=1}^{n}(b_j(t),\frac{\partial z'}{\partial x_j}(t),z'(t)) \\ &= (g(y_2'(t)) - g(y_1'(t)),z'(t))_{\Gamma_0} + (f(y_2(t)) - f(y_1(t)),z'(t))_{\Gamma_0}.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Agora, observe que,

- $-\sum_{j=1}^{n}(b_j(t), \frac{\partial z'}{\partial x_j}(t), z'(t)) \leq \|div(b)\|_\infty |z'(t)|^2 - \frac{\delta}{2}|z'(t)|^2_{\Gamma_0}$;
- $(g(y_2') - g(y_1'), z'(t))_{\Gamma_0} \leq 0$;
- $(f(y_2) - f(y_1), z'(t))_{\Gamma_0} \leq C(k_{11}(\eta)|\nabla z(t)|^2 + \eta|z'(t)|^2_{\Gamma_0})$ em $[0,T]$, onde C é uma constante positiva e $\eta > 0$ é arbitrário.

De fato, utilizando os mesmos argumentos introduzidos para estimar (2.16), obtemos

$$-\sum_{j=1}^{n}(b_j(t), \frac{\partial z'}{\partial x_j}(t), z'(t)) \leq \int_\Omega div(b)|z'|^2 dx - \frac{\delta}{2}|z'(t)|^2_{\Gamma_0}$$

e, por (2.1)

$$-\sum_{j=1}^{n}(b_j(t), \frac{\partial z'}{\partial x_j}(t), z'(t)) \leq \|div(b)\|_\infty |z'|^2 - \frac{\delta}{2}|z'(t)|^2_{\Gamma_0}.$$

Por hipótese, g é monótona não decrescente, assim, se $y_1'(t) \leq y_2'(t)$ sobre Γ_0, temos $g(y_1'(t)) \leq g(y_2'(t))$ sobre Γ_0, caso contrário, ou seja, se $y_2'(t) \leq y_1'(t)$ sobre Γ_0, temos $g(y_2'(t)) \leq g(y_1'(t))$ sobre Γ_0, portanto, em ambos os casos,

$$(g(y_2') - g(y_1'), z'(t))_{\Gamma_0} \leq 0.$$

Por fim, segue da hipótese (2.7) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned}
(f(y_2(t)) - f(y_1(t)), z'(t))_{\Gamma_0} &= (f(y_2(t)) - f(y_1(t)), y_1'(t) - y_2'(t))_{\Gamma_0} \\
&\leq D_1 \int_{\Gamma_0} (|y_2|^\gamma + |y_1|^\gamma)|z(t)||z'(t)| d\Gamma \\
&\leq D_1(|y_2(t)|^{2\gamma}_{2\gamma,\Gamma_0} + |y_1(t)|^{2\gamma}_{2\gamma,\Gamma_0})|z(t)|_{\Gamma_0}|z'(t)|_{\Gamma_0},
\end{aligned}$$

da desigualdade de Young, e da imersão de V em $L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0) \hookrightarrow L^{2\gamma}(\Gamma_0)$ e de $V \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$, obtemos

$$(f(y_2(t)) - f(y_1(t)), z'(t))_{\Gamma_0} \leq \widetilde{k}_{11}(\eta) D_1^2 (|y_2(t)|^{2\gamma}_{2\gamma,\Gamma_0} + |y_1(t)|^{2\gamma}_{2\gamma,\Gamma_0})^2 |z(t)|^2_{\Gamma_0} + \eta |z'(t)|^2_{\Gamma_0}.$$

Da teoria do traço e observando que $y_1, y_2 \in L^\infty(0,T;V)$, obtemos

$$(f(y_2) - f(y_1), z'(t))_{\Gamma_0} \leq k_{11}(\eta)(|\nabla z(t)|^2 + \eta |z'(t)|^2_{\Gamma_0}).$$

em $[0,T]$, onde $k_{11}(\eta) = \widetilde{k}_{11}(\eta) D_1^2 \lambda_{2\gamma}(\|\nabla y_1(t)\|_\infty + \|\nabla y_2(t)\|_\infty)$.

Daí, substituindo as estimativas acima em (2.46) e escolhendo $\eta < \frac{\delta}{2}$ encontramos

$$\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z(t)|^2\Big\} + \Big(\frac{\delta}{2} - \eta\Big)|z'(t)|^2_{\Gamma_0}$$
$$\leq 0 + L_4\Big(\frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z(t)|^2\Big)$$

em $[0,T]$, onde $L_4 = max\{2\|div(b)\|_\infty, 2C(k_{11}(\eta)\}$.

Assim, integrando ambos os membros em $(0,t)$, $t < T$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|z'(t)|^2 &- \frac{1}{2}|z'(0)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z(t)|^2 - \frac{1}{2}|\nabla z(0)|^2 + \Big(\frac{\delta}{2} - \eta\Big)\int_0^t |z'(s)|^2_{\Gamma_0} ds \\ &= \frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z(t)|^2 + \Big(\frac{\delta}{2} - \eta\Big)\int_0^t |z'(s)|^2_{\Gamma_0} ds \\ &\leq 0 + L_4\int_0^t \Big(\frac{1}{2}|z'(s)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z(s)|^2\Big) ds\end{aligned}$$

e, utilizando a desigualdade de Gronwal obtemos

$$\frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z(t)|^2 + \Big(\frac{\delta}{2} - \eta\Big)\int_0^t |z'(s)|^2_{\Gamma_0} ds \leq 0e^{L_4 t} = 0,$$

consequentemente,

$$|z'(t)| = |\nabla z(t)| = |z'(s)|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{em} \quad [0,T]$$

em particular, de $|z'(t)| = 0$ em $[0,T]$ segue que $z(t)$ é constante em $[0,T]$ para $T > 0$. E, desde que $z(0) = y_1(0) - y_2(0) = y_0 - y_0 = 0$ concluímos que $z(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$, donde $y_1(t) = y_2(t)$ para todo t, ou seja, a solução do problema $(*)$ é única.

Capítulo 3

Existência da Solução Fraca

No capítulo anterior, provamos a existência da solução forte para o problema $(*)$ com y^0 e y^1 suaves. Agora, se $f \equiv 0$ ou se f é uma função linear, por argumentos de densidade, podemos estender esse resultado para a solução fraca. E é esse o objetivo do capítulo que se inicia.

Observação 3.1 *Mostraremos a existência da solução fraca para o caso de $f \equiv 0$. O outro caso, ou seja, quando f é uma função linear, é análogo.*

Para o estudo da solução fraca, consideremos o seguinte acerca dos dados iniciais:

(H.1) Hipóteses sobre os dados iniciais: Consideramos os dados iniciais verificando

$$\{y_0, y_1\} \in V \times L^2(\Omega).$$

Com isso, nosso intuito, aqui, é mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Sob as hipóteses (A.1), (A.3) e (H.1) existe uma única função $y : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que*

$$y \in C([0,T]; V),\ \ y' \in C([0,T]; L^2(\Omega)$$

$$y'' - \Delta y + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \frac{\partial y'}{\partial x_j} = 0 \ \ em \ H^{-1}_{loc}(0,T; L^2(\Omega))$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + g(y') = 0 \ \ em \ (H^1_0(0,T; H^{3/2}(\Gamma_0)) \cap L^{\rho+2}(0,T; L^{\rho+2}(\Gamma_0))'$$

$$y(x,0) = y^0; \ \ y'(x,0) = y^1 \ \ em \ \Omega.$$

para todo $T > 0$ fixado .

3.1 Existência de Solução

Dado $\{y^0, y^1\} \in V \times L^2(\Omega)$, considere

$$\{y^1_\mu\} \subset H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ e } \{y^0_\mu\} \subset D(-\Delta)$$

onde $D(-\Delta) = \{u \in V \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$, de tal forma que

$$\begin{aligned} y^1_\mu &\longrightarrow y^1 \text{ forte em } L^2(\Omega) \\ y^0_\mu &\longrightarrow y^0 \text{ forte em } V. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Observemos que é sempre possível tomar $\{y^1_\mu\}$ e $\{y^0_\mu\}$ nessas condições devido a densidade de $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e de $D(-\Delta)$ em V. E ainda, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, y^0_μ, y^1_μ satisfazem

$$\{y^0_\mu, y^1_\mu\} \in (V \cap H^2(\Omega))^2$$

e

$$\frac{\partial y^0_\mu}{\partial \nu} + g(y^1_\mu) = 0$$

pois $y^0_\mu \in D(-\Delta)$, logo $\dfrac{\partial y^0_\mu}{\partial \nu} = 0$ sobre Γ_0 e de (2.9) temos $g(y^1_\mu) = 0$ sobre Γ_0. Assim, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, y^0_μ, y^1_μ verificam $(A.4)$ e, portanto, existe uma única função $y_\mu : \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$(**) \quad \begin{cases} y''_\mu - \Delta y_\mu + \displaystyle\sum_{j=1}^n b_j(x,t) \frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j} = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty) \\ y_\mu = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial y_\mu}{\partial \nu} + g(y'_\mu) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ y_\mu(x,0) = y^0_\mu; \ \ y'_\mu(x,0) = y^1_\mu \ \text{ em } \ \Omega \end{cases} .$$

Agora, calculando o produto interno em $L^2(\Omega)$ de $(**)_1$ por y'_μ, obtemos

$$(y''_\mu, y'_\mu) + (-\Delta y_\mu, y'_\mu) + \Big(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j}, y'_\mu \Big) = 0.$$

Utilizando o mesmo argumento de (2.14), a fórmula de Green e a condição de fronteira segue que

$$\frac{d}{dt}\left\{ \frac{1}{2}|y'_\mu|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y_\mu|^2 \right\} = -\int_{\Gamma_0} g(y'_\mu) y'_\mu d\Gamma - \Big(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j}, y'_\mu \Big). \tag{3.2}$$

Desde que (2.9) vale e considerando o mesmo raciocínio usado em (2.16), obtemos

- $-\int_{\Gamma_0} g(y'_\mu)y'_\mu d\Gamma \leq -C_1\int_{\Gamma_0}|y'_\mu|^{\rho+2}d\Gamma;$
- $-\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\dfrac{\partial y'_\mu}{\partial x_j}, y'_\mu\Big) \leq \dfrac{1}{2}\int_\Omega div(b)|y'_\mu|^2dx - \dfrac{\delta}{2}|y'_\mu|^2_{\Gamma_0},$

logo, substituindo as desigualdades acima em (3.2),

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|y'_\mu|^2+\frac{1}{2}|\nabla y_\mu|^2\right\}+C_1\int_{\Gamma_0}|y'_\mu|^{\rho+2}d\Gamma+\frac{\delta}{2}|y'_\mu|^2_{\Gamma_0}\leq\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|y'_\mu|^2dx$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|y'_\mu|^2+\frac{1}{2}|\nabla y_\mu|^2\right\}+C_1\int_{\Gamma_0}|y'_\mu|^{\rho+2}d\Gamma+\frac{\delta}{2}|y'_\mu|^2_{\Gamma_0}\leq\|div(b)\|_\infty\frac{1}{2}|y'_\mu|^2.$$

