Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de Soluções para Equações de Schrödinger com Campo Magnético Externo

José Luando de Brito Santos

Campina Grande-PB
Março/2016

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de Soluções para Equações de Schrödinger com Campo Magnético Externo

por

José Luando de Brito Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande-PB
Março/2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S237m Santos, José Luando de Brito.
Multiplicidade de soluções para equações de Schrödinger com campo magnético externo / José Luando de Brito Santos. – Campina Grande, 2016.
137 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer".
Referências.

1. Equações de Schrödinger. 2. Campo Magnético. 3. Categoria Lusternik-Schnirelmann. I. Nemer, Rodrigo Cohen Mota. II. Título.

CDU 517.9(043)

Multiplicidade de Soluções para Equações de Schrödinger com Campo Magnético Externo

por

José Luando de Brito Santos †

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer

Orientador

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus.

- Agradeço a minha família, por estarem incondicionalmente ao meu lado.

- Agradeço ao meu orientador e amigo professor Rodrigo, por toda valiosa ajuda e pelas palavras de sabedoria. Agradeço por toda a sua dedicação em repassar seus conhecimentos para a elaboração desta dissertação.

- Agradeço aos professores Everaldo e Denilson por participarem da banca examinadora e por suas sugestões para a melhoria deste trabalho. Agradeço aos professores suplentes, Jerffesson e Uberlandio, e a todos os outros professores do departamento, pelo incentivo durante essa etapa da minha formação acadêmica.

- Agradeço aos meus amigos da Graduação, da Pós-Graduação da UFCG e UFPB e aos quais que já passaram por essas etapas. Dada a quantidade de pessoas que eu poderia listar neste parágrafo, omitirei os nomes para evitar prováveis esquecimentos. No entanto, posso dizer que eles não só participaram de momentos de descontração, mas também tiveram presença em momentos decisivos.

Enfim, reservo esse parágrafo para agradecer à minha namorada, Jamile de Oliveira, por todo o seu apoio, amor, carinho e cuidado, que se fez presente durante essa etapa da minha vida.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções não triviais para uma classe de equações de Schrödinger envolvendo um campo magnético externo via categoria de Lusternik-Schnirelmann.

Palavras-chave: Equações de Schrödinger, Campo Magnético, Categoria de Lusternik-Schnirelmann.

Abstract

We study the existence and multiplicity of nontrivial solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations involving a external magnetic field via the Lusternik-Schnirelmann category.

Keywords: Schrödinger Equations; Magnetic Field; Lusternik-Schnirelmann Category.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $diam(\Omega)$ é o diâmetro de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$ denotam respectivamente a parte real e imaginária de um número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^M$;
- $\bar{z}$ denota o complexo conjugado de $z \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^M$;
- $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ denota a derivada normal exterior da função u;
- $\partial_j u$ é j-ésima derivada parcial de u;
- sχ_Ω denota a função característica do conjunto Ω;
- $B_r(x)$ é a bola de raio $r > 0$ e centro $x \in \mathbb{R}^N$;
- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X;
- id denota a aplicação identidade;
- C, C_1, C_2, $\ldots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^N$;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;
- $supp(u)$ denota o suporte da função u;
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;

- $L^p(\Omega, \mathbb{K}) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}; u$ é mensurável e $\int_\Omega |u|^p < \infty\}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- $|u|_{p,\Omega}$ é a norma de $u \in L^p(\Omega, \mathbb{K})$;

- $H^1(\Omega, \mathbb{K}) = \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{K}); |\nabla u| \in L^2(\Omega, \mathbb{K})\}$

- $\|u\|_\Omega$ é a norma de $H^1(\Omega, \mathbb{K})$;

- $cat_X(A)$ é a categoria de Lusternik-Schnirelmann de A em X (ver Apêndice C);

- $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das medidas de Radon finitas em $\mathbb{R}^N$ (ver Apêndice A);

- $\|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} = \nu(\mathbb{R}^N)$ é a norma de $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$;

Introdução

A equação de Schrödinger não linear

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - A(x)\right)^2\Phi + U(x)\Psi - f(|\Psi^2|)\Psi, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

tem um papel central em vários contextos físicos, tais como na física da matéria condensada e na ótica não linear [36]. O operador de Schrödinger é definido por

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - A\right)^2\Psi = -\hbar^2\Delta\Psi - \frac{2\hbar}{i}A\nabla\Psi + |A|^2\Psi - \frac{\hbar}{i}\Psi divA,$$

onde $A : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é o potencial magnético e $U : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é o potencial elétrico, Ω é domínio em $\mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$, $\hbar$ é a constante de Planck, i é a unidade imaginária, $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função de onda e f é o termo não linear. O estudo do tipo especial de solução da forma $\Psi(t,x) = e^{-iEt/\hbar}u(x)$ com $E \in \mathbb{R}$ para (1), quando $\hbar$ é suficientemente pequeno, leva a procura por soluções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ para a equação de Schrödinger estacionária

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - A\right)^2 u + V(x)u = f(|u|^2)u, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

sendo $V(x) = U(x) - E$. No caso particular em que $V \equiv 1$, vemos que u é uma solução de (2) se, e somente se, a função $v(x) = u(\hbar x)$ é solução para a equação

$$\left(\frac{1}{i}\nabla - A_\lambda\right)^2 v + v = f(|v|^2)v, \quad x \in \Omega_\lambda, \tag{3}$$

onde $\lambda = \hbar^{-1}, A_\lambda(x) = A(\lambda^{-1}x)$ e $\Omega_\lambda = \lambda\Omega$.

O caso em que o campo magnético não está presente ($A = 0$) tem sido amplamente estudado na literatura, por exemplo, [5], [6], [8], [9], [20], [24], [35], [41], [42], e as demais referências citadas nesses trabalhos. Resultados de existência para o caso magnético podem ser encontrados em [1], [3], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [22], [28], [31], [32], [37], [38], [39], [40]. Em [3], os autores provaram que se f é uma função superlinear com crescimento subcrítico, então para $\lambda \geq 0$ suficientemente grande, o número de soluções não triviais do problema de Dirichlet para a equação em (3) é pelo menos a categoria [1] de Ω.

Motivados pelos trabalhos citados, é natural que se pergunte, se o mesmo tipo de resultado é válido para o problema com o campo magnético. Assim, seguindo [3] vemos que os autores apresentam uma resposta positiva a essa questão. Desta forma os mesmos relacionaram o número de soluções para o problema (P_λ) com a topologia do conjunto Ω, quando o parâmetro λ é suficientemente grande.

No Capítulo 1, seguindo [25], enunciamos e provamos um Lema de Concentração-Compacidade (Lema 1.2), que caracteriza a falta de compacidade da imersão de $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Tal lema para o caso $A = 0$, pode ser visto em Willem [44]. Sua utilidade aparecerá no Capítulo 3.

No Capítulo 2, seguindo [3], vemos que o campo magnético não desempenha papel algum sobre o número de solução de (3) em Ω_λ, e portanto um resultado do mesmo espírito de [9] é válido. Usando resultados da teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman, estudamos a multiplicidade de solução para o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \left(-i\nabla - A\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\right)^2 u + u & = & f(|u|^2)u, & \text{em} \quad \Omega_\lambda, \\ u & = & 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega_\lambda, \end{array} \right. \tag{P_λ}$$

onde λ é um parâmetro positivo, $\Omega_\lambda := \lambda\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 3$, $A \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz:

(f_0) $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$;

(f_1) $f(s) = 0$ para $s < 0$ e $f(s) = o(1)$ na origem;

(f_2) Existe $q \in (2, 2^*)$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{(q-2)/2}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{f'(s)}{s^{(q-4)/2}} = 0$$

[1] Veja o Apêndice C para detalhes sobre $cat_\Omega(\Omega)$.

onde $2^* := \frac{2N}{N-2}$;

(f_3) Existe $\theta > 0$ tal que

$$0 < \frac{\theta}{2}F(s) \leq sf(s), \quad \text{para cada} \quad s > 0,$$

onde $F(s) := \int_0^s f(t)dt$;

(f_4) $f'(s) > 0$, para cada $s > 0$.

Sendo mais preciso provaremos o seguinte

Teorema 0.1. *Existe $\lambda^* > 0$ tal que, para cada $\lambda > \lambda^*$, o problema (P_λ) tem pelo menos $cat(\Omega_\lambda)$ soluções fracas não triviais.*

Na prova aplicaremos métodos variacionais, teoria de categoria e a técnica introduzida por Benci e Cerami [8]. Consiste em fazer comparações precisas entre a categoria de alguns subníveis de energia do funcional associado e a categoria do conjunto Ω.

Afim de obter essas comparações, precisaremos fazer um estudo cuidadoso do comportamento de alguns níveis minimax relacionados com o problema (P_λ).

No Capítulo 3, retomamos o estudo do problema em [8] no contexto de equações não lineares na presença do campo magnético. Estamos interessados em estimar, via categoria, a quantidade de soluções do problema

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{i}\nabla - A\right)^2 u + \kappa u = |u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_κ}$$

onde κ é uma parâmetro real positivo, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 3$, i é a unidade imaginária, $A : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma aplicação contínua e $p \in (2, 2^*)$. Observamos que (P_κ) pode ser escrito na forma do problema (2) fazendo $v(x) = (1/\kappa)^{1/(p-2)}u(x)$ e $\hbar = 1/\kappa$. Portanto, o método apresentado no Capítulo 2 se aplica ao problema (P_κ); assim, se κ é suficientemente grande, obtemos a mesma conclusão do Teorema 0.1. Por outro lado, tal como em [8], veremos que para cada κ fixo, se p estiver próximo de 2^*, podemos estimar o número de soluções do problema (P_κ) em termos da teoria de Categoria e da topologia do domínio. Mais especificamente, estudamos o seguinte resultado:

Teorema 0.2. *Existe uma função* $\overline{p} : [0, +\infty) \longrightarrow (2, 2^*)$ *tal que para todo* $p \in [\overline{p}(\kappa), 2^*)$*, o problema* (P_κ) *possui, pelo menos,* $cat_\Omega(\Omega)$ *soluções não triviais.*

Para a prova desse teorema, bem como já mencionado, procederemos de maneira semelhante à demonstração do Teorema 0.1

No Apêndice A, enunciamos e demonstramos alguns teoremas, entre eles está a desigualdade diamagnética, que foi bastante útil para demonstrarmos o Lema de Concentração-Compacidade (Lema 1.2) no Capítulo 1. Além disso, complementamos o apêndice com resultados de Teoria da Medida, com o intuito de facilitar o entendimento do mesmo.

No Apêndice B, verificamos a diferenciabilidade do funcional energia associado ao problema (P_λ) e motivamos a definição de solução fraca, mostrando o porquê de considerar as soluções do problema como sendo os ponto críticos do funcional energia.

Para finalizar, no Apêndice C, enunciamos resultados de categoria, ferramenta principal deste trabalho, e Homologia. Acreditamos que com esses apêndices, o leitor venha a ter uma melhor compreensão ao longo desta dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

O propósito desse capítulo, que foi fundamentado no artigo de Arioli e Szulkin [25], é apresentar um lema de concentração-compacidade, que será bastante útil no Capítulo 3. Aqui iremos assumir conceitos e resultados da Análise Funcional, dos Espaços de Sobolev e da Teoria da Medida e, quando necessário, destacaremos resultados auxiliares que estarão presentes nos apêndices.

A primeira seção introduz o operador de Schörodinger Δ_A e o espaço $\mathcal{D}_A^{1,2}$, onde A é um campo magnético. Na seção seguinte, fazendo uso da desigualdade diamagnética (ver Apêndice A) mostraremos uma imersão que será bastante importante para provar o lema citado inicialmente e para o resto do trabalho. Finalizamos este capítulo com a prova de uma versão do lema de Concentração-Compacidade com a presença de um campo magnético.

1.1 Operador Δ_A, Espaços $\mathcal{D}_A^{1,2}$ e H_A^1

A seguir expomos o operador de Schrödinger com o objetivo de motivar a definição de dois espaços de Hilbert que possuem a presença do campo magnético A, e, quando necessário, faremos referências para uma melhor compreensão.

Uma discussão sobre o operador de Schrödinger Δ_A, definido como

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - A(x)\right)^2 \Psi = -\hbar^2 \Delta\Psi - \frac{2\hbar}{i} A\nabla\Psi + |A|^2\Psi - \frac{\hbar}{i}\Psi divA,$$

pode ser encontrada em [29, Capítulo XV] e [33, Apêndice A], onde $A : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é o potencial magnético, Ω é domínio em $\mathbb{R}^N$, $\hbar$ é a constante de Planck, i é a unidade imaginária, $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função de onda e f é o termo não linear. No entanto, fazendo algumas simplificações no tipo de soluções que procuramos, conforme mencionado no início da introdução, obtemos

$$\Delta_{A_\lambda} u := -\Delta u + 2iA_\lambda.\nabla u + |A_\lambda|^2 u + iu\mathrm{div}(A_\lambda), \quad x \in \Omega$$

onde

$$\left(-i\nabla - A_\lambda\right)^2 u := \Delta_{A_\lambda} u$$

e $\lambda > 0$ é um parâmetro em $\mathbb{R}$. Claramente, quando o campo magnético $A = 0$, temos

$$(-i\nabla)^2 u = -\Delta u.$$

Agora, passamos a definir os espaços que iremos trabalhar nesse capítulo. Seja Θ um subconjunto de $\mathbb{R}^N$. Definimos

$$\nabla_A u := (\nabla + iA)u \quad \text{ou} \quad \nabla_A := \nabla + iA \tag{1.1}$$

e

$$H_A^1(\Theta, \mathbb{C}) := \left\{u \in L^2(\Theta, \mathbb{C}); |\nabla_A u| \in L^2(\Theta, \mathbb{R})\right\}$$

e para $N \geq 3$,

$$\mathcal{D}_A^{1,2}(\Theta, \mathbb{C}) := \{u \in L^{2^*}(\Theta, \mathbb{C}); |\nabla_A u| \in L^2(\Theta, \mathbb{R})\},$$

onde $2^* := 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev (para $A = 0$, consulte Willem [44]). Ambos $H_A^1(\Theta, \mathbb{C})$ e $\mathcal{D}_A^{1,2}(\Theta, \mathbb{C})$ são espaços de Hilbert com produto interno, respectivamente,

$$\int_\Theta \nabla_A u \cdot \overline{\nabla_A v} + u\bar{v} dx$$

e

$$\int_\Theta \nabla_A u \cdot \overline{\nabla_A v} dx. \tag{1.2}$$

Pela Seção 2 de Esteban e Lions [22] e Teorema 7.22 de [30], $C_0^\infty(\Theta, \mathbb{C})$ é denso em $H_A^1(\Theta, \mathbb{C})$ e $\mathcal{D}_A^{1,2}(\Theta, \mathbb{C})$. (Em [22], $\mathcal{D}_A^{1,2}(\Theta, \mathbb{C})$ tem sido definido como o fecho de $C_0^\infty(\Theta, \mathbb{C})$ com relação a norma correspondente ao produto interno em (1.2)). Suponha $u \in H_A^1(\Theta, \mathbb{C})$. Pela desigualdade diamagnética (veja Apêndice A da dissertação), $|u| \in H^1(\Theta, \mathbb{C})$, e portanto $u \in L^p(\Theta, \mathbb{C})$ para qualquer $p \in [2, 2^*]$.

Observação 1.1. Supondo $A \in L^\alpha_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, onde $\alpha = N$, se $N \geq 3$ e $\alpha > 2$, se $N = 2$. Se Θ é um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ com medida finita, então as normas dos espaços $H_A^1(\Theta, \mathbb{C})$ e $H^1(\Theta, \mathbb{C})$ são equivalentes. Para mais detalhes, o leitor pode ver Arioli e Szulkin [25, Lema 2.3].

Observação 1.2. Neste capítulo definimos ∇_A como em (1.1), no entanto, nos próximos capítulos, faremos algumas modificações em ∇_A, para poder fazer corresponder com o operador de Schrödinger Δ_A.

1.1.1 Um resultado de Imersão Compacta

Como pode ser observado em [44, Lema 1.9], temos a imersão compacta $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ para todo $p \in [1, 2^*)$. Seguindo [25, Lema 2.6], não é diferente para $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ e vale

$$\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}).$$

Sendo mais preciso, temos:

Lema 1.1. (Lema de Imersão) Seja $A \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e suponha $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Então, existe uma subsequência de (u_n), verificando

(i) $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, para qualquer $p \in [2, 2^*)$;

(ii) $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$.

A conclusão é a mesma se $u_n \rightharpoonup u$ em $H_A^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos, a saber, $u = 0$ e $u \neq 0$.
Caso I. $u = 0$.
Sejam $Re(u_n)$ e $Im(u_n)$ as partes real e imaginária de u_n. Então, $u_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ se, e somente se,

$$Re(u_n) \rightharpoonup 0 \text{ em } \mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ e } Im(u_n) \rightharpoonup 0 \text{ em } \mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$$

Pela observação A.1 (ver Apêndice A),

$$\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{K}) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N,\mathbb{K}), \quad \mathbb{K}=\mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R},$$

de onde segue que $u_n \rightharpoonup 0$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, e

$$Im(u_n), Re(u_n) \rightharpoonup 0 \text{ em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}). \tag{1.3}$$

Como $(Im(u_n)), (Re(u_n))$ são limitadas em $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, temos, pelo Teorema A.1 e pela desigualdade diamagnética,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Re(u_n)|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla |Re(u_n)||^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A Re(u_n)|^2 \leq C^2,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Im(u_n)|^2 \leq C^2$$

ou seja, que $(Im(u_n)), (Re(u_n))$ são limitadas em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$. Passando se necessário a uma subsequência, $(Im(u_n))$ e $(Re(u_n))$ convergem fraco em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, digamos,

$$Re(u_n) \rightharpoonup v_1 \text{ e } Im(u_n) \rightharpoonup v_2 \text{ em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) \tag{1.4}$$

e, por imersão contínua $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, obtemos

$$Re(u_n) \rightharpoonup v_1 \text{ e } Im(u_n) \rightharpoonup v_2 \text{ em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}). \tag{1.5}$$

Por isto e (1.3) segue pela unicidade do limite fraco que $v_1 = 0$ e $v_2 = 0$. Consequentemente, por (1.4), $u_n = Re(u_n) + iIm(u_n) \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$. Portanto, por imersão compacta, a menos subsequência, obtemos (i) e (ii).

Caso II. $u \neq 0$.

Basta definir $v_n := u_n - u$. Logo, $v_n \rightharpoonup 0$, e argumentando como no caso anterior, obtemos (i) e (ii), e o resultado segue. □

1.2 Lema de Concentração-Compacidade para o Espaço $\mathcal{D}_A^{1,2}$

No que segue estudaremos a falta de compacidade da imersão de $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, que será útil no Capítulo 3 desta dissertação, quando abordamos um resultado paralelo ao encontrado em Willem [44, Lema 5.23.]. Seguindo as linhas de Arioli e Szulkin [25, Lema 3.1] tratamos de um Lema de Concentração-Compacidade com a presença de um campo magnético A não trivial. O caso real com $A = 0$ pode ser encontrado em Willem [44, Lema 1.40].

Com o objetivo de complementar a leitura do lema e sua demonstração, reservamos o Apêndice A para suprir possíveis dúvidas de notações, definições e ainda será bastante útil recordar a desigualdade diamagnética, Teorema A.2.

Por simplicidade estamos denotando $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} := \|\cdot\|$.

Lema 1.2. Suponha $N \geq 3$ e $A \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$. Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ uma sequência tal que

(i) $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$,

(ii) $|\nabla_A(u_n - u)|^2 \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$,

(iii) $|u_n - u|^{2^*} \rightharpoonup \nu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$,

(iv) $u_n \to u$ q.s. em $\mathbb{R}^N$.

Defina

$$\mu_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |\nabla_A u_n|^2 dx \;\text{ e }\; \nu_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |u_n|^{2^*} dx.$$

Então,

(1) $\|\nu\|^{2/2^*} \leq S^{-1}\|\mu\|$,

(2) $\nu_\infty^{2/2^*} \leq S^{-1}\mu_\infty$

(3) $\limsup_{n\to\infty} |\nabla_A u_n|_2^2 = |\nabla_A u|_2^2 + \|\mu\| + \mu_\infty$,

(4) $\limsup_{n\to\infty} |u_n|_{2^*}^{2^*} = |u|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| + \nu_\infty$.

Além disso, se $u=0$ e $\|\nu\|^{2/2^*}=S^{-1}\|\mu\|$, então μ e ν são medidas singulares e estão concentradas em um único ponto.

Demonstração. A prova será dividida em dois casos, $u=0$ e $u\neq 0$.

Caso I. $u=0$.

Recordando a definição de ∇_A, temos que para todo $h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ (ou $h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(hu_n)|^2dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(hu_n)+iAu_nh|^2dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|h(\nabla u_n+iAu_n)+u_n\nabla h|^2dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|h\nabla_A u_n+u_n\nabla h|^2dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|h\nabla_A u_n|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}|u_n\nabla h|^2dx+\\
&\quad +2Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}\nabla_A u_n.\overline{hu_n\nabla h}dx\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(hu_n)|^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}(|h\nabla_A u_n|^2+|u_n\nabla h|^2)dx+2Re\int_{\mathbb{R}^N}h\bar{u}_n\nabla_A u_n.\nabla hdx. \quad (1.6)$$

(O leitor pode observar que para quaisquer $a,b\in\mathbb{C}^M$, tem-se $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2Re(a.\bar{b})$. Além disso, $\int_{\mathbb{R}^N}Re(a)dx=Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}adx\right)$).

Afirmação 1.1. Para todo $h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(hu_n)|^2dx\to\int_{\mathbb{R}^N}|h|^2d\mu,\quad n\to\infty. \quad (1.7)$$

De fato, por (i), e como do Lema 1.1, vale a imersão compacta $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})\hookrightarrow L^2_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, temos $u_n\to 0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, e desde que $supp(h)\subset B_R(0):=B_R$, onde B_R indica a bola aberta de centro na origem e raio $R>0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^2|\nabla h|^2dx=\int_{B_R}|u_n|^2|\nabla h|^2dx\le C\int_{B_R}|u_n|^2dx\to 0, \quad (1.8)$$

quando $n\to\infty$, e combinando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, obtemos também

$$\begin{aligned}
\left|Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} h\bar{u}_n\nabla_A u_n.\nabla h dx\right)\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} h\bar{u}_n\nabla_A u_n.\nabla h dx\right| && (1.9)\\
&\leq CC_0\int_{\mathbb{R}^N}|u_n||\nabla_A u_n|dx\\
&\leq CC_0\left(\int_{B_R}|u_n|^2\right)^{1/2}\left(\int_{B_R}|\nabla_A u_n|^2\right)^{1/2}, && (1.10)
\end{aligned}$$

onde C_0, C são constantes que limitam h e ∇h, e é bom observar que para qualquer $z \in \mathbb{C}$, tem-se $|R(z)| \leq |z|$. Logo, fazendo $n \to \infty$ em (1.9), temos

$$\left|Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} h\bar{u}_n\nabla_A u_n.\nabla h dx\right)\right| \leq CC_0\left(\int_{B_R}|u_n|^2\right)^{1/2}\left(\int_{B_R}|\nabla_A u_n|^2\right)^{1/2} \to 0, \quad (1.11)$$

desde que (u_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,2}_A(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$. Temos ainda pelo item (ii),

$$\int_{\mathbb{R}^N}|h|^2|\nabla_A u_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N}|h|^2 d\mu \quad (1.12)$$

(ver no Apêndice A, definição de convergência fraca em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$). Consequentemente, aplicando (1.8)-(1.11)-(1.12) em (1.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(hu_n)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|h\nabla_A u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N}|u_n\nabla h|^2 dx +\\
&\quad +2Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} h\bar{u_n}\nabla_A u_n.\nabla h dx\right) \to \int_{\mathbb{R}^N}|h|^2 d\mu,
\end{aligned}$$

que segue a afirmação. Além disso, combinando respectivamente as desigualdades de Sobolev e a diamagnética, vemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|hu_n|^{2^*}dx\right)^{2/2^*} = ||hu_n||^2_{2^*} \leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla|hu_n||^2 dx \leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(hu_n)|^2 dx,$$

ou seja,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|hu_n|^{2^*}dx\right)^{2/2^*} \leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(hu_n)|^2 dx. \quad (1.13)$$

Portanto, fazendo $n \to \infty$ em (1.13), segue de (iii) e da Afirmação 1.1

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\nu\right)^{2/2^*} \leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\mu, \quad h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}). \tag{1.14}$$

Agora, considere a sequência $(h_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dada por

$$h_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |x| \leq n, \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq n+1, \end{cases}$$

onde $0 \leq h_n(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Note que, $h_n(x) \to 1$, quase sempre em $\mathbb{R}^N$, $|h_n(x)| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\int_{\mathbb{R}^N} d\nu = \nu(\mathbb{R}^N) < \infty$ (lembre-se que μ e ν são medidas finitas), de onde, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, os seguintes limites

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^2 d\nu \to \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\nu = \|\nu\| \tag{1.15}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^{2^*} d\mu \to \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\mu = \|\mu\|. \tag{1.16}$$

Assim, por (1.14), temos em particular que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^{2^*} d\nu\right)^{2/2^*} \leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^2 d\mu,$$

e, por (1.15)-(1.16)

$$\|\nu\| \leq S^{-1} \|\mu\|,$$

que segue (1) do Lema, para $u = 0$.

Seja $\psi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que

$$\psi_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |x| \geq R+1, \\ 0, & \text{se} \quad |x| \leq R. \end{cases}$$

Então, mais uma vez combinando as desigualdades de Sobolev e diamagnética,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_R u_n|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A(\psi_R u_n)|^2 dx, \tag{1.17}$$

que nos conduz a

Afirmação 1.2.

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_R u_n|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}\leq S^{-1}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A u_n|^2\psi_R^2dx \tag{1.18}$$

De fato, por um cálculo similar feito antes da Afirmação 1.1, temos

$$|\nabla_A(\psi_R u_n)|^2=|\psi_R\nabla_A u_n|^2+|u_n\nabla\psi_R|^2+2Re\left(\psi_R\bar{u}_n\nabla_A u_n.\nabla\psi_R\right),$$

implicando

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(\psi_R u_n)|^2dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|\psi_R\nabla_A u_n|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}|u_n\nabla\psi_R|^2dx+\\ &\quad +2Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}\psi_R\bar{u}_n\nabla_A u_n.\nabla\psi_R dx\right).\end{aligned} \tag{1.19}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder e recordando a definição da função ψ_R e ainda sabendo que (u_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,2}_A(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, obtemos

$$\begin{aligned}\left|Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}\bar{u}_n\psi_R\nabla\psi_R.\nabla_A u_n dx\right)\right| &\leq \left|\int_{|x|\leq R+1}|u_n||\psi_R||\nabla\psi_R||\nabla_A u_n dx\right|\\ &\leq |\psi_R|_\infty|\nabla\psi_R|_\infty\int_{|x|\leq R+1}|u_n||\nabla_A u_n|dx\\ &\leq C\left(\int_{|x|\leq R+1}|u_n|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{|x|\leq R+1}|\nabla_A u_n|^2dx\right)^{1/2}\to 0,\end{aligned}$$

quando $n\to\infty$, uma vez que $u_n\to 0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, onde $C=|\psi_R|_\infty|\nabla\psi_R|_\infty$, e, obtemos também

$$\begin{aligned}0\leq\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^2|\nabla\psi_R|^2dx &= \int_{|x|\leq R+1}|u_n|^2|\nabla\psi_R|^2dx\\ &\leq |\nabla\psi_R|^2_\infty\int_{|x|\leq R+1}|u_n|^2dx\to 0.\end{aligned}$$

Neste caso, aplicando os dois últimos limites em (1.19), verifica-se

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(\psi_R u_n)|^2dx=\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_R\nabla_A u_n|^2dx. \tag{1.20}$$

Portanto, de (1.17) e (1.20) decorre

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_R u_n|^{2^*}dx\right)^{2/2^*} &\leq S^{-1}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(\psi_R u_n)|^2dx\\ &= S^{-1}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_R\nabla_A u_n|^2dx,\end{aligned}$$

que verifica a afirmação.

Observe agora que

$$\begin{aligned}\int_{|x|>R+1}|\nabla_A u_n|^2.1dx &= \int_{|x|>R+1}|\nabla_A u_n|^2\psi_R^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A u_n|^2\psi_R^2dx\\ &= \int_{|x|\geq R}|\nabla_A u_n|^2\psi_R^2dx \leq \int_{|x|\geq R}|\nabla_A u_n|^2dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{|x|>R+1}|u_n|^{2^*}dx &= \int_{|x|>R+1}|u_n|^{2^*}\psi_R^{2^*}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2^*}\psi_R^{2^*}dx =\\ &= \int_{|x|\geq R}|u_n|^{2^*}\psi_R^{2^*}dx \leq \int_{|x|\geq R}|u_n|^{2^*}dx,\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\int_{|x|>R+1}|\nabla_A u_n|^2.1dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A u_n|^2\psi_R^2dx \leq \int_{|x|\geq R}|\nabla_A u_n|^2dx \tag{1.21}$$

e

$$\int_{|x|>R+1}|u_n|^{2^*}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2^*}\psi_R^{2^*}dx \leq \int_{|x|\geq R}|u_n|^{2^*}dx. \tag{1.22}$$

Então, segue de (1.21) que

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R+1}|\nabla_A u_n|^2dx &\leq \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A u_n|^2\psi_R^2dx\\ &= \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq R}|\nabla_A u_n|^2dx,\end{aligned}$$

e pelo Teorema do Confronto,

$$\mu_\infty := \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R+1}|\nabla_A u_n|^2dx = \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A u_n|^2\psi_R^2dx. \tag{1.23}$$

Observe ainda que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u_n|^2 dx = \int_{R^N} \psi_R^2 |\nabla_A u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R^2)|\nabla_A u_n|^2 dx.$$

Isto e (ii) acarretam

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u_n|^2 dx &= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^2 |\nabla_A u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R^2)|\nabla_A u_n|^2 dx \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^2 |\nabla_A u_n|^2 dx + \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R^2)|\nabla_A u_n|^2 dx \\
&= \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^2 |\nabla_A u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R^2) d\mu,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u_n|^2 dx = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^2 |\nabla_A u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R^2) d\mu. \tag{1.24}$$

Fazendo $R \to \infty$ em (1.24), e desde que ocorra (1.23), obtemos do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u_n|^2 dx &= \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^2 |\nabla_A u_n|^2 dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R^2) d\mu \\
&= \mu_\infty + \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R^2) d\mu \\
&= \mu_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\mu = \mu_\infty + \|\mu\|,
\end{aligned}$$

o que prova (3) para $u = 0$. Para provar (4), vejamos inicialmente que por (1.22) e usando o Teorema do Confronto,

$$\nu_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |u_n|^{2^*} dx = \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^{2^*} |u_n|^{2^*} dx. \tag{1.25}$$

Agora, se argumentarmos como na prova de (3) e usarmos (1.25) e desde que ocorra (iii), segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx &= \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^{2^*} |u_n|^{2^*} dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R^{2^*}) d\nu \\
&= \nu_\infty + \|\nu\|.
\end{aligned}$$

Portanto, segue (4). Agora nos resta provar (2). Então, de (A.3), obtemos

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_R u_n|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}\leq S^{-1}\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A u_n|^2\psi_R^2 dx,$$

e por (1.23) e (1.25), segue (2).

