Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Comportamento Assintótico para Equação de Campos Neurais

por

Michel Barros Silva [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Comportamento Assintótico para Equação de Campos Neurais

por

Michel Barros Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira - USP

Prof. Dr. Flank David Morais Pereira - UFPB

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2014

Agradecimentos

Inicialmente agradeço oas meus pais, Diogo e Joana. Ao meu pai por todo conhecimento e sabedoria, a minha mãe por todo carinho, e a ambos por toda dedicação, atenção e amor. Um filho não poderia desejar pais melhores.

Aos meus irmãos, Diego e Wagner. A diego por sempre me fazer ir, não importando com que humor eu estivesse e a Wagner por seu cuidade comigo desde pequeno.

A Maria por todo o seu carinho, cuidado e apoio, e por entender que nem sempre eu podia ir ve-la quando eu gostaria.

Aos meus amigos, Arthur, Fabio, Brito, Claudemir, Débora, Romildo, Ailton, Manu, Elisabeth, Fabrício, Antonio Marcus (Pajé), Jogli, Luciano, Carlos, Jamilly e Keytt pelo convívio, estudo, e amizade.

A Severino Horácio da Silva, que me orienta desde a graduação, pela paciência e ensino de Equações Diferenciais. Por sua disposição e confiança em propor para dissertação um trabalho original, o qual resultou no artigo de pesquisa *Asymptotic Behavior of Neural Fields in an Unbounded Domain.* Além disso, gostaria de agradecer pelas conversas não só sobre a pós-graduação mas também pelos conselhos para o futuro.

Dedicatória

Aos meus pais, Diogo e Joana, aos meus irmãos, Wagner e Diego, e a Maria.

Resumo

Neste trabalho provamos a existência de um atrator global para o fluxo gerado pela equação de evolução

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)f(u(y,t))dy + h, \quad h > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

no espaço $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$. Também obtemos uma estimativa para o tamanho do atrator e exibimos um funcional energia para o fluxo gerado por essa equação.

Abstract

In this paper, we prove the existence of a global attractor for the flow generated by equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)(f(u(y,t))dy + h, \quad h > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

in the weight space $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$. We also give estimates on the size of the attractor and we exhibit an energy functional to the flow generated by this equation.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico da equação de evolução

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = J * (f \circ u)(x,t) + h, \tag{1}$$

onde u é uma função real sobre $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$, h é uma constante positiva, $J \in C^1(\mathbb{R}^N)$ é uma função par, não negativa com suporte na bola de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^N$ e o símbolo "$*$" na equação acima denota o produto convolução em $\mathbb{R}^N$, isto é,

$$(J * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)v(y)dy.$$

A equação (1) foi deduzida por Wilson e Cowan, [28], para modelar a atividade neural. Em (1), $u(x,t)$ denota o potencial da membrana na posição x, no tempo $t \geq 0$; a função J representa a conexão dos neurônios na posição x e posição y; a função f representa a taxa na qual os *spikes* neurais são gerados e a constante h representa um estímulo externo aplicado uniformemente em todo campo neural (veja, por exemplo, [9], [11], [12], [18], [19], [20], [21], [22], [23] e [28]).

Os principais objetivos desta dissertação consistem em: mostrar a existência e semicontinuidade superior de atratores globais para o fluxo gerado pela equação (1), no espaço de fase $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$, e exibir um funcional energia que decresce ao longo das soluções de (1), generalizando assim resultados de [22] e [23].

É válido salientar que parte dos resultados expostos nesta dissertação constituíram um artigo de pesquisa o qual foi publicado no periódico internacional *Differential Equations and Dynamical Systems*, (veja [19]).

Esta dissertação está organizada como segue: no Capítulo 1, seguindo as referências [10], [15], [26] e [27], apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares. No Capítulo 2 mostramos a existência de um atrator global para a equação (1). Para isto, usamos as mesmas técnicas utilizadas em [18], [22] e [23]. No Capítulo 3 provamos algumas estimativas e a semicontinuidade superior dos atratores. No Capítulo 4, motivados por funcionais de [11] e [20], exibimos um funcional energia que decresce ao longo das soluções de (1) e ilustramos nossos resultados com um exemplo concreto. Finalmente, no Apêndice, exibimos alguns resultados clássicos que de alguma forma foram utilizados neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo seguindo referências clássicas como [10] e [27], apresentamos alguns conceitos e resultados sobre semigrupos contínuos e seguindo as referências [2], [7], [15] e [26] apresentamos resultados sobre existência e unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach.

1.1 Noções de Semigrupos de Operadores Contínuos

Nesta seção introduzimos a terminologia de um C^r-semigrupo em um espaço de Banach X.

1.1.1 Semigrupos Contínuos

Definição 1.1. *Sejam X um espaço de Banach e $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Uma Família de operadores (não necessariamente lineares) $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, é dita um* ***C^r-semigrupo****, $r \geq 0$, se as seguintes condições são satisfeitas:*
(i) $T(0) = I$, isto é, $T(0)x = x$ para todo $x \in X$,
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para $t, s \geq 0$,
(iii) $T(t)x$ é contínua em t e x com derivadas de Fréchet em x, até a ordem r, para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$.

No caso particular onde cada $T(t)$, $t \geq 0$, é linear, dizemos que $\{T(t), t \geq 0\}$ é um semigrupo linear.

Para qualquer $x \in X$, **a órbita positiva** por x, $\gamma^+(x)$, é definida como

$$\gamma^+(x) = \{T(t)x, t \geq 0\}.$$

Uma órbita negativa por x é uma função $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que
(i) $\phi(0) = x$,
(ii) para qualquer $s \leq 0$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$, para $0 \leq t \leq -s$.
Uma órbita completa por x é uma função $\phi : \mathbb{R} \to X$ tal que
(i) $\phi(0) = x$,
(ii) para qualquer $s \in \mathbb{R}$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$, para $t \geq 0$.

Observação 1.1. *Como a imagem de $T(t)$ pode não ser todo o X, dizer que existe uma órbita negativa ou completa por x pode impor restrições em x. Também, $T(t)$ pode não ser injetiva, então se existe um órbita negativa ela pode não ser única.*

A órbita negativa por x, $\gamma^-(x)$, é definida como a união de todas as órbitas negativas por x, então

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{t \geq 0} H(x,t),$$

onde

$$\begin{aligned} H(x,t) &= \{y \in X;\ \text{tal que existe uma órbita negativa por } x \text{ definida} \\ &\quad \text{por } \phi : (-\infty, 0] \to X \text{ com } \phi(0) = x \text{ e } \phi(-t) = y\}. \end{aligned}$$

A órbita completa por x, $\gamma(x)$, é definida por

$$\gamma(x) = \gamma^-(x) \cup \gamma^+(x).$$

Para qualquer subconjunto $B \subset X$, definimos

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x), \quad \gamma^-(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x) \quad \text{e} \quad \gamma(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma(x)$$

como as respectivas órbitas positiva, negativa e completa por B.

1.1.2 Conjuntos Invariantes

Nesta subseção exibimos alguns conceitos e propriedades de alguns conjuntos invariantes sobre um semigrupo $T(t)$.

Definição 1.2. *Para qualquer $B \subset X$, definimos o conjunto ω-**limite** de B, $\omega(B)$, e o conjunto α-**limite** de B, $\alpha(B)$, como*

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}, \quad \alpha(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} H(B,t)}.$$

Observação 1.2. *Dado $B \subset X$, $\omega(B)$ é caracterizado como segue: $y \in \omega(B)$ se, e somente se, existem sequências $x_n \in B$ e $t_n \to \infty$ tais que $T(t_n)x_n \to y$, quando $n \to \infty$. Semelhantemente, o conjunto $\alpha(B)$ pode ser caracterizado como segue: $y \in \alpha(B)$ se, e somente se, existem sequências $y_n \to y$ em X e $t_n \to +\infty$ tais que $z_n = T(t_n)y_n \in B$, para todo n.*

De fato, seja

$$\varphi \in \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}.$$

Daí

$$\varphi \in \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}, \quad \forall s \geq 0.$$

Assim, para cada $s \geq 0$,

$$\exists\ \varphi_{n_s} \in T(t)B, \quad \text{tal que} \quad \varphi_{n_s} \to \varphi, \quad \text{para qualquer} \quad t \geq s.$$

Em particular, para $s = 0$,

$$\exists\ \varphi_{n_0} \in T(1)B \quad \text{tal que} \quad \varphi_{n_0} \to \varphi,$$

tome $\varphi_0 = T(1)x_1$, com $x_1 \in B$. Para $s = 1$,

$$\exists\ \varphi_{n_1} \in T(2)B \quad \text{tal que} \quad \varphi_{n_1} \to \varphi,$$

escolha, $\varphi_1 = T(2)x_2$, com $x_2 \in B$. Para $s = 2$,

$$\exists\ \varphi_{n_2} \in T(3)B \quad \text{tal que} \quad \varphi_{n_2} \to \varphi,$$

tome, $\varphi_2 = T(3)x_3$, com $x_3 \in B$. Continuando com este procedimento, obtemos sequências $x_n \in B$ e $t_n = n \in \mathbb{N}$ tais que $T(t_n)x_n \to \varphi$, com $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. Logo $\varphi \in \omega(B)$. Reciprocamente, suponha que exitam sequências $x_n \in B$ e $t_n \to \infty$ tais que $T(t_n)x_n \to \varphi$, quando $n \to \infty$. Como $t_n \to \infty$ podemos tomar uma subsequência de (t_n), a qual continuamos denotando por (t_n), tal que $t_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$\varphi \in \overline{\{T(t_n)x_n \quad \text{para} \quad n \geq 0\}}.$$

Sendo $x_n \in B$, segue que

$$\varphi \in \overline{T(t_n)B} \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

Como qualquer subsequência de $T(t_n)x_n$ converge para φ, obtemos

$$\varphi \in \overline{T(t_n)B} \quad \text{para} \quad n \geq s,$$

para qualquer $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ou seja,

$$\varphi \in \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$$

para qualquer $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Logo

$$\varphi \in \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}.$$

Portanto, $\varphi \in \omega(B)$. Analogamente se prova a caracterização de $\alpha(B)$.

Definição 1.3. *Dizemos que um conjunto $B \subset X$ atrai o conjunto $C \subset X$ sob $T(t)$ se*

$$d(T(t)C, B) \to 0, \quad \textit{quando} \quad t \to \infty,$$

onde

$$d(T(t)C, B) = \sup_{x \in C} \inf_{y \in B} ||T(t)x - y||_X.$$

Definição 1.4. *Dizemos que um conjunto $S \subset X$ é **invariante** por $T(t)$ se, para qualquer $x \in S$, existe uma órbita completa por x, $\gamma(x)$, tal que $\gamma(x) \subset S$.*

Observação 1.3. *Dizer que S é invariante é equivalente a dizer que $T(t)S = S$, para todo $t \geq 0$.*

De fato, suponha que S é invariante. Para $t = 0$ é óbivio que $T(0)S = S$. Suponha $t > 0$. Para $x \in S$, existe uma órbita completa $\varphi : (-\infty, \infty) \to S$ tal que

$$\varphi(0) = x \quad \text{e} \quad T(\tau)\varphi(s) = \varphi(\tau + s),$$

para $\tau \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$. Tome $\tau = t$ e $s = 0$. Assim

$$T(t)x = T(t)\varphi(0) = \varphi(t) \in S,$$

ou seja, $T(t)x \in S$. Logo $T(t)S \subset S$. Para ver que $S \subset T(t)S$, note que para $x \in S$, tomando $\tau = t$ e $s = -t$, obtemos

$$T(t)\varphi(-t) = \varphi(0) \Rightarrow T(t)\varphi(-t) = x.$$

Logo $S \subset T(t)S$. Portanto $T(t)S = S$, para $t \geq 0$.

Reciprocamente, suponha que $T(t)S = S$ para todo $t \geq 0$ e seja $x \in S$. Então existe $x_1 \in S$ tal que

$$T(1)x_1 = x.$$

Como $x_1 \in S$, existe $x_2 \in S$ tal que

$$T(1)x_2 = x_1,$$

e assim por diante. Se $x_0 = x$, obtemos uma sequência (x_n) de pontos de S tal que

$$T(1)(x_{n+1}) = x_n, \quad \text{para} \quad n \geq 0. \tag{1.1}$$

Usando (1.1), temos

$$\begin{aligned} T(n)x_n &= \underbrace{T(1)\cdots T(1)}_{n-\text{vezes}} x_n \\ &= \underbrace{T(1)\cdots T(1)}_{(n-1)\text{vezes}} x_{n-1} \\ &= \underbrace{T(1)\cdots T(1)}_{(n-2)\text{vezes}} x_{n-2} \\ &\;\;\vdots \\ &= T(1)x_1 \\ &= x. \end{aligned}$$

Defina $\varphi : (-\infty, \infty) \to X$ por

$$\varphi(t) = \begin{cases} T(t)x, & \text{se } t \geq 0 \\ T(n+t)x_n & \text{se} \quad t \in [-n, -n+1), \;\; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \in [-n, -n+1)$. Se $t \geq -s$, então

$$\begin{aligned} T(t)\varphi(s) &= T(t)T(n+s)x_n \\ &= T(t+s+n)x_n \\ &= T(t+s)T(n)x_n \\ &= T(t+s)x \\ &= \varphi(t+s). \end{aligned}$$

Se $s \in [-k, -k+1]$, então

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= T(k+s)x_k \\ &= T(k+s)T(1)x_{k+1} \\ &= T(k+1+s)x_{k+1} \\ &\vdots \\ &= T(k+j+s)x_{k+j}, \end{aligned}$$

para $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Se $n \geq k$ e $j = n - k$, então

$$\varphi(s) = T(n+s)x_n \quad \text{se} \quad s \in [-k, -k+1).$$

Agora se $t < -s$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq k < n-1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \tau \leq 0$$

tal que

$$-s = t + k - \tau. \tag{1.2}$$

Então,

$$\begin{aligned} T(t)\varphi(s) &= T(t)T(n+s)x_n \\ &= T(t+s+n)x_n \\ &= T(n-(k-\tau))x_n. \end{aligned}$$

Daí, usando (1.2) e que $n = j + k$, com $j = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} T(t)\varphi(s) &= T(1+k-(k-\tau))x_{1+k} \\ &= T(\tau+1)x_{k+1} \\ &= T(1+k+t+s)x_{k+1}. \end{aligned}$$

Observando que por (1.2), $t+s \in [-(1+k), -k)$, segue da definição de φ que

$$T(1+k+t+s)x_{k+1} = \varphi(t+s).$$

Proposição 1.5. *Seja B um subconjunto de X para o qual $\omega(B)$ é compacto e $\omega(B)$ atrai B, então $\omega(B)$ é invariante. Se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo. Se $\omega(B) \subset B$, então $\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} T(t)B$.*

Demonstração. Suponha que $\omega(B)$ é compacto e atrai B. Se $\omega(B) = \emptyset$, não há o que provar. Então podemos supor que $\omega(B) \neq \emptyset$. Primeiramente mostraremos que $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$, para todo $t \geq 0$. Seja $x \in T(t)\omega(B)$, então

$$x = T(t_0)x_0, \quad \text{para algum} \quad t_0 \geq 0 \text{ e } x_0 \in \omega(B).$$

Daí, existem sequências $(x_n) \subset B$ e $t_n \to \infty$ tais que

$$T(t_n)x_n \to x_0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Sendo T contínua, segue que

$$\begin{aligned} x &= T(t_0)x_0 \\ &= T(t_0)\lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} T(t_0+t_n)x_n, \end{aligned}$$

então $x \in \omega(B)$. Portanto

$$T(t)\omega(B) \subset \omega(B).$$

Por outro lado, dado $y \in \omega(B)$, existem sequências $y_n \in B$ e $s_n \to \infty$ tais que

$$T(s_n)y_n \to y, \text{ quando } n \to \infty.$$

Como $s_n \to \infty$, dado $k > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \geq k$, para todo $n \geq n_0$. Considere o conjunto

$$H = \{T(s_n - k)x_n, \ n \geq n_0\}.$$

Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B, existe uma subsequência $s_{n_j} \to \infty$ e $z \in X$ tal que

$$T(s_{n_j} - k)y_{n_j} \to z, \text{ quando } j \to \infty.$$

Assim, $z \in \omega(B)$. Note que

$$\begin{aligned} T(s_{n_j})y_{n_j} &= T(s_{n_j} - t + t)y_{n_j} \\ &= T(t)T(s_{n_j} - t)y_{n_j}. \end{aligned}$$

Mas,

$$T(s_{n_j})y_{n_j} \to y \quad \text{e} \quad T(t)T(s_{n_j} - t)y_{n_j} \to T(t)z,$$

quando $n_j \to \infty$. Então

$$y = T(t)z.$$

Logo $y \in T(t)\omega(B)$ e consequentemente

$$T(t)\omega(B) \supset \omega(B).$$

Das inclusões acima obtemos a invariância de $\omega(B)$.