Integrando a expressão acima em $(0,t)$, $t<T$, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|y'_\mu(t)|^2 &+ \frac{1}{2}|\nabla y_\mu(t)|^2+C_1\int_0^t\int_{\Gamma_0}|y'_\mu(s)|^{\rho+2}d\Gamma ds+\frac{\delta}{2}\int_0^t|y'_\mu(s)|^2_{\Gamma_0}ds\\ &\leq \frac{1}{2}|y'_\mu(0)|^2+\frac{1}{2}|\nabla y_\mu(0)|^2+\|div(b)\|_\infty\int_0^t\frac{1}{2}|y'_\mu(s)|^2ds\\ &= \frac{1}{2}|y^1_\mu|^2+\frac{1}{2}|\nabla y^0_\mu|^2+\|div(b)\|_\infty\int_0^t\frac{1}{2}|y'_\mu(s)|^2ds.\end{aligned}$$

E, como $\frac{1}{2}|y^1_\mu|^2+\frac{1}{2}|\nabla y^0_\mu|^2<\infty$, por (3.1), podemos usar o lema de Gronwall, assim

$$|y'_\mu(t)|^2+|\nabla y_\mu(t)|^2+\int_0^t\int_{\Gamma_0}|y'_\mu(s)|^{\rho+2}d\Gamma ds+\int_0^t\|y'_\mu(s)|^2_{\Gamma_0}ds\leq L, \tag{3.3}$$

onde $L>0$ não depende de $\mu\in\mathbb{N}$ e $t\in[0,T]$.
Em particular, de $\int_0^t\int_{\Gamma_0}|y'_\mu(s)|^{\rho+2}d\Gamma ds\leq L$ e de (2.9) obtemos

$$\int_0^T\int_{\Gamma_0}|g(y'_\mu)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}d\Gamma dt\leq C_2\int_0^T\int_{\Gamma_0}|y'_\mu|^{\rho+2}d\Gamma dt\leq C_2TL. \tag{3.4}$$

Agora, escreva $z_{\mu,\sigma}=y_\mu-y_\sigma$ onde $\mu,\sigma\in\mathbb{N}$ e y_μ,y_σ são soluções regulares de $(**)$. Assim, $z_{\mu,\sigma}$ verifica

$$z''_{\mu,\sigma}-\Delta z_{\mu,\sigma}+\sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial z'_{\mu,\sigma}}{\partial x_j}=0$$

daí, calculando o produto interno em $L^2(\Omega)$ da expressão acima com $z'_{\mu,\sigma}$ e utilizando a identidade de Green, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|z'_{\mu,\sigma}(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)|^2\right\}+\sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial z'_{\mu,\sigma}}{\partial x_j}(t)=(g(y'_\mu(t))-g(y'_\sigma(t)),z'_{\mu,\sigma}(t))_{\Gamma_0}. \tag{3.5}$$

Usando o fato de g ser monótona (como argumentado para mostrar a unicidade da solução forte), bem como,

$$-\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial z'_{\mu,\sigma}}{\partial x_j}, z'_{\mu,\sigma}\Big) \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} div(b)|z'_{\mu,\sigma}|^2 dx - \frac{\delta}{2}|z'_{\mu,\sigma}|^2_{\Gamma_0},$$

e integrando a expressão (3.5) em $(0,t)$, $t \leq T$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|z'_{\mu,\sigma}(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)|^2 + \frac{\delta}{2}\int_0^t |z'_{\mu,\sigma}(s)|^2_{\Gamma_0} ds \\ &\leq \frac{1}{2}|z'_{\mu,\sigma}(0)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z_{\mu,\sigma}(0)|^2 + \|div(b)\|_{\infty}\int_0^t \frac{1}{2}|z'_{\mu,\sigma}(s)|^2 ds\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&|y'_{\mu}(t) - y'_{\sigma}(t)|^2 + |\nabla y_{\mu}(t) - \nabla y_{\sigma}(t)|^2 + \delta\int_0^t |y'_{\mu}(s) - y'_{\sigma}(s)|^2_{\Gamma_0} ds \\ &\leq |y^1_{\mu} - y^1_{\sigma}|^2 + |\nabla y^0_{\mu} - \nabla y^0_{\sigma}|^2 + \|div(b)\|_{\infty}\int_0^t |y'_{\mu}(s) - y'_{\sigma}(s)|^2 ds.\end{aligned}$$

Assim, pelo lema de Gronwall

$$\begin{aligned}&|y'_{\mu}(t) - y'_{\sigma}(t)|^2 + |\nabla y_{\mu}(t) - \nabla y_{\sigma}(t)|^2 + \delta\int_0^t |y'_{\mu}(s) - y'_{\sigma}(s)|^2_{\Gamma_0} ds \\ &\leq \Big(|y^1_{\mu} - y^1_{\sigma}|^2 + |\nabla y^0_{\mu} - \nabla y^0_{\sigma}|^2\Big)\exp(\|div(b)\|_{\infty}T)\end{aligned} \tag{3.6}$$

para todo $t \in [0,T]$. E, portanto,

- $\sup\limits_{t\in[0,T]} |y'_{\mu}(t) - y'_{\sigma}(t)|^2 \leq \Big(|y^1_{\mu} - y^1_{\sigma}|^2 + |\nabla y^0_{\mu} - \nabla y^0_{\sigma}|^2\Big)\exp(\|div(b)\|_{\infty}T)$
- $\sup\limits_{t\in[0,T]} |\nabla y_{\mu}(t) - \nabla y_{\sigma}(t)|^2 \leq \Big(|y^1_{\mu} - y^1_{\sigma}|^2 + |\nabla y^0_{\mu} - \nabla y^0_{\sigma}|^2\Big)\exp(\|div(b)\|_{\infty}T)$
- $\delta\int_0^t |y'_{\mu}(s) - y'_{\sigma}(s)|^2_{\Gamma_0} ds \leq \Big(|y^1_{\mu} - y^1_{\sigma}|^2 + |\nabla y^0_{\mu} - \nabla y^0_{\sigma}|^2\Big)\exp(\|div(b)\|_{\infty}T)$

Como $\{y^1_{\mu}\}$ e $\{y^0_{\mu}\}$ foram tomadas de modo que convirjam forte para y^1 em $L^2(\Omega)$ e y^0 em V, repectivamente, temos que o lado direito da expressão em (3.6) converge pra zero quando $\mu, \sigma \to \infty$. De onde, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\{y'_{\mu}\} &\text{ é de Cauchy em } C(0,T;L^2(\Omega)) \\ \{y_{\mu}\} &\text{ é de Cauchy em } C(0,T;V) \\ \{y'_{\mu}\} &\text{ é de Cauchy em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)).\end{aligned}$$

Desde que $C(0,T;L^2(\Omega), C(0,T;V)$ e $L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)$ são espaços de Banach, existe $y : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} y_\mu &\to y \text{ forte em } C([0,T];V) \\ y'_\mu &\to y' \text{ forte em } C([0,T];L^2(\Omega)) \\ y'_\mu &\to y' \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Da última convergência, segue que

$$y'_\mu \to y' \text{ q.t.p em } \Sigma_{0,T}$$

e, desde que $g \in C^1$, temos

$$g(y'_\mu) \to g(y') \text{ q.t.p em } \Sigma_{0,T}$$

como $g(y'_\mu)$ é limitada em $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma_{0,T})$ por (3.4), o lema de Lions garante que

$$g(y'_\mu) \rightharpoonup g(y') \text{ fraco em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma_{0,T}). \tag{3.8}$$

O que é suficiente para passar o limite em $(**)$.

3.1.1 Passagem ao Limite

De $(**)_1$ temos que

$$y''_\mu - \Delta y_\mu + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j} = 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \forall T > 0.$$

Sejam $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, calculando o produto interno da igualdade acima, em $L^2(\Omega)$, por w e multiplicando o resultado por θ obtemos

$$(y''_\mu, \theta w) - (\Delta y_\mu, \theta w) + \sum_{j=1}^{n} (b_j \frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j}, \theta w) = 0. \tag{3.9}$$

Agora, pela fórmula de Green generalizada, temos

$$-(\Delta y_\mu, \theta w) = (\nabla y_\mu, \theta \nabla w)$$

portanto, substituindo a igualdade acima em (3.9) e integrando em $(0,t)$, $t \leq T$, segue que

$$\int_0^t (y''_\mu(s), w)\theta(s)ds + \int_0^t (\nabla y_\mu(s), \nabla w)\theta(s)ds + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t (b_j(s)\frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j}(s), w)\theta(s)ds = 0$$

e, por integração por partes,

$$-\int_0^t (y'_\mu(s), w)\theta'(s)ds + \int_0^t (\nabla y_\mu(s), \nabla w)\theta(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t (b_j(s)\frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j}(s), w)\theta(s)ds = 0. \tag{3.10}$$

Notemos que, como $b_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ pela proposição (1.23) resulta que

$$\left\langle \left(b_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j}\right)', \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = -\left\langle b_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j}, \theta' w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$$

por outro lado,

$$\left\langle \left(b_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j}\right)', \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = \left\langle b'_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j}, \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \left\langle b_j \frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j}, \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)},$$

portanto,

$$\left\langle b_j \frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j}, \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = -\left\langle b'_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j}, \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \left\langle b_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j}, \theta' w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}.$$

Lembrando que, pelas respectivas regularidades, $y'_\mu, \nabla y_\mu$, definem distribuições as quais identificaremos com elas próprias e, utilizando a igualdade acima, podemos reescrever (3.10) da seguinte forma

$$\begin{aligned} &-\langle y'_\mu, \theta' w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \langle \nabla y_\mu, \theta \nabla w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} \\ &-\sum_{j=1}^n \left\langle b'_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j}, \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \sum_{j=1}^n \left\langle b_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j}, \theta' w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0. \end{aligned}$$