Caso II. $u\neq 0$.

Defina $v_n := u_n - u$. Então,

$$v_n \rightharpoonup 0 \text{ em } \mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) \text{ e } |\nabla_A v_n|^2 \rightharpoonup \mu, \quad |v_n|^{2^*}\rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}), \tag{1.26}$$

assim (1) é satisfeito também se $u\neq 0$, pois como já mostramos, a desigualdade correspondente é válida para (v_n). De (i) e como a parte real $Re:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$ de um número complexo é uma aplicação linear contínua, temos

$$Re\left(\int_{|x|\geq R}\nabla_A u_n.\overline{\nabla_A u}dx\right)\to\int_{|x|\geq R.}|\nabla_A u|^2dx$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq R}|\nabla_A v_n|^2dx &= \limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq R}|\nabla_A u_n-\nabla_A u|^2dx\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left[\int_{|x|\geq R}(|\nabla_A u_n|^2+|\nabla_A u|^2)dx-2Re\left(\int_{|x|\geq R}\nabla_A u_n.\overline{\nabla_A u}dx\right)\right]\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left[\int_{|x|\geq R}|\nabla_A u_n|^2dx\right]+\int_{|x|\geq R}|\nabla_A u|^2dx-2\int_{|x|\geq R}|\nabla_A u|^2dx,\\
&= \limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq R}|\nabla_A u_n|^2-\int_{|x|\geq R}|\nabla_A u|^2dx. \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

Passando ao limite quando $R\to\infty$ em (1.27) e aplicando o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue, ficamos com

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq R}|\nabla_A v_n|^2dx=\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq R}|\nabla_A u_n|^2=\mu_\infty.$$

Portanto,

$$\mu_\infty=\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq R}|\nabla_A v_n|^2dx. \tag{1.28}$$

Como (u_n) é limitada em $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, temos por imersão contínua $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, que (u_n) é limitada em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, e pelo item (ii) do Lema 1.1, $u_n \to u$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$, então, segue por Brézis-Lieb (ver [44, Lema 1.32.]),

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{|x|\geq R}|u_n|^{2^*}dx - \int_{|x|\geq R}|u_n-u|^{2^*}dx\right) = \int_{|x|\geq R}|u|^{2^*}dx.$$

Fazendo $R\to\infty$ na expressão acima e usando mais uma vez o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\int_{|x|\geq R}|u_n|^{2^*}dx - \int_{|x|\geq R}|v_n|^{2^*}dx\right) = 0,$$

que conduz a

$$\nu_\infty = \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq R}|v_n|^{2^*}dx. \tag{1.29}$$

Assim, argumentando como no **Caso I** para obter (2) usando a sequência (u_n), podemos obter (2) usando agora a sequência (v_n), uma vez que vale (1.26), (1.28) e (1.29). Resta provar (3) e (4). Sejam ψ_R definida como antes e $h := 1-\psi_R$. Então, notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A u_n|^2 h dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A(v_n+u)|^2 h dx = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A v_n + \nabla_A u|^2 h dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A v_n|^2 h dx + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A u|^2 h dx + Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} h\nabla_A v_n.\overline{\nabla_A u}dx\right).\end{aligned} \tag{1.30}$$

Como ocorre (1.26) e $h\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ (ver Apêndice A), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A v_n|^2 h dx \to \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu, \tag{1.31}$$

e, combinando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, podemos mostrar que o funcional

$$\begin{aligned} T\ :\ \mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_n \quad &\longmapsto \quad T(v_n) := Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} h\nabla_A v_n\cdot\overline{\nabla_A u}dx\right),\end{aligned}$$

pertence ao espaço $(\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}))'$. Desta forma, desde que $v_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, temos

$$T(v_n) \to 0,$$

ou melhor,

$$Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} h\nabla_A v_n.\overline{\nabla_A u}dx\right) \to 0. \tag{1.32}$$

Por consequência de (1.30), (1.31) e (1.32), decorre

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u_n|^2 hdx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A v_n|^2 hdx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u|^2 hdx + Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} h\nabla_A v_n.\overline{\nabla_A u}dx\right)\\ &\to \int_{\mathbb{R}^N} hd\mu + \int_{\mathbb{R}^N} h|\nabla_A u|^2 dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u_n|^2 hdx = \int_{\mathbb{R}^N} hd\mu + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u|^2 hdx. \tag{1.33}$$

Novamente usando o lema de Brézis-Lieb,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}N} h|u_n|^{2^*}dx - \int_{\mathbb{R}^N} h|u_n - u|^{2^*}dx\right) = \int_{\mathbb{R}^N} h|u|^{2^*}dx \tag{1.34}$$

e, como ocorre (1.26), o limite em (1.34) torna-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} h|u_n|^{2^*}dx = \int_{\mathbb{R}N} h|u|^{2^*}dx + \int_{\mathbb{R}^N} hd\nu. \tag{1.35}$$

Fixando $R > 0$ e tomando ψ_R como anteriormente, de (1.33) e (1.26) temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u_n|^2 hdx &= \limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R|\nabla_A u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)|\nabla_A u_n|^2 dx\right)\\ &= \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R|\nabla_A u_n|^2 dx + \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)|\nabla_A u_n|^2 dx\\ &= \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R|\nabla_A u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)d\mu + \int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)|\nabla_A u|^2 dx\end{aligned}$$

e, quando $R \to \infty$ e lembrando das definições de ψ_R e μ_∞, temos pelo Teorema da

Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_A u_n|^2 h dx &= \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_R|\nabla_A u_n|^2 dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)d\mu + \\
&\quad + \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)|\nabla_A u|^2 dx \\
&= \mu_\infty + \int_{R^N} d\mu + |\nabla_A u|_2^2 dx \\
&= \mu_\infty + \|\mu\| + |\nabla_A u|_2^2
\end{aligned}$$

Isto prova (3). A prova de (4), segue usando (1.35) e seguido as mesmas linhas para obter (3), veremos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}|u_n|_{2^*}^{2^*} &= \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_R|u_n|^{2^*}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)d\nu + \\
&\quad + \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)|u|^{2^*}dx \\
&= \nu_\infty + \|\nu\| + |u|_{2^*}^{2^*},
\end{aligned}$$

que nos conduz ao desejado.

Para finalizar a prova do lema, resta verificar que as medidas μ e ν são concentradas em um ponto singular. Suponhas que $u = 0$ e $\|\nu\| = S^{-1}\|\mu\|$. Recorde que de (1.14), dado $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h|^{2^*}d\nu\right)^{2/2^*} \leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|h|^2 d\mu. \tag{1.36}$$

Da desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^2 d\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} 1 d\mu\right)^{2/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h^2|^{N/N-2}d\mu\right)^{(N-2)/N},$$

ou melhor,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} h^2 d\mu\right)^{1/2} \leq \|\mu\|^{1/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h|^{2^*}d\mu\right)^{1/2^*},$$

e por (1.36), obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h|^{2^*}d\nu\right)^{1/2^*} \leq S^{-1/2}\|\mu\|^{1/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h|^{2^*}d\mu\right)^{1/2^*}, \quad \forall h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}). \tag{1.37}$$

Afirmação 1.3. $\nu(\Omega) = S^{-2^*/2}\|\mu\|^{2/N-2}\mu(\Omega)$, para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mensurável

De fato, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mensurável, defina

$$\Omega_n := \Big\{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \frac{diam(\Omega)}{3n}\Big\}.$$

observe que

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \;\text{ e }\; \Omega_n \subset \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para cada n, defina também, $\psi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ dada por

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \Omega_n \\ 0, & \text{se} \quad x \in (\Omega_n)^c_\delta, \end{cases}$$

onde $0 \leq \psi_n(x) \leq 1$, para todo $x \in \Omega$. Note que, $\psi_n(x) \to \chi_\Omega(x)$, quase sempre em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$, donde seguem pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_n|^{2^*} d\nu \to \int_{\mathbb{R}^N} |\chi_\Omega|^{2^*} d\nu = \int_\Omega 1 d\nu = \nu(\Omega),$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_n|^{2^*} d\mu \to \int_{\mathbb{R}^N} |\chi_\Omega|^{2^*} d\mu = \int_\Omega 1 d\mu = \mu(\Omega).$$

Disto e de (1.37), vemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^{2^*} d\nu\right)^{1/2^*} \leq S^{-1/2}\|\mu\|^{1/N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^{2^*} d\mu\right)^{1/2^*},$$

e quando $n \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \nu(\Omega) &\leq S^{-2^*/2}\|\mu\|^{2^*/N}\mu(\Omega) \\ &= S^{-2^*/2}\|\mu\|^{2/N-2}\mu(\Omega), \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^N \;\text{ mensurável }. \end{aligned}$$

Para concluir a afirmação, suponha que exista $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$ mensurável tal que $\nu(\Omega_0) < S^{-2^*/2}\|\mu\|^{2/N-2}\mu(\Omega_0)$. Da igualdade $\|\nu\| = S^{-1}\|\mu\|$ ($\|\nu\| := \nu(\mathbb{R}^N)$), decorre

$$\nu(\mathbb{R}^N) = S^{-2^*/2}\|\mu\|^{2/N-2}\mu(\mathbb{R}^N). \tag{1.38}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\nu(\mathbb{R}^N) &= \nu(\Omega_0) + \nu(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_0) \\
&< S^{-2^*/2}\|\mu\|^{2/N-2}\mu(\Omega_0) + S^{-2^*/2}\|\mu\|^{2/N-2}\mu(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_0) \\
&= S^{-2^*/2}\|\mu\|^{2/N-2}\mu(\mathbb{R}^N),
\end{aligned}$$

que conduz a uma contradição com (1.38). Afirmação 1.3 junto com (1.14), implicam

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\nu\right)^{1/2^*} \|\nu\|^{1/N} \leq \int_{\mathbb{R}^N} h^2 d\nu, \quad \forall h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

Logo, definindo (ψ_n) como anteriormente, temos

$$\nu(\Omega)^{1/2^*}\nu(\mathbb{R}^N)^{1/N} \leq \nu(\Omega)^{1/2} \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

e, por consequência, para cada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $\nu(\Omega) > 0$, temos

$$\nu(\mathbb{R}^N)^{1/N} \leq \nu(\Omega)^{1/2}\nu(\Omega)^{-1/2^*} = \nu(\Omega)^{1/N},$$

isto é, $\nu(\mathbb{R}^N) \leq \nu(\Omega)$, então, $\nu(\mathbb{R}^N) = \nu(\Omega)$ e da Proposição A.4 (veja Apêndice A), segue que as medidas μ e ν estão concentradas em um mesmo ponto singular. Portanto, fica provado o lema. $\square$

Capítulo 2

Multiplicidade de Soluções para a Equação de Schrödinger com um Campo Magnético em um Domínio em Expansão

Este capítulo é fundamentado no artigo em [3]. Discorreremos sobre resultados da teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman, que possui figura central em toda essa dissertação, para estabelecer a multiplicidade de soluções para o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(-i\nabla - A\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)^2 u + u &=& f(|u|^2)u, \quad \text{em} \quad \Omega_\lambda, \\ u &=& 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_\lambda, \end{array} \right. \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, i a unidade imaginária, $\lambda > 0$ é um parâmetro e $\Omega_\lambda := \lambda\Omega$ é um domínio em expansão.

Sem perda de generalidade, vamos supor que $0 \in \Omega$, e fixemos os números reais $R > r$ tais que $B_r(0) \subset \Omega \subset B_R(0)$ e os conjuntos

$$\Omega_r^+ := \left\{x \in \mathbb{R}^N; dist(x, \overline{\Omega}) \leq r\right\}, \quad \Omega_r^- := \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

são homotopicamente equivalentes[1] a Ω1. O campo magnético $A \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e a não

[1]Para mais detalhes consulte o Apêndice C.

linearidade f satisfaz as seguintes condições:

(f_0) $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$;

(f_1) $f(s) = 0$ para $s < 0$ e $f(s) = o(1)$ na origem;

(f_2) Existe $q \in (2, 2^*)$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{(q-2)/2}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{f'(s)}{s^{(q-4)/2}} = 0$$

onde $2^* := \frac{2N}{N-2}$;

(f_3) **(Ambrosetti-Rabinowitz)** Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \frac{\theta}{2} F(s) \leq s f(s), \quad \text{para cada} \quad s > 0,$$

onde $F(s) := \int_0^s f(t)dt$;

(f_4) $f'(s) > 0$, para cada $s > 0$;

Por consequência de $(f_0) - (f_2)$,

(F_1) Dado $\varepsilon > 0$, existe $c_\varepsilon > 0$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$f(s) \leq \varepsilon + c_\varepsilon |s|^{\frac{q-2}{2}}, \quad F(s^2) \leq \varepsilon s^2 + c_\varepsilon |s|^q,$$

e por (f_3) resulta,

(F_2) Existem constantes $C_1, C_2 \geq 0$ tai que

$$F(s^2) \geq C_1 |s|^\theta - C_2, \quad \forall s \geq 0.$$

Pode-se observar que as condições $(f_0)-(f_2)$ implicam em um crescimento subcrítico de f (condição (F_1)) de modo que podemos definir um funcional, associado ao problema (P_λ). Já a condição (f_4) permite uma caracterização adequada do nível do Passo da Montanha para resolver o problema. A partir das condições $(f_1) - (f_3)$, mostraremos que o funcional tem a Geometria do Passo da Montanha. Além disso, tendo em vista o crescimento da função f e a condição (f_3), verificaremos que o funcional associado ao problema (P_λ) satisfaz a condição de Palais-Smale sobre à variedade Nehari (que definiremos mais tarde) e, ainda, as condições são primordiais para mostrarmos que todo ponto crítico deste funcional restrito a variedade é ponto crítico do funcional em todo o espaço.

O principal objetivo desse capítulo será provar o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Supondo que $A \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ é limitado e f satisfaz $(f_0) - (f_4)$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que, para cada $\lambda > \lambda^*$, o problema (P_λ) tem pelo menos $cat_\Omega(\Omega)$ soluções fracas não triviais.*

Dissertaremos um pouco sobre o espaço em que o funcional associado ao problema (P_λ) ficará definido e a variedade Nehari associada ao mesmo, na próxima seção. Na segunda e terceira mostraremos, respectivamente, que o funcional satisfaz a condição de Palais-Smaile e verifica a geometria do passo da montanha, e na quarta seção verificaremos um resultado de compacidade restrito a variedade Nehari. A quinta e sexta seções reúne as ferramentas essenciais para provarmos o resultado principal deste capítulo, Teorema 2.1

2.1 Preliminares

Nessa seção, estabelecemos algumas notações e apresentamos alguns fatos importantes que serão utilizados ao longo deste capítulo.

Um importante resultado que usaremos é a existência de uma solução positiva de energia mínima para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f(u^2)u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u &> 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \end{cases} \tag{P_∞}$$

isto é, existe uma função positiva $w \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ verificando

$$L_\infty(w) = c_\infty \ \text{ e } \ L'_\infty(w) = 0,$$

onde

$$L_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \hat{F}(u)dx, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

e c_∞ denota o nível minimax do Passo da Montanha associado ao funcional L_∞.

O teorema abaixo mostra a existência de uma solução de energia mínima para (P_∞).

Teorema 2.2. *O problema (P_∞) tem uma solução positiva de energia mínima.*

Demonstração. O leitor pode seguir a demonstração em [19]. □

Para cada $\lambda > 0$, denotaremos por E_{A_λ} o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de $C_c^\infty(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$ com relação à norma induzida pelo produto interno

$$\langle u, v\rangle_{A_\lambda} := Re\left(\int_{\Omega_\lambda} \nabla_{A_\lambda} u.\overline{\nabla_{A_\lambda} v} + u\bar{v}\right), \tag{2.1}$$

onde

$$\nabla_{A_\lambda} u := (D^1_{A_\lambda} u, \ldots, D^N_{A_\lambda} u), \quad A_\lambda(\cdot) := A(\cdot/\lambda)$$

e

$$D^j_{A_\lambda} := -i\partial_j - A^j_\lambda, \ \text{ para } \ j = 1, \ldots N,$$

ou simplesmente

$$\nabla_{A_\lambda} := -i\nabla - A_\lambda. \tag{2.2}$$

Mais ainda para $a, b \in \mathbb{C}^M, M \in \mathbb{N}$, $ab = \sum_{j=1}^{M} a^j.b^j$, onde " $\cdot$ " é a multiplicação usual dos números complexos.

A norma induzida por (2.1) é dada por

$$\|u\|_{A_\lambda} := \left(\int_{\Omega_\lambda} |\nabla_{A_\lambda} u|^2 + |u|^2\right)^{1/2}.$$

Recorde a desigualdade diamagnética (Teorema A.2, ApêndiceA), para qualquer $u \in \mathcal{D}^{1,2}_A(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, verifica-se

$$|\nabla|u|(x)| \le |\nabla_A u(x)|, \qquad \text{q.s. em } \ \mathbb{R}^N.$$

Além disso, se $u \in \mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, então $|u| \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. O mesmo resultado para o espaço E_{A_λ} continua valendo, ou seja, para cada λ, tem-se

$$|\nabla |u|(x)| \leq |\nabla_{A_\lambda} u(x)|, \quad x \in \Omega_\lambda,$$

e, se $u \in E_{A_\lambda}$, então $|u|$ pertence ao espaço $H_0^1(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$. Para verificar isto, basta seguir as linhas da demonstração do Teorema A.2. Além do mais, pode ser visto no Apêndice A a imersão contínua

$$\mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}),$$

para cada $p \in [1, 2^*]$, e do Lema 1.1, a imersão compacta, para cada $p \in [1.2^*)$, em domínio limitado. Assim, temos os respectivos resultados para o espaço E_{A_λ}, a saber,

$$E_{A_\lambda} \hookrightarrow L^p(\Omega_\lambda, \mathbb{C}),$$

contínua, para cada $p \in [1, 2^*]$, e compacta para cada $p \in [1, 2^*)$.

Observação 2.1. Ressaltamos que se u não for uma função complexa, então por (2.2)

$$|\nabla_{A_\lambda} u(x)|^2 = |-i\nabla u(x) - A(x/\lambda)u(x)|^2 = |\nabla u(x)|^2 + |A(x/\lambda)|^2 |u(x)|^2.$$

Logo,

$$|\nabla u(x)|^2 \leq |\nabla_{A_\lambda} u(x)|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Consequentemente, temos a imersão contínua

$$E_{A_\lambda} \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

Definição 2.1. Uma função $u \in E_{A_\lambda}$ é uma solução fraca do problema (P_λ) se

$$Re\left\{\int_{\Omega_\lambda} \left(\nabla_{A_\lambda} u \overline{\nabla_{A_\lambda} v} + u\bar{v} - f(|u|^2)u\bar{v}\right) dx\right\} = 0, \quad \forall v \in E_{A_\lambda}.$$

De $(f_0) - (f_2)$, o funcional $I_\lambda : E_{A_\lambda} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} \left(|\nabla_{A_\lambda} u|^2 + |u|^2\right) dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} F(|u|^2) dx \tag{2.3}$$

está bem definido. Além disso, $I_\lambda \in C^2(E_{A_\lambda}, \mathbb{R})$ (veja o Apêndice B) com derivada

$$I'_\lambda(u)v = Re\left\{\int_{\Omega_\lambda} \left(\nabla_{A_\lambda} u \overline{\nabla_{A_\lambda} v} + u\bar{v} - f(|u|^2)u\bar{v}\right) dx\right\}, \quad \forall u, v \in E_{A_\lambda}.$$

Consequentemente, as soluções fracas de (P_λ) são precisamente os pontos críticos de I_λ [2]

Uma condição necessária para que $u \in E_{A_\lambda}$ seja ponto crítico de I_λ em E_{A_λ} é que $I'_\lambda(u)u = 0$. Esta condição define a variedade de Nehari

$$\mathcal{M}_\lambda = \left\{u \in E_{A_\lambda} \backslash \{0\}; I'_\lambda(u)u = 0\right\}. \tag{2.4}$$

2.2 A Condição de Palais-Smale

Lema 2.3. O funcional I_λ verifica a condição de Palais-Smale, isto é, cada sequência $(u_n) \subset E_{A_\lambda}$ para a qual

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |I_\lambda(u_n)| < \infty \ \text{ e } \ I'_\lambda(u_n) \to 0, \tag{2.5}$$

quando $n \to \infty$, possui uma subsequência que converge forte em E_{A_λ}.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset E_{A_\lambda}$ satisfazendo (2.5). Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$I_\lambda(u_n) \to d, \quad \text{quando} \ \ n \to \infty.$$

A sequência (u_n) é limitada em E_{A_λ}. De fato, para n suficientemente grande e desde

[2] Para detalhes sobre o porquê das soluções fracas do problema (P_λ) serem os pontos críticos do funcional I_λ, o leitor pode ver o Apêndice B deste trabalho.

que I_λ verifica a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, segue que

$$\begin{aligned}
d+1+\|u_n\|_{A_\lambda} &\geq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}I'_\lambda(u_n)u_n \\
&= \frac{1}{2}(\|u_n\|^2_{A_\lambda} - \int_{\Omega_\lambda} F(|u|^2dx) - \frac{1}{\theta}\|u_n\|_{A_\lambda} + \frac{1}{\theta}\int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2)|u|^2dx \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2_{A_\lambda} + \frac{1}{\theta}\int_{\Omega_\lambda} f(|u_n|^2)|u_n|^2 - \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} F(|u_n|^2)dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2_{A_\lambda}. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Usando (2.6), concluímos que (u_n) é limitada em E_{A_λ}, pois caso contrário, existiria uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), tal que

$$\|u_n\|_{A_\lambda} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

de onde segue

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right) \leq \frac{d+1}{\|u_n\|^2_{A_\lambda}} + \frac{1}{\|u_n\|_{A_\lambda}} \to 0, \quad n \to \infty$$

que contradiz com o fato de $\theta > 2$. Desde que E_{A_λ} é reflexividade, existem $u \in E_{A_\lambda}$ e uma subsequência de (u_n), ainda denota por (u_n), satisfazendo

$$\begin{cases}
(a) \quad u_n \rightharpoonup u \;\text{ em } E_{A_\lambda}, \text{ quando } n \to \infty, \\
(b) \quad u_n \to u \;\text{ em } L^p(\Omega,\mathbb{C}) \text{ para } p \in [1,2^*), \text{ quando } n \to \infty, \\
(c) \quad u_n(x) \to u(x) \quad \text{quase sempre em } \Omega_\lambda, \text{ quando } n \to \infty \\
(d) \quad |u_n(x)| \leq h(x), \quad \text{para alguma } h \in L^p(\Omega_\lambda,\mathbb{C}).
\end{cases}$$

Para concluirmos a prova, resta mostrar que (u_n) converge forte em E_{A_λ}. De fato, obeservemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n-u\|_{A_\lambda} &= \left(I'_\lambda(u_n)-I'_\lambda(u)\right)(u_n-u) + Re\left(\int_{\Omega_\lambda}(f(|u_n|^2)u_n - f(|u|^2)u)(\overline{u_n-u})dx\right) \\
&\leq \left(I'_\lambda(u_n)-I'_\lambda(u)\right)(u_n-u) + \left|Re\left(\int_{\Omega_\lambda}(f(|u_n|^2)u_n - f(|u|^2)u)(\overline{u_n-u})dx\right)\right| \\
&\leq \left(I'_\lambda(u_n)-I'_\lambda(u)\right)(u_n-u) + \left|\int_{\Omega_\lambda}(f(|u_n|^2)u_n - f(|u|^2)u)(\overline{u_n-u})dx\right|. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Por outro lado, segue-se de (F_1) e da imersão contínua $E_{A_\lambda} \hookrightarrow L^q(\Omega_\lambda,\mathbb{C})$ que $f(|w|^2)w \in$

$L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$, para todo $w \in E_{A_\lambda}$. Por conseguinte, usando (b) e desde que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| f(|u_n|^2)u_n - f(|u|^2)u \right|_{\frac{q}{q-1}} < \infty,$$

obtemos pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega_\lambda} (f(|u_n|^2)u_n - f(|u|^2)u)(\overline{u_n - u})dx \right| &\leq \int_{\Omega_\lambda} |f(|u_n|^2)u_n - f(|u|^2)u||u_n - u|dx \\ &\leq \left| f(|u_n|^2)u_n - f(|u|^2)u \right|_{\frac{q}{q-1}} |u_n - u|_q \to 0,\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, ou seja,

$$\left| \int_{\Omega_\lambda} (f(|u_n|^2)u_n - f(|u|^2)u)(\overline{u_n - u})dx \right| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.8}$$

Além do mais, desde que $I'_\lambda(u) \in (E_{A_\lambda})'$ e ocorram (a) e (2.5), segue-se

$$I'_\lambda(u)(u_n - u) \to 0, \quad n \to \infty \tag{2.9}$$

e

$$|I'_\lambda(u_n)(u_n - u)| \leq |I'_\lambda(u_n)|_{(E_{A_\lambda})'} \|u_n - u\|_{A_\lambda} \to 0, \quad n \to \infty \tag{2.10}$$

e, portanto, aplicando (2.8)-(2.9)-(2.10) em (2.7), obtemos

$$\|u_n - u\|_{A_\lambda} \to 0, \quad n \to \infty,$$

e segue o resultado. □

2.3 Existência de Solução

Para garantir a existência de um ponto crítico para o funcional I_λ, verificaremos que I_λ possui a Geometria do Passo da Montanha, isto é:

Lema 2.4. O funcional I_λ, para cada $\lambda > 0$, satisfaz:

(i) $I_\lambda(0) = 0$ e exitem $\rho, r > 0$ tais que $I_\lambda(u) \geq r$ com $\|u\|_{A_\lambda} = \rho$;

(ii) Existe $e \in E_{A_\lambda}$ com $I_\lambda(e) < 0$ e $\|e\|_{A_\lambda} > \rho$.

Demonstração. Prova de (i). Decorre diretamente da definição de F que $I_\lambda(0) = 0$. De (F_1), segue-se

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{A_\lambda} - \frac{\varepsilon}{2}|u|^2_{2,\Omega_\lambda} - \frac{c_\varepsilon}{2}|u|^q_{q,\Omega_\lambda}. \tag{2.11}$$

Logo, aplicando em (2.11) as imersões contínuas

$$E_{A_\lambda} \hookrightarrow L^q(\Omega_\lambda, \mathbb{C}), \quad E_{A_\lambda} \hookrightarrow L^2(\Omega_\lambda, \mathbb{C}),$$

então, existem constantes $c, \bar{c} > 0$ tais que

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{A_\lambda} - \frac{\varepsilon c}{2}\|u\|^2_{A_\lambda} - \frac{c_\varepsilon}{2}\bar{c}\|u\|^q_{A_\lambda}. \tag{2.12}$$

Tomando $\varepsilon := 1/4c$ em (2.12), ficamos

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{4}\|u\|^2_{A_\lambda} - C\|u\|^q_{A_\lambda}.$$

Desde que $2 < q$ e fixando $\rho > 0$ (ρ suficientemente pequeno) de maneira que

$$\frac{1}{4}\rho^2 - C\rho^q > \frac{1}{8}\rho^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - C\rho^{q-2} > \frac{1}{8},$$

então, obtemos

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{8}\|u\|^2_{A_\lambda} = \frac{1}{8}\rho^2 := r > 0, \quad \text{para} \quad \|u\|_{A_\lambda} = \rho,$$

mostrando (i).

Prova de (ii). Fixe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\lambda, \mathbb{R})\backslash\{0\}$ e observe que para $t > 0$

$$I_\lambda(t\varphi) = \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2_{A_\lambda} - \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} F(t^2\varphi^2)dx.$$

Como vale (F_2),

$$F(s^2) \geq C_2|s|^\theta - C_2, \quad \forall s > 0,$$

temos

$$I_\lambda(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2_{A_\lambda} - \tilde{C}_1\int_{\Omega_\lambda} |t\varphi|^\theta dx + \tilde{C}_2|\Omega_\lambda|$$

e, sendo $2 < \theta$, temos

$$I_\lambda(t\varphi) \to -\infty, \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Por fim, basta fixar $e = t_0\varphi \in E_{A_\lambda}$ para t_0 suficientemente grande para concluirmos que

$$I_\lambda(e) < 0 \quad \text{e} \quad \|e\|_{A_\lambda} > \rho,$$

que verifica (ii). □

Como consequências do Lema 2.3 e Lema 2.4, para cada $\lambda > 0$, existe $u_\lambda \in E_{A_\lambda}$ tal que $I_\lambda(u_\lambda) = b_\lambda$ e $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$, onde

$$0 < b_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\lambda(\gamma(t))$$

denota o nível do passo da montanha do funcional I_λ. Usando (f_4) e argumentando como em Willem [44, Teorema 4.2.], obtemos que b_λ pode também ser caracterizado como

$$b_\lambda = \inf_{\substack{u_\lambda \in E_{A_\lambda} \\ u_\lambda \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_\lambda(tu_\lambda) = \inf_{u_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda} I_\lambda(u_\lambda),$$

onde $\mathcal{M}_\lambda$ é a variedade Nehari definida em (2.4). Observemos que com esta caracterização, I_λ é limitado inferiormente em $\mathcal{M}_\lambda$. Além disso, seguindo os argumentos em Willem [44, Lema 4.1.], para cada $u_\lambda \in E_{A_\lambda} \backslash \{0\}$, existe um único $t_\lambda = t(u_\lambda) > 0$ tal que

$$I_\lambda(t_\lambda u_\lambda) = \max_{t \geq 0} I_\lambda(tu_\lambda).$$

A próxima proposição mostra a limitação inferir do funcional em $\mathcal{M}_\lambda$.

Proposição 2.5. Existe $\delta_0 \geq 0$ independente de λ tal que,

$$\|u\|_{A_\lambda} \geq \delta_0 \quad \text{e} \quad I_\lambda(u) \geq \delta_0,$$

para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$.