Sendo B conexo, provemos que $\omega(B)$ é conexo. Suponha que $\omega(B)$ não é conexo, então existem abertos A_1, A_2 tais que

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad \omega(B) \subset A_1 \cup A_2, \quad \omega(B) \cap A_i \neq \emptyset, \quad i = 1, 2.$$

Como $\omega(B)$ é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\omega(B)^{\varepsilon} \subset A_1 \cup A_2,$$

onde $\omega(B)^{\varepsilon}$ é a ε-vizinhança de $\omega(B)$. Por hipótese, $\omega(B)$ atrai B, então existe $t_0 > 0$ tal que

$$\forall\ t \geq t_0, \quad T(t)B \subset \omega(B)^{\varepsilon} \subset A_1 \cup A_2.$$

Sendo $\omega(B) \cap A_i \neq \emptyset$ e $T(t)B$ conexo, existem sequências (t_n) e $(\overline{t_n})$,

$$t_n \to \infty \quad \text{e} \quad \overline{t_n} \to \infty.$$

que podemos supor $t_n, \overline{t_n} \geq t_0$ e $t_n < \overline{t_n}$ tais que

$$T(t_n)B \subset A_1 \quad \text{e} \quad T(\overline{t_n})B \subset A_2,$$

para qualquer n. Mas $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $T(t)$ é contínuo, então existem $t_n < s_n < \overline{t_n}$ e $(x_n) \subset B$ tais que

$$T(s_n)x_n \notin A_1 \cup A_2,$$

para qualquer n. Mas

$$T(s_n)x_n \subset \overline{\gamma^+(B)},$$

então $T(s_n)x_n$ possui subsequência convergente, isto é, $T(s_n)x_n \to x \in \overline{(A_1 \cup A_2)^c}$. Absurdo, pois

$$\omega(B) \cap \overline{(A_1 \cup A_2)^c} = \emptyset.$$

Finalmente, sendo $\omega(B)$ invariante e $\omega(B) \subset B$, temos

$$\omega(B) = T(t)\omega(B) \subset T(t)B, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim

$$\omega(B) \subset \bigcap_{t\geq 0} T(t)B.$$

Por outro lado, note que

$$T(k)B \subset \overline{\bigcup_{t\geq k} T(t)B}, \ \forall \ k \geq 0,$$

logo

$$\bigcap_{k\geq 0} T(k)B \subset \bigcap_{k\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq k} T(t)B},$$

ou seja,

$$\bigcap_{k\geq 0} T(k)B \subset \omega(B).$$

Portanto,

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} T(t)B.$$

□

Proposição 1.6. *Se $B \subset X$ é um conjunto não vazio tal que $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Se, além disso, se B é conexo então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração. Temos

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}.$$

Note que,

$$\overline{\gamma^+(B)} = \overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t)B} \supset \overline{\bigcup_{t\geq 1} T(t)B} \supset \dots$$

sendo X um espaço métrico completo, segue que,

$$\bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t)B}$$

é compacto e não vazio. Provemos agora que $\omega(B)$ atrai B. Suponha, por contradição, que isso não ocorra. Então existe $\varepsilon > 0$, $t_n \to \infty$ e $x_n \in B$ tal que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) \geq \varepsilon. \tag{1.3}$$

Temos que,

$$\{T(t_n)x_n, n \geq 0\} \subset \overline{\gamma^+(B)},$$

já que $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, existem subsequências (t_n) e (x_n) tais que

$$T(t_n)x_n \to y \in \omega(B).$$

Fazendo $n \to \infty$ em (1.3), obtemos

$$d(y, \omega(B)) \geq \varepsilon.$$

Absurdo, pois $y \in \omega(B)$.

Portanto, pela Proposição 1.5 concluímos o resultado.

$\square$

Definição 1.7. *Seja $T(t) : X \to X$ um C^r-semigrupo para algum $r \geq 0$. O semigrupo $T(t)$ é* ***assintoticamente suave*** *se, para qualquer conjunto $B \subset X$, não vazio, fechado e limitado para o qual $T(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B.*

Proposição 1.8. *Se $T(t)$ é assintoticamente suave e B é um conjunto não vazio em X tal que $\gamma^+(B)$ é limitado, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B. Se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo. Em particular, se para algum $x \in X$, $\gamma^+(x)$ é limitado, então $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto e $\omega(x)$ é não vazio, compacto, conexo e invariante.*

Demonstração. Provemos inicialmente que $\omega(B)$ é compacto. Para isto, seja $x \in T(t)\gamma^+(B)$, então $x = T(t)y$, com $y \in \gamma^+(B)$. Daí,

$$y \in \bigcup_{x\in B} \gamma^+(x) \Rightarrow y \in \gamma^+(x_0), \text{ para algum } x_0 \in B.$$

Então

$$y = T(t_0)x_0, \text{ para algum } t_0 \geq 0.$$

Assim, já que

$$\begin{aligned} x &= T(t)y \\ &= T(t)T(t_0)x_0 \\ &= T(t+t_0)x_0. \end{aligned}$$

Obtemos,

$$x \in \gamma^+(x_0) \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x),$$

ou seja, $x \in \gamma^+(B)$. Logo $T(t)\gamma^+(B) \subset \gamma^+(B)$. Sendo $T(t)$ contínuo, segue que

$$T(t)\overline{\gamma^+(B)} \subset \overline{\gamma^+(B)}.$$

E mais, sendo T assintoticamente suave, existe $J \subset \overline{\gamma^+(B)}$ tal que J atrai B. Assim,

$$d(T(t)B, J) < \varepsilon, \text{ quando } t \to \infty. \tag{1.4}$$

Seja $x \in \omega(B)$, então existem sequências $(x_n) \subset B$ e $k_n \to \infty$, tais que

$$T(k_n)x_n \to x, \text{ quando } n \to \infty.$$

Por (1.4), segue que $x \in J$, isto é, $\omega(B) \subset J$. Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, então $\omega(B)$ é compacto.

Provemos agora que $\omega(B)$ atrai B. Suponha, por contradição, que $\omega(B)$ não atrai B. Então existe um $\varepsilon > 0$, uma sequência $t_n \to \infty$ e pontos $y_n \in B$ tais que

$$d(T(t_n)y_n, \omega(B)) > \varepsilon, \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.5}$$

Como J atrai B e J é compacto, podemos assumir que

$$T(t_n)y_n \to z \in J, \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo existem sequências $y_n \in B$ e $t_n \to \infty$ tais que $T(t_n)y_n \to z$, então $z \in \omega(B)$. Contradição com (1.5). Portanto $\omega(B)$ atrai B.

Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B, pela Proposição 1.5, $\omega(B)$ é invariante. E se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo. $\square$

1.2 Dissipatividade de Semigrupos

Nesta seção revisamos algumas propriedades sobre dissipatividade de um semigrupo. Alguns resultados não serão demonstrados mas tais demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em [10].

Definição 1.9. *O semigrupo $T(t)$ é dito* ***ponto dissipativo (compacto dissipativo)(localmente compacto dissipativo)(limitado dissipativo)*** *se existe um conjunto limitado $B \subset X$ que atrai cada ponto de X (cada compacto de X)(uma vizinhança de cada compacto de X)(cada conjunto limitado de X) sobre $T(t)$.*

Definição 1.10. *Para um C^r-semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, um conjunto compacto invariante A é dito conjunto* ***compacto invariante maximal*** *se todo conjunto compacto invariante do semigrupo está em A. Um conjunto invariante $\mathcal{A}$ é dito um* ***atrator global*** *se $\mathcal{A}$ é um conjunto compacto invariante maximal que atrai os conjuntos limitados $B \subset X$. Em particular, $\omega(B)$ é compacto e pertence a $\mathcal{A}$.*

Teorema 1.11. *Se $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, é um C^r-semigrupo e existe um conjunto compacto não vazio K que atrai os conjuntos compactos de X e*

$$A = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K,$$

então
(i) A é independente de K;
(ii) A é maximal, compacto e invariante;
(iii) A atrai conjuntos compactos de X;
(iv) Se $T(t)$ é assintoticamente suave, então se C é qualquer subconjunto de X tal que $\gamma^+(C)$ é limitado, então A atrai C.

Demonstração. Seja $H \subset X$ um conjunto compacto. Então

$$d(T(t)H, K) \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Assim $\overline{\gamma^+(H)}$ é compacto e $\omega(H) \subset K$. De fato, seja $\varphi \in \omega(H)$, então existem sequências $x_n \in H$ e $t_n \to \infty$, tais que $d(T(t_n)x_n, \varphi) \to 0$. Temos

$$d(\varphi, K) \leq d(\varphi, T(t_n)x_n) + d(T(t_n)x_n, K), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Calculando o limite, segue que

$$d(\varphi, K) = 0$$

Logo $\varphi \in K$, ou seja, $\omega(H) \subset K$. Sendo K compacto, em particular, temos $\omega(K) \subset K$ e $\overline{\gamma^+(K)}$ compacto. Pela Proposição 1.6, $\omega(K)$ é compacto, invariante e atrai K. E Pela Proposição 1.5,

$$\omega(K) = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K.$$

Note também que K atrai compactos de X, então $\omega(K)$ atrai compactos de X. Se K_1 é outro conjunto compacto que atrai compactos de X, então pelo que foi feito acima

$$\omega(K_1) \subset \omega(K) \subset \omega(K_1),$$

pois $\omega(K_1)$ e $\omega(K)$ atrai compactos de X. Assim $A = \omega(K)$ é independente de K, é maximal e atrai compactos. Isto prova (i), (ii) e (iii).

Para provar (iv), considere C um subconjunto de X tal que $\gamma^+(C)$ é limitado. Note que $T(t)\overline{\gamma^+(C)} \subset \overline{\gamma^+(C)}$. Com efeito, seja $x \in \overline{T(t)\gamma^+(C)}$, então $x = T(t_0)y$, com $t_0 \geq 0$ e $y \in \overline{\gamma^+(C)}$. Assim existe uma sequência $y_n \in \gamma^+(C)$, tal que $y_n \to y$. Daí,

$$\begin{aligned} x &= T(t)y \\ &= T(t) \lim_{n \to \infty} y_n \\ &= \lim_{n \to \infty} T(t) y_n. \end{aligned}$$

Como $(T(t)y_n) \subset \gamma^+(C)$, existe uma sequência em $\gamma^+(C)$ que converge para x. Então $x \in \overline{\gamma^+(C)}$. Sendo $T(t)$ assintoticamente suave, existe um compacto $K \subset \overline{\gamma^+(C)}$ que atrai $\overline{\gamma^+(C)}$. Em particular K atrai $\gamma^+(C)$, então A atrai $\gamma^+(C)$. $\square$

Lema 1.1. *Se $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$ é assintoticamente suave e $T(t)$ é compacto dissipativo, então existe um compacto invariante que atrai compactos de X.*

Demonstração. Ver [10] $\square$

Lema 1.2. *Seja $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, um semigrupo assintoticamente suave e ponto dissipativo.*

(i) Se a órbita de qualquer compacto é limitado, então $T(t)$ é localmente compacto dissipativo.

(ii) Se a órbita de qualquer conjunto limitado é limitado, então $T(t)$ é limitado dissipativo.

Demonstração. (i) Seja B um conjunto limitado fechado que atrai pontos de X e

$$U = \{x \in B;\ \gamma^+(x) \subset B\}.$$

Então U atrai pontos de X e $\gamma^+(U)$ é limitado, pois $U \subset B$ e $\gamma^+(U) \subset B$. Note que

$$T(t)\gamma^+(U) \subset \gamma^+(U).$$

De fato, seja $x \in T(t)\gamma^+(U)$, então

$$x \in T(t_0) \bigcup_{x \in U} \gamma^+(x),\ t_0 \geq 0.$$

Então $x \in T(t_0)\gamma^+(x_0)$, para algum $x_0 \in U$. Assim

$$x = T(t_0)T(t)x_0, \quad \text{com} \quad t \geq 0.$$

Daí

$$\begin{aligned} x = T(t_0 + t)x_0 \ &\Rightarrow \ x \in \gamma^+(x_0) \\ &\Rightarrow \ x \in \bigcup_{x \in U} \gamma^+(x). \end{aligned}$$

Ou seja, $x \in \gamma^+(U)$. Sendo T assintoticamente suave e $T(t)\gamma^+(U) \subset \gamma^+(U)$, então existe um compacto $K \subset \overline{U}$ tal que K atrai $\overline{U}$. Como $U \subset \overline{U}$, em particular K atrai U. E mais, U atrai pontos de X. Então K atrai pontos de X. Logo o conjunto K atrai ele mesmo, então $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto. Se $J = \omega(K)$, então J é compacto invariante e atrai pontos de K, isto conclui a prova de (i).

Para provar (ii), suponha agora que a órbita de qualquer compacto é limitado. Primeiramente vamos provar que existe uma vizinhança V de J tal que $\gamma^+(V)$ é limitado. Suponha que não, então existe uma sequência $x_j \in X$ $(\in J)$ e uma sequência de números reais $t_j \to \infty$ e um $y \in J$ tal que $x_j \to y$ e $|T(t_j)x_j| \to \infty$, quando $j \to \infty$. Então $\overline{\{x_j,\ j \geq 1\}}$ é compacto, com

$$\gamma^+(\overline{\{x_j,\ j \geq 1\}})$$

ilimitado, pois $|T(t_j)x_j| \to \infty$, isto contradiz a hipótese. Assim, existe uma vizinhança V de J tal que $\gamma^+(V)$ é limitada. Como J atrai pontos de X e T é contínua, para $x \in X$ existe uma vizinhança O_x de x e um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(t)O_x \subset \gamma^+(V)$$

para $t \geq t_0$. Ou seja, $\gamma^+(V)$ atrai O_x. Para qualquer compacto $H \subset X$, existe uma cobertura finita aberta $\{C_1, \ldots, C_n\}$ tal que

$$H \subset \bigcup_{l=1}^{n} C_l.$$

Pelo que foi feito acima, para cada

$$x \in \bigcup_{l=1}^{n} C_l,$$

existe uma vizinhança O_x de x tal que $\gamma^+(V)$ atrai O_x. Logo $\gamma^+(V)$ atrai uma vizinhança de um conjunto compacto. Portanto, $T(t)$ é localmente compacto dissipativo. Como, por hipótese, as órbitas de conjuntos limitados é limitado, então as órbitas de conjuntos compactos é limitado. Pela demonstração acima, $T(t)$ é localmente compacto dissipativo, em particular, $T(t)$ é compacto dissipativo. Pelo Lema 1.1 existe um conjunto compacto invariante K que atrai os compactos de X. Definindo

$$A = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K,$$

temos que A é limitado e, pelo Teorema 1.11, dado qualquer conjunto limitado $C \in X$ tal que $\gamma^+(C)$ é limitado, então A atrai C. Portanto $T(t)$ é limitado dissipativo. $\square$

Teorema 1.12. *Se $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, é assintoticamente suave, ponto dissipativo e órbitas de conjuntos limitados é limitadas, então existe um atrator global A.*

Demonstração. Pela demostração do Lema 1.2, existe um compacto K que atrai os compactos de X. Definindo

$$A = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K,$$

pelo Teorema 1.11, A é compacto invariante maximal e dado qualquer conjunto limitado $C \subset X$ tal que $\gamma^+(C)$ é limitado, então A atrai C. Portanto, A é um atrator global. $\square$

A existência de um conjunto atrator implica em $T(t)$ ser assintoticamente suave. Mais precisamente, temos o resultado abaixo, retirado de [24].

Teorema 1.13. *Seja $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$ um semigrupo e $\mathcal{A}$ um atrator global, então o fluxo, $T(t)$, é assintoticamente suave.*

Demonstração. O resultado segue da existência do atrator $\mathcal{A}$. De fato, seja B um conjunto limitado fechado e positivamente invariante, então $B \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ pois do contrário $d(T(t)B, \mathcal{A}) > 0$, já que B é fechado e $\mathcal{A}$ é compacto. Mas sendo B limitado e positivamente invariante isso não ocorre pois $\mathcal{A}$ atrai B. Já que $\mathcal{A} \cap B$ é um fechado contido em compacto, segue que ele é compacto.

Além disso, se C é um conjunto limitado, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)(C \cap B) \subset (\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon$, para todo $t \geq t_0$, onde $(\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon$ é a ε-vizinhança de $\mathcal{A} \cap B$.

Com efeito, sendo $\mathcal{A}$ um atrator, para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe $t_0 \geq 0$ tal que, para todo $t \geq t_0$, $T(t)C \subset \mathcal{A}^{\varepsilon_1}$, então $T(t)(C \cap B) \subset \mathcal{A}^{\varepsilon_1} \cap B$. Portanto, é suficiente provar que $(\mathcal{A}^{\varepsilon_1} \cap B) \subset (\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon$ para algum ε_1 conveniente.

Como $(\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}})$ é compacto e $(\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}}) \cap B = \emptyset$, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$d((\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}}), B) > \varepsilon_2.$$

Assim, para cada $\varepsilon > 0$, escolha $\varepsilon_1 = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon_2\}$. Então, escrevendo

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}}) \cup (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{\varepsilon_1} \cap B &= \left[(\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}})^{\varepsilon_1} \cap B\right] \cup \left[((\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}})^{\varepsilon_1} \cap B\right] \\
&= \left[((\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}})^{\varepsilon_1} \cap B\right] \\
&\subset (\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon \cap B \\
&\subset (\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto quando $C = B$, temos que $\mathcal{A} \cap B$ atrai B. □

Definição 1.14. *Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de X e U um conjunto aberto contendo $\mathcal{B}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é* ***absorvente*** *em U se a órbita de qualquer conjunto limitado de U entra em $\mathcal{B}$ após um certo tempo, ou seja, dado $\mathcal{B}_0 \subset U$, $\mathcal{B}_0$ limitado, existe $t_1 > 0$ tal que $T(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$, para todo $t \geq t_1$. Também dizemos que $\mathcal{B}$* ***absorve*** *os conjuntos limitados de U.*

A existência de um atrator global $\mathcal{A}$ para um semigrupo $T(t)$ implica na existência de um conjunto limitado absorvente. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja V_ε a ε-vizinhança de $\mathcal{A}$. Então, para qualquer conjunto limitado $\mathcal{B}_0 \subset X$, temos

$$d(T(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \to 0,$$

quando $t \to \infty$. Assim, existe $t(\varepsilon) > 0$ tal que

$$d(T(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para} \quad t \geq t(\varepsilon),$$

ou seja, $T(t)\mathcal{B}_0 \subset V_\varepsilon$ para $t \geq t(\varepsilon)$. Portanto $\mathcal{A}$ é um conjunto limitado absorvente.

A recíproca da afirmação acima será verdadeira, ou seja, existência de um conjunto limitado absorvente implica na existência de um atrator global, se adicionarmos pelo menos uma das duas seguintes hipóteses:

(h1) Os operadores $T(t)$ são **uniformemente compactos** para t grande, isto é, para todo conjunto limitado $\mathcal{B}$ existe t_0 tal que

$$\bigcup_{t \geq t_0} T(t)\mathcal{B}$$

é relativamente compacto em X.