E, assim, passando ao limite quando $\mu \to \infty$, segue de (3.7) que

$$\begin{aligned} &-\langle y', \theta' w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \langle \nabla y, \theta \nabla w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \sum_{j=1}^n \left\langle b'_j \frac{\partial y}{\partial x_j}, \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} \\ &-\sum_{j=1}^n \left\langle b_j \frac{\partial y}{\partial x_j}, \theta' w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0. \end{aligned}$$

Agora, como $y \in C(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;V)$, temos $b_j \frac{\partial y}{\partial x_j} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, portanto,

$$\left\langle \left(b_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\right)', \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = -\left\langle b_j \frac{\partial y}{\partial x_j}, \theta' w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)},$$

logo,

$$\left\langle b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j}, \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = -\left\langle b'_j \frac{\partial y}{\partial x_j}, \theta w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \left\langle b_j \frac{\partial y}{\partial x_j}, \theta' w \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)},$$

como também vale,

$$-\langle y', \theta' w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = \langle y'', \theta w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$$

obtemos,

$$\langle y'', \theta w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \langle \nabla y, \theta \nabla w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \sum_{j=1}^{n} \left\langle b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j}, \theta w\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0. \quad (3.11)$$

E, desde que,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla y, \nabla \theta w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial y}{\partial x_j}, \theta \frac{\partial w}{\partial x_j}\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}, \theta w\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} \\
&= -\langle \Delta y, \theta w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}
\end{aligned}$$

substituindo em (3.11) encontramos

$$\langle y'', \theta w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \langle \Delta y, \theta w\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \sum_{j=1}^{n} \left\langle b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j}, \theta w\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0,$$

ou ainda,

$$\left\langle y'' - \Delta y + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j}, \theta w\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0,$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e para todo $w \in \mathcal{D}(\Omega)$. E, pela densidade do produto θw com $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathcal{D}(Q)$ obtemos

$$\left\langle y'' - \Delta y + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j}, \psi\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0,$$

para toda $\psi \in \mathcal{D}(Q)$. Com isso, concluímos que

$$y'' - \Delta y + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j} = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Agora, note que como $y' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ temos $y'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$ (como feito em Milla Miranda [28]) e de $\frac{\partial y}{\partial x_j} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ pois $y \in L^2(0,T;V)$, temos $\frac{\partial y'}{\partial x_j} \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$ e, portanto, $b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j} \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, logo,

$$\Delta y = y'' + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j} \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$$

o que implica,

$$y'' - \Delta y + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j} = 0 \text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Vimos que

$$y_\mu \rightharpoonup y \;\text{ em }\; H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.12}$$

e, como

$$\Delta y_\mu = -y''_\mu + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'_\mu}{\partial x_j} \rightharpoonup -y'' + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j} = \Delta y \;\text{ em }\; H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$$

obtemos,

$$y_\mu \rightharpoonup y \;\text{ em }\; H^{-1}(0,T;\mathcal{H}). \tag{3.13}$$

Assim, de (3.13) e do Lema (1.3), obtemos

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial \nu} = \gamma_1(y_\mu) \rightharpoonup \gamma_1(y) = \frac{\partial y}{\partial \nu} \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{-3/2}(\Gamma_0)). \tag{3.14}$$

Recordemos do Teorema da Solução Forte, que

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial \nu} + g(y'_\mu) = 0 \;\text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)) \tag{3.15}$$

e desde que

$$g(y'_\mu) \rightharpoonup g(y') \;\text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma_{0,T})$$

e da convergência (3.14), podemos passar o limite em (3.15) e obtemos

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + g(y') = 0 \text{ em } (H_0^1(0,T;H^{3/2}(\Gamma_0)) \cap L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Gamma_0))',$$

pois,

$$\begin{aligned} &H^{-1}(0,T;H^{-3/2}(\Gamma_1)) + L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Gamma_0)) \\ &\qquad = (H_0^1(0,T;H^{3/2}(\Gamma_0)) \;\;\cap\;\; L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Gamma_0))'. \end{aligned}$$

3.2 Condições Iniciais

Para mostrar que a função y satisfaz as condições iniciais $y(0) = y^0$ e $y'(0) = y^1$, recordemos de (3.7) que

$$y_\mu \to y \text{ forte em } C([0,T];V)$$
$$y'_\mu \to y' \text{ forte em } C([0,T];L^2(\Omega))$$

assim,

$$y_\mu(0) \to y(0) \text{ forte em } V$$
$$y'_\mu(0) \to y'(0) \text{ forte em } L^2(\Omega).$$

Agora, como

$$y_\mu(0) = y^0_\mu \longrightarrow y^0 \text{ forte em } V$$
$$y'_\mu(0) = y^1_\mu \longrightarrow y^1 \text{ forte em } L^2(\Omega)$$

pela unicidade do limite obtemos o resultado.

Observação 3.2 *A unicidade da solução fraca para o problema* $(*)$ *ainda é uma questão em aberto.*

Observemos que, até aqui, analisamos a solução y do problema $(*)$ apenas em intervalos do tipo $[0, T]$, $T > 0$ qualquer, mas, como pretendemos estudar o decaimento da energia relativa ao problema $(*)$, devemos, antes, mostrar que a solução é globalmente definida com relação ao tempo, ou seja, y está definida em $[0, \infty)$. Isso é o que faremos a seguir.

Recordemos de (3.7) que $y \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$. Considere, então, o intervalo maximal no qual existe solução para o problema $(*)$. Assim, y está definida em $[0, T_{\max})$, onde $T_{\max} = \sup \Upsilon$ e $\Upsilon = \{T > 0; y \text{ é solução de } (*) \text{ em } [0, T]\}$ e $y \in C([0, T_{\max}); V) \cap C^1([0, T_{\max}); L^2(\Omega))$.

Afirmação: *Uma das opções abaixo é sempre satisfeita:*

$$T_{\max} = \infty \quad ou \quad \lim_{t \to T_{\max}} \{|y'(t)|^2 + |\nabla y(t)|^2\} = \infty.$$

De fato, supondo o contrário, ou seja,

$$T_{\max} < \infty \text{ e } \lim_{t \to T_{\max}} \{|y'(t)|^2 + |\nabla y(t)|^2\} < \infty$$

concluímos que existe $M > 0$ e uma sequência $\{T_m\} \subset \Upsilon$ com $T_m < T_{m+1}$ tal que

$$T_n \longrightarrow T_{\max} \text{ quando } m \to \infty$$

e

$$|y'(T_m)|^2 + |\nabla y(T_m)|^2 < M, \;\; \forall m \in \mathbb{N},$$

daí, existem subsequências $\{y(T_\nu)\} \subset \{y(T_m)\}$ e $\{y'(T_\nu)\} \subset \{y'(T_m)\}$ tais que

$$y(T_\nu) \rightharpoonup y_T \text{ fraco em } V \quad \text{e} \quad y'(T_\nu) \rightharpoonup y'_T \text{ fraco em } L^2(\Omega)$$

quando $\nu \to \infty$. Seja u a solução do problema

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \frac{\partial u'}{\partial x_j} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + g(u') = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = y_T; \;\; u'(x,0) = y'_T \text{ em } \Omega \end{cases}$$

então, $u \in C([0,T_{\max}); V) \cap C^1([0,T_{\max}); L^2(\Omega))$. Agora, defina uma função ξ da seguinte forma

$$\xi(x,t) = \begin{cases} y(x,t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq T_1 \\ u(x,t-T_1) & \text{se} \quad T_1 \leq t \leq T_1 + T^*, \end{cases}$$

onde $0 < T^* < T_{\max}$ e $T_1 = T_{\max} - \frac{T^*}{2} < T_{\max}$. Notemos que, pela definição de ξ e a escolha de T_1 e T^*, ξ é uma solução de $(*)$ em $[0, T_1 + T^*]$ e, portanto, $T_1 + T^* \in \Upsilon$. Mas, $T_1 + T^* = \frac{T^*}{2} + T_{\max} > T_{\max}$, contrariando o fato de $T_{\max}$ ser supremo em Υ. A partir disso, concluímos que a afirmação é verdadeira.

Agora, se $T_{\max} < \infty$, devemos ter $\lim_{t \to T_{\max}} \{|y'(t)|^2 + |\nabla y(t)|^2\} = \infty$, mas

$$y \in C([0,T_{\max}]; V) \quad \text{e} \quad y' \in C([0,T_{\max}]; L^2(\Omega))$$

portanto,

$$|y'(t)|^2 + |\nabla y(t)|^2 \leq M, \text{ para todo } t \in [0, T_{\max}]$$

onde $M > 0$, contradição. Logo, da afirmação segue que $T_{\max} = \infty$, ou seja, y está definida para todo $t \in [0,\infty)$.

Capítulo 4

Taxas de Decaimento do Funcional Energia

O capítulo que se inicia tem por objetivo obter o comportamento assintótico do funcional energia relacionado a solução regular do problema $(*)$. Para tal, usaremos o método da perturbação da energia devido a Komornik e ZuaZua [13] e construíremos um funcional de Lyapunov adequado de modo a mostrar que a energia

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |y'(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla y(t)|^2 dx + \int_{\Gamma_0} F(y) d\Gamma$$

decai exponencialmente para zero quando t tende ao infinito.

No que segue, x^0 denotará um ponto fixado do $\mathbb{R}^n$.

Seja

$$m(x) = x - x^0, \tag{4.1}$$

assuma que a partição $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ da fronteira Γ com $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ tem a forma

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; m(x).\nu(x) \geq m_0 > 0\} \text{ e } \Gamma_1 = \{x \in \Gamma; m(x).\nu(x) < 0\}$$

onde m_0 é uma constante. Defina

$$R = \max_{x \in \overline{\Omega}} \|x - x^0\| \tag{4.2}$$

e, ainda, consideremos as seguintes hipóteses adcionais:

(A.5) Hipóteses sobre o decaimento uniforme: Assumimos que

$$b_i m_j = b_j m_i \ \text{ em } \ \Omega \times (0, \infty), \ \ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}; \tag{4.3}$$

$$|f(s)| \leq C_0 |s|^{\gamma+1}, \ \ s \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

$$K_1|s|^2 \leq g(s)s \leq K_2|s|^2, \ \ s \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

para algum $K_1, K_2 > 0$, onde m_i é a i-ésima coordenada do vetor (4.1).

Sabendo disso, nosso intuito, aqui, é mostrar o seguinte resultado.