Demonstração. Para qualquer $u \in \mathcal{M}_\lambda$, temos

$$\|u\|^2_{A_\lambda} = \int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2)|u|^2 dx. \tag{2.13}$$

Por (F_1), decorre, para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2)|u|^2 dx \leq \varepsilon |u|^2_{2,\Omega_\lambda} + c_\varepsilon |u|^q_{q,\Omega_\lambda} \leq \varepsilon \|u\|^2_{A_\lambda} + c_\varepsilon C_q \|u\|^q_{A_\lambda}, \tag{2.14}$$

onde C_p é a constante de imersão $E_{A_\lambda} \hookrightarrow L^p(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$. Logo, combinando (2.13) e (2.14), vemos

$$\|u\|^2_{A_\lambda} \leq \varepsilon \|u\|^2_{A_\lambda} + c_\varepsilon C_q \|u\|^q_{A_\lambda}$$

e, sendo $q > 2$ e $u \neq 0$, tomando ε suficientemente pequeno, verifica-se

$$\|u\|^2_{A_\lambda} \geq \left(\frac{1-\varepsilon}{c_\varepsilon C_q} \right)^{\frac{1}{q-2}} =: \delta_1 > 0. \tag{2.15}$$

Agora observe, por (2.13) e (f_2),

$$\|u\|^2_{A_\lambda} \geq \frac{\theta}{2} \int_{\Omega_\lambda} F(|u|^2) dx. \tag{2.16}$$

Consequentemente, de (2.15) e (2.16),

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{A_\lambda} - \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} F(|u|^2)dx \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u\|^2_{A_\lambda} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\delta_1^2 =: \delta_2.$$

Finalmente, tomando $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue o resultado. □

Uma vez que estamos com a intenção de considerar o funcional restrito a M_λ, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.6. O funcional $I_\lambda\big|_{\mathcal{M}_\lambda}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda$ uma sequência satisfazendo

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |I_\lambda(u_n)| < \infty \quad \text{e} \quad \left(I_\lambda\big|_{\mathcal{M}_\lambda}\right)'(u_n) \to 0.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que

$$I_\lambda(u_n) \to d, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Argumentando como na prova do Lema 2.3, $(u_n) \subset E_{A_\lambda}$ é limitada. Assim, existe

$u \in E_{A_\lambda}$, tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em E_{A_λ} e, por imersão compacta

$$E_{A_\lambda} \hookrightarrow L^p(\Omega_\lambda, \mathbb{C}), \quad \forall p \in [1, 2^*),$$

$u_n \to u$ em $L^p(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$ para todo $p \in [1, 2^*)$. Por [44, Proposição 5.12.], para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(\eta_n) \subset \mathbb{R}$ verificando

$$I'_\lambda(u_n) - \eta_n G'_\lambda(u_n) = \left(I_\lambda\big|_{\mathcal{M}_\lambda}\right)'(u_n) = o_n(1), \tag{2.17}$$

onde $G_\lambda : E_{A_\lambda} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$G_\lambda(u_n) := \int_{\Omega_\lambda} (|\nabla_{A_\lambda} u_n|^2 + |u_n|^2)dx - \int_{\Omega_\lambda} f(|u_n|^2)|u_n|^2 dx = I'_\lambda(u_n)u_n,$$

de onde segue

$$G'_\lambda(u_n)u_n = 2\int_{\Omega_\lambda} (|\nabla_{A_\lambda} u_n|^2 + |u_n|^2)dx - 2\int_{\Omega} f(|u_n|^2)|u_n|^2 dx - 2\int_{\Omega_\lambda} f'(|u_n|^2)|u_n|^4 dx,$$

e visto que $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda$, temos

$$\|u_n\|^2_{A_\lambda} - \int_{\Omega_\lambda} f(|u_n|^2)|u_n|^2 dx = 0$$

e, por consequência,

$$G'_\lambda(u_n)u_n = -2\int_{\Omega_\lambda} f'(|u_n|^2)|u_n|^4 dx.$$

Usando a igualdade acima e (f_4), segue pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} G'_\lambda(u_n)u_n &= \limsup_{n\to\infty} \left(-2\int_{\Omega_\lambda} f'(|u_n|^2)|u_n|^4 dx\right) \\ &= -2\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega_\lambda} f'(|u_n|^2|u_n|^4 dx \\ &\le -2\int_{\Omega_\lambda} f'(|u|^2)|u|^4 dx \le 0. \end{aligned}$$

Afirmação 2.1. $\limsup_{n\to\infty} G'_\lambda(u_n)u_n \le -2\int_{\Omega_\lambda} f'(|u|^2)|u|^4 dx < 0.$

De fato, Se $u \neq 0$, segue a afirmação por (f_4). Caso contrário, se $u = 0$, então

$u_n \to 0$ em $L^p(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$ para todo $p \in [1, 2^*)$ e da condição (F_1), obtemos

$$0 < r \leq \|u_n\|^2_{A_\lambda} = \int_{\Omega_\lambda} f(|u_n|^2)|u_n|^2 dx \leq \varepsilon \int_{\Omega_\lambda} |u_n|^2 dx + c_\varepsilon \int_{\Omega_\lambda} |u_n|^q dx, \tag{2.18}$$

que contradiz a Proposição 2.5 quando o lado direito da desigualdade em (2.18) tende a zero, quando $n \to \infty$. Isto finaliza a prova da afirmação. Logo, pela afirmação, segue por (2.17) que $\eta_n = o_n(1)$. Neste caso, podemos novamente usar (2.17) e a afirmação para obter $I'_\lambda(u_n) = o_n(1)$. Assim, (u_n) é uma sequência $(PS)_d$ para o funcional I_λ em E_{A_λ}. A prova que (u_n) possui uma subsequência que converge forte, é a mesma encontrada no Lema 2.3. □

Como consequência dos argumentos acima, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.7. Se u é um ponto crítico de I_λ restrito a variedade de Nehari M_λ, então u é um ponto crítico não trivial de I_λ em E_{A_λ}.

Demonstração. Usando mais uma vez [44, Proposição 5.12], existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|(I_\lambda\big|_{\mathcal{M}_\lambda})'(u)\|_* = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|I'_\lambda(u) - \alpha G'_\lambda(u)\|, \tag{2.19}$$

onde G_λ é dada como na prova da Proposição 2.6. Por hipótese,

$$\left(I_\lambda\big|_{\mathcal{M}_\lambda}\right)'(u) = 0. \tag{2.20}$$

Logo, por (2.19),

$$I'_\lambda(u) = \alpha G'_\lambda(u). \tag{2.21}$$

Segue de (2.21),

$$\alpha G'_\lambda(u)u = 0. \tag{2.22}$$

Como da prova da Proposição 2.6, vale

$$G'_\lambda(u)u = -2\int_{\Omega_\lambda} f'(|u|^2)|u|^4 dx \leq 0,$$

então, segue por (f_4) e pelo fato de $u \neq 0$ que $G'_\lambda(u)u < 0$. Sendo assim, de (2.22), $\alpha = 0$, e novamente por (2.21), segue que $I'_\lambda(u) = 0$, que prova o desejado. □

2.4 Um Resultado de Compacidade

Introduziremos agora algum tipo de limitação associado a I_λ. Essa limitação é um funcional definido no espaço $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Mais especificamente, definimos $J_\infty : H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J_\infty(v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + |v|^2)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} F(|v|^2)$$

com variedade Nehari e nível do passo da montanha dados por, respectivamente,

$$\mathcal{N}_\infty := \left\{v \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})\backslash\{0\}; J'_\infty(v)v = 0\right\}$$

e

$$c_\infty := \inf_{v \in \mathcal{N}_\infty} J_\infty(v).$$

No que segue, veremos um resultado de compacidade restrito à variedade Nehari $\mathcal{N}_\infty$, que será crucial em nossos argumentos. Para sua prova seguiremos argumentando ao longo da demonstração encontrada em Alves [2, Teorema 3.1].

Proposição 2.8. Suponha que $(v_n) \subset \mathcal{N}_\infty$ é tal que $J_\infty(v_n) \to c_\infty$. Então, ocorre um dos casos a seguir:

(i) $v \neq 0$ e $v_n \to v$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ com $v(x) > 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$, $J_\infty(v) = c_\infty$ e $J'_\infty(v) = 0$;

(ii) Existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ com $|y_n| \to \infty$ tal que a sequência $\tilde{v}_n := v_n(. + y_n)$ converge fraco para $\tilde{v} \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Além disso, a função $\tilde{v}$ tem a mesma propriedade de v em (i) acima.

Demonstração. Assumindo a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e desde $J_\infty(v_n) \to c_\infty$, segue argumentando como na Prova do Lema 2.3, que a sequência (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Assim, passando se necessário a uma subsequência, podemos assumir que existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\begin{cases} (a) \;\; v_n \rightharpoonup v \;\; \text{em } H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ quando } n \to \infty, \\ (b) \;\; v_n \to v \;\; \text{em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ para cada } p \in [1, 2^*) \text{ quando } n \to \infty, \\ (c) \;\; v_n(x) \to v(x) \;\; \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N, \text{ quando } n \to \infty, \\ (d) \;\; |v_n(x)| \leq h(x), \;\; \text{para alguma } h \in L^p(\Omega_\lambda, \mathbb{C}). \end{cases}$$

Usando o Princípio Variacional de Ekeland, que pode ser visto em [44, Teorema 8.5], mostra-se que (v_n) o limite:

Afirmação 2.1.

$$J'_\infty(v_n) \to 0 \;\; \text{em} \;\; (H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}))'.$$

Assumindo a Afirmação por um momento, iremos dividir o estudo em dois casos, a saber $v \neq 0$ e $v = 0$.

Caso I: $v \neq 0$**.**

Pela afirmação,

$$|J'_\infty(v_n)v| \leq \|J'_\infty(v_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))'} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Além disso, podemos verificar que $v \in \mathcal{N}_\infty$. De fato, será suficiente mostrar o limite

$$\lim_{n \to \infty} J'_\infty(v_n)v = J'_\infty(v)(v). \tag{2.23}$$

Sabemos que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n . \nabla v + v_n v) dx \to \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx. \tag{2.24}$$

Resta provar que

$$\varphi(v_n) := \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n^2) v_n v \to \int_{\mathbb{R}^N} f(v^2) v^2 =: \varphi(v). \tag{2.25}$$

Caso contrário, existiriam uma subsequência de (v_n), ainda denotada por (v_n), e $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$|\varphi(v_n) - \varphi(v)| \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Dado $r > 0$; sendo $K_r := \mathbb{R}^N \backslash B_r(0) := B_r^c(0)$, então, da desigualdade de Hölder, da condição (F_1), da imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, para todo $p \in [2, 2^*]$ e desde que a sequência (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, segue

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{K_r} f(v_n^2) v_n v dx - \int_{K_r} f(v^2) v^2 dx \Big| &\leq \int_{K_r} |f(v_n^2) v_n v| dx + \int_{K_r} |f(v^2) v^2| dx \\
&\leq \int_{K_r} (\varepsilon + c_\varepsilon |v_n|^{(q-2)}) |v_n||v| dx + \int_{K_r} (\varepsilon + c_\varepsilon |v|^{(q-2)}) v^2 dx \\
&\leq |v_n|_{2,K_r} |v|_{2,K_r} + C_1 |v_n|_{q,K_r}^{q-1} |v|_q + |v|_{2,K_r}^2 + C_1 |v|_{q,K_r}^q \\
&\leq C\alpha |v|_{2,K_r} + C_1 \alpha^{q-1} |v|_{q,K_r} + |v|_{2,K_r}^2 + C_1 |v|_{q,K_r}^q := a_{K_r},
\end{aligned}$$

onde $\|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha$. Agora, se tomarmos r suficientemente grande de modo que $a_{K_r} \leq \frac{\varepsilon_0}{4}$, veremos

$$|\varphi(v_n) - \varphi(v)| < \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Por outro lado, como consequência de (f_0), (c), (F_1) e (d), seguem

$$f(|v_n|^2) v_n v \to f(|v|^2) v^2, \quad \text{q.s. em} \quad B_r(0);$$

$$|f(|v_n|^2) v_n v| \leq \varepsilon |v_n||v| + c_\varepsilon |v_n|^{q-2} |v_n||v| \leq \varepsilon h|v| + c_\varepsilon h^{q-1}|v| \leq \varepsilon h^2 + c_\varepsilon h^q, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e observe que, o lado esquerdo da última desigualdade pertence a $L^1(B_r(0)), \mathbb{R})$, pois da imersão contínua

$$H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(B_r(0), \mathbb{R}),$$

$v \in L^p(B_r(0), \mathbb{R})$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, vemos

$$\int_{B_r(0)} f(|v_n|^2) v_n v dx \to \int_{B_r(0)} f(v^2) v^2 dx, \quad n \to \infty$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big| \int_{B_r(0)} v(f(|v_n|^2) v_n - f(v^2) v) dx \Big| < \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad \forall n \geq n_0. \tag{2.28}$$

De (2.26)-(2.27)-(2.28) decorre

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &\leq |\varphi(v_n) - \varphi(v)| \\
&\leq \Big| \int_{K_r} f(v_n) v_n v - \int_{K_r} f(v^2) v^2 dx \Big| + \Big| \int_{B_r(0)} (f(|v_n|^2) v_n v - f(v^2) v^2) dx \Big| \\
&< \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4},
\end{aligned}$$

que é uma contradição. Concluímos que (2.24)-(2.25) conduz a (2.23), e por conseguinte,

$$c_\infty = \inf_{\mathcal{N}_\infty} J_\infty \leq J_\infty(v) - \frac{1}{\theta} J'_\infty(v) v,$$

implicando

$$\begin{aligned}
c_\infty &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} F(|v|^2) dx - \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx + \frac{1}{\theta} f(|v|^2)|v|^2 dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx + \int_{\mathbb{R}^N} [\frac{1}{\theta} f(|v|^2)|v|^2 - \frac{1}{2} F(|v|^2)] dx.
\end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}
c_\infty &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx + \int_{\mathbb{R}^N} [\frac{1}{\theta} f(|v|^2)|v|^2 - \frac{1}{2} F(|v|^2)] dx. \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} f(|v|^2)|v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\theta} f(|v|^2)|v|^2 - \frac{1}{2} F(|v|^2)) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} [f(|v_n|^2)|v_n|^2 dx - F(|v_n|^2)] dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} [f(|v_n|^2)|v_n|^2 dx - F(|v_n|^2)] dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \liminf_{n\to\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + |v_n|^2) dx + \int_{\mathbb{R}^N} [\frac{1}{\theta} f(|v_n|^2)|v_n|^2 - \frac{1}{2} F(|v_n|^2)] dx \right\} \\
&\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \limsup_{n\to\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + |v_n|^2) dx + \int_{\mathbb{R}^N} [\frac{1}{\theta} f(|v_n|^2)|v_n|^2 - \frac{1}{2} F(|v_n|^2)] dx \right\} \\
&= \limsup_{n\to\infty} J_\infty(v_n) \\
&= c_\infty,
\end{aligned}$$

de onde, decorrem

$$c_\infty = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx + \int_{\mathbb{R}^N} [\frac{1}{\theta} f(|v|^2)|v|^2 - \frac{1}{2} F(|v|^2)] dx = J_\infty(v) \quad (2.29)$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|v_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}+\int_{\mathbb{R}^N}[\frac{1}{\theta}f(|v_n|^2)|v_n|^2-\frac{1}{2}F(|v_n|^2)]dx\right]=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}+$$
$$+\int_{\mathbb{R}^N}[\frac{1}{\theta}f(|v|^2)|v|^2-\frac{1}{2}F(|v|^2)]dx.$$

Afirmação 2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}[\frac{1}{\theta}f(|v_n|^2)|v_n|^2-\frac{1}{2}F(|v_n|^2)]dx=\int_{\mathbb{R}^N}[\frac{1}{\theta}f(|v|^2)|v|^2-\frac{1}{2}F(|v|^2)]dx.$

De fato, por (f_3), obtemos

$$0\le\frac{1}{\theta}f(|v_n|^2)|v_n|^2-\frac{1}{2}F(|v_n|^2)\le\frac{1}{2}\left(f(|v_n|^2)|v_n|^2-F(|v_n|^2)\right). \tag{2.30}$$

Além disso, como $v_n, v\in\mathcal{N}_\infty$, temos, por (2.29),

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}\left(f(|v_n|^2)|v_n|^2-F(|v_n|^2)\right)dx=J_\infty(v_n)\to c_\infty=J_\infty(v)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}\left(f(|v|^2)|v|^2-F(|v|^2)\right)dx, \tag{2.31}$$

quando $n\to\infty$. Note ainda, que (c) e (f_0) implicam

$$\frac{1}{\theta}f(|v_n|^2)|v_n|^2\to\frac{1}{\theta}f(|v|^2)|v|^2-\frac{1}{2}F(|v|^2)\quad\text{q.s. em}\quad\mathbb{R}^N. \tag{2.32}$$

Portanto, (2.30), (2.31) e (2.32) permitem aplicar o Teorema da Convergência Dominada Generalizada,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{\theta}f(|v_n|^2)|v_n|^2dx\to\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{\theta}f(|v|^2)|v|^2-\frac{1}{2}F(|v|^2)dx,\quad n\to\infty,$$

provando a afirmação.

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}=\|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Isto e o item (a) implicam

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}=0,$$

ou seja, $v_n \to v$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Logo, v satisfaz

$$J'_\infty(v) = 0 \ \text{ e } \ J_\infty(v) = c_\infty.$$

Caso II: $v = 0$.

Como $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é limitada, temos que existem $l, M > 0$ tais que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_l(y)} |v_n|^2 dx \geq M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.33}$$

pois caso contrário, teríamos

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_l(y)} |v_n|^2 dx \to 0, \quad n \to \infty,$$

e por um resultado devido a Lions [44, Lema 1.21], vemos que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^s dx = 0, \quad \forall s \in (2, 2^*). \tag{2.34}$$

Da imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, (v_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, e resulta da condição (F_1) e de (2.34) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(|v_n|^2)|v_n|^2 dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 dx + c_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx \to 0, \quad n \to \infty,$$

mais ainda,

$$0 < r \leq \|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}^N} f(|v_n|^2)|v_n|^2 dx \to 0, \quad n \to \infty,$$

que contradiz o fato de $(v_n) \subset \mathcal{N}_\infty$. Portanto, (2.33) é válido. Assim, podemos definir

$$\delta := \liminf_{n \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_l(y)} |v_n|^2 dx > 0.$$

Como existe uma subsequência convergente de

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_l(y)} |v_n|^2 dx =: \delta_n,$$

que ainda denotaremos por (δ_n), com $\delta_n \to \delta$, temos

$$\frac{\delta}{2} < \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_l(y)} |v_n|^2 dx, \quad \forall n \geq n_0$$

e, por conseguinte, para todo $n \geq n_0$, existe $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\frac{\delta}{2} < \int_{B_l(y_n)} |v_n|^2 dx. \tag{2.35}$$

Temos que $|y_n| \to \infty$ em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$, pois, caso contrário, existiria $c > 0$ tal que $|y_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então (2.35) implicaria

$$0 < \frac{\delta}{2} < \int_{B_l(y_n)} |v_n|^2 dx \leq \int_{B_{l+c}(0)} |v_n|^2 dx.$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima e uma vez que valha (b), ficamos com

$$0 < \frac{\delta}{2} < 0,$$

absurdo. Finalmente, definindo $u_n(x) := v_n(x+y_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, seguem-se

$$J_\infty(u_n) \to c_\infty \text{ e } J'_\infty(u_n) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.36}$$

e (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Portanto, passando a uma subsequência, se necessário, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}). \tag{2.37}$$

Repetindo o mesmo argumento usado no **Caso I**, uma vez que valem (2.36)-(2.37), temos $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Observe que $u \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, pois

$$\int_{B_l(0)} |u_n|^2 dx = \int_{B_l(0)} |v_n(x+y_n)|^2 dx = \int_{B_l(y_n)} |v_n|^2 dx > \frac{\delta}{2}, \tag{2.38}$$

e desde que é válida a imersão compacta $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(B_l(0), \mathbb{R})$, decorre de (2.38) que

$$\frac{\delta}{2} < \lim_{n \to \infty} \int_{B_R(0)} |u_n|^2 dx = \int_{B_R(0)} |u|^2 dx.$$

Logo, $u \neq 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, e por consequência, $u \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Além disso, u satisfaz

$$J'_\infty(u) = 0 \ \text{ e } \ J_\infty(u) = c_\infty.$$

Assim, fazendo $u := \tilde{v}$, prova-se a proposição.

Prova da Afirmação 2.1. De fato, pelo Princípio Variacional de Ekeland, existe uma sequência $(w_n) \subset \mathcal{N}_\infty$, satisfazendo

$$w_n = v_n + o_n(1), \quad J_\infty(w_n) \to c_\infty \ \text{ e } \ J'_\infty(w_n) - \gamma_n E'_\infty(w_n) = o_n(1), \tag{2.39}$$

onde $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}$, e $E_\infty : H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é dado por

$$E_\infty(w) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^2 + |w|^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(|w|^2)|w|^2 dx = J'_\infty(w)w$$

e desde que $(w_n) \subset \mathcal{N}_\infty$ a condição (f_4) fornece

$$E'_\infty(w_n)w_n = -2\int_{\mathbb{R}^N} f'(|w_n|^2)|w_n|^4 dx \leq 0. \tag{2.40}$$

É notável, assim como na prova do **Caso II**, definirmos

$$\tilde{\delta} := \liminf_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_l(y)} |w_n|^2 > 0.$$

Logo, passando se necessário a uma subsequência, assumiremos que existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_l(y_n)} |w_n|^2 > \frac{\tilde{\delta}}{2} \tag{2.41}$$

e, será útil definir $\hat{w}_n(x) = w_n(x + y_n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Assim, $(\hat{w}_n)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, pois (w_n) o é. Logo, a menos de subsequência, existe $\hat{w} \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, satisfazendo:

$$\begin{cases} (a)' \ \ \hat{w}_n \rightharpoonup \hat{w} \ \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ quando } n \to \infty, \\ (b)' \ \ \hat{w}_n \to \hat{w} \ \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ quando } n \to \infty, \\ (c)' \ \ \hat{w}_n(x) \to \hat{w}(x) \ \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N, \text{ quando } n \to \infty. \end{cases}$$

De (2.41) e por $(b)'$, temos

$$\frac{\tilde{\delta}}{2} \leq \lim_{n\to\infty} \int_{B_l(0)} |\hat{w}_n|^2 dx = \int_{B_l(0)} |\hat{w}|^2 dx.$$

Consequentemente, $\hat{w} \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. De (f_0) e $(c)'$, temos

$$f(|\hat{w}_n|^2)|\hat{w}_n|^4 \to f(|\hat{w}|^2)|\hat{w}|^4, \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Sendo assim, do Lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(|\hat{w}|^2)|\hat{w}|^4 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} f(|\hat{w}_n|^2)|\hat{w}_n|^4 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(|\hat{w}_n|^2)|\hat{w}_n|^4 dx.$$

Isto, (2.40) e a invariância de $\mathbb{R}^N$ fornecem

$$\limsup_{n\to\infty} E'_\infty(w_n)w_n = -2 \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f'(|w_n|^2)|w_n|^4 dx \leq -2 \int_{\mathbb{R}^N} f'(|\hat{w}|^2)|\hat{w}|^4 dx,$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} E'_\infty(w_n)w_n \leq -2 \int_{\mathbb{R}^N} f'(|\hat{w}|^2)|\hat{w}|^4 dx < 0. \tag{2.42}$$

Assim, a menos de subsequência, $E'_\infty(w_n)w_n \to l \neq 0$ e desde que (2.39) ocorra e $J'_\infty(w_n)w_n = 0$, temos $\gamma_n = o_n(1)$. Logo,

$$J'_\infty(w_n) \to 0.$$

Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$J'_\infty(v_n) \to 0.$$

□

2.5 Comportamento Dos Níveis Minimax

Apresentaremos ferramentas indispensáveis para obtermos o principal resultado do capítulo: precisaremos considerar o comportamento assintótico de b_λ e outros níveis minimax relacionados. No que segue, introduziremos estes demais níveis. Comecemos por considerar o funcional $J_\lambda : H_0^1(\Omega_\lambda, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J_\lambda(v) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} (|\nabla v|^2 + |v|^2)dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} F(|v|^2). \tag{2.43}$$

Também definamos

$$c_\lambda := \inf_{v \in \mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(v),$$

onde $\mathcal{N}_\lambda$ é variedade associada a J_λ, isto é,

$$\mathcal{N}_\lambda := \left\{ v \in H_0^1(\Omega_\lambda, \mathbb{R}) \setminus \{0\} \, ; J'_\lambda(v)v = 0 \right\}. \tag{2.44}$$

Recordemos que $R > r$ e $B_{\lambda r}(0) \subset \Omega_\lambda$ (r fixado) e definamos de forma análoga as ternas

$$(I_{\lambda,r}, b_{\lambda,r}, \mathcal{M}_{\lambda,r}) \quad \text{e} \quad (J_{\lambda,r}, c_{\lambda,r}, \mathcal{N}_{\lambda,r}),$$

apenas substituindo Ω_λ por $B_{\lambda r}(0)$ nas definições de

$$(I_\lambda, b_\lambda, \mathcal{M}_\lambda) \quad \text{e} \quad (J_\lambda, c_\lambda, \mathcal{N}_\lambda),$$

em (2.3) – (2.4) e (2.43) – (2.44), respectivamente. Ressaltamos que estes funcionais, bem como suas restrições às variedades Nehari correspondentes, satisfazem a condição de Palais-Smale, pois basta argumentar como na prova do Lema 2.3 e da Proposição 2.6.

No próximo resultado, apresentamos o comportamento assintótico do nível minimax $c_{\lambda,r}$ quando $\lambda \to \infty$, cuja a prova segue as linhas da demonstração apresentada em Alves [2, Proposição 4.2]. Sendo mais preciso temos:

Lema 2.9. O número $c_{\lambda,r}$ verifica o seguinte limite:

$$\lim_{\lambda \to \infty} c_{\lambda,r} = c_\infty.$$

Demonstração. Seja ζ uma função em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 \le \zeta(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}^N$, satisfazendo

$$\zeta(x) = 1, \quad x \in B_1(0) \;\text{ e }\; \zeta(x) = 0, \quad x \in B_2^c(0).$$

Para cada $R > 0$, consideremos a função

$$\zeta_R(x) = \zeta(x/R) \text{ e } w_R(x) = \zeta_R(x)w(x),$$

onde $w > 0$ é uma **ground state solution** ou solução de energia mínima do Problema (P_∞) (ver Teorema 2.2), isto é, uma função $w \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ verificando

$$J_\infty(w) = c_\infty \text{ e } J'_\infty(w) = 0.$$

Argumentando como em [44, Lemma 4.1], existe um único $t_R > 0$ tal que $t_R w_R \in \mathcal{N}_{\lambda,r}$. Além disso,

$$J_{\lambda,r}(t_R w_R) = \max_{t \geq 0} J_{\lambda,r}(t w_R),$$

e por consequência,

$$c_{\lambda,r} = \inf_{\mathcal{N}_{\lambda,r}} J_{\lambda,r} \leq J_{\lambda,r}(t_R w_R), \quad \forall \lambda > 0.$$

ou seja,

$$c_{\lambda,r} \leq J_{\lambda,r}(t_R w_R), \quad \forall \lambda > 0.$$

Fazendo $\lambda \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\limsup_{\lambda \to \infty} c_{\lambda,r} \leq \limsup_{\lambda \to \infty} J_{\lambda,r}(t_R w_R) = \lim_{\lambda \to \infty} J_{\lambda,r}(t_R w_R) = J_\infty(t_R w_R),$$

Afirmação 2.2. $\lim_{R \to \infty} t_R = 1$.

De fato, pela definição de t_R, temos $J'_\infty(t_R w_R) t_R w_R = 0$, que acarreta

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_R|^2 + |w_R|^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(|t_R w_R|^2)|w_R|^2 dx. \tag{2.45}$$

Assim, para $R > 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_R|^2+|w_R|^2)dx &\geq \int_{B_R(0)} f(|t_R w_R|^2)|w_R|^2 dx = \int_{B_R(0)} f(|t_R w|^2)|w|^2 dx\\ &\geq \int_{B_1(0)} f(|t_R w|^2)|w|^2 dx\\ &\geq \int_{B_1(0)} f(|t_R a|^2)|a|^2 dx, \end{aligned} \tag{2.46}$$

onde

$$a = \min_{|x|\leq 1} w(x) > 0.$$

Note que (t_R) é limitada, pois caso contrário, se existir $R_n \to \infty$ com $t_n := t_{R_n} \to \infty$, teríamos

$$f(|t_n a|^2)|a|^2 \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{2.47}$$

pois de (F_2) existem constantes C_1, C_2 tais que

$$F(s^2) \geq C_1|s|^\theta - C_2, \quad \forall s \geq 0,$$

por consequência,

$$\frac{C_1|t_n a|^\theta - C_2}{t_n^2} \leq \frac{F(|t_n a|^2)}{t_n^2} \leq \frac{2}{\theta}\frac{f(|t_n a|^2)t_n^2|a|^2}{t_n^2},$$

de onde, como $\theta > 2$, segue que

$$\frac{C_1|t_n a|^\theta - C_2}{t_n^2} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Logo, combinando (2.46) e o Lema de Fatou, vemos

$$\infty = \int_{B_1(0)} \liminf_{n\to\infty} f(|t_n a|^2)a^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{B_1(0)} f(|t_n a|^2)a^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_{R_n}|^2+|w_{R_n}|^2)dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_{R_n}|^2+|w_{R_n}|^2)dx \to \infty, \quad n \to \infty,$$

no entanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesque

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_{R_n}|^2+|w_{R_n}|^2)dx=\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w|^2+|w|^2)dx<\infty, \tag{2.48}$$

que é um absurdo. Portanto, (t_R) é limitada. Deste modo,

$$\lim_{R\to\infty} t_R=\tilde{t}.$$

Mostraremos que $\tilde{t}\neq 0$. Usando o mesmo tipo de argumento, suponha que exista $R_n\to\infty$ com $t_{R_n}\to 0$, quando $n\to\infty$. De (F_1), para todo $\varepsilon>0$ existe c_ε tal que

$$|f(s)|\leq \varepsilon + c_\varepsilon |s|^{\frac{q-2}{2}}.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(|t_{R_n}w_{R_n}|^2)||w_{R_n}|^2dx\leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|w_{R_n}|^2dx+c_\varepsilon t_{R_n}^{q-2}\int_{\mathbb{R}^N}|w_{R_n}|^q dx. \tag{2.49}$$

Por (2.48), $w_{R_n}\to w$ em $H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ e, em particular (w_{R_n}) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ e pela imersão contínua

$$H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}),\quad \forall p\in[1,2^*],$$

segue que (w_{R_n}) é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ para todo $p\in[1,2^*]$ e, desde que $t_{R_n}\to 0$ e ocorra (2.49), obtemos

$$0\leq\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|f(|t_{R_n}w_{R_n}|^2)||w_{R_n}|^2dx\leq\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|f(|t_{R_n}w_{R_n}|^2)||w_{R_n}|^2dx\leq\varepsilon C,\quad\forall\varepsilon>0,$$

onde C é constante que limita (w_{R_n}) em $L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Logo, fazendo $\varepsilon\to 0$ na desigualdade acima, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|f(|t_{R_n}w_{R_n}|^2)||w_{R_n}|^2dx=0.$$

Usando (2.45) e o limite acima, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_{R_n}|^2+|w_{R_n}|^2)dx=0.$$

Por este limite e por (2.48), temos $\|w\|=0$, que é um absurdo, pois $w\in\mathcal{N}_\infty$.

Do que foi visto $t_R\to\tilde{t}$ quando $R\to\infty$, segue então de (2.45) e (2.48) que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w|^2+|w|^2)dx=\int_{\mathbb{R}^N}f(|\tilde{t}w|^2)|w|^2dx,$$

Por outro lado, $w\in\mathcal{N}_\infty$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w|^2+|w|^2)dx=\int_{\mathbb{R}^N}f(|w|^2)|w|^2dx.$$

Combinando estas duas últimas igualdades e desde que f é crescente, segue que $\tilde{t}=1$. Isto prova a afirmação.

