Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Identidades Polinomiais para Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores em Blocos.

por

Laise Dias Alves Araújo †

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

A663i Araújo, Laise Dias Alves.
Identidades polinomiais para álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos / Laise Dias Alves Araújo. – Campina Grande, 2017.
69 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva".
Referências.

1. Álgebra. 2. Identidades Polinomiais. 3. Graduação Elementar. I. Silva, Diogo Diniz Pereira da Silva e. II. Título.

CDU 512(043)

Identidades Polinomiais para Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores em Blocos.

por

Laise Dias Alves Araújo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Angelo

Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

Antônio Pereira Brandão Júnior

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Diogo Diniz P.S. Silva

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Junho/2017

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida e por tudo que me tem concedido ao longo de minha existência. A minha avó, Maria de Lurdes, pela minha criação e por todos os bons exemplos que tive durante toda a nossa convivência.

Ao professor orientador, Diogo Diniz, por toda a sua paciência ao longo de minha orientação e por ter contribuído sobremaneira com a elaboração da presente dissertação.

A todos os professores da UAMat da UFCG e do DM da UFPB que, durante a graduação e mestrado, contribuíram fortemente com minha formação matemática. Em especial, agradeço ao professor Luiz Antônio pelo período em que fui integrante do PET/CS-Matemática e Estatística UFCG (durante toda a minha graduação), O PET foi, sem dúvidas, a porta de entrada para que esse momento viesse a acontecer. A professora Mirian da Costa pelo tempo de orientação a mim dedicado no início do meu mestrado e por toda sua inspiração matemática que pode absorver e ao professor Brandão pelos cursos ministrados durante minha graduação e mestrado, os quais ampliaram meu conhecimento e influenciaram, positivamente, na escolha de seguir na área de álgebra.

Ao Professor Claudemir Fidelles, pela imensa contribuição nesse trabalho, por toda a paciência de ensino detalhado e por todas as horas que se dedicou como professor e amigo.

Aos professores Ângelo Calil Bianchi e Antônio Brandão pela composição da banca examinadora e pela colaboração com o aperfeiçoamento do nosso trabalho.

A todos os funcionários da UAMat e a todos os amigos da graduação e do PET/cs-Matemática e Estatística da UFCG. Em especial a Auri Ferreira por todo apoio dado nessa minha caminhada

E, por fim, a CAPES pelo financiamento do trabalho.

Dedicatória

À minha avó, Maria de Lurdes,
em memória.

Resumo

Nesta dissertação estudamos as graduações elementares (ou boas graduações) e as identidades polinomiais graduadas correspondentes em álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos. Uma graduação elementar por um grupo G na álgebra $\mathcal{A} = UT(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ de matrizes triangulares superiores em blocos é determinada por uma n-upla em G^n, onde $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$. Mostraremos que as graduações elementares em $\mathcal{A}$ determinadas por duas n-uplas em G^n são isomorfas se, e somente se, as n-uplas estão na mesma órbita da bi-ação canônica em G^n com o grupo $S_{\alpha_1} \times \cdots \times S_{\alpha_r}$ agindo à esquerda e G à direita. Em seguida utilizamos estes resultados para mostrar que, sob certas hipóteses (por exemplo, se o grupo G tem ordem prima), duas álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos, graduadas pelo grupo G, satisfazem as mesmas identidades graduadas se, e somente se, são isomorfas (como álgebras graduadas).

Abstract

In this dissertation we study elementary (or good) gradings in upper block triangular matrix algebras and the corresponding graded polynomial identities. An elementary grading by a group G on the algebra $\mathcal{A} = UT(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ of upper block triangular matrices is determined by an n-tuple in G^n, where $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$. It will be proved that the elementary gradings on $\mathcal{A}$ determined by two n-tuples in G^n are isomorphic if and only if the n-tuples are in the same orbit in the canonical bi-action on G^n with the group $S_{\alpha_1} \times \cdots \times S_{\alpha_r}$ acting on the left and the group G acting on the right. These results will be used to prove that under suitable hypothesis (for example if the group G has prime order) two upper block triangular matrix algebras, graded by the group G, satisfy the same graded identities if and only if they are isomorphic (as graded algebras).

Conteúdo

Introdução

A teoria das álgebras com identidades polinomiais (pi-álgebras) ganhou impulso com a demonstração de Kaplansky [22] de que toda p.i. álgebra primitiva tem dimensão finita sobre seu centro. Sejam A uma álgebra sobre o corpo K, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto enumerável e $f(x_1, \cdots, x_n)$ um polinômio na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$, dizemos que $f \equiv 0$ é uma *identidade polinomial* para A (ou, por abuso de notação, que f é uma identidade polinomial para A) se $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n$ em A. Se para algum polinômio não nulo f a álgebra A satisfaz a identidade $f \equiv 0$ dizemos que A é uma *pi-álgebra*. Uma álgebra comutativa A satisfaz a identidade $x_1x_2 - x_2x_1 \equiv 0$ e, portanto, a classe das pi-álgebras engloba a classe das álgebras comutativas. Álgebras de dimensão finita e álgebras nilpotentes também são pi-álgebras. Amitsur e Levitzki demonstraram, pouco tempo depois do resultado de Kaplansky, que o polinômio standard de grau $2n$ (veja a Definição 1.2.8) é uma identidade polinomial, de grau mínimo, para a álgebra das matrizes quadradas de ordem n. Segue do Teorema de Amitsur e Levitzki que duas álgebras simples de dimensão finita são isomorfas se, e somente se, elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Recentemente, Shestakov e Zaicev [28] provaram que o mesmo vale para álgebras não-associativas simples de dimensão finita. Resultados análogos foram obtidos para álgebras de Lie, por Kushkulei e Razmyslov [25]. e para álgebras de Jordan, por Drensky e Racine [16].

O conjunto de identidades para uma álgebra A é um ideal de $K\langle X\rangle$ que é invariante por endomorfismos desta álgebra, os ideais com esta propriedade são chamados *T-ideais*. Specht conjecturou em 1950 que sobre um corpo de característica zero todo T-ideal de $K\langle X\rangle$ é finitamente gerado como T-ideal. Esta conjectura foi resolvida por A. Kemer em 1987 em uma série de artigos em que desenvolve uma teoria estrutural de T-ideais, esta teoria utiliza conceitos de álgebras e identidades graduadas (pelo grupo $\mathbb{Z}_2$). Resultados importantes da teoria das pi-álgebras foram transferidos para o contexto de álgebras graduadas e identidades polinomiais graduadas, por exemplo, em [29] e [2] são demonstrados teoremas análogos ao teorema de Kemer para álgebras graduadas.

Koshlukov e Zaicev [24] provaram que, se K é algebricamente fechado, G é abeliano e a ordem de qualquer subgrupo finito de G é invertível em K, então as álgebras G-graduadas simples de dimensão finita são determinadas, a menos de isomorfismo G-graduado, por suas identidades G-graduadas. Mais tarde, Aljadeff e Haile [1] estenderam esse resultado, no caso em que K tem característica zero, para um grupo qualquer G. Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti [**?**] mostraram que álgebras de matrizes triangulares superiores graduadas por um grupo finito são isomorfas se, e somente se, elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais graduadas.

As álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos $\mathcal{A} = UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ (veja a Definição 1.1.8), graduadas pelo grupo $\mathbb{Z}_2$, aparecem na classificação das variedades minimais de expoente d. Giambruno e Zaicev [17] mostram que qualquer variedade minimal de álgebras é gerada pelo envelope Grassmann de uma álgebra de matrizes triangulares em blocos com uma Z_2-graduação . Esta classe de álgebras engloba as álgebras de matrizes ($r = 1$) e as álgebras de matrizes triangulares superiores ($\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 1$). As graduações por grupos abelianos nestas álgebras foram descritas por Valenti e Zaicev em [30]. As graduações em $\mathcal{A}$ tais que as matrizes elementares são homogêneas são chamadas graduações elementares, Bărăscu e Dăscălescu [8] determinaram quando duas graduações elementares em $\mathcal{A}$ são isomorfas. Posteriormente Di Vincenzo e Spinelli [14] demonstraram que sob certas condições (se por exemplo o grupo G tiver ordem prima) duas álgebras de matrizes triangulares superiores em bloco com G-graduações elementares satisfazem as mesmas identidades graduadas se, e somente se, são isomorfas como álgebras graduadas.

O objetivo desta dissertação é descrever as graduações elementares nas álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos e estudar as suas identidades polinomiais graduadas. Ademais, sob certas hipóteses sobre o grupo G, mostrar que duas álgebras triangulares superiores em blocos, G-graduadas, satisfazem as mesmas identidades polinomiais graduadas se, e somente se são isomórficas. A dissertação esta organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 1 apresentaremos os conceitos básicos e é assumido o conhecimento por parte do leitor de álgebra linear básica, espaços vetoriais e conceitos relacionados. Iniciaremos com a definição de álgebras e resultados relacionados, apresentaremos a definição de álgebra associativa livre e identidades polinomiais. Em seguida, definiremos álgebras graduadas e identidades polinomiais graduadas que são conceitos cruciais nesta dissertação. Por fim, apresentaremos alguns teoremas de primordial importância no desenvolvimento dos Capítulos 2 e 3.

O Capítulo 2 está reservado para a apresentação das graduações elementares em álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos. Considerando K um corpo e G um grupo qualquer, iniciaremos apresentando a definição de uma α-cadeia graduada e seguiremos expondo os dois principais teoremas, as suas demonstrações servirão de motivação para o desenvolvimento do capítulo. Em seguida, iremos descrever as graduações elementares em álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos como álgebras de endomorfismos de cadeias graduadas. Por fim, determinaremos quando duas álgebras de endomorfismos são isomorfas como álgebras graduadas. Finalmente, apresentaremos as demostrações dos teoremas iniciais.

O Capítulo 3 tem como objetivo investigar as identidades polinomiais graduadas para álgebras de matrizes triangulares superiores em bloco, $\mathcal{A} = UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, sobre um corpo K de característica zero, com uma graduação elementar por um grupo abeliano G. Um dos principais resultado que aqui demonstraremos (Teorema 3.2.5) dá condições suficientes, em termos dos subgrupos de invariância (veja a Definição 3.1.7) dos blocos na diagonal de $\mathcal{A}$, tais que para $\mathcal{B} = UT(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$, com uma G-graduação elementar, vale: Se $\mathcal{B}$ satisfaz todas as identidades graduadas de $\mathcal{A}$ então $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfas como álgebras graduadas. A partir deste resultado demonstramos o Teorema 3.2.8, o qual afirma que, se o corpo K é algebricamente fechado, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ têm G-graduações quaisquer e G tem ordem prima ou, para algum j, a ordem de G e α_j são coprimas, vale a equivalência: $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ satisfazem as mesmas identidades graduadas se, e somente se, são isomorfas.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como objetivo estabelecer a linguagem que será adotada ao longo da dissertação. Vamos apresentar definições, conceitos, notações e resultados essenciais que serão utilizados frequentemente ao longo do texto. Até o término do presente capítulo, o símbolo K designará um corpo qualquer, a menos que dito o contrário. Estamos assumindo que o leitor tenha familiaridade com conceitos básicos de Álgebra Linear. Todo espaço vetorial será sobre K.

1.1 Álgebras Sobre um Corpo K

Vamos dar partida ao nosso estudo com o conceito de álgebras sobre um corpo K (ou K-álgebras). Assim, passemos à seguinte definição.

Definição 1.1.1. *Seja A um espaço vetorial sobre K. Dizemos que um par $(A, *)$ é uma K-álgebra (ou álgebra sobre K) se "$*$" é uma aplicação bilinear em A, isto é, $* : A \times A \to A$ satisfaz:*

i) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

ii) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$,

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Na definição acima, "$*$" é dita *multiplicação* da álgebra A e, simplesmente, denotaremos o produto $a * b$ por justaposição ab, para quaisquer $a, b \in A$. Mais ainda, escreveremos simplesmente A em lugar de $(A, *)$ para denotar a estrutura de álgebra, deixando implícita a multiplicação. Diremos que "A é uma álgebra" ao invés de "K-álgebra", deixando implícito o corpo K. Diremos que um subconjunto β de A é uma *base* da álgebra se é uma base do espaço vetorial A. Definimos a *dimensão* de A como sendo a dimensão de A vista como K-espaço vetorial.

Exemplo 1.1.2. *Seja n um número natural. O espaço vetorial $M_n(K)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em K, munido do produto usual de matrizes, é uma K-álgebra. Para $1 \leq i, j \leq n$ denotamos por e_{ij} a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. As matrizes e_{ij} são chamadas* ***matrizes elementares****. Claramente, o conjunto $\beta = \{e_{ij} \in M_n(K) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base para $M_n(K)$, e portanto esta álgebra tem dimensão n^2. Não é difícil ver que se $e_{ij}, e_{kl} \in M_n(K)$, então $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, onde δ_{jk} denota o delta de Kronecker.*

As álgebras são classificadas, como na definição a seguir, conforme as propriedades que possuam.

Definição 1.1.3. *Seja A uma álgebra. Dizemos que A é:*

i) **Associativa***, se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$;*

ii) **Comutativa***, se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$;*

iii) **Unitária** *(ou com unidade), se existe um elemento em A, denotado por 1_A, tal que $a1_A = 1_Aa = a$, para todo $a \in A$. O elemento 1_A é chamado de unidade da álgebra A.*

No Exemplo 1.1.2 temos uma álgebra associativa e unitária, mas não comutativa quando $n > 1$. Quando a álgebra A for unitária, é fácil ver que a unidade 1_A é única. Por simplicidade, usaremos o símbolo 1 para representar a unidade 1_A. Neste caso, identificamos naturalmente o elemento $\lambda 1$ de A com λ, para todo $\lambda \in K$. Nesse sentido, dizemos que A contém o corpo K, identificando $\{\lambda 1 \mid \lambda \in K\}$ com K.

Definição 1.1.4. *Seja A uma álgebra associativa e unitária.*

(i) Se a e b são elementos de A tais que $ab = 1$ dizemos que b é ***inverso à direita*** *de a e que a é* ***inverso à esquerda*** *de b.*

(ii) Um elemento $a \in A$ diz-se ***inversível*** *se existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$. Neste caso, chamamos o elemento b de inverso multiplicativo (ou simplesmente inverso) de a, para o qual adotamos a notação a^{-1}. O conjunto de inversíveis de A será denotado por $U(A)$.*

Exemplo 1.1.5. *Sejam V um espaço vetorial e $\mathscr{L}(V)$ o espaço vetorial dos operadores lineares sobre V. Temos que $\mathscr{L}(V)$, munido da composição de funções, é uma álgebra associativa com unidade, chamada de **álgebra dos operadores lineares sobre** V. Se $T, S \in \mathscr{L}(V)$, em geral denota-se $T \circ S$ simplesmente por TS.*

De agora em diante iremos considerar apenas álgebras associativas e com unidade, por este motivo a partir daqui usaremos o termo *álgebra* para nos referir a uma álgebra associativa com unidade.

Definição 1.1.6. *Sejam A uma álgebra, B e I subespaços vetoriais de A. Dizemos que:*

*i) B é uma **subálgebra** de A se $1 \in B$ e $xy \in B$ para quaisquer $x, y \in B$;*

*ii) I é um **ideal à esquerda** de A (respectivamente à direita) se $ax \in I$ (respectivamente $xa \in I$) para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.*

*iii) Seja I um ideal à esquerda próprio de A, isto é, a unidade de A não pertence a I. Dizemos que I é um **ideal à esquerda maximal** de A se não existe ideal à esquerda próprio J de A, com $I \neq J$, tal que $I \subseteq J$. Formula-se conceito análogo para o caso em que I é um ideal à direita de A.*

*iv) I é um **ideal bilateral** de A (ou, simplesmente ideal, de A), se I é um ideal à esquerda e à direita simultaneamente.*

Um fato elementar é que 0 e A sempre são ideais bilaterais da álgebra A. Caso esses sejam os únicos ideais bilaterais de A, dizemos que A é uma **álgebra simples**.