Teorema 4.1 *Sob as hipóteses $(A.1)-(A.5)$ e considerando que $\|b\|_\infty$, $\|b'\|_\infty$ e $\|div(b)\|_\infty$ são suficientemente pequenos, a energia*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y'(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y(t)|^2 dx + \int_{\Gamma_0} F(y) d\Gamma$$

associada a solução forte y decai exponencialmente, isto é, existem constantes $C, \gamma > 0$ tais que

$$E(t) \leq C \exp(-\gamma t); \ \ \textit{para todo } t \geq 0.$$

4.1 Decaimento Uniforme da Solução Forte

Sabemos que

$$y'' - \Delta y + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j} = 0 \text{ em } L^2(0,T; L^2(\Omega))$$

assim, tomando o produto interno em $L^2(\Omega)$ da igualdade acima por $y'(t) \in L^2(\Omega)$, obtemos

$$(y''(t), y'(t)) - (\Delta y(t), y'(t)) + \sum_{j=1}^{n} \left(b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j}(t), y'(t) \right) = 0$$

e considerando a fórmula de Green, os argumentos utilizados em (2.14) e a condição de fronteira

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla y(t)|^2 + \int_{\Gamma_0} (f(y(t)) + g(y'(t)))y'(t) d\Gamma + \sum_{j=1}^{n} \left(b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j}(t), y'(t) \right) = 0. \tag{4.6}$$

Agora, analogamente ao feito em (2.16), segue que

$$\sum_{j=1}^{n} \left(b_j \frac{\partial y'}{\partial x_j}(t), y'(t) \right) = -\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|y'(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} b.\nu |y'(t)|^2 d\Gamma.$$

Logo, substituindo a igualdade acima em (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla y(t)|^2 + \int_{\Gamma_0} (f(y(t)) + g(y'(t)))y'(t) d\Gamma \\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|y'(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} b.\nu |y'(t)|^2 d\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como a energia relativa ao problema $(*)$ é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2 + \int_{\Gamma_0} F(y)d\Gamma$$

temos que

$$E'(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dt}|y'(t)|^2 + \frac{d}{dt}|\nabla y(t)|^2\right\} + \int_{\Gamma_0} f(y)y'd\Gamma \tag{4.8}$$

daí, comparando (4.7) e (4.8), encontramos

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_0} g(y')y'(t)d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Omega} div(b)|y'(t)|^2dx - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} b.\nu|y'(t)|^2d\Gamma. \tag{4.9}$$

E, desde que valem (2.2) e (4.5), obtemos

$$E'(t) \leq -\left(K_1 + \frac{\delta}{2}\right)\int_{\Gamma_0} |y'(t)|^2d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Omega} div(b)|y'(t)|^2dx. \tag{4.10}$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, definimos a perturbação da energia como sendo o funcional

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon\psi(t)$$

onde

$$\begin{aligned}\psi(t) &= 2(y'(t), m.\nabla y(t)) + (n-1)(y'(t), y(t)) \\ &+(b(t).\nabla y(t), m.\nabla y(t)) + (n-1)(b(t).\nabla y(t), y(t)).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Mostremos que existe $\theta_1 > 0$ tal que

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon\theta_1 E(t).$$

De fato, observemos que

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| = \varepsilon|\psi(t)| \tag{4.12}$$

e,

$$\begin{aligned}|\psi(t)| &= |2(y'(t), m.\nabla y(t)) + (n-1)(y'(t), y(t)) + (b(t).\nabla y(t), m.\nabla y(t)) \\ &+ (n-1)(b(t).\nabla y(t), y(t))| \\ &\leq 2R^{\frac{1}{2}}|y'(t)||\nabla y(t)| + (n-1)|y'(t)||y(t)| + R^{\frac{1}{2}}\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}}|\nabla y(t)|^2 \\ &+ (n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}}|\nabla y(t)||y(t)|\end{aligned}$$

onde as desigualdades acima seguem da desigualdade triangular em $\mathbb{R}$, da desigualdade de Cauchy-Schwarz em $L^2(\Omega)$ e do fato de $m(x) \leq R$ para todo $x \in \Omega$. Agora, da imersão de V em $L^2(\Omega)$, temos que

$$|y| \leq \lambda|\nabla y| \text{ para todo } y \in V$$

com λ sendo a constante de imersão e, da desigualdade de Young, obtemos

$$|y'(t)||\nabla y(t)| \leq \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2$$

e

$$|y'(t)||y(t)| \leq \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + \frac{1}{2}|y(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + \frac{\lambda}{2}|\nabla y(t)|^2$$

logo,

$$\begin{aligned}
|\psi(t)| &\leq 2R^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}|y'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2\right\} + (n-1)\left\{\frac{1}{2}|y'(t)|^2 + \frac{\lambda}{2}|\nabla y(t)|^2\right\} \\
&+ 2R^{\frac{1}{2}}\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2 + 2\lambda(n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2 \\
&= \left(2R^{\frac{1}{2}} + \lambda(n-1) + 2\lambda(n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}}2R^{\frac{1}{2}}\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2 \\
&+ (2R^{\frac{1}{2}} + (n-1))\frac{1}{2}|y'(t)|^2.
\end{aligned}$$

Seja $\theta_1 = 2R^{\frac{1}{2}} + \lambda(n-1) + 2\lambda(n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}}2R^{\frac{1}{2}}\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}}$ e observemos que $2R^{\frac{1}{2}} + (n-1) < \theta_1$, de onde

$$|\psi(t)| \leq \theta_1\left\{\frac{1}{2}|y'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2\right\}$$

e, como por (2.6)

$$\theta_1\int_{\Gamma_0} F(y)d\Gamma \geq C\theta_1\int_{\Gamma_0}|y|^{\gamma+2}d\Gamma \geq 0$$

obtemos

$$|\psi(t)| \leq \theta_1\left\{\frac{1}{2}|y'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2\right\} + \theta_1\int_{\Gamma_0} F(y)d\Gamma = \theta_1 E(t)$$

acarretando, quando substituindo em (4.12), que

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon\theta_1 E(t) \tag{4.13}$$

Nosso próximo passo é mostrar a existência de $\theta_2 > 0$ tal que

$$E_\varepsilon'(t) \leq -\theta_2 E(t).$$

Observemos que, ao diferenciar $\psi(t)$ com respeito a t, encontramos

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= 2(y''(t), m.\nabla y(t)) + 2(y'(t), m.\nabla y'(t)) + (n-1)(y''(t), y(t)) \\
&+ (n-1)(y'(t), y'(t)) + (b'(t).\nabla y(t), m.\nabla y(t)) + (b(t).\nabla y'(t), m.\nabla y(t)) \\
&+ (b(t).\nabla y(t), m.\nabla y'(t)) + (n-1)(b'(t).\nabla y(t), y(t)) \\
&+ (n-1)(b(t).\nabla y'(t), y(t)) + (n-1)(b(t).\nabla y(t), y'(t))
\end{aligned}$$

e já que

$$y'' - \Delta y + b.\nabla y' = 0$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= 2(\Delta y(t), m.\nabla y(t)) - 2(b(t).\nabla y'(t), m.\nabla y(t)) + 2(y'(t), m.\nabla y'(t)) \\
&- (n-1)(b(t).\nabla y'(t), y(t)) - (n-1)(\Delta y(t), y(t)) + (n-1)(y'(t), y'(t)) \\
&+ (b'(t).\nabla y(t), m.\nabla y(t)) + (b(t).\nabla y'(t), m.\nabla y(t)) \qquad (4.14) \\
&+ (b(t).\nabla y(t), m.\nabla y'(t)) + (n-1)(b'(t).\nabla y(t), y(t)) \\
&+ (n-1)(b(t).\nabla y'(t), y(t)) + (n-1)(b(t).\nabla y(t), y'(t))
\end{aligned}$$

da hipótese (4.3) temos $b_i m_j = b_j m_i$, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, logo,

$$\begin{aligned}
(b(t).\nabla y(t), m.\nabla y'(t)) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_j m_i \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y'}{\partial x_i}dx \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y'}{\partial x_i}dx \\
&= (m.\nabla y(t), b(t).\nabla y'(t))
\end{aligned}$$

assim, substituindo a igualdade acima em (4.14) e efetuando os respectivos cancelamentos, encontramos

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= 2(\Delta y(t), m.\nabla y(t)) + 2(y'(t), m.\nabla y'(t)) + (n-1)(\Delta y(t), y(t)) \\
&+ (n-1)|y'(t)|^2 + (b'(t).\nabla y(t), m.\nabla y(t)) \qquad (4.15) \\
&+ (n-1)(b'(t).\nabla y(t), y(t)) + (n-1)(b(t).\nabla y(t), y'(t))
\end{aligned}$$

A seguir, faremos uma análise de alguns termos da igualdade acima, sendo elas:

- $2(\Delta y(t), m.\nabla y(t)) = (n-2)|\nabla y(t)|^2 - \displaystyle\int_\Gamma (m.\nu)|\nabla y|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma (m.\nabla y)\frac{\partial y}{\partial \nu}d\Gamma;$
- $2(y'(t), m.\nabla y'(t)) = -n|y'(t)|^2 + \displaystyle\int_{\Gamma_0} |y'|^2(m.\nu)d\Gamma;$
- $(n-1)(\Delta y(t), y(t)) \leq -(n-1)|\nabla y(t)|^2 - \dfrac{n-1}{\alpha}\displaystyle\int_{\Gamma_0} F(y)d\Gamma - (n-1)(g(y'), y(t))_{\Gamma_0}.$

De fato, notemos que

$$(\Delta y(t), m.\nabla y(t)) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}dx$$

agora, se $i \neq j$, pela fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}dx = -\int_\Omega m_j \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\nu^i d\Gamma$$

e, quando $i = j$,

$$\int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}dx = -\int_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 dx - \int_\Omega m_j \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}\frac{\partial y}{\partial x_j}dx + \int_\Gamma m_j \nu^j \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 d\Gamma$$

logo,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}dx &= -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega m_j \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_i}dx \\ &+\sum_{i,j=1}^n \int_\Gamma m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\nu^i d\Gamma - \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 dx\end{aligned}$$

mas, também pela fórmula de Green, obtemos

$$-\int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega m_j \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}dx - \int_\Gamma m_j \nu^j \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 d\Gamma$$

ou seja,

$$-2\int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 dx - \int_\Gamma m_j \nu^j \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 d\Gamma.$$

Assim, das considerações acima,

$$\begin{aligned}2(\Delta y(t), m.\nabla y(t)) &= 2\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\{\int_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 d\Gamma - \int_\Gamma m_j \nu^j \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 d\Gamma\right\} \\ &\quad +2\sum_{i,j=1}^n \int_\Gamma m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\nu^i d\Gamma - 2\sum_{j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 dx \\ &= n|\nabla y|^2 - \int_\Gamma (m.\nu)|\nabla y|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma (m.\nabla y)\frac{\partial y}{\partial \nu}d\Gamma - 2|\nabla y|^2\end{aligned}$$

portanto,

$$2(\Delta y(t), m.\nabla y(t)) = (n-2)|\nabla y|^2 - \int_\Gamma (m.\nu)|\nabla y|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma (m.\nabla y)\frac{\partial y}{\partial \nu}d\Gamma. \qquad (4.16)$$

Agora, para estimar $2(y'(t), m.\nabla y'(t))$ observemos que,

$$(y'(t), m.\nabla y'(t)) = \sum_{j=1}^n \int_\Omega m_j \frac{\partial y'}{\partial x_j}y' dx$$

e, pela fórmula de Green, segue que

$$\int_\Omega m_j \frac{\partial y'}{\partial x_j} y' dx = -\int_\Omega (y')^2 dx - \int_\Omega m_j y' \frac{\partial y'}{\partial x_j} dx + \int_\Gamma m_j \nu^j (y')^2 d\Gamma$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega m_j \frac{\partial y'}{\partial x_j} y' dx &= -|y'(t)|^2 + \int_\Gamma m_j \nu^j (y')^2 d\Gamma \\ &= -|y'(t)|^2 + \int_{\Gamma_0} m_j \nu^j (y')^2 d\Gamma, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de $y' \in V$.