Pela Afirmação 2.2,

$$\lim_{R\to\infty}J_\infty(t_Rw_R)=J_\infty(w)=c_\infty.$$

Isto e recordando que $\limsup_{\lambda\to\infty}c_{\lambda,r}\leq J_\infty(t_Rw_R)$, obtemos

$$\limsup_{\lambda\to\infty}c_{\lambda,r}\leq c_\infty. \tag{2.50}$$

Por outro lado, usando a definição de cada um dos níveis $c_{\lambda,r}$ e c_∞, temos desigualdade

$$c_{\lambda,r}\geq c_\infty,\quad \lambda>0,$$

implicando

$$\liminf_{\lambda\to\infty}c_{\lambda,r}\geq c_\infty. \tag{2.51}$$

Logo, por (2.50) e (2.51),

$$\lim_{\lambda\to\infty}c_{\lambda,r}=c_\infty.$$

Portanto, o lema fica provado. □

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e $R > r > 0$, denotemos por $\Sigma_{\lambda,x}$ o conjunto

$$\Sigma_{\lambda,x} := B_{\lambda R}(x) \backslash \overline{B}_{\lambda r}(x)$$

e definamos o funcional $\hat{J}_{\lambda,x} : H_0^1(\Sigma_{\lambda,x}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$\hat{J}_{\lambda,x}(v) := \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{\lambda,x}} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{\lambda,x}} F(|v|^2) dx. \tag{2.52}$$

Simbolizamos por $\hat{\mathcal{N}}_{\lambda,x}$ a variedade Nehari associada a $\hat{J}_{\lambda,x}$, isto é,

$$\hat{\mathcal{N}}_{\lambda,x} := \left\{ v \in H_0^1(\Sigma_{\lambda,x}, \mathbb{R}) \backslash \{0\} \, ; \hat{J}'_{\lambda,x}(v)v = 0 \right\}.$$

Para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \backslash \{0\}$ com suporte compacto, considere a aplicação baricentro

$$\beta(v) := \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} z|v|^2 dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dz}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^N,$$

e defina o seguinte número

$$a_{\lambda,x} := \inf \left\{ \hat{J}_{\lambda,x}(v); v \in \hat{\mathcal{N}}_{\lambda,x} \ \text{ e } \beta(v) = x \right\}.$$

Por simplicidade, para $x = 0$ usaremos as notações

$$\hat{J}_\lambda := \hat{J}_{\lambda,0}, \quad \Sigma_\lambda := \Sigma_{\lambda,0}, \quad \hat{\mathcal{N}}_\lambda := \hat{\mathcal{N}}_{\lambda,0}$$

e

$$a_\lambda := a_{\lambda,0}$$

Além disso, com um raciocínio análogo do Lema 2.3 e da Proposição 2.6 obtém-se, respectivamente que $\hat{J}_\lambda|_{H_0^1(\Sigma_\lambda,\mathbb{R})}$ e bem como $\hat{J}_\lambda|_{H_0^1(\Sigma_\lambda,\mathbb{R}) \cap \hat{\mathcal{N}}_\lambda}$ satisfazem a condição de Palais-Smaile, e usando o Princípio Variacional de Ekeland, existe uma função $u \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda$ tal que

$$\hat{J}_\lambda(u) = a_\lambda \tag{2.53}$$

Lema 2.10. O número a_λ satisfaz

$$c_\infty < \liminf_{\lambda + \to\infty} a_\lambda.$$

Demonstração. Seja $v \in \hat{\mathcal{N}}$ com $\beta(v) = 0$ e considere a extensão de v ao espaço $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ que se anula fora de Σ_λ, ainda denotada por v. Claramente, $v \in \mathcal{N}_\infty$, implicando que

$$c_\infty = \inf_{\mathcal{N}_\infty} J_\infty \leq J_\infty(v) = \hat{J}_\lambda(v).$$

Pela definição de a_λ, temos

$$c_\infty \leq a_\lambda, \quad \forall \lambda > 0,$$

portanto,

$$c_\infty \leq \liminf_{\lambda\to\infty} a_\lambda.$$

Suponha, por absurdo, que

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} a_\lambda = c_\infty.$$

Sendo assim, existe uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lambda_n \to \infty$ verificando

$$\lim_{n\to+\infty} a_{\lambda_n} = c_\infty.$$

Consequentemente, desde que o ínfimo a_{λ_n} é alcançado como pode ser visto em (2.53), então, existe uma sequência $(v_n) \subset \hat{\mathcal{N}}_{\lambda_n}$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} \hat{J}_{\lambda_n}(v_n) = \lim_{n\to\infty} a_{\lambda_n} = c_\infty \;\text{ e }\; \beta(v_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considerando novamente as extensões como antes, podemos supor que $(v_n) \subset \mathcal{N}_\infty$ e como $supp(v_n) \subset \Sigma_{\lambda_n}$, temos que $v_n \to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} J_\infty(v_n) = c_\infty \;\text{ e }\; \beta(v_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.54}$$

Neste caso, (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, pois caso contrário, existiria uma subsequência de (v_n), ainda denotada por (v_n) com $v_n \to \infty$, tal que, pela continuidade de J_∞, $J_\infty(v_n) \to \infty$, que contradiz (2.54). Logo, $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e não converge forte em $H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, pois caso convirja séria pra zero, que contradiz $c_\infty > 0$ ($J_\infty(v_n) \to c_\infty \neq 0$). Desta forma, decorre do item (ii) da Proposição 2.8, que existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $|y_n| \to \infty$ tal que

$$v_n = w_n(x-y_n) + \tilde{v}(x-y_n) \tag{2.55}$$

onde $(w_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ satisfazendo $w_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ quando $n \to \infty$, e $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ é uma função positiva verificando

$$J_\infty(\tilde{v}) = c_\infty \ \text{ e } \ J'_\infty(\tilde{v}) = 0. \tag{2.56}$$

Como funcional J_∞ é invariante por rotação, assumiremos que

$$y_n = (y_n^1, 0, \ldots, 0)$$

e a primeira coordenada satisfazendo $y_n^1 < 0$. No que segue, para melhor compreensão definiremos os seguintes conjuntos

$$A_1^n := \Sigma_{\lambda_n} \cap B_{\lambda_n r/2}(y_n), \quad A_2^n := \Sigma_{\lambda_n} \backslash B_{\lambda_n r/2}(y_n) \ \text{ e } \ A_3^n := \Sigma_{\lambda_n} \backslash A_1^n,$$

onde

$$A_1^n \cup A_2^n = \Sigma_{\lambda_n} \ \text{ e } \ A_3^n = A_2^n.$$

Recordando que o $supp(v_n) \subset \Sigma_{\lambda_n}$, podemos combinar (2.55) o fato de $w_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, o Teorema da Mudança de Variável e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obtermos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{A_1^n} |v_n|^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_{\lambda_n r/2}(y_n)} |v_n|^2 dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_{\lambda_n r/2}(0)} |w_n - \tilde{v}|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{v}|^2 dx =: M > 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_1^n}|v_n|^2dx = M > 0. \tag{2.57}$$

Além disso, a invariância do $\mathbb{R}^N$, e usando mais uma vez (2.55) e o Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue, vemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Sigma_{\lambda_n}}|v_n|^2dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^2dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|w_n-\tilde{v}|^2dx = \int_{\mathbb{R}^N}|\tilde{v}|^2dx = M.$$

Isto e (2.57) implicam na igualdade

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_2^n}|v_n|^2dx = \lim_{n\to\infty}\int_{A_3^n}|v_n|^2dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Sigma_n}|v_n|^2dx - \int_{A_1^n}|v_n|^2dx\right) = 0. \tag{2.58}$$

Afirmação 2.3.

$$\int_{A_1^n}x^1|v_n|^2dx \leq -\frac{\lambda_n r}{2}(M+o_n(1)).$$

Para provarmos a afirmação é suficiente verificar que $x^1 < -\lambda_n r/2$. De fato, dado $x = (x^1, \cdots, x^N) \in A_2^n$. Desde que $|x-y_n| \leq \lambda_n r/2$ e $y_n = (y_n^1, 0, \cdots, 0)$, vemos

$$|x^1 - y_n^1| \leq \lambda_n r/2 \;\text{ e }\; \sum_{j=2}^{N}|x^j|^2 \leq (\lambda_n r/2)^2. \tag{2.59}$$

Por outro lado, como $x \in \Sigma_{\lambda_n}$, temos

$$|x^1|^2 + \sum_{j=2}^{N}|x^j|^2 = |x|^2 \geq \lambda_n r, \quad (x \notin \overline{B_{\lambda_n r}(0)}),$$

e pela segunda desigualdade de (2.59) decorre

$$|x^1|^2 + (\lambda_n r/2)^2 \geq \sum_{j=2}^{N}|x^j|^2 + |x^1|^2 = |x|^2 \geq \lambda_n r,$$

que implica $|x^1| > \lambda_n r/2$. Note que não ocorre $x^1 > \lambda_n r/2$, devido a primeira desigualdade de (2.59) e $y_n^1 < 0$. Então nos resta apenas $x^1 < -\lambda_n r/2$, conforme foi mencionado. Logo, por (2.57)

$$\int_{A_1^n}x^1|v_n|^2dx \leq \frac{-\lambda_n r}{2}\int_{A_1^N}|v_n|^2dx + o_n(1) \leq \frac{-\lambda_n r}{2}(M+o_n(1)), \tag{2.60}$$

e observe que

$$0 = \beta(v_n) = \int_{\mathbb{R}^N} x^1|v_n|^2dx = \int_{\Sigma_n} x^1|v_n|^2dx = \int_{A_1^n} x^1|v_n|^2dx + \int_{A_2^n} x^1|v_n|^2dx. \quad (2.61)$$

Pela afirmação e por (2.61) e uma vez que vale a desigualdade $x^1 \leq -\lambda_n r/2 < \lambda_n R$, segue

$$0 \leq -\frac{\lambda_n r}{2}(M + o_n(1)) + \lambda_n R \int_{A_2^n} |v_n|^p dx,$$

isto é,

$$0 < \frac{r}{2R}(M + o_n(1)) \leq \int_{A_2^n} |v_n|^2 dx,$$

que contradiz (2.58). Isto finaliza a prova. □

2.6 Um Resultado de Multiplicidade

O próximo resultado é demonstrado seguindo as linhas da prova de Alves [2, Proposição 4.4].

Proposição 2.11. O funcional $J_{\lambda,r}$ associado ao problema (P_∞), tem uma solução de energia mínima, que é radialmente simétrica.

Demonstração. Nesta prova denotaremos por J o funcional $J_{\lambda,r}$. Já sabemos que o funcional J possui uma solução positiva de energia mínima, ou seja, existe $v \in H_0^1(B_{\lambda r}(0))$ tal que

$$J(v) = c_{\lambda,r} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda r}} J(u) \ \text{ e } \ J'(v) = 0.$$

Se v^* é a simetrização de Shwartz de v (ver [27, página 259]), então v^* é radialmente simétrica e $v^* \in H_0^1(B_{\lambda r}(0), \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\int_{B_{\lambda r}(0)} |v^*|^2 dx = \int_{B_{\lambda r}(0)} |v|^2 dx, \quad (2.62)$$

$$\int_{B_{\lambda r}(0)} |\nabla v^*|^2 dx \leq \int_{B_{\lambda r}(0)} |\nabla v|^2 dx, \quad (2.63)$$

e

$$\int_{B_{\lambda r}(0)} F(\alpha v^*) dx = \int_{B_{\lambda r}(0)} F(\alpha v) dx, \quad \forall \alpha > 0, \quad (2.64)$$

uma vez que $F''(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, assim F é uma função convexa. Usando o fato que $v \in \mathcal{N}_{\lambda,r}$, temos

$$J'(v)v = 0$$

e

$$J(v) = \max_{t \geq 0} J(tv)$$

Argumentando como em [44, Lema 4.1], existe um único $t^* > 0$ tal que $t^*v^* \in \mathcal{N}_{\lambda,r}$. Assim, por (2.62), (2.63) e (2.64)

$$c_{\lambda,r} = \inf_{\mathcal{N}_{\lambda,r}} J \leq J(t^*v^*) \leq J(t^*v) \leq \max_{t \geq 0} J(tv) = J(v) = c_{\lambda,r},$$

ou seja,

$$J(t^*v^*) = c_{\lambda,r}.$$

Pela igualdade anterior, t^*v^* é um ponto crítico de J restrito a variedade Nehari $\mathcal{N}_{\lambda,r}$ e, segue do Corolário 2.7 que é um ponto crítico de J em $H_0^1(B_{\lambda r}(0), \mathbb{R})$. Assim,

$$J(t^*v^*) = c_{\lambda,r} \ \text{ e } \ J'(t^*v^*) = 0.$$

$\square$

Observação 2.2. No que segue, denotaremos por $u_{\lambda,r} := t^*v^*$ a solução de energia mínima dada na Proposição 2.11. Observar-se ainda que $u_{\lambda,r}$ satisfaz

$$J(u_{\lambda,r}) = c_{\lambda,r} = \inf_{\mathcal{N}_{\lambda,r}} J$$

Para $\lambda \geq 0$ e $r > 0$ definamos a aplicação $\Psi_\lambda : \Omega_\lambda^- \longrightarrow \mathcal{M}_\lambda$ como

$$[\Psi_\lambda(y))](x) = \begin{cases} t_{\lambda,y} e^{i\tau_{\lambda,y}(x)} u_{\lambda,r}(|x-y|), & \text{se} \quad x \in B_{\lambda r}(y), \\ 0, & \text{se} \quad x \in \Omega_\lambda \setminus B_{\lambda r}(y), \end{cases} \tag{2.65}$$

onde $u_{\lambda,r} \in \mathcal{N}_{\lambda,r}$ uma função positiva e radial satisfazendo $J_{\lambda,r}(u_{\lambda,r}) = c_{\lambda,r}$, $t_{\lambda,y} \in (0, \infty)$

é tal que $t_{\lambda,y}e^{i\tau_{\lambda,y}(\cdot)}u_{\lambda,r}(|\cdot - y|) \in \mathcal{M}_\lambda$ e

$$\tau_{\lambda,y}(x) := \sum_{j=1}^{N} A^j(\frac{y}{\lambda})x^j, \quad \forall x \in \Omega_\lambda, \quad x = (x^1, x^2, \cdots, x^N) \in \mathbb{R}^N.$$

No que segue, veremos duas propriedades importantes sobre a função Ψ_λ, que precisaremos para esta parte final deste capítulo, que são

$$\beta(\Psi_\lambda(y)) = y, \quad \forall y \in \Omega_\lambda^-,$$

e o seguinte lema:

Lema 2.12. Para $\lambda > 0$, temos

$$\lim_{\lambda\to\infty} \max_{y\in\Omega_\lambda^-} |I_\lambda(\Psi_\lambda(y)) - c_\infty| = 0.$$

Demonstração. Observa-se que é suficiente provar que dado uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \to \infty$ e $(y_n) \subset \Omega_{\lambda_n}^-$ qualquer,

$$I_{\lambda_n}(\Psi_{\lambda_n}(y_n)) \to c_\infty, \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Será útil definir $v_n(x) := u_{\lambda_n,r}(|x - y_n|)$, se $x \in B_{\lambda_n r}(y_n)$, $v_n(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R}^N \backslash B_{\lambda_n r}(y_n)$. Como $(u_{\lambda_n,r})$ é radial satisfazendo $J_{\lambda_n,r}(u_{\lambda_n,r}) = c_{\lambda_n,r}$ e $v_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,r} \subset \mathcal{N}_\infty$, podemos usar a invariança do $\mathbb{R}^N$ e o Lema 2.9 para obter

$$\lim_{n\to\infty} J_\infty(v_n) = c_\infty, \quad J'_\infty(v_n)v_n = 0 \ \text{ e } \ J_\infty(tv_n) \le J_\infty(v_n) = c_{\lambda_n,r}, \tag{2.66}$$

para algum $t \ge 0$. A primeira igualdade de (2.66), fornece a limitação de (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, pois caso contrário, existiria uma subsequência de (v_n), denotada ainda por (v_n), tal que, $v_n \to \infty$ e, da continuidade de J_∞, $J_\infty(v_n) \to \infty = c_\infty$, que um absurdo. Assim, pela reflexividade de $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ a menos de subsequência.

Afirmação 2.4. O limite fraco de (v_n) é diferente de zero.

De fato, desde que $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é limitada existem $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ $l > 0$ e

$M > 0$, tais que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_{B_l(\tilde{y}_n)} |v_n|^2 dx \geq M > 0, \tag{2.67}$$

do contrário, usando um resultado devido a Lions em [44, Lema 1.21.]

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^s = 0, \quad \forall s \in (2, 2^*),$$

e decorre da imersão $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ que (v_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e, da condição (F_1), para todo $\varepsilon > 0$ existe $c_\varepsilon > 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(|v_n|^2)|v_n|^2 \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 + c_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \to 0,$$

quando $n \to \infty$, uma vez que $v_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Por conseguinte,

$$\|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})} \to 0 \quad n \to \infty,$$

contrariando o fato de $(v_n) \subset \mathcal{N}_\infty$, neste caso é válido (2.67). Como $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, segue da imersão compacta

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \quad \forall p \in (2, 2^*),$$

$v_n \to v$ em $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, para todo $p \in (2, 2^*)$ e, além do mais, $v_n(x)^2 \to v(x)^2$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e $|v_n|^2 \leq h^2 \in L^{p/2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, logo, conclui-se $(\tilde{y}_n)$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}^N$, pois caso não seja, a menos de subsequência, $\tilde{y}_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e, usando (2.67) para $n \geq n_0$

$$0 < \frac{M}{2} < \int_{B_l(\tilde{y}_n)} |v_n|^2 dx. = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_l(\tilde{y_n})} |v_n|^2 dx$$

Passando ao limite na desigualdade acima, segue do Teorema da convergência Dominada de Lebesgue, que $\frac{M}{2} = 0$, que é um absurdo. Portanto, $(\tilde{y}_n)$ é limitada em $\mathbb{R}^N$, digamos $|\tilde{y}_n| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, usando mais uma vez a desigualdade (2.67) e combinando com a convergência $v_n \to v$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 < M &\leq \int_{B_l(\tilde{y}_n)} |v_n|^2 dx \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \int_{B_{l+C}(0)} |v_n|^2 dx \\ &= \int_{B_{l+C}(0)} |v|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{B_{l+C}(0)} |v|^2 dx > 0, \tag{2.68}$$

ou melhor, $v \neq 0$. Desta forma, fica provado a afirmação.

Em vista do limite em (2.66) e a Afirmação 2.4, podemos usar Proposição 2.8 item (i) para concluir que $v_n \to v$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Além disso, esta convergência é quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e forte em $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Sendo assim, existe $h \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ de modo que

$$|v_n(x)| \leq h(x), \quad \text{q.s. em} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

No que segue, para simplificar os cálculos denotaremos $t_n := t_{\lambda_n, y_n}$ e $u_n := u_{\lambda_n, r}$. Agora, recorde que

$$D^j_{A_\lambda}(\cdot) = \left(-i\partial_j - A^j_\lambda\right)(\cdot) \;\; \text{e} \;\; |\nabla_{A_\lambda}(\cdot)|^2 = \sum_{j=1}^N |D_{A_\lambda}(\cdot)|^2,$$

logo, para $x \in \Omega_{\lambda_n}$

$$\begin{aligned} D^j_{A_{\lambda_n}}\Big[(\Psi_{\lambda_n}(y_n))(x)\Big] &= -i\partial_j\Big[(\Psi_{\lambda_n}(y_n))(x)\Big] - A_j(\frac{x}{\lambda_n})(\Psi_{\lambda_n}(y_n))(x) \\ &= -i\partial_j\Big[t_n e^{i\tau_{\lambda_n, y_n}(x)} u_n(|x-y_n|)\Big] - A_j(\frac{x}{\lambda_n}) t_n e^{i\tau_{\lambda_n, y_n}(x)} u_n(|x-y_n|) \\ &= -it_n\Big[\partial_j(e^{i\tau_{\lambda_n, y_n}(x)}) u_n(|x-y_n|) + e^{i\tau_{\lambda_n, y_n}(x)} \partial_j(u_n(|x-y_n|))\Big] + \\ &\quad -A_j(\frac{x}{\lambda_n}) t_n e^{i\tau_{\lambda_n, y_n}(x)} u_n(|x-y_n|) \\ &= \Big[(A_j(\frac{y_n}{\lambda_n}) - A_j(\frac{x}{\lambda_n})) u_n(|x-y_n|) - i\partial_j u_n|(x-y_n|)\Big] t_n e^{i\tau_{\lambda_n, y_n}}(x), \end{aligned}$$

e usando a definição de norma de um número complexo, vemos

$$|\nabla_{A_{\lambda_n}}\Psi_{\lambda_n}(y_n)|^2 = t_n^2\Big|u_n(|x-y_n|)\Big|^2\left|A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)-A\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\right|^2 + t_n^2|\nabla u_n(|x-y_n|)|^2,$$

por onde segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t_n^2}\|t_n^2 e^{i\tau_{\lambda_n,y_n}(x)}u_n(|x-y_n|)\|_{A_{\lambda_n}}^2 &= \frac{1}{t_n^2}\int_{\Omega_{\lambda_n}}|\nabla_{A_{\lambda_n}}(t_n^2 e^{i\tau_{\lambda_n,y_n}(x)}u_n(|x-y_n|))|^2dx + \\
&\quad + \frac{1}{t_n^2}\int_{\Omega_{\lambda_n}}|t_n^2 e^{i\tau_{\lambda_n,y_n}(x)}u_n(|x-y_n|)|^2dx \\
&= \frac{1}{t_n^2}\int_{\Omega_{\lambda_n}} t_n^2|u_n(|x-y_n|)|^2\left|A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)-A\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\right|^2dx \\
&\quad + \frac{1}{t_n^2}\int_{\Omega_{\lambda_n}}(|\nabla(t_n^2u_n(x-y_n))|^2 + |t_n^2 e^{i\tau_{\lambda_n,y_n}(x)}u_n(|x-y_n|)|^2)dx \\
&= \int_{B_{\lambda_n r}(0)}|u_n(z)|^2\left|A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)-A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right)\right|^2dz + \\
&\quad + \int_{B_{\lambda_n r}(y_n)}(|\nabla v_n(x)|^2+|v_n(x)|^2)dx \\
&= \|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})}^2 + \int_{B_{\lambda_n r}(0)}|u_n(z)|^2\left|A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)-A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right)\right|^2dz,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\|e^{i\tau_{\lambda_n,y_n}(x)}u_n(|x-y_n|)\|_{A_{\lambda_n}}^2 &\leq \int_{B_{\lambda_n r}(0)}|u_n(z)|^2\left|A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)-A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right)\right|^2dz + \\
&\quad + \|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})}^2 \qquad (2.69)
\end{aligned}$$

Do cálculo acima e visto que $u_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,r}$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_n}(\Psi_{\lambda_n}(y_n)) &= \frac{1}{2}\|\Psi_{\lambda_n}(y_n)\|^2_{A_{\lambda_n}} - \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\lambda_n}} F(|\Psi_{\lambda_n}(y_n)|^2)dx \\
&= \frac{t_n^2}{2}\int_{B_{\lambda_n r}(0)} |u_n(z)|^2 \left| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right)\right|^2 dz \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{B_{\lambda_n r}(0)} (|\nabla(t_n u_n(z))|^2 + |t_n u_n(z)|^2)dz - \frac{1}{2}\int_{B_{\lambda_n}(0)} F(|(t_n u_n(z))|^2)dz \\
&= J_{\lambda_n,r}(t_n u_n) + \frac{t_n^2}{2}\int_{B_{\lambda_n r}(0)} |u_n(z)|^2 \left| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right)\right|^2 dz \\
&\leq c_{\lambda_n,r} + \frac{t_n^2}{2}\int_{B_{\lambda_n r}(0)} |u_n(z)|^2 \left| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right)\right|^2 dz.
\end{aligned}$$

ou melhor,

$$I_{\lambda_n}(\Psi_{\lambda_n}(y_n)) \leq c_{\lambda_n,r} + \frac{t_n^2}{2}\int_{B_{\lambda_n r}(0)} |u_n(z)|^2 \left| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right)\right|^2 dz, \tag{2.70}$$

Por outro lado, seguindo os cálculos anteriores e como $\Psi_{\lambda_n}(y_n) \in \mathcal{M}_{\lambda_n}$, segue da desigualdade diamagnética,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_n}(\Psi_{\lambda_n}(y_n)) &\geq I_{\lambda_n}(e^{i\tau_{\lambda_n,r}(x)} u_n(\cdot - y_n)) \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{B_{\lambda_n,r}(0)} (|\nabla u_n(z)|^2 + |u_n(z)|^2)dz - \frac{1}{2}\int_{B_{\lambda_n r}(0)} F(|u_n(z)|^2)dz \\
&= J_{\lambda_n,r}(u_n) = c_{\lambda_n,r},
\end{aligned}$$

isto é,

$$I_{\lambda_n}(\Psi_{\lambda_n}(y_n)) \geq c_{\lambda_n,r}. \tag{2.71}$$

Logo, por (2.70) e (2.71),

$$c_{\lambda_n,r} \leq I_{\lambda_n}(\Psi_{\lambda_n}(y_n)) \leq c_{\lambda_n,r} + \frac{t_n^2}{2}\int_{B_{\lambda_n r}(0)} |u(z)|^2 \left| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right)\right|^2 dz. \tag{2.72}$$

Mais ainda, como $\frac{y_n}{\lambda_n} \in \Omega$ e Ω é limitado, existe $y_0 \in \bar{\Omega}$ tal que

$$\frac{y_n}{\lambda_n} \to y_0 \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

de onde, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\int_{B_{\lambda_n r}(0)} |u_n(z)|^2 \left| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right) \right|^2 dz \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{2.73}$$

Tendo em mãos o limite acima é suficiente verificar que (t_n) é limitada, pois se isto é verdade, então (2.72) junto com o Lema 2.9 nos conduz a

$$I_{\lambda_n}(\Psi_{\lambda_n}(y_n)) \to c_\infty, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

que é o desejado. Então, nos resta provar que (t_n) é limitada. Argumentando por contradição, suponhamos que exista uma subsequência da (t_n), denotada ainda por (t_n), tal que $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Recordemos que $\Psi_{\lambda_n} \in \mathcal{M}_{\lambda_n}$, então pelo Teorema de Mudança de Variável,

$$\|t_n e^{i\tau_{\lambda_n y_n}(\cdot)} u_n(\cdot - y_n)\|^2_{A_{\lambda_n}} = \int_{B_{\lambda_n r}(0)} f(|t_n u_n(z)|^2)|t_n u_n(z)|^2 dz$$

e por (2.69), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{l+C}(0)} f(|t_n v_n|^2)|v_n|^2 dx &\leq \int_{B_{\lambda_n r}(y_n)} f(|t_n v_n|^2)|v_n|^2 dx \\
&= \int_{B_{\lambda_n r}(0)} f(|t_n u_n(z)|^2)|u_n(z)|^2 dz \\
&= \|v_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})} + \int_{B_{\lambda_n r}(0)} |u_n(z)|^2 \left| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right) \right|^2 dz,
\end{aligned}$$

onde a bola $B_{l+C}(0)$ pode ser vista como em (2.68). A limitação de (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ juntamente com (2.73) implicam que o lado direito da desigualdade acima é limitada. Em contra partida, a condição (f_3) implica que

$$\lim_{s \to +\infty} f(s^2) = +\infty$$

e neste caso,

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n^2 v_n^2) v_n^2 = +\infty,$$

pois $v_n \to v$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Desde que $v_n \to v > 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e ocorra (2.73), obtemos pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} +\infty &= \int_{B_{l+C}(0)} \lim_{n\to\infty} f(|t_n v_n|^2)|v_n|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{B_{l+C}(0)} f(|v_n|^2)|v_n|^2 dx \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})} + \lim_{n\to\infty} \int_{B_{\lambda_n r}(0)} |u(z)|^2 \left| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{z+y_n}{\lambda_n}\right)\right|^2 dz \\ &= \|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

que contradiz o fato de $v \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Isto finaliza a prova. $\square$

Dado $y \in \Omega_\lambda^-$, temos que $\Psi_\lambda(y) \in \mathcal{M}_\lambda$. Além disso, se estabelecermos

$$g(\lambda) := \sup_{y\in\Omega_\lambda^-} |I_\lambda(\Psi_\lambda(y))|,$$

teremos que

$$g(\lambda) \geq I_\lambda(\Psi_\lambda(y)), \quad \forall y \in \Omega_\lambda^-.$$

Neste caso, o conjunto

$$\mathcal{O}_\lambda := \{u \in \mathcal{M}_\lambda; I_\lambda(u) \leq g(\lambda)\}$$

contém a função $\Psi_\lambda(y)$, de onde segue $\mathcal{O}_\lambda \neq \emptyset$.

Antes de apresentarmos o próximo resultado, notamos que, dado qualquer $u \in \mathcal{M}_\lambda$, existe $t_u > 0$ tal que $t_u|u| \in \mathcal{N}_\lambda$. Da desigualdade diamagnética,

$$\big\||u|\big\|_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})} \leq \|u\|_{A_\lambda} = \int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2)|u|^2 dx.$$

Definamos, para $t > 0$, a função $h_u(t) := J_\lambda(tu)$. Como $t_u|u| \in \mathcal{N}_\lambda$, temos $h_u'(t_u) = 0$. Logo, a desigualdade acima implica que $h_u'(1) \leq 0$. Portanto, da condição (f_4), segue que $t_u \in [0, 1]$.

O próximo resultado é o ponto chave quando queremos comparar a categoria de Ω com a do conjunto subnível do funcional I_λ.

Proposição 2.13. Existe $\hat{\lambda} > 0$ tal que $\beta(u) \in \Omega_\lambda^+$, sempre que $u \in \mathcal{O}_\lambda$ e $\lambda \geq \hat{\lambda}$.

Demonstração. A prova será realizada por contradição. Suponha que existam as sequências $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, $\lambda_n \to \infty$ e $(u_n) \subset \mathcal{M}_{\lambda_n}$ tal que

$$I_{\lambda_n}(u_n) \leq g(\lambda_n),$$

com

$$x_n := \beta(u_n) \notin \Omega^+_{\lambda_n}.$$

Seja $t_n \in [0,1]$ tal que $v_n := t_n|u_n| \in \mathcal{N}_{\lambda_n}$. Segue da desigualdade diamagnética e da sequência $(u_n) \subset \mathcal{O}_\lambda$ que

$$J_{\lambda_n}(t_n|u_n|) \leq I_{\lambda_n}(t_n u_n) \leq \max_{n\in\mathbb{N}} I_{\lambda_n}(t_n u_n) = I_{\lambda_n}(u_n) \leq g(\lambda_n).$$

Assim, a sequência (v_n) satisfaz

$$v_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n}, \quad \beta(v_n) = x_n \notin \Omega^+_{\lambda_n}, \quad J_{\lambda_n}(v_n) \leq g(\lambda_n).$$

Afirmação 2.3. Fixando $R > diam(\Omega)$, obtemos $\Omega_{\lambda_n} \subset \sum_{\lambda_n, x_n}$.