Exemplo 1.1.7. *Denotamos por $UT_n(K)$ (ou simplesmente UT_n quando estiver claro que é o corpo K considerado) o conjunto das matrizes triangulares superiores. Tem-se que UT_n é uma subálgebra de $M_n(K)$. Como $UT_n = \langle e_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$ (subespaço gerado) segue que*

$$\dim UT_n(K) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

A seguir apresentamos a definição de álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos, esta classe de álgebras engloba as álgebras de matrizes e as álgebras de matrizes triangulares superiores.

Definição 1.1.8. *Sendo r um inteiro positivo e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ uma r-upla de inteiros positivos, definimos a álgebra*

$$UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \begin{pmatrix} M_{\alpha_1}(K) & M_{\alpha_1\times\alpha_2}(K) & \ldots & M_{\alpha_1\times\alpha_r}(K) \\ 0 & M_{\alpha_2}(K) & \ldots & M_{\alpha_2\times\alpha_r}(K) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & M_{\alpha_r}(K) \end{pmatrix}$$

matricial triangular superior em bloco do tipo α.

A seguir apresentamos as noções de homomorfismos de álgebras e de quociente de uma álgebra por um ideal.

Definição 1.1.9. *Sejam A e B duas álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : A \to B$ é um* **homomorfismo de álgebras** *se $\varphi(1_A) = 1_B$ e, para quaisquer $a, b \in A$ vale a igualdade $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.*

Chamamos φ de **isomorfismo** se φ for bijetora. Quando $A = B$ dizemos que φ é um **endomorfismo** da álgebra A e se φ for endomorfismo e isomorfismo simultaneamente, dizemos que φ é um **automorfismo** de A. Se existe isomorfismo entre as K-álgebras A e B denotamos por $A \simeq B$ e dizemos que A e B são **isomorfas**.

Exemplo 1.1.10. *Se V é um espaço vetorial de dimensão n, então a álgebra $\mathscr{L}(V)$ do Exemplo 1.1.5 é isomorfa à álgebra de matrizes $M_n(K)$. De fato, sejam $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e E_{ij} a transformação em $\mathscr{L}(V)$ dada por $E_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$. Neste caso $E_{ij} \circ E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ e portanto o isomorfismo linear $\varphi_\beta : \mathscr{L}(V) \to M_n(K)$ dado por $\varphi_\beta(E_{ij}) = e_{ij}$, onde e_{ij} é a matriz elementar com 1 na posição (i, j), é um isomorfismo de álgebras.*

Exemplo 1.1.11. *Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ uma r-upla de inteiros positivos e $\mathscr{F}$ uma cadeia $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_r$ de subespaços de V de modo que V_i tem dimensão $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$. Denotaremos por $End(\mathscr{F})$ o conjunto das transformações lineares $f \in \mathscr{L}(V)$ tais que $f(V_i) \subseteq V_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V tal que $\{v_1, \ldots, v_{\alpha_1+\cdots+\alpha_i}\}$ é uma base de V_i então $\varphi_\beta(End(\mathscr{F})) = UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, onde φ_β é o isomorfismo do exemplo anterior.*

Definição 1.1.12. *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Definindo no espaço vetorial quociente A/I a operação $(a + I)(b + I) = (ab) + I$, temos que A/I é uma álgebra, chamada de álgebra quociente de A por I. A Aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \rho : & A & \longrightarrow & A/I \\ & a & \longmapsto & \overline{a} = a + I \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejetor de álgebras, chamado de projeção canônica.

Definição 1.1.13. *Sendo $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras, dizemos que o conjunto $ker(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ é o núcleo de φ, e o conjunto $Im(\varphi) = \{\varphi(a) \in B \ \mid a \in A\}$ é a imagem de φ.*

Verifica-se que $ker(\varphi)$ é um ideal de A e que $Im(\varphi)$ é uma subálgebra de B.É imediato verificar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi}: & A/ker(\varphi) & \longrightarrow & Im(\varphi) \\ & \overline{a} & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a) \end{array}$$

está bem definida e é um isomorfismo de álgebras (Teorema dos Isomorfismo).

1.1.1 Produto Tensorial de Álgebras

Sejam V e W espaços vetoriais. Consideremos o espaço vetorial $K(V \times W)$ com base $V \times W$ e o subespaço U de $K(V \times W)$ gerado por elementos dos tipos

$$\begin{gathered} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (\lambda v, w) - \lambda(v, w) \\ (v, \lambda w) - \lambda(v, w) \end{gathered}$$

com $v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W$ e $\lambda \in K$.

Definição 1.1.14 (Produto tensorial de espaços vetoriais)**.** *Sejam V e W K-espaços vetoriais. Definimos o* **produto tensorial de** *V e W, denotado por $V \otimes_K W$ (ou simplesmente $V \otimes W$) como o espaço quociente $K(V \times W)/U$.*

Dado $(v, w) \in V \times W$, vamos denotar por $v \otimes w$ o elemento $\overline{(v, w)}$ de $V \otimes W$. Chamamos os elementos da forma $v \otimes w$ de **tensores**, o conjunto $\{v \otimes w \ \mid \ v \in V, w \in W\}$ é um conjunto gerador de $V \otimes W$. Segue da definição do subespaço U de $K(V \times W)$ que

$$\begin{gathered} (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ (\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) \\ v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w), \end{gathered}$$

e, portanto, a aplicação $V \times W \to V \otimes W$ dada por $(v,w) \mapsto v \otimes w$ é bilinear. O produto tensorial de dois espaços vetoriais é determinado, a menos de isomorfismo, pela propriedade universal a seguir.

Teorema 1.1.15 (Propriedade universal)**.** *Sejam V, W e Z espaços vetoriais sobre um corpo K e $f : V \times W \to Z$ uma aplicação bilinear. Então existe uma única transformação linear $T_f : V \otimes W \to Z$ tal que $T_f(v \otimes w) = f(v,w)$, para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.*

Prova. Como o conjunto $V \times W$ é uma base do espaço vetorial $K(V \times W)$, segue que existe uma única aplicação linear $L : K(V \times W) \to Z$ satisfazendo $L((u,v)) = f(u,v)$, para todo $(v,w) \in V \times W$. Observe que os elementos que geram U na definição de produto tensorial pertencem a $\ker L$ e, assim, $U \subset \ker L$. Se $\alpha_1, \alpha_2 \in K(V \times W)$ são tais que $\alpha_1 - \alpha_2 \in U$, então $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$. Assim, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T_f : & V \otimes W & \longrightarrow & Z \\ & \overline{\alpha} & \longmapsto & T_f(\overline{\alpha}) = L(\alpha) \end{array}$$

está bem definida e é linear. Além disso, dados $v \in V$ e $w \in W$, tem-se $T_f(v \otimes w) = L((v,w)) = f(v,w)$. A unicidade é consequência de que $\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$ é um conjunto gerador de $V \otimes W$. ■

Exemplo 1.1.16. ***(tensor não nulo)*** *Sejam V e W K-espaços vetoriais não-nulos, $v_0 \in V$ e $w_0 \in W$ vetores não nulos. Então $v_0 \otimes w_0 \neq 0$ em $V \otimes W$. De fato, como $v_0, w_0 \neq 0$, existem uma base de V contendo v_0 e uma base de W contendo w_0. Assim, pode-se obter alguma base de $V \times W$ contendo (v_0, w_0). Nesta base, defina $f : V \times W \to K$ bilinear tal que $f(v_0, w_0) \neq 0$. Pela propriedade universal, existe uma transformação linear $T_f : V \otimes W \to K$ tal que $T_f(v \otimes w) = f(v,w)$, e assim $T_f(v_0 \otimes w_0) \neq 0$. Daí $v_0 \otimes w_0 \neq 0$.*

Note que, como $(v,w) \mapsto v \times w$ é uma aplicação bilinear, concluímos que se S_1, S_2 são conjuntos geradores de V e W, respectivamente, então

$$V \otimes W = \langle u_1 \otimes u_2 : u_1 \in S_1, u_2 \in S_2 \rangle .$$

Assim, se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita, tem-se que $V \otimes W$ tem dimensão finita e $\dim V \otimes W \leq (\dim V)(\dim W)$. Quando os conjuntos S_1 e S_2 são linearmente independentes segue da propriedade universal no Teorema 1.1.15

que $\{s_1 \otimes s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$ é linearmente independente, então $\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$.

No caso em que A e B são álgebras, definimos a operação

$$* : (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to A \otimes B$$

por $(a \otimes b) * (c \otimes d) = ac \otimes bd$. É possível verificar que $*$ está bem definida e é uma aplicação bilinear que faz de $A \otimes B$ uma álgebra.

Exemplo 1.1.17. *Se $A = M_n(K)$ e $B = M_m(K)$, então a álgebra $A \otimes B$ é isomorfa a $M_{nm}(K)$.*

1.2 Identidades Polinomiais

Essa seção é dedicada à introdução do conceito de identidade polinomial. Vamos dar início falando da definição de álgebras livres por ser o "ambiente" das identidades polinomiais.

Definição 1.2.1. *Dizemos que uma álgebra A é* **livre** *se existe $X \subseteq A$ tal que X gera A como álgebra e para cada álgebra B e cada aplicação $h : X \to B$ existe um único homomorfismo $\phi : A \to B$ estendendo h. Neste caso dizemos que A é* **livremente gerada** *por X. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada de* **posto** *de A.*

Exemplo 1.2.2. *A álgebra polinomial $K[x]$ é gerada pelo conjunto $\{x\}$. Ademais, sendo A uma álgebra e $a \in A$, o homomorfismo $\phi_a : K[x] \to A$, definido por $\phi_a(f(x)) = f(a)$, satisfaz $\phi_a(x) = a$.*

Vamos construir uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito e enumerável de *variáveis* não-comutativas. Uma *palavra* em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. Vamos denotar por 1 a palavra vazia. Dizemos que duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}$ são iguais se

$$n = m \text{ e } i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots, i_n = j_n.$$

Consideremos $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem por base o conjunto de todas as palavras em X. Dessa forma, os elementos de $K\langle X\rangle$, que chamaremos de *polinômios*, são somas (formais) de termos (ou monômios) que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X. Consideremos em $K\langle X\rangle$ a seguinte multiplicação

$$(x_{i_1}\dots x_{i_k})(x_{j_1}\dots x_{j_l}) = x_{i_1}\dots x_{i_k}x_{j_1}\dots x_{j_l}, \quad onde \quad x_{i_t}, x_{j_s} \in X.$$

O espaço vetorial $K\langle X\rangle$ munido deste produto é uma álgebra associativa com unidade. Observe que X gera $K\langle X\rangle$ como álgebra.

Proposição 1.2.3. *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade.*

Prova. Sejam A uma álgebra e $h : X \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer, com $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Então existe uma aplicação linear $\varphi_h : K\langle X\rangle \to A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$. Temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. ■

Definição 1.2.4. *Seja A uma álgebra. Um polinômio $f(x_1,\dots,x_n) \in K\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1,\dots,x_n) \equiv 0$) é dito ser uma* **identidade polinomial** *da álgebra A, se $f(a_1,\dots,a_n) = 0$ para quaisquer $a_1,\dots,a_n \in A$.*

Observemos que $f = f(x_1,\dots,x_n)$ é uma identidade polinomial de A se, e somente se, f pertence ao núcleo de cada os homomorfismos de $K\langle X\rangle$ em A. Denotando por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A, dizemos que A é uma álgebra com identidade polinomial ou pi-álgebra se $T(A) \neq \{0\}$. Se A e B são álgebras tais que $T(A) = T(B)$, dizemos que A e B são pi-equivalentes.

Vamos ver alguns exemplos de álgebras com identidades polinomiais.

Exemplo 1.2.5. *Se A é uma álgebra comutativa, então o polinômio comutador*

$$f(x_1,x_2) = [x_1,x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 1.2.6. *A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade $f(x_1,x_2,x_3) = [[x_1,x_2]^2,x_3]$ conhecida como a identidade de Hall. De fato, basta observar que:*

(1) Se $A,B \in M_n(K)$, então $tr([A,B]) = 0$;

(2) Se $A \in M_2(K)$ e $tr(A) = 0$, então $A^2 = \lambda I_2$ onde I_2 é a matriz identidade de $M_2(K)$.

Nesse momento, vamos definir um tipo de polinômio da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$ e apresentar um resultado que será de grande importância para a demonstração, no Capítulo 3, de um dos principais resultados do nosso trabalho.

Definição 1.2.7. *Consideremos o polinômio da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$, gerada pelo conjunto X, definido como*

$$Cap_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} y_3 x_{\sigma(3)} \ldots y_n x_{\sigma(t)} y_{n+1},$$

onde $sgn(\sigma)$ é o sinal da permutação $\sigma \in S_n$. O polinômio Cap_n é chamado de **polinômio de Capelli** *de posto n (ou n-ésimo polinômio de Capelli), com $n \in \mathbb{N}$.*

Um caso particular do polinômio de Capelli é o polinômio Standard que é definido abaixo com $y_1 = 1, \ldots, y_{n-1} = 1$.

Definição 1.2.8. *Consideremos um polinômio da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$, gerada pelo conjunto X, definido como*

$$s_t(x_1, x_2, \ldots, x_t) = \sum_{\sigma \in S_t} sgn(\sigma)\, x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \ldots x_{\sigma(t)}$$

onde S_t é o grupo simétrico das permutações de $\{1, 2, \ldots, t\}$ e $sgn(\sigma)$ é o sinal da permutação σ. O polinômio s_t é chamado de **polinômio Standard** *de grau t, com $t \in \mathbb{N}$.*

Proposição 1.2.9. *Se $\alpha = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2$, então a álgebra $UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ satisfaz a identidade de Capelli $Cap_{\alpha+m} \equiv 0$, mas não satisfaz $Cap_{\alpha+m-1} \equiv 0$.*

Prova. Note que podemos escrever a álgebra A da seguinte maneira

$$A = UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = B + J,$$

onde J é o radical de Jacobson de A, $J^m = 0$ e $B = M_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus M_{\alpha_m}$. Considere uma avaliação $\varphi : K\langle X\rangle \to A$ do polinômio de Capelli

$$Cap_{\alpha+m} = \sum_{\sigma \in S_{\alpha+m}} sgn(\sigma)\, y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} y_3 x_{\sigma(3)} \ldots y_{\alpha+m} x_{\sigma(t)} y_{\alpha+m+1}.$$

Como $Cap_{\alpha+m}$ é multilinear, basta verificamos em uma base da álgebra A, digamos nas matrizes elementares. Se pelo menos $\alpha+1$ dos valores entre $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{\alpha+m})$ estão em B, então $\varphi(Cap_{\alpha+m}) = 0$, pois $Cap_{\alpha+m}$ é alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_{\alpha+m}$ e $dimB = \alpha$. Mas, se α elementos entre $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{\alpha+m})$ estão em B, então m elementos estão em J e assim, $\varphi(Cap_{\alpha+m}) = 0$, uma vez que $J^m = 0$. Portanto, $\varphi(Cap_{\alpha+m}) = 0$ é uma identidade de A. Mostremos agora que A não satisfaz $Cap_{\alpha+m-1}$. Suponhamos inicialmente que $m = 1$ e, portanto, $A = M_{\alpha_1}(K)$. Escrevamos $n =$

$\alpha_1^2 = dimA$, e tome uma base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de A constituída por todas as matrizes elementares e_{ij}, $1 \leq i, j \leq \alpha_1$, ordenadas de forma arbitrária e fixa. Desta forma, existem $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que

$$a_0 v_1 a_1 \cdots a_{n-1} v_n a_n = e_{11} \tag{1.1}$$

e

$$a_0 v_{\sigma(1)} a_1 \cdots a_{n-1} v_{\sigma(n)} a_n = 0, \tag{1.2}$$

onde $\sigma \in S_n, \sigma \neq 1$. De fato, tomando $v_1 = e_{i_1 j_1}, v_2 = e_{i_2 j_2}, \ldots, v_n = e_{i_n j_n}$, temos que

$$a_0 = e_{1 i_1}, a_1 = e_{j_1 i_2}, \ldots, a_n = e_{j_n 1}. \tag{1.3}$$

Claramente, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ satisfazem (1.1). Por outro lado, dado $2 \leq k \leq n$, algum produto $a_{k-1} v_p a_k$ é igual a zero com $p \neq k$ e consequentemente, vale igualdade (1.2). De (1.1) e (1.2) segue que

$$Cap_n(v_1, v_2, \ldots v_n; a_0, a_1, \ldots, a_n) = e_{11} \neq 0. \tag{1.4}$$

