# Resumo

Neste trabalho, estudamos a geometria de gráficos *Killing* conformes inteiros, isto é, gráficos construídos a partir do fluxo gerado por um campo de vetores $V$ *Killing* conforme completo, os quais estão definidos sobre uma folha integral da folheação $V^{\perp}$ ortogonal a $V$. Além disso, estudamos a restrição da norma do gradiente da função $z$ a qual determina tal gráfico $\Sigma(z)$, nesse sentido, apresentamos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica e, em particular, uma folha integral de $V^{\perp}$.

Palavras-chave: campos de vetores *Killing* conformes, gráficos *Killing* conformes, hipersuperfícies totalmente umbílicas, $r$-ésimas curvaturas médias, transformações de Newton.

# Abstract

We study the geometry of entire conformal *Killing* graphs, that is, graphs constructed through the flow generated by a complete conformal *Killing* vector field $V$ and which are defined over an integral leaf of the foliation $V^\perp$ orthogonal to $V$. In this setting, under a suitable restriction on the norm of the gradient of the function $z$ which determines such a graph $\Sigma(z)$, we establish sufficient conditions to ensure that $\Sigma(z)$ is totally umbilical and, in particular, an integral leaf of $V^\perp$.

Keywords: conformal *Killing* vector fields, conformal *Killing* graphs, totally umbilical hypersurfaces, $r$ th mean curvatures, Newton transformations.

**Universidade Federal de Campina Grande**
**Centro de Ciências e Tecnologia**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Curso de Mestrado em Matemática**

# Sobre a Geometria de Gráficos Killing Conformes Inteiros em Ambientes Riemannianos Folheados

**por**

**Jogli Gidel da Silva Araújo** †

**sob orientação do**

**Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

# Sobre a Geometria de Gráficos Killing Conformes Inteiros em Ambientes Riemannianos Folheados

**por**

**Jogli Gidel da Silva Araújo**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. José Nazareno Gomes-UFAM**

---

**Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino-UFPI**

---

**Prof. Dr. Joseilson Raimundo de Lima-UFCG**

---

**Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima-UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**

**Centro de Ciências e Tecnologia**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Curso de Mestrado em Matemática**

**Março/2014**

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus e a minha família. Segundamente, quero ressaltar que, provavelmente não teria alcançado esse nível acadêmico se não fosse a ajuda de muitos.

Agradeço a todos os professores que tive no mestrado: Jefferson, Ângelo, Diogo Diniz, Daniel Cordeiro, Daniel Cibotaru, Marco Antonio, Uberlandio e Henrique. Continuando, agradeço a todos os funcionários do departamento de Matemática (UAMAT) pelo auxílio, aos colegas de mestrado, também agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, a banca examinadora pelas valiosas sugestões e novamente agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima pela orientação e paciência durante esta jornada, muito obrigado mesmo.

# Dedicatória

Aos meus pais Josemir e Luciene e as minhas irmãs Jardilene e Jaqueline.

# Conteúdo

# Introdução

Campos de vetores *Killing* conformes são objetos que têm sido bastante estudados, a fim de entender a geometria de hipersuperfícies imersas em ambientes Riemannianos, em particular, a geometria de gráficos *Killing* conformes inteiros. Nesse sentido, Montiel [17] estudou a singularidade de hipersuperfícies compactas com curvatura média constante em uma variedade Riemanniana completa munida de um campo de vetores *Killing* conforme fechado. Segue também a obtenção de resultados análogos para os Teoremas clássicos de Alexandrov [1, 2] e Jellet e Liebmann [15, 16] sobre hipersuperfícies em ambientes Euclidianos.

Após algum tempo, Alías, Dajczer e Ripoll [5] estenderam o clássico Teorema de Bernstein (para maiores detalhes, recomendamos [8]) para o contexto das superfícies mínimas completas em ambientes Riemannianos de curvatura de Ricci não negativa munido de um campo de vetores *Killing*. Isto foi feito sob o pressuposto de que o sinal da função ângulo entre uma aplicação global de Gauss e o campo de vetores *Killing* permanece inalterada ao longo da superfície. Na verdade, seu principal resultado requer apenas a presença de um campo de vetores *Killing* conforme homotético.

Recentemente, Dajczer, Hinojosa e de Lira [13] definiram uma noção de gráfico em uma classe de variedades Riemannianas munido de um campo de vetores *Killing* e resolveram o problema de Dirichlet correspondente para curvatura média prescrita em hipóteses envolvendo dados de domínio e curvatura de Ricci no espaço ambiente.

No artigo [10], Caminha estabeleceu obstáculos à existência de fechados conformes e campos de vetores *Killing* não paralelos sobre uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não positiva, generalizando um teorema devido a Pan [20]. Além disso, o autor obteve teoremas gerais do tipo Benstein para certas hipersuperfícies completas de variedades Riemannianas munidas de campos de vetores $Killing$ conformes fechados.

Mais recentemente, Dajczer e de Lira [12] estenderam alguns resultados de [13], considerando os gráficos que são construídos através do fluxo gerado por um campo de vetores $Killing$ conforme globalmente definida em uma variedade Riemanniana. De acordo com a terminologia estabelecida em [12], esses gráficos são chamados gráficos $Killing$ conformes.

Motivado pelos trabalhos acima e de acordo com o artigo [16], desenvolvido nesta dissertação, vamos analisar a geometria de gráficos $Killing$ conformes em ambientes Riemannianos munidos de campos de vetores $Killing$ conformes $V$, que estão definidos sobre uma folha integral da folheação $V^{\perp}$ ortogonal ao campo $V$. Neste trabalho, sob certas restrições da norma do gradiente da função $z$ que determina tal gráfico $\Sigma(z)$, apresentamos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica e, em particular, uma folha integral da folheação $V^{\perp}$. Nossa abordagem é baseada no uso da divergência das transformações de Newton junto com uma versão do Teorema de Stokes para o contexto das variedades Riemannianas não compactas completas obtidas por Yau em [22] e recentemente generalizada por Caminha em [10].

Observamos também que Alías, Impera e Rigoli estudaram recentemente em [6] o problema da singularidade para hipersuperfícies compactas e completas com alguma curvatura média $r$-ésima constante em produtos warped Riemannianos, em que constituem um caso particular importante de ambientes Riemannianos munidos de campos de vetores $Killing$ conformes fechados. Além disso, eles determinaram condições suficientes para tal hipersuperfície contida em um slab. Por outro lado, assumindo uma comparação natural entre as desigualdades das $r$-ésimas curvaturas médias da hipersuperfície e os da fatia do slab onde tal hipersuperfície está contida, Aquino e de Lima [7] estabeleceram caracterizações do resultado relativo às fatias de um produto warped. Em ambos os trabalhos, a abordagem é baseada no uso de uma extensão adequada do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau para um operador diferencial adequado do tipo traço.

O nosso trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1 apresentamos os preliminares necessários para o entendimento dos resultados, no Capítulo 2, abordamos alguns fatos com respeito as $r$-ésimas curvaturas médias e algumas propriedades referentes às transformações de Newton para as hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana e no Capítulo 3, o caso em que a variedade Riemanniana é munida de um campo de vetores *Killing*, estabelecemos condições para o conceito de gráfico *Killing* conforme inteiro. Logo depois, veremos os primeiros resultados em termos da curvatura média dos gráficos em estudo. Finalmente, apresentamos a extensão para o caso das $r$-ésimas curvaturas médias.

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1 Campos de tensores

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos que serão necessários para o entendimento dos principais resultados descritos neste trabalho. Para maiores detalhes sobre o assunto, recomendamos ao leitor as referências [14] e [22].

Considere $V$ um módulo sobre o anel $K$ e denote por $V^*$ o conjunto de todas as aplicações lineares de $V$ em $K$ e que munido com as operações usuais, é chamado o módulo dual de $V$. Se $V_i = V$ para $1 \leq i \leq s$, denotamos $V_1 \times \cdots \times V_s$ por $V^s$.

**Definição 1.1** *Para inteiros $r \geq 0, s \geq 0$ não ambos nulos, uma aplicação $K$-multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ é chamada um tensor do tipo $(r, s)$ sobre $V$.*

**Observação 1.1** *No contexto da definição acima, particularmente, as aplicações serão denotadas por $A : V^s \to K$ se $r = 0$ e $A : (V^*)^r \to K$ se $s = 0$.*

O conjunto $\mathfrak{T}^r_s(V)$ de todos os tensores do tipo $(r, s)$ sobre $V$ é um módulo sobre $K$, com as operações usuais.

**Observação 1.2** *Por convenção, um tensor do tipo $(0, 0)$ sobre $V$ é um elemento de $K$.*

Para maiores detalhes, confira capítulo 2 de [22].

No que segue, $\mathfrak{F}(M)$ denota o anel das funções diferenciáveis sobre a variedade diferenciável $M$ e $\mathfrak{X}(M)$ é o conjunto dos campos de vetores tangentes diferenciáveis sobre $M$.

Um campo de tensor $A$ sobre $M$ é um tensor sobre o $\mathfrak{F}(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$, onde $\mathfrak{X}(M)$ representa o módulo sobre o anel $\mathfrak{F}(M)$. Na maioria das vezes, por um abuso de linguagem, vamos chamar $A$ de tensor em vez de um campo de tensor.

**Exemplo 1** *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, então*

$$A : \mathfrak{X}^*(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$$

*definida por $A(\theta, X) = \theta(X)$ é um tensor do tipo* $(1,1)$.

Sendo $A$ um tensor do tipo $(r,s)$, a sua representação é dada por

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M),$$

onde $A$ é uma aplicação $\mathfrak{F}(M)$-multilinear.

O conjunto $\mathfrak{T}^r_s(M)$ de todos os campos de tensores sobre $M$ do tipo $(r,s)$ é um módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$. Em particular, um campo de tensor sobre $M$ do tipo $(0,0)$ é uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$. Ver observação 1.2.

**Definição 1.2** *Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $B \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$, definimos*

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \to \mathfrak{F}(M) \quad \textit{por}$$

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_{s+s'}) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)\\ B(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}).\end{aligned}$$

Observe que $A \otimes B$ é um tensor do tipo $(r+r', s+s')$, chamado o tensor produto de $A$ por $B$. Note que se $r' = s' = 0$, então pela Observação (1.2), $B$ é uma função suave em $M$.

Definimos agora

$$A \otimes f = f \otimes A = fA.$$

Por um argumento relativamente simples, segue que se $A$ é um tensor do tipo $(0,0)$, o tensor produto reduz a uma multiplicação ordinária em $\mathfrak{F}(M)$. De posse da definição 1.2, temos o seguinte

**Proposição 1.3** *Se $f, g \in \mathfrak{F}(M), A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $A' \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$ então*

$$(fA + gA') \otimes B = fA \otimes B + gA' \otimes B.$$

Verifica-se facilmente a validade da última proposição, basta usar a definição de produto de tensores e propriedades de álgebra elementar. Identificamos $\mathfrak{T}^0_1(M) \equiv \mathfrak{X}^*(M)$ e $\mathfrak{T}^1_0(M) \equiv \mathfrak{X}(M)$, pois a cada $V \in \mathfrak{X}(M) \setminus \{0\}$ associamos $\overline{V} = A : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{F}(M)$ da forma $\overline{V}(\theta) = \theta(V)$. Para maiores detalhes, ver Capítulo 2 de [22].

Os tensores do tipo $(0, s)$ são chamados de covariantes enquanto os do tipo $(r, 0)$ são chamados contravariantes. Note que, se $A$ e $B$ são tensores covariante e contravariante, respectivamente, então $A \otimes B = B \otimes A$. No entanto, a comutatividade com respeito a operação $\otimes$, em geral, não vale. Por exemplo, se $\partial_1$ e $\partial_2$ representam dois campos coordenados de uma variedade diferenciável $M$ e $dx^1$, $dx^2$ são seus duais, então

$$(dx^1 \otimes dx^2)(\partial_1, \partial_2) = dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = \delta^1_1\delta^2_2 = 1,$$
$$(dx^2 \otimes dx^1)(\partial_1, \partial_2) = dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = \delta^2_1\delta^1_2 = 0,$$

e daí $dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$.

Em vez de observar o tensor avaliado num ponto, pela definição abaixo, podemos expressar um tensor em termos de coordenadas locais.

**Definição 1.4** *Seja $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas sobre alguma vizinhança coordenada $\mathcal{U} \subset M$. Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, as componentes de $A$ relativas a $\xi$ são dadas por*

$$A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = A(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s})$$

*sobre $\mathcal{U}$, onde todos os índices variam de 1 até $n = dimM$.*

Para um $(0, 1)$ tensor, que é uma 1-forma, as componentes são exatamente as componentes da fórmula $\theta = \sum \theta(\partial_i)dx^i$.Similarmente, quando um $(1, s)$ campo de tensor é dado na forma $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$, suas componentes são determinadas pela equação abaixo

$$A(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}) = \sum_j A^j_{i_1 \ldots i_s}\partial_j,$$

e sendo $\overline{A} \in \mathfrak{T}^1_s(M)$, onde

$$\begin{aligned} \overline{A}(dx^j, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}) &= dx^j(A(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s})) \\ &= \sum_k A^k_{i_1 \ldots i_s} dx^j(\partial_k) \\ &= A^j_{i_1 \ldots i_s}. \end{aligned}$$

**Exemplo 2** *Sejam* $\theta = \sum_{k=1}^{n} \theta_k dx^k$*,* $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i$ *e* $Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j$ *1-forma e campos de vetores arbitrários, respectivamente, e observe que*

$$\begin{aligned} A(\theta, X, Y) &= A(\sum_{k=1}^{n} \theta_k dx^k, \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i, \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j) \\ &= \sum_{i,j,k} A(dx^k, \partial_i, \partial_j) \theta_k X^i Y^j \\ &= \sum_{i,j,k} A_{ij}^k \theta_k X^i Y^j. \end{aligned}$$

No caso de um produto $A \otimes B$, temos que suas coordenadas são dadas por

$$(A \otimes B)_{j_1 \ldots j_{s+s'}}^{i_1 \ldots i_{r+r'}} = A_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} . B_{j_{s+1} \ldots j_{s+s'}}^{i_{r+1} \ldots i_{r+r'}},$$

onde todos os índices variam de 1 até $n = dimM$.

**Exemplo 3** *Se A é um tensor do tipo* $(1, 2)$ *e B é um tensor do tipo* $(1, 1)$*. Então* $A \otimes B$ *é um tensor do tipo* $(2, 3)$ *cujas componentes são:*

$$\begin{aligned} (A \otimes B)_{ijp}^{kq} &= (A \otimes B)(dx^k, dx^q, \partial_i, \partial_j, \partial_p) \\ &= A(dx^k, \partial_i, \partial_j) B(dx^q, \partial_p) \\ &= A_{ij}^k B_p^q. \end{aligned}$$

**Exemplo 4** *Se* $r = 1$ *e* $s = 2$*, então* $\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$ *é um* $(1, 2)$ *tensor sobre* $\mathcal{U}$ *para todos* $1 \leq i, j, k \leq n$*. Se A é um* $(1, 2)$ *tensor, então*

$$A = \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ij}^k \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j,$$

*sobre* $\mathcal{U}$*, onde cada índice varia de 1 até n.*

O Lema abaixo é uma generalização do exemplo anterior.

**Lema 1.1** *Sejam* $x^1, \ldots, x^n$ *um sistema de coordenadas sobre* $\mathcal{U} \subset M$*. Se A é um* $(r, s)$ *campo de tensor, então sobre* $\mathcal{U}$*,*

$$A = \sum A_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s},$$

*onde os índices variam de 1 até n.*

## 1.2 Contração de tensores

Nesta seção, provaremos a existência de uma operação chamada contração de tensores que transforma $(r, s)$ tensores em $(r-1, s-1)$ tensores.

**Lema 1.2** *Existe uma única aplicação linear $C : \mathfrak{T}_1^1(M) \to \mathfrak{F}(M)$, chamada $(1,1)$ contração, tal que $C(X \otimes \theta) = \theta X$ para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

**Prova.** Suponha que $C$ existe com as condições estabelecidas. Sobre uma vizinhança coordenada $\mathcal{U} \subset M$, um campo de tensor $A$ pode ser escrito como

$$\sum A_j^i \partial_i \otimes dx^j.$$

Sendo

$$C(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_i^j, \quad \text{temos}$$

$$C(A) = \sum_{i=1}^n A_i^i = \sum_{i=1}^n A(dx^i, \partial_i). \tag{1.1}$$

Observe que se a aplicação $C$ existe com as condições exigidas, então a mesma é única. Para mostrar a existência, defina $C$ por (1.1). Primeiramente note que $C$ é linear. Além disso,

$$C(X \otimes \theta) \;=\; \sum_{i=1}^n (X \otimes \theta)(dx^i, \partial_i) = \sum_{i=1}^n dx^i(X)\theta(\partial_i),$$

isto é,

$$C(X \otimes \theta) = \sum_{i=1}^n \theta(X_i \partial_i) = \theta\left(\sum_{i=1}^n X_i \partial_i\right) = \theta(X).$$

Para obter uma função global é suficiente mostrar que esta definição é independente da escolha do sistema de coordenadas. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n A\left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) &= \sum_{m=1}^n A\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j,m=1}^n \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \delta_i^j A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_m A\left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) = \sum_i A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

■

**Exemplo 5** *Se $A$ é um $(2,3)$ campo de tensor, então $C_3^1(A)$ é um $(1,2)$ campo de tensor dado por*

$$(C_3^1(A))(\theta, X, Y) = CA(., \theta, X, Y, .).$$

Relativamente a um sistema de coordenadas de $C_3^1(A)$ temos

$$\begin{aligned}(C_3^1(A))_{ij}^k &= (C_3^1 A)(dx^k, \partial_i, \partial_j)\\ &= C\{A(., dx^k, \partial_i, \partial_j, .)\}\\ &= \sum_m A(dx^m, dx^k, \partial_i, \partial_j, \partial_m), \quad \text{ou seja,}\end{aligned}$$

$$(C_3^1(A))_{ij}^k = \sum_m A_{ijm}^{mk}.$$

Não é imediato ver que, se um determinado elemento de $\mathfrak{X}^*(M)$ ou $\mathfrak{X}(M)$ se anular em algum $p \in M$, o tensor $A : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ avaliado nesse ponto é zero. Mostremos isso no resultado abaixo.

**Lema 1.3** *Se alguma das 1-formas $\theta^1, \ldots, \theta^r$ ou campos de vetores $X_1, \ldots, X_s$ se anula em $p \in M$, então $A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = 0$.*

**Prova.** Suponha sem perda de generalidade que $X_s|_p = 0$ para algum $s \in \{1, \ldots, n\}$. Sejam $x^1, \ldots, x^n$ um sistema de coordenadas sobre uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$ de $p$. Então $X_s = \sum X^i \partial_i$ sobre $\mathcal{U}$, onde $X^i = X_s x^i \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$. Sabemos que existe uma função $f$, chamada de função *bump* tal que $f$ é identicamente igual a 1 numa vizinhança de $p$ e cujo suporte está contido em $\mathcal{U}$. Para maiores detalhes, ver Capítulo 2 de [22]. Então $fX^i \in \mathfrak{F}(M)$ e $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, usando as propriedades de $A$, temos

$$\begin{aligned}f^2 A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) &= A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, f^2 X_s)\\ &= A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, f^2 \sum X^i \partial_i)\\ &= A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \sum fX^i f\partial_i)\\ &= \sum fX^i A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, f\partial_i).\end{aligned}$$

Sendo $X_s|_p = 0$, cada $X^i(p) = 0$; pois $\{\partial_i|_p\}$ é uma base, em particular, é um conjunto linearmente independente, além disso, $f(p) = 1$, logo avaliando em $p$, obtemos

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = 0.$$

■

O resultado abaixo é uma consequência quase imediata do lema 1.3.

**Teorema 1.5** *Dados $p \in M$ e $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, suponha que $\overline{\theta}^1, \ldots, \overline{\theta}^r$ e $\theta^1, \ldots, \theta^r$ são 1-formas tais que $\overline{\theta}^i|_p = \theta^i|_p$ onde $1 \leq i \leq r$; e suponha que $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s$ e $X_1, \ldots, X_s$ são campos de vetores tais que $\overline{X}_j|_p = X_j|p$ onde $1 \leq j \leq s$. Então*

$$A(\overline{\theta}^1, \ldots, \overline{\theta}^r, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s)(p) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p).$$

**Prova.** Por simplicidade, suponha $r = 1$ e $s = 2$. Considere a seguinte identidade telescópica

$$A(\overline{\theta}, \overline{X}, \overline{Y}) - A(\theta, X, Y) = A(\overline{\theta} - \theta, \overline{X}, \overline{Y}) + A(\theta, \overline{X} - X, \overline{Y}) + A(\theta, X, \overline{Y} - Y).$$

Por hipótese, $\overline{\theta} - \theta, \overline{X} - X$ e $\overline{Y} - Y$ se anulam em $p$. Assim, pelo Lema anterior,

$$A(\overline{\theta}, \overline{X}, \overline{Y})(p) = A(\theta, X, Y)(p).$$

O caso geral segue por linearidade. ■

## 1.3 O pullback e o tensor derivação

Considere uma aplicação $\phi : M \to N$ e um referencial de vetores tangentes $\{v_1, \ldots, v_n\}$ avaliado num determinado ponto de $N$. É possível, num certo sentido, definir um referencial em $M$, que eventualmente depende de $\phi$.