Assim, do argumentado acima,

$$2(y'(t), m.\nabla y'(t)) = -n|y'(t)|^2 + \int_{\Gamma_0} (m.\nu)|y'|^2 d\Gamma. \tag{4.17}$$

Por fim, pela fórmula de Green, obtemos

$$(n-1)(\Delta y(t), y(t)) = -(n-1)|\nabla y(t)|^2 + (n-1)\int_\Gamma y(t) \frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma \tag{4.18}$$

mas,

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = -f(y) - g(y') \text{ sobre } \Gamma_0 \quad \text{ e } \quad y = 0 \text{ sobre } \Gamma_1$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma y(t) \frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma &= \int_{\Gamma_0} y(t) \frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma \\ &= -\int_{\Gamma_0} y(t)(f(y) + g(y')) d\Gamma \end{aligned}$$

agora, por (2.6)

$$y f(y) \geq \frac{1}{\alpha} F(y)$$

e portanto,

$$-\int_{\Gamma_0} y(t) f(y) d\Gamma \leq -\frac{1}{\alpha} \int_{\Gamma_0} F(y) d\Gamma$$

donde, substituindo em (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} (n-1)(\Delta y(t), y(t)) &= -(n-1)|\nabla y(t)|^2 - \frac{(n-1)}{\alpha} \int_{\Gamma_0} F(y) d\Gamma \\ &\quad -(n-1)\int_{\Gamma_0} y(t) g(y') d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Das estimativas $(4.16), (4.17)$ e (4.19) segue que

$$\begin{aligned}
\psi'(t) \;\; \leq \;\; & (n-2)|\nabla y(t)|^2 - \int_\Gamma (m.\nu)|\nabla y(t)|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma (m.\nabla y)\frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma - n|y'(t)|^2 \\
& + \int_{\Gamma_0} |y'(t)|^2 (m.\nu) d\Gamma - (n-1)|\nabla y(t)|^2 - \frac{(n-1)}{\alpha}\int_{\Gamma_0} F(y) d\Gamma \\
& -(n-1)\int_{\Gamma_0} y(t) g(y') d\Gamma + (b'(t).\nabla y(t), m.\nabla y(t)) \\
& +(n-1)(b(t).\nabla y(t), y'(t)) + (n-1)(b'(t).\nabla y(t), y(t)).
\end{aligned}$$

Consideremos, agora, $L = \min\{\frac{1}{\alpha}, 1\}$. Efetuando os devidos cancelamentos na desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}
\psi'(t) \;\; \leq \;\; & -|\nabla y(t)|^2 - n|y'(t)|^2 - \frac{(n-1)}{\alpha}\int_{\Gamma_0} F(y) d\Gamma - \int_\Gamma (m.\nu)|\nabla y(t)|^2 d\Gamma \\
& +2\int_\Gamma (m.\nabla y)\frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Gamma_0} |y'(t)|^2 (m.\nu) d\Gamma - (n-1)\int_{\Gamma_0} y(t) g(y') d\Gamma \\
& +(b'(t).\nabla y(t), m.\nabla y(t)) + (n-1)(b(t).\nabla y(t), y'(t)) \\
& +(n-1)(b'(t).\nabla y(t), y(t)) \\
\leq \;\; & -LE(t) - \int_\Gamma (m.\nu)|\nabla y(t)|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma (m.\nabla y)\frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Gamma_0} |y'(t)|^2 (m.\nu) d\Gamma \\
& -(n-1)\int_{\Gamma_0} y(t) g(y') d\Gamma + (b'(t).\nabla y(t), m.\nabla y(t)) \\
& +(n-1)(b(t).\nabla y(t), y'(t)) + (n-1)(b'(t).\nabla y(t), y(t)).
\end{aligned}$$

Notemos que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$ e $L^2(\Omega)$, acarreta que

$$\begin{aligned}
(b'(t).\nabla y(t), m.\nabla y(t)) \;\; & \leq \;\; |b'(t).\nabla y(t)||m.\nabla y(t)| \\
& \leq \;\; 2\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2 \\
& \leq \;\; 2\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} E(t);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n-1)(b(t).\nabla y(t), y'(t)) \;\; & \leq \;\; (n-1)|b(t).\nabla y(t)||y'(t)| \\
& \leq \;\; (n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}} |\nabla y(t)||y'(t)| \\
& \leq \;\; (n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2 + \frac{1}{2}|y'(t)|^2\right) \\
& \leq \;\; (n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}} E(t);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n-1)(b'(t).\nabla y(t), y(t)) \;\; & \leq \;\; (n-1)|b'(t).\nabla y(t)||y(t)| \\
& \leq \;\; (n-1)\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}} |\nabla y(t)||y(t)| \\
& \leq \;\; \lambda(n-1)\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}} |\nabla y(t)|^2 \\
& \leq \;\; 2\lambda(n-1)\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}} E(t).
\end{aligned}$$

Assim, pelos argumentos acima, obtemos

$$\begin{aligned}\psi'(t) &\le -LE(t) + (2\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} + (n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}} + 2\lambda(n-1)\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}})E(t)\\ &\quad - \int_\Gamma (m.\nu)|\nabla y(t)|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma (m.\nabla y)\frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Gamma_0} |y'(t)|^2 (m.\nu) d\Gamma\\ &\quad -(n-1)\int_{\Gamma_0} y(t) g(y') d\Gamma,\end{aligned}$$

por outro lado, $\frac{\partial y}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)\nu^k$ sobre Γ_1,[1] daí,

$$(m.\nabla y) = \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial y}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n m_j \nu^j \frac{\partial y}{\partial \nu} = (m.\nu)\frac{\partial y}{\partial \nu} \qquad \text{em} \qquad \Gamma_1$$

e

$$|\nabla y|^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)(\nu^j)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)\sum_{j=1}^n (\nu^j)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 \qquad \text{em} \qquad \Gamma_1,$$

consequentemente, obtemos

$$-\int_\Gamma (m.\nu)|\nabla y(t)|^2 d\Gamma = -\int_{\Gamma_0} (m.\nu)|\nabla y(t)|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (m.\nu)\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma$$

e

$$\begin{aligned}2\int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \nu}(m.\nabla y) d\Gamma &= 2\int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu}(m.\nabla y) d\Gamma + 2\int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu}(m.\nabla y) d\Gamma\\ &= -2\left\{\int_{\Gamma_0} f(y)(m.\nabla y) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} g(y')(m.\nabla y) d\Gamma\right\}\\ &\quad +2\int_{\Gamma_1} (m.\nu)\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma.\end{aligned}$$

Desde que $m.\nu \le 0$ sobre Γ_1, temos

$$\int_{\Gamma_1} (m.\nu)\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma \le 0,$$

logo,

$$\begin{aligned}\psi'(t) &\le -LE(t) + (2\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} + (n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}} + 2\lambda(n-1)\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}})E(t)\\ &\quad - \int_{\Gamma_0} (m.\nu)|\nabla y(t)|^2 d\Gamma - 2\int_{\Gamma_0} f(y)(m.\nabla y) d\Gamma\\ &\quad -2\int_{\Gamma_0} g(y')(m.\nabla y) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} |y'(t)|^2 (m.\nu) d\Gamma\\ &\quad -(n-1)\int_{\Gamma_0} y(t) g(y') d\Gamma.\end{aligned}$$

Observemos que

- $\left|-(n-1)\int_{\Gamma_0} y(t) g(y') d\Gamma\right| \le \dfrac{(n-1)^2}{4\eta}\lambda^2 K_2^2 |y'(t)|_{\Gamma_0}^2 + 2\eta E(t);$

[1] Como feito em [25]

- $\displaystyle \left|-2\int_{\Gamma_0} f(y)(m.\nabla y)d\Gamma\right| \leq \frac{RC_0^2(2\lambda_{2(\gamma+1)})}{\eta}[E(t)]^{\gamma+1} + \eta|\nabla y|^2_{\Gamma_0};$
- $\displaystyle \left|-2\int_{\Gamma_0} g(y')(m.\nabla y)d\Gamma\right| \leq \frac{R}{\eta}|g(y')|^2_{\Gamma_0} + \eta|\nabla y|^2_{\Gamma_0}.$

onde $\eta > 0$ é arbitrário.

De fato, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, temos que

$$\begin{aligned} \left|-(n-1)\int_{\Gamma_0} y(t)g(y')d\Gamma\right| &\leq (n-1)|y(t)|_{\Gamma_0}|g(y')|_{\Gamma_0} \\ &\leq \lambda(n-1)|\nabla y(t)|_{\Gamma_0}|g(y')|_{\Gamma_0} \\ &\leq \frac{(\lambda(n-1))^2}{4\eta}|g(y')|^2_{\Gamma_0} + \eta|\nabla y(t)|^2 \end{aligned}$$

com $\eta > 0$, arbitrário.