(h2) X é um espaço de Banach e para todo t, temos $T(t) = T_1(t) + T_2(t)$ onde os operadores $T_1(t)$ são uniformemente compactos para t suficientemente grande e para todo conjunto limitado $C \subset X$,

$$r_c(t) = \sup_{\varphi \in C} ||T_2(t)\varphi||_X \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Embora a hipótese (h2) implique na hipótese (h1), vamos demonstrar a existência de atrator global assumindo cada uma dessas hipóteses separadamente. Para isto, precisamos dos seguintes lemas:

Lema 1.3. *Suponhamos válida a hipótese (h2). Se (φ_n) é limitada e $t_n \to \infty$, então $T_2(t_n)\varphi_n \to 0$ e $T_1(t_n)\varphi_n$ é convergente se, e somente se, $T(t_n)\varphi_n$ converge (e terá limites iguais).*

Demonstração. Pela hipótese (h2), segue que

$$0 \leq ||T_2(t_n)\varphi_n||_X \leq r_c(t_n) = \sup_{\varphi \in C} ||T_2(t_n)\varphi||_X.$$

Sendo (φ_n) uma sequência limitada, então (φ_n) está contida em um conjunto limidado $C \subset X$. Calculando o limite, obtemos

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} ||T_2(t_n)\varphi_n||_X \leq \lim_{n \to \infty} r_c(t_n) = 0.$$

Assim

$$T_2(t_n)\varphi_n \to 0.$$

Sobre a segunda parte do lema, observe que, pelas propriedades de somas de sequências,

$$\lim_{n\to\infty} T(t_n)\varphi_n = \lim_{n\to\infty} T_1(t_n)\varphi_n + \lim_{n\to\infty} T_2(t_n)\varphi_n,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} T(t_n)\varphi_n = \lim_{n\to\infty} T_1(t_n)\varphi_n.$$

Portanto, $T_1(t_n)\varphi_n$ converge se, e somente se, $T(t_n)\varphi_n$ converge. □

Lema 1.4. *Se o semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$ satisfaz (h1) ou (h2), então, para qualquer conjunto $\mathcal{B}_0$ limitado e não vazio de X, $\omega(\mathcal{B}_0)$ é não vazio, compacto e invariante.*

Demonstração. Se a hipótese (h1) for verificada, este lema segue direto da Proposição 1.6. Suponha agora que apenas a hipótese (h2) seja verificada. Usando o Lema 1.3, temos que $\omega(\mathcal{B}_0)$ é igual ao conjunto

$$\omega_1(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{T\geq s} T_1(t)\mathcal{B}_0},$$

pois dado $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$, existe uma sequência $\varphi_n \in \mathcal{B}_0$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tais que

$$T(t_n)\varphi_n \to \varphi, \text{ quando } t \to \infty.$$

Devido ao Lema 1.3, $T_1(t_n)\varphi_n$ também vai convergir para φ. Note que a caracterização de conjunto ω-limite também pode ser aplicada para caracterizar os elementos de $\omega_1(\mathcal{B}_0)$. Daí $\varphi \in \omega_1(\mathcal{B}_0)$, provando que $\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega_1(\mathcal{B}_0)$. A inclusão contrária é análoga.

Note que os conjuntos dados por $\overline{\bigcup_{t\geq s} T_1(t)\mathcal{B}_0}$ são não vazios, fechados e diminuem (no sentido de inclusão) quando s cresce. Além disso, pela hipótese (h2), temos que $\overline{\bigcup_{t\geq t_0} T_1(t)\mathcal{B}_0}$ é compacto para t_0 suficientemente grande. Daí $\omega(\mathcal{B}_0)$ é não vazio e compacto.

Mostraremos agora que $\omega(\mathcal{B}_0)$ é invariante, isto é, $T(t)\omega(\mathcal{B}_0) = \omega(\mathcal{B}_0)$. Primeiramente, tome $\psi \in T(t)\omega(\mathcal{B}_0)$ dada por $\psi = T(t)\varphi$, $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. Existem sequências $\varphi_n \in \mathcal{B}_0$ e $t_n \to \infty$ tais que, usando as propriedades de semigrupos e de limite de sequência,

$$T(t)T(t_n)\varphi_n = T(t+t_n)\varphi_n \to T(t)\varphi = \psi.$$

Assim $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$, mostrando que $T(t)\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega(\mathcal{B}_0)$. Tome agora $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. Para $t_n - t \geq 0$, temos

$$T(t_n - t)\varphi_n = T_1(t_n - t)\varphi_n + T_2(t_n - t)\varphi_n.$$

Pela hipótese, como o conjunto dos pontos da sequência $T_1(t_n - t)\varphi_n$ é relativamente compacto, existirá uma subsequência convergente,

$$T_1(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi \text{ quando } n_i \to \infty.$$

Como $T_2(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to 0$ (pois é uma subsequência da sequência $T_2(t_n - t)\varphi_n$ que converge para 0), temos que

$$T(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi, \quad \text{quando } n_i \to \infty.$$

Daí $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$ e

$$T(t)\psi = \lim_{n_i \to \infty} T(t)T(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} = \varphi \in T(t)\omega(\mathcal{B}_0).$$

concluindo que

$$T(t)\omega(\mathcal{B}_0) = \omega(\mathcal{B}_0).$$

ou seja, $\omega(\mathcal{B}_0)$ é invariante. □

Lema 1.5. *Seja $\mathcal{U}$ um conjunto aberto, convexo e conexo e seja $K \subset \mathcal{U}$ um conjunto invariante compacto que atrai compactos sob o semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$. Então K é conexo.*

Demonstração. O fecho convexo de K (ver Apêndice A), $\overline{convK} = \mathcal{B}$, é compacto (veja [1], Teorema 5.35, p.185), conexo e está contida em $\mathcal{U}$, portanto K atrai $\mathcal{B}$. Suponha por absurdo que K não seja conexo. Daí existe uma cisão não trivial de K, isto é, existem A_1 e A_2 tais que $A_1 \cap K \neq \emptyset$, $A_2 \cap K \neq \emptyset$, $K \subset A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Como $K \subset \mathcal{B}$ e K é invariante, temos que

$$K = T(t)K \subset T(t)\mathcal{B}.$$

Daí $A_1 \cap T(t)\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $A_2 \cap S(t)\mathcal{B} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{B}$ é conexo e a imagem de aplicações contínuas de domínios conexos é também conexa, segue que $T(t)\mathcal{B}$ é conexa. Daí $A_1 \cup A_2$ não cobre $T(t)\mathcal{B}$, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in T(n)\mathcal{B}$ tal que $x_n \notin A_1 \cup A_2$. Se a hipótese (h1) for válida, esta sequência será relativamente compacta. Por outro lado, se somente a hipótese (h2) for válida, escrevemos x_n como $x_n = T_1(n)y_n + T_2(n)y_n$. Pela hipótese (h2) e pelo Lema 1.3, a sequência $T_1(n)y_n$ será relativamente compacta e $T_2(n)y_n \to 0$, implicando que x_n é uma sequência relativamente compacta. Como K atrai o conjunto dos pontos de x_n, vai existir uma subsequência de x_n que converge para um ponto $x \in K$. Este ponto x não pertence a $A_1 \cup A_2$, contradizendo a hipótese. $\square$

Estamos finalmente prontos para mostrar quando a existência de um conjunto absorvente implica a existência de um atrator.

Teorema 1.15. *Seja X um espaço métrico e $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, um C^r-semigrupo para algum $r \geq 0$. Suponha que $T(t)$ satisfaz a hipótese (h1) ou a hipótese (h2) e suponha que existam um conjunto aberto $\mathcal{U}$ e um subconjunto limitado $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{B}$ absorve $\mathcal{U}$. Então o conjunto $A = \omega(\mathcal{B})$ é o atrator compacto maximal em $\mathcal{U}$ que atrai os conjuntos limitados de $\mathcal{U}$. Mais ainda, se X é um espaço de Banach e $\mathcal{U}$ é convexo e conexo, então A também será conexo.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que a hipótese (h1) se verifica. Como $\bigcup_{t \geq t_0} T(t)\mathcal{B}$ é relativamente compacto, temos pela Proposição 1.6 que $\omega(\mathcal{B})$ é não vazio, compacto e invariante. Suponha, por contradição, que A não seja um atrator, ou seja, que para algum limitado $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{U}$, $T(t)\mathcal{B}_0$ não se aproxime de A, ou seja,

$$d(T(t)\mathcal{B}_0, A) \nrightarrow 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Daí existe um $\delta > 0$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que

$$d(T(t_n)\mathcal{B}_0, A) \geq \delta, \quad \forall\ n.$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá um $b_n \in \mathcal{B}_0$ tal que

$$d(T(t_n)b_n, A) \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Como $\mathcal{B}$ é absorvente, $T(t_n)\mathcal{B}_0$ estará contido em $\mathcal{B}$ para n suficientemente grande. Portanto, $T(t_n)b_n$ estará contido em $\mathcal{B}$ para todo $t_n \geq t_{n_0}$, para algum $t_{n_0} > 0$. Pela hipótese (h1), a sequência $T(t_n)b_n$ é relativamente compacta. Daí existe uma subsequência convergente tal que

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} T(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} T(t_{n_i} - t_{n_0})T(t_{n_0})b_{n_i}.$$

Como $T(t_{n_0})b_n \in \mathcal{B}$, segue que $\beta \in \omega(\mathcal{B}) = A$, ou seja,

$$d(T(t_{n_i})b_{n_i}, A) \to 0,$$

o que contradiz a hipótese de A não ser atrator. Mostraremos agora que A é maximal. Seja A' um atrator limitado tal que $A' \subset \mathcal{U}$. Daí, como A' é invariante e $\mathcal{B}$ é um conjunto absorvente, temos que para um t suficientemente grande, $A' = T(t)A' \subset \mathcal{B}$. Daí $A' = \omega(A') \subset \omega(\mathcal{B}) = A$, mostrando que $A' \subset A$, ou seja, A é maximal. A conexidade de A segue do Lema 1.5, concluindo a demonstração para o caso de supormos a hipótese (h1).

Suponha agora que apenas a hipótese (h2) se verifica. Pelo Lema 1.4, $\omega(\mathcal{B}) = A$ é não vazio, compacto e invariante. Mostraremos que A é um atrator. Suponhamos então, por absurdo, que A não seja atrator, ou seja, que para algum limitado $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{U}$, $d(T(t)\mathcal{B}_0, A) \not\to 0$ quando $t \to \infty$. Daí existe um $\delta > 0$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que

$$d(T(t_n)\mathcal{B}_0, A) \geq \delta, \quad \forall n.$$

Dai, para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá um $b_n \in \mathcal{B}_0$ tal que

$$d(T(t_n)b_n, A) \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Como $\mathcal{B}$ é absorvente, $T(t_n)\mathcal{B}_0$ estará contido em $\mathcal{B}$ a partir de um t_n. Portanto, $T(t_n)b_n$ estará contido em $\mathcal{B}$ a partir de um n_0 suficientemente grande. Pela hipótese (h2), a sequência $T_1(t_n)b_n$ é relativamente compacta. Daí, pelo Lema 1.3, $T(t_n)b_n$ é uma sequência relativamente compacta, portanto existe uma subsequência convergente tal que

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} T(t_{n_i})b_n = \lim_{n \to \infty} T(t_{n_i} - t_{n_0})T(t_{n_0})b_{n_0}.$$

Como $T(t_{n_0})b_{n_0} \in \mathcal{B}$, segue que $\beta \in \omega(\mathcal{B}) = A$, ou seja,

$$d(T(t_{n_i})b_{n_i}, A) \to 0,$$

contradizendo a hipótese, mostrando que $A = \omega(\mathcal{B})$ é, de fato, um atrator. Os resultados sobre a conexidade que faltam para concluir este teorema seguem do Lema 1.5. $\square$

1.3 Sistema Gradiente e Semicontinuidade Superior

Nesta seção definimos sistemas gradiente e apresentamos alguns resultados sobre semicontinuidade superior.

1.4 Sistema Gradiente

Definição 1.16. *Seja $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, $r \geq 1$ um C^r-semigrupo. Uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ é chamada um **funcional de Lyapunov** se:*

(i) $V(x)$ é limitado inferiormente;

(ii) $V(x) \to \infty$, quando $|x| \to \infty$;

(iii) $V(T(t)x)$ é não crescente em t para cada $x \in X$;

(iv) Se x é tal que $T(t)x$ esta definido para $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para $t \in \mathbb{R}$, então x é um ponto de equilíbrio, isto é, $T(t)x = x$, para todo $t \geq 0$.

Definição 1.17. *Dizemos que um semigrupo $T(t) : X \to X$ é **fortemente contínuo** se*

$$\lim_{t \to 0^+} ||T(t)x - x|| = 0,$$

para cada $x \in X$.

Definição 1.18. *Um C^r-semigrupo fortemente contínuo $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, $r \geq 1$, é um **sistema gradiente** se:*

(i) Cada órbita positiva limitada é precompacta;

(ii) Existe um funcional de Lyapunov para $T(t)$.

Para melhor entendimento da definição, demonstramos o seguinte resultado:

Proposição 1.19. *Seja $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, um C^r-semigrupo e E o conjunto dos pontos de equilíbrio de $T(t)$. Se $T(t)$ é um sistema gradiente, então $\omega(x) \subset E$, para cada $x \in X$. Se $\gamma^-(x)$ é uma órbita relativamente compacta, então $\alpha(x) \subset E$ para $x \in X$.*

Demonstração. Seja $T(t)$ um sistema gradiente, então existe um funcional de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$. Sendo $\gamma^+(x)$ relativamente compacta, o conjunto $\{V(T(t)x), t \geq 0\}$ é limitado inferiormente, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$c < V(T(t)x), \quad \forall\, t \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall\, x \in X.$$

Sendo $V(T(t)x)$ não crescente, seque que

$$V(T(t)) \to c,$$

quando $t \to \infty$. Pela Proposição 1.6, $\omega(x)$ é compacto e invariante. Considere $T(t)y$, com $t \geq 0$ e $y \in \omega(x)$, então existe $t_n \to \infty$ tal que $T(t_n)x \to y$. Daí,

$$T(t)T(t_n)x \to T(t)y,$$

sendo V contínua, obtemos

$$V(T(t)T(t_n)x) \to V(T(t)y).$$

Assim

$$\begin{aligned} V(T(t)y) &= \lim_{n\to\infty} V(T(t)T(t_n)x) \\ &= \lim_{n\to\infty} V(T(t+t_n)x) \\ &= c, \end{aligned}$$

isto é, $V(T(t)y) = c$ para $t \in \mathbb{R}$ e todo $y \in \omega(x)$. Em particular, para $t = 0$, temos $V(y) = c$. Logo, $V(T(t)y) = V(y)$. Sendo V um funcional de Lyapunov segue que y é um ponto de equilíbrio. Portanto $y \in E$.

Suponha que $\gamma^-(x)$ é uma órbita relativamente compacta, com $x \notin E$. Novamente pela Proposição 1.6, $\alpha(x)$ é compacto. Seja $y \in \alpha(x)$, então existe $t_n \to -\infty$ tal que $T(t_n)x \to y$, quando $n \to \infty$. Tome t_n tal que $t_n - t_{n-1} \geq 1$, para todo n. Então, para qualquer $t \in (0,1)$, sendo $V(T(t)x)$ não crescente,

$$V(T(t_{n-1})x) \leq V(T(t_n + t)x) \leq V(T(t_n)x),$$

para todo n. Daí,

$$V(T(t_n + t)x) \to V(y),$$

quando $n \to \infty$. Como

$$V(T(t_n + t)x) \to V(T(t)y),$$

quando $n \to \infty$. Segue que $V(T(t)y)) = V(y)$. Portanto $y \in E$. $\square$

1.4.1 Semicontinuidade Superior

Suponha Λ um espaço métrico, X um espaço de Banach e que, para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$T(t, \lambda) : X \to X$$

é um C^r-semigrupo com $T(t, \lambda)x$ contínua em t, λ, x. Se para cada $\lambda \in \Lambda$, $\{T(t, \lambda), t \geq 0\}$ é assintoticamente suave, então para qualquer conjunto fechado limitado $B \subset X$ para o qual $T(t, \lambda)B \subset B$, $t \geq 0$ existe um conjunto compacto $K_\lambda(B) \subset B$ tal que $K_\lambda(B)$ atrai B sobre $T(t, \lambda)$.

Definição 1.20. *Dizemos que a família de semigrupos*

$$\{T(t, \lambda),\ t \geq 0\}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

é ***coletivamente assintoticamente suave****, se*

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda(B)$$

é compacto.

A prova do teorema abaixo é obtida de maneira análoga a prova do Teorema 2.5.2 de [10].

Teorema 1.21. *Suponha $T(t, \lambda) : X \to X$, $t \geq 0$, é um C^r-semigrupo para cada $\lambda \in \Lambda$ e suponha existir um conjunto limitado $B \subset X$ independente de λ tal que B atrai conjuntos compactos de X sobre $T(t, \lambda)$. Se a família de semigrupos é coletivamente assintoticamente suave, então o conjunto compacto invariante maximal A_λ de T_λ é semicontínua superiormente em λ, isto é,*

$$d(A_\lambda, A_{\lambda_0}) \to 0, \quad \lambda \to \lambda_0.$$

Teorema 1.22. *Suponha $T(t, \lambda) : X \to X$, $t \geq 0$, é um C^r-semigrupo para cada $\lambda \in \Lambda$ e existe um conjunto limitado B que atrai pontos de X sobre $T(t, \lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$ e, para qualqer limitado U, o conjunto*

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{t \geq 0} T(t, \lambda) U$$

é limitado. Se a família de semigrupo é coletivamente assintoticamente suave, então família de atratores globais é semicontínua superiormente em λ.

Demonstração. Suponha que H seja um conjunto compacto de X. Então A_λ atrai H, para cada $\lambda \in \Lambda$. Sendo cada A_λ limitado, então

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{t \geq 0} T_\lambda(t) A_\lambda$$

é limitado. Note que, para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$T_\lambda(t) A_\lambda = A_\lambda, \quad t \geq 0.$$

Assim

$$V = \bigcup_{\lambda \in \lambda} A_\lambda,$$

atrai H. Logo, V é um conjunto limitado que atrai os compactos de X. Pelo Teorema 1.21 A_λ é semicontínua superiormente. □

1.5 Teorema de Existência e Unicidade em Espaços de Banach

Nesta seção, seguimos resultados de [2], [7], [15] e [26], os quais são repetidos aqui para deixar o texto mais didático.