Assumindo a afirmação por um momento, nota-se que $v_n \in H^1_0(\Sigma_{\lambda_n,x_n}, \mathbb{R})$ (ver a Observação 2.1, no inicio deste capítulo). Como $\beta(v_n) = x_n$, temos

$$a_{\lambda_n,0} = a_{\lambda_n,x_n} \leq \hat{J}_{\lambda_n,x_n}(v_n) = J_{\lambda_n}(v_n) \leq g(\lambda_n), \tag{2.74}$$

uma vez que $H^1_0(\Sigma_{\lambda_n}, \mathbb{R})$ e $H^1_0(\Sigma_{\lambda_n,x_n}, \mathbb{R})$ são isometricamete isomorfos, de onde $a_{\lambda_n} = a_{\lambda_n,x_n}$.

A definição de g e o Lema 2.12, implicam

$$\lim_{n\to\infty} g(\lambda_n) = c_\infty.$$

Desta forma, podemos usar (2.74) e o limite acima para obter

$$\limsup_{n\to\infty} a_{\lambda_n,0} \leq \limsup_{n\to\infty} g(\lambda_n) = c_\infty,$$

que contradiz o Lema 2.10.

Agora nos resta apenas provar a afirmação. Fixando $x \in \Omega_{\lambda_n}$ e recordando que

$x_n \notin \Omega^+_{\lambda_n}$, percebe-se

$$\frac{1}{\lambda_n}x \in \Omega \quad \text{e} \quad \frac{1}{\lambda_n}x_n \notin \Omega^+.$$

Segue por definição de Ω^+ que

$$|\frac{1}{\lambda_n}x - \frac{1}{\lambda_n}x_n| > r,$$

ou equivalentemente,

$$|x - x_n| > \lambda_n r. \tag{2.75}$$

Por outro lado, desde que $x = \lambda_n y$, para algum $y \in \Omega$, podemos observar que

$$\begin{aligned} |x - x_n| &= |x - \beta(v_n)| = \left| x - \frac{1}{|v_n|^2_{2,\Omega_\lambda}} \int_{\Omega_{\lambda_n}} z|v_n|^2 dz \right| \\ &= \frac{1}{|v_n|^2_{2,\Omega_{\lambda_n}}} \left| \int_{\Omega_{\lambda_n}} \lambda_n y |v_n|^2 dz - \int_{\Omega_{\lambda_n}} z|v_n|^2 dz \right| \\ &= \frac{\lambda_n}{|v_n|^2_{2,\Omega_{\lambda_n}}} \left| \int_{\Omega_{\lambda_n}} (y - z/\lambda_n)|v_n|^2 dz \right|. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Além disso, $y \in \Omega$ e $\frac{1}{\lambda_n}z \in \Omega$ para algum $z \in \Omega_{\lambda_n}$. Logo, a igualdade em (2.76) implica

$$\begin{aligned} |x - x_n| &\leq \frac{\lambda_n}{|v_n|^2_{2,\Omega_{\lambda_n}}} \int_{\Omega_{\lambda_n}} |y - z/\lambda_n||v_n|^2 dz \\ &\leq \frac{\lambda_n}{|v_n|^2_{2,\Omega_{\lambda_n}}} \int_{\Omega_{\lambda_n}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |y - \frac{z}{\lambda_n}||v_n|^2 dz \\ &= \frac{\lambda_n}{|v_n|^2_{2,\Omega_{\lambda_n}}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |y - \frac{z}{\lambda_n}| \int_{\Omega_{\lambda_n}} |v_n|^2 dz \\ &= \lambda_n diam(\Omega) < \lambda_n R. \end{aligned}$$

Isto e (2.75) fornecem

$$x \in B_{\lambda_n R}(x_n) \backslash B_{\lambda_n r}(x_n) = \Sigma_{\lambda_n, x_n}.$$

Com isto, verificamos a afirmação e a proposição está provada. □

Como consequência do Lema 2.12 e da Proposição 2.13, temos que

Corolário 2.14. Existe $\hat{\lambda} > 0$ tal que

$$\Psi_\lambda(\Omega_r^-) \subset \mathcal{O}_\lambda \ \text{ e } \ \beta(\mathcal{O}_\lambda) \subset \Omega_r^+,$$

sempre que $\lambda \geq \hat{\lambda}$.

Proposição 2.15. Se $\hat{\lambda} > 0$ é dado pela Proposção 2.13, então para cada $\lambda \geq \hat{\lambda}$ vale

$$cat_{\mathcal{O}_\lambda}(\mathcal{O}_\lambda) \geq cat_{\Omega_\lambda}(\Omega_\lambda).$$

Demonstração. Suponha $cat_{\mathcal{O}_\lambda}(\mathcal{O}_\lambda) = n$, isto é, existem subconjuntos fechados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathcal{O}_\lambda$ satisfazendo:

- $\mathcal{O}_\lambda = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$;
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são contráteis em $\mathcal{O}_\lambda$.

Isto significa que existem $h_j \subset C([0,1] \times A_j, \mathcal{O}_\lambda)$ e $u_j \in A_j$ fixo, tais que

$$h_j(0,u) = u, \quad h_j(1,u) = u_j,$$

para cada $u \in A_j$. Considere o conjunto

$$B_j = \Psi_\lambda^{-1}(A_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

que são fechados em Ω_r^-, pois Ψ_λ é contínua, e satisfazem

$$\Psi_\lambda^{-1}(\mathcal{O}_\lambda) = B_1 \cup \cdots \cup B_n.$$

Por outro lado, é claro que $\Psi_\lambda^{-1}(\mathcal{O}_\lambda) \subset \Omega_r^-$ e, pelo Corolário 2.14 e da igualdade anterior, temos

$$\Omega_r^- = \Psi_\lambda^{-1}(\mathcal{O}_\lambda) = B_1 \cup \cdots \cup B_n.$$

A partir da função $g_j : [0,1] \times B_j \longrightarrow \Omega_r^+$ dada por

$$g_j(t,y) = \beta(h_j(t, \Psi_\lambda(y))),$$

podemos concluir que B_j é contrário em Ω_r^+. De fato, inicialmente notemos que $h_j(t, \Phi_\lambda(y))$ está bem definida, pois se $t \in [0,1]$ e $y \in B_j = \Psi_\lambda^{-1}(A_j)$, então $\Psi_\lambda^{-1}(y) \in A_j$, implicando que $h_j(t, \Psi_\lambda(y)) \in \mathcal{O}_\lambda$. Sendo assim, pela Proposição 2.13,

$$\beta(h_j(t, \Psi_\lambda(y))) \in \Omega_r^+, \quad \text{sempre que} \quad \lambda \geq \hat{\lambda}$$

de onde segue que g_j está bem definida. Note que g_j é contínua para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, por ser composição de funções β, h_j e Ψ_λ que são contínuas. Agora note

$$g_j(0, y) = \beta(h_j(0, \Psi_\lambda(y))) = \beta(\Psi_\lambda(y)) = y, \quad \forall y \in B_j$$

e

$$g_j(1, y) = \beta(h_j(1, \Psi_\lambda(y))) = \beta(w_j), \quad \forall y \in B_j.$$

Por isto, B_j é contrátil em Ω_r^+ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, implicando que

$$cat_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n := cat_{\mathcal{O}_\lambda}(\mathcal{O}_\lambda).$$

Finalmente, usando o fato de Ω_r^+ e Ω_r^- serem homotopicamente equivalente a Ω e combinando as Proposições C.1 e C.5 seque que

$$cat_\Omega(\Omega) = cat_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq cat_{\mathcal{O}_\lambda}(\mathcal{O}_\lambda),$$

completando a demonstração. □

Demonstração do Teorema 2.1. Argumentando como na prova do Lema 2.3, podemos checar que I_λ satisfaz a condição de Palais-Smale em $\mathcal{O}_\lambda$. Assim, podemos aplicar a teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman, sendo mais preciso, Teorema C.4 no Apêndice C, para obter pelo menos $cat_{\mathcal{O}_\lambda}(\mathcal{O}_\lambda)$ pontos críticos de $I_\lambda\big|_{\mathcal{O}_\lambda}$, e pela Proposição 2.15, $\mathcal{O}_\lambda$, possui pelo menos a $cat_\Omega(\Omega)$ de pontos críticos do funcional $I_\lambda\big|_{\mathcal{O}_\lambda}$. Como no Corolário 2.7, cada um desses pontos críticos, é ponto crítico do funcional I_λ sem restrição, portanto, solução fraca não nula do Problema (P_λ). □

Capítulo 3

Multiplicidade de Soluções Para a Equação de Schrödinger com um Campo Magnético: Potências Próximas do Expoente Crítico

Neste Capítulo discorreremos principalmente sobre resultados tratados em [4]. O capítulo anterior culmina na atenção de que o Teorema 2.1 fornece uma estimativa do número de soluções para uma equação de Schrödinger envolvendo um campo magnético externo. Aqui apresentaremos mais uma virtude dessas. Mais precisamente, estudaremos multiplicidade de soluções para o seguinte problema

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{i}\nabla - A\right)^2 u + \kappa u &= |u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_κ}$$

onde κ é um parâmetro positivo, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 3$, i é a unidade imaginária e $p \in (2, 2^*)$, $2^* = 2N/(N-2)$. Aqui assumiremos que o campo magnético $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$. É importante ressaltar que, o método apresentado no Capítulo 2 se aplica ao problema (P_κ). Veremos que para κ fixo, se p estiver próximo de 2^*, podemos comparar as estimativas do número de soluções do problema em termos da teoria de categoria e da topologia do domínio. Mais especificamente, com isso queremos dizer :

Teorema 3.1. *Existe uma função* $\overline{p} : [0, +\infty) \longrightarrow (2, 2^*)$ *tal que para todo* $p \in [\overline{p}(\kappa), 2^*)$*, o problema* (P_κ) *possui, pelo menos,* $cat_\Omega(\Omega)$ *soluções não triviais.*

Nosso intuito neste capítulo é provar esse teorema. Para isso, bem como já mencionado procederemos de maneira semelhante à demostração do Teorema 2.1.

3.1 Preliminares

Antes de definirmos o que entendemos por solução fraca para o problema (P_κ), iremos estabelecer algumas notações. Começaremos denotando por E um espaço de Hilbert real definido como o fecho de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ com respeito a norma induzida pelo produto interno

$$\langle u, v \rangle_A := Re\left\{\int_\Omega \nabla_A u \cdot \overline{\nabla_A v} dx\right\},$$

onde

$$\nabla_A u := (D_A^1 u, \dots, D^N u),$$

e

$$D_A^j := -i\partial_j - A^j, \quad \text{para} \quad j = 1, \dots N,$$

ou simplesmente

$$\nabla_A := -i\nabla - A. \tag{3.1}$$

A norma induzida por esse produto interno é

$$\|u\|_A := \left(\int_\Omega |\nabla_A u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como provado no Apêndice A (Teorema A.2, desigualdade diamagnética), para cada $u \in E$,

$$|\nabla|u|| \leq |\nabla_A u|, \quad \text{q.s em} \quad \mathbb{R}^N$$

Consequentemente, temos

$$\big\||u|\big\|^2 \leq \int_\Omega |\nabla|u||^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla_A u|^2 dx, \quad \forall u \in E, \tag{3.2}$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma do gradiente para $H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$, a qual, pela desigualdade de Poincaré, é equivalente à norma de $H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$. Além disso, por (3.2), $|u|\in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$. Logo, através das imersões contínuas e compactas

$$H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\hookrightarrow L^s(\Omega,\mathbb{C}),\quad s\in[1,2^*];$$

$$H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\hookrightarrow L^s(\Omega,\mathbb{C}),\quad s\in[1,2^*),$$

respectivamente, segue as imersões

$$E\hookrightarrow L^s(\Omega,\mathbb{C}),\quad s\in[1,2^*];$$

$$E\hookrightarrow L^s(\Omega,\mathbb{C}),\quad s\in[1,2^*) \tag{3.3}$$

que também são contínuas e compactas.

Definição 3.1. Diremos que $u\in E$ é uma solução fraca para o problema (P_κ), se

$$Re\left\{\int_\Omega(\nabla_A u\overline{\nabla_A v}+\kappa u\bar{v}-|u|^{p-2}u\bar{v})dx\right\}=0\quad\forall v\in E.$$

A ideia, agora, é associar soluções fracas de (P_κ) a pontos críticos de um funcional apropriado, definido em E. O funcional associado a (P_κ), $I_{\kappa,p,\Omega}:E\longrightarrow\mathbb{R}$, é dado por

$$I_{\kappa,p,\Omega}(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla_A u|^2+\kappa|u|^2)-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p,\quad\forall u\in E,$$

o qual, está bem definido pela imersão de Sobolev e pela desigualdade diamagnética. Temos, $I_{\kappa,p,\Omega}\in C^2(E,\mathbb{R})$, com derivada, dada por

$$I'_{\kappa,p,\Omega}(u)v=Re\left\{\int_\Omega(\nabla_A u\overline{\nabla_A v}+\kappa u\bar{v}-|u|^{p-2}u\bar{v})dx\right\},\quad\forall u,v\in E.$$

Assim, cada ponto crítico de $I_{\kappa,p,\Omega}$ é uma solução fraca do problema (P_κ).

3.2 A Condição de Palais-Smale

Proposição 3.2. O funcional $I_{\kappa,p,\Omega}$ satisfaz a condição de Palais-Smale, isto é, cada sequência $(u_n) \subset E$, para o qual

$$d := \sup_{n\in\mathbb{N}} |I_{\kappa,p,\Omega}(u_n)| < \infty \text{ e } I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n) \to 0 \tag{3.4}$$

quando $n \to \infty$, tem uma subsequência que converge forte em E.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset E$ satisfazendo (3.4). Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que

$$I_{\kappa,p,\Omega}(u_n) \to d \text{ e } I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n) \to 0 \quad n \to \infty.$$

Por isto, (u_n) é limitada em E, pois para n suficientemente grande, obtemos

$$|I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n)u_n| \leq \|u_n\|_A$$

e existe $C > 0$ tal que

$$|I_{\kappa,p,\Omega}(u_n)| \leq C.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
C + \|u_n\|_A &\geq I_{\kappa,p,\Omega}(u_n) - \frac{1}{p}I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n)u_n \\
&= \int_\Omega (\frac{1}{2}(|\nabla_A u_n|^2 + \kappa|u_n|^2) - \frac{1}{p}|u_n|^p)dx - \frac{1}{p}\left(\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa|u_n|^2) - |u_n|^p)dx\right) \\
&\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|_A^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega \kappa|u|^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|_A^2,
\end{aligned}$$

que implica (u_n) ser limitada. Assim, pela reflexividade do espaço E, existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E. Consequentemente, pela imersão compacta (3.3), $u_n \to u$ em $L^p(\Omega, \mathbb{C})$, para cada $p \in (2, 2^*)$. Resta mostrar que $u_n \to u$ em E. Para isto, note que

$$\|u_n - u\|_A^2 = \langle u_n - u, u_n - u\rangle_A = \|u_n\|_A^2 - \langle u_n, u\rangle_A - \langle u, u_n - u\rangle_A. \tag{3.5}$$

Note também que de (3.4)

$$\begin{aligned} \|u_n\|_A^2 &= I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n)u_n - \int_\Omega \kappa|u_n|^2dx + \int_\Omega |u_n|^pdx \\ &= o_n(1) - \int_\Omega \kappa|u_n|^2dx + \int_\Omega |u_n|^pdx, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} -\langle u_n, u\rangle_A &= -Re\left\{\int_\Omega \nabla_A u_n \cdot \overline{\nabla_A u}dx\right\} \\ &= I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n)u + Re\left\{\int_\Omega (\kappa u_n\bar{u} - |u_n|^{p-2}u_n\bar{u})dx\right\} \\ &= o_n(1) + Re\left\{\int_\Omega (\kappa u_n\bar{u} - |u_n|^{p-2}u_n\bar{u})dx\right\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

e, além disso,

$$\langle u, u_n - u\rangle_A = Re\left\{\int_\Omega \nabla_A u \cdot \overline{\nabla_A (u_n - u)}dx\right\} = o_n(1), \tag{3.8}$$

pois basta definir $v_n := u_n - u$ e o funcional linear $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$F(v_n) := Re\left\{\int_\Omega \nabla_A u \cdot \overline{\nabla_A v_n}dx\right\},$$

de onde segue combinando as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwarz que $F \in E'$ e, por consequência, desde que $u_n - u \rightharpoonup 0$ em E, temos

$$F(v_n) = o_n(1).$$

Aplicando (3.6)-(3.7)-(3.8) em (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_A^2 &= o_n(1) - \int_\Omega \kappa|u_n|^2dx + \int_\Omega |u_n|^pdx + Re\left\{\int_\Omega (ku_n\bar{u} - |u_n|^{p-2}u_n\bar{u})dx\right\} \\ &= o_n(1) + Re\left\{\int_\Omega [|u_n|^{p-2}u_n.\overline{(u_n - u)} - \kappa u_n.\overline{(u_n - u)}]dx\right\} \\ &\leq o_n(1) + \left|\int_\Omega [|u_n|^{p-2}u_n.\overline{(u_n - u)} - \kappa u_n.\overline{(u_n - u)}]dx\right| \\ &\leq o_n(1) + \int_\Omega \left||u_n|^{p-2}u_n.\overline{(u_n - u)}\right| + \kappa\int_\Omega \left|u_n.\overline{(u_n - u)}\right|dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

É claro, se definirmos $h(u_n) := |u_n|^{p-2}u_n$ e $q := p/(p-1)$, então $h(u_n) \in L^q(\Omega, \mathbb{C})$ e teremos pela desigualdade de Hölder, quando $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big| |u_n|^{p-2}u_n.(\overline{u_n - u})\Big| dx &\leq |h(u_n)|_{q,\Omega}|u_n - u|_{p,\Omega} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |h(u_n)|_{q,\Omega}|u_n - u|_{p,\Omega} \to 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

e

$$\int_\Omega \Big| u_n.(\overline{u_n - u})\Big| dx \leq |u_n|_{q,\Omega}|u_n - u|_{p,\Omega} \to 0, \tag{3.11}$$

uma vez que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega, \mathbb{C})$ e (u_n) seja limitada em $L^q(\Omega, \mathbb{C})$. Portanto, usando (3.10) e (3.11) em (3.9), provamos a convergência

$$\|u_n - u\|_A \to 0 \quad n \to \infty,$$

que é o desejado. □

Proposição 3.3. O funcional $I_{\kappa,p,\Omega}$ satisfaz a geometria do passo da montanha, isto é,

i) $I_{\kappa,p,\Omega}(0) = 0$ e exitem $\rho, r > 0$ tais que $I_{\kappa,p,\Omega}(u) \geq r$ com $\|u\|_A = \rho$;

ii) Existe $e \in E$ com $I_{\kappa,p,\Omega}(e) < 0$ e $\|e\|_A > \rho$.

Demonstração. **Primeira Geometria.** Claramente da definição do funcional, temos $I_{\kappa,p,\Omega}(0) = 0$. Note que

$$\begin{aligned} I_{\kappa,p,\Omega}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_A^2 + \frac{\kappa}{2}|u|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{p}|u|_{p,\Omega}^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_A^2 - \frac{1}{p}|u|_{p,\Omega}^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_A^2 - \frac{C}{p}\|u\|_A^p, \end{aligned}$$

onde C provem da imersão contínua de E em $L^p(\Omega, \mathbb{C})$. Desde que $2 < p$ podemos fixar $\rho > 0$ (ρ suficientemente pequeno) de maneira que

$$\frac{1}{2}\rho^2 - C\rho^p > \frac{1}{4}\rho^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - C\rho^{p-2} > \frac{1}{4}.$$

Então, segue que

$$I_{\kappa,p,\Omega}(u) \geq \frac{1}{4}\|u\|_A^2 = \frac{1}{4}\rho^2 := r > 0, \quad \text{para} \quad \|u\|_A = \rho;$$

mostrando (i) do Passo da Montanha.

Segunda Geometria. Fixe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})\backslash\{0\}$ e observe que para $t > 0$

$$I_{\kappa,p,\Omega}(t\varphi) = \frac{t^2}{2}\|\varphi\|_A^2 + \frac{t^2\kappa}{2}|\varphi|_{2,\Omega}^2 - \frac{t^p}{p}|\varphi|_{p,\Omega}^p.$$

Sendo $2 < p$, obtemos

$$I_{\kappa,p,\Omega}(\varphi t) \to -\infty, \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Por fim fixamos $e = t_0\varphi \in E$ para t_0 suficientemente grande que teremos

$$I_{\kappa,p,\Omega}(e) < 0 \quad \text{e} \quad \|e\|_A > \rho,$$

que verifica (ii) do Passo da Montanha. □

Segue das Proposições 3.2 e 3.3, que para todo $p \in (2, 2^*)$ e $\kappa > 0$, o problema (P_κ), tem uma solução não trivial $u \in E$ tal que

$$I_{\kappa,p,\Omega}(u) = b_{\kappa,p,\Omega} \quad \text{e} \quad I'_{\kappa,p,\Omega}(u) = 0,$$

onde $b_{\kappa,p,\Omega}$ denota o nível do passo da montanha de $I_{\kappa,p,\Omega}$. Além disso, como em [44, Teorema 4.2],

$$b_{\kappa,p,\Omega} := \inf_{u \in \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}} I_{\kappa,p,\Omega}(u),$$

onde

$$\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega} := \{u \in E\backslash\{0\}; I'_{\kappa,p,\Omega}(u)u = 0\}$$

é a variedade Nehari associada ao funcional $I_{\kappa,p,\Omega}$. A próximo resultado nos garante uma limitação inferior para o funcional sobre a variedade Nehari.

Proposição 3.4. Para cada $u \in \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}$, existe $\delta = \delta(p) > 0$, independente de $\kappa > 0$, tal que

$$\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2)dx \geq \delta \quad \text{e} \quad I_{\kappa,p,\Omega}(u) \geq \delta \tag{3.12}$$

Demonstração. Para qualquer $u \in \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}$, temos

$$\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2)dx = \int_\Omega |u|^p dx, \tag{3.13}$$

e segue da desigualdade diamagnética que

$$\begin{aligned} \big\||u|\big\|^2 = \int_\Omega |\nabla|u||^2 dx &\leq \int_\Omega |\nabla_A u|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega [|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2 - |u|^p]dx + \int_\Omega |u|^p dx \\ &= I'_{\kappa,p,\Omega}(u)u + \int_\Omega |u|^p dx \\ &= \int_\Omega |u|^p dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Por outro lado, segue da imersão contínua $H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \hookrightarrow L^p(\Omega,\mathbb{C})$,

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq C_p^p \int_\Omega |\nabla|u||^p = C_p^p \big\||u|\big\|^p, \tag{3.15}$$

onde C_p é a constante de imersão. Assim, de (3.13)-(3.14)-(3.15), verificam-se

$$\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2)dx = \int_\Omega |u|^p dx \geq \big\||u|\big\|^2 \quad \text{e} \quad \big\||u|\big\| \geq C_p^{p/(2-p)} =: \delta_1(p),$$

de onde segue

$$\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2)dx \geq \delta_1^2$$

e

$$\begin{aligned} I_{\kappa,p,\Omega}(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2 - |u|^p)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx \\ &= \frac{1}{2} I'_{\kappa,p,\Omega}(u)u + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega |u|^p dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2)dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\delta_1^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$I_{\kappa,p,\Omega}(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\delta_1^2 =: \delta_2.$$

Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, obtemos as desigualdades. □

Proposição 3.5. O funcional $I_{\kappa,p,\Omega}\Big|_{\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}$ uma sequência satisfazendo

$$d := \sup_{u\in\mathbb{N}} |I_{\kappa,p,\Omega}(u_n)| < \infty \ \text{ e } \ \left(I_{\kappa,p,\Omega}\Big|_{\mathcal{M}\kappa,p,\Omega}\right)'(u_n) \to 0.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que

$$I_{\kappa,p,\Omega}(u_n) \to d, \quad \text{quando} \ \ n \to \infty. \tag{3.16}$$

Ressaltamos que é suficiente provar o limite

$$I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n) \to 0, \quad \text{quando} \ \ n \to \infty,$$

visto que, vale (3.16) e argumentando como na prova da Proposição 3.2, a sequência (u_n) admite uma subsequência que converge forte em E.

Por [44, Proposição 5.12.], para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n) - \lambda_n G'(u_n) = \left(I_{\kappa,p,\Omega}\big|_{\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}}\right)'(u_n) = o_n(1), \tag{3.17}$$

onde

$$G_{\kappa,p,\Omega}(u_n) = I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n)u_n = \int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa|u_n|^2)dx - \int_\Omega |u_n|^p dx,$$

de onde segue

$$G'_{\kappa,p,\Omega}(u_n)u_n = 2\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa|u_n|^2)dx - p\int_\Omega |u_n|^p dx$$

e, desde que $(u_n) \subset \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}$, temos

$$\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa|u_n|^2)dx = \int_\Omega |u_n|^p dx$$

e, por consequência,

$$\begin{aligned} G'_{\kappa,p,\Omega}(u_n)u_n &= 2\Big[\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2+|u_n|^2)dx - \int_\Omega |u_n|^p dx\Big] + (2-p)\int_\Omega |u_n|^p dx \\ &= 2.0 + (2-p)\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx \\ &= (2-p)\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, a Proposição 3.4, fornece-nos

$$G'_{\kappa,p,\Omega}(u_n)u_n = (2-p)\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx \le (2-p)\delta^2 < 0.$$

Passando ao limite superior, quando $n\to\infty$ na expressão acima, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} G'_{\kappa,p,\Omega}(u_n)u_n = L \neq 0.$$

Isto e (3.17), implicam que $\lambda_n \to 0$, quando $n\to\infty$. Novamente por (3.17),

$$I'_{\kappa,p,\Omega}(u_n) = \lambda_n G'_{\kappa,p,\Omega}(u_n) + o_n(1) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Portanto, o funcional $I_{\kappa,p,\Omega}$ restrito a variedade de Nehari $\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}$, satisfaz a condição de Palais-Smale. $\square$

Como consequência dos argumentos da demonstração acima, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.6. Se u é um ponto crítico de $I_{\kappa,p,\Omega}$ restristo a $\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}$, então u é um ponto crítico não trivial de $I_{\kappa,p,\Omega}$ em E.

Demonstração. Novamente por [44, Proposição 5.12.], existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$\Big\|\Big(I_{\kappa,p,\Omega}\big|_{\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}}\Big)'(u)\Big\|_* = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|I'_{\kappa,p,\Omega}(u) - \lambda G'_{\kappa,p,\Omega}(u)\|, \tag{3.18}$$

onde G é dada como na prova da Proposição anterior. Por hipótese,

$$\Big(I_{\kappa,p,\Omega}\big|_{\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}}\Big)'(u) = 0,$$

logo, por (3.18),

$$I'_{\kappa,p,\Omega}(u) = \lambda G'_{\kappa,p,\Omega}(u) \tag{3.19}$$

Segue de (3.19),

$$\lambda G'_{\kappa,p,\Omega}(u)u = 0$$

Como sabemos pela prova da Proposição anterior que $G'_{\kappa,p,\Omega}(u)u < 0$, temos que $\lambda = 0$. Novamente por (3.19), obtemos $I'_{\kappa,p,\Omega}(u) = 0$, que é o desejado. □

3.3 Comportamento dos Níveis Minimax

Nessa seção, assim como no Capítulo 2, o comportamento assintótico dos níveis minimax que iremos apresentar serão ferramentas indispensáveis para obtermos o principal resultado do capítulo. Comecemos por considerar para cada $s \in [2, 2^*]$ e $\kappa > 0$, o número

$$m_A(\kappa, s, \Omega) := \inf_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2)dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^s dx\right)^{\frac{2}{s}}}$$

e também consideramos

$$m(\kappa, s, \Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \kappa|u|^2)dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^s dx\right)^{\frac{2}{s}}}.$$

Então, $S := m(0, 2^*, \Omega)$, onde S é a melhor constante de imersão $H_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega, \mathbb{C})$, que independe de Ω e κ. Além disso, seguindo a demonstração em Arioli e Szulkin [25, Teorema 1.1], temos

Lema 3.7. Para cada $\kappa \geq 0$, vale

$$m_A(\kappa, 2^*, \Omega) = m(0, 2^*, \Omega) = S.$$

Demonstração. Inicialmente poremos $m_A(\kappa, 2^*, \Omega) =: \bar{S}$, e mostraremos que $S \leq \bar{S}$.

De fato, pela desigualdade de Sobolev

$$S\big||u|\big|^2_{2^*,\Omega} \leq \int_\Omega |\nabla |u||^2, \quad \forall |u| \in \mathcal{D}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \setminus \{0\}\,. \tag{3.20}$$

Desde que $\kappa > 0$, $|u|^2_{2^*,\Omega} = \big||u|\big|^2_{2^*,\Omega}$ e por (3.20), segue pela desigualdade diamagnética,

$$S \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla |u||^2}{|u|^2_{2^*,\Omega}} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla |u||^2 + \kappa |u|^2}{|u|^2_{2^*,\Omega}} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla_A u| + \kappa |u|^2}{|u|^2_{2^*,\Omega}}, \tag{3.21}$$

ou seja,

$$S \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla_A u| + \kappa |u|^2}{|u|^2_{2^*,\Omega}},$$

ou melhor, S é uma cota inferior para o conjunto

$$\left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2)dx}{|u|^2_{2^*,\Omega}} ; u \in E \setminus \{0\} \right\}.$$

Portanto, segue pela definição de ínfimo que $S \leq \bar{S}$. Para provar a outra desigualdade, definiremos as seguintes funções

$$U_\varepsilon(x) = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \tag{3.22}$$

e $u_\varepsilon(x) = \varphi(x) U_\varepsilon(x)$, onde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, [0,1])$, $\varphi = 1$ em $B_{1/2}(0)$ e $\varphi = 0$ fora de $B_1(0)$. Então,

$$|\nabla(\varphi U_\varepsilon)|^2_{2,\Omega} = |\nabla u_\varepsilon|^2_{2,\Omega} = S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}) \;\text{ e }\; |u_\varepsilon|^{2^*}_{2^*,\Omega} = S^{N/2} + O(\varepsilon^N), \tag{3.23}$$

(ver [44, p.g.35]). Desde que u_ε é limitada em $L^{2^*}(\Omega, \mathbb{R})$ e $u_\varepsilon \to 0$ quase sempre em Ω, $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$ em $L^{2^*}(\Omega, \mathbb{R})$ quando $\varepsilon \to 0$, por Brézis Lieb (ver [44, Lema 1.32]). Por consequência, $u_\varepsilon^2 \rightharpoonup 0$ em $L^{2^*/2}(\Omega, \mathbb{R})$. Portanto, usando a desigualdade de Hölder adequadamente, segue

$$\int_\Omega \kappa u_\varepsilon^2 dx \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.24}$$

Analogamente,

$$\int_{\Omega} |A|^2 u_\varepsilon^2 \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.25}$$

Agora note que $|\nabla_A u_\varepsilon|^2 = |\nabla u_\varepsilon|^2 + |Au_\varepsilon|^2$ (lembre-se que u_ε é uma função real). Seja $\delta > 0$ qualquer. Escolhendo ε suficientemente pequeno, segue de (3.23)-(3.24)-(3.25) e pela definição de ínfimo,

$$\bar{S} \leq \frac{\int_{\Omega}(|\nabla_A u_\varepsilon|^2 + \kappa|u_\varepsilon|^2)dx}{|u_\varepsilon|_{2^*,\Omega}^2} = \frac{\int_{\Omega}(|\nabla u_\varepsilon| + |Au_\varepsilon|^2 + \kappa|u_\varepsilon|^2)dx}{|u_\varepsilon|_{2^*,\Omega}^2} \leq S + \delta.$$

Desde que δ é qualquer, concluímos que $\bar{S} \leq S$. Portanto, $S = \bar{S}$. □

Observação 3.1. Argumentando como na demonstração do lema anterior, prova-se que $S = \bar{S}$, quando se tem, $E := \mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, trocando κ por um potencial $V \geq 0$ em $L_{loc}^{N/2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e $A \in L_{loc}^N(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, veja Arioli e Szulkin [25, Teorema 1.1].