De (4.5), temos

$$g(s) \leq K_2|s|^2, \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \left|-(n-1)\int_{\Gamma_0} y(t)g(y')d\Gamma\right| &\leq \frac{(\lambda(n-1)K_2)^2}{4\eta}|y'(t)|^2_{\Gamma_0} + 2\eta\frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2 \\ &\leq \frac{(\lambda(n-1)K_2)^2}{4\eta}|y'(t)|^2_{\Gamma_0} + 2\eta E(t). \qquad (4.20) \end{aligned}$$

Utilizando os mesmos argumentos da estimativa anterior e o fato de valer (4.4), obtemos que

$$\begin{aligned} \left|-2\int_{\Gamma_0} f(y)(m.\nabla y)d\Gamma\right| &\leq 2|f(y)|_{\Gamma_0}|m.\nabla y|_{\Gamma_0} \\ &\leq 2R^{1/2}|f(y)|_{\Gamma_0}|\nabla y|_{\Gamma_0} \\ &\leq \frac{RC_0}{\eta}\|y\|^{2(\gamma+1)}_{2(\gamma+1),\Gamma_0} + \eta|\nabla y|^2_{\Gamma_0}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|-2\int_{\Gamma_0} f(y)(m.\nabla y)d\Gamma\right| \leq \frac{RC_0}{\eta}\|y(t)\|^{2(\gamma+1)}_{2(\gamma+1),\Gamma_0} + \eta|\nabla y(t)|^2_{\Gamma_0}.$$

Agora, como $V \hookrightarrow L^{2(\gamma+1)}(\Gamma_0)$, temos

$$\begin{aligned} \left|-2\int_{\Gamma_0} f(y)(m.\nabla y)d\Gamma\right| &\leq \frac{RC_0(2\lambda_{2(\gamma+1)})^{2(\gamma+1)}}{\eta}\Big(\frac{1}{2}|\nabla y(t)\|^2\Big)^{(\gamma+1)} + \eta|\nabla y(t)|^2_{\Gamma_0} \\ &\leq \frac{RC_0(2\lambda_{2(\gamma+1)})^{2(\gamma+1)}}{\eta}\Big(E(t)\Big)^{(\gamma+1)} + \eta|\nabla y(t)|^2_{\Gamma_0}. \qquad (4.21) \end{aligned}$$

Por fim, notemos que

$$\begin{aligned}\left|-2\int_{\Gamma_0} g(y')(m.\nabla y)d\Gamma\right| &\leq 2|g(y')|_{\Gamma_0}|(m.\nabla y)|_{\Gamma_0}\\ &\leq 2R^{1/2}|g(y')|_{\Gamma_0}|\nabla y|_{\Gamma_0}\\ &\leq \frac{R}{\eta}|g(y')|^2_{\Gamma_0}+\eta|\nabla y|^2_{\Gamma_0}\end{aligned}$$

e, por (4.5)

$$\left|-2\int_{\Gamma_0} g(y')(m.\nabla y)d\Gamma\right| \leq \frac{RK_2^2}{\eta}|y'|^2_{\Gamma_0}+\eta|\nabla y|^2_{\Gamma_0}. \tag{4.22}$$

Assim, utilizando as estimativas encontradas em (4.20), (4.21) e (4.22), obtemos

$$\begin{aligned}\psi'(t) \leq\ & -LE(t)+\left(2\|b'\|^{\frac{1}{2}}_\infty R^{\frac{1}{2}}+(n-1)\|b\|^{\frac{1}{2}}_\infty+2\lambda(n-1)\|b'\|^{\frac{1}{2}}_\infty\right)E(t)\\ & -\int_{\Gamma_0}(m.\nu)|\nabla y(t)|^2 d\Gamma+\int_{\Gamma_0}|y'(t)|^2(m.\nu)d\Gamma+\frac{(n-1)^2}{4\eta}\lambda^2K_2^2|y'(t)|^2_{\Gamma_0}\\ & +2\eta E(t)+\frac{RC_0(2\lambda_{2(\gamma+1)})^{2(\gamma+1)}}{\eta}[E(t)]^{\gamma+1}+\eta|\nabla y(t)|^2_{\Gamma_0}\\ & +\frac{R}{\eta}|g(y'(t))|^2_{\Gamma_0}+\eta|\nabla y(t)|^2_{\Gamma_0}\end{aligned}$$

e, desde que $m.\nu \geq m_0 > 0$ sobre Γ_0 e $|(m.\nu)|y'(t)|^2| \leq R|y'(t)|^2$ segue que

$$\begin{aligned}\psi'(t) \leq\ & -LE(t)+\left(2\|b'\|^{\frac{1}{2}}_\infty R^{\frac{1}{2}}+(n-1)\|b\|^{\frac{1}{2}}_\infty+2\lambda(n-1)\|b'\|^{\frac{1}{2}}_\infty+2\eta\right)E(t)\\ & -(m_0-2\eta)|\nabla y(t)|^2_{\Gamma_0}+\left(\frac{(n-1)^2}{4\eta}\lambda^2K_2^2+R+\frac{R}{\eta}K_2^2\right)|y'(t)|^2_{\Gamma_0}\\ & +\frac{RC_0(2\lambda_{2(\gamma+1)})^{2(\gamma+1)}}{\eta}[E(t)]^{\gamma}E(t).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Afirmação: *Existe $M > 0$ tal que*

$$E(t) \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

De fato, por (4.10) temos

$$\begin{aligned}E'(t) &\leq -\left(K_1+\frac{\delta}{2}\right)\int_{\Gamma_0}|y'(t)|^2d\Gamma+\frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|y'(t)|^2dx\\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|y'(t)|^2dx\\ &\leq \mathcal{B}(t)\frac{1}{2}\int_\Omega|y'(t)|^2dx\\ &\leq \mathcal{B}(t)E(t)\end{aligned}$$

onde,

$$\mathcal{B}(t)=\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial b_j}{\partial x_j}(t)\right\|_\infty.$$

Assim, multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $\exp\left(-\int_0^t \mathcal{B}(s)ds\right)$, obtemos

$$E'(t)\exp\left(-\int_0^t \mathcal{B}(s)ds\right) - \exp\left(-\int_0^t \mathcal{B}(s)ds\right)\mathcal{B}(t)E(t) \leq 0.$$

agora,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{E(t)\exp\left(-\int_0^t \mathcal{B}(s)ds\right)\right\} &= E'(t)\exp\left(-\int_0^t \mathcal{B}(s)ds\right)\\ &- E(t)\exp\left(-\int_0^t \mathcal{B}(s)ds\right)\mathcal{B}(t)\end{aligned}$$

logo,

$$\frac{d}{dt}\left\{E(t)\exp\left(-\int_0^t \mathcal{B}(s)ds\right)\right\} \leq 0.$$

Integrando a desigualdade acima em $(0,t)$, encontramos

$$-E(0)\exp\left(-\int_0^0 \mathcal{B}(s)ds\right) + E(t)\exp\left(-\int_0^t \mathcal{B}(s)ds\right) \leq 0$$

o que acarreta,

$$E(t) \leq E(0)\exp\left(\int_0^t \mathcal{B}(s)ds\right)$$

e assim,

$$E(t) \leq E(0)\exp\left(\int_0^\infty \mathcal{B}(s)ds\right)$$

e, desde que, $\frac{\partial b_j}{\partial x_j} \in L^1(0,\infty;L^\infty(\Omega))$ para $j \in \{1,\ldots,n\}$, temos

$$\exp\left(\int_0^\infty \mathcal{B}(s)ds\right) < \infty$$

o que conclui a prova da afirmação.

Daí, podemos escrever

$$\psi'(t) \leq -(L-(N+2\eta+J(\eta)))E(t) - (m_0-2\eta)|\nabla y(t)|^2_{\Gamma_0} + K(\eta)|y'(t)|^2_{\Gamma_0}$$

onde

$$N = \left(2\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}} + (n-1)\|b\|_\infty^{\frac{1}{2}} + 2\lambda(n-1)\|b'\|_\infty^{\frac{1}{2}}\right),$$
$$K(\eta) = \left(\frac{(n-1)^2}{4\eta}\lambda^2K_2^2 + R + \frac{R}{\eta}K_2^2\right)$$

e

$$J(\eta) = \frac{RC_0(2\lambda_{2(\gamma+1)})^{2(\gamma+1)}}{\eta}M^\gamma$$

Escrevendo $M_1 = R(2\lambda_{2(\gamma+1)})^{2(\gamma+1)}M^\gamma > 0$ e considerando $N < L$, $C_0 < \frac{1}{8M_1}(N-L)^2$ e $\eta < \min\left\{\frac{m_0}{2}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{8}(N-L)^2 - C_0M_1)^{1/2} + \frac{1}{4}(L-N)\right)\right\}$, obtemos

$$\psi'(t) \leq -BE(t) + K|y'(t)|^2_{\Gamma_0} \tag{4.24}$$

onde $B = (L - (N - 2\eta + J)) > 0$.

Agora, de (4.24) e (4.10), obtemos

$$\begin{aligned}
E'_\varepsilon(t) &= E'(t) + \varepsilon\psi'(t) \\
&\leq -\left(K_1 + \frac{\delta}{2}\right)|y'(t)|^2_{\Gamma_0} + \frac{1}{2}\int_\Omega div(b)|y'(t)|^2 dx - \varepsilon BE(t) + \varepsilon K|y'(t)|^2_{\Gamma_0} \\
&\leq -\left(K_1 + \frac{\delta}{2} - \varepsilon K\right)|y'(t)|^2_{\Gamma_0} + \|div(b)\|^{1/2}_\infty \frac{1}{2}|y'(t)|^2 - \varepsilon BE(t) \\
&\leq -\left(K_1 + \frac{\delta}{2} - \varepsilon K\right)|y'(t)|^2_{\Gamma_0} - (\varepsilon B - \|div(b)\|^{1/2}_\infty)E(t).
\end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon < \frac{K_1}{K} + \frac{\delta}{2K}$ e $\|div(b)\|_\infty$ suficientemente pequeno, obtemos

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\theta_3|y'(t)|^2_{\Gamma_0} - \theta_2 E(t) \leq -\theta_2 E(t)$$

com $\theta_3, \theta_2 > 0$. Isto é,

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\theta_2 E(t). \tag{4.25}$$

Como por (4.13),

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon\theta_1 E(t)$$

obtemos

$$(1 - \varepsilon\theta_1)E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq (1 + \varepsilon\theta_1)E(t)$$

assim, tomando $\varepsilon < \frac{1}{2\theta_1}$,

$$\frac{E(t)}{2} \leq E_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}E(t) \leq 2E(t)$$

daí, por (4.25)

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\frac{\theta_2}{2}E_\varepsilon(t)$$

ou ainda,

$$E'_\varepsilon(t) + \frac{\theta_2}{2}E_\varepsilon(t) \leq 0 \tag{4.26}$$

com $\theta_2 > 0$. Ou seja, em (4.26), temos uma EDO, cuja solução satisfaz

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0)\exp\left(-\frac{\theta_2}{2}t\right), \quad \forall t \geq 0.$$