**Definição 1.6** *Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ com $s \geq 1$, temos*

$$(\phi^* A)(v_1, \ldots, v_s) = A(d\phi v_1, \ldots, d\phi v_s),$$

*para todos $v_i \in T_p M$, $p \in M$.*

A aplicação $\phi^*(A)$ é chamada o pullback de $A$ por $\phi$ e $\phi^*(f) = f \circ \phi \in \mathfrak{F}(M)$ por definição.

Uma consequência imediata da definição anterior é dada pelo seguinte resultado.

**Lema 1.4** *(1) Se* $\phi : M \to N$ *é uma aplicação diferenciável, então* $\phi^* : \mathfrak{T}^0_s(N) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$ *é linear para cada* $s \geq 0$*, e*

$$\phi^*(A \otimes B) = \phi^*(A) \otimes \phi^*(B)$$

*para tensores covariantes de tipos arbitrários* $(0, s)$ *e* $(0, t)$*.*

*(2) Se* $\psi : N \to P$ *é também uma aplicação diferenciável, então*

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{T}^0_s(P) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$$

*para todo* $s \geq 0$*.*

No que segue abaixo, será apresentado um tipo de operador sobre tensores que, num certo contexto, generaliza o conceito de derivada usual para funções diferenciáveis reais.

**Definição 1.7** *Um tensor derivação* $\mathfrak{D}$ *sobre uma variedade diferenciável* $M$ *é um conjunto de aplicações lineares*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^r_s : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_s(M),$$

*onde* $r, s \geq 0$ *tal que para tensores* $A$ *e* $B$*:*

(1)$\mathfrak{D}(A \otimes B) = \mathfrak{D}A \otimes B + A \otimes \mathfrak{D}B$,

(2)$\mathfrak{D}(CA) = C(\mathfrak{D}A)$ *para cada contração* $C$*.*

A definição anterior nos permite obter o seguinte resultado.

**Teorema 1.8** *Se* $\mathfrak{D}$ *é um tensor derivação sobre* $M$ *e* $\mathcal{U}$ *é um conjunto aberto de* $M$*, então existe um único tensor derivação* $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}$ *sobre* $\mathcal{U}$ *tal que*

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}(A|_{\mathcal{U}}) = (\mathfrak{D}A)|_{\mathcal{U}}$$

*para todos os tensores* $A$ *sobre* $M$*. (*$\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}$ *é chamado a restrição de* $\mathfrak{D}$ *para* $\mathcal{U}$*)*

**Prova.** Primeiramente note que se $f \equiv c$ localmente, onde $c$ é uma constante, então $\mathfrak{D}(f) = 0$. De fato, suponha inicialmente que $f$ é a função identicamente nula, logo, temos

$$\mathfrak{D}(0) = \mathfrak{D}(0.0) = \mathfrak{D}(0).0 + 0.\mathfrak{D}(0) = 0.$$

Lembrando que nesse caso, a operação $\otimes$ se reduz a multiplicação ordinária de funções. Se $c = 1$ obtemos de modo análogo $\mathfrak{D}(1) = 2\mathfrak{D}(1)$ e daí $\mathfrak{D}(1) = 0$. Seja agora $c$ arbitrário, assim temos $\mathfrak{D}(c) = \mathfrak{D}(c.1) = c\mathfrak{D}(1) = 0$ e consequentemente $\mathfrak{D}(c) = 0$.

Suponha agora que $f$ é localmente constante em $p$. Note que podemos supor que esta constante é nula pois se $f(V_p) = \{c\}$ temos que $\widetilde{f} = f - c$ é localmente nula e $\mathfrak{D}(\widetilde{f})_q = \mathfrak{D}(f)_q$, $\forall q \in M^n$. Considere $g$ uma função tal que seja identicamente 1 numa vizinhança de $p$ e suportada em $V_p$ e assim $fg \equiv 0$. Logo,

$$0 = \mathfrak{D}(fg)_p = \mathfrak{D}(f)_p g(p) + f(p)\mathfrak{D}(g)_p = \mathfrak{D}(f)_p.$$

Sejam $B \in \mathfrak{T}^r_s(\mathcal{U})$ e $f$ uma função que seja identicamente 1 numa vizinhança de $p$ e suportada em $\mathcal{U}$ e $f = 1$ numa vizinhança de $p$ fixado em $\mathcal{U}$, então $fB \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Logo

$$(\mathfrak{D}_{\mathcal{U}} B_p) = \mathfrak{D}(fB)_p.$$

Mostraremos que a definição não depende da escolha da função $f$ nestas condições. Sejam $f, g$ funções *bump* suportadas em $\mathcal{U}$. Então, para $p \in \mathcal{U}$, temos

$$\mathfrak{D}(fgB)_p = g(p)\mathfrak{D}(fB)_p + \mathfrak{D}(g)_p f(p) B|_p = \mathfrak{D}(fB)_p,$$

mostrando a independência da função $f$ devido a comutatividade do produto de funções. Não é difícil verificar os itens abaixo.

i) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}} B$ é um tensor em $\mathcal{U}$,

ii)$\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}$ é uma derivação tensorial em $\mathcal{U}$,

iii) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}(B|_{\mathcal{U}}) = \mathfrak{D}(B)_{\mathcal{U}}$ para todo tensor $B$ em $M$,

iv) $\mathfrak{D}_{\mathcal{U}}$ é único. ■

Apresentaremos agora uma propriedade de tensores que será muito útil em alguns resultados.

**Teorema 1.9** *Seja $\mathfrak{D}$ um tensor derivação sobre $M$. Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ então*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}[A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)] = {} & (\mathfrak{D}A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) + \\ & \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \mathfrak{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) + \\ & \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \mathfrak{D}X_j, \ldots, X_s).\end{aligned}$$

**Prova.** Por simplicidade consideramos $r = s = 1$. Daí,

$$A(\theta, X) = \overline{C}(A \otimes \theta \otimes X),$$

onde $\overline{C}$ é a composição de duas contrações.

De fato, relativo a um sitema de coordenadas $A \otimes \theta \otimes X$ tem componentes $A^i_j \theta_k X^l$, onde $A(\theta, X) = \sum_{i,j=1}^n A^i_j \theta_i X^j$. Então

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(A(\theta, X)) &= \mathfrak{D}\overline{C}(A \otimes \theta \otimes X) \\
&= \overline{C}\mathfrak{D}(A \otimes \theta \otimes X) \\
&= \overline{C}(\mathfrak{D}A \otimes \theta \otimes X) + \overline{C}(A \otimes \mathfrak{D}\theta \otimes X) + \overline{C}(A \otimes \theta \otimes \mathfrak{D}X) \\
&= (\mathfrak{D}A)(\theta, X) + A(\mathfrak{D}\theta, X) + A(\theta, \mathfrak{X}).
\end{aligned}$$

■

**Definição 1.10** *Para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$, o tensor derivação $\mathcal{L}_V$ tal que*

$$\begin{aligned}
(i)\mathcal{L}_V(f) &= V(f), \forall f \in \mathfrak{F}(M), \\
(ii)\mathcal{L}_V(X) &= [V, X], \forall X \in \mathfrak{X}(M),
\end{aligned}$$

*é chamado Derivada de Lie com relação a $V$.*

Observe que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V(fX) = [V, fX] = V(fX) - (fX)V &= V(f)X + fVX - fXV \\
&= V(f)X + f(VX - XV), \quad \text{ou seja,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V(fX) &= V(f)X + f[V, X] \\
&= \mathcal{L}_V(f)X + f\mathcal{L}_V X.
\end{aligned}$$

Os próximos resultados dessa seção requerem a noção de curvas integrais, que passamos a definir.

**Definição 1.11** *Sejam $M$ uma variedade diferenciável e $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma curva $\gamma : J \to M$ determina um vetor tangente $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para cada ponto da curva.*

**Definição 1.12** *Seja $V$ um campo de vetores diferenciável sobre $M$. Uma curva integral de $V$ é uma curva diferenciável $\gamma : J \to M$ tal que $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$ para todo $t \in J$. A curva integral $\gamma$ é maximal quando a aplicação $\gamma$ não pode ser estendida a um intervalo maior com as mesmas propriedades que definem uma curva integral.*

Será apresentado agora um resultado que garante a existência de campos coordenados em torno de alguma vizinhança coordenada, tal que, num determinado ponto $p$ dessa vizinhança, um deles seja igual a um vetor tangente fixado em $p$.

**Lema 1.5** *Se $V$ é um campo de vetores em uma variedade $M$ e $p$ um ponto tal que $V_p \neq 0$, então existe um sistema de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ em $p$ tal que $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$ sobre alguma vizinhança coordenada.*

Apresentaremos agora uma caracterização do Colchete de *Lie* via o fluxo local de um determinado campo $V \in \mathfrak{X}(M)$.

**Proposição 1.13** *Se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, seja $\psi$ o fluxo local de $V$ em torno de $p \in M$. Então*

$$[V, W]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[d\psi_{-t}(W_{\psi_t p}) - W_p].$$

**Prova.** Escreva $F_p(t) = d\psi_{-t}(W_{\psi_t p})$. Então o lado direito da equação acima é $F_p^{'}(0)$. Temos dois casos a considerar.

**Caso 1:** $V_p \neq 0$. Escolha um sistema de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ como no Lema acima de modo que $V = \partial_1$. Portanto o fluxo de $V$ somente muda a coordenada $x^1$ dos pontos $q$ próximos de $p$:

$$x^1(\psi_t q) = x^1(q) + t \quad , \quad x^j(\psi_t q) = x^j(q)$$

para $2 \leq j \leq n$.

Daí segue que $d\psi_t(\partial_i) = \partial_i$ para todo $i$ e $t$. Se $W = \sum_{i=1}^n W^i \partial_i$, então

$$F_p(t) = \sum_{i=1}^n W^i(\psi_t p)\partial_i|_p.$$

Por conveniência, omitimos $p$ e calculemos

$$F_p^{'}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(W^i \circ \alpha_p)(0)\partial_i = \sum_{i=1}^n V_p(W^i)\partial_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W^i}{\partial x^1}(0)\partial_i,$$

isto é,

$$F_p^{'}(0) = [\partial_1, W]_p = [V, W]_p.$$

**Caso 2**. $V = 0$ sobre uma vizinhança de $p$. Então $[V, W]_p = 0$. Além disso, as curvas integrais numa determinada vizinhança de $p$ são constantes, assim $\psi_t = id$ para todo $t$. Portanto $F_p$ é constante, assim $F_p^{'}(0) = 0$.

**Caso 3**. $V_p = 0$, mas $p$ é o limite de uma sequência $\{p_i\}$ com $V_{p_i} \neq 0$ para todo $i$.

As expressões acima em termos de coordenadas mostra que $F_p^{'}(0)$ e $[V,W]_p$ depende continuamente de $p$, assim o resultado segue pelo caso 1. ■

O próximo resultado caracteriza a derivada de *Lie* em termos do fluxo de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

**Proposição 1.14** *Se* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$*, então*

$$\mathcal{L}_X A = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\psi_t^*(A) - A],$$

*onde* $\{\psi_t\}$ *é o fluxo de* $X$*.(Quando o fluxo é local, a equação vale localmente.)*

**Prova.** Por simplicidade, consideramos $s = 2$. Desde que $\mathcal{L}_X$ é um tensor derivação, vale

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X A)(V,W) &= \mathcal{L}_X A(V,W) - A(\mathcal{L}_X V,W) - A(V,\mathcal{L}_X W)\\ &= XA(V,W) - A([X,V],W) - A(V,[X,W]).\end{aligned}$$

Trabalhamos agora com o lado direito da fórmula acima e por economia de notação, denotamos $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\right)$ por $\mathfrak{L}$ num ponto fixado $p$. Então

$$\mathfrak{L}(\psi_t^* A - A)(V_p,W_p) = \mathfrak{L}\{A(d\psi_t(V_p), d\psi_t(W_p)) - A(V_p,W_p)\}.$$

Somando e subtraindo um termo adequado, obtemos

$$\mathfrak{L}\{A(d\psi_t(V_p), d\psi_t(W_p)) - A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p}\} + \mathfrak{L}\{A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p}) - A(V_p,W_p)\}.$$

Chamamos esses dois limites de $I$ e $II$. Se $\alpha$ é uma curva integral de $X$ a partir de $p$, então $\psi_t(p) = \alpha(t)$, e

$$II = \left(\frac{d}{dt}\right)\langle V_\alpha, W_\alpha\rangle|_0 = \alpha^{'}(0)\langle V,W\rangle = X_p\langle V,W\rangle.$$

Para $I$ usando a identidade telescópica

$$A(v^{'},w^{'}) - A(v,w) = A(v^{'}-v,w^{'}) + A(v,w^{'}-w) \quad \text{obtemos}$$

$$I = \mathfrak{L}\{A(d\psi_t(V_p) - V_{\psi_t p} d\psi_t(W_p))\} + \mathfrak{L}\{A(V_{\psi_t p}, d\psi_t(W_p) - W_{\psi_t(p)})\}.$$

Sendo $A$ bilinear e $\psi_t\psi_{-t} = \psi_0 = id$, o primeiro termo pode ser reescrito usando a Proposição 1.9 como segue

$$\mathfrak{L}\{A(d\psi_t(V_p - d\psi_{-t}(V_{\psi_t p})), d\psi_t(W_{\psi_t(p)}))\} = -A(d\psi_t\mathfrak{L}\{d\psi_{-t}(V_{\psi_t p}) - V_p\}, \lim_{t\to 0} d\psi_t(W_{\psi_t(p)}))$$

ou seja,

$$\mathfrak{L}\{(A(d\psi_t(V_p - d\psi_{-t}(V_{\psi_t p})), d\psi_t(W_{\psi_t(p)}))\} = -A([X,V]_p, W_p).$$

De forma análoga, o segundo termo acima é $-A(V_p, [X,W]_p)$. Então, $I + II = (\mathcal{L}_X A)(V_p, W_p)$. ■

## 1.4 A conexão Riemanniana e o tensor curvatura

No que segue, sempre podemos admitir que uma variedade Riemanniana esteja munida de uma conexão afim, conforme o teorema de Levi-Civita. Primeiramente, começaremos com a seguinte definição.

**Definição 1.15** *Uma conexão afim $\nabla$ em uma variedade diferenciável $M$ é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

*que satisfaz as seguintes propriedades*

*i)* $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

*ii)*$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

*iii)*$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

*para quaisquer* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

Enunciamos agora o teorema fundamental dessa seção cuja validade segue da fórmula de Koszul e cuja demonstração, recomendamos ao leitor o capítulo 2 de [14].

**Definição 1.16** *Uma conexão afim $\nabla$ é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],$$

*para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e é dita compatível com a métrica quando*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle X, \nabla_X Z\rangle,$$

*para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

**Teorema 1.17 (Levi-Civita)** *Dada uma variedade Riemanniana $M$, existe uma única conexão afim $\nabla$ em $M$ satisfazendo as condições:*

*i)*$\nabla$ *é simétrica,*

*ii)*$\nabla$ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

**Observação 1.3** *Uma conexão afim que cumpre as condições i) e ii) é chamada conexão Riemanniana ou conexão de Levi-Civita.*

De agora em diante, exceto quando explicitamente mencionadas, sempre vamos admitir que uma variedade Riemanniana está munida de uma conexão Riemanniana.

Apresentaremos agora uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser Euclidiana, ou ainda, mede o quanto uma geometria de uma variedade Riemanniana deixa de ser equivalente a geometria do espaço Euclidiano.

**Definição 1.18** *O tensor curvatura $R$ de uma variedade Riemanniana $M$ é uma correspondência que associa a cada par $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \quad , \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

A curvatura seccional está intimamente relacionada com o tensor curvatura, como podemos perceber pelo seguinte resultado.

**Teorema 1.19** *Sejam $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_pM$ e $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente indepedentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

*não depende da escolha dos vetores $x$ e $y$.*

**Definição 1.20** *Dado $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de $\sigma$, é chamado curvatura seccional de $\sigma$ em $p$.*

O próximo resultado permite caracterizar uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante, cuja demonstração pode ser encontrada em [14].

**Lema 1.6** *Sejam $M$ uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

*para todo $X, Y, W, Z \in T_pM$. Então $M$ tem curvatura seccional constante igual a $K_0$ se, e somente se, $R = K_0 R'$, onde $R$ é a curvatura de $M$.*

**Definição 1.21** *A curvatura de Ricci em $p$ nas direções de $x$ e $y$ é dada por:*

$$Ric_p(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_i \langle R(x,e_i)y, e_i\rangle.$$

*onde $\{e_1,\ldots,e_n\} \subset T_pM$ é um referencial ortonormal.*

De fato, defina uma forma bilinear em $T_pM$ como se segue: sejam $x, y \in T_pM$ e ponhamos

$$Q(x,y) = tr(z \mapsto R(x,z)y).$$

Note que $Q$ é bilinear. Escolhendo $x$ unitário e uma base ortonormal $\{z_1,\ldots,z_{n-1},z_n\}$ para $T_pM$ temos

$$Q(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\langle R(x,z_i)y, z_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle R(y,z_i)x, z_i\rangle = Q(y,x),$$

isto é, $Q$ é simétrica e $Q(x,y) = (n-1)Ric_p(x,y)$; o que demonstra que $Ric_p(x,y)$ está intrinsecamente definida. Iremos denotar por

**Notação:** $Ric_p(x) = Ric_p(x,x)$ por definição.

## 1.5 Gradiente, Hessiano, Divergente e o Laplaciano

Em ambientes Euclidianos, o produto interno natural induz um isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ e seu dual $(\mathbb{R}^n)^*$.

Se considerarmos uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, definimos o *gradiente* de $f$ em $a \in U$ como o vetor $\nabla f(a)$, que corresponde ao funcional $df(a)$ segundo o isomorfismo anteriormente descrito.

Isto significa que

$$\langle \nabla f(a), v\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = df(a).v = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).\alpha_i$$

para todo $v = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Particularmente,

$$\langle \nabla f(a), e_i\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

e isto nos permite concluir que

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

A definição de campo gradiente no contexto de variedades é definida com base na definição usual em espaços Euclidianos.

**Definição 1.22** *Para cada* $f \in \mathfrak{F}(M)$*, definimos o gradiente de* $f$ *como sendo o campo* $\nabla f$ *tal que* $X(f) = df(X) = \langle \nabla f, X \rangle$*,* $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Seja $f \in \mathfrak{F}(M)$. Sabemos que hessiano $Hessf$ de $f$ em $p \in M$ é um operador linear $Hessf : T_pM \to T_pM$ definido por $(Hessf)Y = \nabla_Y(\nabla f)$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Considere agora a seguinte definição.

**Definição 1.23** *Para* $f \in \mathfrak{F}(M)$ *o Hessiano de* $f$*, denotado por* $Hessf$*, é o campo tensorial* $Hessf : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ *dado por*

$$(Hessf)(X, Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle.$$

*para quaisquer* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Em Cálculo Vetorial, o operador divergência pode ser entendido como um escalar que mede a dispersão ou divergência dos vetores do campo num determinado ponto. No contexto de variedades, temos a seguinte definição.

**Definição 1.24** *Dado* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, o divergente de* $X$ *é uma função*

$$div(X) = tr(Y \mapsto \nabla_Y X).$$

No espaço Euclidiano, o operador Laplaciano avaliado em uma determinada função diferenciável $f$ é definido como sendo o traço da matriz Hessiana associada a $f$.

**Definição 1.25** *Para* $f \in \mathfrak{F}(M)$ *definimos o Laplaciano* $\triangle f$ *como sendo*

$$\triangle f = tr(Hessf).$$

## 1.6 Imersões isométricas

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{k=n+m}$ uma imersão. A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em $M$: se $v_1$, $v_2 \in T_pM$, define-se

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle.$$

Nesta situação, $f$ é uma imersão isométrica de $M$ em $\overline{M}$.

**Definição 1.26** *Sejam $M^n$ e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ é chamada uma imersão se a diferencial $d\psi_p : T_pM \to T_{\psi(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M^n$. Se, além disto, $\psi$ é um homeomorfismo sobre $\psi(M^n) \subset \overline{M}^m$, onde $\psi(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}^m$, dizemos que $\psi$ é um mergulho. Se $M^n \subset \overline{M}^m$ e a aplicação inclusão $\iota : M^n \to \overline{M}^m$ é um mergulho, então dizemos que $M^n$ é uma subvariedade de $\overline{M}^m$.*

Vale observar que se $\psi : M \to \overline{M}$ é uma imersão e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$ é uma métrica em $\overline{M}$, podemos definir uma métrica $\langle , \rangle_M$ em $M$ via *pullback*.