Agora, seja $m \geq 2$, então $A = UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Escrevamos $r_1 = 0, r_2 = \alpha_1, r_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, r_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1}$. Então,

$$B_j = span\{e_{r_j+p, r_j+q} \mid 1 \leq p, q \leq \alpha_j\} \tag{1.5}$$

é isomórfica a álgebra matricial de dimensão $n_j = \alpha_j^2, j = 1, 2, \ldots, m$. Segue da demonstração do caso $m = 1$ que, para todo $1 \leq j \leq m$, existem $a_0^j, \ldots, a_{n_j}^j, v_1^j, \ldots, v_{n_j}^j \in B_j$ tais que

$$a_0^j v_1^j a_1^j \cdots a_{n_j-1}^j v_{n_j}^j a_{n_j}^j = e_{r_j+1, r_j+1} = c_j \neq 0$$

e

$$a_0^j v_{\sigma(1)}^j a_1^j \cdots a_{n_j-1}^j v_{\sigma(n_j)}^j a_{n_j}^j = 0, \tag{1.6}$$

para $\sigma \in S_{n_j}$ com $\sigma \neq 1$. Veja que $B_1 J B_2 \cdots B_{m-1} J B_m \neq 0$ e existem

$$w_1, \ldots, w_{m-1} \in J$$

tais que

$$c_1 w_1 c_2 w_2 \cdots c_{m-1} w_{m-1} c_m \neq 0. \tag{1.7}$$

Neste caso podemos supor $w_i \in J_{i,i+1} = B_iJB_{i+1}$ e portanto $1_iw_i1_{i+1} = w_i$, onde $1_i \in B_i$ é a unidade de B_i. Vamos reescrever (1.7) da seguinte forma

$$(c_11_1)w_1(1_2c_21_2)w_2\cdots w_{m-1}(1_mc_m) \neq 0. \tag{1.8}$$

Note que

$$1_ir1_{i+1} = 0, \tag{1.9}$$

para qualquer $r \in J_{j,j+1}$, com $j \neq i$, e para qualquer $r \in B_1+B_2+\cdots+B_m$. Finalmente, obtemos o seguinte produto que é diferente de zero

$$(a_0^1v_1^1a_1^1\cdots a_{n_1-1}^1v_{n_1}^1a_{n_1}^11_1)w_1(1_2a_0^2v_1^2a_1^2\cdots a_{n_2-1}^2v_{n_2}^2a_{n_2}^21_2)w_2\cdots$$

$$\cdots w_{m-1}(1_ma_0^mv_1^ma_1^m\cdots a_{n_m-1}^mv_{n_m}^ma_{n_m}^m1_m)$$

tal que para qualquer permutação de

$$v_1^1,\ldots,v_{n_1}^1,w_1,v_1^2,\ldots,v_{n_2}^2,w_2,\ldots w_{m-1},v_1^m,\ldots,v_{n_m}^m$$

inserida na expressão resulta em zero. Isso é facilmente visto por e pela relação $a_s^jv_q^pa_{s+1}^j = 0$, onde $j \neq p$. Desta forma, $A = UT(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ não satisfaz a identidade de Capelli Cap_k com $k = n_1+\cdots+n_m+m-1 = \alpha_1^2+\cdots+\alpha_m^2+m-1$ o que completa a prova. ■

Vamos seguir com alguns conceitos que são de fundamental importância na pi-teoria.

Definição 1.2.10. *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é dito ser um T-ideal se para todo $\phi \in End(K\langle X\rangle)$ temos que $\phi(I) \subseteq I$, ou, equivalentemente, se $f(g_1,\ldots,g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$ e $g_1,\ldots,g_n \in K\langle X\rangle$.*

Proposição 1.2.11. *O conjunto $T(A)$ das identidades de uma álgebra A é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então existe alguma álgebra B tal que $T(B) = I$.*

Prova. É fácil ver que $T(A)$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Sejam $f(x_1,\ldots,x_n) \in T(A)$ e $\varphi \in End(K\langle X\rangle)$, arbitrários. Se $\psi : K\langle X\rangle \to A$ é um homomorfismo, então $\psi(\varphi(f)) = (\psi\circ\varphi)(f) = 0$, pois $\psi\circ\varphi : K\langle X\rangle \to A$ é um homomorfismo, pois é a composição de homomorfismos de álgebras e $f \in T(A)$. Daí, $\varphi(f) \in Ker(\psi)$ e por $\cap Ker(\psi) = T(A)$ vale que $\varphi(f) \in T(A)$.

Seja I um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Tomemos a álgebra quociente $B = K\langle X\rangle/I$ e a projeção canônica $\pi : K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle/I$. Se $f \in T(B)$, então $f \in Ker(\pi)$. Como $Ker(\pi) = I$, temos $T(B) \subseteq I$. Por outro lado, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$, então $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ e daí $f(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, \ldots, g_n)} = \overline{0}$. Logo, $f \in T(B)$, o que conclui a demonstração. ■

1.3 Graduações por Grupos em Álgebras Associativas

Na seção que se inicia, a menos que dito o contrário, G denotará um grupo qualquer, para o qual adotaremos a notação multiplicativa.

Ao longo desta seção, daremos ênfase ao conceito de G-graduação sobre uma álgebra A.

Definição 1.3.1. *Sejam A uma álgebra e G um grupo. Definimos uma G-graduação em A como sendo uma família $(A_g)_{g\in G}$ de subespaços vetoriais de A tais que*

$$A = \oplus_{g\in G} A_g \quad e \quad A_g A_h \subset A_{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Neste caso, diz-se que a álgebra A é G-graduada.

Dizemos que os subespaços A_g são as *componentes homogêneas* e os seus elementos não nulos são chamados de *elementos homogêneos de grau g*. A componente homogênea A_e é denominada *componente neutra* da G-graduação, onde e será o elemento neutro de G. Sendo H um subgrupo de G, é fácil ver que a soma $\sum_{h\in H} A_h$ é uma subálgebra de A. Em particular, fazendo $H = \{e\}$, decorre que a componente neutra A_e é uma subálgebra de A. Quando o grupo G for abeliano e finito, dizemos que a G-graduação é abeliana e finita.

Exemplo 1.3.2. *Toda álgebra A admite uma G-graduação. Com efeito, definindo $A_e = A$ e $A_g = \{0\}$ para todo $g \in G - \{e\}$, temos em A uma G-graduação. Uma graduação deste tipo é chamada de G-graduação trivial.*

Exemplo 1.3.3. *Considere a K-álgebra $M_2(K)$ e os subespaços*

$$M_2(K)_{\overline{0}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in K \right\} \quad e \quad M_2(K)_{\overline{1}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in K \right\}.$$

É fácil ver que $M_2(K) = M_2(K)_{\bar{0}} \oplus M_2(K)_{\bar{1}}$ *define uma* $\mathbb{Z}_2$*-graduação em* $M_2(K)$*. Mais geralmente, sendo* $n \in \mathbb{N}$*,* $n > 1$*, considere a álgebra* $M_n(K)$*. Para cada* $\gamma \in \mathbb{Z}_n$*, definamos* $M_\gamma = \langle e_{ij} \mid \overline{i-j} = \gamma \rangle$*. Mostra-se que a família* $(M_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}_n}$ *é uma* $\mathbb{Z}_n$*-graduação em* $M_n(K)$*.*

Proposição 1.3.4. *Sendo* A *uma álgebra* G*-graduada com unidade* 1*, tem-se que a unidade* 1 *é homogênea e que* $1 \in A_e$*.*

Prova. De fato, existem $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que

$$1 = a_e + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n}$$

com $a_e \in A_e, a_{g_j} \in A_{g_j}$. Tomando $h \in G$ e $a_h \in A_h$ arbitrários, temos

$$a_h = a_h a_e + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n}.$$

Daí, segue que $a_h a_{g_j} = 0$ e $a_h a_e = a_h$. Como h e a_h foram tomados arbitrariamente e qualquer elemento de A é escrito como soma de elementos homogêneos concluímos que $a a_e = a$ para qualquer a em A. De modo análogo se mostra que $a_e a = a$ para qualquer a em A, donde $1 = a_e \in A_e$. ■

Definição 1.3.5. *Seja* B *um subespaço vetorial de uma álgebra* $A = \oplus_{g \in G} A_g$ G*-graduada. Dizemos que* B *é homogêneo na* G*-graduação quando* $B = \oplus_{g \in G} B_g$*, onde* $B_g = B \cap A_g$*. Um ideal ou uma subálgebra é dito homogêneo se for homogêneo como subespaço.*

Proposição 1.3.6. *Sejam* $A = \oplus_{g \in G} A_g$ *uma álgebra* G*-graduada e* B *uma subálgebra homogênea de* A*. Se* $b = (\sum b_g) \in B$*, com* $b_g \in A_g$*, devemos ter* $b_g \in B$*.*

Prova. Como B é homogênea temos que $B = \oplus_{g \in G} B_g$, onde $B_g = B \cap A_g$. Logo, se $b \in B$, então podemos escrever $b = \oplus b'_g$ com $b'_g \in B \cap A_g$. Pela unicidade da expressão de b como soma de elementos homogêneos, devemos ter $b'_g = b_g$ e assim $b_g \in B$ para todo $g \in G$. ■

Observação 1.1. *Sejam* $A = \oplus_{g \in G} A_g$ *uma álgebra* G*-graduada e* I *um ideal homogêneo na* G*-graduação. Tem-se que a álgebra* A/I *é naturalmente* G*-graduada, onde as componentes homogêneas são* $(A/I)_g = \{a + I \mid a \in A_g\}$*.*

Observação 1.2. *Sejam* G*,* H *grupos,* $\rho : G \to H$ *um homomorfismo de grupos e* $A = \oplus_{g \in G} A_g$ *uma álgebra* G*-graduada. A* G*-graduação em* A *e o homomorfismo* ρ *induzem uma* H*-graduação em* A*. De fato, sendo* $h \in H$*, definimos* $A_h = \oplus_{g \in \rho^{-1}(h)} A_g$ *e* $A = \oplus_{h \in H} A_h$ *é uma* H*-graduação em* A*.*

A posteriori, será de muita importância um tipo especial de graduação nas álgebras de matrizes quadradas, as chamadas graduações elementares. Visando esse objetivo, apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.3.7. *Seja $A = M_n(K)$ a álgebra das matrizes quadradas de ordem n. Dizemos que $A = \oplus_{g\in G} A_g$ é uma G-graduação elementar em A se existe uma n-upla $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ tal que a componente homogênea A_g é o subespaço gerado pelas matrizes elementares e_{ij} onde i, j são tais que $g = g_i g_j^{-1}$.*

A graduação em $M_n(K)$ no Exemplo 1.3.3 é a graduação elementar induzida pela n-upla $(\overline{0}, \dots, \overline{n-1})$ de elementos de $\mathbb{Z}_n$. Considere $M_n(K) = \oplus_{g\in G} M_n(K)_g$ a G-graduação elementar induzida pela n-upla $(g_1, \dots, g_n)$ de elementos de G. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ é uma r-upla de naturais tais que $\alpha_1 + \cdots \alpha_r = n$ então $A = UT(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ é subálgebra homogênea de $M_n(K)$ e portanto tem uma graduação cujas componentes homogêneas são $A_g = A \cap M_n(K)_g$ para $g \in G$. Note que A_g é o subespaço gerado pelas matrizes elementares e_{ij} de A tais que $g_i g_j^{-1} = g$.

Definição 1.3.8. *Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ uma r-upla de naturais, $A = UT(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ e $\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_n)$ uma n-upla de elementos de G, onde $n = \alpha_1 + \cdots \alpha_r = n$. A G-graduação $A = \oplus A_g$, onde A_g é o subespaço gerado pelas matrizes elementares e_{ij} de A tais que $g_i g_j^{-1} = g$, é chamada **graduação elementar** induzida por $\boldsymbol{g}$.*

A seguir demonstramos que se $UT(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ tem uma graduação em que as matrizes elementares são homogêneas então esta graduação é uma graduação elementar.

Proposição 1.3.9. *Sejam $A = UT(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, G um grupo e $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação. Se as matrizes elementares e_{ij} que pertencem a A são homogêneas então a G-graduação é elementar.*

Prova. Seja $1 \leq i \leq n$, onde $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$. Desde que $e_{ii}^2 = e_{ii}$, tomando $e_{ii} \in A_g$, temos que $e_{ii}^2 \in A_{g^2}$ e daí, $g = g^2$, logo $g = e$, então $e_{ii} \in A_e$. Ademais, como $e_{i(i+1)}$ é homogêneo, seja $h_i \in G$ tal que $e_{i(i+1)} \in A_{h_i}$. Seja $g_1 = e$ e, indutivamente, $g_{i+1} = g_i h_i^{-1}$. Uma vez que

$$e_{ij} = e_{i(i+1)} \dots e_{(j-1)j} \in A_{h_i} \dots A_{h_{(j-1)}} \subset A_{g_i g_j^{-1}},$$

concluímos que a G-graduação em A é elementar induzida pela n-upla $(g_1, \dots, g_n)$. ■

Definição 1.3.10. *Sejam G um grupo, $A = \oplus_{g\in G} A_g$ e $A' = \oplus_{g\in G} A'_g$ duas álgebras G-graduadas. Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A'$ é um homomorfismo G-graduado se $\varphi(A_g) \subset A'_g$, para todo $g \in G$. Analogamente, definimos endomorfismo, isomorfismo e automorfismo G-graduado.*

Observação 1.3.11. *Dizemos que duas G-graduações $A = \oplus_{g\in G} A_g$ e $A = \oplus_{g\in G} A'_g$ na mesma álgebra A são isomorfas quando existe um automorfismo $\varphi : A \to A$ G-graduado, isto é, $\varphi(A_g) = A'_g$, para todo $g \in G$.*

Definição 1.3.12. *Seja A uma álgebra G-graduada. Definimos o suporte de A, e denotamos por $Supp(A)$, como sendo o conjunto dos elementos $g \in G$ tais que a componente homogênea de grau g é diferente de zero, isto é,*

$$Supp\ (A) = \{g \in G \mid A_g \neq 0\}\,.$$

De modo equivalente à álgebra G-graduada, podemos definir espaço vetorial G-graduado:

Definição 1.3.13. *Sejam V um espaço vetorial e G um grupo. Suponhamos que, para cada $g \in G$, exista um subespaço $V_g \subset V$ tal que*

$$V = \oplus_{g\in G} V_g.$$

Então, dizemos que V é um espaço vetorial G-graduado.

Exemplo 1.3.14. *Seja V um espaço vetorial e $\mathscr{L}(V)$ a álgebra definida no Exemplo 1.1.5. Considere $V = \oplus_{g\in G} V_g$ uma graduação pelo grupo G em V, definimos*

$$\mathscr{L}(V)_g = \{f \in \mathscr{L}(V) | f(V_h) \subseteq V_{gh}, \forall h \in G\}.$$

É claro que $\mathscr{L}(V)_g$ é um subespaço de $\mathscr{L}(V)$ e que, para quaisquer $g, h \in G$, vale $\mathscr{L}(V)_g \mathscr{L}(V)_h \subseteq \mathscr{L}(V)_{gh}$. Se V tem dimensão finita ou se G é finito então vale a igualdade

$$\mathscr{L}(V) = \oplus_{g\in G} \mathscr{L}(V)_g,$$

e esta decomposição é uma G-graduação em $\mathscr{L}(V)$.

Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V de elementos homogêneos e sejam $g_i \in G$ tal que $v_i \in V_{g_i}$. O homomorfismo φ_β do Exemplo 1.1.10 é um isomorfismo de álgebras graduadas se consideramos $M_n(K)$ com a graduação elementar induzida pela n-upla $(g_1, \dots, g_n)$.

Definição 1.3.15. *Seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$, isto é, A uma álgebra G- graduada. Se $\dim A_g \leq 1$ para todo $g \in G$, então a G-graduação em A é denominada* ***fina***.

Exemplo 1.3.16. *Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Então $AB = -BA$ e definindo $\mathcal{A}_{(0,0)} = \langle I \rangle$, $\mathcal{A}_{(0,1)} = \langle A \rangle$, $\mathcal{A}_{(1,0)} = \langle B \rangle$ e $\mathcal{A}_{(1,1)} = \langle I \rangle$ obtemos uma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação fina em $\mathcal{A} = M_2(K)$.*

1.4 Ações de Grupos

Nesta seção iremos definir ação e bi-ação de grupos em um conjunto e, também, as noções correspondentes de órbitas, que serão importantes no Capítulo 2. Visando esse objetivo, sigamos com a definição.

Definição 1.4.1. *Sejam G um grupo e X um conjunto qualquer. Uma ação à esquerda de G no conjunto X é uma aplicação $\theta : G \times X \to X$ satisfazendo os seguintes itens:*

(i) $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x)$, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$;

(ii) $\theta(e, x) = x$, onde e denota o elemento neutro de G, para qualquer $x \in X$.

Para $x \in X$ o conjunto $G(x) = \{\theta(g, x) \in X \mid g \in G\}$ é dominado a ***órbita*** *do elemento x de X segundo a ação θ ou a G-**órbita** de x segundo a ação θ.*

De modo análogo definimos ação à direita de G em X e a órbita de um elemento $x \in X$. É comum substituir a notação $\theta(g, x)$ por $g \cdot x$. Observe que se $x, y \in X$ tem órbitas contendo elementos comuns, digamos $g \cdot x = h \cdot y$ para algum $g, h \in G$, então para cada $g' \in G$ temos:

$g' \cdot x = [g'(g^{-1}g)] \cdot x = [(g'g^{-1})h] \cdot y$ e portanto, $G \cdot x \subset G \cdot y$. Da mesma maneira mostramos que $G \cdot y \subset G \cdot x$ e assim que as órbitas de quaisquer dois elementos ou são iguais ou são disjuntas.

Exemplo 1.4.2. *Seja X um conjunto. A aplicação*

$$\sigma \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, x_{\sigma^{-1}(n)})$$

é uma ação à esquerda do grupo S_n no conjunto X^n das n-uplas de elementos de X. Iremos nos referir a esta ação como a ação canônica de S_n em X^n.

Exemplo 1.4.3. *Seja G um grupo. A aplicação $\boldsymbol{g} \cdot h = (g_1 h, \ldots, g_n h)$, onde $h \in G$ e $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ é uma ação à direita de G no conjunto G^n. Note que $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{g} \cdot h$ induzem a mesma graduação elementar em $M_n(K)$.*

Proposição 1.4.4. *Sejam G um grupo, $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ e $\sigma \in S_n$. Se A e B denotam a álgebra $M_n(K)$ com as G-graduações elementares induzidas por $\boldsymbol{g}$ e $\sigma \cdot \boldsymbol{g}$, respectivamente, então A e B são isomorfas como álgebras G-graduadas.*

Prova. Considere a aplicação linear $T : B \to A$ dada por $T(e_{ij}) = e_{\sigma(i)\sigma(j)}$. É claro que T é uma aplicação linear bijetiva, pois fixa a base canônica de $M_n(K)$. Além disso temos $e_{ij}e_{kl} = \delta(jk)e_{il}$ e $\delta(jk) = \delta(\sigma(j)\sigma(k))$, onde δ é o delta de Kronecker, assim concluímos que

$$T(e_{ij}e_{kl}) = T(\delta(jk)e_{il}) = \delta(\sigma(j)\sigma(k))e_{\sigma(i)\sigma(l)} = T(e_{ij})T(e_{kl}).$$

É claro que e_{ij}, como elemento de B, e $T(e_{ij})$, como elemento de A, têm o mesmo grau $g_{\sigma(i)}^{-1}g_{\sigma(j)}$, portanto T é isomorfismo de álgebras graduadas. ■

Definição 1.4.5. *Sejam G e H grupos e X um conjunto qualquer. Uma bi-ação de G (à esquerda) e H (à direita) em X é um par de aplicações $\theta_1 : G \times X \to X$ e $\theta_2 : X \times H \to X$ tais que:*

(i) θ_1 é uma ação à esquerda de G em X;

(ii) θ_2 é uma ação à direita de H em X;

(iii) $(g \cdot x) \cdot h = g \cdot (x \cdot h)$ para quaisquer $g \in G$, $x \in X$ e $h \in H$.

Para cada $x \in X$ o conjunto $O(x) = \{(g \cdot x) \cdot h | g \in G, h \in H\}$ é denominado órbita de x.

Exemplo 1.4.6. *As aplicações dos Exemplos 1.4.3 e 1.4.2 constituem uma bi-ação de S_n à esquerda e de G à direita no conjunto G^n.*

Segue da Proposição 1.4.4 que dois elementos de G^n na mesma órbita da bi-ação de G e S_n em G^n determinam graduações elementares isomorfas em $M_n(K)$, veremos no Capítulo 2 que a recíproca desta afirmação é válida, isto é, se duas n-uplas de G^n induzem graduações elementares isomorfas em $M_n(K)$ então pertencem a mesma órbita da bi-ação.

Veremos no Capítulo 2 um resultado mais geral, o Teorema 2.1.7, válido para álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos, este resultado é dado em termos das órbitas de uma bi-ação de um subgrupo de Young de S_n à esquerda e G à direita no conjunto G^n.

Definição 1.4.7 (Subgrupo de Young). *Seja $\cup_{i=1}^{r}\alpha_i = \{1, 2, \ldots, n\}$ uma partição de $\{1, 2, \ldots, n\}$ em r subconjuntos disjuntos. O subgrupo de Young do grupo simétrico S_n correspondente é o subgrupo*

$$S_{\alpha_1} \times S_{\alpha_2} \times \ldots S_{\alpha_r},$$

onde $S_{\alpha_r} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) = j, \ \forall \ j \notin \alpha_r\}$.

Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ uma r-upla de números naturais tais que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n$. Considere os conjuntos $I_1 = \{1, \ldots, \alpha_1\}$ e

$$I_j = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + 1, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + 2, \ldots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + \alpha_j\},$$

onde $2 \leq j \leq r$, então $\cup_{j=1}^{r} I_j$ é uma partição de $\{1, \ldots, n\}$. Para simplificar a notação denotaremos o subgrupo de Young correspondente por $S_{\alpha_1} \times \cdots \times S_{\alpha_r}$. A restrição ao subgrupo de Young $S_{\alpha_1} \times S_{\alpha_2} \times \ldots S_{\alpha_r}$ da ação de S_n à esquerda em G^n juntamente com a ação de G à direita é uma bi-ação de $S_{\alpha_1} \times S_{\alpha_2} \times \ldots S_{\alpha_r}$ e G no conjunto G^n.

Denote por $\mathscr{X}$ o conjunto de órbitas desta bi-ação. Também, para cada $1 \leq i \leq r$, denote por $\mathscr{X}_i$ o conjunto de órbitas da bi-ação de G à esquerda e S_{α_i} à direita em G^{α_i}. Então, a aplicação $\phi : \mathscr{X} \to \mathscr{X}_1 \times \cdots \times \mathscr{X}_r$, que associa à órbita $O(g_1, \ldots, g_n)$ a r-upla

$$(O(g_1, \ldots, g_{\alpha_1}), O(g_{\alpha_1+1}, \ldots, g_{\alpha_1+\alpha_2}), \ldots, O(g_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}+1}, \ldots, g_{\alpha_1+\cdots+\alpha_r}))$$

é claramente bem definida e sobrejetiva. Mas, para $r > 1$, temos que ϕ não é injetiva. De fato, sejam $g_1 = \ldots = g_{\alpha_1} = g \neq e$, $g_{\alpha_1+1} = \ldots = g_n = e$, e $h_1 = \ldots = h_n = e$. Então,

$$\begin{aligned}
&O(g_1, \ldots, g_{\alpha_1}) = O(h_1, \ldots, h_{\alpha_1}) \\
&O(g_{\alpha_1+1}, \ldots, g_{\alpha_1+\alpha_2}) = O(h_{\alpha_1+1}, \ldots, h_{\alpha_1+\alpha_2}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&O(g_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}+1}, \ldots, g_n) = O(h_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}+1}, \ldots, h_n).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\phi(O(g_1, \ldots, g_n)) = \phi(O(h_1, \ldots, h_n)).$$

Por outro lado, qualquer elemento na órbita de $(h_1, \ldots, h_n)$ possui n componentes iguais e, daí, $(g_1, \ldots, g_n)$ não está nessa órbita, assim

$$O((g_1, \ldots, g_n)) \neq O((h_1, \ldots, h_n)).$$

1.5 Identidades Polinomiais Graduadas

Nessa seção, apresentaremos a definição de identidades polinomiais graduadas e seguiremos com exemplos e observações.

Precisaremos do conceito de álgebra associativa livre G-graduada. Consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois-a-dois disjuntos. Tomemos $X = \cup_{g\in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K\langle X\rangle$. Definimos agora

$$wt(1) = 0 \qquad e \qquad wt(x_1x_2\ldots x_m) = wt(x_1)w_t(x_2)\ldots wt(x_m)$$

onde $wt(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$. Sendo então m um monômio de $K\langle X\rangle$, dizemos que $wt(m)$ é o G-grau de m. Tomando para cada $g \in G$

$$K\langle X\rangle_g = \langle x_{i_1}\cdots x_{i_k} | k \in \mathbb{N}, wt(x_{i_1}\cdots x_{i_k}) = g\rangle$$

temos

$$K\langle X\rangle = \oplus_{g\in G} K\langle X\rangle_g \;\; e \;\; K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subset K\langle X\rangle_{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$, assim $K\langle X\rangle$ é uma álgebra G-graduada denominada a álgebra associativa livre G-graduada.

Lema 1.5.1. *A álgebra G-graduada $K\langle X\rangle$ satisfaz a seguinte propriedade universal: Para toda álgebra G-graduada A, toda função $\phi : X = \cup_{g\in G} X_g \longrightarrow A$ tal que $\phi(X_g) \subseteq A_g$ para todo $g \in G$, pode ser estendida a um único homomorfismo de álgebras graduadas.*

Agora podemos seguir com a definição de identidade polinomial graduada.

Definição 1.5.2. *Seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$) é dito ser uma identidade polinomial graduada da álgebra A, se $f(a_1, \ldots, a_n) \equiv 0$ para quaisquer $a_i \in A_{wt(x_i)}$ com $i = 1, \cdots, n$.*

Daremos agora a definição de T_G-ideal, que é o análogo para o caso de identidades polinomiais graduadas do conceito de T-ideal.

Definição 1.5.3. *Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada. Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é dito ser um T_G-ideal se $\phi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado ϕ de $K\langle X\rangle$. Dado um subconjunto S qualquer de $K\langle X\rangle$, definimos o T_G-ideal gerado por S, que é denotado por $\langle S\rangle^{T_G}$, como sendo a interseção de todos os T_G-ideais de $K\langle X\rangle$ que contém S.*

E claro que $K\langle X\rangle$ é um T_G-ideal que contém S, assim na definição acima $\langle S\rangle^{T_G}$ é a interseção de uma família não vazia de conjuntos. Além disso, não é difícil ver que a interseção de uma família qualquer de T_G-ideais é ainda um T_G-ideal, portanto $\langle S\rangle^{T_G}$ está bem definido e é o menor T_G-ideal que contém S.

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades polinomiais ordinárias e graduadas.

Proposição 1.5.4. *Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G-graduações tais que $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$. Ademais, se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.*

Prova. Consideremos a álgebra associativa livre $K\langle Y\rangle$, onde $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$, e seja $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in T(A)$. Sejam $b_1, \ldots, b_n$ elementos de B. Afirmamos que $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$, daí segue que $f \in T(B)$. Podemos escrever cada b_j como soma de elementos homogêneos de B, isto é, $b_j = \sum_{l=1}^{m_j} b_j^l$, onde para cada $1 \leq l \leq m_j$ existe $g_j^l \in G$ tal que $b_j^l \in B_{g_j^l}$. Sejam $m = m_1 + \cdots + m_n$ e

$$\nu : \{(j,l) | 1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq m_j\} \to \mathbb{N}$$

uma aplicação injetiva tal que $x_{\nu(j,l)} \in X_{g_j^l}$, definimos o polinômio

$$f_1 = f(\sum_{l=1}^{m_1} x_{\nu(1,l)}, \cdots, \sum_{l=1}^{m_n} x_{\nu(n,l)}).$$

Como $f \in T(A)$, segue que $f_1 \in T_G(A)$ e, como $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, temos $f_1 \in T_G(B)$. Como ν é injetora podemos considerar a substituição $x_{\nu(j,l)} \mapsto b_j^l$ em f_1. O resultado desta substituição em $\sum_{l=1}^{m_j} x_{\nu(j,l)}$ é b_j e, portanto, o resultado desta substituição em f_1 é igual a $f(b_1, \ldots, b_n)$. Por outro lado, como $f_1 \in T_G(B)$, o resultado desta substituição em f_1 é zero. Concluímos então que $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$. Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T_G(A) \subseteq T_G(B)$ e $T_G(B) \subseteq T_G(A)$, assim temos $T(A) \subseteq T(B)$ e $T(B) \subseteq T(A)$, donde segue a última afirmação. ■

Observação 1.5.5. *É importante observar que a recíproca do resultado acima é falsa. De fato, sejam A a álgebra $M_2(K)$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação elementar do Exemplo 1.3.3 e B a álgebra $M_2(K)$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. O polinômio $x_1x_2 - x_2x_1$, onde $wt(x_1) = wt(x_2) = \overline{0}$ é uma identidade polinomial graduada para A mas não é identidade graduada para B.*

1.6 A-Módulos e o Radical de Jacobson

Nesta seção, denotaremos por A uma álgebra e por 1_A a sua unidade.

Definição 1.6.1. *Seja A uma álgebra. Definimos um A-módulo (ou módulo sobre A) como sendo um espaço vetorial M, munido de uma aplicação $A \times M \to M$, que a cada par $(a, m) \in A \times M$ associa $a \cdot m \in M$ e satisfaz:*

(i) $(a_1 + a_2)m = (a_1 \cdot m) + (a_2 \cdot m)$

(ii) $a \cdot (m_1 + m_2) = (a \cdot m_1) + (a \cdot m_2)$

(iii) $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$

(iv) $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda \cdot (a \cdot m)$

(v) $1_A \cdot m = m$

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A, m, m_1, m_2 \in M$ e $\lambda \in K$.

Observe que os itens (i), (ii) e (iv) da definição acima significam que o produto $(a, m) \mapsto a \cdot m$ é uma aplicação bilinear.

Definição 1.6.2. *Sejam A uma álgebra e M_1 e M_2 A-módulos. Dizemos que uma transformação linear $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um homomorfismo de A-módulos se $\phi(a \cdot m) = a \cdot \phi(m)$ para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$.*

Definição 1.6.3. *Sejam A uma álgebra e M um A-módulo. Chamamos de endomorfismo do A-módulo M um homomorfismo (de A-módulos) de M em M. Vamos denotar por $End_A(M)$ o conjunto de todos os endomorfismos do A-módulo M.*

Observação 1.6.4. *Veja que se I é um ideal da álgebra A, em particular I é um ideal do anel A. Agora suponhamos que I_1 seja um ideal do anel A. Afirmamos que I_1 é um ideal da álgebra A. De fato, dados $\lambda \in K$ e $a \in I_1$, por I_1 ser um subespaço de A vale que $\lambda a = \lambda(1a) = (\lambda 1)a \in I_1$.*

Por conseguinte, os ideais de A vista como álgebra ou como anel são os mesmos. Devido a isto, os fatos seguintes sobre o radical de Jacobson de anéis podem ser aplicados ao radical de Jacobson de álgebras associativas e unitárias.