Considere, em um espaço de Banach X, a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.6}$$

sendo

$$\begin{aligned} f : I \times X &\rightarrow X \\ (t, x) &\mapsto f(t, x), \end{aligned}$$

onde f é uma função contínua, $I \subset \mathbb{R}$ e $\dot{x}$ denota a derivada de x com relação a variável t.

Uma função continuamente diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita solução de (1.6) no intervalo I se:

1. o gráfico de ϕ em I, isto é, $\{(t, \phi(t)); t \in I\}$ está contido no domínio de f;
2. $\dfrac{d}{dt}\phi(t) = f(t, \phi(t))$ para todo $t \in I$.

O problema de Cauchy para (1.6) com condições iniciais (t_0, x_0) é denotado por

$$\dot{x} = f(t, x), \;\; x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in I \times X \tag{1.7}$$

Lema 1.6. *O problema (1.7) é equivalente à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.8}$$

Demonstração. De fato, integrando de t_0 a t ambos os lados de (1.7), temos

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Daí, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Portanto,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Reciprocamente, derivando (1.8) temos

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}x(t_0) + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Logo,

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \;\; x(t_0) = x_0.$$

□

Quando $X = \mathbb{R}^n$, temos o clássico Teorema de Picard que garante existência e unicidade para (1.7). Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.23 (Teorema de Picard)**.** *Seja* $\Omega = I_a \times B_b$*, onde* $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; ||x - x_0|| \leq b\}$*. Suponha* $f : \Omega :\rightarrow \mathbb{R}^n$ *contínua e lipschitziana na segunda variável. Se* $|f| \leq M$ *em* Ω *com* $M \in \mathbb{R}_+$*, então existe uma e somente uma solução de (1.7) em* I_α*, onde,* $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Demonstração. Veja [25]. □

No que segue, discutiremos um resultado que generaliza o Teorema de Picard.

Teorema 1.24 (Existência Local)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Suponha que numa vizinhança do ponto (t_0, x_0) a função f é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz na segunda variável, isto é, existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant M\|x - y\|. \tag{1.9}$$

Então existe uma vizinhança de t_0 tal que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f\,(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

tem uma única solução.

Demonstração. Seguimos nesta demonstração a idéia dada por Daleckiĭ e Kreĭn em [7]. Como f é contínua em t, fixado $\eta > 0$ e $x \in X$ tal que $||x - x_0|| < \eta$, então dado $\xi > 0$ existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\|f\,(t,x) - f(t_0,x)\| \leq \xi \tag{1.11}$$

sempre que $|t - t_0| \leq \varepsilon$. Usando a hipótese de f ser Lipschitz na segunda variável, temos

$$\|f\,(t,x) - f\,(t,x_0)\| \leqslant M\|x - x_0\| \leq M\eta. \tag{1.12}$$

Note que, pela norma da soma

$$\|(t,x) - (t_0,x_0)\| = \|(t - t_0, x - x_0)\| = |t - t_0| + \|x - x_0\| \leq \varepsilon + \eta. \tag{1.13}$$

Usando (1.11) e (1.12), obtemos

$$\begin{aligned} \|f\,(t,x) - f\,(t_0,x_0)\| &= \|f\,(t,x) - f\,(t,x_0) + f\,(t,x_0) - f\,(t_0,x_0)\| \\ &\leq \|f\,(t,x) - f\,(t,x_0)\| + \|f\,(t,x_0) - f\,(t_0,x_0)\| \\ &\leq M\eta + \xi. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $\tau = M\eta + \xi$, segue que

$$\|f\,(t,x) - f\,(t_0,x_0)\| \leq \tau,$$

sempre que

$$\|(t,x) - (t_0,x_0)\| \leq \varepsilon + \eta,$$

isto é, f é contínua numa vizinhança de (t_0, x_0), por conseguinte f é limitada nesta vizinhança (veja [13] Teorema 2 p.225). Logo, existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|f\,(t,x)\| \leq M_1 < \infty. \tag{1.14}$$

Agora, seja $\alpha = \min\left(\varepsilon, \frac{\eta}{M_1}\right)$ e denote por $C_\alpha\,(X)$ espaço de Banach das funções contínuas x que são definidas para $|t - t_0| \leq \alpha$ assumindo valores em X, ou seja,

$$\begin{aligned} x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] &\rightarrow X \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

com norma

$$|\!|\!| x |\!|\!| = \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \|x(t)\|. \tag{1.15}$$

Seja

$$\mathbf{B}_\eta = \left\{x \in C_\alpha(X) : |\!|\!| x - x_0 |\!|\!| \leq \eta\right\}.$$

Seja T um operador sobre $\mathbf{B}_\eta$ dado por

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\,(s, x(s))ds.$$

Note que $T(\mathbf{B}_\eta) \subset \mathbf{B}_\eta$. De fato, dado $x \in \mathbf{B}_\eta$ temos que

$$\|(Tx)(t) - x_0\| \quad \leq \quad \alpha M_1. \tag{1.16}$$

De (1.15) e (1.16) temos

$$\begin{aligned} |\!|\!| Tx - x_0 |\!|\!| &= \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \|(Tx)(t) - x_0\| \\ &\leq \alpha M_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\!|\!| Tx - x_0 |\!|\!| \leq \frac{\eta}{M_1} M_1 = \eta.$$

Portanto,

$$T : \mathbf{B}_\eta \subset X \rightarrow \mathbf{B}_\eta.$$

Para simplificar a notação, vamos supor que $t \geq t_0$. Para $t \leq t_0$ a demonstração é análoga.

Para x_1 e x_2 em $\mathbf{B}_\eta$, da hipótese de f ser Lipschitz, temos

$$\begin{aligned}
\|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f\,(s, x_2(s)) - f\,(s, x_1(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M\|x_2(s) - x_1(s)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M|\!|\!|x_2 - x_1|\!|\!| ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|Tx_2(t) - Tx_1(t)\| \leq M(t - t_0)|\!|\!|x_2 - x_1|\!|\!|. \tag{1.17}$$

Estimando agora a composição $\|(T^2x_2)(t) - (T^2x_1)(t)\|$ e usando (1.17) obtemos

$$\begin{aligned}
\|T(Tx_2)(t) - T(Tx_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s, Tx_2(s)) - f\,(s, Tx_1(s))] ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, Tx_2(s)) - f\,(s, Tx_1(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M\|(Tx_2)(s) - (Tx_1)(s)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} MM(s - t_0)|\!|\!|x_2 - x_1|\!|\!| ds \\
&= M^2|\!|\!|x_2 - x_1|\!|\!| \int_{t_0}^{t} (s - t_0) ds \\
&\leq M^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} |\!|\!|x_2 - x_1|\!|\!|.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|(T^2x_2)(t) - (T^2x_1)(t)\| \leq M^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} |\!|\!|x_2 - x_1|\!|\!|.$$

Seguindo este procedimento, para a n-ésima composição, teremos

$$\|(T^nx_2)(t) - (T^nx_1)(t)\| \leq \frac{1}{n!} M^n (t - t_0)^n |\!|\!|x_2 - x_1|\!|\!|.$$

Portanto,

$$|\!|\!|(T^nx_2) - (T^nx_1)|\!|\!| \;\leq \frac{(M\alpha)^n}{n!} |\!|\!|x_2 - x_1|\!|\!|.$$

Como, para n suficientemente grande, $0 < \frac{(M\alpha)^n}{n!} < 1$, pois $n!$ cresce mais rapidamente do que $(M\alpha)^n$, segue que o operador T possui um único ponto fixo, isto é, existe um único $x \in \mathbf{B}_\eta$ tal que $(Tx)(t) = x(t)$. Logo,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds \quad \text{e} \quad x(t_0) = x_0.$$

Portanto, pelo Lema 1.6 segue que $x(t)$ satisfaz (1.7). $\square$

Observação 1.4. *O Teorema* 1.24 *afirma apenas a existência de soluções em uma certa vizinhança do ponto* t_0*, mas, tendo construído uma solução no intervalo* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$*, podemos tentar estender um pouco mais adiante. É óbvio que podemos continuar tal procedimento indefinidamente se, por exemplo, as condições (*1.9*) e (*1.14*) são satisfeitas para todo* t *e* $x \in X$ *com mesmas constantes* M *e* M_1*. Em particular se as condições (*1.9*) e (*1.14*) estão satisfeitas para todo* $t \in [\alpha, \infty)$*,* $\|x - x_0\| \leq \eta$*, para algum* $\alpha \in \mathbb{R}$*, e a solução* x *de (*1.6*) é tal que* $\|x(t) - x_0\| \leq \eta_0 < \eta$*, então podemos estender indefinidamente quando* $t \to \infty$*.*

Se impusermoss exigências de caráter global sobre f, podemos conseguir soluções globais sem hipótese prévia no seu comportamento (veja [7]).

Teorema 1.25 (Existência Global)**.** *Suponha que exista um domínio* $[a, b] \times X$ *em que a função* f *é contínua em* t *e satisfaz a condição de Lipschitz na segunda variável. Então para todo* $(t_0, x_0) \in [a, b] \times X$*, o problema de Cauchy (*1.10*) possui uma única solução* $\phi : [a, b] \to X$ *tal que* $x = \phi(t)$ *.*

Demonstração. A prova é análoga à prova do Teorema 1.24. Basta notar que:

1. a hipótese do teorema implica na limitação de f em $[a, b] \times S$, onde S é um subconjunto compacto arbitrário de X, e que

2. o papel de $\mathbf{B}_\eta$ é feito pelo espaço $C(X)$, das funções contínuas $x : [a, b] \to X$ munido da norma
$$|||x||| = \sup_{t \in [a,b]} \|x(t)\|.$$

Portanto, segue-se o resultado. □

Observação 1.5. *Note que no caso da equação (1.6) ser autônoma, ou seja,* f *não depende explicitamente de* t*, então* f *é contínua em* t *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e, portanto, os Teoremas 1.24 e 1.25 se aplicam. Em particular, se* f *é globalmente Lipschitz, temos que existe uma única solução global do problema de Cauchy (1.10),(veja [2]).*

Para o caso particular de sistemas autônomos, temos o clássico resultado, devido a Cauchy, Lipschitz e Picard, dado abaixo:

Teorema 1.26 (Cauchy-Lipschitz-Picard, [6])**.** *Sejam X um espaço de Banach e $F : X \to X$ uma aplicação tal que*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in X \quad (L \in \mathbb{R}_+).$$

Então, para todo $x_0 \in X$, existe $x \in C^1([0, \infty), X)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Demonstração. Pelo Lema 1.6, resolver (1.18) é equivalente a achar $x \in C^1([0, \infty), X)$ tal que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds. \tag{1.19}$$

Defina,

$$\mathbf{E} = \{x \in C^1([0, \infty), X) : \sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|x(t)\| < \infty\},$$

para alguma constante $k > 0$, a ser fixada posteriormente.

Afirmação 1: $\mathbf{E}$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|x\|_{\mathbf{E}} = \sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|x(t)\|, \quad k > 0.$$

De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbf{E}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_n\|_{\mathbf{E}} = \sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|x_m(t) - x_n(t)\| < \varepsilon, \quad \text{para} \quad m, n > n_0. \tag{1.20}$$

Daí,

$$e^{-kt}\|x_m(t) - x_n(t)\| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad m, n > n_0, \quad t \geq 0. \tag{1.21}$$

Para cada $t \in [0, \infty)$, fixado, segue de (1.21) que a sequência $(x_1(t), x_2(t), \ldots)$ é de Cauchy em X. Assim, existe $x^t \in X$ tal que

$$x_n(t) \to x^t \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Defina

$$x : [0, \infty) \to X,$$

tal que

$$x(t) = x^t = \lim_{n \to \infty} x_n(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Observe que $x \in \mathbf{E}$ e $x_n \to x$ em $\mathbf{E}$. De fato, começamos notando que, como x_n é uma sequência de Cauchy em $\mathbf{E}$, x_n é limitada em $\mathbf{E}$. De fato, fixando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então

$$\|x_m - x_n\|_{\mathbf{E}} < 1,$$

ou seja, se $n \geq n_0$ então

$$\|x_{n_0} - x_n\|_{\mathbf{E}} < 1,$$

o que mostra que a sequência é limitada por $\max\{\|x_0\|_{\mathbf{E}}, ..., \|x_{n_0-1}\|_{\mathbf{E}}, \|x_{n_0}\|_{\mathbf{E}} + 1\}$. Daí, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{\mathbf{E}} &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x_n(t)\| \\ &\leq c. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de supremo, temos

$$\begin{aligned} e^{-kt}\|x_n(t)\| &\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x_n(t)\| \\ &= \|x_n\|_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$e^{-kt}\|x_n(t)\| \leq c,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ e $k > 0$ fixo. Passando ao limite nesta última desigualdade, quando $n \to \infty$, obtemos

$$e^{-kt}\|x(t)\| \leq c.$$

Donde,

$$\|x\|_E = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\| \leq c,$$

portanto, $x \in \mathbf{E}$ Para concluírmos a afirmação é suficiente verificarmos que

$$x_n \to x, \quad \text{uniformemente em} \quad [0, \infty).$$

Para isso, note que, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m(t) - x_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.22}$$

para todo $m, n \geq n_0$ e qualquer $t \in [0, \infty)$. Então, fazendo $m \to \infty$ em (1.22) concluímos que, para $n > n_0$

$$\|x(t) - x_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para todo $t \in [0,\infty)$, ou seja $x_n \to x$ uniformemente em $[0,\infty)$.

Além disso, para todo $x \in \mathbf{E}$, a função

$$(\Phi x)(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds,$$

pertence a $\mathbf{E}$. De fato,

1. a continuidade de Φ segue do fato de termos uma soma de funções contínuas.

2. mostraremos que $\|\Phi(x)\|_{\mathbf{E}} < \infty$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\|_{\mathbf{E}} &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|(\Phi x)(t)\| \\ &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\left\|x_0 + \int_0^t F(x(s))ds\right\|. \end{aligned}$$

Daí,

$$\|\Phi(x)\|_{\mathbf{E}} \leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x_0\| + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\left\|\int_0^t F(x(s))ds\right\|.$$

A primeira parcela do lado direito desta última desigualdade claramente é finita. Para mostrarmos a finitude da segunda parcela, começamos observando que,

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\left\|\int_0^t F(x(s))ds\right\| \leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds.$$

Mas, usando a desigualdade triangular, temos

$$\int_0^t \|F(x(s)) - F(0) + F(0)\|ds \leq \int_0^t \|F(x(s)) - F(0)\|ds + \int_0^t \|F(0)\|ds,$$

e usando a propriedade de F ser lipschitziana (com constante de Lipschitz L) no primeiro termo após a desigualdade, temos

$$\int_0^t \|F(x(s)\|ds \leq \int_0^t L\|x(s)\|ds + \int_0^t \|F(0)\|ds.$$

Como $\|F(0)\|$ não depende de s, segue que

$$\int_0^t \|F(x(s)\|ds \leq \int_0^t L\|x(s)\|ds + \|F(0)\|t.$$

Multiplicamos a expressão acima pelo número positivo e^{-kt} (onde k será determinado posteriormente) obtemos,

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \leq \int_0^t e^{-kt}L\|x(s)\|ds + e^{-kt}\|F(0)\|t.$$

Daí

$$e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \leq \int_0^t Le^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|x(s)\|ds + e^{-kt}\|F(0)\|t. \tag{1.23}$$

Considere o conjunto

$$G = \{e^{-kt}\|F(0)\|t; \quad t \geq 0\}.$$

Este conjunto é limitado superiormente por $\frac{\|F(0)\|}{ke}$. Com efeito, considere a função $g : [0, \infty) \to X$ definida como

$$g(t) = e^{-kt}\|F(0)\|t.$$

Derivando com relação a t, temos,

$$g'(t) = \frac{\|F(0)\| - \|F(0)\|tk}{e^{kt}},$$

o que implica que g tem um máximo local em $t = \frac{1}{k}$. Como a função g está definida em um domínio conexo, é contínua, $g'(t) > 0$, para todo $t < \frac{1}{k}$ e $g'(t) < 0$, para todo $t > \frac{1}{k}$, segue que este máximo é global, implicando que G é um conjunto limitado superiormente. Portanto $\sup G$ existe e é finito, o qual denotamos por m.

Daí, aplicando o sup em ambos os lados de (1.23) temos

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds &\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t Le^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|x(s)\|ds + m. \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}\int_0^t e^{-kt}e^{ks}ds + m \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}e^{-kt}\int_0^t e^{ks}ds + m \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}e^{-kt}\left[\frac{1}{k}e^{ks}\Big|_0^t\right] + m \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}e^{-kt}\left[\frac{e^{kt}}{k} - \frac{1}{k}\right] + m \\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}\left[\frac{1}{k} - \frac{e^{-kt}}{k}\right] + m.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \leq L\|x\|_{\mathbf{E}}\frac{1}{k} + m < \infty.$$

Afirmação 2: Se escolhermos $k > L$, Φ é uma contração.

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x(s)) - \Phi(y(s))\| &= \left\| \int_0^t [F(x(s)) - F(y(s))] ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|F(x(s)) - F(y(s))\| ds \\
&\leq \int_0^t L\|x(s) - y(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Daí, multiplicando ambos os lados por e^{-kt} e procedendo como em (ii), obtemos

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{L}{k}\|x - y\|_{\mathbf{E}}.$$

Portanto, se $k > L$, Φ é uma contração, logo possui um único ponto fixo x, o qual satisfaz (1.19) e consequentemente satisfaz (1.18).