No que se segue, para o desenvolvimento da teoria, veremos outros lemas.

Lema 3.8. Seja $b_{\kappa,s,\Omega}$ o nível do passo da montanha do funcional $I_{\kappa,s,\Omega}$. Então, para $s > 2$,

$$b_{\kappa,s,\Omega} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right) m_A(\kappa, s, \Omega)^{\frac{s}{s-2}}. \tag{3.26}$$

Além disso, para $s = 2^*$, temos

$$b_{\kappa,2^*,\Omega} = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{3.27}$$

Demonstração. Inicialmente, provaremos a desigualdade

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right) m_A(\kappa, s, \Omega)^{\frac{s}{s-2}} \leq b_{\kappa,s,\Omega}.$$

De fato, se $u \in \mathcal{M}_{\kappa,s,\Omega}$, temos $|u|_{s,\Omega}^2 = \int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2)dx$. Logo,

$$I_{\kappa,s,\Omega}(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right) \int_{\Omega} (|\nabla_A u|^2 + \kappa|u|^2)dx. \tag{3.28}$$

Note que

$$m_A(\kappa, s, \Omega) \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2) dx}{|u|_{s,\Omega}^2} = \left(\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2) dx \right)^{\frac{s-2}{s}} \tag{3.29}$$

Aplicando (3.28) em (3.29), obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s} \right) m_A(\kappa, s, \Omega)^{\frac{s}{s-2}} \leq I_{\kappa,s,\Omega}(u).$$

Portanto, tomando o ínfimo em $u \in \mathcal{M}_{\kappa,s,\Omega}$, verificamos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s} \right) m_A(\kappa, s, \Omega)^{\frac{s}{s-2}} \leq b_{\kappa,s,\Omega}. \tag{3.30}$$

Para provar a outra desigualdade, tomemos $(u_n) \in E \setminus \{0\}$ tal que

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2) dx}{|u_n|_{s,\Omega}^2} \to m_A(\kappa, s, \Omega), \quad n \to \infty, \tag{3.31}$$

e argumentando como em [44, Lema 4.1], existe um único $t_n := t_{u_n} > 0$ tal que $t_u u_n \in \mathcal{M}_{\kappa,s,\Omega}$ e, por conseguinte,

$$b_{\kappa,s,\Omega} \leq I_{\kappa,s,\Omega}(t_n u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s} \right) |t_n u_n|_{s,\Omega}^p. \tag{3.32}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2) dx}{|u_n|_{s,\Omega}^2} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A (t_n u_n)|^2 + \kappa |t_n u_n|^2) dx}{t_n^2 |u_n|_{s,\Omega}^2} \\ &= \frac{|t_n u_n|_{s,\Omega}^s}{|t_n|^2 |u_n|_{s,\Omega}^2} = |t_n u_n|_{s,\Omega}^{s-2} \end{aligned}$$

e, usando (3.31)-(3.32), ficamos

$$m_A(\kappa, s, \Omega) \leftarrow \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2) dx}{|u_n|_{s,\Omega}^2} \geq b_{\kappa,s,\Omega}^{\frac{s-2}{s}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s} \right)^{-\frac{(s-2)}{s}}$$

ou seja,

$$m_A(\kappa, s, \Omega) \geq b_{\kappa,s,\Omega}^{\frac{s-2}{s}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right)^{-\frac{(s-2)}{s}},$$

ou melhor,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right) m_A(\kappa, s, \Omega)^{\frac{s}{s-2}} \geq b_{\kappa,s,\Omega}.$$

Isto e (3.30) prova (3.26). Portanto, prova-se o lema. □

O próximo resultado é um lema chave para estabelecer a relação entre $b_{\kappa,s,\Omega}$ e $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$ quando $s < 2^*$. Para o caso em que $s = 2^*$, o lema anterior fornece a igualdade $b_{\kappa,2^*,\Omega} = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

Lema 3.9. Dado qualquer $\kappa \geq 0$, temos o seguinte limite

$$\lim_{s \to 2^*} b_{\kappa,s,\Omega} = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{3.33}$$

Demonstração. Fixe $\kappa \geq 0$. Note que pela desigualdade de Hölder para $2 \leq s < q \leq 2^*$ e $u \in E \backslash \{0\}$,

$$|u|_{s,\Omega} \leq |\Omega|^{\frac{q-s}{qs}} |u|_{q,\Omega} \Rightarrow \frac{1}{|u|_{q,\Omega}^2} |\Omega|^{\frac{-2(q-s)}{qs}} \leq \frac{1}{|u|_{s,\Omega}^2}. \tag{3.34}$$

Multiplicando (3.34) por $\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2) dx$, obtemos

$$\frac{\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2) dx}{|u|_{s,\Omega}^2} \geq |\Omega|^{\frac{-2(q-s)}{qp}} \frac{\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2) dx}{|u|_{q,\Omega}^2}. \tag{3.35}$$

Afirmação 3.1. O conjunto $\{m_A(\kappa, s, \Omega); s \in (2, 2^*)\}$ é limitado.

De fato, tomando $q = 2^*$ em (3.35) e o ínfimo para $u \in E \setminus \{0\}$, encontramos, pelo Lema 3.7,

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2)dx}{|u|^2_{s,\Omega}} &\geq |\Omega|^{\frac{-2(2^*-s)}{2^*s}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2)dx}{|u|^2_{2^*,\Omega}} \\
&\geq |\Omega|^{\frac{-2(2^*-s)}{2^*s}} \inf_{u\in E\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2)dx}{|u|^2_{2^*,\Omega}} \\
&= |\Omega|^{\frac{-2(2^*-s)}{2^*s}} S.
\end{aligned}$$

Note que o lado direito da expressão acima é uma cota inferior para o conjunto

$$\left\{ \frac{\int_\Omega (|\nabla_A u|^2 + \kappa |u|^2)dx}{|u|^2_{s,\Omega}}; u \in E \setminus \{0\} \right\}.$$

Logo, segue pela definição de ínfimo que

$$m_A(\kappa, s, \Omega) \geq S|\Omega|^{\frac{-2(2^*-s)}{2^*s}}. \tag{3.36}$$

Por outro lado, fazendo $s = 2$, em (3.35) e usando argumento similar, verificamos

$$m_A(\kappa, q, \Omega) \leq |\Omega|^{\frac{(q-2)}{q}} m_A(\kappa, 2, \Omega).$$

Mais ainda, trocando s por q na desigualdade acima,

$$m_A(\kappa, s, \Omega) \leq |\Omega|^{\frac{(s-2)}{s}} m_A(\kappa, 2, \Omega). \tag{3.37}$$

Então, por (3.36) e (3.37), segue a afirmação. Existem, então,

$$\sup_{s\in(2,2^*)} m_A(\kappa, s, \Omega) =: M \quad \text{e} \quad \inf_{s\in(2,2^*)} m_A(\kappa, s, \Omega) =: m.$$

Afirmação 3.2. $M = S = m$

De fato, por (3.36),

$$M \geq m \geq \liminf_{s\to 2^*} |\Omega|^{\frac{-2(2^*-s)}{2^*s}} S = S. \tag{3.38}$$

Suponha, por contradição, que $M > S$. Seja $\varepsilon \in (0, M - S)$. Pela definição de $m_A(\kappa, s, \Omega)$ e devido ao Lema 3.7, exite $0 \neq v \in E$, tal que

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A v|^2 + \kappa |v|^2) dx}{|v|^2_{2^*,\Omega}} < m_A(\kappa, 2^*, \Omega) + \frac{\varepsilon}{2} = S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, como a função $s \longrightarrow |v|_{s,\Omega}$ é contínua, existe $\bar{s} \in (2, 2^*)$ tal que para cada $s \in [\bar{s}, 2^*)$, temos

$$\left| \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A v|^2 + \kappa |v|^2) dx}{|v|^2_{s,\Omega}} - \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A v|^2 + \kappa |v|^2) dx}{|v|^2_{2^*,\Omega}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para cada $s \in [\bar{s}, 2^*)$,

$$\begin{aligned} m_A(\kappa, s, \Omega) &\leq \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A v|^2 + \kappa |v|^2) dx}{|v|^2_{s,\Omega}} < \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A v|^2 + \kappa |v|^2) dx}{|v|^2_{2^*,\Omega}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq S + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < M, \end{aligned}$$

isto é,

$$M = \limsup_{s \to 2^*} m_A(\kappa, s, \Omega) < S + \varepsilon < M,$$

que é uma contradição. Deste modo $S = M$, e por (3.38), $S = M \geq m \geq S$, ou seja, $M = m = S$ que prova a afirmação. Desde que a afirmação é verdadeira, seguem do Lema 3.8,

$$\limsup_{s \to 2^*} b_{\kappa,s,\Omega} = \limsup_{s \to 2^*} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s} \right) m_A(\kappa, s, \Omega)^{\frac{s}{s-2}} \right] = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$$

e

$$\liminf_{s \to 2^*} b_{\kappa,s,\Omega} = \liminf_{s \to 2^*} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s} \right) m_A(\kappa, s, \Omega)^{\frac{s}{s-2}} \right] = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

ou seja,

$$\lim_{s \to 2^*} b_{\kappa,s,\Omega} = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Como queríamos. $\square$

Observação 3.2. Segue dos Lemas 3.8 e 3.9,

$$\lim_{s \to 2^*} b_{\kappa,s,\Omega} = b_{\kappa,2^*,\Omega},$$

que é uma espécie de continuidade para o nível $b_{\kappa,s,\Omega}$ em 2^*.

O próximo resultado é um dos últimos utensílios a fim de alcançarmos o teorema principal. Mas antes precisamos de algumas definições, notações e resultados. Sem perda de generalidade podemos supor que $0 \in \Omega$. Sejam $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset \Omega$ e os conjuntos

$$\Omega_r^+ := \left\{x \in \mathbb{R}^N; dist(x, \Omega) \leq r\right\} \quad \text{e} \quad \Omega_r^- := \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

são homotopicamente equivalentes [1] em Ω.

No que segue, para qualquer $\kappa \geq 0$, $p \in (2, 2^*)$, consideremos o funcional $J_{\kappa,p,r}$: $H_0^1(B_r(0), \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J_{\kappa,p,r}(u) = \frac{1}{2}\int_{B_r(0)} (|\nabla u|^2 + \kappa|u|^2)dx - \frac{1}{p}\int_{B_r(0)} |u|^p dx, \quad \forall u \in H_0^1(B_r(0), \mathbb{R}).$$

Por [44], $J_{\kappa,p,r} \in C^2(H_0^1(B_r(0), \mathbb{R}))$. Seu nível do passo da montanha, será denotado por $c_{\kappa,p,r}$, satisfazendo

$$c_{\kappa,p,r} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\kappa,p,r}} J_{\kappa,p,r}(u),$$

onde

$$\mathcal{N}_{\kappa,p,r} := \left\{u \in H_0^1(B_r(0), \mathbb{R}) \setminus \{0\}\,; J'_{\kappa,p,r}(u)u = 0\right\}$$

é a variedade Nehari correspondente. Além disso, $J_{\kappa,p,r}$, bem como $J_{\kappa,p,r}\big|_{\mathcal{N}_{\kappa,p,r}}$, satisfazem a condição de Palais-Smale, e usando o Princípio Variacional de Ekeland, existe uma função positiva $u_{\kappa,p,r} \in \mathcal{N}_{\kappa,p,r}$ tal que $J_{\kappa,p,r}(u_{\kappa,p,r}) = c_{\kappa,p,r}$ e $J'_{\kappa,p,r}(u_{\kappa,p,r}) = 0$, ou seja, o funcional $J_{\kappa,p,r}$ tem uma **ground state solution** $u_{\kappa,p,r}$, que é radialmente simétrica (veja Proposição 2.11).

Argumentando como nas demonstrações dos Lemas 3.8 e 3.9, temos, para cada

[1] Veja Apêndice C.

$\kappa \geq 0$, $B_r(0) \subset \mathbb{R}^N$, tomado

$$m(\kappa, p, r) := m(\kappa, p, B_r(0)),$$

que

$$c_{\kappa,p,r} := c_{\kappa,p,B_r(0)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) m(\kappa, p, B_r(0))^{\frac{p}{p-2}} \quad \text{e} \quad \lim_{p \to 2^*} c_{\kappa,p,r} = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{3.39}$$

Consequentemente, segue do Lema 3.7

$$\lim_{p \to 2^*} c_{\kappa,p,r} = \lim_{p \to 2^*} b_{\kappa,p,\Omega} = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{3.40}$$

Seja $\tau_y(x) := \sum_{j=1}^{N} A^j(y) x_j$, para $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \Omega$. Procedendo como em [44, Lema 4.1], existe um único número $t_{\kappa,p,y} > 0$ tal que

$$t_{\kappa,p,y} e^{i\tau_y} u_{\kappa,p,r}(| \cdot - y|) \in \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}. \tag{3.41}$$

Agora defina a função $\Phi_{\kappa,p} : \Omega_r^- \to \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}$ como

$$(\Phi_{\kappa,p}(y))(x) = \begin{cases} t_{\kappa,p,y} e^{i\tau_y(x)} u_{\kappa,p,r}(|x-y|), & \text{se} \quad x \in B_r(0), \\ 0, & \text{se} \quad x \in \Omega \setminus B_r(0), \end{cases} \tag{3.42}$$

Como prometido vejamos o seguinte lema e sua prova.

Lema 3.10. Para $\kappa \geq 0$ fixo,

$$\lim_{p \to 2^*} \max_{y \in \Omega_r^-} |I_{\kappa,p,\Omega}(\Phi_{\kappa,p}(y)) - \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}| = 0$$

Demonstração. Fixe $\kappa \geq 0$. Começamos notando que para quaisquer sequências $(y_n) \subset \Omega_r^-$ e $(p_n) \subset [2, 2^*)$ tal que $p_n \to 2^*$, temos

$$I_{\kappa,p_n,\Omega}(\Phi_{\kappa,p_n}(y_n)) \to \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{3.43}$$

De fato, para simplificar, escreveremos

$$t_{t_{\kappa,p_n,y_n}} =: t_n, \quad I_{\kappa,p_n,\Omega} =: I_n, \quad \Phi_{\kappa,p_n}(y_n) =: \Phi_n(y_n) \ \text{ e } \ u_{\kappa,p_n,r} =: u_n.$$

Observe que, por definição de ∇_A, Φ_n e τ_{y_n}, segue

$$\begin{aligned}
\nabla_A(e^{i\tau_{y_n}(x)}u_n(x-y_n)) &= -i\big[i\nabla\tau_{y_n}(x)u_n(x-y_n)e^{i\tau_{y_n}(x)} + e^{i\tau_{y_n}(x)}\nabla u_n(x-y_n)\big] + \\
&\quad -A(x)e^{i\tau_{y_n}(x)}u_n(x-y_n) \\
&= A(y_n)u_n(x-y_n)e^{i\tau_{y_n}(x)} - i\nabla u_n(x-y_n)e^{i\tau_{y_n}(x)} + \\
&\quad -A(x)e^{i\tau_{y_n}(x)}u_n(x-y_n) \\
&= \Big[(A(y_n)-A(x))u_n(x-y_n) - i\nabla u_n(x-y_n)\Big]e^{i\tau_{y_n}(x)}
\end{aligned}$$

e, por consequência,

$$\Big|\nabla_A(e^{i\tau_{y_n}(x)}u_n(x-y_n))\Big|^2 = \Big[\big|(A(y_n)-A(x)\big|^2\big|u_n(x-y_n)\big|^2 + \big|\nabla u_n(x-y_n)\big|^2\Big], \tag{3.44}$$

uma vez que, u_n não é uma função em $\mathbb{C}$ e

$$\big|e^{i\tau_{y_n}(x)}\big|^2 = 1.$$

Logo, por (3.44) aplicando o Teorema da Mudança de Variável e, desde que valha (3.41) e $J_{\kappa,p_n,r}(u_n) = c_{\kappa,p_n,r}$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_n(\Phi_n(y_n)) &= \frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla_A\Phi(y_n)|^2 + \kappa|\Phi_n(y_n)|^2)dx - \frac{1}{p_n}\int_\Omega|\Phi_n(y_n)|^{p_n}dx \\
&= \frac{t_n^2}{2}\int_{B_r(0)}|A(x+y_n)-A(y_n)|^2|u_n|^2dx + \\
&\quad +\frac{t_n^2}{2}\int_{B_r(0)}(|\nabla u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx - \frac{t_n^{p_n}}{p_n}\int_{B_r(0)}|u_n|^{p_n}dx \\
&= \frac{t_n^2}{2}\int_{B_r(0)}|A(x+y_n)-A(y_n)|^2|u_n|^2dx + J_{\kappa,p_n,r}(t_nu_n) \\
&\leq \frac{t_n^2}{2}\int_{B_r(0)}|A(x+y_n)-A(y_n)|^2|u_n|^2dx + c_{\kappa,p_n,r},
\end{aligned}$$

isto é,

$$I_n(\Phi_n(y_n)) \leq \frac{t_n^2}{2} \int_{B_r(0)} |A(x+y_n) - A(y_n)|^2 |u_n|^2 dx + c_{\kappa,p_n,r} \tag{3.45}$$

Por outro lado, pela desigualdade diamagnética,

$$\begin{aligned}
I_n(\Phi_n(y_n)) &= I_n(t_n e^{i\tau_{y_n}(\cdot)} u_n(x-y_n)) \geq I_n(e^{i\tau_{y_n}(\cdot)} u_n(\cdot - y_n)) \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_A (e^{i\tau_{y_n}(x)} u_n(x-y_n))|^2 dx + \kappa |e^{i\tau_{y_n}(x)} u_n(x-y_n)|^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{p_n} \int_\Omega |e^{i\tau_{y_n}(x)} u_n(x-y_n)|^{p_n} dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{B_r(y_n)} |\nabla |u_n(x-y_n)||^2 dx + \kappa |u_n(x-y_n)|^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{p_n} \int_{B_r(y_n)} |u_n(x-y_n)|^{p_n} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{B_r(0)} |\nabla u_n(x)|^2 dx + \kappa |u_n(x)|^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{p_n} \int_{B_r(0)} |u_n(x)|^{p_n} dx \\
&= J_{\kappa,p_n,r}(u_n) = c_{\kappa,p_n,r},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I_n(\Phi_n(y_n)) \geq J_{\kappa,p_n,r}(u_n) = c_{\kappa,p_n,r} \tag{3.46}$$

De (3.45) e (3.46), temos

$$c_{\kappa,p_n,r} \leq I_n(\Phi_n(y_n)) \leq \frac{t_n^2}{2} \int_{B_r(0)} |A(x+y_n) - A(y_n)|^2 |u_n|^2 dx + c_{\kappa,p_n,r}. \tag{3.47}$$

Assim, por (3.40), é suficiente provar que

$$\frac{t_n^2}{2} \int_{B_r(0)} |A(x+y_n) - A(y_n)|^2 |u_n|^2 dx = o_n(1). \tag{3.48}$$

Começamos mostrando que $u_n \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(B_r(0), \mathbb{R})$ e (t_n) é uma sequência limitada. De fato, como $u_n \in \mathcal{N}_{\kappa,p_n,r}$ é tal que $J_{\kappa,p_n,r}(u_n) = c_{\kappa,p_n,r}$, temos

$$c_{\kappa,p_n,r} = J_{\kappa,p_n,r}(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_n}\right) \int_{B_r(0)} (|\nabla u_n|^2 + \kappa |u_n|^2) dx,$$

ou de outra forma,

$$\int_{B_r(0)} (|\nabla u_n|^2 + \kappa|u_n|^2)dx = c_{\kappa,p_n,r}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}. \tag{3.49}$$

Logo, de (3.40) e (3.49), a sequência $(u_n) \subset H_0^1(B_r(0), \mathbb{R})$ é limitada. Assim, passando a uma subsequência, se necessário, existe $v \in H_0^1(B_r(0), \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} (a) \;\; u_n \rightharpoonup v \;\; \text{em } H_0^1(B_r(0), \mathbb{R}), \text{ quando } n \to \infty \\ (b) \;\; u_n \to v \;\; \text{em } L^p(B_r(0), \mathbb{R}), \text{ para cada } p \in [2, 2^*), \text{ quando } n \to \infty \\ (c) \;\; u_n \to v \;\; \text{q.s. em } B_r(0), \text{ quando } n \to \infty \end{cases} \tag{3.50}$$

Por hipótese, (u_n) é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \kappa u_n = u^{p_n - 1}, & \text{em} \quad B_r(0) \\ u_n = 0, & \text{sobre} \quad \partial B_r(0) \end{cases}$$

Consequentemente, para qualquer $\psi \in C_0^\infty(B_r(0), \mathbb{R})$,

$$\int_{B_r(0)} (\nabla u_n \nabla \psi + \kappa u_n \psi dx = \int_{B_r(0)} u_n^{p_n - 1}\psi dx. \tag{3.51}$$

Fazendo $n \to \infty$ no lado esquerdo da igualdade em (3.51), segue por (3.50) que

$$\int_{B_r(0)} (\nabla u_n \nabla \psi + \kappa u_n \psi)dx \to \int_{B_r(0)} (\nabla v \nabla \psi + \kappa v \psi)dxdx. \tag{3.52}$$

Desde que $(u_n^{p_n-1})$ é uma sequência limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega, \mathbb{R})$ e $u_n^{p_n-1} \to v^{2^*-1}$ quase sempre em Ω, segue por Brezis-Lieb que $u_n^{p_n-1} \rightharpoonup v^{2^*-1}$ em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega, \mathbb{R})$. Logo,

$$\int_{B_r(0)} u_n^{p_n-1}\psi dx \to \int_{B_r(0)} v^{2^*-1}\psi dx, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(B_r(0), \mathbb{R}),$$

e, em particular

$$\int_{B_r(0)} u_n^{p_n-1}\psi dx \to \int_{B_r(0)} v^{2^*-1}\psi dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(B_r(0), \mathbb{R}).$$

Novamente fazendo $n \to \infty$ em (3.51), segue de (3.52) e pelo limite acima que

$$\int_{B_r(0)} (\nabla v \nabla \psi + \kappa v \psi) dx = \int_{B_r(0)} v^{2^*-1} \psi dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(B_r(0), \mathbb{R}).$$

Portanto, $v \in H_0^1(B_r(0), \mathbb{R}) \backslash \{0\}$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \kappa u &= u^{2^*-1}, \quad \text{em} \quad B_r(0) \\ u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial B_r(0) \end{cases} \tag{P}$$

Afirmação 3.1.

$$v = 0 \ \text{ em } \ B_r(0).$$

De fato, inicialmente observe que

$$-\Delta u = av,$$

onde $a := v^{2^*-2} - \kappa \in L^{N/2}(B_r(0), \mathbb{R})$. Logo o Teorema de Brezis-Kato implica que $v \in L^p(B_r(0), \mathbb{R})$. Neste caso $v \in W^{2,p}(B_r(0), \mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$, de onde segue pela teoria da regularidade elíptica que $v \in C^2(B_r(0)) \cap C^1(\bar{B}_r(0)$. Como a bola claramente é um domínio estrelado [2] com relação a origem, e considerando

$$g(u) := v^{2^*-1} - \kappa v,$$

temos

$$\hat{F}(v) \int_0^v f(s) ds = \frac{1}{2^*} v^{2^*} - \frac{\kappa}{2} v^2 \in L^1(B_r(0), \mathbb{R}),$$

logo, a Identidade de Pohozaev (veja [43, Teorema B.1]), fornece-nos

$$\frac{N-2}{2} \int_{B_r(0)} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial B_r(0)} |\nabla v|^2 \nu \cdot \sigma d\sigma = \frac{N}{2^*} \int_{B_r(0)} v^{2^*} dx - \frac{\kappa N}{2} \int_{B_r(0)} v^2 dx,$$

[2] Um domínio suave Ω de $\mathbb{R}^N$ é dito estrelado em relação a um ponto $x_0 \in \Omega$, se dado $x \in \partial\Omega$, temos que o produto interno $(x - x_0) \cdot \eta_x > 0$, onde η_x denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ em x.

ou melhor,

$$\frac{N-2}{2}\left(\int_{B_r(0)} v^{2^*}dx - \kappa\int_{B_r(0)} v^2 dx\right) + \frac{1}{2}\int_{\partial B_r(0)} |\nabla v|^2 \nu\cdot\sigma d\sigma = \frac{N}{2^*}\int_{B_r(0)} v^{2^*}dx - \frac{\kappa N}{2}\int_{B_r(0)} v^2 dx,$$

ou seja,

$$\kappa\int_{B_r(0)} v^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial B_r(0)} |\nabla v|^2 \nu\cdot\sigma d\sigma = 0. \tag{3.53}$$

Há dois casos a serem analisados, a saber $\kappa = 0$ e $\kappa \neq 0$. É claro que para $\kappa \neq 0$, (3.53) acarreta $v = 0$ sobre $B_r(0)$ e segue a afirmação. Agora, para $\kappa = 0$, (3.53) torna-se

$$\int_{\partial B_r(0)} |\nabla v|^2 \nu\cdot\sigma d\sigma = 0.$$

Entretanto, $B_r(0)$ é estrelado, então $\nu\cdot\sigma > 0$ sobre $\partial B_r(0)$. Desta forma $\nabla v = 0$ sobre $\partial B_r(0)$, e por conseguinte, aplicando a identidade de Green,

$$\int_{B_r(0)} \Delta v dx = \int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial v}{\partial \eta} dS = \int_{\partial B_r(0)} \nabla v\cdot\eta dS = 0,$$

e do problema (P) segue

$$0 = -\int_{B_r(0)} \Delta v dx = \int_{B_r(0)} v^{2^*-1}dx,$$

implicando que $v = 0$ sobre $B_r(0)$, provando a afirmação. Por consequência, $u_n \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(B_r(0),\mathbb{R})$. Usando mais uma vez (3.41), verificamos a igualdade

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla_A e^{i\tau_{y_n}(x)}u_n(x-y_n)|^2dx + \kappa|u_n(x-y_n)|^2dx &= \int_{B_r(y_n)} |(A(y_n)-A(x)|^2|u_n(x-y_n)|^2dx + \\ &+ \int_{B_r(y_n)} (|\nabla u_n(x-y_n)|^2. + \kappa|u_n(x-y_n)|^2)dx.\end{aligned}$$

No entanto, por uma mudança de variável, ficamos com

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla_A e^{i\tau_{y_n}(x)}u_n(x-y_n)|^2dx + \kappa|u_n(x-y_n)|^2dx &= \int_{B_r(0)} |(A(y_n)-A(x+y_n)|^2|u_n(x)|^2dx + \\ &+ \int_{B_r(0)} (|\nabla u_n(x)|^2 + \kappa|u_n(x)|^2)dx. \quad (3.54)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
t_n^{p_n-2}\int_{B_r(0)}|u_n|^{p_n}dx &= \frac{t_n^{p_n}}{t_n^2}\int_{B_r(0)}|e^{i\tau_{y_n}}|^{p_n}|u_n|^{p_n}dx \\
&= \frac{1}{t_n^2}\int_{B_r(0)}|t_ne^{i\tau_{y_n}}u_n|^{p_n}dx \\
&= \frac{1}{t_n^2}\int_{B_r(y_n)}|t_ne^{i\tau_{y_n}(x)}u_n(x-y_n)|^{p_n}dx \\
&= \frac{1}{t_n^2}\int_{\Omega}|t_ne^{i\tau_{y_n}(x)}u_n(x-y_n)|^{p_n}dx \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

e, desde que

$$
\int_\Omega|\Phi_n(y_n)|^{p_n}dx=\int_\Omega(|\nabla_A\Phi_n(y_n)|^2+\kappa|\Phi_n(y_n)|^2)dx,
$$

uma vez que $\Phi_n(y_n)\in\mathcal{M}_{\kappa,p_n,\Omega}$, decorre de (3.55)

$$
t_n^{p_n-2}\int_{B_r(0)}|u_n|^{p_n}dx=\frac{1}{t_n^2}\int_\Omega(|\nabla_A(\tau_ne^{it_{y_n}(x)}u_n(x-y_n))|^2+\kappa|\tau_ne^{it_{y_n}(x)}u_n(x-y_n)|^2)dx.
$$

Isto e (3.54), implicam

$$
\int_{B_r(0)}|(A(y_n)-A(x+y_n)|^2|u_n(x)|^2dx+\int_{B_r(0)}(|\nabla u_n(x)|^2+\kappa|u_n(x)|^2)dx=t_n^{p_n-2}\int_{B_r(0)}|u_n|^{p_n}dx,
$$

ou ainda,

$$
\int_{B_r(0)}|(A(y_n)-A(x+y_n)|^2|u_n(x)|^2dx=\left(t_n^{p_n-2}-1\right)\int_{B_r(0)}(|\nabla u_n(x)|^2+\kappa|u_n(x)|^2)dx,
$$

pois, $u_n\in\mathcal{N}_{\kappa,p_n,r}$. Por (3.49), ainda temos

$$
\int_{B_r(0)}|(A(y_n)-A(x+y_n)|^2|u_n(x)|^2dx=\left(t_n^{p_n-2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}c_{\kappa,p_n,r}. \qquad (3.56)
$$

Note que por (b) e desde que $A\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$,

$$
\int_{B_r(0)}|(A(y_n)-A(x+y_n)|^2|u_n(x)|^2dx\to 0, \qquad \text{quando } \ n\to\infty
$$

e, recorde que $\lim_{n\to\infty}c_{\kappa,p_n,r}=\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$. Consequentemente, passando ao limite quando $n\to\infty$ em (3.56), deduzimos que $t_n\to 1$. Portanto, de (3.47), segue (3.43), via Teorema do Confronto. Como o argumento pode ser aplicado para qualquer subsequência de (u_n), o limite desejado é válido. □

3.4 Estimativas Envolvendo a Aplicação Baricentro

No que segue, provaremos uma proposição que será bastante útil para demonstrarmos o Teorema 3.1. Para tanto, faremos uso da função baricentro, $\beta : \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$\beta(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega x|u|^{2^*}dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*}dx}.$$

Alem disso, para provar o próximo resultado, aplicaremos o Lema de Concentração-Compacidade (Lema 1.2, Seção 1.2)

Lema 3.11. Seja $\kappa \geq 0$ fixo. Se $(v_n) \subset \mathcal{M}_{\kappa.p,\Omega}$ é tal que

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A v_n|^2 + \kappa|v_n|^2)dx}{|v_n|^2_{2^*,\Omega}} \to S,$$

então $dist(\beta(v_n), \Omega_r^+) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Demonstração. Argumentando por contradição, suponhamos que existam sequências $(v_n) \subset \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}$ e $\eta_n \to 0$ tal que

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A v_n|^2 + \kappa|v_n|^2)dx}{|v_n|^2_{2^*,\Omega}} \leq S + \eta_n, \quad \text{com} \quad \beta(v_n) \notin \Omega_r^+.$$

Seja $w_n := v_n/|v_n|_{2^*,\Omega}$. Então,

$$|w_n|_{2^*,\Omega} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} |w_n|_{2^*,\Omega} = 1$$

e (w_n) está em $\mathcal{D}_A^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$ e é limitada, pois

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla_A w_n|^2 dx &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla_A v_n|^2 dx}{|v_n|_{2^*,\Omega}^2}\\ &\leq \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A v_n|^2 + \kappa|v_n|^2) dx}{|v_n|_{2^*,\Omega}^2}\\ &\leq S+\eta_n\\ &\leq S+1.\end{aligned}$$

Assim, por reflexividade de $\mathcal{D}_A^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$, passando a uma subsequência, se necessário existe $u \in \mathcal{D}_A^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$ tal que $w_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}_A^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$ e $w(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω. Além disso, usando novamente a limitação da sequência (w_n) em $\mathcal{D}_A^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$ e, se definirmos $v_n = w_n - u$, vemos que

$$|\nabla_A v_n|^2 \in L^1(\Omega,\mathbb{R}) \ \text{ e } \ |v_n|^{2^*} \in L^1(\Omega,\mathbb{R}),$$

e, mais ainda, ambas sequências são limitadas em $L^1(\Omega,\mathbb{R})$. Consequentemente, aplicando o item (a) do Teorema A.3, exitem medidas finitas positivas $\mu,\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ verificando, a menos de subsequência

$$|\nabla_A v_n|^2 \rightharpoonup \mu \ \text{ e } \ |v_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu \ \text{ em } \ \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).$$

Em resumo, a menos de subsequência, temos

$$\begin{cases} (a) \ \ w_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \mathcal{D}_A^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}), \text{ quando } n\to\infty,\\ (b) \ \ |\nabla_A w_n - \nabla_A u|^2 \rightharpoonup \mu \ \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \text{ quando } n\to\infty,\\ (c) \ \ |w_n - u|^{2^*} \rightharpoonup \nu \ \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \text{ quando } n\to\infty,\\ (d) \ \ w_n(x) \to u(x) \ \text{ quase sempre em } \Omega, \text{ quando } n\to\infty,\end{cases}$$

onde, quando necessário, estenderemos por zero as funções u e w_n em Ω e continuaremos denotando as extensões por u e w_n, respectivamente. Sendo assim, segue do Lema 1.2 (Lema de Concentração-Compacidade) que (w_n) verifica

(i) $\limsup_{n\to\infty} |\nabla_A w_n|_2^2 = |\nabla_A u|_2^2 + \|\mu\|$; $\quad (\mu_\infty = 0$, pois $supp(w_n) \subset \Omega)$

(ii) $1 = \lim_{n\to\infty} |w_n|_{2^*}^2 = \limsup_{n\to\infty} |w_n|_{2^*}^{2^*} = |u|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\|$; $\quad (\nu_\infty = 0$, pois $supp(w_n) \subset \Omega)$

(iii) $\|\nu\|^{2/2^*} \leq S^{-1}\|\mu\|$.