Definição 1.6.5 (Radical de Jacobson)**.** *Seja R um anel. Definimos o radical de Jacobson de R, denotado por $J(R)$, como sendo a interseção de todos ideais maximais à direita de R.*

De forma análoga, definimos o radical de Jacobson de uma álgebra A.

Observe que se $R = 0$ é o anel nulo então R não possui ideais próprios. Neste caso, estabelecemos que $J(R) = 0$. Supondo $R \neq 0$, o Lema de Zorn assegura a existência de ideais maximais à direita em R.

Definição 1.6.6. *Seja M um módulo sobre A. Se M é não nulo e os seus únicos submódulos são 0 e M, então dizemos que M é um módulo simples sobre A.*

Proposição 1.6.7. *Seja R um anel. Para $y \in R$, são equivalentes:*

(i) $y \in J(R)$;

(ii) $1 - yx$ *tem inverso à direita em* R, *para todo* $x \in R$;

(iii) $My = \{my \mid m \in M\} = 0$, *para todo* R*-módulo à direita* M *simples.*

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ Por contradição suponhamos a existência de $x \in R$ tal que $1 - yx$ não seja inversível à direita. Assim, existe um ideal maximal à direita $m \subset R$ tal que $(1 - yx)R \subset m$. Daí, $1 = (1 - yx) + yx \in m$, o que é uma contradição.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja M um módulo simples. Suponhamos que existe $m \in M$ tal que $my \neq 0$. Desde que M é simples à direita, temos $(my)R = M$. Assim, existe $x \in R$ de tal sorte que $(my)x = m$ e daí $m(yx - 1) = 0$. Como $yx - 1$ possui inverso à direita, segue $m = 0$, o que é uma contradição.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Se m é um ideal maximal à direita qualquer, tem-se que $M = R/m$ é um R-módulo à direita simples. Uma vez que $(R/m)y = 0$, obtemos $\overline{1}y = \overline{y} = 0$. Decorre que $y \in m$. Desde que m foi tomado arbitrariamente, segue que $y \in J(R)$. ■

Proposição 1.6.8. *Seja R um anel. Para todo $y \in R$, são equivalentes:*

(i) $y \in J(R)$

(ii) $(1 - xyz) \in U(R)$, $\forall x, z \in R$.

Prova.$(ii) \Rightarrow (i)$ Note que a condição (ii) acarreta que $(1 - yz)$ tem inverso à direita para todo $x \in R$. Assim, temos $y \in J(R)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Tomemos $y \in J(R)$ e sejam $x, z \in R$. Como $x \in R$ e $y \in J(R)$, então $xy \in J(R)$ e, assim, pela Proposição anterior, $1 - xyz$ possui inverso à direita, digamos u. Logo $(1 - xyz)u = 1$, isto é, $u - xyzu = 1$. Logo, $u = 1 + (xyz)u$, novamente pela Proposição anterior, u possui inverso à direita e, com isso, u é inversível (pois possui inverso à esquerda e à direita). Portanto, $1 - xyz \in U(R)$ como queríamos. ■

Proposição 1.6.9. *Sejam R um anel e $u \subset J(R)$ um ideal de R. Então, $J(R/u) = J(R)/u$.*

Prova. A demonstração pode ser encontrada em [21]. ■

1.7 O Teorema de Amitsur-Levitzki

Teorema 1.7.1 (de Amitsur-Levitzki). *A álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo K satisfaz a identidade Standard de grau $2n$*

$$s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) \equiv 0.$$

A prova original do teorema de Amistsur-Levitzki é por indução e usa propriedades combinatórias nas unidades matriciais. Existem várias outras provas diferentes subsequentes. Apresentaremos a demostração feita por Rosset. Antes disto, seguiremos com alguns resultados que irão dar sustentação a demostração utilizada.

Proposição 1.7.2. *A álgebra $M_n(K)$ não possui identidade polinomial de grau menor do que $2n$*

Prova. Suponha, por contradição, que $M_n(K)$ possui uma identidade não nula de grau $m < 2n$. Linearizando este polinômio concluímos que existe identidade multilinear para $M_n(K)$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)} = 0,$$

onde $\alpha_\sigma \in K$. Como g é um polinômio não nulo, temos que $\alpha_\sigma \neq 0$ para algum $\sigma \in S_m$. Agora, considere o polinômio

$$h(x_1, \cdots, x_m) = g(x_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, x_{\sigma^{-1}(m)}).$$

Temos que h é uma identidade para $M_n(K)$ e o coeficiente de $x_1 x_2 \cdots x_m$ em h é $\alpha_\sigma \neq 0$. Considere em h a substituição $x_{2k-1} = e_{kk}$, $x_{2k} = e_{k,k+1}$, para cada inteiro k com $1 \leq k \leq \frac{m+1}{2}$, e se m for par, $x_m = e_{qq}$ onde $q = \frac{m}{2}$. O resultado desta substituição em $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)}$ é igual a zero para cada σ diferente da identidade. Portanto, o resultado da substituição em h é a matriz $\alpha_\sigma e_{1q} \neq 0$, um absurdo, visto que h é identidade polinomial para $M_n(K)$. ■

Proposição 1.7.3. *Se S_{2n} é uma identidade para $M_n(\mathbb{Q})$, então S_{2n} é também uma identidade para $M_n(K)$.*

Prova. Desde que $M_n(\mathbb{Z}) \subset M_n(\mathbb{Q})$, segue que se S_{2n} é uma identidade para $M_n(\mathbb{Q})$, então S_{2n} também é uma identidade para $M_n(\mathbb{Z})$. Considere agora o corpo $\mathbb{Z}_p$ (p primo) e o homomorfismo canônico $\phi_p : M_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow M_n(\mathbb{Z}_p)$. Temos que ϕ_p é sobrejetiva, resultando que S_{2n} é também uma identidade para $M_n(\mathbb{Z}_p)$. Como S_{2n} é um polinômio multilinear, então é suficiente provar que S_{2n} se anula nos elementos de uma base de $M_n(K)$, digamos a base formada pelas matrizes elementares e_{ij}. Sendo P o corpo primo de K, temos que 1_K e 0_K pertencem a P e assim as matrizes elementares $e_{ij} \in M_n(P)$. Por outro lado, temos que $P \simeq \mathbb{Q}$, se $charK = 0$ e que $P \simeq \mathbb{Z}_p$, se $charK = p$. Ademais, como S_{2n} é uma identidade para $M_n(\mathbb{Q})$ e para $M_n(\mathbb{Z}_p)$, segue que S_{2n} é também uma identidade para $M_n(P)$. Portanto é também identidade para $M_n(K)$. ■

Um dos temas importantes na discussão das identidades polinomiais da álgebra M_n é a utilização do polinômio característico $p(x) = det(xI_{n\times n} - a)$ de uma matriz $a \in M_n$, à medida que o Teorema de Cayley-Hamilton assegura que $p(a) = 0$. Nesse sentido, usaremos a seguir o polinômio característico de uma matriz para demonstrar alguns resultados posteriores.

Definição 1.7.4. *Definimos o polinômio elementar simétrico de grau m nas variáveis comutativas $t_1, t_2, \cdots, t_n$ como sendo*

$$e_m = e_m(t_1, \cdots, t_n) = \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} t_{i_1} \cdots t_{i_m}.$$

Definição 1.7.5. *Definimos, para cada natural k, o polinômio*

$$p_k = p_k(t_1, \cdots, t_n) = t_1^k + \cdots + t_n^k.$$

A relação entre os polinômios elementos simétricos e os polinômios p_k, são chamadas de fórmula de Newton e são dada por

$$me_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} p_k e_{m-k},$$

para $m = 1, 2, \cdots, n$.

Lema 1.7.6. *Sejam A uma álgebra comutativa sobre $\mathbb{Q}$ e $a \in M_n(A)$. Se $p(x) = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m x^{n-m}$ é o polinômio característico de a, então*

$$\alpha_m = \sum_{\lambda} q_\lambda tr(a^{\lambda_1}) \cdots tr(a^{\lambda_n}),$$

onde a soma é feita sobre todas as partições λ de n, $m > 0$ e $q_\lambda \in \mathbb{Q}$ não depende da matriz a.

Prova. Pode ser encontrada em [19]. ■

Lema 1.7.7. *Seja A uma álgebra comutativa sobre $\mathbb{Q}$. Se $a \in M_n(A)$ é tal que $tr(a) = tr(a^2) = \cdots = tr(a^n) = 0$, então $a^n = 0$.*

Prova. Sendo $p(x) = x^n + \sum_{m=1}^{n} \alpha_m$ o polinômio característico da matriz a, temos $p(a) = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m a^{n-m}$. Desde que os m são dados como no Lema 1.7.6 e por hipótese $tr(a) = tr(a^2) = \cdots = tr(a^n) = 0$, segue que os coeficientes $\alpha_m = 0$ para $m = 1, \cdots, n$. Logo, $p(a) = a^n$, resultando que $a^n = 0$. ■

Lema 1.7.8. *Sejam E a álgebra de Grassmann sobre $\mathbb{Q}$ e E_1 o subespaço de E gerado pelo conjunto $\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid k \text{ impar}\}$. Então $tr(ab) = -tr(ba)$ para quaisquer $a, b \in M_n(E_1)$.*

Prova. Pode ser encontrada em [19]. ■

Prova. **[Teorema de Amitsur- Levitzk]** Pela Proposição 1.7.3, podemos assumir $K = \mathbb{Q}$. Considere a álgebra de Grasmann $E = E_0 \oplus E_1$ sobre $\mathbb{Q}$. Considere $a = a_1 e_1 + \cdots + a_{2n} e_{2n} \in M_n(E_1)$, onde $a_1, \cdots, a_{2n} \in M_n(\mathbb{Q})$. Desde que

$$e_{\sigma(1)} \cdots e_{\sigma(2n)} = (-1)^{\sigma} e_1 \cdots e_{2n},$$

para toda $\sigma \in S_{2n}$, temos

$$a^{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} a_{\sigma(1)} e_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(2n)} e_{\sigma(2n)} = S_{2n}(a_1, \cdots, a_{2n}) e_1 \cdots e_{2n}. \tag{1.10}$$

Se $a, a^{2i-1} \in M_n(E_1)$ para todo $i = 1, \cdots, n$, então, pelo Lema 1.7.8, temos

$$tr(a^{2i}) = tr(aa^{2i-1}) = -tr(a^{2i-1}a) = -tr(a^{2i}),$$

resultando que $tr(a^{2i}) = 0$. Sendo E_0 uma subálgebra comutativa de E e observando que $a^2 \in M_n(E_0)$, temos $a^{2n} = 0$, pelo Lema 1.7.6. Substituindo $a^{2n} = 0$ em (1.10), obtemos $S_{2n}(a_1, \cdots, a_{2n}) e_1 \cdots e_{2n} = 0$. Como $e_1 \cdots e_{2n}$ é não nulo, concluímos que $S_{2n}(a_1, \cdots, a_{2n}) = 0$. ■

1.8 O Teorema de Lewin

Sejam A e B K-álgebras com T-ideais $T(A)$ e $T(B)$, respectivamente. O produto dos T-ideais $T(A)T(B)$ é ainda um T-ideal. Lewin, em [19], apresentou a construção de uma K-álgebra C contendo A e B tal que $T(C) = T(A)T(B)$. Com isso, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 1.8.1. *Seja R um $(K\langle X\rangle, K\langle X\rangle)$-bimódulo livre com os geradores livres $r_1, r_2, \ldots$, e sejam U e V ideais de $K\langle X\rangle$. Sejam*

$$\Pi_U : K\langle X\rangle \longrightarrow \frac{K\langle X\rangle}{U} \quad e \quad \Pi_V : K\langle X\rangle \longrightarrow \frac{K\langle X\rangle}{V},$$

os correspondentes epimorfismos canônicos. Considere ainda, a derivação $\delta : K\langle X\rangle \to R$ definida por $\delta(x_i) = r_i$ para $i \geq 1$ e seja

$$\delta^1 : K\langle X\rangle \to \frac{R}{UR + RV},$$

definida por

$$\delta^1(f) = \delta(f) + (UR + RV).$$

Então, a aplicação linear

$$\Psi : K\langle X\rangle \to \begin{pmatrix} \frac{K\langle X\rangle}{U} & \frac{R}{UR+RV} \\ 0 & \frac{K\langle X\rangle}{V}, \end{pmatrix}$$

definida por

$$f \to \Psi(f) = \begin{pmatrix} \Pi_U(f) & \delta^1(f) \\ 0 & \Pi_V(f) \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo de álgebras e $Ker(\Psi) = UV$.

Prova. A prova deste teorema pode ser encontrada em [21]. ■

O Teorema de Lewin acima foi utilizado por Giambruno e Zaicev em [18] para descrever as identidades polinomiais da álgebra $UT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ de matrizes triangulares superiores em blocos em termos das identidades dos blocos $M_{\alpha_1}, \ldots, M_{\alpha_r}$.

Teorema 1.8.2. *Se $UT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ é uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos sobre um corpo infinito K então*

$$T(UT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)) = T(M_{\alpha_1}) \cdots T(M_{\alpha_r}).$$

Prova. Veja [19, Teorema 1.9.1]. ■

Capítulo 2

Graduações Elementares em Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

O presente capítulo foi reservado para a apresentação do artigo [8]. Durante todo o capítulo, a menos que se diga o contrário, iremos considerar G um grupo qualquer e K um corpo.

Estudaremos graduações por grupos na álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos $UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, sobre K, tais que todas as matrizes elementares serão elementos homogêneos. Iremos descrever essas graduações, a menos de isomorfismos graduados, como álgebras de endomorfismos de cadeias de subespaços graduados de um espaço vetorial graduado e, classificaremo-nas como órbitas de uma certa bi-ação de um subgrupo de Young e do grupo G no conjunto G^n. Em particular, os resultados mostrados valem para álgebras de matrizes triangulares superiores e álgebras de matrizes.

2.1 Teoremas Iniciais

Nessa seção iremos expor os dois principais resultados do capítulo, cujas demonstrações estão nas páginas $38, 39$ e 40. Antes disso, vamos definir alguns conceitos que se fazem necessários para o andamento do capítulo. Por simplicidade de notação, iremos adotar $A = UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Iniciaremos esta seção expondo a definição de cadeias (de subespaços graduados) em um espaço (graduado) V.

Definição 2.1.1. *Seja V um espaço vetorial graduado de dimensão n e seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ uma $r-$upla de inteiros positivos, onde r é um inteiro positivo com $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r = n$. Definimos uma α-cadeia graduada $\mathscr{F}$ como sendo uma sequência $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$, onde V_i é um subespaço homogêneo de V de dimensão $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i$ para cada $1 \leq i \leq r$.*

A seguir apresentamos a definição de morfismo entre α-cadeias graduadas.

Definição 2.1.2. *Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ uma r-upla de inteiros positivos e sejam $\mathscr{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$ e $\mathscr{F}' : W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_r = W$ duas α-cadeias graduadas. Um morfismo*

$$f : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$$

de α-cadeias é uma transformação linear entre espaços vetoriais graduados

$$f : V \to W$$

tal que $f(V_i) \subseteq W_i$ para todo $1 \leq i \leq r$.

Observação 2.1.3. *As graduações elementares em álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos também são chamadas de boas graduações.*

Seja $\mathrm{End}(\mathscr{F})$ o espaço de todos os endomorfismos de $\mathscr{F}$, munido da composição de funções, $\mathrm{End}(\mathscr{F})$ é uma álgebra isomórfica à álgebra A. A G-graduação em $\mathrm{End}(\mathscr{F})$ está descrita na Proposição 2.2.6. Mostraremos que uma G-graduação em A é elementar se, e somente se, é isomórfica a uma álgebra graduada da forma $\mathrm{End}(\mathscr{F})$ para uma α-cadeia G-graduada $\mathscr{F}$.