Unicidade: Sejam x e $\bar{x}$, duas soluções de (1.18). Sendo

$$\varphi(t) = \|x(t) - \bar{x}(t)\|,$$

temos, por (1.19),

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \|x(t) - \bar{x}(t)\| \\
&\leq \int_0^t \|F(x(s)) - F(\bar{x}(s))\| ds \\
&\leq L \int_0^t \|x(s) - \bar{x}(s)\| ds \\
&= L \int_0^t \varphi(s) ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(t) \leq L \int_0^t \varphi(s) ds, \quad \forall, t \geq 0.$$

Portanto, a unicidade segue do Lema de Gronwall. □

Lema 1.7 (Lema de Gronwall)**.** *Sejam u, v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que para $\alpha \geq 0$ satisfazem a desiguadade*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^b v(s)u(s) ds, \quad t \in [a, b]. \tag{1.24}$$

Então

$$u(t) \leq \alpha \; exp \left(\int_a^b v(v) \right) ds.$$

Em particular, se $\alpha = 0$, então $u \equiv 0$.

Demonstração. Suponha $\alpha > 0$. Seja

$$w(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds.$$

Note que,

$$w(a) = \alpha \quad \text{e} \quad w(t) \geq \alpha > 0. \tag{1.25}$$

Derivando w, obtemos

$$w'(t) = v(t)u(t).$$

Usando a expressão dade em (1.24), obtemos

$$w'(t) \leq v(t)w(t).$$

Usando (1.25) podemos escrever a última expressão na forma

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq v(t).$$

Integrando de a ate t, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_a^t \frac{w'(s)}{w(s)}ds \leq \int_a^t v(s)ds \quad &\Rightarrow \quad ln(w(s))\Big|_a^t \leq \int_a^t v(s)ds \\
&\Rightarrow \quad ln(w(t)) - ln(w(a)) \leq \int_a^t v(s)ds \\
&\Rightarrow \quad ln\left(\frac{w(t)}{w(a)}\right) \leq \int_a^t v(s)ds \\
&\Rightarrow \quad ln\left(\frac{w(t)}{\alpha}\right) \leq \int_a^t v(s)ds.
\end{aligned}$$

"Aplicando" exponencial em ambos os menbros, obtemos

$$\frac{w(t)}{\alpha} \leq exp\left(\int_a^t v(s)ds\right).$$

Logo

$$w(t) \leq \alpha\ exp\left(\int_a^t v(s)ds\right).$$

Se $\alpha = 0$, sabemos que o resultado é válido para todo $\alpha' > 0$. Isto é,

$$u(t) \leq \alpha' \left(\int_a^t v(s)ds\right).$$

Fazendo $\alpha' \to \alpha = 0$, obtemos

$$\lim_{\alpha' \to 0} u(t) \leq \lim_{\alpha' \to 0} \alpha'\ exp\left(\int_a^t v(s)ds\right) \Rightarrow u(t) \leq 0.$$

Sendo $u(t)$ não negativa segue que $u(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$. Portanto $u \equiv 0$. $\square$

Proposição 1.27. *Sendo $F : X \to X$ Lipschitz, ou seja, existe $M > 0$ tal que*

$$||F(x) - F(y)|| \leq M||x - y||,$$

então a solução de $x' = F(x)$ é contínua com relação a condição inicial.

Demonstração. Sejam $x(t, x_0)$ e $x(t, x_1)$ soluções de $x' = F(x)$ com condições iniciais x_0 e x_1, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} ||x(t, x_0) - x(t, x_1)|| &\leq ||x_0 - x_1|| + \int_{t_0}^{t} ||F(x(s, x_0)) - F(x(s, x_1))||ds \\ &\leq ||x_0 - x_1|| + \int_{t_0}^{t} M||x(s, x_0) - x(s, x_1)||. \end{aligned}$$

Logo, usando o Lema de Gronwall,

$$||x(t, x_0) - x(t, x_1)|| \leq Me^{t-t_0}||x_0 - x_1||.$$

□

Observação 1.6. *Quando a função F é da forma*

$$F(x) = -Ax + f(x),$$

onde $A \in \mathcal{L}(M)$, a solução de $x' = F(x)$ é dada por

$$x(t, x_0) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(x(s))ds \tag{1.26}$$

De fato, multiplicando por e^{At}, temos

$$e^{At}x' + e^{At}Ax = e^{At}f(x).$$

Note que

$$\frac{d}{dt}(e^{At}x) = e^{At}x' + e^{At}Ax,$$

assim

$$\frac{d}{dt}(e^{At}x) = e^{At}f(x).$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}(e^{As}x)dt = \int_{t_0}^{t} e^{As}f(x(s))dt.$$

Daí,

$$e^{At}x - e^{At_0}x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{As} f(x(s))dt.$$

Logo

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s-t_0)} f(x(s))dt.$$

A equação (1.26) é chamada de ***formula de variação das constantes****.*

Observação 1.7. *Definindo a família de operadores*

$$\begin{aligned} T(t):\ & X \to X \\ & x \mapsto T(t)x, \end{aligned}$$

onde $T(t)x = \varphi(t,x)$*, sendo* $\varphi(t,x)$ *a solução de* $x' = F(x)$ *que vale* x_0 *quando* $t = t_0$*, define um* C^0*-semigrupo. De fato, começamos observando que*

$$T(0)x = \varphi(0,x) = x, \quad \forall x \in X.$$

Logo $T(0) = I$*. Já que, por unicidade de solução,*

$$\varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x)),$$

segue que

$$T(t+s)x = T(t)\varphi(s,x) = T(t)T(s)x, \quad \forall x \in X,$$

ou seja,

$$T(t+s) = T(t)T(s)$$

Além disso, usando a Proposição 1.27, obtemos que $T(t)x$ *é contínua.*

Capítulo 2

Existência de Atratores Globais para Campos Neurais

Neste capítulo, seguindo as técnicas de [22] e [23], estudamos a existência de um atrator global para o fluxo da equação de campos neurais em $\mathbb{R}^N$.

2.1 Introdução

Consideramos a equação de evolução não-local

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + J * (f \circ u)(x,t) + h, \quad h > 0, \tag{2.1}$$

onde $u(x,t)$ é uma função real definida em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$, h é uma constante positiva, $J \in C^1(\mathbb{R}^N)$ é uma função não negativa par de suporte na bola de centro na origem e raio 1, e f é uma função não negativa não-decrescente. O símbolo $*$ acima denota o produto convolução em $\mathbb{R}^N$, dado por

$$(J * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(y)dy.$$

A equação (2.1) foi deduzida por Wilson e Cowan, para modelar a atividade neuronal. A função $u(x,t)$ denota o potêncial da membrana na posição $x \in \mathbb{R}^N$ e no tempo $t \geq 0$. Realisticamente, N é igual a 1, 2 ou 3, mas não restringimos os cálculos a estes casos pois todas as estimativas são também validas para $N > 3$. A função conexão $J(x)$ determina a ligação entre os elementos na posição x e na posição y. A função não negativa e não-decrescente $f(u)$ dá a taxa de atividade neural correspondendo a um nível de atividade u. Os neurônios no ponto x são ditos ativos se $f(u(x,t)) > 0$. O parâmetro h denota um estímulo externo aplicado uniformemente em todo o campo neural.

Uma solução de equilíbrio de (2.1) é uma solução que é constante com relação a t. Assim, se u é uma solução de equilíbrio de (2.1), então

$$-u(x) + J * (f \circ u)(x) + h = 0.$$

Logo u satisfaz

$$u(x) = J * (f \circ u)(x) + h.$$

Em particular, se u_0 é uma solução de equilibrio constante, temos que u_0 satisfaz

$$u_0 = ||J||_{L^1} f(u_0) + h.$$

2.2 Boa Posição

Nesta seção provamos que, se f for Lipschitz, o problema de Cauchy dado por (2.1) está bem posto em $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$, com soluções globalmente definidas. Para isto, vamos assumir as seguintes hipóteses sobre as funções f e ρ:

(H1) a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitz, isto é, existe $k_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k_1 |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

(H2) $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, par, positiva com $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx = 1$ e existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\sup\left\{\rho(x) : x \in \mathbb{R}^N, |x - y| \leq 1\right\} \leq K\rho(y), \quad \forall \ y \in \mathbb{R}^N.$$

De (2.2), obtemos

$$|f(x)| \leq k_1|x - y| + |f(y)|.$$

Em particular,

$$|f(x)| \leq k_1|x| + k_2, \tag{2.3}$$

onde $k_2 = |f(0)|$.

Consideramos o fluxo gerado por (2.1) no espaço $L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$, definido por

$$L^p(\mathbb{R}^N,\rho)=\left\{u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N);\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^p\rho(x)dx<+\infty\right\},$$

com norma

$$||u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^p\rho(x)dx\right)^{1/p}. \tag{2.4}$$

Note que com a norma dada em (2.4), a função constante igual a 1 satisfaz,

$$\begin{aligned} ||1||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}1^p(x)\rho(x)dx\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}\rho(x)dx\right)^{1/p}\\ &= 1. \end{aligned}$$

O Correspondente espaço de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^N,\rho)$ de ordem superior é o espaço das funções $u\in L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$ que tem derivadas até a ordem k que estão também em $L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$, com norma

$$||u||_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N,\rho)}=\left(\sum_{i=1}^{k}\left|\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^N,\rho)}\right)^{1/2}.$$

Observação 2.1. *Como protótipo para a função ρ temos, para o caso unidimensional,*

$$\rho(x)=\frac{1}{\pi}(1+x^2)^{-1},$$

onde a hipótese (H2) é válida com $K=3$, (veja [2] e [18]).

Lema 2.1. *Suponha que vale a hipótese (H2), então*

$$||J*u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}\leq K^{1/p}||J||_{L^1}||u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}.$$

Demonstração. Sendo J limitado e de suporte compacto, $(J*u)(x)$ está bem definida para $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Temos então

$$||J*u||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}=\int_{\mathbb{R}^N}|(J*u)(x)|^p\rho(x)dx.$$

Como

$$(J*u)(x)=\int_{\mathbb{R}^N}J(x-y)u(y)dy,$$

segue que

$$\begin{aligned} \|J*u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &= \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^N}J(x-y)u(y)dy\right|^p\rho(x)dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|J(x-y)||u(y)|dy\right)^p\rho(x)dx. \end{aligned}$$

Usando que

$$\frac{p-1}{p}+\frac{1}{p}=1, \tag{2.5}$$

obtemos

$$||J*u||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|J(x-y)|^{(p-1)/p}|J(x-y)|^{1/p}|u(y)|dy\right)^p\rho(x)dx.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|J*u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^N}|J(x-y)|dy\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|J(x-y)||u(y)|^p dy\right)^{1/p}\right)^p\rho(x)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}||J||^{p-1}_{L^1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|J(x-y)||u(y)|^p dy\right)\rho(x)dx\\
&= ||J||^{p-1}_{L^1}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|J(x-y)||u(y)|^p dy\ \rho(x)dx.
\end{aligned}$$

Denotando a bola fechada de centro y e raio 1 por $B[y,1]$, segue que

$$\begin{aligned}
\|J*u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &\leq \|J\|^{p-1}_{L^1}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{B[y,1]}J(x)\rho(x)dx\right)|u(y)|^p dy\\
&\leq ||J||^{p-1}_{L^1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{B[y,1]}J(x)\sup_{x\in[y,1]}\rho(x)dx\right)|u(y)|^\rho dy.
\end{aligned}$$

Por (H2), temos

$$\|J*u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq K||J||^{p-1}_{L^1}\int_{\mathbb{R}^N}\rho(y)|u(y)|^p\int_{B[y,1]}J(x)dxdy. \tag{2.6}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{B[y,1]}J(x)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N}J(x)dx\\
&= ||J||_{L^1}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Assim, de (2.7) e (2.6), segue que

$$\begin{aligned}
||J*u||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &\leq K||J||^p_{L^1}\int_{\mathbb{R}^N}\rho(y)|u(y)|^p dy\\
&= K||J||^p_{L^1}||u||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$||J*u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq K^{1/p}||J||_{L^1}||u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}.$$

□

Observação 2.2. *Sob a hipótese (H1), para cada $u \in L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$ temos*

$$|J * (f \circ u)(x)| \leq k_1(J * |u|)(x) + k_2||J||_{L^1}.$$

De fato, por (H1), existe $k_2 \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq k_1|x| + k_2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|J * (f \circ u)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)(f \circ u)(y)dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)|f(u(y))|dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)[k_1|u(y)| + k_2]dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)k_1|u(y)|dy + \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)k_2 dy \\
&= k_1 \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)|u(y)|dy + k_2 \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)dy \\
&= k_1(J * |u|)(x) + k_2||J||_{L^1}.
\end{aligned}$$

Proposição 2.1. *Suponha que valem (H1) e (H2). Então a função*

$$F(u) = -u + J * (f \circ u) + h$$

é globalmente Lipschitz em $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$.

Demonstração. Pela desigualdade triangular, obtemos

$$||F(u) - F(v)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq ||v - u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + ||J * (f \circ u) - J * (f \circ v)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}. \quad (2.8)$$

Note que, pela linearidade da convolução,

$$J * (f \circ u) - J * (f \circ v) = J * [(f \circ u) - (f \circ v)]. \quad (2.9)$$

De (2.8) e (2.9), obtemos

$$||F(u) - F(v)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq ||v - u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + ||J * [(f \circ u) - (f \circ v)]||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}.$$

Pelo Lema 2.1, segue que,

$$||F(u) - F(v)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq ||v - u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + K^{1/p}||J||_{L^1}||(f \circ u) - (f \circ v)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \quad (2.10)$$

Mas

$$||(f\circ u)-(f\circ v)||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}=\int_{\mathbb{R}^N}|(f\circ u)-(f\circ v)|^p\rho(y)dy.$$

Por (H1),

$$\begin{aligned} ||(f\circ u)-(f\circ v)||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &\leq \int_{\mathbb{R}^N}(k_1|u(y)-v(y)|)^p\rho(y)dy \\ &= k_1^p\int_{\mathbb{R}^N}|u(y)-v(y)|^p\rho(y)dy \\ &= k_1^p||u-v||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} ||F(u)-F(v)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &\leq ||u-v||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}+K^{1/p}||J||_{L^1}k_1||u-v||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \\ &= (1+K^{1/p}||J||_{L^1}k_1)||u-v||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}, \end{aligned}$$

ou seja, F é globalmente Lipischitz em $L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$, com constante de Lipschitz $M=1+K^{1/p}||J||_{L^1}k_1$. □

Observação 2.3. *Sendo o lado direiro de (2.1) uma função Lipschitziana em $L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$, pelos resultados de EDO em espaço de Banach, conforme o Teorema 1.26, segue que o problema de Cauchy associado a (2.1) está bem posto em $L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$, com soluções globalmente definidas.*

2.3 Existência de um Atrator Global

Nesta seção provamos a existência de um conjunto compacto, invariante, maximal $\mathcal{A}\subset L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$ para o fluxo de (2.1), o qual atrai cada conjunto limitado de $L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$. Para isso, além de (H1) e (H2), vamos assumir as seguintes hipóteses adicionais :

(H3) a função f é limitada, isto é, existe $a>0$ tal que

$$|f(x)|\leq a,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^N. \tag{2.12}$$

(H4) J tem derivadas parciais limitadas com

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_{x_i}J(x-y)dy\leq S$$

para alguma constante $0<S<\infty$ e $i=1,\cdots,N$.

Daqui em diante denotaremos por $S(t)$ o fluxo gerado por (2.1), que é dado pela fórmula de variação das constantes por

$$S(t)u = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * f(S(s)u) + h]ds.$$

Lema 2.2. *Suponha que valem (H1), (H2) e (H3) e seja $R = aK^{1/p}||J||_{L^1} + h$. Então a bola de centro na origem de $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$ e raio $R+\varepsilon$ é um conjunto absorvente para o fluxo $S(t)$ em $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$ para qualquer $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Seja $u(x,t)$ a solução de (2.1) com condição inicial u_0 em um conjunto limitado (por exemplo $B(0,r)$). Pela fórmula da variação das constantes, temos

$$u(x,t) = e^{-t}u_0(x) + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(x,s) + h]ds.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&||u(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} = \\
&= \left|\left| e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot,s) + h]ds \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \\
&\leq e^{-t}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + \left|\left| \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot,s) + h]ds \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \\
&\leq e^{-t}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + \int_0^t ||e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot,s) + h]||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}ds \\
&\leq e^{-t}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + \int_0^t e^{-(t-s)} \left(||J * (f \circ u)(\cdot,s)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + ||h||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \right) ds.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1, segue que

$$\begin{aligned}
&||u(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq \\
&\quad \leq e^{-t}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + \int_0^t e^{-(t-s)} \left(K^{1/p}||J||_{L^1}||f(u(\cdot,s))||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + h \right) ds. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Mas, sendo f limitada, conforme a hipótese (H3), segue que

$$\begin{aligned}
||f(u(\cdot,s))||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &= \int |f(u(x,s))|^p \rho(x)dx \\
&\leq \int a^p \rho(x)dx \\
&= a^p \int \rho(x)dx \\
&= a^p.
\end{aligned}$$

Assim de (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} ||u(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &\leq e^{-t}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + \int_0^t e^{-(t-s)} \left(aK^{1/p}||J||_{L^1} + h\right) \, ds \\ &= e^{-t}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + (aK^{1/p}||J||_{L^1} + h) \int_0^t e^{-(t-s)} \, ds \\ &= e^{-t}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + (aK^{1/p}||J||_{L^1} + h). \end{aligned}$$

Daí, para $t > ln\left(\frac{||u(\cdot,0)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}}{\varepsilon}\right)$, segue que $||u(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} < R+\varepsilon$. $\square$

Lema 2.3. *Suponha que valem as hipóteses (H1) - (H4). Então, para cada $\eta > 0$, existe t_η tal que $S(t_\eta)B(0,R+\varepsilon)$ tem uma cobertura finita por bolas em $L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$ com raio menor que η.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2, segue que $\mathcal{B}(0,R+\varepsilon)$ é invariante. Como as soluções de (2.1) com a condição inicial $u_0 \in \mathcal{B}(0,R+\varepsilon)$ é dada, pela fórmula da variação das constantes, por

$$u(x,t) = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}[(J*(f\circ u))(x,s) + h]ds,$$

escrevemos,

$$v(x,t) = e^{-t}u_0(x) \text{ e } w(x,t) = \int_0^t e^{-(t-s)}[(J*(f\circ u))(x,s) + h]ds.$$