**Teorema 1.27** *Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ uma imersão isométrica. Em torno de cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que $\psi|_U$ é um mergulho sobre $\psi(U)$.*

**Prova.**

Sejam $x_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \to M$ e $x_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^m \to \overline{M}$ sistemas de coordenadas em $p$ e em $\psi(p)$, respectivamente, e indiquemos por $(x_1, \ldots, x_n)$ as coordenadas de $\mathbb{R}^n$ e por $(y_1, \ldots, y_m)$ as coordenadas de $\mathbb{R}^m$. Nestas coordenadas, a expressão de $\psi$, isto é, a aplicação $\overline{\psi} = x_2^{-1} \circ \psi \circ x_1$ pode ser escrita por

$$\overline{\psi} = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Seja $q = x_1^{-1}(p)$. Como $\psi$ é uma imersão, podemos supor , renumerando as coordenadas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, se necessário, que

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(q) \neq 0.$$

Para aplicar o Teorema da Aplicação Inversa, definimos uma aplicação( supostamente diferenciável) $\phi : U_1 \times \mathbb{R}^{m-n=k} \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_k) &= (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n), y_{n+1}(x_1, \ldots, x_n) + \\ &+ t_1, \ldots, y_{n+k}(x_1, \ldots, x_n) + t_k), \end{aligned}$$

onde $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^{m-n=k}$. Verifica-se que $\phi$ restrito a $U_1 \times \{0\}$ coincide com $\overline{\psi}$ e que

$$\det(d\psi_q) = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem vizinhanças $W_1 \subset U_1 \times \mathbb{R}^k$ de q e $W_2 \subset \mathbb{R}^m$ de $\psi(q)$ tais que a restrição $\phi|W_1$ é um difeomorfismo sobre $W_2$. Sejam $\overline{V} = W_1 \cap (U_1 \times \{0\})$ e $\widetilde{V} = \widetilde{W_1} \cap U_1$, onde $\widetilde{W_1}$ é o conjunto das $n$ primeiras entradas de $W_1$. Como $\phi|\overline{V} = \overline{\psi}|\widetilde{V}$ e $x_i$ é um difeomorfismo, $i = 1, 2$, concluimos que a restrição a $V = x_1(\widetilde{V})$ da aplicação $\phi = x_2 \circ \overline{\psi} \circ x_1^{-1} : V \to \psi(V) \subset \overline{M}$ é um difeomorfismo, em particular, é um mergulho. ■

De acordo com o teorema anterior, podemos identificar $U$ com a sua imagem $\psi(U)$ , isto é, $\psi$ é localmente a aplicaçao inclusão. Assim podemos considerar o espaço tangente de $M$ em $p$ com um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}$ em $p$ e escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $T_pM$ em $T_p\overline{M}$.

**Definição 1.28** *Sejam $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e $\psi : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Então dados campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\overline{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^{\top} + (\nabla_X Y)^{\perp}.$$

Segue da unicidade da conexão de Levi-Civita que $(\nabla)^{\top}$ é a conexão de Levi-Civita de $M$ e denotamos por $\nabla$. Assim obtemos a Fórmula de Gauss

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \quad \text{para todos} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

a qual define uma aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ chamada a segunda forma fundamental da imersão $\psi$.

**Teorema 1.29** *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ dada por $\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.*

**Prova.** Primeiramente mostremos que $\alpha$ é uma forma bilinear. De fato, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, temos por um lado,

$$\begin{aligned}
\alpha(X + fY, Z) &= \overline{\nabla}_{X+fY} Z - \nabla_{X+fY} Z \\
&= \overline{\nabla}_X Z + f\overline{\nabla}_Y Z - \nabla_X Z - f\nabla_Y Z \\
&= \overline{\nabla}_X Z - \nabla_X Z + f(\overline{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z), \quad \text{isto é,} \\
\alpha(X + fY, Z) &= \alpha(X, Z) + f\alpha(Y, Z).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y + fZ) &= \overline{\nabla}_X(Y + fZ) - \nabla_X(Y + fZ) \\
&= \overline{\nabla}_X Y + f\overline{\nabla}_X Z + X(f)Z - \nabla_X Y - f\nabla_X Z - X(f)Z \\
&= \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y + f(\overline{\nabla}_X Z - \nabla_X Z),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha(X, Y + fZ) = \alpha(X, Y) + f\alpha(X, Z),$$

o que mostra que $\alpha$ é uma forma bilinear. Para a simetria, observe que

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) &= \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - (\overline{\nabla}_Y X - \nabla_Y X) \\
&= \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - \overline{\nabla}_Y X + \nabla_Y X \\
&= [X, Y] - [X, Y] = 0,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que quando restritos a $M$ os campos são iguais. ■

Consideramos agora campos de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, e denotemos por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}.$$

Uma vez que para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vale

$$0 = X\langle \xi, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}\xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle$$

pela Equação de Gauss, temos

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y).$$

Daí,

$$0 = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X, Y)\rangle \Rightarrow \langle \alpha(X, Y), \xi\rangle + \langle \nabla_X Y, \xi\rangle + \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle = 0.$$

Sendo $\langle \nabla_X Y, \xi\rangle = 0$ então

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(X, Y), \xi\rangle &= \langle -\overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle \\
&= \langle -(\overline{\nabla}_X \xi)^T - (\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp}, Y\rangle \\
&= \langle -(\overline{\nabla}_X \xi)^T, Y\rangle + \langle -(\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp}, Y\rangle \quad \text{e sabendo que} \quad A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^{\top},
\end{aligned}$$

temos, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle$.

Observe que a aplicação $A : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X,\xi) = A_\xi X$ é bilinear sobre $\mathfrak{F}(M)$. Consequentemente, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear sobre $\mathfrak{F}(M)$ e também auto-adjunta, isto é, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle X, A_\xi Y\rangle$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A aplicação $A_\xi$ é chamada operador de forma ou operador de Weingarten da imersão $\psi$. Dizemos que $\nabla^\perp$ é a conexão normal de $\psi$, além disso, vale a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi.$$

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$, temos em cada $p \in M$ a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

que varia diferenciavelmente com $p$.

A seguir, serão apresentadas algumas equações envolvendo campos de vetores e o tensor curvatura de uma variedade Riemanniana $M$. Para verificar a validade dessas equações, recomendamos ao leitor o Capítulo 6 de [14].

**Proposição 1.30** *As seguintes equações se verificam:*

*(a) Equação de Gauss*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle \alpha(Y,T), \alpha(X,Z)\rangle + \langle \alpha(X,T), \alpha(Y,Z)\rangle.$$

*para quaisquer* $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$.

*(b) Equação de Ricci*

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta, \zeta\rangle - \langle R^\perp(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y\rangle,$$

*para quaisquer* $X, Y \in \mathfrak{X}(M), \eta, \zeta \in (T_pM)^\perp$, *onde* $[S_\eta, S_\zeta]$ *indica o operador* $S_\eta \circ S_\zeta - S_\zeta \circ S_\eta$.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a $M$. A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um tensor $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{F}(M)$ definido por

$$\alpha(X, Y, \eta) = \langle \alpha(X,Y), \eta\rangle.$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\top}$. A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural:

$$(\overline{\nabla}_X \alpha)(Y, Z, \eta) = X(\alpha(Y, Z, \eta) - \alpha(\nabla_X Y, Z, \eta) - \alpha(Y, \nabla_X Z, \eta) - \alpha(Y, Z, \nabla_X^{\perp}\eta).$$

**Proposição 1.31** *(Equação de Codazzi). Com a notação acima temos que*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y \alpha)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X \alpha)(Y, Z, \eta).$$

*para quaisquer* $X, Y \in \mathfrak{X}(M), \eta \in (T_pM)^{\perp}$.

## 1.7 Variedades completas e o Teorema de Hopf-Rinow

No contexto de superfícies regulares, uma curva $\gamma : I \to S$ é uma geodésica em $I$ se o campo $\gamma'$ é paralelo ao longo de $\gamma$; isto é,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0.$$

No caso de variedade diferenciável, a definição é a mesma com as devidas adaptações.

**Definição 1.32** *Uma curva parametrizada* $\gamma : I \to M$ *é uma geodésica em* $t_0 \in I$ *se* $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ *no ponto* $t_0$*; se* $\gamma$ *é uma geodésica em* $t$*, para todo* $t \in I$*, dizemos que* $\gamma$ *é uma geodésica.*

Apresentaremos agora um resultado de Equações Diferenciais Ordinárias.

**Proposição 1.33** *Dado* $p \in M$*, existem um aberto* $V \subset M$*,* $p \in V$*, números* $\delta > 0$ *e* $\epsilon_1 > 0$ *e uma aplicação suave*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M \quad , \quad \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM, |v| < \epsilon_1\}$$

*tais que a curva* $t \to \gamma(t, q, v), t \in (-\delta, \delta)$*, é a única geodésica de* $M$ *que no instante* $t = 0$ *passa por* $q$ *com velocidade* $v$*, para cada* $q \in V$ *e cada* $v \in T_qM$ *com* $|v| < \epsilon_1$*.*

Conforme iremos definir, geometricamente a aplicação $v \mapsto \exp_q(v)$ é o ponto de $M$ obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de $q$, sobre a geodésica que passa por $q$ com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$ . Nas mesmas condições da proposição acima, segue a

**Definição 1.34** *A aplicação* $exp : \mathcal{U} \to M$ *dada por*

$$exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right),$$

$(q, v) \in \mathcal{U}$, *é chamada a aplicação exponencial em* $\mathcal{U}$.

**Proposição 1.35** *Para cada* $p \in M$, *existe uma vizinhança* $U_0 \subset T_pM$ *na qual* $\exp_p$ *é um difeomorfismo sobre uma vizinhança* $V_p$ *em* $M$.

Em Geometria Diferencial, uma superfície regular conexa $S$ é denominada completa quando para qualquer $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \epsilon) \to S$ de $S$, começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\overline{\gamma} : \mathbb{R} \to S$, definida sobre toda a reta real $\mathbb{R}$. Em variedades segue a mesma definição.

**Definição 1.36** *Uma variedade Riemanniana* $M$ *é (geodesicamente) completa se para todo* $p \in M$, *a aplicação exponencial* $\exp_p$, *está definida para todo* $v \in T_pM$, *isto é, se toda geodésica* $\gamma(t)$ *começando em* $p$ *está definida para todos os valores do parâmetro* $t \in \mathbb{R}$.

O fato que torna mais preciso o conceito de completeza é o seguinte resultado.

**Teorema 1.37** *(Hopf-Rinow). Sejam* $M$ *uma variedade Riemanniana e* $p \in M$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

*a)* $\exp_p$ *está definida em todo o* $T_pM$,

*b)Os limitados e fechados de* $M$ *são compactos,*

*c)*$M$ *é completa como espaço métrico,*

*d)*$M$ *é geodesicamente completa,*

*e)Existe uma sucessão de compactos* $K_n \subset M$, $K_n \subset intK_{n+1}$ *e* $\bigcup_n K_n = M$, *tais que* $q_n \notin K_n$ *então* $d(p, q_n) \to \infty$. *(Aqui intA indica o interior do conjunto A).*

*Além disso, cada uma das afirmações acima implica que*

*f) Para todo* $q \in M$ *existe uma geodésica minimizante* $\gamma$ *ligando* $p$ *a* $q$.

**Definição 1.38** *Seja* $M$ *uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma curva* $\alpha : [0, a) \to M$ *é divergente se* $\alpha([0, a))$ *não está contida em nenhum compacto* $K$ *de* $M$, *onde* $a$ *é um número real positivo ou* $a = \infty$.

**Observação 1.4** *A propriedade de uma curva* $\alpha$ *ser divergente não depende de sua parametrização e sim do seu traço.*

**Observação 1.5** *Evidentemente não existe curvas divergentes em variedades Riemannianas compactas.*

O próximo resultado caracteriza a noção de variedade Riemanniana completa.

**Lema 1.7** *Uma variedade Riemanniana $M$ é completa se, e somente se, toda curva divergente $\alpha : [0, a) \to M$ satisfaz*

$$\int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = +\infty.$$

**Prova.** Suponha que a variedade Riemanniana $M$ é completa. Pelo Teorema de Hopf-Rinow, podemos ver $M$ no sentido de ser completa como espaço métrico e mostremos que toda curva divergente tem comprimento infinito.

Suponha que $\alpha$ é uma curva divergente de comprimento finito, ou seja,

$$\int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = L < +\infty,$$

Daí,

$$d(\alpha(0), \alpha(t)) \leq \int_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau \leq \int_0^a |\alpha'(\tau)| d\tau = L.$$

Assim $\alpha([0, a))$ é limitado e pelo Teorema de Hopf-Rinow, segue que o conjunto $\overline{\alpha([0, a))}$ é compacto e consequentemente o traço da curva $\alpha$ está contido num compacto, mas isso contradiz o fato da curva $\alpha$ ser divergente.

Suponha agora que toda curva divergente tem comprimento infinito, mostremos que $M$ é completa. Suponha que o item $i)$ do Teorema de Hopf-Rinow não vale, equivalentemente, $M$ não é completa. Então existem $p \in M$, $0 < t_0 < +\infty$ e $v \in T_pM$ com $|v| = 1$ tais que $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ está definida para $t \in [0, t_0)$, mas não pode ser definida para $t_0$. Mostremos que $\gamma$ é uma curva divergente. Se $\gamma([0, t_0))$ está contida num compacto $K$, considere $t_n \in [0, t_0)$ tal que $t_n \nearrow t_0$ e seja $\gamma_n = \gamma(t_n)$. Portanto

$$d(\gamma_n, \gamma_m) \leq |t_n - t_m|.$$

Daí, $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy num compacto $K$, portanto, $\gamma_n$ converge para $y_0 \in K \subset \Sigma^n$. Seja $(V, \delta)$ uma vizinhança totalmente normal de $y_0$, isto é, dado $r \in V$ existe $\delta > 0$ tal que $\exp_r : B_\delta(0) \to \exp_r(B_\delta(0)) \supset V$ é um difeomorfismo.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$ então $|t_n - t_m| < \delta$ e $\gamma_n$, $\gamma_m \in V$. Logo existe uma única geodésica g ligando $\gamma_n$ a $\gamma_m$ nessa vizinhança totalmente normal. E $g$ coincide com $\gamma$, onde está definida. Usando que $\exp_{\gamma(t_n)}$ é um difeomorfismo entre

$B_0$ e sua imagem que contém $V$ podemos estender $\gamma$ além de $t_0$, absurdo. Assim, $\gamma$ é uma curva divergente mas

$$\int_0^{t_0} |\gamma'(\tau)|d\tau = \int_0^{t_0} 1d\tau = t_0 < +\infty.$$

o que é uma contradição com a hipótese que toda curva divergente tem comprimento infinito. ■

## 1.8 Variedades integral e folheações

Nessa seção apresentaremos alguns conceitos sobre variedades integral e folheações que serão muito úteis no estudo de gráficos *Killing* descritos no Capítulo 3.

**Definição 1.39** *Um campo de vetores diferenciável é completo se cada uma das suas curvas integrais maximais estão definidas em toda a reta* $\mathbb{R}$.

Seja $M$ uma variedade diferenciável. Uma escolha de um subespaço linear $k$-dimensional $\mathcal{D}_p \subset T_pM$ em cada $p \in M$ é chamado uma distribuição tangente $k$-dimensional sobre $M$. A distribuição é chamada diferenciável se a união de todos os subespaços formam um subfibrado diferenciável

$$\mathcal{D} = \bigcup_{p\in M} \mathcal{D}_p \subset TM.$$

**Lema 1.8** *Seja $M$ uma variedade diferenciável, e suponha que $\mathcal{D} \subset TM$ é uma distribuição tangente $k$-dimensional. Então $\mathcal{D}$ é diferenciável se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita: para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U$ em que os campos de vetores diferenciáveis $Y_1, \ldots, Y_k : U \to TM$ tais que $Y_1|_q, \ldots, Y_k|_q$ formam uma base para $\mathcal{D}_q$ para cada $q \in U$.*

Suponha que $\mathcal{D} \subset TM$ seja uma distribuição diferenciável. Uma subvariedade imersa $N \subset M$ é chamada uma subvariedade integral de $\mathcal{D}$ se $T_pN = \mathcal{D}_p$ para cada $p \in N$.

**Exemplo 6** *Em $\mathbb{R}^n$, os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}$ geram uma distribuição diferenciável $k$-dimensional. Os subespaços afins paralelos $k$-dimensionais em $\mathbb{R}^n$ são subvariedades integral.*

**Definição 1.40** *Dizemos que $\mathcal{D}$ é involutiva se, para cada par de seções locais diferenciáveis de $\mathcal{D}$( isto é, campos de vetores diferenciáveis $X, Y$ definidos sobre um subconjunto aberto de $M$ tais que $X_p, Y_p \in \mathcal{D}_p$ para cada $p$), o Colchete de Lie é também uma seção local diferenciável de $\mathcal{D}$.*

**Definição 1.41** *Dizemos que $\mathcal{D}$ é integrável se cada ponto de $M$ pertence a uma subvariedade integral de $\mathcal{D}$.*

Apresentamos um resultado que mostra que a Definição 1.37 implica a Definição 1.36. Para a demonstração, recomendamos Capítulo 19 de [18].

**Proposição 1.42** *Cada distribuição integrável é involutiva.*

O próximo lema mostra que a condição de ser involutiva não precisa ser verificado para cada par de campos de vetores diferenciáveis em $M$, mas apenas para um referencial local diferenciável em torno de cada ponto. Para a demonstração, ver Capítulo 19 de [18].

**Lema 1.9** *Seja $\mathcal{D} \subset TM$ uma distribuição. Se em cada vizinhança de cada ponto de $M$ existe um referencial local diferenciável $(V_1, \ldots, V_k)$ a $\mathcal{D}$ tal que $[V_i, V_j]$ é uma seção de $\mathcal{D}$ para cada $i, j = 1, \ldots, k$, então $\mathcal{D}$ é involutivo.*

**Definição 1.43** *Uma folheação de dimensão $k$ sobre uma variedade $n$-dimensional $M$ é uma coleção disjunta de subvariedades de $M$ $k$-dimensionais e conexas(chamada as folhas da folheação) cuja união é $M$ e tal que em uma vizinhança de cada $p \in M$ existe uma carta suave $(U, \varphi)$ com a propriedade que $\varphi(U)$ é um produto de conjuntos abertos conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, e a interseção de $U$ com cada folha da folheação é o conjunto vazio ou uma união enumerável de slices $k$-dimensionais da forma $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$.*

**Exemplo 7** *A coleção de todas as esferas centradas em $0$ é uma folheação $(n-1)$-dimensional de $\mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$.*

**Definição 1.44** *Uma subvariedade $N$ conexa é dita integral maximal se $N$ não está contida propriamente em nenhuma subvariedade integral conexa.*

O Teorema global de Frobenius fornece uma condição suficiente para que uma coleção de subvariedades integrais formem uma folheação de $M$. A demonstração desse teorema recomendamos Capítulo 19 de [18].

**Teorema 1.45** *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição involutiva sobre uma variedade diferenciável $M$. A coleção de todas as subvariedades integrais conexas maximais de $\mathcal{D}$ formam uma folheação de $M$.*

## 1.9 Uma extensão do Teorema de Hopf

Yau estabeleceu a seguinte versão do Teorema de Stokes sobre uma variedade Riemanniana completa $\Sigma^n$ não compacta. Para maiores detalhes, ver [24] e [25].

**Teorema 1.46** *Se $\omega \in \Omega^{n-1}(\Sigma)$ é uma $(n-1)$-forma diferencial integrável sobre $\Sigma$ então existe uma sequência $B_i$ de domínios sobre $\Sigma$ tal que $B_i \subset B_{i+1}$, $\Sigma^n = \bigcup_{i \geq 1} B_i$ e*

$$\lim_{i \to +\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

**Prova.** Fixe $p \in M$ e considere uma função Lipschitziana $r : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$r(q) = d(p, q),$$

onde $d$ é a função distância. Para cada $R > 0$, seja $B_R(p)$ a bola de raio $R$ centrada em $p$. Por um lado, inspirado no artigo de Gaffney [18], em $B_R(p)$, é possível aproximar a função $r$ por uma função suave e não-negativa $g_R$ tal que:

(1)Para quase todo $t < R$, a menos de um número finito, $g_R^{-1}(t)$ é uma hipersuperfície compacta regular,

(2)$|dg_R| \leq \frac{3}{2}$ em $g_R^{-1}([0, R])$,

(3)$g_R^{-1} \subset B(t+1) - B(t-1)$ para $t \leq R$.

Por outro lado, usando um Teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas, temos que

$$\int_{g_R^{-1}([0,R])} |dg_R||\omega| = \int_0^R \left( \int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt$$

Juntamente com (2), segue que

$$\int_0^R \left( \int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|,$$

ou ainda

$$\int_{\frac{R}{2}}^R \left( \int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|.$$

Usando (1) e o Teorema do Valor Médio para integrais, temos para algum $t_R \in \left[\frac{R}{2}, R\right]$, onde $g^{-1}(t_R)$ é uma hipersuperfície compacta regular,

$$\int_{g_R^{-1}(t_R)} |\omega| \leq \frac{3}{R} \int_M |\omega|.$$

Usando o Teorema de Stokes e a relação acima, constatamos que

$$\left|\int_{g_R^{-1}([0,t_R])} d\omega\right| \leq \int_{g_R^{-1}(t_R)} |\omega| \leq \frac{3}{R}\int_M |\omega|. \tag{1.2}$$

Da propriedade (3), vê-se que

$$M = \bigcup_i g_i^{-1}([0,t_i]),$$

e da desigualdade anterior, temos

$$\lim_{i\to\infty}\int_{g_R^{-1}([0,t_R])} d\omega = 0.$$

O que conclui a demonstração. ■

**Teorema 1.47** *Sejam $M$ uma variedade Riemanniana orientável compacta e conexa e $f \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $\triangle f$ não muda de sinal. Então $f$ é constante.*

Agora suponha que $M$ é orientada pelo elemento de volume $dM$. Se $\omega = \iota_X dM$ é a orientação de $dM$ na direção de um campo de vetores $X$ sobre $M$, então vale o seguinte resultado devido a Caminha [10].