Com isso,

$$E(t) \leq 2E_\varepsilon(t) \leq 2E_\varepsilon(0)\exp\left(-\frac{\theta_2}{2}t\right) \leq 4E(0)\exp\left(-\frac{\theta_2}{2}t\right), \quad \forall t \geq 0. \tag{4.27}$$

Escrevendo $C = 4E(0)$ e $\gamma = \frac{\theta_2}{2}$, obtemos

$$E(t) \leq C\exp\left(-\gamma t\right), \quad \forall t \geq 0.$$

4.2 Comportamento Assintótico da Solução Fraca

Observemos que, por (4.27), para cada $\mu \in \mathbb{N}$, y_μ (solução forte do problema $(**)$), satisfaz

$$E_\mu(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y'_\mu(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y_\mu(t)|^2 dx \leq 4E_\mu(0)\exp(-\mu t) \qquad \forall t \geq 0.$$

Agora, como

$$\begin{gathered} y_\mu \to y \text{ forte em } C([0,T];V) \hookrightarrow L^2(0,T;V) \\ y'_\mu \to y' \text{ forte em } C([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{gathered}$$

segue da Proposição (1.42)

$$\begin{gathered} y_\mu \rightharpoonup y \text{ fraco em } L^2(0,T;V) \\ y'_\mu \rightharpoonup y' \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{gathered}$$

logo,

$$\begin{gathered} |\nabla y(t)|^2 \leq \liminf_{\mu\to\infty} |\nabla y_\mu|^2 \\ |y'(t)|^2 \leq \liminf_{\mu\to\infty} |y'_\mu(t)|^2, \end{gathered}$$

com $t \geq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2 \\ &\leq \liminf_{\mu\to\infty} \frac{1}{2}|\nabla y_\mu(t)|^2 + \liminf_{\mu\to\infty} \frac{1}{2}|y'_\mu(t)|^2 \\ &\leq \liminf_{\mu\to\infty} \left(\frac{1}{2}|\nabla y_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}|y'_\mu(t)|^2\right) \\ &\leq \liminf_{\mu\to\infty} 4E_\mu(0)\exp(-\gamma t) \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

E, observando que

$$\begin{aligned}
\liminf_{\mu\to\infty} E_\mu(0) &= \liminf_{\mu\to\infty}\left(\frac{1}{2}|y'_\mu(0)|^2+\frac{1}{2}|\nabla y_\mu(0)|^2\right)\\
&= \liminf_{\mu\to\infty}\left(\frac{1}{2}|y^1_\mu|^2+\frac{1}{2}|\nabla y^0_\mu|^2\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}|y^1|^2+\frac{1}{2}|\nabla y^0|^2\right)\\
&= E(0),
\end{aligned}$$

obtemos

$$E(t) \leq 4E(0)\exp(-\gamma t) \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, concluímos que a solução fraca associada ao problema $(*)$, assim como acontece com a solução forte, decai exponencialmente a medida que t cresce.

Com este resultado, encerramos a proposta do nosso trabalho.

Apêndice A

O Teorema de Carathéodory

Neste Apêndice, enunciaremos o teorema de Carathéodory que foi utilizado para provar a existência de solução para o problema aproximado (2.13) e, em seguida, mostraremos essa prova.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t, x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função e consideremos o problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0. \end{array} \right. \tag{A.1}$$

Definição A.1 *Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:*

(i) *$f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixado;*

(ii) *$f(t, x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;*

(iii) *Para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que*

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \quad \forall (t, x) \in K.$$

Teorema A.2 (Carathéodory) *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução $x(t)$ de (A.1) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.*

Prova. Ver [9]. ■

Corolário A.3 *Sejam $\Omega = [0,T] \times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (A.1) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I , onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0,T]$.*

Prova. Para a prova ver [9]. ■

A.1 Existência de solução para o problema aproximado (2.13)

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos por

$$V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$$

o espaço gerado pelos m primeiros vetores da base Hilbertiana $\{w_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ de $V \cap H^2(\Omega)$. Dizemos que

$$v_m(t) \in V_m \text{ se, e somente se, } v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$$

e consideremos, o problema :

$$\left| \begin{array}{l} (v_m''(t), w) + (\nabla v_m(t), \nabla w) + (f(v_m(t) + \phi(t)), w)_{\Gamma_0} + (g(v_m'(t) + \phi'(t)), w)_{\Gamma_0} \\ + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (b_j(t) \frac{\partial v_m'}{\partial x_j}(t), w) = (\widehat{F}(t), w) + (G(t), w)_{\Gamma_0} \ \ \forall w \in V_m \\ v_m(0) = v_m'(0) = 0. \end{array} \right. \tag{A.2}$$

A seguir, obteremos um problema aproximado equivalente ao problema acima de tal forma que o mesmo esteja nas condições do Teorema de Carathéodory.

Em $(A.2)_1$ façamos $w = w_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, ou seja

$$\begin{array}{l} (v_m''(t), w_k) + (\nabla v_m(t), \nabla w_k) + (f(v_m(t) + \phi(t)), w_k)_{\Gamma_0} + (g(v_m'(t) + \phi'(t)), w_k)_{\Gamma_0} \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (b_i(t) \frac{\partial v_m'}{\partial x_i}(t), w_k) = (\widehat{F}(t), w_k) + (G(t), w_k)_{\Gamma_0}. \end{array}$$

Substituindo $v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)(w_j, w_k) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)(\nabla w_j, \nabla w_k) + \left(f\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j + \phi(t)\right), w_k\right)_{\Gamma_0} \\
&+ \left(g\left(\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j + \phi'(t)\right), w_k\right)_{\Gamma_0} + \sum_{i=i}^{n}\left(b_i(t)\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\frac{\partial w'_j}{\partial x_i}, w_k\right) \\
&= (\widehat{F}(t), w_k) + (G(t), w_k)_{\Gamma_0}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Assim, o problema (A.3) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \ldots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \ldots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \ldots & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g''_{1m} \\ g''_{2m} \\ \vdots \\ g''_{mm} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \ldots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \ldots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \ldots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(f\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j + \phi(t)\right), w_1\right)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ \left(f\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j + \phi(t)\right), w_m\right)_{\Gamma_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(g\left(\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j + \phi'(t)\right), w_1\right)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ \left(g\left(\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j + \phi'(t)\right), w_m\right)_{\Gamma_0} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \sum_{i=i}^{n}(b_i(t)\frac{\partial w'_1}{\partial x_i}, w_1) & \sum_{i=i}^{n}(b_i(t)\frac{\partial w'_2}{\partial x_i}, w_1) & \ldots & \sum_{i=i}^{n}(b_i(t)\frac{\partial w'_m}{\partial x_i}, w_1) \\ \sum_{i=i}^{n}(b_i(t)\frac{\partial w'_1}{\partial x_i}, w_2) & \sum_{i=i}^{n}(b_i(t)\frac{\partial w'_2}{\partial x_i}, w_2) & \ldots & \sum_{i=i}^{n}(b_i(t)\frac{\partial w'_m}{\partial x_i}, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=i}^{n}(b_i(t)\frac{\partial w'_1}{\partial x_i}, w_m) & \sum_{i=i}^{n}(b_i(t)\frac{\partial w'_2}{\partial x_i}, w_m) & \ldots & \sum_{i=i}^{n}(b_i(t)\frac{\partial w'_m}{\partial x_i}, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_{1m} \\ g'_{2m} \\ \vdots \\ g'_{mm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\widehat{F}(t), w_1) \\ \vdots \\ (\widehat{F}(t), w_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (G(t), w_1)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ (G(t), w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix}.$$

Denotando,

$$C := \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \dots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \dots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \dots & (w_m, w_m) \end{bmatrix},$$

$$A := \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \dots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \dots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \dots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix},$$

$$E(t) := \begin{bmatrix} \sum_{i=i}^n (b_i(t)\dfrac{\partial w_1'}{\partial x_i}, w_1) & \sum_{i=i}^n (b_i(t)\dfrac{\partial w_2'}{\partial x_i}, w_1) & \dots & \sum_{i=i}^n (b_i(t)\dfrac{\partial w_m'}{\partial x_i}, w_1) \\ \sum_{i=i}^n (b_i(t)\dfrac{\partial w_1'}{\partial x_i}, w_2) & \sum_{i=i}^n (b_i(t)\dfrac{\partial w_2'}{\partial x_i}, w_2) & \dots & \sum_{i=i}^n (b_i(t)\dfrac{\partial w_m'}{\partial x_i}, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=i}^n (b_i(t)\dfrac{\partial w_1'}{\partial x_i}, w_m) & \sum_{i=i}^n (b_i(t)\dfrac{\partial w_2'}{\partial x_i}, w_m) & \dots & \sum_{i=i}^n (b_i(t)\dfrac{\partial w_m'}{\partial x_i}, w_m) \end{bmatrix},$$

$$H = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m] \qquad \text{e} \qquad z(t) = \begin{bmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{bmatrix}$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$Cz''(t) + Az(t) + E(t)z'(t) + B(z(t)) + D(z'(t)) = F(t) + G(t)$$

onde

$$B(z(t)) = \begin{bmatrix} \left(f\left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j + \phi(t)\right), w_1\right)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ \left(f\left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j + \phi(t)\right), w_m\right)_{\Gamma_0} \end{bmatrix},$$

$$D(z'(t)) =: \begin{bmatrix} \left(g\left(\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)w_j + \phi'(t)\right), w_1\right)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ \left(g\left(\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)w_j + \phi'(t)\right), w_m\right)_{\Gamma_0} \end{bmatrix}$$

$$F(t) := \begin{bmatrix} (\widehat{F}(t), w_1) \\ \vdots \\ (\widehat{F}(t), w_m) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad G(t) =: \begin{bmatrix} (G(t), w_1)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ (G(t), w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix}.$$

No que diz respeito as condições iniciais do problema, observemos que:

$$0 = v_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j \qquad \text{e} \qquad 0 = v'_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j$$

mas, como $\{w_\mu\}$ formam uma base para $V \cap H^2(\Omega)$, podemos concluir que

$$g_{jm}(0) = g'_{jm}(0) = 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Assim,

$$z(0) = z'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

logo, denotando a matriz nula acima, apenas por 0, obtemos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) + E(t)z'(t) + B(z(t)) + D(z'(t)) = F(t) + G(t) \\ z(0) = z'(0) = 0 \end{cases} \tag{A.4}$$

Afirmação: *A matriz C é inversível.*

De fato, para mostrar que C é inversível, observemos inicialmente que C é uma matriz real e simétrica de onde podemos concluir que C é auto-adjunta e, portanto, diagonalizável. Logo, existe uma matriz M inversível tal que

$$D = M^{-1} C M$$

é uma matriz diagonal.