Dado $\eta > 0$, é possível encontrar $t(\eta)$ tal que,

$$t \geq t(\eta) \Rightarrow ||v(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq \frac{\eta}{2}.$$

De fato,

$$||v(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} = e^{-t}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)},$$

para

$$t \geq ln\left(\frac{2||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}}{\eta}\right),$$

temos

$$\begin{aligned} ||v(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &\leq e^{-ln\left(\frac{2||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}}{\eta}\right)} \cdot ||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \\ &= \frac{\eta}{2||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \\ &= \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Agora, usando (H3), obtemos

$$\begin{aligned}
||J*(f\circ u)(\cdot,s)||^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |J*(f\circ u)(x,s)|^p\rho(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)f(u(y))dy\right|^p \rho(x)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)|f(u(y))|dy\right)^p \rho(x)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(a\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)dy\right)^p \rho(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (a||J||_{L^1})^p\rho(x)dx \\
&= (a||J||_{L^1})^p \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx \\
&= (a||J||_{L^1})^p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$||J*(f\circ u)(\cdot,s)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq a||J||_{L^1}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}(\|J*(f\circ u)(\cdot,s)\|_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)})ds \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)}(a\|J\|_{L^1}+h)ds \\
&\leq a\|J\|_{L^1}+h. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Por outro lado, por (H3), temos

$$\begin{aligned}
|w(x,t)| &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}[|J*(f\circ u)(x,s)|+h]ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)}\left[\left|\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)f(u(y,t))dy\right| + h\right]ds \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)|f(u(y,t))|dy + h\right)ds \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\left(a\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)dy + h\right)ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)}\left(a||J||_{L^1}+h\right)ds \\
&\leq a||J||_{L^1}+h. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Além disso, diferenciando $w(x,t)$ com respeito a x_i, para $t\geq 0$, temos

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) = \int_0^t e^{-(t-s)}\partial_{x_i}J*(f\circ u)(x,s)ds,\ i=1,\cdots,N.$$

Assim

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t)\right| \leq \int_0^t e^{-(t-s)}|\partial_{x_i}J*(f\circ u)(x,s)|ds.$$

Mas, usando (H4), obtemos

$$\begin{aligned}|\partial_{x_i}J*(f\circ u)(x,s)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} a\,|\partial_{x_i}J(x-y)|\,dy\\ &\leq aS<\infty,\end{aligned}$$

então segue que,

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t)\right| \leq \int_0^t e^{-(t-s)}aS\ ds \leq aS<\infty. \tag{2.16}$$

Agora escolhemos $l>0$ tal que

$$(a\|J\|_{L^1}+h)\left(\int_{\mathbb{R}^N}(1-\chi_{B[0,l]})^{p^2/(p-1)}(x)\rho(x)dx\right)^{(p-1)/p^2} \leq \frac{\eta}{4}, \tag{2.17}$$

onde $\chi_{B[0,l]}$ denota a função característica da bola $B[0,l]$. Então, usando (2.14), (2.15) e (2.17), obtemos

$$\begin{aligned}\|(1-\chi_{B[0,l]})(\cdot)w(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &= \int_{\mathbb{R}^N}|(1-\chi_{B[0,l]})(x)w(x,t)|^p\rho(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|(1-\chi_{B[0,l]})(x)|^p|w(x,t)|^p\rho(x)dx.\end{aligned}$$

Usando a desiguadade de Hölder e (2.15), segue que

$$\begin{aligned}&\|(1-\chi_{B[0,l]})(\cdot)w(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} =\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|w(x,t)|\rho(x)^{1/p}|(1-\chi_{B[0,l]})(x)|^p|w(x,t)|^{p-1}\rho(x)^{(p-1)/p}dx\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|w(x,t)|^p\rho(x)dx\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|(1-\chi_{B[0,l]})(x)|^{p^2/(p-1)}|w(x,t)|^p\rho(x)dx\right)^{(p-1)/p}\\ &= ||w(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|(1-\chi_{B[0,l]})(x)|^{p^2/(p-1)}|w(x,t)|^p\rho(x)dx\right)^{(p-1)/p}\\ &\leq (a||J||_{L^1}+h)\left(\int_{\mathbb{R}^N}|(1-\chi_{B[0,l]})(x)|^{p^2/(p-1)}(a||J||_{L^1}+h)^p\rho(x)dx\right)^{(p-1)/p}\\ &= (a||J||_{L^1}+h)^p\left(\int_{\mathbb{R}^N}|(1-\chi_{B[0,l]})(x)|^{p^2/(p-1)}\rho(x)dx\right)^{(p-1)/p}\\ &\leq \frac{\eta}{4}.\end{aligned}$$

De (2.15) and (2.16), segue que a restrição de $w(\cdot,t)$ à bola $B[0,l]$ é limitado em $W^{1,p}(B[0,l])$ (por uma constante independente de $u_0\in\mathcal{B}(0,R+\varepsilon)$ e de t), portanto o conjunto $\{\chi_{B[0,l]}w(\cdot,t)\}$ com $w(\cdot,0) \in \mathcal{B}(0, R+\varepsilon)$ é um subconjunto relativamente compacto de $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$ para qualquer $t > 0$ e, com isso, pode ser coberto por um número finito de bolas com raio menor que $\frac{\eta}{4}$.

Portanto, sendo

$$u(\cdot,t) = v(\cdot,t) + \chi_{B[0,l]}w(\cdot,t) + (1 - \chi_{B[0,l]})w(\cdot,t),$$

segue que $S(t_\eta)\mathcal{B}(0, R+\varepsilon)$ tem uma cobertura finita por bolas de $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$ com raio menor que η, e o resultado está provado. □

Teorema 2.2. *Considere as mesmas hipóteses do Lema 2.3. Então $\mathcal{A} = \omega(B(0,R))$ é um atrator global para o fluxo $S(t)$ gerado por (2.1) em $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$, o qual está contido em uma bola de raio R.*

Demonstração. Já sabemos que o conjunto ω-limite é um conjunto fechado e invariante. Provemos que $\mathcal{A}$ é um conjunto compacto. Com efeito, pelo Lema 2.2, o conjunto $\mathcal{A}$ está contido na bola $B(0,R)$ em $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$, ou seja,

$$\mathcal{A} \subset B(0,R).$$

Operando com $S(t)$, obtemos

$$S(t)\mathcal{A} \subset S(t)B(0,R), \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Sendo $\mathcal{A}$ invariante pelo fluxo $S(t)$, segue que

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Daí,

$$\mathcal{A} \subset S(t)B(0,R), \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Pelo Lema 2.3, dado $\eta > 0$, existe t_η tal que $\mathcal{A}$ tem uma cobertura finita por bolas de $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$ com raio menor que η. Como $\eta > 0$ é arbitrário, segue que a medida de não compacidade de $\mathcal{A}$ é zero, isto é, $\alpha(\mathcal{A}) = 0$ (veja Apêndice A). Pelo Lema A.2, $\mathcal{A}$ é relativamente compacto. Sendo $\mathcal{A}$ fechado, segue que $\mathcal{A}$ é compacto. Provemos agora que $\mathcal{A}$ atrai os conjuntos limitados de $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$. Seja D um conjunto limitado, sendo $B(0,R)$ um conjunto absorvente, existe $t_0 > 0$, tal que

$$S(t)D \subset B(0,R), \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Então

$$\omega(D) \subset \mathcal{A}.$$

De fato, seja $z \in \omega(D)$, então existem sequências (z_n) em D e $t_n \to \infty$ tais que $S(t_n)z_n \to z$ quando $n \to \infty$. Para $t_n \geq t_0$, temos

$$S(t_n)z_n \in B(0,R).$$

Note que, quando $n \to \infty$,

$$S(t_n)S(t_0)z_n \to S(t_0)z.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} S(t_0)z &= S(t_0)\lim_{n\to\infty} S(t_n)z_n \\ &= \lim_{n\to\infty} S(t_0)S(t_n)z_n \\ &= \lim_{n\to\infty} S(t_0+t_n)z_n \\ &= z. \end{aligned}$$

Assim, existem $(S(t_0)z_n)$ uma sequência em $B(0,R)$ e $t_n \to \infty$ tais que

$$S(t_n)S(t_0)z_n \to z.$$

Então, por definição, $z \in \mathcal{A}$. Portanto $\mathcal{A}$ é um atrator global para o fluxo $S(t)$ gerado por (2.1). □

Observação 2.4. *Note que, em particular $\mathcal{A}$ é um conjunto limitado, que atrai cada conjunto limitado B de X. Portanto, por definição, $S(t)$ é limitado dissipativo. Além disso, segue dos Teoremas 1.13 e 2.2 que o semigrupo $S(t)$ é assintoticamente suave.*

Capítulo 3

Limitação e Semicontinuidade Superior dos Atratores Globais

Nesse capítulo encontramos uma estimativa uniforme para o atrator, cuja existência foi provado no Teorema 2.2. Além disso, estudamos a semicontinuidade superior desses atratores com relação as variações de J.

3.1 Resultados de Limitação

Vimos no Teorema 2.2 que o atrator global $\mathcal{A}$ está contido na bola de centro na origem de $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$ e raio $R = aK^{\frac{1}{p}}\|J\|_{L^1} + h$. Nesta seção provamos resultados de limitação para o atrator em outros espaços.

Teorema 3.1. *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 2.2 e que existe uma constante positiva M tal que $\rho(x) \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então o atrator $\mathcal{A}$ é limitado em*

$$C^1_\rho(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in C^1(\mathbb{R}^N); \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)|\rho(x) + \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right| \rho(x) \right) < \infty \right\}.$$

Demonstração. Seja $u(x,t)$ uma solução de (2.1) em $\mathcal{A}$. Então, pela fórmula da variação das constantes,

$$u(x,t) = e^{-(t-t_0)}u(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(x,s) + h]ds. \tag{3.1}$$

Pelo Teorema 2.2, segue que $||u(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq R$, onde $R = aK^{1/p}||J||_{L^1} + h$. Fazendo

$t_0 \to -\infty$, obtemos

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}[J*(f\circ u)(x,s)+h]ds, \tag{3.2}$$

onde a igualdade em (3.2) é no sentido de $L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$.

Usando (3.2) e (H3), obtemos

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}|J*(f\circ u)(x,s)+h|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} J(x-y)\,|f(u(y))|\,dy+h\right)ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}\left(a\int_{\mathbb{R}^n} J(x-y)dy+h\right)ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}(a||J||_{L^1}+h)ds \\
&= a||J||_{L^1}+h.
\end{aligned}$$

Desde que $\rho(x)\leq M$, para todo $x\in\mathbb{R}^N$, segue que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|u(x,t)|\rho(x)\leq M(a||J||_{L^1}+h).$$

Agora, usando que $J\in C^1(\mathbb{R}^N)$, de (3.2), segue que $u(x,t)$ é diferenciável com relação a x_i, $i=1,\ldots,N$, e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}[J*(f\circ u)(x,s)+h]ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(J*(f\circ u))(x,s)+h\right]ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)f(u(y))dy+h\right)\right]ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial x_i}J(x-y)f(u(y))dy\right]ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}[\partial_{x_i}J*(f\circ u)(x,s)]ds. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Daí, usando (H3) e (H4) e procedendo como na prova do Lema 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right| &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}|\partial_{x_i}J*(f\circ u)(x,s)|ds \\
&\leq aS.
\end{aligned}$$

Assim, usando novamente que $\rho(x)\leq M$ para todo $x\in\mathbb{R}^N$, obtemos

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right|\rho(x)\leq aSM.$$

Isto conclui o resultado. □

Observação 3.1. *Se supormos que $J \in C^r(\mathbb{R}^N)$, então o atrator $\mathcal{A}$ é limitado em $C^r_\rho(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema 3.2. *Supondo as mesmas hipóteses do Teorema 2.2, então o atrator $\mathcal{A}$ pertence a bola $||\cdot||_\infty \leq r$, onde $r = a||J||_{L^1} + h$.*

Demonstração. Seja $u(x,t)$ uma solução de (2.1) em $\mathcal{A}$. Então, como visto em (3.2),

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(x,s) + h]ds,$$

onde a igualdade acima é no sentido de $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$. Daí, usando (H3), obtemos

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}[|J * (f \circ u)(x,s)| + h]ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{t} (a\|J\|_{L^1} + h)e^{-(t-s)}ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} re^{-(t-s)}ds = r. \end{aligned}$$

O que prova o teorema. □

3.2 Semicontinuidade Superior

Uma questão natural a ser examinada é a dependência desses atratores em relação a função J presente em (2.1). Denotaremos por A_J o atrator global cuja existência foi provado no Teorema 2.2.

Nessa seção, provamos que a família de atratores é semicontínua superiormente em $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$, com relação a função J em J_0, com $J \in C^1(\mathbb{R}^N)$ não negativa, par e com suporte na bola $B[0,1]$.

Lema 3.1. *Supondo (H1),(H2) e (H3), o fluxo $S_J(t)$ é contínuo com relação as variações de J, na L^1-norma, em J_0, uniformemente para $t \in [0,b]$ com $b < \infty$ e u em um conjunto limitado.*

Demonstração. Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$. A solução de (2.1) com condição inicial u é dada, pela fórmula da variação das constantes, por

$$S(t)u = e^{-(t-t_0)}S(t_0)u + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)}[J * (f \circ S(s)u) + h]ds.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $t_0 = 0$. Então,

$$S_J(t)u = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ S_J(s)u) + h]ds.$$

Seja $J_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$ uma função par, não negativa, com suporte na bola $B[0,1]$, $b > 0$ e D um conjunto limitado em $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$, por exemplo a bola $B(0, R)$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$||J - J_0||_{L^1} < \delta \Longrightarrow ||S_J(t)u - S_{J_0}(t)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} < \varepsilon,$$

para $t \in [0, b]$ e $u \in D$. Primeiramente, observe que, sendo D limitado, existe $C > 0$ tal que D esta contido em um bola de raio C e centro na origem de $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$, ou seja,

$$D \subset B(0, C).$$

Tomando

$$M = \max\{R, C\},$$

segue que

$$||u(\cdot, t)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq M, \quad \forall\ u \in D.$$

Temos ainda,

$$\begin{aligned}
&||S_J(t)u - S_{J_0}(t)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} = \\
&\quad = \left|\left| \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ S_J(s)u) + h]ds - \int_0^t e^{-(t-s)}[J_0 * (f \circ S_{J_0}(s)u) + h]ds \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \\
&\quad \leq \int_0^t e^{-(t-s)}||J * (f \circ S_J(s)u) - J_0 * (f \circ S_{J_0}(s)u)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}ds.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo

$$J_0 * (f \circ S_J(s)u)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&||S_J(t)u - S_{J_0}(t)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq \\
&\quad \leq \int_0^t e^{-(t-s)}||(J - J_0) * (f \circ S_J(s)u) + J_0 * [f \circ S_J(s)u - f \circ S_{J_0}(s)u]||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \\
&\quad \leq \int_0^t e^{-(t-s)} \big[||(J - J_0) * (f \circ S_J(s)u)||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \\
&\quad + ||J_0 * [f \circ S_J(s)u - f \circ S_{J_0}(s)u]||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}\big]\, ds.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
||S_J(t)u - S_{J_0}(t)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq & \\
\leq \int_0^t e^{-(t-s)}[K^{1/p}||J - J_0||_{L^1}||f \circ S_J(s)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} + & \\
+ \quad K^{1/p}||J_0||_{L^1}||f \circ S_J(s)u - f \circ S_{J_0}(s)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}]ds. &
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Usando (H3), obtemos

$$||f \circ S_J(s)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq a \tag{3.5}$$

e, usando (H1), obtemos

$$||f \circ S_J(s)u - f \circ S_{J_0}(s)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq k_1||S_J(s)u - S_{J_0}(s)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}. \tag{3.6}$$

Logo, de (3.4), (3.5) e (3.6), segue que

$$
\begin{aligned}
&||S_J(t)u - S_{J_0}(t)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq \\
&\quad \leq aK^{1/p}||J - J_0||_{L^1} \int_0^t e^{-(t-s)}ds + \\
&\quad + \int_0^t e^{-(t-s)}aK^{1/p}||J_0||_{L^1}k_1||S_J(s)u - S_{J_0}(s)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}ds \\
&\quad \leq aK^{1/p}||J - J_0||_{L^1} + \int_0^t e^{-(t-s)}K^{1/p}||J_0||_{L^1}k_1||S_J(s)u - S_{J_0}(s)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}ds.
\end{aligned}
$$

Multiplicando ambos os membros por e^t, obtemos

$$
\begin{aligned}
&e^t||S_J(t)u - S_{J_0}(t)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} \leq \\
&\quad \leq e^t aK^{1/p}||J - J_0||_{L^1} + \int_0^t e^s K^{1/p}||J_0||_{L^1}k_1||S_J(s)u - S_{J_0}(s)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)}ds.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema de Gronwall, segue que

$$
\begin{aligned}
||S_J(t)u - S_{J_0}(t)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} &\leq aK^{1/p}||J - J_0||_{L^1}e^t e^{(K^{1/p}||J_0||_{L^1}k_1)t} \\
&\leq aK^{1/p}||J - J_0||_{L^1}e^{(K^{1/p}||J_0||_{L^1}k_1+1)b},
\end{aligned}
$$

pois $t \in [0, b]$. Logo escolhendo

$$\delta = \frac{\varepsilon}{aK^{1/p}e^{(K^{1/p}||J_0||_{L^1}k_1+1)b}},$$

segue que

$$||J - J_0||_{L^1} < \delta \Rightarrow ||S_J(t)u - S_{J_0}(t)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} < \varepsilon,$$

o que prova o lema. $\square$

Teorema 3.3. *Suponha as hipóteses do Lema 3.1. Então a família de atratores $\mathcal{A}_J$ é semicontínua superiormente com respeito a J em J_0.*

Demonstração. Pelas hipóteses do teorema, para todo $J \in C^1(\mathbb{R}^N)$, suficientemente próximo de J_0 na L^1-norma, não negativa, par, com suporte em $B[0,1]$, o atrator, $\mathcal{A}_J$, dado pelo Teorema 2.2, está na bola $B[0,R]$ em $L^p(\mathbb{R}^N,\rho)$. Assim

$$\bigcup_J \mathcal{A}_J \subset B[0,R].$$

Como $\mathcal{A}_{J_0}$ é um atrator global e $B[0,R]$ é um conjunto limitado, então dado $\varepsilon > 0$, existe $t^* > 0$ tal que

$$S_{J_0}(t)B[0,R] \subset \mathcal{A}_{J_0}^{\varepsilon/2} \tag{3.7}$$

para todo $t \geq t^*$, onde $\mathcal{A}_{J_0}^{\varepsilon/2}$ é a $\frac{\varepsilon}{2}$-vizinhança de $\mathcal{A}_{J_0}$. Do Lema 3.1, temos que $S_J(t^*)$ é contínua em J_0, uniformemente para u em um conjunto limitado e t em compacto. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$||J - J_0||_{L^1} < \delta \Rightarrow ||S_J(t^*)u - S_{J_0}(t^*)u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, u \in B[0,R]. \tag{3.8}$$

Mostraremos que se

$$||J - J_0||_{L^1} < \delta \Rightarrow \mathcal{A}_J \subset \mathcal{A}_{J_0}^{\varepsilon}.$$

De fato, seja $u \in \mathcal{A}_J$, como $\mathcal{A}_J$ é invariante,

$$S(t)\mathcal{A}_J = \mathcal{A}_J,$$

então

$$v = S(-t^*)u \in \mathcal{A}_J.$$

Pelo Teorema 2.2,

$$\mathcal{A}_J \subset B[0,R].$$

Então, por (3.7), obtemos

$$S_{J_0}(t^*)v \in \mathcal{A}_{J_0}^{\varepsilon/2},$$

e por (3.8),

$$||S_J(t^*)v - S_{J_0}(t^*)v||_{L^p(\mathbb{R}^N,\rho)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, por (3.7) e (3.8),

$$u = S_J(t^*)S_J(-t^*)u = S_J(t^*)v \in \mathcal{A}_{J_0}^{\varepsilon}.$$

Daí,

$$||J - J_0|| < \delta \Longrightarrow d(\mathcal{A}_J, \mathcal{A}_{J_0}) < \varepsilon.$$

Portanto $\mathcal{A}_J$ é semicontínua superiormente. $\square$

Capítulo 4

Existência de um Funcional Energia e um Exemplo Concreto

Neste capítulo exibimos um funcional energia que decresce ao longo das soluções de (2.1) e damos um exemplo concreto para a função f.