**Lema 1.10** *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde $M$ é uma variedade Riemanniana completa n-dimensional e orientada, tal que $divX$ não muda de sinal. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $divX \equiv 0$.*

**Prova.** Se $M$ é compacta e sem bordo, o resultado segue direto do Teorema da divergência. Portanto, vamos considerar que $M$ não é compacta. Considere a $(n-1)$-forma $\omega = \iota_X dM$, onde $\omega$ é a contração de $dM$ na direção de $X$. Considerando o referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$, em $M$, obtemos a seguinte igualdade

$$\iota dM = \sum_j (-1)^{j-1}\omega_j(X)\omega_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Todavia

$$\omega_j(X) = \omega_j\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i x_i\omega_j(e_i) = \sum_i \langle e_j, e_i\rangle = \langle X, e_j\rangle.$$

Assim,

$$\iota_X dM = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}\langle X, e_j\rangle\omega_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \ldots \wedge \omega_n$$

e

$$|\omega|^2 = |\iota_X dM|^2 = \sum_j \langle X, e_j\rangle^2 = |X|^2.$$

Além disso,

$$d\omega = d(\iota_X dM) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} d\langle X, e_j\rangle \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Porém,

$$d\langle X, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\langle \nabla_{e_i} X, e_j\rangle + \langle X, \nabla_{e_i} e_j\rangle)\omega_i,$$

observe que se $i = j$, então $\nabla_{e_i} e_j = 0$ e se $i \neq j$, segue que

$$\omega_i \wedge \ldots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \ldots \wedge \omega_n = 0.$$

Portanto,

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \langle \nabla_{e_i} X, e_j\rangle \omega_j \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \ldots \wedge \omega_n = (divX) dM.$$

Agora, pelo Teorema 1.42, vê-se que

$$\lim_{i \to \infty} \int_{B_i} divX dM = 0,$$

e, como $divX$ não muda de sinal, concluimos que $divX = 0$. ■

# Capítulo 2

# As r-ésimas curvaturas médias e as transformações de Newton

Seja $\Sigma$ uma variedade Riemanniana conexa $n$-dimensional e orientada, imersa isometricamente sobre uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, isto é, $\Sigma \hookrightarrow^{\psi} \overline{M}^{n+1}$, onde $\psi$ é uma imersão ( $\psi$ é diferenciável e $d\psi_p : T_p\Sigma \to T_{\psi(p)}\overline{M}^{n+1}$ é injetiva para todo $p \in \Sigma$) e $\langle u, v\rangle_p = \langle d\psi_p(u), d\psi_p(v)\rangle_{\psi(p)}$, $\forall u, v \in T_p\Sigma$.

Sabemos que $A$ denota o operador forma ou o operador de Weingarten de $\Sigma$ com respeito a uma orientação $N$, e para cada $p \in \Sigma$, $A_p : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$ é uma aplicação linear auto-adjunta. O Teorema espectral para operadores auto-adjuntos assegura a existência de uma base ortonormal de autovetores $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $T_p\Sigma$ tal que $[A_p]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal. Além disso, os autovalores de $A_p$ denotados por $k_1, \ldots, k_n$ associados aos autovetores $v_1, \ldots, v_n$, respectivamente, são as curvaturas principais de $\Sigma$.

## 2.1 Os polinômios simétricos elementares

O nosso objetivo é estudar polinômios que verificam a identidade abaixo, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = S_0x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^nS_n.$$

**Definição 2.1** *Os polinômios $S_i \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ definidos por:*

$$\begin{aligned}
S_1(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i, \\
S_2(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, \\
&\cdots \\
S_k(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}, \\
&\cdots \\
S_n(x_1, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 \cdots x_n,
\end{aligned}$$

*são chamados polinômios simétricos elementares nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$.*

Para $1 \leq r \leq n$, denotamos por $S_r(p)$ a $r$-ésima função simétrica dos autovalores de $A_p$, isto é, $S_r = \sigma_r(k_1, \ldots, k_n)$, onde $k_1, \ldots, k_n$ são os autovalores do operador $A_p$ e $\sigma_r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ é o $r$-ésimo polinômio simétrico elementar nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$. Por um abuso de notação na proposição abaixo, estamos admitindo de forma implícita que $A$ representa a matriz $[A_p]_{\mathcal{B}}$.

**Proposição 2.2** *O polinômio característico de $A$ em $p \in \Sigma^n$ é dado por*

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}, \tag{2.1}$$

*onde $S_0 = 1$ por definição.*

**Prova.** Se $n = 1$, então $\det(tI_1 - A) = \det(t - k_1) = t - k_1$ e

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{1} (-1)^r S_r t^{1-r} &= (-1)^0 S_0 t^{1-0} + (-1)^1 S_1 t^{1-1} \\
&= t - k_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r} \quad \text{para} \quad n = 1.$$

Novamente, para $n = 2$, obtemos $\det(tI - A) = (t - k_1)(t - k_2)$ e

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{2} (-1)^r S_r t^{2-r} &= (-1)^0 S_0 t^{2-0} + (-1)^1 S_1 t^{2-1} + (-1)^2 S_2 t^{2-2} \\
&= t^2 - (k_1 + k_2)t + k_1 k_2 \\
&= (t - k_1)(t - k_2),
\end{aligned}$$

onde $S_1 = k_1 + k_2$ e $S_2 = k_1 k_2$.

$$\text{Assim,} \quad \det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r} \quad \text{para} \quad n = 2.$$

Agora suponha por hipótese de indução que a Proposição acima seja válida para um certo $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, e temos que mostrar que a mesma também é válida para $n + 1$, o que concluirá a demonstração. Com efeito,

$$\det(tI_{n+1} - A) = \prod_{r=1}^{n+1} (t - k_r) = \prod_{r=1}^{n} (t - k_r)(t - k_{n+1}).$$

$$\text{Por hipótese de indução, temos} \quad \prod_{r=1}^{n} (t - k_n) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Daí,} \quad \det(tI_{n+1} - A) &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r} (t - k_{n+1}) \\
&= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r+1} - \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r k_{n+1} t^{n-r} \\
&= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r+1} + \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r} \\
&= \sum_{r=-1}^{n-1} (-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-(r+1)+1} + \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r} \\
&= \sum_{r=-1}^{n-1} (-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r}.
\end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, segue-se

$$\begin{aligned}
\det(tI_{n+1} - A) = (-1)^{-1+1} S_{-1+1} t^{n+1} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-r} + \\
\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} S_r k_{n+1} t^{n-r} + (-1)^{n+1} S_n k_{n+1} t^{n-n}
\end{aligned}$$

$$= t^{n+1} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} S_{r+1} t^{n-r} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} k_{n+1} S_r t^{n-r} + (-1)^{n+1} S_n k_{n+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} (S_{r+1} + k_{n+1} S_r) t^{n-r} + t^{n+1} + (-1)^{n+1} k_1 k_2 \cdots k_n k_{n+1}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \det(tI_{n+1}-A) &= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}(S_{r+1}+k_{n+1}S_r)t^{n-r}+t^{n+1}+(-1)^{n+1}k_1k_2\cdots k_nk_{n+1} \\ &= t^{n+1}-\left(\sum_{i=1}^{n+1}k_i\right)t^n+\left(\sum_{1\leq i<j\leq n}k_ik_j+k_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\right)t^{n-1}+\cdots+ \end{aligned}$$

$(-1)^{n+1}k_1\cdots k_nk_{n+1}$.

Dessa forma,

$$\det(tI_{n+1}-A) = t^{n+1}+(-1)^1(S_1+k_{n+1})t^n+(-1)^2(S_2+k_{n+1}S_1)t^{n-1}+\cdots+$$

$(-1)^{n+1}k_1\cdots k_nk_{n+1}$.

Nas expressões acima, estamos admitindo que $S_r=\sigma_r(k_1,\ldots,k_n)$ e por resultados de Álgebra elementar, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_1(k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}) &= \sigma_1(k_1,\ldots,k_n)+k_{n+1}, \\ \sigma_2(k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}) &= \sigma_2(k_1,\ldots,k_n)+k_{n+1}\sigma_1(k_1,\ldots,k_n), \\ &\cdots \\ \sigma_r(k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}) &= \sigma_r(k_1,\ldots,k_n)+k_{n+1}\sigma_{r-1}(k_1,\ldots,k_n), \\ &\cdots \\ \sigma_n(k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}) &= \sigma_n(k_1,\ldots,k_n)+k_{n+1}\sigma_{n-1}(k_1,\ldots,k_n), \\ \sigma_{n+1}(k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}) &= \sigma_n(k_1,\ldots,k_n)k_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\det(tI_{n+1}-A)=\sum_{r=0}^{n+1}S_rt^{(n+1)-r},$$

onde na última igualdade, para não carregar a notação, denotamos $S_r=\sigma_r(k_1,\ldots,k_n,k_{n+1})$. O que conclui a demonstração. ■

## 2.2 As r-ésimas curvaturas médias

No que segue, as $r$-ésimas curvaturas médias estão relacionadas com os polinômios simétricos elementares.

**Definição 2.3** *Seja $1\leq r\leq n$. A $r$-ésima curvatura média $H_r$ de $\Sigma^n$ é dada por*

$$\binom{n}{r}H_r=S_r.$$

**Observação 2.1** *Em particular, para algum $p \in \Sigma^n$, temos*

$$\binom{n}{1} H_1 = S_1 \Rightarrow nH_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Além disso,

$$H_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{n} tr(A) = H$$

é exatamente a curvatura média de $\Sigma^n$ no ponto $p$ por definição, onde $A$ é o operador forma.

**Observação 2.2** *A relação entre o quadrado do operador forma $A$ da hipersuperfície $\Sigma$ e as curvaturas $H$ e $H_2$ é dada por*

$$|A|^2 = S_1^2 - 2S_2 = (nH)^2 - n(n-1)H_2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2. \tag{2.2}$$

De fato, observe que a relação acima equivale a

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 = n^2 \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i \right)^2 - n(n-1) \left( \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \le i < j \le n} k_i k_j \right),$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \left( \sum_{i=1}^{n} k_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} k_i k_j.$$

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{i=1}^{n} k_i \right)^2 &= \left( k_1 + \sum_{i=2}^{n} k_i \right)^2 \\
&= k_1^2 + 2k_1 \sum_{i=2}^{n} k_i + \left( \sum_{i=2}^{n} k_i \right)^2 \\
&= k_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} k_1 k_i + \left( k_2 + \sum_{i=3}^{n} k_i \right)^2 \\
&= k_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} k_1 k_i + k_2^2 + 2k_2 \sum_{i=3}^{n} k_i + \left( \sum_{i=3}^{n} k_i \right)^2 \\
&= k_1^2 + k_2^2 + 2 \left( \sum_{i=2}^{n} k_1 k_i + \sum_{i=3}^{n} k_2 k_i \right) + \left( \sum_{i=3}^{n} k_i \right)^2.
\end{aligned}$$

O raciocínio anterior nos permite concluir que

$$\left( \sum_{i=1}^{n} k_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} k_i k_j.$$

## 2.3 As desigualdades de Newton e Gårding

A Proposição abaixo mostra uma desigualdade envolvendo as funções $H_i, i = r-1, r, r+1$ chamada desigualdade de Newton e que será muito útil na demonstração de alguns resultados no Capítulo 3.

**Proposição 2.4 (A desigualdade de Newton)** *Seja $\Sigma$ uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Para $1 \leq r \leq n$, temos*

$$H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}.$$

*Além disso, a igualdade vale para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$, somente em pontos umbilícos de $\Sigma^n$.*

**Prova.** Usamos o princípio de indução sobre $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Para $n = 2, H_1^2 \geq H_0H_2$ é equivalente a $(k_1 - k_2)^2 \geq 0$, com a igualdade ocorrendo somente quando $k_1 = k_2$. De fato,

$$\binom{2}{1}H_1 = S_1 \Rightarrow \frac{2!}{1!}(2-1)!H_1 = k_1 + k_2 \Rightarrow H_1 = \frac{k_1+k_2}{2},$$

$$\binom{2}{0}H_0 = S_0 \Rightarrow H_0 = 1 \quad \text{e} \quad \binom{2}{2}H_2 = S_2 \Rightarrow H_2 = k_1k_2.$$

$$\begin{aligned}
\text{Segue-se,} \quad H_1^2 - H_0H_2 &= \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) - 1k_1k_2 \\
&= \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2}{4} - k_1k_2 \\
&= \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 - 4k_1k_2 + k_2^2}{4} \\
&= \frac{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}(k_1-k_2)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Sejam $n \geq 3$ um número natural e $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$. Considere a seguinte função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x+k_1)(x+k_2)\ldots(x+k_n) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}H_r(k_1,\ldots,k_n)x^{n-r}.$$

Daí, resulta que

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1}(n-r)\binom{n}{r}H_r(k_1,\ldots,k_n)x^{n-r-1}.$$

Afirmamos que existem $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$f'(x) = n(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\cdots(x+\gamma_{n-1}).$$

De fato, sendo $f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)S_1x^{n-2} + (n-2)S_2x^{n-3} + \cdots + 2S_{n-2}x + S_{n-1}$, temos

$$f'(x) = n\left(x^{n-1} + \left(\frac{n-1}{n}\right)S_1x^{n-2} + \left(\frac{n-2}{n}\right)S_2x^{n-3} + \cdots + \left(\frac{2}{n}\right)S_{n-2}x + \frac{1}{n}S_{n-1}\right).$$

Temos que mostrar que a equação $f'(x) = 0$ possui exatamente $n-1$ raízes, isto é, que existem $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = n(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\cdots(x+\gamma_{n-1})$.

Sejam $-k_1 \leq -k_2 \leq \cdots \leq -k_n$ as raízes reais da equação $f(x) = 0$. Sem perda de generalidade, supomos que $-k_1 < -k_2 < \cdots < -k_n$, pois se alguma raiz $r$ de $f(x) = 0$ tem multiplicidade $m \geq 2$, então por resultados de Álgebra, $r$ é também raiz de $f'(x) = 0$ com multiplicidade $m-1 \geq 1$. Como $f(-k_1) = f(-k_2) = \cdots = f(-k_n) = 0$ então pelo teorema de Rolle existem $c_1 \in (-k_1, -k_2), c_2 \in (-k_2, -k_3), \ldots, c_{n-1} \in (-k_{n-1}, -k_n)$ tais que $f'(c_1) = f'(c_2) = \cdots = f'(c_{n-1}) = 0$, assim, por um lado, $f'(x) = 0$ tem no mínimo $n-1$ raízes. Por outro lado, $f'(x) = 0$ tem no máximo $n-1$ raízes, pois o grau da equação $f'(x) = 0$ é $n-1$. Assim, concluimos que $f'(x) = 0$ tem exatamente $n-1$ raízes e que denotamos por $-\gamma_1, \ldots, -\gamma_{n-1}$, donde

$$f'(x) = n(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\cdots(x+\gamma_{n-1}).$$

Sendo $(n-r)\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r}$, podemos comparar os coeficientes dados nos $H_r(k_1, \ldots, k_n) = H_r(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$ para $0 \leq r \leq n-1$. Daí, segue pela hipótese de indução que, para $1 \leq r \leq n-2$, $H_r^2(k_1, \ldots, k_n) = H_r^2(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}) \geq H_{r-1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})H_{r+1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$ Então,

$$H_r^2(k_1, \ldots, k_n) \geq H_{r-1}(k_1, \ldots, k_n)H_{r+1}(k_1, \ldots, k_n).$$

Além disso, se a igualdade vale para $k_i$, com $H_{r+1}(k_i) \neq 0$( Por conveniência, denotamos as $n-1$ uplas $(k_1, \ldots, k_{n-1})$ e $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$ por $(k_i)$ e $(\gamma_i)$, respectivamente), então também vale para $\gamma_i$, com $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$. Da hipótese de indução, segue que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1}$, e então $k_1 = \cdots = k_{n-1}$.

É suficiente provar que $H_{n-1}^2(k_i) \geq H_{n-2}(k_i)H_n(k_i)$, com a igualdade para $H_n \neq 0$ se, e somente se, os $k_i$ são todos iguais. Se $k_i = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$, o resultado segue. Se $H_n \neq 0$, então

$$H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n \Leftrightarrow \left[\binom{n}{n-1}^{-1} \sum_i \frac{H_n}{k_i}\right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \frac{H_n}{k_i k_j}\right] H_n.$$

Com efeito, em relação a equivalência acima, basta ver que $S_{n-1} = \sum_i \frac{H_n}{k_i}$ e que $S_{n-2} = \sum_{i<j} \frac{H_n}{k_i k_j}$. Após alguns cálculos, concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{H_n}{k_i} = H_n \sum_i \frac{1}{k_i} &= H_n \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right) \\ &= k_1 k_2 \ldots k_n \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{H_n}{k_i} = \sum_{i=1}^{n} k_1 k_2 \cdots \hat{k}_i \cdots k_n = S_{n-1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{i<j} \frac{H_n}{k_i k_j} = H_n \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} &= k_1 k_2 \cdots k_n \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} \\ &= \sum_{i<j} k_1 k_2 \cdots \hat{k}_i \cdots \hat{k}_j \cdots k_n = S_{n-2}. \end{aligned}$$

O nosso objetivo agora é mostrar a validade da equivalência abaixo para concluir o pedido.

$$H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n \Leftrightarrow n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 \geq 0,$$

onde $\alpha_i = \frac{1}{k_i}$. Observemos que valem as seguintes equivalências.

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n \Leftrightarrow \left[\binom{n}{n-1}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{H_n}{k_i}\right]^2 &\geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \frac{H_n}{k_i k_j}\right] H_n \Leftrightarrow \\ H_n^2 \left[\left(\frac{n!}{(n-1)!1!}\right)^{-2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)^2\right] &\geq H_n^2 \left(\frac{n!}{(n-2)!2!}\right)^{-1} \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} \Leftrightarrow \\ n^{-2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)^2 &\geq \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{-1} \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{n^2} \left(\sum_i \frac{1}{k_i}\right)^2 &\geq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j} \Leftrightarrow \\ (n-1) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)^2 &\geq 2n \sum_{i<j} \frac{1}{k_i k_j}. \end{aligned}$$

Deduzimos que a última desigualdade acima é equivalente a

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 \geq 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j.$$

Denotamos $T(\alpha_i) = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j$ e obtemos

$$\begin{aligned} T(\alpha_i) &= n\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j \\ &= n\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 - 2\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\right] - \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

em que essa última desigualdade é válida pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Como as expressões obtidas acima são equivalentes, então segue a validade da equivalência desejada.

Também, neste caso, a igualdade vale se, e somente se, todos os $\alpha_i$( e então todos os $k_i$) são iguais. ■

**Corolário 2.5** *Para* $1 \leq i, j < n$, *temos*

$$H_iH_j \geq H_{i+1}H_{j-1} \quad \textit{ou} \quad H_iH_j \geq H_{i-1}H_{j+1}.$$

**Prova.** A ideia da demonstração é a seguinte: Se algum coeficiente $H_i$ é nulo, então o resultado segue. Caso contrário, usando a Proposição anterior, temos que $H_i^2 \geq H_{i-1}H_{i+1}$, consequentemente

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} \geq \frac{H_{i+1}}{H_i}.$$

Usando o mesmo procedimento na relação $H_{i-1}^2 \geq H_{i-2}H_i$, obtemos

$$\frac{H_{i-1}}{H_i} \geq \frac{H_{i-2}}{H_{i-1}}.$$

$$\text{Logo,} \quad \frac{H_i}{H_{i+1}} \geq \frac{H_{i-1}}{H_i} \geq \frac{H_{i-2}}{H_{i-1}},$$

e procedendo-se de maneira análoga, concluimos que

$$H_iH_j \geq H_{i+1}H_{j-1}.$$

■

**Definição 2.6** *Um ponto $p_0 \in \Sigma$ é dito elíptico quando todas as curvaturas principais $k_i(p_0)$ são positivas com respeito a uma escolha apropriada da orientação $N$ de $\Sigma$.*

Apresentamos agora uma desigualdade bastante útil, chamada **desigualdade de Gårding**, cuja demonstração recomendamos [14].

**Proposição 2.7 (A desigualdade de Gårding)** *Seja $\Sigma^n$ uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Suponha que existe um ponto elíptico em $\Sigma^n$. Se $H_r$ é positivo sobre $\Sigma^n$, temos que o mesmo vale para $H_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$. Além disso,*

$$H_{k-1} \geq H_k^{\frac{(k-1)}{k}} \quad e \quad H \geq H_k^{\frac{1}{k}},$$

*para cada $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Se $k \geq 2$, na desigualdade acima, a igualdade vale somente em pontos umbílicos de $\Sigma^n$.*

Uma aplicação do resultado anterior é a seguinte

$$H_1^2 \geq H_0 H_2 \Rightarrow H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} H_2^2 \geq H_3 H_1 \Rightarrow H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{4}} H_1^{\frac{1}{4}} \geq H_3^{\frac{1}{4}} H_2^{\frac{1}{8}} \Rightarrow \\ H_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}} \geq H_3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow H_2^{\frac{4-1}{8}} \geq H_3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \\ H_2^{\frac{3}{8}} \geq H_3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow H_2^{\frac{3}{8}\frac{4}{3}} \geq H_3^{\frac{1}{4}\frac{4}{3}} \Rightarrow \\ H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Repetindo o argumento acima, obtemos

$$\begin{aligned} H_3^2 \geq H_4 H_2 \Rightarrow H_3^{\frac{1}{3}} \geq H_4^{\frac{1}{6}} H_2^{\frac{1}{6}} \geq H_4^{\frac{1}{6}} H_3^{\frac{1}{9}} \Rightarrow \\ H_3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}} \geq H_4^{\frac{1}{6}} \Rightarrow H_3^{\frac{3-1}{9}} \geq H_4^{\frac{1}{6}} \Rightarrow \\ H_3^{\frac{2}{9}} \geq H_4^{\frac{1}{6}} \Rightarrow H_3^{\frac{2}{3}} \geq H_4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow H_3^{\frac{1}{3}} \geq H_4^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Logo,

$$H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{3}} \geq H_4^{\frac{1}{4}} \geq \cdots \geq H_r^{\frac{1}{r}},$$

para algum $1 < k < r$.