Definição 2.1.4. *Sejam $V = \oplus_{g\in G} V_g$ um espaço vetorial G-graduado e $\sigma \in G$. Definimos*

(i) σ-suspensão à direita de V como sendo o espaço vetorial G-graduado $V(\sigma)$, onde a G-graduação é dada por $V(\sigma)_g = V_{g\sigma}$ para todo $g \in G$.

(ii) a σ-suspensão à esquerda de V, denotada por $(\sigma)V$, onde a G-graduação é dada por $(\sigma)V_g = V_{\sigma g}$ para todo $g \in G$.

Observação 2.1.5. *Note que $(\sigma)(V(\tau)) = ((\sigma)V)(\tau)$ e $(\tau)((\sigma)V) = (\sigma\tau)V$ para quaisquer $\sigma, \tau \in G$.*

Apesar da suspensão $V(\sigma)$ fornecer uma nova G-graduação, os conjuntos $V_i(\sigma)$ e V_i permanecem com os mesmos elementos. A graduação em V induz nos subespaços homogêneos V_i uma graduação, a saber $V_i = \oplus_{g\in G}(V_g \cap V_i)$ para cada $i \in G$. Note que V_i é um subespaço homogêneo de $V(\sigma)$ e a graduação induzida $V_i = \oplus_{g\in G}(V(\sigma)_g \cap V_i)$ é $V_i(\sigma)$. Iremos denotar por $\mathscr{F}(\sigma)$ a cadeia G-graduada $V_1(\sigma) \subset V_2(\sigma) \subset \cdots \subset V_r(\sigma)$, onde $\mathscr{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$.

Nosso objetivo agora será classificar boas graduações também chamadas de graduações elementares para a álgebra A. Para tanto:

Teorema 2.1.6. *Sejam $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ duas α-cadeias G-graduadas. Então, End($\mathscr{F}$) $\simeq$ End($\mathscr{F}'$) como álgebras G-graduadas se, e somente se, existe $\sigma \in G$ tal que $\mathscr{F}' \simeq \mathscr{F}(\sigma)$ como α- cadeias graduadas.*

Como consequência, obtemos a classificação de G-graduações elementares em A.

Teorema 2.1.7. *Sejam $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ uma r-upla de inteiros positivos e $A = UT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ a álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos correspondente. Existe uma bijeção entre os tipos de isomorfismo de G-graduações elementares em A e as órbitas da bi-ação do subgrupo de Young $S_{\alpha_1} \times \cdots \times S_{\alpha_r}$ de S_n, onde $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, à esquerda e o grupo G à direita no conjunto G^n.*

A demonstração do Teorema 2.1.6 será apresentada na Seção 2.4 e a demonstração do Teorema 2.1.7 na Seção 2.5.

2.2 Graduação Elementar como Álgebra Endomorfismos de Cadeias Graduadas

Nesta seção α denota uma r-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ de inteiros positivos e V um espaço vetorial de dimensão $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$. Seja

$$\mathscr{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$$

uma α-cadeia. Denotemos $I_1 = \{1, \ldots, \alpha_1\}$ e para $2 \leq j \leq r$

$$I_j = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + 1, \ldots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_j\}.$$

Note que podemos escolher uma base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V de modo que o subconjunto $\{v_1, \ldots, v_{\alpha_1+\cdots+\alpha_j}\}$ de B é uma base de V_j. Para cada $i \in I_p$ e $j \in I_q$, com $p \leq q$, consideramos $E_{ij} \in \mathrm{End}(\mathscr{F})$ definido por $E_{ij}(v_t) = \delta_{jt}v_i$ para todo $1 \leq t \leq n$. É simples verificar que E_{ij} é um endomorfismo de $\mathscr{F}$ e também é claro que o subconjunto $\{E_{ij}|i \in I_p, j \in I_q, 1 \leq p \leq q \leq r\}$ de $\mathrm{End}(\mathscr{F})$ é linearmente independente.

Proposição 2.2.1. *O conjunto $\{E_{ij}|i \in I_p, j \in I_q, 1 \leq p \leq q \leq r\}$ é uma base para End($\mathscr{F}$).*

Prova. Resta apenas mostrar que este conjunto gera $\mathrm{End}(\mathscr{F})$. Seja $f \in \mathrm{End}(\mathscr{F})$, podemos escrever $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}E_{ij}$. Sejam k, l tais que $\alpha_{kl} \neq 0$ e sejam p, q tais que $k \in I_p$ e $l \in I_q$, afirmamos que $p \leq q$. De fato, neste caso, $v_l \in V_q$ e, portanto, $f(v_l) \in V_q$. Temos

$$f(v_l) = \sum_i \alpha_{il}v_i,$$

e portanto $\alpha_{il} = 0$ se $v_i \notin \{v_1, \ldots, v_{\alpha_1+\cdots+\alpha_q}\}$. Como $\alpha_{kl} \neq 0$ segue que v_k pertence a $\{v_1, \ldots, v_{\alpha_1+\cdots+\alpha_q}\}$. Assim, concluímos que $k \in I_1 \cup \cdots \cup I_q$, de onde segue que $p \leq q$. Desta afirmação segue que $\{E_{ij}|i \in I_p, j \in I_q, 1 \leq p \leq q \leq r\}$ gera $\mathrm{End}(\mathscr{F})$. ■

Lembramos que o conjunto $\{e_{ij}|i \in I_p, j \in I_q, 1 \leq p \leq q \leq r\}$ de matrizes elementares é uma base de A. A seguir utilizamos a proposição acima para exibir um isomorfismo entre $\mathrm{End}(\mathscr{F})$ e A.

Proposição 2.2.2. *A aplicação End($\mathscr{F}$) $\to A$ dada por $E_{ij} \mapsto e_{ij}$, onde $i \in I_p, j \in I_q, 1 \leq p \leq q \leq r$ é um isomorfismo de álgebras.*

Prova. Esta aplicação é um isomorfismo de espaços vetoriais pois leva uma base de $\mathrm{End}(\mathscr{F})$ em uma base de A. Além disso, é claro que

$$E_{ij}E_{lt}(v_h) = E_{ij}(\delta_{th}(v_l)) = \delta_{th}\delta_{jl}(v_i) = \delta_{jl}E_{it}(v_h).$$

Logo $E_{ij}E_{lt} = \delta_{jl}E_{it}$ para quaisquer i, j, l, t e como $e_{ij}e_{lt} = \delta_{jl}e_{it}$ concluímos que esta aplicação é um isomorfismo de álgebras. ■

Definição 2.2.3. *Sejam G um grupo e $V = \oplus_{g\in G}V_g$ um espaço vetorial G- graduado. Diremos que a α-cadeia $\mathscr{F} : V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_r = V$ é G-graduada se cada V_i é um subespaço homogêneo de V.*

Nosso objetivo agora é introduzir uma G-graduação na álgebra de endomorfismos de uma α-cadeia graduada $\mathscr{F}$.

Notação 2.2.4. *Seja $\mathscr{F}$ uma α-cadeia graduada por um grupo G. Para cada $\sigma \in G$, consideramos o espaço*

$$End(\mathscr{F})_\sigma = \{f \in End(\mathscr{F}) | f(V_g) \subseteq V_{\sigma g} \text{ para todo } g \in G\}.$$

A seguir mostramos que esta família de subespaços é uma G-graduação em $\mathrm{End}(\mathscr{F})$.

Proposição 2.2.5. *Seja $\mathscr{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$ uma α-cadeia graduada por um grupo G. Então $End(\mathscr{F}) = \oplus_{\sigma \in G} End(\mathscr{F})_\sigma$ e essa decomposição é uma G-graduação em $End(\mathscr{F})$.*

Prova. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V consistindo apenas de elementos homogêneos, digamos v_i tem grau g_i para cada $1 \leq i \leq n$. Denotaremos por V_F a soma das componentes homogêneas indexadas por elementos de F, isto é, $V_F = \oplus_{g \in F} V_g$. Seja $f \in \mathrm{End}(\mathscr{F})$, então $f(v_i) \in V_{F_i}$ para algum subconjunto finito $F_i \subseteq G$. De fato, podemos escrever $f(v_i) = \sum_{g \in G} f(v_i)_g$ como soma de elementos homogêneos $f(v_i)_g \in V_g$ e basta tomar F_i como o conjunto dos elementos h de G tais que $f(v_i)_h \neq 0$. Em particular, temos que $f(v_i) = \sum_{h \in F_i} f(v_i)_h$.

Seja $F = \cup_{1 \leq i \leq n} F_i g_i^{-1}$, como F_i é finito, e portanto $F_i g_i^{-1}$ também é finito, concluímos que F é um subconjunto finito de G, uma vez que é a união finita de subconjuntos finitos. Para um $\sigma \in F$, definimos $f_\sigma \in \mathrm{End}(V)$ como sendo a transformação linear tal que $f_\sigma(v_g) = f(v_g)_{\sigma g}$ para todo $v_g \in V_g$. Como $f(V_i) \subset V_i$ e V_i é um subespaço homogêneo de V, temos que $f_\sigma(V_i) \subset V_i$ para todo i, e portanto $f_\sigma \in \mathrm{End}(\mathscr{F})$. Então claramente $f_\sigma \in \mathrm{End}(\mathscr{F})_\sigma$. Note que podemos decompor $f(v_i)$ como soma de componentes $f(v_i)_h$ para cada $h \in F_i$, e assim temos que

$$\sum_{\sigma \in F} f_\sigma(v_i) = \sum_{\sigma \in F} f(v_i)_{\sigma g_i} = \sum_{\sigma \in F_i g_i^{-1}} f(v_i)_{\sigma g_i} = \sum_{h \in F_i} f(v_i)_h = f(v_i).$$

De fato, a primeira igualdade segue da definição de f_σ, a segunda igualdade é consequência do fato que a componente σg_i é zero quando $\sigma \notin F_i g_i^{-1}$, a terceira igualdade ocorre uma vez que se $\sigma \in F_i g_i^{-1}$, então existe um único $h \in F_i$ tal que $\sigma = h g_i^{-1}$ e assim, $\sigma \in F_i g_i^{-1}$ implica que $h = \sigma g_i$, finalmente a última igualdade é consequência da definição de F_i. Portanto, $f = \sum_{\sigma \in F} f_\sigma$, e isso mostra que $f \in \sum_{\sigma \in G} \mathrm{End}(\mathscr{F})_\sigma$. Agora, suponhamos que $\sum_{\sigma \in F} f_\sigma = 0$. Desta forma temos que

$$0 = \sum_{\sigma \in F} f_\sigma(v_i),$$

como $f_\sigma(v_i) \in V_{\sigma g_i}$ os termos do somatório pertencem a componentes homogêneas distintas e portanto segue que $f_\sigma(v_i) = 0$ para $i = 1, \dots, n$ e $\sigma \in F$. Como o conjunto $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ é uma base (homogênea) para V concluímos que $f_\sigma = 0$ para qualquer σ em F. Logo,

$$\mathrm{End}(\mathscr{F}) = \oplus_{\sigma \in G} \mathrm{End}(\mathscr{F})_\sigma.$$

Finalmente, se $f \in \mathrm{End}(\mathscr{F})_\sigma$ e $g \in \mathrm{End}(\mathscr{F})_\tau$, então se $v \in V_h$ temos $g(v) \in V_{\tau h}$ temos que $f(g(v)) \subseteq V_{\sigma\tau h}$ e portanto, $fg \in \mathrm{End}(\mathscr{F})_{\sigma\tau}$. ■

De agora em diante sempre que $\mathscr{F}$ for uma α-cadeia graduada por um grupo G iremos considerar em $\mathrm{End}(\mathscr{F})$ a G-graduação da proposição acima.

Proposição 2.2.6. *Se $\mathscr{F}$ é uma α-cadeia G-graduada, então a álgebra G-graduada End($\mathscr{F}$) é isomorfa a A com uma graduação elementar. Reciprocamente, se A tem uma G-graduação elementar, então existe uma α-cadeia G-graduada $\mathscr{F}$ tal que A é isomorfa, como álgebra graduada, a End($\mathscr{F}$).*

Prova. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V consistindo de elementos homogêneos e seja g_i o grau de v_i, para $i = 1, \dots, n$. Então, para todo $i \in I_p$ e $j \in I_q$ com $p \leq q$, o elemento E_{ij} é homogêneo de grau $g_i g_j^{-1}$ em $\mathrm{End}(\mathscr{F})$. Se A tem a graduação elementar induzida por $(g_1, \dots, g_n)$ então a matriz elementar e_{ij} é homogênea de grau $g_i g_j^{-1}$ e o isomorfismo da Proposição 2.2.2 é um isomorfismo de álgebras graduadas.

Para a recíproca considerarmos uma G-graduação elementar em A induzida por uma n-upla $(g_1, \dots, g_n)$. Lembramos que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ e $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$. Seja V um espaço vetorial de dimensão n, consideramos em V a G-graduação tal que v_i é homogêneo de grau g_i e definimos V_i como sendo o subespaço gerado por $\{v_1, \dots, v_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_i}\}$. Então cada V_i é subespaço homogêneo de V e $\mathscr{F} : V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_r = V$ é uma α-cadeia graduada. Note que neste caso $E_{ij} \in \mathrm{End}(\mathscr{F})$ é homogênea de grau $g_i g_j^{-1}$. Como A tem a graduação elementar induzida por $(g_1, \dots, g_n)$ a matriz elementar e_{ij} tem grau $g_i g_j^{-1}$. Segue daí que o isomorfismo da Proposição 2.2.2 é um isomorfismo de álgebras graduadas. ■

Como consequência imediata da proposição acima obtemos o seguinte:

Corolário 2.2.7. *Os tipos de isomorfismo de G-graduações elementares em A são exatamente os tipos de isomorfismo de álgebras G-graduadas da forma End($\mathscr{F}$), no qual $\mathscr{F}$ é uma α-cadeia G-graduada.*

Proposição 2.2.8. *A aplicação que associa a uma graduação elementar em A a $(n-1)$-upla*

$$(deg\ e_{12}, deg\ e_{23}, \ldots, deg\ e_{n-1,n}) \in G^{n-1},$$

é uma bijeção do conjunto de todas as G-graduações elementares em A em G^{n-1}.

Prova. Seja $(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}) \in G^{n-1}$, é claro que se A tem a graduação elementar induzida pela n-upla $(h_1, \ldots, h_{n-1}, e)$ então

$$\deg e_{12} = h_1, \deg e_{23} = h_2, \ldots, \deg e_{n-1,n} = h_{n-1}$$

e portanto esta aplicação é sobrejetiva. Agora, considere A com uma graduação elementar e seja e_{ij} uma matriz elementar na base canônica de A. Se $i \leq j$ então $e_{ij} = e_{i,i+1} \cdots e_{j-1,j}$ e, portanto,

$$\deg e_{ij} = \deg e_{ii+1} \cdots \deg e_{j-1j}.$$

Se $i > j$, então, como $e_{ij}e_{ji} = e_{ii}$, concluímos que $\deg e_{ij} = \deg e_{ji}^{-1}$ e

$$\deg e_{ij} = (\deg e_{jj+1} \cdots \deg e_{i-1i})^{-1}.$$

Daí segue a injetividade da aplicação. ■

O objetivo do restante do capítulo é distinguir os tipos de isomorfismo entre essas $|G^{n-1}|$ graduações elementares em A.

2.3 Isomorfismos entre as Álgebras de Endomorfismos Graduadas

Ao longo dessa seção, consideramos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n$, e $\mathscr{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$ e $\mathscr{F}' : W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_r = W$ duas α-cadeias G-graduadas.