Combinando as desigualdade de Sobolev e diamagnética,

$$
\begin{aligned}
S = S|w_n|_{2^*}^2 \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla |w_n||^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A w_n|^2 dx = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A v_n|^2 dx}{|v_n|_{2^*}^2} \leq \\
&\leq \quad \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla_A v_n|^2 + \kappa |v_n|^2) dx}{|v_n|_{2^*}^2} \leq S + \eta_n,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
S \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A w_n|^2 dx \leq S + \eta_n.
$$

Fazendo $n \to \infty$ nesta desigualdade, vemos que $|\nabla_A w_n|_2^2 \to S$ e o item (i) torna-se $S = |\nabla_A u|_2^2 + \|\mu\|$. Novamente combinando as desigualdades de Sobolev e diamagnética,

$$
S|u|_{2^*}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_A u|^2 dx.
$$

Sendo assim, aplicando esta desigualdade em (i), logo por (iii), temos

$$
\begin{aligned}
S = |\nabla_A u|_2^2 + \|\mu\| \quad &\geq \quad S|u|_{2^*}^2 + S\|\nu\|^{2/2^*} \\
&= \quad S\Big[\|\nu\|^{2/2^*} + [|u|_{2^*}^{2^*}]^{2/2^*}\Big]
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
S \geq S\Big[\|\nu\|^{2/2^*} + [|u|_{2^*}^{2^*}]^{2/2^*}\Big]
$$

ou melhor, desde que $S > 0$,

$$
0 \leq \|\nu\|^{2/2^*} + |u|_{2^*}^{2^*}]^{2/2^*} \leq 1. \tag{3.57}
$$

Segue de (ii), que $|u|_{2^*}^{2^*}, \|\nu\|$ devem ser iguais a 0 ou 1. De fato, consideramos três casos:

Caso I: $0 < |u|_{2^*}^{2^*} < 1$ e $0 < \|\nu\| < 1$.

Como $2/2^* < 1$, temos

$$\left[|u|_{2^*}^{2^*}\right]^{2/2^*} \geq |u|_{2^*}^{2^*} \quad \text{e} \quad \|\nu\|^{2/2^*} \geq \|\nu\|$$

implicando

$$1 = |u|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| < \|\nu\|^{2/2^*} + |u|_{2^*}^{2^*}]^{2/2^*} \leq 1,$$

que é uma contradição.

Caso II: $\|\nu\| = 0$.

Neste caso $|u|_{2^*}^{2^*} = 1$ e por Sobolev, $S.1 \leq |\nabla |u||_2^2$. Por outro lado, recordando o item (i), vemos que

$$S = |\nabla_A u|_2^2 + \|\mu\| \geq |\nabla_A u|_2^2 \geq |\nabla |u||_2^2$$

Consequentemente,

$$S = |\nabla |u||_2^2,$$

isto é, a constante de sobolev S é atingida, que é um absurdo, pois $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, veja em [44, Proposição 1.43].

Caso III: $\|\nu\| = 1$.

Por (3.57), $u = 0$ e $\|\nu\|^{2/2^*} \geq S^{-1}\|\mu\|$, pois,

$$S = |u|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| \geq |u|_{2^*}^{2^*} \Rightarrow S^{-1}\|\mu\| \leq 1 = \|\nu\|^{2/2^*} 2/2^* \Rightarrow S^{-1}\|\mu\| \leq \|\nu\|^{2/2^*}$$

Por isto e (iii), temos

$$\|\nu\| = S^{-1}\|\mu\|$$

e como $u = 0$, segue pelo Lema de Concentração-Compacidade, que a medida ν está concentrada em um único ponto $y \in \mathbb{R}^N$. Afirmamos que $y \in \overline{\Omega}$, pois caso contrário, existiria $\eta > 0$ tal que $B_{2\eta}(y) \cap \Omega = \emptyset$. Considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que

$$\varphi = 1 \quad \text{em} \quad B_{\frac{1}{2}\eta}(y) \quad \text{e} \quad \varphi = 0 \quad \text{em} \quad B_\eta^c(y).$$

Agora, se observamos (c) com $u = 0$ e $supp(w_n) \subset \Omega$, seguem os limites

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi |w_n|^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\nu;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi|w_n|^{2^*}=0$$

e, por consequência,

$$|w_n|^{2^*}\rightharpoonup\nu=0 \quad \text{em} \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

que é um absurdo. Para concluir a prova do lema, é preciso definir duas funções. Sejam $\Gamma\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ e $\Upsilon\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, tais que em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$, $\Gamma=Id_{\mathbb{R}^N}$ e $\Upsilon=1$. Sendo assim, obtemos

$$\beta(v_n)=\frac{\displaystyle\int_\Omega x|v_n|^{2^*}dx}{\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{2^*}dx}=\frac{\displaystyle\int_\Omega x|w_n|^{2^*}dx}{\displaystyle\int_\Omega |w_n|^{2^*}dx}=\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} x|w_n|^{2^*}dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{2^*}dx}=\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x)|w_n|^{2^*}dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Upsilon(x)|w_n|^{2^*}dx}.$$

Fazendo $n\to\infty$ na igualdade acima, e desde que a medida ν é concentrada em um ponto singular $y\in\Omega$ e $\Upsilon,\Gamma\in\mathcal{C}_0$, segue-se de (c) com $u=0$,

$$\beta(v_n)=\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x)|w_n|^{2^*}dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Upsilon(x)|w_n|^{2^*}dx}\to\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x)d\nu}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\Upsilon(x)d\nu}=\frac{\displaystyle\int_{\{y\}}\Gamma(x)d\nu}{\displaystyle\int_{\{y\}}\Upsilon(x)d\nu}=\frac{\Gamma(\{y\})\nu(\{y\})}{\Upsilon(\{y\})\nu(\{y\})}=\frac{y}{1}\in\overline{\Omega}\subset\Omega_r^+.$$

ou seja, $\beta(v_n)\to y\in\Omega_r^+$. Logo, a $dist(\beta(v_n),\Omega_r^+)\to 0$, contradizendo o fato de que $\beta(v_n)\notin\Omega_r^+$. Portanto, finalizamos a prova do lema. □

Proposição 3.12. Para $\kappa\geq 0$ fixo, existem $\varepsilon(\kappa)>0$ e $p^*(\kappa)\in(2,2^*)$ tais que, se $u\in\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}$ e $I_{\kappa,p,\Omega}(u)\leq\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}+\varepsilon(\kappa)$, para $p\in[p^*(\kappa),2^*)$, então $\beta(u)\in\Omega_r^+$.

Demonstração. Fixe $\kappa\geq 0$. Pelo Lema 3.10, para p suficientemente próximo de 2^*, o conjunto

$$\left\{u\in\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}; I_{\kappa,p,\Omega}(u)\leq\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}+\varepsilon(\kappa)\right\}$$

é não vazio. Para provar a proposição argumentamos por contradição. Suponha, por absurdo, que o resultado seja falso. Então, existem sequências (p_n), (ε_n) e (u_n), com $p_n\in(2,2^*)$, $\varepsilon_n>0$ e $u_n\in\mathcal{M}_{\kappa,p_n,\Omega}$, tais que $p_n\to 2^*$, $\varepsilon_n\to 0$, quando $n\to\infty$ e

$$I_{\kappa,p_n,\Omega}(u_n)\leq\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}+\varepsilon_n, \quad \text{com} \quad \beta(u_n)\notin\Omega_r^+. \tag{3.58}$$

Por outro lado, recordando que

$$\lim_{n\to\infty} c_{\kappa,p_n,r} = \lim_{n\to\infty} b_{\kappa,p_n,\Omega} = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$$

(veja (3.40)), obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} I_{\kappa,p_n,\Omega}(u_n) \geq \lim_{n\to\infty} b_{\kappa,p_n,\Omega} = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

Isto e (3.58) implicam

$$\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} \leq \liminf_{n\to\infty} I_{\kappa,p_n,\Omega}(u_n) \leq \limsup_{n\to\infty} I_{\kappa,p_n,\Omega}(u_n) \leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}},$$

ou melhor,

$$\liminf_{n\to\infty} I_{\kappa,p_n,\Omega}(u_n) = \limsup_{n\to\infty} I_{\kappa,p_n,\Omega}(u_n) = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}},$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} I_{\kappa,p_n,\Omega}(u_n) = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}. \tag{3.59}$$

Como $u_n \in \mathcal{M}_{\kappa,p_n,\Omega}$, temos

$$\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2)dx = \int_\Omega |u_n|^{p_n} dx, \tag{3.60}$$

que verifica

$$I_{\kappa,p_n,\Omega}(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_n}\right) \int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2)dx.$$

Isto e por (3.59),

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2)dx = S^{\frac{N}{2}}.$$

O limite acima e (3.59), fornecem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx}{|u_n|^2_{p_n,\Omega}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx\right)^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega(|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx\right)^{1-\frac{2}{pn}}\\
&= [S^{\frac{N}{2}}]^{1-\frac{2}{2^*}}\\
&= S,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx}{|u_n|^2_{p_n,\Omega}}=S \tag{3.61}$$

Note que pela desigualdade de Hölder para $2<p<q\leq 2^*$ e $u\in E$,

$$|u|_{p,\Omega}\leq|\Omega|^{\frac{q-p}{qp}}|u|_{q,\Omega}\Rightarrow\frac{1}{|u|^2_{q,\Omega}}|\Omega|^{\frac{-2(q-p)}{qp}}\leq\frac{1}{|u|^2_{p,\Omega}}. \tag{3.62}$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $\int_\Omega(|\nabla_A u|^2+\kappa|u|^2)dx$, ficamos com

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u|^2+\kappa|u|^2)dx}{|u|^2_{p,\Omega}}\geq|\Omega|^{\frac{-2(q-p)}{qp}}\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u|^2+\kappa|u|^2)dx}{|u|^2_{q,\Omega}}. \tag{3.63}$$

Logo, tomando $q=2^*$ em (3.63), temos

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u|^2+\kappa|u|^2)dx}{|u|^2_{p,\Omega}}\geq|\Omega|^{\frac{-2(2^*-p)}{2^*p}}\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u|^2+\kappa|u|^2)dx}{|u|^2_{2^*,\Omega}},$$

ou ainda,

$$|\Omega|^{\frac{2(2^*-p)}{2^*p}}\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u|^2+\kappa|u|^2)dx}{|u|^2_{p,\Omega}}\geq\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u|^2+\kappa|u|^2)dx}{|u|^2_{2^*,\Omega}}, \tag{3.64}$$

Consequentemente, fazendo $p_n\to 2^*$ quando $n\to\infty$ em (3.64), obtemos de (3.61) que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx}{|u_n|^2_{2^*,\Omega}}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_\Omega(|\nabla_A u_n|^2+\kappa|u_n|^2)dx}{|u|^2_{p_n,\Omega}}=S,$$

ou ainda,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2)dx}{|u_n|^2_{2^*,\Omega}} \leq S. \tag{3.65}$$

Por outro lado, desde que

$$S \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2)dx}{|u_n|^2_{2^*,\Omega}},$$

temos que

$$S \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2)dx}{|u_n|^2_{2^*,\Omega}}. \tag{3.66}$$

Combinando (3.66) e (3.65), chegamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_A u_n|^2 + \kappa |u_n|^2)dx}{|u_n|^2_{2^*,\Omega}} = S,$$

onde contradiz o lema anterior, devido fato de que $\beta(u_n) \notin \Omega_r^+$. Portanto a proposição está provada. $\square$

Comentário: nessa demonstração, seguimos o que foi feito em [4], a menos de um desvio na metade do argumento, onde provamos o Lema 3.11 usando o Lema 1.2. Vale ainda ressaltar que com isso os cálculos na prova da Proposição 3.12 reduziram-se. Acreditamos que Alves, Nemer e Silva em [4] não tinham o conhecimento do lema na forma que apresentamos.

Como consequência da Proposição 3.12, para qualquer $\kappa \geq 0$ fixado, considere $\varepsilon(\kappa) > 0$. Defina

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\kappa) = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \varepsilon(\kappa)$$

e o conjunto

$$\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,\mathrm{p},\Omega} := \left\{ u \in \mathcal{M}_{\kappa,\mathrm{p},\Omega}; \quad I_{\kappa,\mathrm{p},\Omega}(u) \leq \varepsilon^* \right\}.$$

Corolário 3.13. Para $\kappa \geq 0$ fixo, existe $\bar{p}(\kappa) \in (2, 2^*)$ tal que, para cada $p \in [\bar{p}(\kappa), 2^*)$,

$$\Phi_{\kappa,p}(\Omega_r^-) \subset \mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega} \ \text{ e } \ \beta(\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}) \subset \Omega_r^+$$

Demonstração. Dado $y \in \Omega_r^-$ e $\kappa \geq 0$ fixo, segue do Lema 3.10,

$$I_{\kappa,p,\Omega}(\Phi_{\kappa,p}(y)) \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \varepsilon(\kappa) = \varepsilon^*,$$

implicando $\Phi_{\kappa,p}(y) \in \mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}$. A outra inclusão, segue da Proposição 3.12, pois dado $u \in \mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}$, tem-se

$$u \in \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega} \quad \text{verificando} \quad I_{\kappa,p,\Omega}(u) \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + \varepsilon(\kappa).$$

Portanto, $\beta(u) \in \Omega_r^+$. □

3.5 Resultado de Multiplicidade

Nesta seção, iremos provar o principal resultado deste capítulo, Teorema 3.1. Para isto, faremos uso de um resultado de multiplicidade de pontos críticos que envolve categoria de Lusternik-Schnirelman, veja Apêndice C, e uma proposição logo a seguir, que unidos com resultados já estudados neste capítulo, serão de grande importância para obtermos o desejado.

Proposição 3.14. Para $\kappa \geq 0$ fixo, existe $\bar{p}(\kappa) \in (2, 2^*)$ tal que, para cada $p \in [\bar{p}(\kappa), 2^*)$, tem-se

$$cat_{\Omega}(\Omega) \leq cat_{\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}}(\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}).$$

Demonstração. Suponha $cat_{\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}}(\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}) = n$, isto é, existem subconjuntos fechados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}$ satisfazendo:

- $\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$;
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são contráteis em $\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}$.

Isto significa que existem $h_j \subset C([0,1] \times A_j, \mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega})$ e $u_j \in A_j$ fixo, tais que

$$h_j(0,u) = u, \quad h_j(1,u) = u_j,$$

para cada $u \in A_j$. Considere o conjunto

$$B_j = \Phi^{-1}_{\kappa,p}(A_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

que são fechados em Ω_r^-, pois $\Phi_{\kappa,p}$ é contínua, e satisfazem

$$\Phi_{\kappa,p}^{-1}(\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}^{\varepsilon^*}) \;=\; B_1 \cup \cdots \cup B_n. \tag{3.67}$$

Por outro lado, é claro que $\Phi_{\kappa,p}^{-1}(\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}^{\varepsilon^*}) \subset \Omega_r^-$ e pelo Corolário 3.13 e por (3.67), temos

$$\Omega_r^- = \Phi_{\kappa,p}^{-1}(\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}^{\varepsilon^*}) = B_1 \cup \cdots \cup B_n.$$

A partir da deformação $g_j : [0,1] \times B_j \longrightarrow \Omega_r^+$ dada por

$$g_j(t,y) = \beta(h_j(t, \phi_{\kappa,p}(y))),$$

podemos concluir que B_j é contrário em Ω_r^+. De fato, inicialmente notemos que $h_j(t, \Phi_{\kappa,p}(y))$ está bem definida, pois se $t \in [0,1]$ e $y \in B_j = \Phi_{\kappa,p}^{-1}(A_j)$, então $\Phi_{\kappa,p}^{-1}(y) \in A_j$, implicando que $h_j(t, \Phi_{\kappa,p}(y)) \in \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}^{\varepsilon^*}$. Sendo assim,

$$h_j(t, \Phi_{\kappa,p}(y)) \in \mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega} \;\text{ e }\; I_{\kappa,p,\Omega}(h_j(t, \Phi_{\kappa,p}(y))) \leq \varepsilon^*.$$

Pela Proposição 3.12,

$$\beta(h_j(t, \Phi_{\kappa,p}(y))) \in \Omega_r^+, \quad \forall p \in [\overline{p}(\kappa), 2^*),$$

de onde segue que g_j está bem definida. Note que, g_j é contínua para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, por ser composição de funções β, h_j e $\Phi_{\kappa,p}$ que são contínuas. Agora note

$$g_j(0,y) = \beta(h_j(0, \Phi_{\kappa,p}(y))) = \beta(\Phi_{\kappa,p}(y)) = y, \quad \forall y \in B_j$$

e

$$g_j(1,y) = \beta(h_j(1, \Phi_{\kappa,p}(y))) = \beta(w_j), \quad \forall y \in B_j$$

Portanto, B_j é contrátil em Ω_r^+ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Portanto,

$$cat_\Omega(\Omega) = cat_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n := cat_{\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}^{\varepsilon^*}}(\mathcal{M}_{\kappa,p,\Omega}^{\varepsilon^*})$$

e a proposição está provada. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1. Argumentando como na prova da Proposição 3.2, podemos checar que $I_{\kappa,p,\Omega}$ satisfaz a condição de Palais-Smale em $\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}$. Assim, podemos aplicar a teoria padrão Lusternik-Schnirelman, sendo mais preciso, Teorema 5.20 em [44], para obter pelo menos $cat_{\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}}(\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega})$ pontos críticos de $I_{\kappa,p,\Omega}\big|_{\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}}$, e pela Proposição 3.14, $\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}$, possui pelo menos a $cat_{\Omega}(\Omega)$ de pontos críticos do funcional $I_{\kappa,p,\Omega}\big|_{\mathcal{M}^{\varepsilon^*}_{\kappa,p,\Omega}}$. Como no Corolário 3.6, cada um desses pontos críticos, é ponto crítico do funcional $I_{\kappa,p,\Omega}$ em todo o espaço, portanto, solução fraca não nula do Problema (P_{κ}). $\square$

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Nesse apêndice, nosso intuito é de apresentar resultados que facilitem a leitura no Capítulo 1 e dos demais capítulos.

A.1 Derivada do Valor Absoluto

No que segue-se, argumentando como em [30, Teorema 6.17] temos:

Teorema A.1. *Seja* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$*. Então,* $|u| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$*, com*

$$(\nabla|u|)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|u(x)|}\left(Re(x)\nabla Re(x) + Im(x)\nabla Im(x)\right), & se \quad u(x) \neq 0, \\ 0, & se \quad u(x) = 0, \end{cases} \tag{A.1}$$

onde por simplicidade denotaremos $Re(u(x)) := Re(x)$ *e* $Im(u(x)) := Im(x)$*, que são as partes real e imaginária de* $u(x)$*, respectivamente. Em particular, se* u *é uma função real,*

$$(\nabla|u|)(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & se \quad u(x) > 0, \\ -\nabla u(x), & se \quad u(x) < 0, \\ 0, & se \quad u(x) = 0. \end{cases} \tag{A.2}$$

Assim, $|\nabla|u|| \leq |\nabla u|$ *q.s. se* u *é uma função complexa e* $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ *se* u *é uma função real.*

Demonstração. No que segue, provaremos apenas o caso complexo. De fato, que $|u| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, segue diretamente da definição de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, uma vez que

$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Note que

$$|\nabla |u||^2 = \left| \frac{1}{|u|}(Re\nabla Re + Im\nabla Im) \right|^2 \leq |\nabla u|^2, \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N. \tag{A.3}$$

Para cada $\varepsilon > 0$ defina

$$G_\varepsilon(s_1, s_2) = \begin{cases} (\varepsilon^2 + s_1^2 + s_2^2)^{1/2} - \varepsilon, & \text{se } (s_1, s_2) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (s_1, s_2) = 0. \end{cases} \tag{A.4}$$

Então,

$$|\partial_i G_\varepsilon(s_1, s_2)| = \left| \frac{s_i}{(\varepsilon^2 + s_1^2 + s_2^2)^{1/2}} \right| \leq 1, \quad i = 1, 2. \tag{A.5}$$

Assim, pela regra da cadeia (ver [30, Teorema 6.16]) , a função $h_\varepsilon(x) := G_\varepsilon(Re(x), Im(x))$ está em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ e para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, temos

$$\int_\Omega (\partial_i \phi) h_\varepsilon dx = -\int_\Omega \phi(\partial_i h_\varepsilon) dx = \int_\Omega \phi \frac{Re(\partial_i Re) + Im(\partial_i Im)}{(\varepsilon^2 + |u|^2)^{1/2}} dx. \tag{A.6}$$

Como por (A.4) $h_\varepsilon \leq |u|$ para todo $\varepsilon > 0$ e

$$\left| \frac{Re\nabla Re + Im\nabla Im}{(\varepsilon^2 + |u|^2)^{1/2}} \right| \leq \left| \frac{1}{|u|}(Re\nabla Re + Im\nabla Im) \right| \leq |\nabla u|, \qquad \text{q.s. em } \mathbb{R}^N$$

e, desde que as duas funções (A.4) e (A.5) convergem pontualmente, quando $\varepsilon \to 0$, então de (A.6), pelo teorema da convergência dominada de Lebesque, obtemos

$$\int_\Omega (\partial_i \phi)|u| dx = -\int_\Omega \phi \frac{1}{|u|}(Re(\partial_i Re) + Im(\partial_i Im)) dx,$$

que segue o resultado. $\square$

A.2 Desigualdade Diamagnética

No que segue, o próximo resultado trata-se de uma desigualdade que relaciona os operadores ∇ e ∇_A , que por sua vez será de suma importância ao longo deste trabalho, uma vez que, os problemas que iremos estudar terão sempre a presença do campo magnético A.

Teorema A.2. (Desigualdade Diamagnética) *Sejam* $A:\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *em* $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *e* $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ $\big($ *ou* $u \in \mathcal{D}^{1,2}_A(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})\big)$, *então* $|u| \in H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ $\big(resp. |u| \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})\big)$ *e*

$$|\nabla|u|(x)| \leq |\nabla u(x) + iA(x)u(x)|, \quad q.s. \ em \ \ \mathbb{R}^N \tag{A.7}$$

Demonstração. A prova segue os argumentos que pode ser visto em [30, Teorema 7.21]. De fato, desde que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ e $A_j \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, para cada $j = 1, 2 \cdots, N$, então escrevendo $\nabla u = \nabla_A u - iAu$, onde $\nabla_A u \in (L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}))^N$, segue pela Desigualdade de Hölder que $\nabla u \in (L^1_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}))^N$. Logo, $u \in H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$. Fazendo $p = 2$ no Teorema A.1, para cada $j = 1, 2, ..., N$, temos

$$(\partial_j|u|)(x) = \begin{cases} Re\left(\dfrac{\bar{u}}{|u|}\partial_j u\right)(x), & \text{se} \quad u(x) \neq 0, \\ \qquad\qquad 0, & \text{se} \quad u(x) = 0, \end{cases} \tag{A.8}$$

onde

$$Re\left(\frac{\bar{u}}{|u(x)|}\partial_j u\right)(x) = \frac{1}{|u(x)|}\left(Re(x)\partial_j Re(x) + Im(x)\partial_j Im(x)\right).$$

Desde que

$$Re\left(\frac{\bar{u}}{u} iA_j u\right) = Re\left(iA_j|u|\right) = 0,$$

(A.8) pode ser substituído por

$$(\partial_j|u|)(x) = \begin{cases} Re\left(\dfrac{\bar{u}}{|u|}(\partial_j + iA_j)u\right)(x), & \text{se} \quad u(x) \neq 0, \\ \qquad\qquad 0, & \text{se} \quad u(x) = 0. \end{cases} \tag{A.9}$$

Agora, se $u \in L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})\backslash\{0\}$, então de (A.9), temos

$$\begin{aligned} |(\partial_j|u|)(x)| &= \left|Re\left(\frac{\bar{u}}{|u|}(\partial_j + iA_j)u\right)(x)\right| \\ &\leq \left|\left(\frac{\bar{u}}{|u|}(\partial_j + iA_j)u\right)(x)\right| \\ &= \left|\partial_j u(x) + iA_j u(x)\right|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|(\partial_j|u|)(x)| \leq |\partial_j u(x) + iA_j u(x)|, \quad \text{para cada} \ \ j = 1, 2, ..., N, \tag{A.10}$$

o que prova (A.7). Finalmente, desde que ocorra (A.7) e $u \in H^1_A(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j |u||^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j u + iA_j u|^2 dx < \infty,$$

isto é, $\partial_j |u| \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ para cada $j = 1, 2, ..., N$. Portanto, $|u| \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ $\square$

Observação A.1. Pela desigualdades de Sobolev e pela Desigualdade Diamagnética, vale a seguinte imersão contínua

$$\mathcal{D}^{1,2}_A(\mathbb{R}^N, \mathbb{K}) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N, \mathbb{K}), \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R}.$$

Além disso, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tem medida finita e $u \in \mathcal{D}^{1,2}_A(\Omega, \mathbb{C})$, então, segue da imersão contínua $L^{2^*}(\Omega, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^2(\Omega, \mathbb{C})$ que $u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) \cap L^{2^*}(\Omega, \mathbb{C})$ e por interpolação, decorre a imersão

$$\mathcal{D}^{1,2}_A(\Omega, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{C}), \quad \forall p \in [1, 2^*].$$

A.3 Teoria da Medida

Nesta seção, definiremos um espaço vetorial $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ no qual os elementos são medidas e em seguida introduziremos um tipo de convergência em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ afim de entendermos melhor as hipótese do Lema de Concentração-Compacidade.

O texto a seguir foi baseado em Folland [23] e Willem [44].

Definição A.1. Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e defina

$$\mathcal{K}(\Omega) := \{f \in C(\Omega); supp(u) \subset\subset \Omega\}$$

e

$$\mathcal{BC}(\Omega) := \{f \in C(\Omega); |f|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq \infty\}$$

O espaço $\mathcal{C}_0(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{K}(\Omega)$ em $\mathcal{BC}(\Omega)$ com respeito a norma uniforme. Uma medida finita em Ω é um funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(\Omega)$. A norma de uma medida finita μ é dada por

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_0(\Omega) \\ |f|_\infty = 1}} |\langle \mu, f \rangle|.$$

Definição A.2. Seja μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}^N$ e A um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^N$. μ é chamada regular exterior em A se

$$\mu(A) := \inf\{\mu(U); A \subset U, U \text{ aberto}\},$$

e é chamada regular interior em A se

$$\mu(A) := \sup\{\mu(K); K \subset A, K \text{ compacto}\}.$$

Se μ é regular exterior em todos os borelianos, μ é chamada regular.

Definição A.3. Uma medida de Radon em $\mathbb{R}^N$ é uma medida de Borel que é finita em conjuntos compactos, regular exterior em todos os borelianos e regular interior em todos os conjuntos abertos.

Denotaremos o espaço das medidas de Radon com sinal por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ (Respectivamente $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$, o espaço das medidas positivas de Radon, isto é, as medidas μ tais que $\langle \mu, f\rangle \geq 0$, para todo $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ com $f \geq 0$).