## 2.4 As transformações de Newton

Nesta seção, apresentamos as transformações de Newton e suas principais propriedades, nas quais usamos no próximo capítulo para obtermos resultados referentes a gráficos *Killing* conformes.

**Definição 2.8** *De acordo com a definição de $r$-ésima curvatura média, as transformações de Newton*

$$P_r : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

*onde $0 \leq r \leq n$, são dadas por*

$$P_r = \binom{n}{r} H_r I + \binom{n}{r-1} H_{r-1} A + \cdots + \binom{n}{1} H_1 A^{r-1} + A^r,$$

*onde $I$ denota a identidade em $\mathfrak{X}(M)$, ou indutivamente por*

$$P_0 = I \quad e \quad P_r = \binom{n}{r} H_r I + A P_{r-1}. \tag{2.3}$$

No que segue, $E_1, \ldots, E_n$ denota um referencial local ortonormal em $M$.

**Definição 2.9** *A divergência da transformação de Newton $P_r$, $0 \leq r \leq n$, é o vetor $divP_r$ dada por*

$$divP_r = tr(\nabla P_r) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} P_r) E_i.$$

**Lema 2.1** *Seja $p \in M$. O operador $P_r : T_pM \to T_pM$, é linear, auto-adjunto e comuta com o operador de forma $A$.*

**Prova.** A linearidade segue diretamente da definição. Observe agora que

$$P_r v = \left( \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i} H_i A^{r-i} \right) v.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\langle P_r v, w \rangle &= \left\langle \left( \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i} \right) v, w \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i}(v), w \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i \langle A^{r-i}(v), w \rangle,
\end{aligned}$$

sendo $A$ auto-adjunto, consequentemente, $A^{r-i}$ também o é, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, além disso, a métrica é bilinear, logo

$$\begin{aligned} \langle P_r v, w\rangle &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i \langle v, A^{r-i}(w)\rangle \\ &= \langle v, \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i}(w)\rangle \\ &= \langle v, P_r w\rangle, \forall v, w \in T_pM. \end{aligned}$$

O que mostra que $P_r$ é auto-adjunto.

Para a comutatividade, após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned} P_r \circ A &= \left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i}\right) \circ A \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A \circ A^{r-i} \\ &= A \circ \left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} H_i A^{r-i}\right) \\ &= A \circ P_r. \end{aligned}$$

■

**Proposição 2.10** *(i) Seja $E_1, \ldots, E_n$ um referencial local ortonormal em $M$ que diagonaliza o operador $A$, isto é, existem escalares $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ tais que $AE_i = k_iE_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n$ então este referencial também diagonaliza cada $P_r$, e $P_rE_i = \lambda_{i,r}E_i$ com*

$$\lambda_{i,r} = (-1)^r \sum_{i_1 < \cdots < i_r, i_j \neq i} k_{i_1} \ldots k_{i_r} = \sum_{i_1 < \cdots < i_r, i_j \neq i} (-k_{i_1}) \cdots (-k_{i_r}).$$

*(ii) Para cada $1 \leq r \leq n-1$,*

$$tr(P_r) = (r+1)\binom{n}{r+1} H_r \quad e \quad tr(A \circ P_r) = -(r+1)\binom{n}{r+1} H_{r+1}$$

*(iii)Para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ e cada $1 \leq r \leq n-1$,*

$$tr(P_r(\nabla_V A)) = -\binom{n}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, V\rangle.$$

**Prova.** Aplicamos o método de indução sobre $r$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ fixado. Se $r = 0$, então

$$P_0 E_i = I E_i = E_i = \lambda_{i,0} E_i.$$

Suponha que $i)$ da Proposição seja válido para algum $r \geq 1$ e nosso objetivo é mostrar que também é válido para $r+1$, o que conclui a demonstração de $i)$. Seja

$$P_r E_i = \lambda_{i,r} E_i, \quad \text{onde} \quad \lambda_{i,r} = (-1)^r \sum_{i_1 < \cdots < i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r},$$

por hipótese de indução.

Como $P_r E_i = \left(\binom{n}{r} H_r I + A P_{r-1}\right) E_i$, então

$$\begin{aligned}
P_{r+1} E_i &= \left(\binom{n}{r+1} H_{r+1} I + A P_r\right) E_i \\
&= \binom{n}{r+1} \left( (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i + A \circ P_r E_i \\
&= \binom{n}{r+1} \left( (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i + A(\lambda_{i,r} E_i) \\
&= \binom{n}{r+1} \left( (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right) E_i + \lambda_{i,r} k_i E_i
\end{aligned}$$

Novamente, pela hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned}
P_{r+1} E_i &= \left[ (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i + \left[ \left( (-1)^r \sum_{i_1 < \cdots < i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r} \right) \right] E_i \\
&= \left[ (-1)^{r+1} \sum_{i_1, \dots, i_{r+1}} k_{i_1} \dots k_{i_{r+1}} + (-1)^r \sum_{i_1, \dots, i_{r+1}} k_{i_1} \dots k_{i_{r+1}} \right] E_i \\
&- \left[ (-1)^r \sum_{i_1, \dots, i_{r+1}, i_j \neq i} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i,
\end{aligned}$$

de onde concluimos que,

$$\begin{aligned}
P_{r+1} E_i = &\left[ -(-1)^r \sum_{i_1 < \cdots < i_{r+1}} k_{i_1} \dots k_{i_{r+1}} + (-1)^r \sum_{i_1 < \cdots < i_{r+1}} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i + \\
&+ \left[ (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_{r+1}, i_j \neq i} k_{i_1} \cdots k_{i_{r+1}} \right] E_i
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P_{r+1}E_i = (-1)^{r+1}\left(\sum_{i_1<\ldots<i_{r+1},i_j\neq i} k_{i_1}\ldots k_{i_{r+1}}\right)E_i = \lambda_{i,r+1}E_i.$$

$ii)$ Consideramos o mesmo referencial do item anterior. Daí,

$$tr(P_r) = \sum_{i=1}^{n}\langle P_rE_i, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \lambda_{i,r}E_i, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_{i,r}\langle E_i, E_i\rangle.$$

Usando agora a expressão de $\lambda_{i,r}$, temos

$$\begin{aligned} tr(P_r) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_{i,r} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_r,i_j\neq i} k_{i_1}\cdots k_{i_r} \\ &= (n-r)(-1)^r\sum_{i_1<\cdots<i_r} k_{i_1}\cdots k_{i_r} \\ &= (n-r)\binom{n}{r}H_r \\ &= (r+1)\binom{n}{r+1}H_r. \end{aligned}$$

Pela definição do operador $P_r$, temos

$$\begin{aligned} tr(A\circ P_r) &= tr\left(P_{r+1} - \binom{n}{r+1}H_{r+1}I\right) \\ &= tr(P_{r+1}) - \binom{n}{r+1}H_{r+1}tr(I) \\ &= (n-(r+1))\binom{n}{r+1}H_{r+1} - n\binom{n}{r+1}H_{r+1} \\ &= (n-r-1-n)\binom{n}{r+1}H_{r+1} \\ &= \left((-r-1)\binom{n}{r+1}\right)H_{r+1} \\ &= -(r+1)\binom{n}{r+1}H_{r+1}. \end{aligned}$$

$iii)$ Como $A$ é um operador linear auto-adjunto, então existe um referencial ortonormal local em $M$ $E_1,\ldots,E_n$ que diagonaliza $A$ em um determinado $p\in M$, isto é, $AE_i = k_iE_i \quad , \quad i=1,\ldots,n$, onde $k_i$ são os autovalores associados aos autovetores $E_i$.

Então,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_V A)(E_i) &= \nabla_V(AE_i) - A(\nabla_V E_i)\\
&= \nabla_V(k_iE_i) - A\left(\sum_{j=1}^{n}\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle E_j\right)\\
&= k_i\nabla_V E_i + V(k_i)E_i - \sum_{j=1}^{n}\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle AE_j\\
&= k_i\sum_{j=1}^{n}\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle E_j + V(k_i)E_i - \sum_{j=1}^{n}\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle k_jE_j\\
&= \sum_{j=1, i\neq j}^{n}(k_i-k_j)\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle E_j + V(k_i)E_i.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
tr(P_r\circ\nabla_V A) &= \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_V A)E_i, E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle P_r\left(V(k_i)E_i + \sum_{j=1, i\neq j}^{n}(k_i-k_j)\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle E_j\right), E_i\right\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(V(k_i)E_i) + P_r\left(\sum_{j=1, i\neq j}^{n}(k_i-k_j)\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle E_j\right), E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(V(k_i))E_i, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle P_r\left(\sum_{j=1, i\neq j}^{n}(k_i-k_j)\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle E_j\right), E_i\right\rangle
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
tr(P_r\circ\nabla_V A) &= \sum_{i=1}^{n}\langle V(k_i)P_rE_i, E_i\rangle +\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, i\neq j}^{n}(k_i-k_j)\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle\langle P_rE_j, E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}V(k_i)\lambda_{r,i}\langle E_i, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, i\neq j}^{n}(k_i-k_j)\langle\nabla_V E_i, E_j\rangle\lambda_{r,j}\langle E_j, E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}V(k_i)\lambda_{r,i} \quad \text{pois } \langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
tr(P_r \circ \nabla_V A) &= \sum_{i=1}^{n} V(k_i)\lambda_{i,r} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} V(k_i)\lambda_{i,r} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} V(-k_i) \sum_{i_1<\cdots<i_r, i_j\neq i} (-k_{i_1})\cdots(-k_{i_r}) \\
&= -V\left(\sum_{i=1}^{n}(-k_i) \sum_{i_1<\cdots<i_r, i_j\neq i} (-k_{i_1})\cdots(-k_{i_r})\right) \\
&= -V\left(\sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}, i_j\neq i} (-k_{i_1})\cdots(-k_{i_{r+1}})\right).
\end{aligned}$$

Logo, a igualdade anterior nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
tr(P_r \circ \nabla_V A) &= -V\left(\binom{n}{r+1} H_{r+1}\right) \\
&= -\binom{n}{r+1} V(H_{r+1}) \\
&= -\binom{n}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, V\rangle,
\end{aligned}$$

onde $\nabla H_{r+1}$ denota o gradiente de $H_{r+1}$. ■

**Proposição 2.11** *Seja $P_r : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ um campo de tensores do tipo $(1,1)$ em $M$ tal que em cada $p \in M$, $P_r : T_pM \to T_pM$ é um operador linear e auto-adjunto. Então para todo campo $E \in \mathfrak{X}(M)$ o campo de tensores $\nabla_E P_r : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ do tipo $(1,1)$ em $M$, em cada $p \in M$, define um operador linear $\nabla_E P_r : T_pM \to T_pM$ auto-adjunto.*

**Prova.** Pela definição de diferencial covariante de um tensor e considerando a transformação de Newton $P_r$, a diferencial covariante $\nabla P_r$ é dada por

$$\nabla P_r(X,Y) = (\nabla_X P_r)(Y) = \nabla_X(P_r Y) - P_r(\nabla_X Y) \quad , \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Observe que $\nabla_E P_r$ é linear pela definição de conexão. Mostremos agora que $\nabla_E P_r$ é auto-adjunta

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_E P_r)(X), Y\rangle &= \langle \nabla_E(P_r X) - P_r(\nabla_E X), Y\rangle \\
&= \langle \nabla_E(P_r X), Y\rangle - \langle P_r(\nabla_E X), Y\rangle.
\end{aligned}$$

Agora usando o fato que o operador $P_r$ é auto-adjunto, temos

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_E P_r)(X), Y\rangle &= E\langle P_rX, Y\rangle - \langle P_rX, \nabla_E Y\rangle - \langle \nabla_E X, P_r Y\rangle \\
&= E\langle P_rX, Y\rangle - \langle P_rX, \nabla_E Y\rangle - E\langle X, P_r Y\rangle + \langle X, \nabla_E(P_rY)\rangle \\
&= E\langle X, P_rY\rangle - \langle P_rX, \nabla_E Y\rangle - E\langle X, P_r Y\rangle + \langle X, \nabla_E(P_rY)\rangle \\
&= -\langle P_rX, \nabla_E Y\rangle + \langle X, \nabla_E(P_rY)\rangle \\
&= -\langle X, P_r(\nabla_E Y)\rangle + \langle X, \nabla_E(P_rY)\rangle \\
&= \langle X, \nabla_E(P_rY) - P_r(\nabla_E Y)\rangle \\
&= \langle X, (\nabla_E P_r)(Y)\rangle \quad , \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad \text{,isto é,}
\end{aligned}$$

em cada $p \in M$, $\nabla_E P_r$ é auto-adjunto. ■

O Lema abaixo estabelece uma relação entre as divergências das transformações de Newton e o tensor curvatura de $M$.

**Lema 2.2** *A divergência das transformações de Newton é dada por*

$$\langle div(P_r), X\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(N, P_{r-j}E_i)E_i, A^{j-1}X\rangle,$$

*para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\overline{R}$ denota o tensor curvatura de $\overline{M}$, equivalentemente,*

$$div(P_0) = 0 \quad e \quad div(P_r) = A(div(P_{r-1})) + \left(\sum_{i=1}^{n}(\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)\right)^{\top}.$$

**Prova.** Notemos que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale

$$(\nabla_X I)(Y) = \nabla_X(I(Y)) - I(\nabla_X Y) = \nabla_X Y - \nabla_X Y = 0 \in \mathfrak{X}(M),$$

onde $I$ denota o operador identidade em $\mathfrak{X}(M)$. Assim,

$$div(P_0) = div(I) = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i} I, E_i\rangle = 0.$$

Agora se $r \geq 1$, segue da definição de $P_r$ que para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_X P_r)(Y) &= \nabla_X\left(\binom{n}{r}H_r I + A\circ P_{r-1}\right)Y \\
&= \nabla_X\left(\binom{n}{r}H_r(Y) + (A\circ P_{r-1})Y\right) \\
&= \nabla_X\left(\binom{n}{r}H_r(Y)\right) + \nabla_X(A\circ P_{r-1})Y \\
&= \left(\binom{n}{r}X(H_r)I\right)(Y) + \binom{n}{r}H_r(\nabla_X I)(Y) + \nabla_X(A\circ P_{r-1})Y \\
&= \binom{n}{r}\langle\nabla(H_r), X\rangle(Y) + (\nabla_X A)(P_{r-1})Y + A(\nabla_X P_{r-1})Y, \quad \text{pois}
\end{aligned}$$

$$\binom{n}{r} H_r (\nabla_X I)(Y) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
div(P_r) &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} P_r)(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1} \circ E_i) + \sum_{i=1}^{n} (A(\nabla_{E_i} P_{r-1}))(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{r} \langle \nabla H_r, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1} \circ E_i) + A \left( \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} P_{r-1}, E_i \rangle \right),
\end{aligned}$$

onde

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} P_{r-1}, E_i \rangle \right) = div(P_{r-1}).$$

Portanto,

$$div P_r = \binom{n}{r} \nabla H_r + \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1} \circ E_i) + A(div(P_{r-1}).$$

Uma vez que $\nabla_{E_i} A$ é auto-adjunto, temos que, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, vale

$$\langle (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1} E_i), X \rangle = \langle P_{r-1} E_i, (\nabla_{E_i} A)(X) \rangle,$$

pela Equação de Codazzi

$$(\overline{R}(X,Y)N)^{\top} = (\nabla_Y A)(X,N) - (\nabla_X A)(Y,N),$$

conclui-se

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i} A(P_{r-1} E_i), X \rangle &= \langle P_{r-1} E_i, (\nabla_{E_i} A)(X) \rangle \\
&= -\langle \overline{R}(X, E_i) N, P_{r-1} E_i \rangle + \langle P_{r-1} E_i, (\nabla_X A)(E_i) \rangle \\
&= \langle \overline{R}(X, E_i) P_{r-1} E_i, N \rangle + \langle P_{r-1} (\nabla_X A)(E_i), E_i \rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle div(P_r), X \rangle &= \left\langle \binom{n}{r} \nabla H_r + \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1}) + A(div(P_{r-1})), X \right\rangle \\
&= \left\langle \binom{n}{r} \nabla H_r, X \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} A)(P_{r-1}), X \rangle + \langle A(div(P_{r-1})), X \rangle,
\end{aligned}$$

da expressão acima e bilinearidade da métrica, temos

$$\langle div(P_r), X\rangle = \binom{n}{r}\langle \nabla H_r, X\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X, E_i)P_{r-1}E_i, N\rangle +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\langle (P_{r-1}\circ(\nabla_X A)(E_i)), E_i\rangle + \langle A(div(P_{r-1})), X\rangle.$$

onde $\sum_{i=1}^{n}\langle (P_{r-1}\circ(\nabla_X A)(E_i)), E_i\rangle = tr(P_{r-1}\circ(\nabla_X A))$. Pelo item $(iii)$ da Proposição 2.10, segue que

$$tr(P_r\circ(\nabla_X A)) = -\binom{n}{r+1}\langle \nabla H_{r+1}, X\rangle,$$

consequentemente,

$$tr(P_{r-1}\circ(\nabla_X A)) = -\binom{n}{r}\langle \nabla H_r, X\rangle.$$

Donde,

$$\begin{aligned}\langle div(P_r), X\rangle &= \binom{n}{r}\langle \nabla H_r, X\rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X, E_i)P_{r-1}E_i, N\rangle - \binom{n}{r}\langle \nabla H_r, X\rangle + \langle A(div(P_{r-1})), X\rangle.\end{aligned}$$

De onde segue-se que

$$\begin{aligned}\langle div(P_r), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X, E_i)P_{r-1}E_i, N\rangle + \langle A(div(P_{r-1})), X\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X, E_i)N, P_{r-1}E_i\rangle + \langle A(div(P_{r-1}), X\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X\rangle + \langle A(div(P_{r-1})), X\rangle.\end{aligned}$$

como $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer, então

$$div(P_r) = (\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^{\top} + A(div(P_{r-1})).$$

Agora, mostremos a equivalência. Primeiramente, observe que $div(T_1) = (\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^{\top}$, pois $A(div(P_0)) = 0$. Segue-se

$$\langle div(P_1), X\rangle = \langle (\overline{R}(N, P_{r-1}E_1)E_1)^{T}, X\rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Suponhamos que o argumento seja válido para $r-1$, e mostremos que também é válido para $r$. Seja

$$\langle div(P_r), X\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(N, T_{r-1}E_i)E_i, A^{j-1}X\rangle,$$

a hipótese de indução. Então,

$$\begin{aligned}
\langle div(P_r), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle(\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^T, X\rangle + \langle A(div(P_{r-1})), X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N, P_{r-1}E_1)E_i, X\rangle + \langle div(P_{r-1}), AX\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\langle A^{j-1}(\overline{R}(N, P_{r-1-j}E_i)E_i), AX\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X\rangle.
\end{aligned}$$

Como $A$ é auto-adjunto, então $A^i$ também o é. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle div(P_r), X\rangle &= \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N, P_{r-1-j}E_i)E_i, A^jX\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j+1=2}^{r}\langle\overline{R}(N, P_{r-(j+1)}E_i)E_i, A^jX\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X\rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\langle div(P_r), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j+1=2}^{r}\langle A^{(j+1)-1}(\overline{R}(N, P_{r-(j+1)}E_i)E_i), X\rangle + \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle\left(\sum_{j+1=2}^{r} A^{(j+1)-1}(\overline{R}(N, P_{r-(j+1)}E_i)E_i)\right) + \overline{R}(N, P_{r-1}E_i, X\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\langle\overline{R}(N, P_{r-j}E_i)E_i, A^{j-1}X\rangle.
\end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$\langle div(P_r), X\rangle = \sum_{j-1=0}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N, P_{r-1-(j-1)}E_i)E_i, A^{j-1}X\rangle,$$

com algumas propriedades,

$$\begin{aligned}
\langle div(P_r), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i, X\rangle + \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N, P_{(r-1)-j}E_i, A^{j-1}(AX)\rangle \\
&= \left\langle\sum_{i=1}^{n}(\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^\top, X\right\rangle + \langle div(P_{r-1}), AX\rangle \\
&= \left\langle\sum_{i=1}^{n}(\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^\top, X\right\rangle + \langle A(div(P_{r-1})), X\rangle \\
&= \left\langle\sum_{i=1}^{n}(\overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^\top + A(div(P_{r-1})), X\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer, segue que,

$$div(P_r) = \sum_{i=1}^{n} \overline{R}(N, P_{r-1}E_i)E_i)^{\top} + A(div(P_{r-1})).$$

■

# Capítulo 3

# Gráficos Killing conformes inteiros

O objetivo neste capítulo é estudar a geometria de gráficos *Killing* conformes imersos num ambiente Riemanniano folheado.

## 3.1 Campos Killing conformes

Estudamos a noção de campos *Killing* conformes que é mais geral do que a definição de campos de *Killing*. Primeiramente apresentamos a definição de campos de *Killing* via a derivada de *Lie*.