Lema 2.3.1. *Se End$\mathscr{F}$ e End$\mathscr{F}'$ são isomorfas como álgebras G-graduadas, então $W \simeq V(\sigma)$ como espaços vetoriais G-graduados, para algum $\sigma \in G$.*

Prova. Seja $\phi : \mathrm{End}(\mathscr{F}) \to \mathrm{End}(\mathscr{F}')$ um isomorfismo de álgebras G-graduadas. Consideramos a base $\{E_{ij} \mid i \in I_p, j \in I_q, 1 \leq p \leq q \leq r\}$ de $\mathrm{End}(\mathscr{F})$ descrita no início da Seção 2.2. Desde que $\{E'_{ij} \mid i \in I_p, j \in I_q, 1 \leq p \leq q \leq r\}$ é uma base para $\mathrm{End}(\mathscr{F}')$, consideremos $E'_{ij} = \phi(E_{ij})$ para cada par (i, j) tal que $i \in I_p, j \in I_q, 1 \leq p \leq q \leq r$.

As aplicações E'_{ii} com $1 \leq i \leq n$ são homogêneas de grau e, assim são morfismos de espaços vetoriais graduados. Assim, temos que $Q_i = \mathrm{Im}(E'_{ii})$ é um subespaço vetorial graduado de W. Observe que $E_{ii}E_{ii} = E_{ii}$, $E_{ii}E_{jj} = 0$, sempre que $i \neq j$ e $\sum E_{ii} = Id$, ou seja, $(E_{ii})_{1\leq i\leq n}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais em $\mathrm{End}(\mathscr{F})$, então também é $(E'_{ii})_{1\leq i\leq n}$ em $\mathrm{End}(\mathscr{F}')$. Assim dado $w \in Im(E'_{ii})$ temos

$$w = Id(w) = E'_{11}(w) + E'_{22}(w) + \ldots + E'_{nn}(w).$$

Além disso, suponha que $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 0$ com $w_i \in Q_i$, $i = 1, \ldots, n$. Como as aplicações E'_{ii} formam um sistema completo de idempotentes ortogonais concluímos que $E'_{ii}w_j = \delta_{ij}w_j$. Portanto, $0 = E'_{ii}(w_1)+\ldots+E'_{ii}(w_n) = w_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim, $W = \oplus_{1\leq i\leq n}Q_i$. Como W tem dimensão n e cada Q_i é não nulo (visto que $E'_{ii} \neq 0$), concluímos que $\dim(Q_i) = 1$ para todo i.

Afirmamos que

$$W = Q_1 \oplus (g_1g_2^{-1})Q_1 \oplus \cdots \oplus (g_1g_n^{-1})Q_1. \tag{2.1}$$

Seja $1 \leq j \leq n$. Se $x \in Q_j$, então $E'_{1j}(x) = E'_{11}(E'_{1j}(x)) \in Q_1$, segue que E'_{1j} induz um morfismo de grau $g_1g_j^{-1}$ de Q_j para Q_1. Como $E'_{1j}E'_{ii} = 0$ se $i \neq j$ concluímos que $E'_{1j}(Q_i) = 0$ neste caso, mas $E'_{1j} \neq 0$ e como $W = \oplus_{1\leq i\leq n}Q_i$ concluímos que $E'_{1j}(Q_j) \neq 0$. Como Q_j e Q_1 tem dimensão 1 segue que E'_{1j} é um isomorfismo de espaços vetoriais. Portanto E'_{1j} é um isomorfismo de espaços vetoriais graduados de Q_j em $(g_1g_j^{-1})Q_1$. A igualdade (2.1) agora segue de $W = \oplus_{1\leq i\leq n}Q_i$.

Agora, se trabalharmos de forma semelhante com o sistema completo de idempotentes homogêneos ortogonais $(E_{ii})_{1\leq i\leq n}$ de $\mathrm{End}(\mathscr{F})$, e denotarmos $R_i = \mathrm{Im}(E_{ii}) = Kv_i$, teremos que

$$V = R_1 \oplus (g_1g_2^{-1})R_1 \oplus \cdots \oplus (g_1g_n^{-1})R_1$$

Como R_1 e Q_1 são espaços vetoriais graduados de dimensão 1, existe $\sigma \in G$ tal que

$$Q_1 \simeq R_1(\sigma).$$

Então teremos que $W \simeq V(\sigma)$. ■

O espaço vetorial W possui uma estrutura de $\mathrm{End}(\mathscr{F}')$-módulo com ação $f \cdot w = f(w)$ para todo $f \in \mathrm{End}(\mathscr{F}')$ e $w \in W$. Na verdade é simples verificar, diretamente da definição abaixo, que W é até mesmo um $\mathrm{End}(\mathscr{F}')$-módulo graduado.

Definição 2.3.2. *Seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada por um grupo G. Um A-módulo graduado é um A-módulo M juntamente com uma família de subespaços $\{M_\tau \mid \tau \in G\}$ de modo que $M = \oplus_{\tau\in G} M_\tau$ e $A_g M_\tau \subseteq M_{g\tau}$ para quaisquer $g, \tau \in G$.*

Semelhantemente, V é um $\mathrm{End}(\mathscr{F})$-módulo graduado, assim como toda suspensão $V(\sigma)$ à direita.

Proposição 2.3.3. *Se $\phi : End(\mathscr{F}) \to End(\mathscr{F}')$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas, então existe $\sigma \in G$ tal que o $End(\mathscr{F})$-módulo graduado $V(\sigma)$ é ϕ-isomórfico ao $End(\mathscr{F}')$-módulo graduado W, i.e., existe um isomorfismo de espaços vetoriais graduados $\gamma : V(\sigma) \to W$ tal que $\gamma(fv) = \phi(f)\gamma(v)$ para todo $f \in End(\mathscr{F})$ e todo $v \in V$.*

Prova. Mantemos a notação utilizada na demonstração do Lema 2.3.1. Fixe algum isomorfismo $\gamma_1 : R_1(\sigma) \to Q_1$. Para quaisquer i, j tais que $i \in I_p$, $j \in I_q$ com $1 \leq p \leq q \leq r$, denotamos por $\tilde{E}_{ij} : R_j \to R_i$ a restrição de E_{ij} a R_j. Nós podemos ainda considerar $\tilde{E}_{ij}$ como um isomorfismo (de espaços vetoriais graduados) entre $R_j(\sigma)$ e $R_i(\sigma)$.

Notamos que $E_{1j} = E_{1i}E_{ij}$ implica $\tilde{E}_{1j} = \tilde{E}_{1i}\tilde{E}_{ij}$, e daí

$$\tilde{E}_{1i}^{-1}\tilde{E}_{1j} = \tilde{E}_{ij}. \tag{2.2}$$

Como $\tilde{E}_{1i}$, $\tilde{E}'_{1i}$ e γ_1 são isomorfismos, então deve existir um isomorfismo de espaços vetoriais graduados $\gamma_i : R_i(\sigma) \to Q_i$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} R_i(\sigma) \arrow[r, "\tilde{E}_{1i}"] \arrow[d, "\gamma_i"'] & R_1(\sigma) \arrow[d, "\gamma_1"] \\ Q_i \arrow[r, "\tilde{E}'_{1i}"'] & Q_1 \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Então, temos

$$\gamma_i = \tilde{E}_{1i}'^{-1}\gamma_1\tilde{E}_{1i}. \tag{2.4}$$

Assim, dados i, j tais que $i \in I_p$, $j \in I_q$ com $1 \leq p \leq q \leq r$, temos que

$$\begin{aligned} \gamma_i\tilde{E}_{ij} &= \gamma_i\tilde{E}_{1i}^{-1}\tilde{E}_{1j} && \text{de (2.2)} \\ &= \tilde{E}_{1i}^{-1}\gamma_1\tilde{E}_{1j} && \text{de (2.4)} \\ &= \tilde{E}_{1i}'^{-1}\tilde{E}'_{1j}\gamma_j && \text{de (2.4) para } j \\ &= \tilde{E}'_{ij}\gamma_j && \text{de (2.2) para } \tilde{E}'_{ij}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\gamma_i \tilde{E}_{ij} = \tilde{E}'_{ij}\gamma_j. \tag{2.5}$$

Seja $\gamma : V(\sigma) \to W$ a soma direta dos isomorfismos $(\gamma_i)_{1\leq i\leq n}$. Então γ é um isomorfismo de espaços vetoriais graduados. Mostraremos que também é um ϕ-isomorfismo. Basta provarmos que $\gamma(E_{ij}(v)) = E'_{ij}(\gamma(v))$ para quaisquer i, j e $v \in V$.

Se $v \in R_t(\sigma)$, com $t \neq j$, então $\gamma(v) \in Q_t$ e $E'_{ij}(\gamma(v)) = 0 = \gamma(E_{ij}(v))$, visto que $E_{ij}(v) = 0$. Se $v \in R_j(\sigma)$, então $E_{ij}(v) \in R_i(\sigma)$, donde $\gamma(E_{ij}(v)) = \gamma_i(E_{ij}(v))$, e $E'_{ij}(\gamma(v)) = E'_{ij}(\gamma_j(v))$, e a igualdade almejada segue de (2.5). ■

2.4 Demonstração do Teorema 2.1.6

Primeiramente mostraremos como os subespaços da cadeia $\mathscr{F}$ podem ser recuperados a partir do End($\mathscr{F}$)-módulo à esquerda de V.

Proposição 2.4.1. *Seja $\mathscr{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$ uma α-cadeia. Então todos os submódulos do End($\mathscr{F}$)-módulo V são $0, V_1, \ldots, V_r$.*

Prova. É claro que V_i é um End($\mathscr{F}$)-submódulo de V para todo i. Seja X um End($\mathscr{F}$)-submódulo não nulo. Considere $v = \sum_i \alpha_i v_i \in X - \{0\}$ tal que existe i_0 com $\alpha_{i_0} \neq 0$, $i_0 \in I_p$ e p o maior possível (quando tomamos v em X).

Então, claramente $X \subseteq V_p$. Por outro lado, se $j \in I_q$ com $q \leq p$, então $\alpha_{i_0} v_j = E_{ji_0} v \in X$, donde $v_j \in X$, ou seja, $V_p \subseteq X$ e assim, $X = V_p$. Portanto, os submódulos não nulos de End($\mathscr{F}$)-módulo são os V_p com $p = 1, 2, \ldots, r$. E por 0 ser um submódulo de End($\mathscr{F}$)-módulo, o resultado segue. ■

Estamos aptos a demonstrar o primeiro resultado principal do capítulo.

Demonstração do Teorema 2.1.6. Se $\mathscr{F}' \simeq \mathscr{F}(\sigma)$, então claramente temos End($\mathscr{F}'$) $\simeq$ End($\mathscr{F}$) como álgebras graduadas, visto que End($\mathscr{F}(\sigma)$) = End($\mathscr{F}$).

Assuma que ϕ : End($\mathscr{F}$) $\to$ End($\mathscr{F}'$) é um isomorfismo de álgebras graduadas. Então, pela Proposição 2.3.3, existe $\sigma \in G$ e um ϕ-isomorfismo $\gamma : V(\sigma) \to W$ entre o End($\mathscr{F}$)-módulo graduado $V(\sigma)$ e o End($\mathscr{F}'$)-módulo graduação de W.

Note que $W \mapsto \gamma(W)$ é uma bijeção do conjunto de submódulos do End($\mathscr{F}$)-módulo V no conjunto de submódulos do End($\mathscr{F}'$)-módulo W, e esta bijeção preserva inclusão. Logo, da Proposição 2.4.1,$\gamma(V_i) = W_i$ para todo $1 \leq i \leq r$. Consequentemente, γ é um isomorfismo entre as cadeias graduadas $\mathscr{F}(\sigma)$ e $\mathscr{F}'$. ■

2.5 Demonstração do Teorema 2.1.7

Demonstração do Teorema 2.1.7. Um espaço vetorial G-graduado de dimensão n é determinado (a menos de isomorfismo) por uma n-upla consistindo dos graus dos elementos de uma base homogênea. Na verdade, dois tais espaços vetoriais graduados de dimensão n são isomórficos se, e somente se, as n-uplas associadas são obtidas umas das outras por uma permutação. Então, uma α-cadeia G-graduada $\mathscr{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$ é determinada a menos de isomorfismo por uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que V_1 possui uma base consistindo de elementos homogêneos, cada um dos quais de grau na lista $g_1, \ldots, g_{\alpha_1}$, respectivamente e possivelmente com repetições, V_2 possui uma base consistindo de elementos homogêneos de grau $g_1, \ldots, g_{\alpha_1+\alpha_2}$, e assim por diante.

Se $\mathscr{F}' : W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_r = W$ é outra α-cadeia G-graduada com a n-upla $(h_1, \ldots, h_n) \in G^n$ associada como anteriormente, então $\mathscr{F}' \simeq \mathscr{F}(\sigma)$ para algum $\sigma \in G$ se, e somente se, $(h_1, \ldots, h_{\alpha_1})$ é obtido de $g_1\sigma, \ldots, g_{\alpha_1}\sigma$ por uma permutação, $(h_1, \ldots, h_{\alpha_1+\alpha_2})$ é obtido de $g_1\sigma, \ldots, g_{\alpha_1+\alpha_2}\sigma$ por uma permutação, e assim por diante até que $(h_1, \ldots, h_n)$ seja obtida de $(g_1\sigma, \ldots, g_n\sigma)$ por um permutação. Mas isso é claramente equivalente ao fato que $(h_1, \ldots, h_{\alpha_1})$ é obtida de $(g_1\sigma, \ldots, g_{\alpha_1}\sigma)$ por uma permutação, $(h_{\alpha_1+1}, \ldots, h_{\alpha_1+\alpha_2})$ é obtida de $(g_{\alpha_1+1}\sigma, \ldots, g_{\alpha_1+\alpha_2}\sigma)$ por uma permutação, e assim por diante até que $(h_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}+1}, \ldots, h_n)$ é obtida de $(g_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}+1}\sigma, \ldots, g_n\sigma)$ por uma permutação. O que é equivalente ao fato que $(g_1, \ldots, g_n)$ e $(h_1, \ldots, h_n)$ estão na mesma órbita da bi-ação de $S_{\alpha_1} \times \cdots \times S_{\alpha_r}$ à esquerda e G à direita em G^n. ■

A seguir consideramos o caso particular em que A é a álgebra $UT_n(K)$ das matrizes triangulares superiores em blocos. Esse fato foi provado para G finito em [10], através do estudo de identidades polinomiais graduados de $UT_n(K)$.

Corolário 2.5.1. *Os tipos de isomorfismos das graduações elementares em $UT_n(K)$ estão em bijeção com as $(n-1)$-uplas de elementos de G.*

Prova. Consideremos a bijeção dada na Proposição 2.2.8, então a aplicação que associa a $(g_1, \ldots, g_{n-1})$ a graduação elementar em $UT_n(K)$ induzida por $(g_1, \ldots, g_{n-1}, e)$ é uma bijeção entre G^{n-1} e as graduações elementares em $A = UT_n(K)$. Como esta é a álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos associadas a n-upla $(1, \ldots, 1)$, o subgrupo de Young de S_n consiste apenas da permutação identidade, portanto os elementos $(g_1, \ldots, g_n)$ e $(h_1, \ldots, h_n)$ de G^n estão na mesma órbita com respeito a biação se, e somente se, existe $\sigma \in G$ tal que $h_1 = g_1\sigma, \ldots, h_n = g_n\sigma$. Assim, o sistema de representantes das órbitas é $(g_1, \ldots, g_{n-1}, e)$. Segue do Teorema 2.1.7 que as graduações elementares associadas a $(n-1)$-uplas distintas não são isomorfas. ■

Capítulo 3

Identidades Polinomiais Graduadas para Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

Este capítulo está reservado para o estudo das identidades polinomiais graduadas na álgebra $UT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Ao longo deste capítulo, estaremos supondo que o grupo G é um grupo abeliano qualquer, cujo elemento neutro denotaremos 1_G, e que K um corpo de característica zero. O artigo base utilizado foi o [10].

3.1 Graduações Elementares e Identidades Graduadas em Álgebras de Matrizes

Para a fluidez dessa seção, apresentaremos algumas definições e resultados de extrema importância que serão usados nas demostrações da seção seguinte.