Assim, é suficiente provar que D é inversível ou, equivalentemente, que zero não é autovalor de D.

Suponha, por absurdo, que zero é autovalor de D, então, existe um vetor não nulo de $\mathbb{R}^m$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

tal que

$$Du = 0.$$

Desde que M é inversível, satisfaz

$$M^{-1}\phi = 0 \Longleftrightarrow \phi = 0$$

como

$$0 = Du = M^{-1}CMu$$

podemos concluir que

$$CMu = 0.$$

Escrevendo

$$Mu = \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix}$$

obtemos

$$0 = C\varphi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \varphi_i(w_i, w_1) \\ \sum_{i=1}^m \varphi_i(w_i, w_2) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \varphi_i(w_i, w_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^m \varphi_i w_i, w_1) \\ (\sum_{i=1}^m \varphi_i w_i, w_2) \\ \vdots \\ (\sum_{i=1}^m \varphi_i w_i, w_m) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\left(\sum_{i=1}^m \varphi_i w_i, w_j\right) = 0 \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

portanto, o vetor

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \varphi_i w_i$$

é ortogonal a todo vetor de V_m. Em particular, $(\alpha, \alpha) = 0$, de onde obtemos $\alpha = 0$ e, portanto, $\varphi_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Como M é inversível, a transformação linear definida por M é injetora, logo, $u = 0$, contrariando o fato de u ser autovetor de D. O que prova a afirmação.

Com isso, podemos reescrever $(A.4)$ da seguinte forma

$$\begin{cases} z''(t) + C^{-1}Az(t) + C^{-1}E(t)z'(t) + C^{-1}B(z(t)) + C^{-1}D(z'(t)) = C^{-1}F(t) + C^{-1}G(t) \\ z(0) = z'(0) = 0 \end{cases} \tag{A.5}$$

Definamos,

$$Y_1(t) = z(t), \qquad Y_2(t) = z'(t) \qquad \text{e} \qquad Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}$$

então

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} Y_2(t) \\ C^{-1}F(t) + C^{-1}G(t) - C^{-1}Az(t) - C^{-1}E(t)z'(t) - C^{-1}B(z(t)) - C^{-1}D(z'(t)) \end{bmatrix}$$

o que acarreta

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}F(t) + C^{-1}G(t) - C^{-1}B(Y_1(t)) - C^{-1}D(Y_2(t)) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}E(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}F(t) + C^{-1}G(t) - C^{-1}B(Y_1(t)) - C^{-1}D(Y_2(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}E(t) \end{bmatrix} Y(t) \\ Y(0) = Y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Provaremos que o problema acima possui uma única solução local utilizando o Teorema de Carathéodory, para tal, considere a aplicação

$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$$

definida por

$$h(t,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}F(t) + C^{-1}G(t) - C^{-1}B(y_1) - C^{-1}D(y_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}E(t) \end{bmatrix} y$$

onde $y = Y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{2m})$, $y_1 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ e $y_2 = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{2m})$.

Inicialmente, vamos verificar que a aplicação h está nas condições do Teorema de Carathéodory.

Com efeito,

(i) Seja $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixado. A função h é mensurável como função de $t \in [0,T]$, uma vez que $C^{-1}F(t), C^{-1}G(t)$ e $C^{-1}E(t)$ são mensuráveis e os outros termos não dependem de t.

(ii) Para cada $t \in [0,T]$, fixado, h é contínua como função de y.

De fato, notemos que a aplicação

$$\begin{aligned} N: \ \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ y &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}E \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

é linear e, consequentemente, contínua, pois $E(t)$ é constante.

Por outro lado, da continuidade das aplicações f e g segue que $C^{-1}B$ e $C^{-1}D$ são contínuas, respectivamente, e como $C^{-1}F(t)$ e $C^{-1}G(t)$ são constantes, segue que h é contínua.

(iii) Seja $K \subset [0,T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um compacto, então

$$\|h(t,y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|C^{-1}By_1\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}Dy_2\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}F\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}G\|_{\mathbb{R}^m} + \|Ny\|_{\mathbb{R}^{2m}}$$

Agora, como B, D e N são contínuas segue que são limitadas em K e como F e G são constantes existe $M_k > 0$ tal que

$$\|C^{-1}By_1\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}Dy_2\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}F\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}G\|_{\mathbb{R}^m} + \|Ny\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_k$$

para todo $(t,y) \in K$, onde $y = (y_1, y_2)$. Assim, concluímos que

$$\|h(t,y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_k, \quad \forall (t,y) \in K.$$

Logo, de $(i) - (iii)$, temos que as condições de Carathéodory estão satisfeitas e, como consequência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = h(t,y) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

em algum intervalo da forma $[0, t_m)$, $t_m > 0$. Além disso, Y é absolutamente contínua, portanto, derivável quase sempre em $[0, t_m)$. Resulta daí, que $z(t)$ e $z'(t)$ são absolutamente contínuas e, consequentemente, $z''(t)$ existe em quase todo ponto de $[0, t_m)$.

O teorema do prolongamento, juntamente com a primeira estimativa, garantem a extensão da solução para $[0,T]$.

Bibliografia

[1] ARARUNA, F.D.; MACIEL, A.B., Existence and Boundary stabilization of the semilinear wave equation. Nonlinear Analysis, n. 67, p. 1288-1305, 2007 .

[2] BREZIS, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,1.ed, Springer, New York, 2011.

[3] BREZIS, H.; CAZENAVE, T., Nonlinear Evolution Equations. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.

[4] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N., Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev. Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[5] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N.; SORIANO, J.A., Existence and Boundary Stabilization of a Nonlinear Hyperbolic Equation with Time-Dependent Coefficients. EJDE, n.8, p. 1-21, 1998.

[6] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N.; MEDEIROS, L. A.; SORIANO, J.A., On the Existence and the Uniform Decay of a Hyperbolic Equation with Non-Linear Boundary Conditions. Southeast Asian Bulletin of Mathematics. v.24, p.183–199, 2000.

[7] CHEN, G., WONG, H., Asymptotic behaviour of solutions of the one dimensional wave equation with a nonlinear boundary stabilizer. SIAM J. Control and Optimization. v. 27,p. 758–775, 1989.

[8] CIPOLLATI, R.; MACHTYNGIER, E.; SAN PEDRO SIQUEIRA, E., Nonlinear boundary feedback stabilization for Schrödinger equations. Differential and Integral Equations. v.9(1), p.137–148, 1996.

[9] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N., Theory of Ordinary Diferential Equations. McGrall-Hill, New York, 1955.

[10] FAEDO S., Un Nuovo Metodo per L'Analisi Esistenziale e Quantitativa dei Problemi di Propagazione. Annali della Scuola Norm. Sup . Roma ,p. 1–41, 1949.

[11] FAVINI, A.; HORN, M.A.; LASIECKA, I., TATARU, D., Global existence and regularity of solutions to a Von Kármán system with nonlinear boundary dissipation. Differential and Integral Equations. v.9(2), p.267–269, 1996.

[12] GALERKIN B. G., Barras e placas. As séries em algumas questões de equilíbrio elástico de barras e placas. Notícias dos Engenheiros. v. 1 ,p. 897–908, 1915. (em Russo: Sterzhni i plastinki. Riady v nekotorykh voprosah uprugogo ravnovesia sterzhnei i plastinok, Vestnik Ingenerov, v. 1 ,p 897–908, 1915).

[13] KOMORNIK, V.; ZUAZUA, E., A direct method for boundary stabilization of the wave equation. J. Math. Pures et Appl. v.69, p.33–54, 1990.

[14] KUFNER, A.; JOHN, O.; FUCÍK, S., Function Spaces. Kluwer, Czechoslovakia, 1977.

[15] LAGNESE, J.E., Note on boundary stabilization of wave equations. SIAM J. Control and Optimization. v.26, p.1250–1257, 1988.

[16] LAR'KIN, N.A., MEDEIROS, L.A., The Wave Equations with Non-Linear Boundary Conditions, Atas do 43o Seminário Brasileiro de Análise, 1995.

[17] LASIECKA, I.; TATARU, D., Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping. Differential and Integral Equations. v.6(3), p.507–533, 1993.

[18] LIONS, J.L., Équations aux dérivées partiel les interpolation, Volume I Euvres choisies de Jacques-Louis Lions. SMAI, EDP Sciences, Paris, 2003.

[19] LIONS, J. L., Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires. Paris: Dunod, 1969.

[20] LIONS, J.L.; MAGENES. E., Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications, Vol.1, Dunod, Paris,1968.

[21] LOUREDO, A.T.; MIRANDA,M. M., Non Linear Dissipation for a Coupled existen of klen-Gerden Equations. Eletronic Journal of Differential Equations, v. 120, p.1-19, 2010.

[22] MEDEIROS, L. A., Tópicos em Equações Diferenciais Parciais, Parte I, Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[23] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E.A., A Integral de Lebesgue. Textos de Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[24] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA,M. M ., Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogêneos), Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[25] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA,M. M .,Hidden regularity for semilinear hyperbolic partial diferential equations. Ann. Fac, Sci. Toulouse. v. 9 (1), p. 103-120,1988.

[26] MEDEIROS,L.A.; MIRANDA,M.M., Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, 1.ed., Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro 2011.

[27] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA,M. M ., On Boundary Value Problem for Wave Equations: Existence, Uniquiness-asymptotic bahavior. Revista de Matemáticas Aplicadas, Universidad de Chile, v.17, p.47-73, 1996.

[28] MIRANDA,M. M., Traço para o dual dos espaços de Sobolev, Bol. Soc. Paran. Matemática (2ª série) 11(2) (1990), p.131-157.

[29] PAZ, F.L.A., Existência de solução e estabilidade na fronteira da equação da onda semilinear, Dissertação de mestrado em matemática, UFCG, Campina Grande, 2012.

[30] ROBERT, D.; LIONS,J.L., Functional and Variational methods. Springer, Berlin, 2000.

[31] TEMAM,R., Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis, Stud. Math. Appl., vol. 2, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[32] VITILLARO, E., Global Existence for the Wave Equation with Nonlinear Boundary Damping and Source Terms. Journal of Differential Equations, v.186, p.259-298, 2002.

[33] YOU,Y., Energy decay and exact controllability for the Petrovsky equation in a bounded domain. Advances in Appl. Math.11, p. 372–388 ,1990.

[34] ZUAZUA, E., Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback. SIAM J. Control and Optimization. v.28, p.466–478, 1990.