**Definição 3.1** *Um campo de vetores de Killing sobre uma variedade Riemanniana* $(M, g)$ *é um campo de vetores* $V$ *tal que* $\mathcal{L}_V g = 0$.

Mostremos agora que um campo $V$ de vetores de *Killing* pode ser caracterizado quando o fluxo local gerado por $V$ é uma isometria.

**Proposição 3.2** *Um campo de vetores* $V$ *é Killing se, e somente se, os fluxos locais* $\psi_t$ *gerados por* $V$ *são isometrias.*

**Prova.** Se cada $\psi_t$ é uma isometria, então $\psi_t^*(g) = g$. Assim pela Proposição 1.10 (ver capítulo 1), $\mathcal{L}_X g = 0$. Reciprocamente, se $\mathcal{L}_V g = 0$, seja $\{\psi_t\}$ o fluxo local de V. Se $v$ é um vetor tangente em um ponto no domínio do fluxo, então $w = d\psi_s(v)$ para $s$ suficientemente pequeno. Pela Proposição 1.10 (ver Capítulo 1), temos

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t}\right) (g(d\psi_t w, d\psi_t w) - g(w, w)) = 0.$$

Assim,

$$\psi_s \psi_t = \psi_{s+t}, \quad \text{e}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{g(d\psi_{s+t}(v), d\psi_{s+t}(v)) - g(d\psi_s(v), d\psi_s(v))\} = 0.$$

O que mostra que a função a valores reais $s \to g(d\psi_s(v), d\psi_s(v))$ tem derivada identicamente nula, então a mesma é constante, assim

$$g(d\psi_s(v), d\psi_s(v)) = g(v, v) \quad \text{para todos} \quad v \quad \text{e} \quad s.$$

■

**Definição 3.3** *Um campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ é dito um campo Killing conforme cuja distribuição ortogonal $\mathcal{D}$ é integrável se existe $\psi \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $\mathcal{L}_V g = 2\psi g$, onde $g$ denota a métrica Riemanniana de $M$.*

**Observação 3.1** *A função $\psi$ na definição acima é chamada o fator conforme de $V$.*

O próximo lema caracteriza os campos *Killing* conformes.

**Lema 3.1** *Um campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ cuja distribuição ortogonal $\mathcal{D}$ é integrável é Killing conforme se, e somente se, existe $\psi \in \mathfrak{F}(M)$ tal que*

$$\langle \nabla_X V, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y V\rangle = 2\psi\langle X, Y\rangle, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

**Prova.** De fato, sendo $\mathcal{L}_V$ um tensor derivação, podemos usar o Teorema 1.7. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V\langle X, Y\rangle &= V\langle X, Y\rangle - \langle \mathcal{L}_V X, Y\rangle - \langle X, \mathcal{L}_V Y\rangle \\
&= \langle \nabla_V X, Y\rangle + \langle X, \nabla_V Y\rangle - \langle [V, X], Y\rangle - \langle X, [V, Y]\rangle \\
&= \langle \nabla_V X, Y\rangle + \langle X, \nabla_V Y\rangle - \langle \nabla_V X - \nabla_X V, Y\rangle - \langle X, \nabla_V Y - \nabla_Y V\rangle \\
&= \langle \nabla_V X, Y\rangle + \langle X, \nabla_V Y\rangle - \langle \nabla_V X, Y\rangle + \langle \nabla_X V, Y\rangle - \langle X, \nabla_V Y\rangle + \langle X, \nabla_Y V\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}_V\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_X V, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y V\rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Como o campo $V$ é *Killing* conforme então $\mathcal{L}_V\langle X,Y\rangle = 2\psi\langle X,Y\rangle$ para alguma $\psi \in \mathfrak{F}(M)$.

$$\text{Portanto,}\quad \langle \nabla_X V, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y V\rangle = 2\psi\langle X,Y\rangle, \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A recíproca é imediata. ■

**Observação 3.2** *A última equação obtida acima é chamada equação de Killing conforme e quando o fator conforme $\psi \equiv 0$, $V$ é chamado um campo de Killing. De agora em diante, ficará subentendido que a distribuição ortogonal $\mathcal{D}$ do campo $V$ é integrável.*

**Definição 3.4** *i) Um campo Killing conforme $V \in \mathfrak{X}(M)$ é fechado quando existe uma função $\psi \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $\nabla_X V = \psi X$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.*

*ii) No contexto do item i), dizemos que $V$ é homotético quando o fator conforme $\psi$ é constante.*

**Observação 3.3** *Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo Killing conforme fechado então $\nabla\langle V,V\rangle = 2\psi V$.*

De fato, por definição de campo gradiente e usando o fato que $V$ é um campo *Killing* conforme fechado, temos

$$\langle \nabla\langle V,V\rangle, X\rangle = X\langle V,V\rangle = 2\langle \nabla_X V, V\rangle = 2\langle \psi X, V\rangle = \langle 2\psi V, X\rangle, \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Logo,

$$\nabla\langle V,V\rangle = 2\psi V.$$

**Lema 3.2** *Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo Killing conforme fechado então*

$$\left(Hess_M\langle V,V\rangle\right)(X,Y) = 2X(\psi)\langle V,Y\rangle + 2\psi^2\langle X,Y\rangle,$$

*$\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

**Prova.** Dados $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned}
(Hess_M\langle V,V\rangle)(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla\langle V,V\rangle, Y\rangle \quad \text{(por definição)}\\
&= \langle \nabla_X 2\psi V, Y\rangle \quad \text{(observação 1)}\\
&= 2\langle \nabla_X \psi V, Y\rangle + 2\langle X(\psi)V, Y\rangle\\
&= 2\psi\langle \nabla_X V, Y\rangle + 2X(\psi)\langle V,Y\rangle\\
&= 2\psi\langle \psi X, Y\rangle + 2X(\psi)\langle V,Y\rangle \quad \text{(pois } V \text{ é fechado)}\\
&= 2\psi^2\langle X,Y\rangle + 2X(\psi)\langle V,Y\rangle.
\end{aligned}$$

■

Mostremos agora que $Hess_M$ é um tensor simétrico. Com efeito, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} Hess_M f(X,Y) - Hess_M f(Y,X) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla_Y \nabla f, X\rangle \\ &= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle - Y\langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla f, \nabla_Y X\rangle, \\ &= X\langle \nabla f, Y\rangle - Y\langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla_Y X - \nabla_X Y, \nabla f\rangle. \end{aligned}$$

Em resumo,

$$Hess_M f(X,Y) - Hess_M f(Y,X) = X\langle \nabla f, V\rangle - Y\langle \nabla f, X\rangle + \langle [Y,X], \nabla f\rangle,$$

ou equivalentemente,

$$Hess_M f(X,Y) - Hess_M f(Y,X) = X(Yf) - Y(Xf) + [Y,X]f = (XY - YX)f + [Y,X]f.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Hess_M f(X,Y) - Hess_M f(Y,X) = [X,Y]f - [X,Y]f = 0 \Rightarrow \\ Hess_M f(X,Y) = Hess_M f(Y,X). \end{aligned}$$

Concluímos que $Hess_M$ é um tensor simétrico.

**Lema 3.3** *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $X(\psi)\langle V, Y\rangle = Y(\psi)\langle V, X\rangle$.*

**Prova.** Com efeito, como $Hess_M$ é simétrico, então

$$\begin{aligned} (Hess_M\langle V,V\rangle(X,Y)) &= (Hess_M\langle V,V\rangle(Y,X)) \Rightarrow \\ 2X(\psi)\langle V,Y\rangle + 2\psi^2\langle X,Y\rangle &= 2Y(\psi)\langle V,X\rangle + 2\psi^2\langle Y,X\rangle \Rightarrow \\ X(\psi)\langle V,Y\rangle &= Y(\psi)\langle V,X\rangle. \end{aligned}$$

■

Agora considere $Y = V$ e observe que $\nabla\psi = \frac{V(\psi)}{|V|^2}V = \nu(\psi)\nu$, onde $\nu = -\frac{V}{|V|}$ e portanto, $\psi$ é constante sobre as folhas de $V^\perp$. De fato, por um lado, temos que $\langle \nabla\psi, X\rangle = X(\psi)$. Por outro lado, após algumas manipulações, concluimos que

$$\nabla\psi = \frac{V(\psi)}{|V|^2}V, \quad \text{ou equivalentemente,}$$

$$\nabla\psi = \nu(\psi)\nu.$$

Observemos que da equação *Killing* conforme o fator $\psi$ de um campo de vetores *Killing* conforme $V$ pode ser caracterizado por

$$\psi = \frac{1}{n} divV,$$

onde *div* denota o divergente em $M$. De fato, pela equação *Killing* conforme, temos que

$$\langle \nabla_X V, Y\rangle + \langle \nabla_Y V, X\rangle = 2\psi\langle X, Y\rangle, \tag{3.1}$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. No que segue, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ denota o referencial ortonormal local de M. Assim, pela definição de divergente, ver seção 1.5 do Capítulo 1 deste trabalho e usando (3.1), obtemos

$$divV = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} V, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \psi\langle E_i, E_i\rangle = n\psi.$$

Logo,

$$\psi = \frac{1}{n} divV. \tag{3.2}$$

De agora em diante, denotemos por $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \overline{M}$ o fluxo gerado por $V$, onde $M$ é uma folha integral arbitrária de $\mathcal{D}$ avaliada em $t = 0$ e suponha que M é conexa e completa. Assim, sendo $\Phi_t = \Phi(t, .)$ uma aplicação conforme para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, existe uma função positiva $\lambda \in \mathfrak{F}(\mathbb{R} \times M)$ tal que $\lambda(0, u) = 1$ e $\Phi_t^* \overline{g}(u) = \lambda^2(t, u)\overline{g}(u)$, para cada $u \in M$.

Consideremos o caso em que a função $\lambda$ depende somente da variável $t$, isto é, $\lambda \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$. Geometricamente, tal como já foi observado em [12], as hipóteses permitem relacionar as métricas induzidas em folhas distintas da folheação ortogonal a $V$ e que é detonada por $V^\perp$.

Seja $M_t = \Phi_t(M)$ uma folha de $V^\perp$ munida com a métrica induzida. Sabemos que $\overline{\nabla}\langle V, V\rangle = 2\psi V$ então $|V|^2$ é constante nas folhas de $V^\perp$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\overline{M}$.

Após alguns cálculos, verifiquemos que o operador forma $A_t$ de uma folha $M_t \in V^\perp$ com respeito a $\nu$ é dado por

$$A_t(X) = -\overline{\nabla}_X \nu = \frac{\psi}{|V|} X,$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M_t)$ e portanto, as folhas $M_t$ são totalmente umbílicas com curvatura média constante $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ com respeito a $\nu$ dado por

$$\mathcal{H} = \frac{\psi}{|V|}.$$

De fato,

$$A_t(X) = -\overline{\nabla}_X \nu = -\overline{\nabla}_X \frac{-V}{|V|} = \frac{1}{|V|}\overline{\nabla}_X V \quad \text{pois } |V|^2 \text{ é constante nas folhas } V^{\perp}.$$

Como $V$ é *Killing* conforme fechado então existe $\psi \in \mathfrak{F}(M)$ tal que

$$A_t(X) = \frac{1}{|V|}\psi X = \frac{\psi}{|V|}X.$$

## 3.2 Gráficos Killing conformes

De acordo com [12], dado um domínio $\Omega$ em $M = M_0$, o gráfico *Killing* conforme $\Sigma(z)$ de uma função suave $z$ sobre $\overline{\Omega}$ é a hipersuperfície dada por

$$\Sigma(z) = \{\Phi(z(u), u); u \in \overline{\Omega}\}.$$

Quando $\Omega = M$, $\Sigma(z)$ é dito ser inteiro.

Se atribuirmos coordenadas $x_0 = t, x_1, \ldots, x_n$ aos pontos em $\overline{M}$ da forma $\overline{u} = \Phi(t, u)$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são coordenadas locais em $M$, então os campos vetoriais correspondentes são

$$\partial_0|_{\overline{u}} = V(t) \quad \text{e} \quad \partial_i|_{\overline{u}} = \Phi_{t*}\partial_i|_u \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Donde, o gráfico *Killing* conforme $\Sigma(z)$ é parametrizado em termos de coordenadas locais por $z(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n$ e o espaço tangente para $\Sigma(z)$ é o espaço gerado pelos vetores

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}\partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}.$$

A partir da relação acima vemos que a métrica induzida sobre $\Sigma(z)$ é dado por

$$\lambda^2(z(u))\left(\frac{1}{\gamma}dz^2 + d\sigma^2\right),$$

onde $\gamma = \frac{1}{|V(0)|^2}$ e $d\sigma^2$ denota a métrica da folha $M$.

De fato, se denotarmos por $\langle , \rangle_M$ a métrica induzida em $M$, temos da relação

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}\partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_i|_{\Phi(z(u),u)} \quad \text{que,}$$

dados $x, y \in T_p(\Sigma(z))$, obtemos a seguinte expressão

$$\langle x, y\rangle_{\Sigma(z)} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} g_i \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}\right), \sum_{k=1}^{n} g_k \left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\partial_0|_{\Phi(z(u),u)} + \partial_k|_{\Phi(z(u),u)}\right)\right\rangle_{\Sigma(z)}.$$

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle_{\Sigma(z)} &= \lambda^2(z(u))\frac{1}{\gamma}\sum_{1\leq i,k\leq n} g_i g_k \left\langle \frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z}{\partial x_k}\right\rangle + \\
&+ \lambda^2(z(u))\sum_{1\leq i,k\leq n} g_i g_k \left\langle \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_k|_{\Phi(z(u),u)}\right\rangle_M \\
&= \lambda^2(z(u))\left(\frac{1}{\gamma}dz^2 + d\sigma^2\right),
\end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}\rangle &= 0, \\
\langle \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}\rangle &= \lambda^2(z(u))\langle V(0), V(0)\rangle \quad \text{e} \\
\langle \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_k|_{\Phi(z(u),u)}\rangle &= \lambda^2(z(u))\langle \partial_i|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_k|_{\Phi(z(u),u)}\rangle_M.
\end{aligned}$$

Além disso, denotemos por $Dz$ o gradiente da função $z$ com respeito a métrica $d\sigma^2$. Mostremos que

$$N = \frac{1}{\lambda(z(u))\sqrt{\gamma + |Dz(u)|^2}}(\Phi_{z(u)*}Dz(u) - \gamma\partial_0|_{\Phi(z(u),u)}) \tag{3.3}$$

é uma orientação sobre $\Sigma(z)$ tal que $\langle N, V\rangle < 0$.

De fato, considerando a aplicação $F : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ dada por $F(t, u) = z(u) - t$, temos que a aplicação $G : \overline{M} \to \mathbb{R}$ tal que $G = F \circ \Phi^{-1}$ satisfaz $G \equiv 0$ em $\Sigma(z)$.

Dessa forma, se $\alpha$ é uma curva em $\Sigma(z)$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w \in T_p(\Sigma(z))$, obtemos

$$\frac{d}{ds}(G \circ \alpha)(s) = 0, \quad \text{ou seja,}$$

$$w(G) = \alpha^{'}(G) = 0.$$

Daí, temos $w(G) = \langle \overline{\nabla} G, w\rangle$, segue que $\overline{\nabla} G \perp w$, para todo $w \in T_p\Sigma(z)$. Por resultados de Variedades Diferenciáveis, vale $\overline{\nabla} G = \Phi_{z(u)*}Dz(u) - \gamma\partial_0|_{\Phi(z(u),u)}$, então basta justificar que $|N| = 1$.

De fato, como $\Phi$ é uma aplicação conforme e $M$ é uma folha da folheação $\mathcal{D}|_{t=0}$, então segue que

$$\langle \Phi_{z(u)*}Dz(u), \Phi_{z(u)*}Dz(u)\rangle = \lambda^2|Dz(u)|^2,$$
$$\langle \Phi_{z(u)*}Dz(u), \gamma\partial_0|_{\Phi(z(u),u)}\rangle = 0 \quad \text{e}$$
$$\gamma^2\langle \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}, \partial_0|_{\Phi(z(u),u)}\rangle = \gamma\lambda^2(z(u)).$$

Portanto, $|N| = 1$, isto é, $N$ é um vetor normal a $\Sigma(z)$ tal que

$$\langle N, V\rangle < 0. \tag{3.4}$$

Neste trabalho vamos supor que a orientação em $\Sigma(z)$ é dada por (3.1).

## 3.3 Umbilicidade de gráficos Killing conformes inteiros

Sob uma restrição adequada na norma do gradiente da função $z$ que determina o gráfico $\Sigma(z)$, apresentamos condições suficientes para assegurar que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica e, em particular, uma folha integral da folheação $V^{\perp}$. Iniciamos essa seção com o seguinte resultado.

**Teorema 3.5** *Sejam $\overline{M}$ uma variedade de Einstein munida de um campo de vetores $V$ Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que $H$ é constante e que $H_2$ é limitada por baixo sobre $\Sigma(z)$. Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.*

**Prova.** Afirmamos que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície completa. De fato, como $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$ e $\gamma$ é uma constante positiva, a partir da métrica induzida sobre $\Sigma(z)$, existe uma constante positiva $C_0$ tal que

$$|X|^2_{\Sigma(z)} \geq C_0|X^*|^2_M,$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma(z))$, onde $X^* = X - \langle X, \nu\rangle\nu$ denota a projeção de $X$ sobre a folha $M$ e $|.|_M$ denota a norma com respeito a métrica $d\sigma^2$. Com efeito, sendo

$$X = X^* + \langle X, \nu\rangle\nu,$$

temos,

$$|X|^2_{\Sigma(z)} = \langle X, X\rangle_{\Sigma(z)} = \langle X^* + \langle X, \nu\rangle\nu, X^* + \langle X, \nu\rangle\nu\rangle_{\Sigma(z)}$$

isto é,

$$|X|^2_{\Sigma(z)} = |X^*|^2 + 2\langle X^*, \langle X, \nu\rangle\nu\rangle + \langle X, \nu\rangle^2.$$

Note que $2\langle X^*, \langle X, \nu\rangle\nu\rangle = 0$ e $\langle X, \nu\rangle^2 \geq 0$. Daí,

$$|X|^2_{\Sigma(z)} \geq |X^*|^2 \geq \lambda^2(z(u))|X^*|^2_M,$$

ou seja,

$$|X|^2_{\Sigma(z)} \geq \lambda^2(z(u))|X^*|^2_M.$$

Como $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação então existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$|X|^2_{\Sigma(z)} \geq \lambda^2(t)|X^*|^2_M,$$

para todo $t \in [t_1, t_2]$.

Sendo $\lambda > 0$ uma função contínua e $[t_1, t_2]$ compacto, então pelo Teorema de Weierstrass, existe $t_0 \in [t_1, t_2]$ tal que $0 < \lambda^2(t_0) \leq \lambda^2(t)$, para todo $t \in [t_1, t_2]$. Portanto,

$$|X|^2_{\Sigma(z)} \geq \lambda^2(t_0)|X^*|^2_M \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma(z)).$$

Para concluir o pedido, considere $C_0 = \lambda^2(t_0) > 0$. Isso implica que

$$L(\alpha) \geq \sqrt{C_0} L_M(\alpha^*),$$

onde $L(\alpha)$ denota o comprimento da curva $\alpha_{\Sigma(z)}$ com respeito a métrica induzida sobre $\Sigma(z)$ e $L_M(\alpha^*)$ denota o comprimento da projeção $\alpha^*$ de $\alpha$ sobre a folha $M$ com respeito a métrica $d\sigma^2$. Consequentemente, como a métrica $d\sigma^2$ é completa, pois $M$ é completa, usando o Teorema de Hopf-Rinow, temos que $M$ é geodesicamente completa. Da última desigualdade acima, concluimos que $\Sigma(z)$ é geodesicamente completa, usando novamente o Teorema de Hopf-Rinow, temos que $\Sigma(z)$ com a métrica induzida é também completa e assim fica mostrado nossa afirmação.

Agora a partir da fórmula obtida para o vetor normal $N$ e usando o fato que $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$, temos que existe uma constante positiva $C_1$ tal que

$$|N^*|_M \leq C_1 |Dz|_M,$$

onde $N^* = N - \langle N, \nu\rangle\nu$ denota a projeção de $N$ sobre a folha $M$.

De fato, sendo $N^* = N - \langle N, \nu\rangle\nu$, temos

$$\begin{aligned}
|N^*|_M^2 &= \langle N - \langle N, \nu\rangle\nu, N - \langle N, \nu\rangle\nu\rangle_M \\
&= |N|^2 - 2\langle N, \nu\rangle\langle N, \nu\rangle + \langle N, \nu\rangle^2 \\
&= |N|^2 - \langle N, \nu\rangle^2 \leq |N|_M^2,
\end{aligned}$$

e o resultado segue usando a expressão que define o vetor normal $N$ de $\Sigma(z)$.

Agora, considere a projeção $V^{\top}$ de $V$ sobre $\Sigma(z)$, que é dado por

$$V^{\top} = V - \langle V, N\rangle N.$$

Mostremos que $(V^{\top})^* = -\langle N, V\rangle N^*$.