4.1 Funcional Energia

Nesta seção, para exibimos um funcional energia que decresce ao longo das soluções de (2.1), além das hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4), vamos considerar a hipótese (H5) abaixo, a qual foi assumida também em [11] e [20]:

(H5) a função não decrescente f tem derivada positiva e assume valores entre 0 e a satisfazendo, para $0 \leq s \leq a$

$$\left| \int_0^s f^{-1}(r)dr \right| < L < \infty.$$

Motivados por funcionais energia de [9], [11] e [20], definimos o funcional $F : L^p(\mathbb{R}^N, \rho) \to \mathbb{R}$ por

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[-\frac{1}{2} f(u(x)) \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y) f(u(y))dy + \int_0^{f(u(x))} f^{-1}(r)dr - hf(u(x)) \right] dx. \tag{4.1}$$

Observação 4.1. *O funcional em (4.1) pode assumir valores $\pm\infty$.*

De fato, considere o caso em que todo o campo é homôgeneo com potencial da membrana constante u_0 e estímulo externo, h, também constante. Então

$$u_0 = \|J\|_{L^1} f(u_0) + h. \tag{4.2}$$

Assim o funcional $F(u_0)$ é da forma

$$\begin{aligned} F(u_0) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[-\frac{1}{2} f(u_0) \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y) f(u_0) dy + \int_0^{f(u_0)} f^{-1}(r) dr - h f(u_0) \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[-\frac{f^2(u_0)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y) dy + \int_0^{f(u_0)} f^{-1}(r) dr - h f(u_0) \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[-\frac{f^2(u_0)}{2} ||J||_{L^1} + G_0 - h f(u_0) \right] dx, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde

$$G_0 = \int_0^{f(u_0)} f^{-1}(r) dr.$$

Como o que está dentro dos colchetes em (4.3) é constante, $F(u_0)$ pode assumir $\pm\infty$.

Agora vamos supor que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u(x)) - f(u_0)| dx < \infty,$$

com u_0 dado em (4.2), o que implica que a taxa de atividade neural no nível u converge para o repouso, quando $x \to \pm\infty$ (isto sempre ocorre, por exemplo, em campo com região de excitação finita, (veja [11]), no qual o estado do campo tende para um estado de equilíbrio, quando $|x| \to \infty$.

Observação 4.2. *Note que das hipóteses (H1) e (H5) segue que o funcional F dado em (4.1) está sempre bem definido no subconjunto $\mathcal{M} \subset L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$ dado por*

$$\mathcal{M} = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N, \rho); ||u - u_0||_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty\}.$$

Seja u_0 uma solução de equilíbrio de (2.1), que é dado implicitamente pela equação

$$u_0(x) = (J * (f \circ u))(x) + h. \tag{4.4}$$

Defina

$$U(x,t) = u(x,t) - u_0 \quad \text{e} \quad g(U) = f(U + u_0) - f(u_0). \tag{4.5}$$

Então a equação (2.1) pode ser reescrita da forma

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -U(x,t) + J * (g \circ U)(x,t). \tag{4.6}$$

De fato, substituindo (4.5) em (4.6) segue que

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u_0(x)}{\partial t} = -u(x,t) + u_0(x) + \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)(f(u(y,t)) - f(u_0(x)))dy,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= -u(x,t) + u_0(x) + \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)f(u(y,t))dy - \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)f(u_0(x))dy \\ &= -u(x,t) + J * (f \circ u)(x,t) + u_0(x) - J * (f \circ u_0(x)).\end{aligned}$$

Por (4.4), obtemos

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + J * (f \circ u)(x,t) + h.$$

Para a equação (4.6), definimos o funcional

$$G(U) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[-\frac{1}{2} g(U(x)) \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y) g(U(y)) dy + \int_0^{g(U(x))} g^{-1}(r) dr \right] dx. \tag{4.7}$$

Assim obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja $U(\cdot,t)$ uma solução de (4.6). Então, sob as hipóteses (H3), (H5) e (H6), temos*

$$\begin{aligned}G(U) = \int_{\mathbb{R}^N} \Bigg[-\frac{1}{2}[f(u(x)) - f(u_0)] \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)[f(u(y)) - f(u_0)]dy + \\ + \int_{f(u_0)}^{f(u(x))} f^{-1}(r) dr \Bigg] dx.\end{aligned}$$

e

$$\frac{dG(U(x,t))}{dt} = -\int_{\mathbb{R}^N} f'(u(x,t)) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \leq 0.$$

Demonstração. Sendo $g(U) = f(U + u_0) - f(u_0)$, da equação (4.7), obtemos

$$\begin{aligned}G(U) = \int_{\mathbb{R}^N} \Bigg[-\frac{1}{2}[f(U(x) + u_0) - f(u_0)] \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)[f(U(y) + u_0) - f(u_0)]dy + \\ + \int_0^{g(U(x))} g^{-1}(r) dr \Bigg] dx.\end{aligned}$$

Usando que $U = u - u_0$, $g(0) = 0$ e o fato que f^{-1} e g^{-1} difere apenas por translação, que é uma isométria, segue que

$$\int_{f(u_0)}^{f(u(x))} f^{-1}(r)dr = \int_0^{f(U(x)+u_0)-f(u_0)} f^{-1}(r)dr = \int_0^{g(U(x))} g^{-1}(r)dr.$$

Assim

$$G(U) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[-\frac{1}{2}[f(u(x)) - f(u_0)] \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)[f(u(y)) - f(u_0)]dy + \right.$$
$$\left. + \int_{f(u_0)}^{f(u(x))} f^{-1}(r)dr \right] dx.$$

Por (H5) e (H6), segue que $|G(U)| < \infty$. Além disso,

$$\frac{d}{dt}G(U(\cdot,t)) = -\int_{\mathbb{R}^N} g'(u(x,t)) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Com efeito, derivando (4.7) sob o sinal de integração, temos

$$\frac{dG(U(\cdot,t))}{dt} = \int_{\mathbb{R}^N} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial g(U(x,t))}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)g(U(y,t))dy + \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}g(U(x,t)) \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)\frac{\partial g(U(y,t))}{\partial t}dy + g^{-1}\left(g(U(x,t))\frac{\partial g(U(x,t))}{\partial t} \right) \right] dx,$$

ou seja,

$$\frac{dG(U(\cdot,t))}{dt} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)g(U(y,t))\frac{\partial g(U(x,t))}{\partial t}dydx +$$
$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)g(U(x,t))\frac{\partial g(U(y,t))}{\partial t}dydx + \int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\frac{\partial g(U(x,t))}{\partial t}dx.$$

Como

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)g(U(y,t))\frac{\partial g(U(x,t))}{\partial t}dydx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)g(U(x,t))\frac{\partial g(U(y,t))}{\partial t}dydx,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{dG(U(\cdot,t))}{dt} &= -\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)g(U(y,t))\frac{\partial g(U(x,t))}{\partial t}dydx + \int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\frac{\partial g(U(x,t))}{\partial t}dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \left[-U(x,t) + \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)g(U(y,t))dy \right] \frac{\partial g(U(x,t))}{\partial t}dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \left[-U(x,t) + J * (g \circ U)(x,t) \right] \frac{\partial g(U(x,t))}{\partial t}dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \left[-U(x,t) + J * (g \circ U)(x,t) \right] g'(U(x,t))\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}dx.
\end{aligned}$$

Por (4.6), obtemos

$$\frac{dG(U(\cdot,t))}{dt} = -\int_{\mathbb{R}^N} g'(U(x,t)) \left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Agora, usando (4.5), chegamos em

$$\begin{aligned}
\frac{dG(U(\cdot,t))}{dt} &= -\int_{\mathbb{R}^N} \left[f'(U(x,t)+u_0) - \frac{d}{dt}(f(u_0))\right] \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} [f'(x,t))] \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx
\end{aligned}$$

Pela hipótese (H5) o resuldado segue. □

Observação 4.3. *Pelo Teorema 4.1, segue que o funcional dado em (4.7) é de fato o funcional energia que age como um funcional de Lyapunov para o fluxo gerado pela equação (4.6).*

4.2 Exemplo Concreto

Nesta seção exibimos um exemplo concreto para a função f, o qual satisfaz as hipóteses assumidas em nossos resultados.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Temos que $e^{-x} \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$1 \leq 1 + e^{-x}.$$

Assim $|f(x)| \leq 1$. Logo (H3) é satisfeita com $a = 1$.

Agora, note que

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0.$$

Como

$$1 < (1+e^{-x})^2 \leq 4, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

segue que

$$\frac{1}{4} \leq (1+e^{-x})^2 < 1.$$

Assim, $|f'(x)| \leq 1$. Logo (H1) vale com $k_1 = 1$.

Para verificar (H5), note que

$$0 < \left| \frac{1}{1+e^{-x}} \right| < 1 \quad \text{e} \quad f^{-1}(x) = -\ln\left(\frac{1-x}{x}\right).$$

Assim, para $0 \leq s \leq 1$,

$$\left| \int_0^s -\ln\left(\frac{1-x}{x}\right) dx \right| \leq \ln 2.$$

Finalmente, temos que a hipótese (H6) é satisfeita no subconjunto de $L^p(\mathbb{R}^N, \rho)$ dado por $\mathcal{M} = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N, \rho); ||u - u_0||_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty\}$.

De fato, sendo f Lipschitz com constante $k_1 = 1$, dado $u \in \mathcal{M}$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u(x)) - f(u_0(x))| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - u_0(x)| < \infty.$$

Portanto os resultados das seções anteriores são válidas para o caso particular de (2.1) dado por

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)\left(\frac{1}{1+e^{-u(y)}}\right) dy + h.$$

Apêndice A

Medida de Não Compacidade

Nesta seção exibimos algumas definição e resultados que, de alguma forma, são usadas no decorrer de todo texto. Alguns resultados não serão demonstrados aqui, mas tais demonstrações podem ser encontradas em [4], [5], [16] ou [17].

Ao longo de toda essa seção, a menos de menção explicita, X denota um espaço de Banach.

Definição A.1. *Um subconjunto $E \subset X$ é* ***relativamente compacto****, ou* ***precompacto****, se $\overline{E}$ é compacto.*

Definição A.2. *Um subconjunto $E \subset X$ é* ***totalmente limitado*** *se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma família finita de bolas $B_1, B_2, \ldots, B_n \subset X$ com, $diam(B_i) = \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, tal que*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Teorema A.3. *Um subconjunto $E \subset X$ é totalmente limitado se, e somente se, E é relativamente compacto.*

Demonstração. Veja [17]. □

Definição A.4. *Se M e S são subconjuntos de X e $\varepsilon > 0$, então o conjunto S é chamado de uma* ***ε-rede*** *de M se para qualquer $x \in M$ existe $y \in S$, tal que*

$$||x - y|| < \varepsilon.$$

Se o conjunto S for finito, então a ε-rede S de M é chamada de uma ***ε-rede finita****.*

Definição A.5. *Um subconjunto $E \subset X$ é dito* ***covexo*** *se para todo $x, y \in E$ temos*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in E, \quad \forall\ \lambda \in (0,1).$$

Teorema A.6. *A interseção arbitrária de uma família de conjuntos convexos é um conjunto convexo*

Demonstração. Veja [14]. $\square$

Definição A.7. *Seja $F \subset X$. A interseção de todos os conjuntos convexos que contém F é chamado* ***envoltória convexa*** *de F e denotaremos por $conv(F)$.*

A **combinação convexa** de elementos de F é um elemento da forma

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

onde

$$x_i \in F,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Vamos escrever $cvx(F)$ para denotar a combinação convexa de todos os elementos do conjunto F.

Definição A.8. *Seja $Q \subset X$ um conjunto limitado, a* ***medida de não compacidade de Kuratowski*** *de Q, denotado por $\alpha(Q)$, é definida por*

$$\alpha(Q) = \inf\left\{\varepsilon > 0 :\ Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i,\ S_i \subset X,\ diam(S_i) < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Teorema A.9. *Se X é um espaço vetorial sobre um corpo F e E, E_1,...,E_n são subconjuntos convexo de X e $F \subset X$, então*
(i) $cvx(E) \subset E$
(ii) $conv(F) = cvx(F)$
(iii) $conv\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i;\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ i = 1, \ldots, n\right\}.$

Demonstração. Para demonstramos (i) basta mostrar que para qualquer $n > 2$, $x_i \in E$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, temos

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in E.$$

Provemos por indução. Para $n = 2$, temos

$$x_1, x_2 \in E,\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

assim $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Sendo E convexo,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_2) x_2 \in E.$$

Suponha válido para $n > 2$ e provaremos para $n + 1$. Temos

$$x_i \in E,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n+1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Temos dois casos: Se

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Logo,

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = x_{n+1} \in E.$$

Se

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda \neq 0,$$

então

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Note que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n \in E,$$

Logo

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in E.$$

Portanto, por indução, $cvx(E) \subset E$. Para provamos (ii), sabemos que

$$F \subset conv(F),$$

então, por (i),

$$cvx(F) \subset conv(F).$$

Mostremos agora que $cvx(F)$ é convexo. Considere $\lambda \in (0, 1)$ e $x, y \in cvx(F)$. Então existem $n, m \in \mathbb{N}$,

$$x_i \in F, \alpha_i \geq 0,\ (i = 1, \ldots, n),\ \text{com} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = x$$

e

$$y_j \in F, \beta_j \geq 0,\ (j = 1, \ldots, m),\ \text{com} \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1 \text{ e } \sum_{j=1}^{m} y_j \beta_j = y.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\beta_j &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{m} \beta_j \\ &= \lambda + (1-\lambda) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda) y &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda) \beta_j y_j, \end{aligned}$$

como $x_i, y_j \in F$, então

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in cvx(F).$$

Logo $cvx(F)$ é convexo. Como $conv(F)$ é a interseção de todos os conjuntos convexo que contém F, então

$$conv(F) \subset cvx(F).$$

Portanto

$$conv(F) = cvx(F).$$

Provaremos agora (iii). Considere

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i;\ \lambda_i \geq,\ (i = 1, \ldots, n),\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Por (i), segue que

$$S \subset conv\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right).$$

Note que

$$E_i = 0 \cdot E_1 + \ldots + 1 \cdot E_i + \ldots + 0 \cdot E_n \subset S,\ i = 1, \ldots, n.$$

Assim

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset S.$$

Para provamos (iii), basta mostrar que S é convexo. Considere $\lambda \in (0,1)$ e $x, y \in S$. Temos

$$x_i \in E, \alpha_i \geq 0, \ (i = 1, \ldots, n), \text{ com} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = x$$

e

$$y_i \in E, \beta_j \geq 0, \ (i = 1, \ldots, m), \text{ com} \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{m} y_i \beta_i = y.$$

Considere

$$\gamma_i = \lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Sendo $E_1, E_2, \ldots, E_n$ convexos, existe $z_i \in E_i, \ (i = 1, \ldots, n)$ tal que

$$\lambda\alpha_i x_i + (1-\lambda)\beta_i y_i = \gamma_i z_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \gamma_i &= \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \beta_i.
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1,$$

então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \gamma_i &= \lambda + (1-\lambda) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

E mais,

$$\begin{aligned}
\lambda x + (1-\lambda) y &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda)\beta_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i x_i + (1-\lambda)\beta_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i z_i \in S,
\end{aligned}$$

pois $z_i \in E_i$, para $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Lema A.1. *Seja Q um subconjunto limitado de um espaço normado X. Então para qualquer $x \in X$*

$$\sup_{y \in conv(Q)} ||x - y|| = \sup_{z \in Q} ||x - z||$$

Demonstração. Sabemos que $Q \subset conv(Q)$, então

$$\sup_{y \in conv(Q)} ||x - y|| \geq \sup_{z \in Q} ||x - z||$$

Por outro lado, $y \in conv(Q)$, então, pelo Teorema A.9, existe $x_i \in Q$, $\lambda_i \geq 0$, $(i = 1, \ldots, n)$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Daí,

$$\begin{aligned} x - y &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x - x_i). \end{aligned}$$

Aplicando norma, obtemos

$$\begin{aligned} ||x - y|| &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ||x - x_i|| \\ &\leq \sup_{z \in Q} ||x - z||. \end{aligned}$$

□

Corolário A.10. *Seja Q um subconjunto limitado de um espaço normado X. Então*

$$diam(Q) = diam(conv(Q))$$

Demonstração. Temos que

$$diam(Q) = \sup_{x,y \in Q} ||x - y||.$$

Pelo Lema A.1,

$$\sup_{x,y \in Q} ||x - y|| = \sup_{x,y \in conv(Q)} ||x - y||.$$

Logo

$$diam(Q) = diam(conv(Q)).$$

□

Lema A.2. *Seja Q, Q_1 e Q_2 subconjuntos limitados de um espaço métrico completo (X, d). Então*

(i) $\alpha(Q) = 0 \Longleftrightarrow Q$ *é relativamente compacto;*

(ii) $Q_1 \subset Q_2 \Longrightarrow \alpha(Q_1) \leq \alpha(Q_2)$*;*

(iii) $\alpha(Q) = \alpha(\overline{Q})$*;*

(iv) $\alpha(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$*;*

(v) $\alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$.