O dual de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ é o espaço de todas a medidas de Radon $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ com norma

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} = |\mu|(\mathbb{R}^N) \tag{A.11}$$

onde $|\mu|$ é variação total de μ (ver [23]). Isto motiva a seguinte definição:

Definição A.4. Dizemos que $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ converge fracamente para $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ no sentido das medidas, e escrevemos $\mu_n \rightharpoonup \mu$, se

$$\langle \mu_n, f\rangle \to \langle \mu, f\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N),$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N).$$

Observação A.2. Segue do Teorema da Decomposição de Jordan (veja [23, Teorema 3.4]), que se a variação negativa de μ for nula, então, a norma em (A.11) será dada por

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} = \mu(\mathbb{R}^N).$$

A demonstração do próximo resultado pode ser visto em [43].

Teorema A.3. *Seja* $(f_n) \subset L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *com*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n| dx \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, a menos de subsequência, existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ *positiva tal que,* $\mu_n = |f_n| dx \rightharpoonup \mu$ *em* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

Definição A.5. Sejam μ e ν duas medidas de Borel em $\mathbb{R}^N$. Dizemos que μ e ν são mutuamente singulares, ou que μ é singular ν (ou caso contrário), se existem conjuntos disjuntos A e B na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ tais que $\mathbb{R}^N = A \cup B$ e $\mu(A) = \nu(B) = 0$. Neste caso, escrevemos $\mu \perp \nu$.

Proposição A.4. Seja ν uma medida de Borel em $\mathbb{R}^N$ verificado a propriedade:

$$A \in \mathcal{B} \;\text{ com }\; \nu(A) > 0 \Rightarrow \nu(\mathbb{R}^N) = \nu(A). \tag{P}$$

Então exite $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $\nu(\{y\}) > 0$ e

$$\nu(A) = \begin{cases} \nu(\{y\}) & \text{se} \quad y \in A \\ 0 & \text{se} \quad y \notin A. \end{cases}$$

Apêndice B

Diferenciabilidade do Funcional I_λ e Motivação de Solução Fraca para o Problema (P_λ)

O objetivo desse apêndice é mostrar a diferenciabilidade do funcional I_λ e explicar o porquê de definirmos a solução fraca do problema P_λ como uma função que satisfaz

$$Re\left(\int_\Omega \nabla_{A_\lambda}u.\overline{\nabla_{A_\lambda}v} + u\bar{v} - f(|u|^2)u\bar{v}\right) = 0, \quad \forall v \in E_{A_\lambda}. \tag{B.1}$$

Inicialmente, enunciaremos uma proposição e em seguida dois lemas, para podermos concluir que o funcional I_λ é diferenciável.

Proposição B.1. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional verificando:

(i) $\dfrac{\partial I}{\partial(\cdot)}(u) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ existe para todo $u \in X$;

(ii) $\dfrac{\partial I}{\partial(\cdot)}(u) \in X'$;

(iii) $\dfrac{\partial I}{\partial(\cdot)}(u_n) \to \dfrac{\partial I}{\partial(\cdot)}(u)$, em X', desde que $u_n \to u$ em X.

Então, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com

$$I'(u)v = \frac{\partial I}{\partial v}(u), \quad \forall u, v \in X.$$

Para provarmos os lemas seguintes precisaremos da Proposição B.1.

Lema B.2. Seja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{C})$ uma espaço de Hilbert com $\|\cdot\|$ sendo a norma associada ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, então o funcional $G : H \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$G(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2$$

pertence a $C^1(H,\mathbb{R})$ com

$$G'(u)v = \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle, \quad \forall u, v \in H.$$

Demonstração. Observe que a derivada Gateaux $\dfrac{\partial G}{\partial v}(u)$ existe para todo $u, v \in H$, pois para $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(u+tv)-G(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\frac{\left(\|u+tv\|^2 - \|u\|^2\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\frac{\left(t^2\|v\|^2 + \langle u, tv\rangle + \langle tv, u\rangle\right)}{t}.$$

Logo,

$$\frac{\partial G}{\partial v}(v) = \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle.$$

Considere $\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle$ como uma candidata a derivada Fréchet, para tal, basta mostrar que

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{G(u+v)-G(u)-(\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle)}{\|v\|} = 0. \tag{B.2}$$

Note que

$$\frac{G(u+v)-G(u)-(\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle)}{\|v\|} = \frac{\frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - (\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle)\right)}{\|v\|} = \frac{1}{2}\|v\|,$$

que nos conduz a (B.2), quando $\|v\| \to 0$. Logo, G é Fréchet diferenciável com

$$G'(u)v = \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle.$$

Para verificar que $G \in C^1(H,\mathbb{R})$ considere $u_n \to u$ em H, e veja que pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|G'(u_n)v - G'(u)v| = |\langle u_n - u, v\rangle + \langle v, u_n - u\rangle| \leq 2\|u_n - u\|\|v\|.$$

Donde resulta

$$\sup_{\|v\|\leq 1} |G'(u_n)v - G'(u)v| \leq 2\|u_n - u\| \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Portanto,

$$\|G'(u_n) - G'(u)\|_{H'} \to 0.$$

Mostrando que G' é contínua. Assim, $G \in C^1(H, \mathbb{R})$. □

Lema B.3. Seja $\psi : E_{A_\lambda} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\psi(u) := \int_{\Omega_\lambda} F(|u|^2)dx,$$

onde $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$. Então, $\psi \in C^1(E_{A_\lambda}, \mathbb{R})$ com

$$\psi'(u)v = \int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2)u\bar{v}dx, \quad \forall v \in E_{A_\lambda}.$$

Demonstração. Observamos primeiro que ψ está bem definida, pois $F(|u|^2)$ é mensurável para todo $u \in E_{A_\lambda}$, e da condição (f_5) vale

$$|F(|u|^2)| \leq \varepsilon|u|^2 + c_\varepsilon|u|^q, \quad \forall u \in E_{A_\lambda}.$$

Logo, podemos calcular $\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u)$, para todo $u, v \in E_\lambda$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}(u) = \lim_{t\to 0} \frac{\psi(u+tv) - \psi(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_{\Omega_\lambda} \frac{\big(F(|u+tv|^2) - F(|u|^2)\big)dx}{t}. \tag{B.3}$$

Defina

$$h_t := \frac{F(|u+tv|^2) - F(|u|^2)}{t},$$

então, do Teorema do Valor Médio, existe

$$\theta_t \in [|u|^2, |u+tv|^2]$$

tal que

$$F(|u+tv|^2) - F(|u|^2) = f'(\theta_t^2)\big(|u+tv|^2 - |u|^2\big).$$

Logo,

$$h_t = \frac{F(|u+tv|^2) - F(|u|^2)}{t} = f'(\theta_t^2)\frac{\big(t^2|v|^2 + 2tRe(u.\bar{v})\big)}{t} \tag{B.4}$$

e, fazendo $t \to 0$ em (B.4), obtemos

$$\lim_{t\to 0} h_t = 2f(|u|^2)Re(u.\bar{v}).$$

Além disso, usando novamente (B.4) e por (f_5),

$$\begin{aligned} |h_t| &= 2\Big|f(\theta_t^2)\Big|\Big|t|v|^2 + 2Re(u.\bar{v})\Big| \\ &\leq 2(\varepsilon + c_\varepsilon|\theta_t|^{q-2})\Big|t|v|^2 + 2|u||v|\Big|. \end{aligned}$$

Note que o lado direito da desigualdade acima pertence a $L^1(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$, desde que

$$|\theta_t| \leq 2|u|^2 + |v|^2$$

para t suficientemente pequeno. Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue,

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega_\lambda} h_t dx = 2\int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2)Re(u.\bar{v})dx,$$

ou melhor,

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega_\lambda} h_t(x)dx = 2Re\left(\int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2)u.\bar{v}dx\right). \tag{B.5}$$

Desta forma, de (B.3) e (B.5), obtemos

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}(u) = 2Re\left(\int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2)u.\bar{v}dx\right),$$

ou seja, $\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u) : E_{A_\lambda} \longrightarrow \mathbb{R}$, existe para todo $u \in E_{A_\lambda}$. Iremos mostrar agora que $\dfrac{\partial\psi}{\partial(\cdot)}(u) \in E'_{A_\lambda}$. Para cada $u \in E_{A_\lambda}$ é claro que $\dfrac{\partial\psi}{\partial(\cdot)}(u)$ é linear e, para $v \in E_\lambda$, desde que ocorra (f_5), por um cálculo vemos que

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial\psi}{\partial v}(u)\Big| &\leq \int_{\Omega_\lambda} |f(|u|^2)|v||u|dx \\ &\leq \varepsilon|u|_{2,\Omega_\lambda}|v|_{2,\Omega_\lambda} + c_\varepsilon|u|^{q-1}_{q,\Omega_\lambda}|v|_{q,\Omega_\lambda}, \end{aligned} \tag{B.6}$$

Usando as imersões contínuas

$$E_{A_\lambda} \hookrightarrow L^2(\Omega_\lambda, \mathbb{C}), \quad E_{A_\lambda} \hookrightarrow L^p(\Omega_\lambda, \mathbb{C}),$$

existem constantes $C, \overline{C} > 0$ tais que

$$|v|_{2,\Omega_\lambda} \leq C\|v\|_{A_\lambda} \;\text{ e }\; |v|_{q,\Omega_\lambda} \leq \overline{C}\|v\|_{A_\lambda}, \quad \forall v \in E_{A_\lambda}. \tag{B.7}$$

Aplicando (B.6) em (B.7), obtemos

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial\psi}{\partial v}(u)\Big| &\leq C|u|_{2,\Omega_\lambda}\|v\|_{A_\lambda} + \widetilde{C}|u|^{q-1}_{q,\Omega_\lambda}\|v\|_{A_\lambda} \\ &\leq \widehat{C}\|v\|_{A_\lambda}, \end{aligned}$$

de onde segue que $\dfrac{\partial\psi}{\partial(\cdot)}(u) \in E'_{A_\lambda}$. Resta provar que

$$\frac{\partial\psi}{\partial(\cdot)}(u_n) \to \frac{\partial\psi}{\partial(\cdot)}(u) \;\text{ em }\; E'_{A_\lambda},$$

ou seja,

$$\sup_{\|v\|\leq 1}\Big|\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial\psi}{\partial v}(u)\Big| \to 0,$$

quando $n \to \infty$. De fato. Sejam $(u_n) \subset E_{A_\lambda}$ e $u \in E_{A_\lambda}$ com $u_n \to u$ em E_{A_λ}. Note que, pela Desigualdade de Hölder,

$$\Big|\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial\psi}{\partial v}(u)\Big| \leq 2\Big|f(|u_n|^2)u_n - f(|u^2|)u\Big|_{\frac{q}{q-1},\Omega_\lambda}|v|_{q,\Omega_\lambda} \tag{B.8}$$

Agora, se definirmos o operador de Nemytskii, (veja [44, Teorema A.2]),

$$N_f : L^q(\Omega_\lambda, \mathbb{C}) \longrightarrow L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$$

como sendo

$$N_f(u) = f(|u|^2)u$$

contínuo. Da imersão $E_{A_\lambda} \hookrightarrow L^p(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$, temos $u_n \to u$ em $L^p(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$. Assim,

$$N_f(u_n) \to N_f(u) \ \text{ em } \ L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega_\lambda, \mathbb{C}),$$

ou seja,

$$f(|u_n|^2) \to f(|u|^2) \ \text{ em } \ L^q(\Omega_\lambda, \mathbb{C}). \tag{B.9}$$

Portanto, usando (B.8) e (B.9),

$$\sup_{\|v\|\leq 1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial \psi}{\partial v}(u) \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

De onde concluímos que $\psi \in C^1(E_{A_\lambda}, \mathbb{R})$ com

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u) = 2Re\left(\int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2) u\bar{v} dx \right).$$

Provando assim o Lema. $\square$

Por consequência dos Lemas B.2 e B.3, o funcional energia $I_\lambda : E_{A_\lambda} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} (|\nabla_{A_\lambda} u|^2 + |u|^2) dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} F(|u|^2) dx$$

é de classe $C^1(E_{A_\lambda}, \mathbb{R})$ com a seguinte derivada

$$I'_\lambda(u)v = Re\left(\int_{\Omega_\lambda} \nabla_{A_\lambda} u . \overline{\nabla_{A_\lambda} v} + u\bar{v} - f(|u|^2) u\bar{v} dx \right).$$

A demonstração de que $I_\lambda \in C^2(E_{A_\lambda}, \mathbb{R})$, com segunda derivada

$$I''_\lambda(u)vh = 2Re\left(\int_\Omega [\nabla_{A_\lambda} h \cdot \overline{\nabla_{A_\lambda} v} + h\bar{v}] dx \right) - 2Re\left(\int_\Omega [f'(|u|^2) Re(u\bar{h}) u\bar{v} + f(|u|^2) h\bar{v}] dx \right),$$

é análoga.

Observando a forma da primeira derivada de I_λ é fácil checar qual deve ser o produto interno do espaço E_{A_λ} a ser escolhido; de fato, o produto interno que tomamos é $\langle \cdot, \cdot \rangle : E_{A_\lambda} \times E_{A_\lambda} \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\langle u, v \rangle_{A_\lambda} := Re\left(\int_{\Omega_\lambda} [\nabla_{A_\lambda} u \cdot \overline{\nabla_{A_\lambda} v} + u\bar{v}] dx \right), \quad \forall u, v \in E_{A_\lambda}.$$

Além disso o número $\langle u, v\rangle_{A_\lambda} \in \mathbb{R}$, para todo $u, v \in E_{A_\lambda}$. Assim, podemos considerar E_{A_λ} como um espaço de Hilbert sobre o corpo dos reais.

B.1 Motivação de Solução Fraca para o Problema (P_λ)

Seja $u : \Omega_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ uma solução do problema

$$\begin{cases} \left(-i\nabla - A\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\right)^2 u + u &= f(|u|^2)u, \quad \text{em} \quad \Omega_\lambda, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_\lambda, \end{cases} \tag{P_λ}$$

Suponhamos que $A_\lambda := A(x/\lambda) \in C(\bar{\Omega}_\lambda, \mathbb{R}^N)$. Defini-se o operador de Schrödinger como

$$(-i\nabla - A_\lambda)^2 := -\Delta u + 2iA_\lambda.\nabla u + |A_\lambda|^2 u + iu\text{div}(A_\lambda).$$

Sejam $u_1, u_2 : \Omega_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ as partes real e imaginária de u respectivamente. Então, u é solução no sentido clássico de (P_λ) se, e somente se,

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 + iu_2) + (u_1 + iu_2) + 2A_\lambda.\nabla(u_1 + iu_2) + |A_\lambda|^2(u_1 + iu_2) + \\ +i(u_1 + iu_2) + \text{div}(A_\lambda) = f(|u|^2)(u_1 + iu_2). \end{aligned} \tag{B.10}$$

Temos de maneira equivalente a (B.10), as igualdades, respectivamente,

$$-\Delta u_1 + u_1 - 2A_\lambda.\nabla u_2 + |A_\lambda|^2 u_1 - u_2\text{div}(A_\lambda) = f(|u|^2)u_1 \tag{B.11}$$

e

$$-\Delta u_1 + u_2 + 2A_\lambda.\nabla u_1 + |A_\lambda|^2 u_2 + u_1\text{div}(A_\lambda) = f(|u|^2)u_2 \tag{B.12}$$

Na forma fraca, $u \in E_{A_\lambda}$ é uma solução de (P_λ) se, para todo $w \in E_\lambda$, (B.11) e (B.12) fornecerem

$$\int_{\Omega_\lambda} \left[\nabla u_1 \nabla w + u_1 w - 2wA_\lambda \nabla u_2 + |A_\lambda|^2 u_1 w - u_2 w\text{div}(A_\lambda)\right] dx = \int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2)u_1 w dx \tag{B.13}$$

e

$$\int_{\Omega_\lambda} \left[\nabla u_2 \nabla w + u_2 w + 2wA_\lambda \nabla u_1 + |A_\lambda|^2 u_2 w + u_1 w \mathrm{div}(A_\lambda)\right] dx = \int_{\Omega_\lambda} f(|u|^2) u_2 w dx. \tag{B.14}$$

Vale ressaltar que pela desigualdade diamagnética, $u_1, u_2 \in H^1(\Omega_\lambda, \mathbb{C})$ (ver Observação 2.1, início do Capítulo 2), e $A_\lambda \in C(\bar{\Omega}_\lambda, \mathbb{C})$ é uma aplicação limitada. Recordem que no Capítulo 2, definimos solução fraca de u do problema (P_λ) como uma função que satisfaz

$$Re\left(\int_\Omega \nabla_{A_\lambda} u . \overline{\nabla_{A_\lambda} v} + u\bar{v} - f(|u|^2) u\bar{v}\right) = 0, \quad \forall v \in E_{A_\lambda}. \tag{B.15}$$

No que segue, veremos que as duas definições de solução fraca são equivalentes. Para isto, notemos que

$$\left(-i\partial_j u - A_\lambda^j\right) \cdot \overline{\left(-i\partial_j v - A_\lambda^j v\right)} = \partial_j u \partial_j \bar{v} + i\bar{v}\partial_j u A_\lambda^j - iuA_\lambda^j \partial_j \bar{v} + [A_\lambda^j]^2 u\bar{v}, \quad \forall j = 1, 2, ..., n$$

e pela definição de ∇_{A_λ} dada no Capítulo 2,

$$\begin{aligned}
\nabla_{A_\lambda} u \cdot \overline{\nabla_{A_\lambda} v} &= \sum_{j=1}^{n} \left[\partial_j u \partial_j \bar{v} + i\bar{v} A_\lambda^j \partial_j u - iuA_\lambda^j \partial\bar{v} + [A_\lambda^j]^2 u\bar{v}\right] \\
&= \nabla(u_1 + iu_2) \cdot \nabla(v_1 + iv_2) + i(v_1 - iv_2) A_\lambda \nabla(u_1 + iu_2) + \\
&\quad -i(u_1 + iu_2) A_\lambda \nabla(v_1 - iv_2) + |A_\lambda|^2 (u_1 + iu_2)(v_1 - iv_2) = \\
&= \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 - \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 + i[\nabla u_1 \cdot \nabla v_2 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_1] + \\
&\quad +v_2 A_\lambda \nabla u_1 - v_1 A_\lambda \nabla u_2 + i[v_1 A_\lambda \nabla u_1 + v_2 A_\lambda \nabla u_2] + \\
&\quad +u_2 A_\lambda \nabla v_1 - u_1 A_\lambda \nabla v_2 - i[u_2 A_\lambda \nabla v_2 + u_1 A_\lambda \nabla v_1] + \\
&\quad +|A_\lambda|^2 [u_1 v_1 + u_2 v_2] + i|A_\lambda|^2 [u_2 v_1 - u_1 v_2].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
Re\left(\nabla_{A_\lambda} u \cdot \overline{\nabla_{A_\lambda} v}\right) &= \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 - \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 + v_2 A_\lambda \nabla u_1 - v_1 A_\lambda \nabla u_2 + \\
&- u_1 A_\lambda \nabla v_2 + u_2 A_\lambda \nabla v_1 + |A_\lambda|^2 [u_1 v_1 + u_2 v_2].
\end{aligned}$$

Aplicando a igualdade acima em (B.15), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= Re\left(\int_\Omega \nabla_{A_\lambda}u.\overline{\nabla_{A_\lambda}v} + u\bar{v} - f(|u|^2)u\bar{v}\right)\\
&= \int_{\Omega_\lambda}\Big[\nabla u_1\cdot\nabla v_1 - \nabla u_2\cdot\nabla v_2 + v_2A_\lambda\nabla u_1 - v_1A_\lambda\nabla u_2 - u_1A_\lambda\nabla v_2 +\\
&\quad +u_2A_\lambda\nabla v_1 + |A_\lambda|^2[u_1v_1+u_2v_2] + (u_1v_1+u_2v_2) - f(|u|^2)(u_1v_1+u_2v_2)\Big]dx,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\lambda}[\nabla u_1\cdot\nabla v_1 + |A_\lambda|^2u_1v_1 + u_1v_1 - \nabla u_2\cdot\nabla v_2 + |A_\lambda|^2u_2v_2 + u_2v_2dx =\\
&\int_{\Omega_\lambda}[-v_2A_\lambda\nabla u_1 - u_2A_\lambda\nabla v_1 + v_1A_\lambda\nabla u_2 + u_1A_\lambda\nabla v_2 + f(|u|^2)(u_1v_1+u_2v_2)]dx. \qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}$$

Observamos que (B.16) implica em (B.13) se tomarmos $v_1 = w$, $v_2 = 0$ e aplicarmos o Teorema do Divergente ao Campo $u_2v_1A_\lambda$, juntamente com o fato que u satisfaz a condição de fronteira; por sua vez, (B.16) implica (B.14) se tomarmos $v_1 = 0$, $v_2 = w$ e usarmos o Teorema Divergente ao campo u_1wA_λ de forma análoga. Para a recíproca, basta somarmos (B.13) e (B.14), tomando $w = v_1$ em (B.13) e $w = v_2$ em (B.14), e aplicarmos mais uma vez o Teorema do Divergente aos campos $u_1v_2A_\lambda$ e $u_2v_1A_\lambda$.

Chamaremos atenção para o fato, de pela definição (B.15), não ser necessário exigir mais do que a continuidade da função A_λ. Além disso, analogamente motiva-se a definição de solução fraca para o problema P_κ

Apêndice C

Resultados de Homologia e Categoria

Este apêndice é destinado em especial a resultados do Capítulo 2, Proposição 2.15 e do Capítulo 3, Proposição 3.14.

Definição C.1. Seja X um espaço topológico. Duas aplicações $f, g : X \longrightarrow X$ são chamadas homotópicas, se existe uma aplicação contínua $h : [0,1] \times X \longrightarrow X$ tal que $h(0,\cdot) = f$ e $h(1,\cdot) = g$. Dizemos que h é uma homotopia entre f e g.

Definição C.2. Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é uma equivalência homotópica se existir uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ são homotópicas às identidades de X e Y, respectivamente. Diremos, então, que X e Y têm os mesmo tipo de homotopia.

Proposição C.1. Para $r > 0$ suficientemente pequeno Ω_r^+ e Ω_r^- são homotopicamente equivalente a Ω.

Demonstração. O leitor pode consultar [21, Proposição 2.3.3] $\square$

As seguintes definições, notações e resultados envolvendo Categoria de Lusternik-Schnirelmann podem ser encontrados em [44, Capítulo 5].

Definição C.3. Um subconjunto fechado A de um espaço topológico X é denominado contrátil se existe $h \in C([0,1] \times A, X)$ tal que para cada $u, v \in A$,

$$h(0,u) = u, \quad h(1,u) = h(1,v).$$

Definição C.4. Seja X um espaço topológico e A um subconjunto fechado de X. A categoria de Lusternik-Schnirelmann de A em X, é o menor inteiro n tal que existem n subconjuntos fechado $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de X satisfazendo:

(a) $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$,

(b) $A_1, A_2, ..., A_n$ são contráteis em X.

Notation C.2. Denotamos a categoria de A em X por $cat_X(A)$.

Proposição C.3. Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X. A categoria satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Se $A \subset B$ então $cat_X(A) \leq cat_X(B)$;

(ii) $cat_X(A \cup B) \leq cat_X(A) + cat_X(B)$;

Agora iremos enunciar um resultado de multiplicidade de pontos críticos envolvendo categoria, o qual aplicaremos na demonstração dos Teoremas 2.1 e 3.1.

Teorema C.4. *Sejam X um espaço de Banach, $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $V = \{v \in X; \psi(v) = 0\}$ tais que $\psi'(v) \neq 0$, para todo $v \in V$. Seja ϕ um funcional tal que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se $\phi\big|_V$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição $(P.S)_c$ para todo $c \in [\inf_V \phi, d]$, então $\phi\big|_V$ tem um mínimo e ϕ^d tem pelos menos $cat_{\phi^d}(\phi^d)$ pontos críticos de $\phi\big|_V$, onde $\phi^d := \{u \in V; \phi(u) \leq d\}$ e V uma variedade.*

Demonstração. Veja [44, Teorema 5.20]. □

O próximo resultado envolve Homotopia e Categoria.

Proposição C.5. Sob as mesmas hipóteses da Proposição C.1, temos

$$cat_{\Omega}(\Omega) = cat_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-).$$

Demonstração. O leitor pode consultar [26, Lema 3.6] □

Referências Bibliográficas

[1] ABATANGELO, L.; TERRACINI, S. Solutions to nonlinear Schrödinger equations with singular electromagnetic potential and critical exponent. J. Fixed Point Theory Appl., v. 10, p. 147-180, 2011.

[2] ALVES, C.O., Existence and multiplicity of solution for a class of quasilinear equations, Adv. Nolinear stud.5 (2005) 73-87.

[3] ALVES, C. O.; FIGUEIREDO, G. M.; FURTADO, M. F. Multiple solutions for a nonlinear Schrödinger equation with magnetic fields. J. Differential Equations, v. 251, p. 2534-2548, 2011

[4] ALVES, C.O.; NEMER, R.C.M.; SOARES, S.H., The use of the Morse theory to estimate the number of nontrivial solutions of a nonlinear Schrödinger equation with magnetic field, arXiv:1408.3023v1 [math.AP] 13 Aug 2014

[5] AMBROSETTI A.; BADIALE, M.; CINGOLANI, S., Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations. Arch. Rational Mech. Anal., v. 140, p. 285-300, 1997.

[6] AMBROSETTI A.; RUIZ, D. Radial solutions concentrating on spheres of nonlinear Schrödinger equations with vanishing potentials. Proc. Royal Soc. Edinburgh, v. 136 A, p. 889-907, 2006.

[7] BARILE, S. A multiplicity result for singular NLS equations with magnetic potentials. Nonlinear Anal., v. 68, p. 3525-3540, 2008.

[8] BENCI, V.; CERAMI, G. The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems. Arch. Rational Mech. Anal., v. 114, p. 79-93, 1991.

[9] BENCI, V.; CERAMI, G. Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology. Calc. Var. Partial Diferential Equations, v. 2, p. 29-48, 1994.

[10] Berestycki, H. e Lions, P.-L., *Esistence of the ground state in nonlinear equations of the type Klein-Gordon, in Variational Inequalities*. (Cottle, Gianesi and Lions J., L.,editors). New York: J. Wiley, 1980.

[11] CANDELA, A. M.; LAZZO, M. Positive solutions for a mixed boundary problem. Nonlinear Anal., v. 24, p. 1109-1117, 1995.

[12] CAO, D.; TANG, Z. Existence and uniqueness of multi-bump bound states of nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields. J. Diferential Equations, v. 222, p. 381-424, 2006.

[13] CHABROWSKI, J. AND A. SZULKIN On the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent and magnetic field, Top. Meth. Nonlinear Anal., v. 25, p. 3-21, 2005.

[14] CINGOLANI, S. Semiclassical stationary states of Nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field. J. Diferential Equations, v. 188, p. 52-79, 2003.

[15] CINGOLANI, S.; CLAPP M. Intertwining semiclassical bound states to a nonlinear magnetic Schrödinger equation. Nonlinearity, v. 22, p. 2309-2331, 2009

[16] CINGOLANI, S. JEANJEAN; L.; SECCHI, S. Semiclassical limit for nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields. J. Math. Anal. Appl., v. 275, p. 108-130, 2002.

[17] CINGOLANI, S. JEANJEAN; L.; SECCHI, S. Semiclassical limit for nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields. J. Math. Anal. Appl., v. 275, p. 108-130, 2002

[18] CINGOLANI, S.; SECCHI, S. Semiclassical states for NLS equations with magnetic potentials having polynomial growths. J. Math. Phys., v. 46, n. 5, p. 1-19, 2005

[19] COTI-ZELATI, V. e RABINOWITZ, P. H., Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on IRN Comm. Pure Appl. Math., 45 (1992) 1217-1269.

[20] DEL PINO, M.; FELMER, P. Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains. Calc. Var. Partial Diferential Equations, v. 4, p. 121-137, 1996.

[21] DOS PRAZERES, D. P. Multiplicidade de soluções para problemas elípticos semilineares envolvendo o expoente crítico de Sobolev, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2010.

[22] ESTEBAN, J. M.; LIONS, P. L. Stationary solutions of nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field. In: COLOMBINI, F. et al. PDE and Calculus of Variations. Progr. Nonlinear Diferential Equations Appli., v. 1, Boston: Birkhäuser, 1989, p. 401-449.

[23] Folland, G. B., Real Analysis, John Wiley e Sons, New York, 1984.

[24] FLOER, L. A.; WEINSTEIN, A. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. J. Funct. Anal., v. 69, p. 397-408, 1986.

[25] G. Arioli and A. Szulkin, Semilinear Schrödinger equation in the presence of a magnetic field, Arch. Rat. Mech. Anal., 170 (2003), 277-295

[26] JUNIOR, J.C.O. , Multiplicidade e concentração de soluções positivas para uma equação elíptica quasilinear, Dissertação de Mestrado Universidade Federal do Espírito Santo, 2012.

[27] KAVIAN, O., Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[28] KURATA, K. Existence and semi-classical limit of the least energy solution to a nonlinear Schrödinger equation with electromagnetic fields. Nonlinear Anal., v. 62, p. 615-628, 2005.

[29] Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: Quantum Mechanics. Pergamon Press, 1977.

[30] LIEB, E.H., LOSS, M., Analysis. Graduate Studies in Mathematics 14, AMS, 1997.

[31] LI, G.; PENG, S.; WANG, C. Infinitely many solutions for nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields. J. Diferential Equations, v. 251, p. 3500-3521, 2011.

[32] LIANG, S.; ZHANG, J. Solutions of perturbed Schrödinger equations with electromagnetic fields and critical nonlinearity. Proc. Edinb. Math. Soc., v. 54, p. 131-147, 2011

[33] MILLS, D.L.: Nonlinear Optics. Springer-Verlag, 1998.

[34] NEMER, R. C. M., Resultados de multiplicidade para equações de Schrödinger com campo magnético via teoria de Morse e topologia do domínio . Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

[35] RABINOWITZ, P. H. On a class of nonlinear Schrödinger equations. Z. Angew Math. Phys., v. 43, n. 2, p. 270-291, 1992.

[36] SULEM, C.; SULEM, P. L. The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse. New York: Springer, 1999

[37] SQUASSINA, M. Soliton dynamics for the nonlinear Schrödinger equation with magnetic field. Manuscripta Math., 130, p. 461-494, 2009

[38] TANG, Z. Multi-bump bound states of nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields and critical frequency. J. Diferential Equations, V. 245, p. 2723-2748, 2008.

[39] TANG, Z. On the least energy solutions of nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields. Computers and Mathematics with Applications, v. 54, p. 627-637, 2007.

[40] TANG, Z. Multiplicity of standing wave solutions of nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields Zhongwei Tang. Z. angew. Math. Phys., v. 59, p. 810-833, 2008.

[41] WANG, X.; ZENG, B. On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations with competing potential functions, SIAM J. Math. Anal., v. 28, p. 633-655, 1997.

[42] WANG, X. On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations. Comm. Math. Phys., v. 153, n. 2, p. 229-244, 1993.

[43] WILLEM, M., Analyse Harmonique Réelle, Hermann, Paris, 1995.

[44] WILLEM, M., Minimax theorems, Birkhäuser, 1996.