De fato, pela relação acima, resulta

$$\begin{aligned}
(V^T)^* &= V^{\top} - \langle V^{\top}, \nu\rangle\nu \\
&= V - \langle V, N\rangle N - \langle V - \langle V, N\rangle N, \nu\rangle\nu \\
&= V - \langle V, N\rangle N - \langle V, \nu\rangle\nu + \langle V, N\rangle\langle N, \nu\rangle\nu \\
&= V - \langle V, N\rangle(N - \langle N, \nu\rangle\nu\rangle - \langle V, \nu\rangle\nu
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(V^{\top})^* &= V - \langle V, N\rangle N^* - \langle V, \nu\rangle\nu \\
&= V - \left\langle V, \frac{-V}{|V|}\right\rangle \frac{-V}{|V|} - \langle V, N\rangle N^* \\
&= V + \frac{1}{|V|}|V|^2\left(\frac{-V}{|V|}\right) - \langle V, N\rangle N^*.
\end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned}
(V^{\top})^* &= -\langle V, N\rangle N^* \\
&= -\langle N, V\rangle N^*.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(V^{\top})^* = -\langle N, V\rangle N^*.$$

Mostremos agora que $|(V^{\top})^*|_M \leq \frac{1}{\lambda^2}|V||N^*|_M$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} |(V^{\top})^*|_M &= |-\langle N, V\rangle N^*|_M \\ &= |\langle N, V\rangle N^*|_M \\ &= |\langle N, V\rangle||N^*|_M \leq |N|_M|V|_M|N^*|_M. \end{aligned}$$

Como $\lambda^2|V|_M^2 = |V|^2$ e $\lambda^2|N|_M^2 = |N|^2 = 1$, segue-se que

$$|(V^{\top})^*|_M \leq \frac{1}{\lambda}\frac{|V|}{\lambda}|N^*|_M = \frac{1}{\lambda^2}|V||N^*|_M \quad \text{e}$$

$$\text{conclui-se} \quad |(V^T)^*|_M \leq \frac{1}{\lambda^2}|V||N^*|_M.$$

Assim, tendo em conta mais uma vez que $\Sigma(z)$ está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$, a partir das relações $|N^*|_M \leq C_1|Dz|_M$ e $|(V^{\top})^*|_M \leq \frac{1}{\lambda^2}|V||N^*|_M$ vemos que existe uma constante positiva $C_2$ tal que

$$|(V^{\top})^*|_M \leq C_2|Dz|_M.$$

Assim, a partir da métrica induzida sobre $\Sigma(z)$ e da relação acima, concluimos que as hipóteses que $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$ garante que $|V^{\top}| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$.

Defina sobre $\Sigma(z)$ um campo de vetores tangente

$$X = -P_1V^{\top} + (n-1)HV^{\top}.$$

Sendo $H$ constante e $H_2$ limitado por baixo, a partir da relação

$$|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2$$

obtemos que $|A|$ é limitada. Para ver isso, observe que $C \leq H_2$ para alguma constante $C$ e $H_2 \leq \frac{n}{n-1}H^2$ implica que $H_2$ é limitada. Novamente, pela relação que envolve $|A|$, concluimos que $|A|$ é limitada. Portanto, a partir das relações que definem as transformações de Newton, vemos que $|P_1|$ é também limitada. Consequentemente,

$$|X| \leq (|P_1| + (n-1)|H|)|V^{\top}|$$

e segue que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$, pois $|V^\top| \in \mathcal{L}(\Sigma(z))$. Por outro lado, inspirado no artigo [2], afirmamos que

$$divV^\top = n(\psi + \langle V, N\rangle H) \tag{3.5}$$

e

$$divP_1V^\top = \langle divP_1, V^\top\rangle + n(n-1)(\psi H + \langle V, N\rangle H_2). \tag{3.6}$$

Com efeito,

$$div(P_rV^\top) = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}P_rV^\top, E_i\rangle = \langle divP_r, V^\top\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}V^\top, P_rE_i\rangle.$$

Escolhendo um referencial local ortonormal sobre $M$ que diagonaliza o operador $A$ pois $A$ é auto-adjunto, obtemos

$$\langle \nabla_{E_i}V^\top, P_rE_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}V^\top, \lambda_{i,r}E_i\rangle = \lambda_{i,r}\langle \nabla_{E_i}V^\top, E_i\rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i}V^\top, P_rE_i\rangle = \langle \lambda_{i,r}\nabla_{E_i}V^\top, E_i\rangle = \langle \nabla_{\lambda_{i,r}E_i}V^\top, E_i\rangle = \langle \nabla_{P_rE_i}V^\top, E_i\rangle.$$

Usando a equação de $Killing$ conforme e a relação $V^\perp = V - \langle V, N\rangle N$, vale a seguinte relação

$$\frac{1}{2}(\langle \nabla_X V^\top, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y V^\top\rangle = \psi\langle X, Y\rangle + \langle V, N\rangle\langle AX, Y\rangle,$$

e daí,

$$\langle \nabla_{E_i}V^\top, P_rE_i\rangle = \psi\langle E_i, P_rE_i\rangle - \langle V, N\rangle\langle E_i, AP_rE_i\rangle.$$

Pelas relações obtidas na seção 2.4 do Capítulo 2,

$$tr(P_r) = b_rH_r \quad \text{e} \quad tr(A\circ P_r) = -b_rH_{r+1},$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} div(P_rV^\top) &= \langle divP_r, V^\top\rangle + \psi tr(P_r) - \langle V, N\rangle tr(A\circ P_r) &(3.7)\\ &= \langle divP_r, V^\top\rangle + b_r(\psi H_r + \langle V, N\rangle H_{r+1}) &(3.8)\end{aligned}$$

onde

$$b_r = (r+1)\binom{n}{r+1}.$$

Fazendo $b = 0$ e depois $b = 1$, fica mostrado a nossa afirmação.

Sendo $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Einstein, a partir da relação

$$\langle divP_r, X\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(N, P_{r-j}E_i)E_i, A^{j-1}X\rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

conclui-se

$$\langle divP_1, V^\top\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(N, E_i)E_i, V^\top\rangle = -\overline{Ric}(N, V^\top) = -\lambda\langle N, V^\top\rangle = 0,$$

onde $\overline{Ric}$ denota o tensor de Ricci de $\overline{M}$. Consequentemente, a partir das relações que envolvem $divP_1V^\top$ e $divV^\top$ mostradas acima, vale a seguinte implicação

$$X = -P_1V^\top + (n-1)HV^\top \Rightarrow divX = -divP_1V^\top + (n-1)HdivV^\top,$$

pois $H$ é constante. Daí,

$$\begin{aligned} divX &= -(\langle divP_1, V^\top\rangle + n(n-1)(\psi H + \langle V, N\rangle H_2)) + n(n-1)H(\psi + \langle V, N\rangle H) \\ &= -\langle divP_1, V^\top\rangle - n(n-1)(\psi H + \langle V, N\rangle H_2) + H(n-1)n(\psi + \langle V, N\rangle H) \\ &= -\langle divP_1, V^\top\rangle - n(n-1)\psi H - n(n-1)\langle V, N\rangle H_2 + H(n-1)n\psi + \\ &+ H(n-1)n\langle V, N\rangle H \\ &= n(n-1)(H^2 - H_2)\langle V, N\rangle, \end{aligned}$$

isto é, $divX = n(n-1)(H^2 - H_2)\langle V, N\rangle$. Observe que $n(n-1) > 0$, $\langle V, N\rangle < 0$ e $H^2 - H_2 \geq 0$ implica que $divX \leq 0$. Como $\Sigma(z)$ é uma variedade Riemanniana completa orientada tal que $divX \leq 0$ e $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$, então pelo Lema 1.10, segue que $divX \equiv 0$ e consequentemente $H^2 = H_2$. Portanto, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

O Teorema abaixo garante sob certas condições que, se a curvatura média positiva de um gráfico *Killing* conforme inteiro não ultrapassa pontualmente a curvatura média de uma folha $M_t$ para $t \in [a, b]$, em que $[a, b]$ é um intervalo conveniente, então $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^\perp$.

**Teorema 3.6** *Sejam $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana munida de um campo de vetores $V$ Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a curvatura média $H$ de $\Sigma(z)$ satisfaz*

$$0 < H \leq \mathcal{H}$$

*Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^{\perp}$.*

**Prova.** A partir de (3.3) juntamente com a relação $\mathcal{H} = \frac{\psi}{|V|}$, resulta

$$\begin{aligned} divV^{\top} &= n(\psi + \langle V, N\rangle H) \\ &= n(\mathcal{H}|V| - |V||N|H\cos\theta) \\ &= n(\mathcal{H}|V| - |V|H\cos\theta) \\ &= n|V|(\mathcal{H} - H\cos\theta). \end{aligned}$$

Por hipótese, $0 < H \leq \mathcal{H}$ e por conseguinte,

$$divV^{\top} = n|V|(\mathcal{H} - H\cos\theta) \geq n|V|(H - H\cos\theta) = n|V|H(1-\cos\theta) \geq 0.$$

onde $\theta$ é o ângulo entre $\nu$ e $N$. Portanto,

$$divV^{\top} \geq nH|V|(1-\cos\theta) \geq 0.$$

Por outro lado, como na demonstração do Teorema anterior, temos que $\Sigma(z)$ é completo e $|V^{\top}| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Portanto, aplicando o Lema do Caminha, garantimos que $divV^{\top} \equiv 0$. Assim, $\cos\theta \equiv 1$, isto é, $N = \nu$, pois $H > 0$. Concluimos daí que $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^{\perp}$. ■

Na definição abaixo, denotamos a curvatura média de $\Sigma$ por $H$.

**Definição 3.7** *Dizemos que uma hipersuperfície $\Sigma$ é minimal quando $H \equiv 0$.*

Sob as condições do Teorema acima, se a curvatura média $H$ da hipersuperfície $\Sigma(z)$ é uma constante não negativa, então há duas possibilidades: Se $H \neq 0$ em algum ponto de $\Sigma(z)$, então evidentemente $H > 0$ e assim o resultado segue diretamente do teorema anterior. Caso contrário, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície minimal, conforme comprova o seguinte.

**Corolário 3.8** *Sejam $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana munida de um campo de vetores $V$ Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação de $V^{\perp}$. Suponha que a curvatura média $H$ de $\Sigma(z)$ é constante, satisfazendo*

$$0 \leq H \leq \mathcal{H}.$$

*Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície minimal ou uma folha da folheação $V^{\perp}$.*

**Prova.** Usando um raciocínio inteiramente análogo ao anterior, resulta que

$$nH|V|(1 - \cos\theta) \equiv 0.$$

Como $H$ é constante, então pela relação acima, segue que $H|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ ou $(\cos\theta)|_{\Sigma(z)} \equiv 1$, mostrando que $\Sigma(z)$ é minimal ou uma folha da folheação $V^{\perp}$. ■

No teorema abaixo estabelecemos algumas condições sobre o gráfico $\Sigma(z)$ que mostra um resultado envolvendo a curvatura de Ricci de tal gráfico.

**Teorema 3.9** *Sejam $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa munida de um campo de vetores $V$ Killing conforme homotético completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a curvatura média $H$ de $\Sigma(z)$ é limitada, satisfazendo*

$$0 \leq H\cos\theta \leq \mathcal{H},$$

*onde $\theta$ o ângulo entre $N$ e $\nu$, e que $H_2 \geq C$ para alguma constante $C$. Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica e $\overline{Ric}(N, N) \equiv 0$.*

**Prova.** Definimos sobre $\Sigma(z)$ a função suave dada por

$$f_V = \langle V, N\rangle.$$

Observe que $f_V < 0$, pois a orientação $N$ construida anteriormente satisfaz essa propriedade. Encontremos agora o campo gradiente da função $f_V$. Para todo $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma(z))$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f_V, Y\rangle &= Y(f_V) \\
&= Y\langle V, N\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_Y V, N\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_Y N\rangle
\end{aligned}$$

Observe que $\overline{\nabla}_Y V = \psi Y$ pois $V$ fechado, $A(Y) = -(\overline{\nabla}_Y N)^\top$ é a fórmula de Weingarten e $V^\top = V - \langle V, N\rangle N$.

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_V, Y\rangle &= \psi\langle Y, N\rangle - \langle V^T, A(Y)\rangle \\ &= \langle -A(V^\top), Y\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla f_V = -A(V^\top).$$

Por outro lado, a partir da Proposição 6, de [3](ver também Proposição 2.1 de [5]),

$$\triangle f_V = -n\langle \nabla H, V\rangle - (\overline{Ric}(N,N) + |A|^2) f_V - nH\psi - nN(\psi).$$

Como $V$ é homotético, então $\psi$ é constante, consequentemente, $N(\psi) = 0$. Logo

$$\triangle f_V = -n\langle \nabla H, V\rangle - (\overline{Ric}(N,N) + |A|^2) f_V - nH\psi.$$

Agora, considere o campo de vetores tangente sobre $\Sigma(z)$ dado por

$$X = \nabla f_V + nHV^\top.$$

Sendo $H$ limitada e $C \leq H_2$ para alguma constante $C$, como anteriormente, a norma da forma fundamental $|A|$ é limitada. Então, a partir da relação $\nabla f_V = -A(V^\top)$, obtemos

$$|X| \leq (|A| + nH)|V^\top|,$$

e, assim, uma demonstração similar ao Teorema anterior, concluimos que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Além disso, a partir de (8.4) de [2] juntamente com as relações

$$|A| = n^2H^2 - n(n-1)H_2 \quad \text{e} \quad \triangle f_V = -n\langle \nabla H, V\rangle - (\overline{Ric}(N,N) + |A|^2) f_V - nH\psi,$$

resulta que

$$X = \nabla f_V + nHV^\top \Rightarrow divX = div(\nabla f_V) + div(nHV^\top) \quad \text{e consequentemente,}$$

$$
\begin{aligned}
divX &= \triangle f_V + n\langle\nabla H, V\rangle + nHdivV^{\top}\\
&= -n\langle\nabla H, V\rangle - (\overline{Ric}(N,N) + |A|^2)f_V - nH\psi + n\langle\nabla H, V\rangle + nH(n\psi + n\langle V, N\rangle H)\\
&= -n\langle\nabla H, V\rangle - \overline{Ric}(N,N)f_V - |A|^2 f_V - nH\psi + n\langle\nabla H, V\rangle + n^2H\psi + n^2H^2 f_V\\
&= -\overline{Ric}(N,N)f_V - (n^2H^2 - n(n-1)H_2)f_V - nH\psi + n^2H\psi + n^2H^2 f_V,
\end{aligned}
$$

após algumas manipulações, concluimos que

$$
\begin{aligned}
divX &= -\overline{Ric}(N,N)f_V - n^2H^2 f_V + n(n-1)H_2 f_V - nH\psi + n^2H\psi + n^2H^2 f_V\\
&= -(\overline{Ric}(N,N) - n(n-1)H_2)f_V + n(n-1)H\psi.
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{H} = \frac{\psi}{|V|}$, então a relação acima se reduz a

$$divX = -(\overline{Ric}(N,N) - n(n-1)H_2)f_V + n(n-1)H\mathcal{H}|V|.$$

Por hipótese, $0 \leq H\cos\theta \leq \mathcal{H}$ e tendo em conta que $f_V = -|V|\cos\theta$, resulta que

$$divX \geq -(\overline{Ric}(N,N) + n(n-1)(H^2 - H_2)f_V.$$

Note que $f_V < 0$, $\overline{Ric} \geq 0$ por hipótese e $H^2 - H_2 \geq 0$, com a igualdade valendo somente em pontos umbílicos de $\Sigma(z)$(confira Proposição 2.1), logo $(divX)|_{\Sigma(z)} \geq 0$. Então, pelo Lema do 1.10 segue que $(divX)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, isto é, $(\overline{Ric}(N,N) + n(n-1)(H^2 - H_2))|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ pois $f_V < 0$.

Portanto, $\overline{Ric}(N,N) \equiv 0$ e $(H^2 - H_2)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, ou seja, $\overline{Ric}(N,N) \equiv 0$ e $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

## 3.4 Extensões para o caso das $r$-ésimas curvaturas médias

Nessa seção, apresentamos as extensões para o caso das $r$-ésimas curvaturas médias dos resultados da seção anterior desenvolvidas em [15].

**Teorema 3.10** *Sejam $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, munida de um campo de vetores $V$ Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folhas da folheação de $V^{\perp}$. Suponha que $\Sigma(z)$ tem segunda forma fundamental $A$ limitada e que, para algum $1 \leq r < n$, $H_{r-1}$ e $H_r$ são constantes. Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.*

**Prova.** Primeiramente notemos que, como $\overline{M}_c$ tem curvatura seccional constante $c$, a partir da relação

$$\langle divP_r, X\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(N, P_{r-j}E_i)E_i, A^{j-1}X\rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma(z)),$$

temos

$$\langle divP_r, V^{\top}\rangle = c\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle N, E_i\rangle\langle P_{r-j}E_i, A^{j-1}V^{\top}\rangle - \langle P_{r-j}E_i, E_i\rangle\langle N, A^{j-1}V^{\top}\rangle\right).$$

Como $\langle N, E_i\rangle = 0$ e $\langle N, A^{j-1}V^{\top}\rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, r\}$, então

$$\langle divP_r, V^{\top}\rangle = 0.$$

Consequentemente, a partir de (3.5), conclui-se

$$divP_rV^{\top} = b_r(\psi H_r + \langle V, N\rangle H_{r+1}), \tag{3.9}$$

onde $b_r = (n-1)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$. Agora, consideremos o seguinte campo de vetores tangente sobre $\Sigma(z)$ dado por

$$X = b_rH_rP_{r-1}V^{\top} - b_{r-1}H_{r-1}P_rV^{\top}.$$

Logo,

$$|X| \leq (b_r|H_r||P_{r-1}| + b_{r-1}|H_{r-1}||P_r|)|V^{\top}|.$$

Supondo que $|A|$ é limitada e que $H_{r-1}$ e $H_r$ são constantes, similar ao teorema 3.5 podemos ver que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Além disso, a partir de (3.5), Proposição 2.4 e assumindo o fato que $H_{r-1}$ e $H_r$ são constantes, temos

$$\begin{aligned}
divX &= b_rH_rdiv(P_{r-1}V^{\top}) - b_{r-1}H_{r-1}div(P_rV^{\top})\\
&= b_rH_r\left[(b_{r-1}(\psi H_{r-1} + \langle V, N\rangle H_r)\right] - b_{r-1}H_{r-1}\left[(b_r(\psi H_r + \langle V, N\rangle H_{r+1})\right]\\
&= b_rH_r(\psi b_{r-1}H_{r-1} + b_{r-1}\langle V, N\rangle H_r) - b_{r-1}H_{r-1}(\psi b_rH_r + b_r\langle V, N\rangle H_{r+1})\\
&= \psi b_{r-1}b_rH_{r-1}H_r + b_rb_{r-1}H_r^2\langle V, N\rangle - b_{r-1}b_rH_{r-1}H_r\psi - b_{r-1}b_rH_{r-1}H_{r+1}\langle V, N\rangle\\
&= b_{r-1}b_r\langle V, N\rangle(H_r^2 - H_{r-1}H_{r+1}).
\end{aligned}$$

Observe que $b_{r-1} > 0, b_r > 0$, $\langle V, N\rangle < 0$ e $H_r^2 - H_{r-1}H_{r+1} \geq 0$. Logo,

$$(divX)|_{\Sigma(z)} \leq 0.$$

Aplicando o Lema 1.10, segue que $(divX)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, isto é, $[b_r b_{r-1}\langle V, N\rangle(H_r^2 - H_{r-1}H_{r+1})]|_{\Sigma(z)} \equiv 0$. Portanto, $(H_r^2 - H_{r-1}H_{r+1})|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ pois $b_r > 0$, $b_{r-1} > 0$ e $\langle V, N\rangle < 0$. Assim, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

Apresentamos agora um resultado muito importante que estabelece a existência de pontos elípticos assumindo algumas hipóteses.

**Lema 3.4** *Sejam $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana munida com um campo de vetores $V$ conforme fechado completo, e $\Sigma$ uma hipersuperfície completa em $\overline{M}$. Suponha que $divV(p) \neq 0$ para algum $p \in \Sigma(z)$, onde a restrição $|V||_{\Sigma(z)}$ de $|V|$ para $\Sigma$ atinge um máximo local. Então existe um ponto elíptico em $\Sigma$.*

**Prova.** Assuma que existe um ponto $p_{\max} \in \Sigma$ onde a função positiva $|V|_M$, ou equivalentemente, a função $u = \langle V, V\rangle|_M$, atinge um máximo local, com $div_{\overline{M}}V(p_{\max}) \neq 0$ (ou equivalentemente, $\psi(p_{\max}) \neq 0$). Assim.

$$\nabla_u(p_{\max}) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 u_{p_{\max}}(v, v) \leq 0,$$

para todo $v \in T_{p_{\max}}M$. Usando que $\overline{\nabla}_X V = \psi X$ para todo campo de vetores $X$, mostra-se que o gradiente de $u$ é dado por

$$\nabla u = 2\psi V^{\top}.$$

Além disso, para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u(X, X) &= \langle \nabla_X(\nabla u), X\rangle \\
&= 2X(\psi)\langle X, V^{\top}\rangle + 2\psi\langle \nabla_X V^{\top}, X\rangle \\
&= 2X(\psi)\langle X, V^{\top}\rangle + 2\psi^2|X|^2 - 2\psi\langle V, N\rangle\langle AX, X\rangle,
\end{aligned}$$

pois $\langle \nabla_V^{\top}, X\rangle = \psi\langle X, X\rangle - \langle V, N\rangle\langle AX, X\rangle$. Portanto, no ponto $p_{\max}$, temos

$$V^{\top}(p_{\max}) = 0 \quad , \quad \langle V, N\rangle(p_{\max}) = -\sqrt{u(p_{\max})} \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{2}\nabla^2 u_{p_{\max}}(v, v) = \psi^2(p_{\max})|v|^2 + \psi(p_{\max})\sqrt{u(p_{\max})}\langle A_{p_{\max}}v, v\rangle \leq 0, \tag{3.10}$$

para todo $v \in T_{p_{\max}}M$. Assumamos que $div_{\overline{M}}V(p_{\max})$ (ou equivalentemente, que $\psi(p_{\max})$) é negativa ( a demonstração para o caso onde $div_{\overline{M}}V(p_{\max})$ é positiva é análoga). Escolhendo agora uma base de direções principais $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em $p_{\max}$, concluimos de (1.3) que

$$k_i(p_{\max}) \geq \frac{-\psi(p_{\max})}{\sqrt{u(p_{\max})}} > 0, i = 1, \ldots, n.$$

■

Como aplicação do Lema 3.4 temos o seguinte.