Demonstração. Se $\alpha(Q) = 0$, então para todo $\varepsilon > 0$, Q está contido numa união finita de bolas em X de raio ε. Então, por definição, Q é totalmente limitado. Logo, pelo Teorema A.3, Q é relativamente compacto. Por outro lado, se Q é relativamente compacto, novamente pelo Teorema A.3, $\alpha(Q) = 0$. Assim (i) está provado. A afirmação (ii) segue do fato que

$$\alpha(Q) < diam(Q).$$

Para demonstrarmos o item (iii) note que, como $Q \subset \overline{Q}$, então, por (ii), $\alpha(Q) \leq \alpha(\overline{Q})$. Por outro lado, seja $\varepsilon > 0$, S_i conjuntos limitados de X com

$$diam(S_i) < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

Assim

$$\overline{Q} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} S_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{S_i}.$$

Como

$$diam(S_i) = diam(\overline{S_i}),$$

segue que

$$\alpha(\overline{Q}) \leq \alpha(Q).$$

Portanto

$$\alpha(\overline{Q}) = \alpha(Q).$$

Para provamos (iv), observe que

$$Q_1 \subset Q_1 \cup Q_2 \quad \text{e} \quad Q_2 \subset Q_1 \cup Q_2.$$

Por (ii), segue que

$$\alpha(Q_1) \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2) \quad \text{e} \quad \alpha(Q_2) \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2),$$

assim

$$\max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\} \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2).$$

Por outro lado, sejam

$$\alpha(Q_1) = s \quad \text{e} \quad \alpha(Q_2) = r,$$

então $\{S_i\}_{i=1}^{n_1}$ é uma cobertura finita de Q_1 com

$$diam(S_i) \leq s, \quad i = 1, \ldots, n_1$$

e $\{T_j\}_{j=1}^{n_2}$ é uma cobertura finita de Q_2 com

$$diam(T_j) \leq r, \quad j = 1, \ldots, n_2.$$

Seja $p = \max\{s, r\}$ e $n_0 = n_1 + n_2$, considere

$$\{V_k\}_{k=1}^{n_0} = \{S_k\}^{n_0} \cup \{T_k\}^{n_0}$$

que é uma cobertura finita para $Q_1 \cup Q_2$ com

$$diam(V_k) < p, \quad k = 1, \ldots, n_0.$$

Assim

$$\max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\} \geq \alpha(Q_1 \cup Q_2).$$

Portanto

$$\alpha(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}.$$

Analogamente para provar (v), partimos do fato que

$$Q_1 \cap Q_2 \subset Q_1 \quad \text{e} \quad Q_1 \cap Q_2 \subset Q_2,$$

então, por (ii), obtemos

$$\alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \alpha(Q_1) \quad \text{e} \quad \alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \alpha(Q_2).$$

Portanto

$$\alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}.$$

Assim fica provado o Lema. $\square$

Teorema A.11. *Seja (X,d) um espaço métrico completo. Se (F_n) é uma sequência decrescente de subconjuntos não vazios, fechados e limitados de X, tal que $\alpha(F_n) \to 0$, então a interseção $F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ é um subconjunto não vazio e compacto de X.*

Demonstração. Temos que F_∞ é um subconjunto fechado de X, pois é a interseção infinita de conjuntos fechados de X. Provemos que F_∞ é limitado. Note que

$$F_\infty \subset F_n, \ \forall \ n = 1, 2, \ldots$$

Daí,

$$\alpha(F_\infty) \leq \alpha(F_n).$$

Calculando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \alpha(F_\infty) &\leq \lim_{n\to\infty} \alpha(F_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha(F_\infty) = 0.$$

Então, pelo Teorema A.9, F_∞ é relativamente compacto. Porém, sendo X um espaço métrico completo, F_∞ é totalmente limitado, e consequentemente, F_∞ é limitado. Portanto F_∞ é compacto. Mostremos agora que $F_\infty \neq \emptyset$. Sejam $x_n \in F_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ e $X_n = \{x_i, i \geq n\}$, para cada $n = 1, 2, \ldots$. Note que

$$X_{n+1} \subset X_n, \quad \forall n = 1, 2 \ldots,$$

e mais,

$$X_1 = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

assim,

$$X_n \subset X_1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

consequentemente,

$$\alpha(X_n) \leq \alpha(X_1), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Pelo Lema A.1, segue que

$$\begin{aligned} \alpha(X_1) &= \alpha(X_1 \cup \ldots \cup X_n) \\ &= \alpha(X_n), \end{aligned}$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$. Por outro lado, $X_n \subset F_n$. Logo

$$\alpha(X_1) \leq \alpha(F_n)$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$. Calculando o limite, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \alpha(X_1) &\leq \lim_{n\to\infty} \alpha(F_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $\alpha(X_1) = 0$, ou seja, X_1 é relativamente compacto. Logo a sequância (x_n) tem uma subsequência convergente, digamos, com limite $x \in X$. Sendo F_∞ fechado em X, então $x \in F_\infty$. $\square$

Apêndice B

Espaço L^p

Nesta seção exibiremos algumas definição e resultados da Teoria da Medida, que podem ser encontrados em [3] e [6]. Ao longo de toda essa seção X denota um espaço de Banach.

Definição B.1. *Uma família $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X é uma* ***σ-álgebra*** *de X se:*

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{M}$,

(b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$,

(c) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{M}$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$.

Definição B.2. *Uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ é uma* ***medida*** *se:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) $\mu(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{M}$,

(c) Se (A_n) é uma sequência disjuntas de conjuntos em $\mathcal{M}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definição B.3. *Sejam $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra e μ uma medida, chamaremos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ de um* ***espaço de medida****.*

Definição B.4. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é* ***mesurável*** *se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ ao menos um dos conjuntos*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}, \quad \{x \in X : f(x) \leq \alpha\},$$

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\} \quad ou \quad \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

pertence a $\mathcal{M}$.

Teorema B.5 (Desigualdade de Young). *Sejam A e B números não negativos e $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ verificando*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então

$$A \cdot B \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Demonstração. Seja $0 < \alpha < 1$ e considere a função $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \alpha - \alpha t^{\alpha - 1} \\
&= \alpha \left(1 - \frac{1}{t^{1-\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Note que

- $\varphi'(1) = 0$,
- $\varphi'(t) < 0$, para $0 < t < 1$,
- $\varphi'(t) > 0$, para $t > 1$.

Segue que

$$\varphi(t) \geq \varphi(1), \quad \text{para} \quad t \geq 0,$$

isto é,

$$\alpha t - t^\alpha \geq \alpha - 1 \Rightarrow t^\alpha \leq \alpha t + 1 - \alpha.$$

Para $a, b \geq 0$ e $t = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, temos

$$\frac{a^2}{b^2} \leq \alpha \frac{a}{b} + (1 - \alpha),$$

assim

$$a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha) b.$$

Fazendo

$$\alpha = \frac{1}{p}, \; a = A^p \text{ e } b = B^q$$

obtemos,

$$(A^p)^{1/p} \cdot (B^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q,$$

isto é,

$$A \cdot B \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

□

Vamos denotar por $L^1(X, \mu)$, ou $L^1(X)$, ou simplesmente por L^1, o espaço das funções integráveis de X em $\mathbb{R}$. Com norma

$$||f||_{L^1} = ||f||_1 = \int_X |f| d\mu.$$

Definição B.6. *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p, q < \infty$. Definimos o conjunto*

$$L^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R};\ f \text{ é mesurável e } |f|^p \in L^1(X) \right\}.$$

Com norma

$$||f||_{L^p} = ||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Teorema B.7 (Desigualdade de Hölder)**.** *Suponha $1 < p < \infty$ e seja $f \in L^p$, $g \in L^q$, onde*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então, $f \cdot g \in L^1$ e

$$||f \cdot g||_{L^1} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^q}$$

Demonstração. Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $||f||_p \neq 0$ e $||g||_q \neq 0$. Temos que o produto $f \cdot g$ é mensurável e da Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f(x)|}{||f||_p} \quad \text{e} \quad B = \frac{|g(x)|}{||g||_q},$$

obtemos

$$\frac{|f(x)|}{||f||_p} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p||f||_p^p} + \frac{|g(x)|}{q||g||_q^q},$$

ou seja,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{||f||_p \cdot ||g||_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p||f||_p^p} + \frac{|g(x)|}{q||g||_q^q}.$$

Daí, temos que $f \cdot g$ é integrável, isto é, $f \cdot g \in L^1$ e vale

$$\int \frac{|f \cdot g|}{||f||_p \cdot ||g||_q} d\mu \leq \frac{1}{p} \frac{\int |f|^p d\mu}{||f||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int |g|^q d\mu}{||g||_q^q}$$

o que implica,

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Logo

$$||f \cdot g|| \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

$\square$

Apêndice C

Convolução de Funções

Nesta seção definimos o produto convolução de funções e estudamos algumas de suas propriedades.

Definição C.1. *Dadas duas funções reais com valores reais f e g, definimos o produto convolução entre f e g pela expressão*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy,$$

para os pontos x tais que a integral exista, isto é, a função $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x-y)g(y)$ seja integrável.

Proposição C.2. *O produto convolução satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $f * g = g * f$;
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$;
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Demonstração. Para verificarmos (i), fazemos a mudança de variável $z = x - y$ e obtemos

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-z)dz \\ &= (g * f)(x). \end{aligned}$$

No caso da propriedade (ii) temos,

$$
\begin{aligned}
[f*(g+h)](x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)[(g+h)(y)]dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)[g(y)+h(y)]dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(y)dy \\
&= (f*g)(x)+(f*h)(x).
\end{aligned}
$$

Finalmente, usando (i) e o Teorema de Fubini, obtemos

$$
\begin{aligned}
[(f*g)*h](x) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x-y)h(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-y-z)dz\, h(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x-z-y)h(y)dy\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z)(g*h)(x-z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} (g*h)(x-z)f(z)dz \\
&= [(g*h)*f](x) \\
&= [f*(g*h)](x).
\end{aligned}
$$

o que justifica (iii). □

Teorema C.3. *(Veja [8], p.242.) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $D_x g$ for limitada, então $f*g \in C^1(\mathbb{R})$ e $D_x(f*g) = f*(D_x g)$.*

Demonstração. Defina

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy.$$

Daí, pela regra de Leibniz, temos

$$\varphi'(x) = \int_{\mathbb{R}} g_x(x-y)f(y)dy. \tag{C.1}$$

Note que a integral em $(C.1)$ converge uniformemente em $-\infty < x < +\infty$, pois g_x é limitada e $f \in L^1$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
D_x(f*g)(x) &= \varphi'(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g_x(x-y)f(y)dy \\
&= [(D_x g)*f](x) \\
&= [f*(D_x g)](x).
\end{aligned}
$$

□

Combinando o Teorema C.3 com a Proposição C.2 é imediato o seguinte resultado:

Corolário C.4. *Sejam f, g duas funções de classe $C^1(\mathbb{R})$ com $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ com $D_x f$ e $D_x g$ limitadas. Então*

$$D_x(f * g) = (D_x f) * g = (D_x g) * f.$$

Teorema C.5 (Desigualdade de Young Generalizada, [8]). *Sejam $X = \mathbb{R}^n$, $C > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Suponha g uma função contínua em $X \times X$ tal que*

$$\sup_{x \in X} \int_X |g(x,y)| dy \leq C, \quad \sup_{y \in X} |g(x,y)| dx \leq C.$$

Se $f \in L^p(X)$, a função Tf definida por

$$(Tf)(x) = \int_X g(x,y) f(y) dy$$

está bem definida q.t.p., $Tf \in L^p(X)$ e $\|Tf\|_p \leq C \|f\|_p$.

Demonstração. Suponha $1 < p < \infty$ e seja q o expoente conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &\leq \left[\int_X |g(x,y)| dy\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_X |g(x,y)||f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C^{\frac{1}{q}} \left[\int_X |g(x,y)||f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados a potência p, integrando e usando Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_X |(Tf)(x)|^p dx &\leq C^{\frac{p}{q}} \int_X \int_X |g(x,y)||f(y)|^p dy dx \\ &\leq C^{\frac{p}{q}+1} \int_X |f(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p &\leq C^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \|f\|_p \\ &= C \|f\|_p. \end{aligned}$$

Esta estimativa implica, em particular, que a integral definida de $(Tf)(x)$ converge absolutamente q.t.p., de modo que o teorema está provado para o caso $1 < p < \infty$. O caso $p = 1$ é similar, porém é mais fácil e requer somente a hipótese $\int_X |g(x,y)| dx \leq C$, e o caso $p = \infty$, somente a hipótese $\int_X |g(x,y)| dy \leq C$. □

Teorema C.6 (Desigualdade de Young)**.** *(Veja [8], p.241.) Se* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R})$*, então* $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ *e*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema $C.5$ com $g(x, y) = f(x - y)$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Aliprantis, C. D. e Border, K. C., *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide*, Springer, 3ªed., New York, 2007.

[2] Aragão, G. S., *Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, (2006).

[3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[4] Botelho, G., Pellegrino, D. e Teixeira, E., *Fundamentos da Análise Funcional*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[5] Silva, E. B., *Medidas de Não Compacidade e Teoria de Interpolação*, UNICAMP, Campinas, 1992.

[6] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[7] Daleckiĭ, J.L. e Kreĭn, M.G., *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space (Translations of Mathematical Monographs v.43),* American Mathematical Society, Providence, Rhodes Island, 1970.

[8] Folland, G.B., *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications.* Jonh Wiley, 2ª Ed., New York, 1999.

[9] French, D.A., *Identification of a Free Energy Functional in an Integro-Differential Equation Model for Neuronal Network Activity.* Applied Mathematics Letters; **17** (2004) 1047-1051.

[10] Hale, K. J., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, No.25, American Mathematical Society, Rhode Island, 1988.

[11] Kubota, S., Aihara, K., *Analyzing Global Dynamics of a Neural Field Model*, Neural Processing Letters, vol. 25, 2005, pp133-141.

[12] Laing, C. R., Troy, W. C., Gutkin, B. and Ermentrout, G. B., *Multiplos Bumps in a Neural Model of Working Memory*, SIAM J. Appl. Math., **63** (2002), no. 1, 62-97.

[13] Lima, E.L.,*Curso de Análise* vol.1, 12ªed., Rio de Janeiro, IMPA(Projeto Euclides), 2007.

[14] Lima, E.L.,*Curso de Análise* vol.2, 9ªed., Rio de Janeiro, IMPA(Projeto Euclides), 2006.

[15] Macêdo, H. J.,*Existência de Soluções de Equilíbrios tipo Instanton para uma Equação de Evolução com Convolução*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2011).

[16] Malkowsky, E., Rakocevic, V., *An introduction to the Theory of Sequence Spaces and Measures of Noncompactness* Matematicki institut of SANU, Belgrados, 2000.

[17] Oliveira, C. R., *Introdução à Análise Funcional*, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[18] Pereira, A. L., *Global Attractor and Nonhomogeneous Equilibria for a Local Evolution Equation in an Unbounded Domain*, J. Diff. Equations, 226 (2006), 352-372.

[19] da Silva, S. H., Silva, M. S., *Asynptotic Behavior of Neural Fields in an Unbounded Domain*, Differential Equations and Dynamical Systems, (2014), DOI 10.1007/s12591-014-0200-3 (online).

[20] da Silva, S. H., *Properties of an equation for neural fields in a bounded domain*, Eletronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012, No.42, (2012), 1-9.

[21] da Silva, S. H., *Existence and upper semicontinuity of global attractors for neural network in a bounded domain*, Differential Equations and Dynamical Systems, Vol. 19, Nos.1,2, (2011), 87 - 96.

[22] da Silva, S. H., *Existence and upper semicontinuity of global attractor for neural fields in an unbounded domain*, Eletronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010, No.138, pp 1-12.

[23] da Silva, S. H., Perreira, A. L., *Global attractors for neural fields in a weighted space.* Matemática Contemporânea, **36** (2009) 139-153.

[24] da Silva, S. H., *Existência e continuidade do atrator global para uma equação de evolução com convolução*, Tese de Doutorado, USP, São Paulo, (2007).

[25] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro, IMPA, 1979.

[26] Teixeira, R. T., *Existência de atrator global para uma equação de evolução com convolução*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2011).

[27] Teman, R., *Infinite- Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer Verlag, New Ork, 1988.

[28] Wilson, H. R., Cowan, J. D., *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons*, Biophys. J., 12 (1972), 1-24.