**Teorema 3.11** *Sejam $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a curvatura média H é limitada, $H_r$ é constante, para algum $2 \leq r \leq n$, e que $divV(p) \neq 0$ para algum ponto de $\Sigma(z)$ onde $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local. Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.*

**Prova.** Consideramos o campo de vetores sobre $\Sigma(z)$ definido por

$$X = b_r H_r V^{\top} - nP_r V^{\top}.$$

Como $M$ tem curvatura seccional constante, então vale a relação abaixo

$$div(P_r V^{\top}) = b_r(\psi H_r + \langle V, N\rangle H_{r+1}),$$

e usando o fato que $H_r$ é constante, concluimos que,

$$\begin{aligned} divX &= b_r H_r div(V^{\top}) - ndiv(P_r V^{\top}) \\ &= n\psi b_r H_r + nb_r H_r \langle N, V\rangle - nb_r(\psi H_r + \langle N, V\rangle H_{r+1}) \\ &= nb_r \langle V, N\rangle (HH_r - H_{r+1}). \end{aligned}$$

Afirmamos que $HH_r - H_{r+1} \geq 0$ com a igualdade somente em pontos umbílicos.

De fato, desde que $divV(p) \neq 0$ para algum $p \in \Sigma(z)$, onde a restrição de $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local, o Lema 3.4 garante que existe um ponto elíptico em $\Sigma(z)$. Sendo $H_r$ constante, temos que $H_r > 0$. Então pelo Corolário 2.7 deduzimos que $H_k > 0$, para $k \in \{1, ..., r-1\}$, e

$$H_{r-1} \geq H_r^{\frac{(r-1)}{r}}, H \geq H_{r-1}^{\frac{1}{(r-1)}},$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. Além disso, a Proposição 2.4 assegura que

$$H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1} > 0.$$

Assim,

$$H_{r+1} \leq \frac{H_r^2}{H_{r-1}}.$$

Então, a partir dessas desigualdades, podemos concluir que

$$HH_r - H_{r+1} \geq HH_r - \frac{H_r^2}{H_{r-1}} \quad = \quad \frac{H_r}{H_{r-1}}(HH_{r-1} - H_r) \geq \frac{H_r}{H_{r-1}}(HH_{r-1} - H_{r-1}^{\frac{r}{(r-1)}})$$

ou seja,

$$HH_r - H_{r+1} \geq H_r(H - H_{r-1}^{\frac{1}{(r-1)}}) \geq 0,$$

com a igualdade valendo somente em pontos umbílicos.

Por outro lado, sendo $H$ limitado e $H_2 > 0$, pelos passos da demonstração do Teorema 3.5 concluimos que $|A|$ é limitada. Ademais,

$$|X| \leq (b_r H_r + n|P_r|)|V^\top|,$$

e que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Então, a partir de (5.3) e (5.4) temos que $(divX)|_{\Sigma(z)}$ não muda de sinal, e pelo Lema 1.10, garantimos que $(divX)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, equivalentemente, $[nb_r\langle V, N\rangle(HH_r - H_{r+1})]|_{\Sigma(z)} \equiv 0$. Portanto, $(HH_r - H_{r-1})|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ pois $n > 0$, $b_r > 0$ e $\langle V, N\rangle < 0$. Daí, concluimos que $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

**Teorema 3.12** *Sejam $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, munida de um campo de vetores V Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folhas da folheação $V^\perp$. Suponha que H é limitada, e para $0 \leq r < s < n$ ou $0 < r < s \leq n$*

$$H_s = a_r H_r + \cdots + a_{s-1}H_{s-1}, \tag{3.11}$$

*para alguns números não negativos $a_r, \ldots, a_{s-1}$ e que $divV$ não se anula em algum ponto de $\Sigma(z)$, onde $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local. Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.*

**Prova.** Analisamos dois casos.

**Caso 1:** Primeiramente, supomos que $0 \leq r < s < n$. Usando as relações (3.3) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} div(P_s V^\top) &= b_s(\psi H_s + \langle V, N\rangle H_{s+1}) \\ &= b_s\psi H_s + b_s\langle V, N\rangle H_{s+1} \\ &= b_s\psi\left(\sum_{j=r}^{s-1} a_j H_j\right) + b_s\langle V, N\rangle H_{s+1}. \end{aligned}$$

Observe que é crucial supor $s < n$, pois caso contrário, usando essa técnica de demonstração, $H_{s+1}$ não estaria definido para $s = n$ nas relações acima. Usando a relação (3.6) e após algumas manipulações algébricas, concluimos que

$$divP_sV^\top = b_s\sum_{j=r}^{s-1} a_j\left(\frac{1}{b_j}divP_jV^\top - \langle V, N\rangle H_{j+1}\right) + b_s\langle V, N\rangle H_{s+1}.$$

Logo,

$$divP_sV^\top = b_s\sum_{j=r}^{s-1}\frac{a_j}{b_j}divP_jV^\top + b_s\langle V, N\rangle\left(H_{s+1} - \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1}\right). \tag{3.12}$$

Por outro lado, desde que $divV$ não se anula em algum ponto de $\Sigma(z)$ onde $|V|_{\Sigma(z)}$ atinge um máximo local, o Lema 3.4 garante que existe um ponto elíptico em $\Sigma(z)$. Consequentemente, se $0 \leq r < s < n$, como na demonstração do Teorema 6.1 de [1], temos

$$H_{s+1} \leq \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1}, \tag{3.13}$$

com a igualdade ocorrendo somente em pontos umbílicos. Assuma sem perda de generalidade que $divV < 0$. Então novamente pelo Lema 3.4, existe um ponto $p_0 \in \Sigma(z)$ onde todas as curvaturas principais são positivas. Denote por $\Sigma_s$ a componente conexa de $G = \{p \in \Sigma(z) : H_s(p) > 0\}$ contendo um ponto elíptico $p_0$.

Observe que $\Sigma_s$ é um conjunto aberto não vazio de $\Sigma(z)$ pois $p_0 \in \Sigma_s$, sendo $G$ aberto e $\Sigma(z)$ uma variedade Riemanniana, então por resultados de Variedades Diferenciáveis, segue que, em particular, a componente conexa $\Sigma_s$ de $G$ é aberto. Mostremos agora que $\Sigma_s$ é um conjunto fechado.

De fato, desde que $H_s(p_0) > 0$, existe um coeficiente positivo $a_l$, para algum $l \in \{r, \ldots, s-1\}$ pois caso contrário, teríamos $a_j \leq 0$, para todo $j \in \{r, \ldots, s-1\}$ e por hipótese, $a_j \geq 0$, para todo $j \in \{r, \dots, s-1\}$. Logo $a_j = 0$ para todo $j \in \{r, \dots, s-1\}$ implicaria que $H_s(p_0) = 0$, o que é uma contradição.

O Corolário 2.7 assegura que, para cada $p \in \Sigma_s$, vale

$$H_j^{\frac{s}{j}} \geq H_s(p) > 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq s-1.$$

Em particular, sendo $a_j \geq 0$, em cada $p \in \Sigma_s$, segue que

$$H_s(p) \geq a_l H_l(p). \tag{3.14}$$

Se $l = 0$, então $H_s \geq a_0 > 0$ sobre $\Sigma_s$, o que mostra que $\Sigma_s$ é fechado. Se $l \geq 1$, então temos sobre $\Sigma_s$ a seguinte desigualdade usando o Corolário 2.7.

$$H_l^{\frac{s}{l}} \geq H_s \geq a_l H_l > 0.$$

Assim $H_l^{\frac{(s-l)}{l}} \geq a_l$ sobre $\Sigma(z)$, temos

$$H_s \geq a_l a_l^{\frac{l}{(s-l)}} = a_l^{\frac{s}{(s-l)}} > 0,$$

mostrando neste caso que $\Sigma_s$ é fechado.

Portanto, $\Sigma_s$ é um conexo não vazio aberto e fechado em $G$, logo $\Sigma_s = \Sigma(z)$ e (3.12) vale em cada $p \in \Sigma(z)$. Em particular, $H_j > 0$ para cada $j$, $1 \leq j \leq s$. Além disso, pela Proposição 2.4 obtemos

$$H_j^2 - H_{j-1}H_{j+1} \geq 0,$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. Sendo cada $H_j > 0$, para $1 \leq j \leq s$, pelo Corolário (2.5), segue a seguinte cadeia de desigualdades

$$\frac{H_{s+1}}{H_s} \leq \frac{H_s}{H_{s-1}} \leq \cdots \leq \frac{H_{j+1}}{H_j} \leq \cdots \leq \frac{H_2}{H_1} \leq H_1 \tag{3.15}$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. Observe que a primeira desigualdade vale independentemente do sinal de $H_{s+1}$. A partir de (3.14), e usando (3.9), obtemos

$$\frac{H_{s+1}}{H_s} \leq \frac{H_s}{H_{s-1}} = \sum_{j=r}^{s-1} a_j \frac{H_j}{H_{s-1}} \leq \sum_{j=r}^{s-1} a_j \frac{H_{j+1}}{H_s}.$$

Agora, considerando sobre $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangente

$$X = P_s V^{\top} - b_s \sum_{j=r}^{s-1} \frac{a_j}{b_j} P_j V^{\top}.$$

O Corolário 2.7 garante que $(H_2)|_{\Sigma(z)} > 0$. Então, supondo que $H$ é limitado, e usando os passos da demonstração do Teorema 3.5 concluimos que $|A|$ é limitado. Então, de acordo com a seção 2.4 do Capítulo 2 concluimos que $|P_r|$ é também limitado, para cada $1 \leq r \leq n$. Consequentemente, sendo

$$|X| \leq \left(|P_s| + b_s \sum_{j=r}^{s-1} \frac{a_j}{b_j}|P_j|\right)|V^\top|.$$

podemos ver como na demonstração do Teorema 3.5, que $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Então, usando o fato que $\langle V, N\rangle < 0$, obtemos a partir de (3.3) e (3.12) que

$$divX = b_s\langle V, N\rangle \left(H_{s+1} - \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1}\right) \geq 0.$$

Donde, pelo Lema 1.10, temos que $(divX)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$. Como $b_s > 0$ e $\langle V, N\rangle < 0$, então $H_{s+1} = \sum_{j=r}^{s-1} a_j H_{j+1}$ e, assim, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica.

**Caso 2:** Agora, assuma que $s = n$ e $r > 0$. Nesse caso, usando as relações (3.8) e (3.10), resulta que

$$\begin{aligned} divP_{n-1}V^\top &= b_{n-1}\psi H_{n-1} + b_{n-1}\langle V, N\rangle H_n \\ &= b_{n-1}\psi H_{n-1} + b_{n-1}\langle V, N\rangle \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_j. \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, deduzimos que

$$divP_{n-1}V^\top = b_{n-1}\psi H_{n-1} + b_{n-1}\sum_{j=r}^{n-1} a_j \left(\frac{1}{b_{j-1}} divP_{j-1}V^\top - \psi H_{j-1}\right).$$

Observe que é fundamental que $r > 0$, pois caso contrário, $P_{j-1}$ não faz sentido para $j = r = 0$. Portanto,

$$divP_{n-1}V^\top = b_{n-1}\sum_{j=r}^{n-1} \frac{a_j}{b_{j-1}} divP_{j-1}V^T + b_{n-1}\psi\left(H_{n-1} - \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1}\right).$$

Como antes, existe um ponto elíptico em $\Sigma(z)$ e $0 < r < s \leq n$, donde

$$H_{n-1} \geq \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1}, \tag{3.16}$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. Para demonstrar a desigualdade anterior, segue as ideias da demonstração de (6.6) em [1] e assuma que $divV < 0$. Então pelo

Lema anterior existe um ponto $p_0 \in \Sigma(z)$ onde todas as curvaturas principais são positivas. Pela mesma razão do **Caso 1** mostra-se que $\Sigma_s = \{p \in \Sigma(z) : H_s(p) > 0\} = \Sigma(z)$ e $H_j^{\frac{n}{j}} \geq H_n(p) > 0$ em cada ponto $p \in \Sigma(z)$, para $1 \leq j \leq n-1$.

Pelo Corolário 2.5 segue que

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} \leq \frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} \leq \ldots \leq \frac{H_j}{H_{j-1}} \leq \ldots \leq \frac{H_2}{H_1} \leq H_1,$$

com a igualdade somente em pontos umbílicos. De (3.10) e usando as relações acima, obtemos

$$\frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} \geq \frac{H_n}{H_{n-1}} = \sum_{j=r}^{n-1} a_j \frac{H_j}{H_{n-1}} \geq \sum_{j=r}^{n-1} a_j \frac{H_{j-1}}{H_{n-2}}.$$

Agora, considere sobre $\Sigma(z)$ o campo de vetores tangente dado por

$$Y = P_{n-1}V^{\top} - b_{n-1} \sum_{j=r}^{n-1} \frac{a_j}{b_{j-1}} P_{j-1}V^{\top}.$$

Daí, temos $|Y| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$ pois $|Dz| \in \mathcal{L}(M)$ e pelas ideias da demonstração do Teorema 3.5, segue que $|V^{\top}| \in \mathcal{L}(\Sigma(z))$, além disso, sabemos que $|P_r|$ é limitado, para cada $1 \leq r \leq n$.

Assim, $|Y| \in \mathcal{L}(\Sigma(z))$.

Supondo que $divV|_{\Sigma(z)} < 0$, usando (3.2) e a partir de (3.16) obtemos

$$divY = b_{n-1}\psi \left( H_{n-1} - \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1} \right) \leq 0.$$

Então, observando que, como antes, $(|A|)$ é limitada, o Lema 1.10 assegura que $divY \equiv 0$. Portanto, $H_{n-1} = \left( \sum_{j=r}^{n-1} a_j H_{j-1} \right)$ e, assim, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. ■

**Teorema 3.13** *Sejam $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $c$, munida de um campo de vetores $V$ Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folhas da folheação $V^{\perp}$. Suponha que a segunda forma fundamental $A$ de $\Sigma(z)$ é limitada e, para algum $1 \leq r \leq n$,*

$$0 < H_{r+1} \leq H_r \mathcal{H}.$$

*Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^{\perp}$.*

**Prova.** Como $|A|$ é limitada e $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$ então seguindo as ideias da demonstração do Teorema 3.5 concluimos que $|V^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma(z))$. Daí, deduzimos que $|P_r V^\top| \in \mathcal{L}(\Sigma(z))$. Ademais, usando a relação $0 < H_{r+1} \leq H_r\mathcal{H}$, obtemos

$$\begin{aligned} divP_rV^\top &= b_r\psi H_r + b_r\langle V, N\rangle H_{r+1} \\ &= b_r\psi H_r + b_r(-|V||N|\cos\theta)H_{r+1} \\ &= b_r\psi H_r - b_r|V|\cos\theta H_{r+1} \\ &= b_r|V|\mathcal{H}H_r - b_r|V|\cos\theta H_{r+1} \\ &= b_r|V|(\mathcal{H}H_r - \cos\theta H_{r+1}) \geq b_r|V|(H_{r+1} - \cos\theta H_{r+1}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$divP_rV^\top \geq b_r|V|H_{r+1}(1-\cos\theta) \geq 0,$$

onde $b_r = (r+1)\binom{n}{r+1}$ e $\theta$ denota o ângulo entre $\nu$ e $N$. Pelo Lema 1.10 segue que $(divP_rV^\top)|_{\Sigma(z)} \equiv 0$, isto é, $[b_r|V|H_{r+1}(1-\cos\theta)]|_{\Sigma(z)} \equiv 0$. Como $b_r > 0$, $|V| > 0$ e $H_{r+1} > 0$ então $(\cos\theta)|_{\Sigma(z)} \equiv 1$ e, assim, $\Sigma(z)$ é uma folha da folheação $V^\perp$. ■

**Definição 3.14** *Uma hipersuperfície $\Sigma$ é dita $r$-minimal se $(H_{r+1})|_\Sigma \equiv 0$.*

**Corolário 3.15** *Sejam $\overline{M}_c$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $c$, munida de um campo de vetores $V$ Killing conforme fechado completo e $\Sigma(z)$ um gráfico Killing conforme inteiro em $\overline{M}_c$, que está entre duas folhas da folheação $V^\perp$. Suponha que a segunda forma fundamental $A$ de $\Sigma(z)$ é limitada e, para algum $1 \leq r \leq n$, $H_{r+1}$ é uma constante satisfazendo*

$$0 \leq H_{r+1} \leq H_r\mathcal{H}.$$

*Se $|Dz| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície $r$-minimal ou uma folha da folheação $V^\perp$.*

**Prova.** Se $H_{r+1} = 0$ em algum ponto de $\Sigma(z)$ e sendo $H_{r+1}$ uma constante, então evidentemente $(H_{r+1})|_{\Sigma(z)} \equiv 0$ e assim, $\Sigma(z)$ é uma hipersuperfície $r$-minimal. Caso contrário, o resultado segue diretamente do Teorema 3.13. ■

# Bibliografia


[1] Alexandrov, A.D.: *Uniqueness theorems for surfaces in the large I.* Vestn, Leningrad Univ. **11**, 5-17(1956)

[2] Alexandrov, A.D.: *A characteristic property of spheres.* Ann. Mat. Pura Appl. **58**, 303-315(1962)

[3] Alias, L.J., Brasil, A. Jr, Colares, A.G.: *Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications*, Proc. Edinb. Math. Soc.46, 465-488(2003).

[4] Alias, L.J., de Lira, J.H., Malacarne, J.M.: *Constanthigher order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces.*J. Inst. Math. Jussieu 5, 527-562(2006).

[5] Alias, L.J., Dajczer, M., Ripoll, J.B.: *A Bernstein-type theorem for Riemannian manifolds with a Killing field.* Ann. Glob.Anal.Geom.31,363-373(2007).

[6] Alías, L.J., Impera, D., Rigoli, M.: *Hypersurfaces of constant higher order mean curvature in warped products.* Trans. Am. Math. Soc.**365**,591-621(2013)

[7] Aquino, C.P., de Lima, H.F.: *On the unicity of complete hypersurfaces immersed in a semi Riemannian warped product.* Geom. Anal. (2012)

[8] Bernstein, S.: *Sur les surfaces d'efinies au moyen de leur courboure moyenne ou totale.* Ann. Ec. Norm. Super. **27**, 233-256(1910)

[9] Caminha, A.: *A rigidity theorem for complete CMC hypersurfaces in Lorentz manifolds.* Differ. Geom. Appl. 24,652-659(2006).

[10] Caminha, A.: *The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces.* Bull. Braz. Math. Soc. **42**, 277-300(2011)

[11] Caminha, A., de Lima, H.F.: *Complete vertical graph with constant mean curvature in Semi-Riemannian warped products*. Bull. Belg. Math. Soc. 16, 91-105(2009).

[12] Dajczer., de Lira, J.H.:*Conformal Killing graphs with prescribed mean curvature*. J. Geom. Anal.22, 780-799(2012).

[13] Dajczer, M., Hinojosa, P., de Lira, J.H.: *Killing graphs with prescribed mean curvature*. Calc. Var. Partial Differ. Equ. **33**, 231-248(2008)

[14] do Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática pura e aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, (2008).

[15] Garding, L.: *An inequality for hyperbolic polynomials*.J.Math. Mech.8. 957-965(1959).

[16] H.F. de Lima, J.R. de Lima and M.A.L.Velásquez, Entire conformal Killing graphs, to appear in The Journal of Geometric Analysis.

[17] Jellet, J.J.: *Sur la surface dont la courbure moyenne est constant*. J. Math. Pures Appl. **18**, 163-167 (1853)

[18] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 218, Ed. Board, (2003)

[19] Liebmann, H.: *Eine neue Eigenschaft der Kugel*. Nachr. Kg. Ges. *Göttingen*, Math. Phys. KI., 44-55(1899)

[20] M. Gaffney, *A special Stokes theorem for complete Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 60 (1954), 140-145.

[21] Montiel, S.: *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*. Indiana Univ. Math. J. **48**, 711-748(1999)

[22] Montiel, S., Ros, A.: *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*. In: Lawson, B., Tenenblat, K.(eds.) Differential Geometry, pp. 279-296. Longman, New York (1991).

[23] Omori, H.: *Isometric immersions of Riemannian manifolds*. J.Math. Soc. Jpn. **19**, 205-214(1967)

[24] B.O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, New York: Academic Press (1983)

[25] Pan, T.K.: *Conformal vector fields in compact Riemannian manifolds*. Proc. Am. Math. Soc. **14**, 653-657(1963)

[26] Yau, S.T.: *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*. Commun. Pure Appl. Math. **28**, 201-228(1975)

[27] Yau, S.T.: *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*. Indiana Univ. Math.J.**25**, 659-670(1976)