Sejam $A = M_n$ uma álgebra e G um grupo. A aplicação $|\ |_A : \{1, 2, \ldots, n\} \to G$ induz uma graduação em M_n tal que o grau de e_{ij} é $|i|_A^{-1} \cdot |j|_A$.

A graduação na definição acima é uma graduação elementar pois as matrizes elementares são homogêneas (veja a Proposição 1.3.9), é simples verificar que esta é a graduação elementar induzida pela n-upla $(|1|_A^{-1}, \ldots, |n|_A^{-1})$. Reciprocamente suponha que A tem a G-graduação elementar induzida por $(g_1, \ldots, g_n)$, então esta é a graduação induzida por $|\ |_A$ se definimos $|i|_A = g_i^{-1}$.

As graduações elementares sobre álgebras matriciais têm sido objeto de estudo devido à sua importância para a construção de uma graduação arbitrária. Além disso, elas são fundamentais na classificação de álgebras graduadas simples de dimensão finita quando K é algebricamente fechado. O leitor pode tomar conhecimento disso em [4].

Definição 3.1.1. *Seja $A = M_n$ a álgebra de matriz. Consideremos a G-graduação em M_n induzida por $|\ |_{M_n}$, denotada por $A := (M_n, \ |\ |_A)$. Definimos a aplicação $w_A : G \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $w_A(g) = |\{i \mid 1 \leq i \leq n, \ |i|_A = g\}|$.*

Definição 3.1.2. *Dado $g \in G$, denotamos o conjunto dos $w_A(g) \neq 0$ por $I(A)$. Em outras palavras*

$$I(A) = \{|i|_A \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Note que da forma definida acima, $I(A)$ é um conjunto finito de G. Para cada $g \in I(A)$ podemos definir o conjunto $A_{1_G}^{(g)} := span \langle e_{pq} \mid |p|_A = |q|_A = g \ \rangle$.

Lema 3.1.3. *Sejam $A := (M_n, \ |\ |_A)$ e $B := (M_n, \ |\ |_B)$ álgebras de matrizes com graduações elementares. Se existe $h \in G$ tal que $w_B(x) = w_A(hx)$ para todo $x \in G$, então A e B são álgebras graduadas isomórficas.*

Prova. As álgebras A e B são álgebras graduadas de matrizes de mesmo tamanho, a saber de tamanho n, e h é um elemento de G tal que $w_B(x) = w_A(hx)$ para todo $x \in G$. Sejam $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ e $(h_1, \ldots, h_n)$ duas n-uplas que induzem as graduações elementares em A e B respectivamente. Note que $w_B(x)$ é o número de índices j tais que $g_j = x^{-1}$ e $w_A(hx)$ é o número de índices i tais que $g_i = (hx)^{-1}$. Como $w_B(x) = w_A(hx)$ para todo $x \in G$, concluímos que $(h_1, \ldots, h_n) = \left(g_{\sigma(1)}h^{-1}, g_{\sigma(2)}h^{-1}, \ldots, g_{\sigma(n)}h^{-1}\right)$, para alguma permutação σ em S_n. O resultado agora segue diretamente do Teorema 2.1.7. ■

Observação 3.1.4. *Quando estamos trabalhando com polinômios multilineares é suficiente considerarmos as avaliações nas matrizes elementares, uma vez que o conjunto destas matrizes é uma base de elementos homogêneos no que diz respeito a graduação da álgebra dada.*

Sejam $A := (M_s, \ |\ |_A)$ e $r := |I(A)|$. Dada uma r-upla $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$, constituída por todos os elementos do conjunto $I(A)$, definimos para cada $1 \leq i \leq r$ e para cada $1 \leq t \leq r-1$

$$m_i := w_A(g_i) \qquad e \qquad h_t := g_t^{-1}g_{t+1}.$$

Considerando o elemento de $K\langle X_G\rangle$

$$\phi_A := S_{t_{2m_1-1}}(y_1^{(1)},\ldots,y_{2m_1-1}^{(1)})v_1S_{t_{2m_2-1}}(y_1^{(2)},\ldots,y_{2m_2-1}^{(2)})v_2\ldots$$

$$\ldots v_{r-1}S_{t_{2m_r-1}}(y_1^{(r)},\ldots,y_{2m_r-1}^{(r)}),$$

onde $\left\{y_1^{(1)},\ldots,y_{2m_1-1}^{(1)}\right\},\ldots,\left\{y_1^{(r)},\ldots,y_{2m_r-1}^{(r)}\right\}$ são conjuntos dois a dois disjuntos com as variáveis homogêneas de grau 1_G, enquanto $v_1,\ldots,v_{r-1}$ são variáveis homogêneas de grau h_k, para cada $k=1,\ldots,r-1$.

Lema 3.1.5. *(i) ϕ_A não é uma identidade polinomial graduada para A;*

(ii) Se $B := (M_s, \mid\,\mid_B)$ e $\phi_A \notin T_G(B)$, então existe $h \in G$ tais que $w_B(x) = w_A(hx)$ para todo $x \in G$. Em particular, A e B são álgebras graduadas isomórficas.

Prova.

(i) Se $r=1$, então $A_{1_G} = M_n$ e $\phi_A \in K\langle X_G\rangle$ coincide com o polinômio Standard em $2n-1$ variáveis (de grau 1_G). Logo, a Proposição 1.7.2 resolve o caso. Suponha $r>1$.

Afirmação: Para cada $1 \le i,j \le s$ tal que $|i|_A = g_1$ e $|j|_A = g_r$, existe uma substituição adequada por matrizes elementares tal que

$$\begin{array}{rccc} \mu: & K\langle X_G\rangle & \longrightarrow & A \\ & \phi_A & \longmapsto & \mu(\phi_A)=e_{ij} \end{array}.$$

De fato, considere i,j satisfazendo a afirmação acima. Agora, observe que

$$A_{1_G} = A_{1_G}^{(g_1)} \oplus A_{1_G}^{(g_2)} \oplus \ldots \oplus A_{1_G}^{(g_r)} \cong M_{m_1} \oplus \ldots \oplus M_{m_r}.$$

Daí segue que, para qualquer $1 \le t \le r$, tal que $w_A(g_t) > 1$, escolhendo $1 \le i_t, j_t \le s$ tais que $i_t \ne j_t$ e $|i_t|_A = |j_t|_A = g_t$, então existe um homomorfismo $\mu_t : K\left\langle y_1^{(t)},\ldots,y_{2m_t-1}^{(t)}\right\rangle \to A$ tal que $\mu_t(y_j^{(t)})$ é uma matriz elementar em $A_{1_G}^{(g_t)}$, para $1 \le j \le 2m_t-1$, e, além disso, vale

$$\mu_t(S_{t_{2m_t-1}}(y_1^{(t)},\ldots,y_{2m_t-1}^{(t)})) = e_{i_tj_t}.$$

Para os demais índices n tais que $w_A(g_n) = 1$, $S_{t_{2m_n-1}}(y_1^{(n)}, \dots, y_{2m_n-1}^{(n)}) = y_1^{(n)}$, temos uma substituição μ_n igual para $e_{i_n j_n}$, onde $i_n = j_n$ é o único inteiro tal que $|i_n|_A = g_n$. Uma vez que, para todo $1 \leq t \leq r-1$, temos

$$\deg(e_{j_t i_{t+1}}) = |j_t|_A^{-1} \cdot |i_{t+1}|_A = g_t^{-1} g_{t+1} = h_t,$$

podemos substituir v_t por $e_{j_t i_{t+1}}$ em ϕ_A. Sejam $i_1 = i$ e $j_r = j$ e μ um homomorfismo tal que $\mu(y_j^{(t)}) = \mu_t(y_j^{(t)})$, para $1 \leq t \leq r$, $1 \leq j \leq 2m_t - 1$ e tal que $\mu(v_t) = e_{j_t i_{t+1}}$, então temos $\mu(\phi_A) = e_{ij}$.

(ii) Seja $|I(B)| := n$ e o conjunto $I(B) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Como o polinômio não é identidade para a álgebra B, existe uma substituição por matrizes elementares tais que o resultado da substituição em ϕ_A é um elemento não nulo de B, fixemos uma substituição μ deste tipo. Note que o produto de duas matrizes em blocos distintos de $B_{1_G} = B_{1_G}^{(b_1)} \oplus \cdots \oplus B_{1_G}^{(b_n)}$ é zero, como

$$\mu(S_{t_{2m_t-1}}(y_1^{(t)}, \dots, y_{2m_t-1}^{(t)})) \neq 0$$

concluímos que as matrizes elementares $\mu(y_1^{(t)}), \dots, \mu(y_{2m_t-1}^{(t)})$ pertencem a um mesmo bloco de B_{1_G}, digamos ao bloco $B_{1_G}^{(b_{i_t})}$.

Ademais, polinômios Standard distintos devem ser avaliados em blocos diferentes. De fato, suponha que, para $1 \leq k < l \leq r$, $S_{t_{2m_k-1}}(y_1^{(k)}, \dots, y_{2m_k-1}^{(k)})$ e $S_{t_{2m_l-1}}(y_1^{(l)}, \dots, y_{2m_l-1}^{(l)})$ são avaliados em um mesmo bloco $B_{1_G}^{(b_d)}$ de B_{1_G}. Então a avaliação de

$$S_{t_{2m_k-1}}(y_1^{(k)}, \dots, y_{2m_k-1}^{(1)}) v_k \dots v_{l-1} S_{t_{2m_l-1}}(y_1^{(l)}, \dots, y_{2m_l-1}^{(l)})$$

nos dá um elemento de B cujo grau é 1_G. Mas o grau desse polinômio visto como elemento de $K\langle X_G \rangle$ é $h_k h_{k+1} \dots h_{l-1}$. Isto que implica que

$$1_G = h_k h_{k+1} \dots h_{l-1} = g_k^{-1} g_l,$$

o que é um absurdo já que $g_k \neq g_l$. Portanto, polinômios Standard distintos devem ser avaliados em blocos diferentes.

Sendo n o número de blocos de B_{1_G}, então n é maior ou igual do que o número de polinômios Standard em ϕ_A que é r. Ou seja, $n \geq r$. Ademais, obtemos a sequência $(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_r})$ de elementos de $I(B)$ tais que

$$b_{i_t}^{-1} b_{i_{t+1}} = h_t = g_t^{-1} g_{t+1}, \quad \forall \ 1 \leq t \leq r-1, \tag{3.1}$$

e

$$w_B(b_{i_k}) \geq m_k, \quad \forall \ 1 \leq k \leq r.$$

Deste fato segue que

$$s = \sum_{j=1}^{n} w_B(b_j) \geq \sum_{j=1}^{r} w_B(b_{i_j}) \geq \sum_{j=1}^{r} m_j = s$$

segue que $r = n$ e $w_B(b_{i_k}) = m_k$ para todo $1 \leq k \leq r$.

Seja $h := g_1 b_{i_1}^{-1}$, segue de (3.1) que $hb_{i_k} = g_k$, para todo $1 \leq k \leq r$, como $w_B(b_{i_k}) = m_k = w_A(g_k) = w_A(hb_{i_k})$. Como $n = r$ temos $I(B) = \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\}$, logo $w_B(x) = w_A(hx)$, se $x \in I(B)$. Além disso, é claro que se $x \notin I(B)$ então $hx \notin I(A)$, portanto também vale a igualdade $w_B(x) = w_A(hx)$, se $x \notin I(B)$. Segue do Lema 3.2.1 que A e B são álgebras graduadas isomórficas.

■

Uma consequência desse Lema é o seguinte resultado.

Corolário 3.1.6. *Sejam $A := (M_n, \mid\,\mid_A)$ e $B := (M_n, \mid\,\mid_B)$ álgebras de matrizes munidas de uma G- graduação elementar. Se $T_G(B) \subseteq T_G(A)$, então existe $h \in G$ tal que $w_B(x) = w_A(hx)$, para todo $x \in G$. Em particular, A e B são isomorfas como álgebras G-graduadas.*

Agora, introduziremos a noção de subgrupo de invariância de uma G-graduação elementar em uma álgebra matricial.

Definição 3.1.7. *Seja $A := (M_n, \mid\,\mid_A)$ uma álgebra matricial munida de uma G-graduação elementar. O subgrupo*

$$H_A := \{h \mid h \in G \ , \ w_A(hg) = w_A(g) \ , \forall g \in G\}$$

de G é chamado de subgrupo de invariância de uma graduação $\mid\,\mid_A$.

Provaremos a seguir que existe um polinômio graduado, não nulo, para o qual cada substituição em M_n não nula, deve estar em $A_{1_G}^{(g)}$ para um adequado $g \in G$, exceto quando $H_A \neq \langle 1_G \rangle$.

Lema 3.1.8. *Seja $A := (M_s, \ |\ |_A)$ uma álgebra de matrizes munida de uma G- graduação elementar. Fixe $g \in G$ tal que $w_A(g) = \max\{w_A(h) \mid h \in G\}$. Então, existe um polinômio multilinear homogêneo $\Psi_A \in K\langle X_G\rangle$ de grau 1_G tal que*

(i) $\Psi_A \notin T_G(A)$ *e, para todo $1 \leq i \leq s$ com $|i|_A = g$, existe um homomorfismo graduado $\mu : K\langle X_G\rangle \longrightarrow A$, que associa às variáveis em Ψ_A matrizes elementares e tal que $\mu(\Psi_A) = e_{ii}$;*

(ii) *Se $v : K\langle X_G\rangle \longrightarrow A$ é um homomorfismo graduado, então*

$$v(\Psi_A) \in \oplus_{t\in H_A} A_{1_G}^{(tg)}.$$

Prova.

(i) Assuma que $I(A) := \{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ e $w_A(g_k) = \max\{w_A(h) \mid h \in G\}$. Considere, para cada $1 \leq j \leq r$, $m_j := w_A(g_j)$ e $t_j := m_k m_j$. Considere agora o polinômio

$$\Psi_j := \sum_{\sigma\in S_{t_j}} sgn(\sigma) u_{\sigma(1)}^{(j)} v_1^{(j)} u_{\sigma(2)}^{(j)} v_2^{(j)} \ldots u_{\sigma(t_j)}^{(j)} v_{t_j}^{(j)},$$

onde $\left\{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_{t_1}^{(1)}\right\}, \ldots, \left\{u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, \ldots, u_{t_r}^{(r)}\right\}, \ldots, \left\{v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, \ldots, v_{t_r}^{(r)}\right\}$ são conjuntos dois a dois disjuntos com variáveis homogêneas com $\deg(u_l^{(j)}) = g_k^{-1} g_j$ e $\deg(v_l^{(j)}) = g_j^{-1} g_k$, onde $1 \leq l \leq t_j$. Claramente, Ψ_j tem grau 1_G e é um polinômio graduado multilinear.

Tome um inteiro $1 \leq i \leq S$ tal que $|i|_A = g_k$. Afirmamos que, para cada $1 \leq j \leq r$, existe um homomorfismo μ_j que associa às variáveis em Ψ_j matrizes elementares e tal que $\mu_j(\Psi_j) = e_{ii}$. De fato, existem $w_A(g_k) w_A(g_j) = m_k m_j = t_j$ matrizes elementares e_{pq} tais que $|p|_A = g_k$ e $|q|_A = g_j$. Escrevemos estas matrizes em uma sequência $e_{p_1 q_1}, e_{p_2 q_2}, \ldots, e_{p_{t_j} q_{t_j}}$, com $p_1 = i$ e definimos μ_j como o homomorfismo tal que

$$\mu_j(u_l^{(j)}) := e_{p_l q_l} \qquad \forall\ 1 \leq t \leq t_j$$

$$\mu_j(v_l^{(j)}) := e_{q_l p_{l+1}} \qquad \forall\ 1 \leq t \leq t_j - 1.$$

e, finalmente,

$$\mu_j(v_{t_j}^{(j)}) := e_{q_{t_j} i}.$$

Seja $\Psi_A = \Psi_1 \cdot \Psi_2 \ldots \Psi_r$. Como cada Ψ_j, com $j = 1, 2, \ldots, r$, é multilinear e homogêneo de grau 1_G concluímos que Ψ_A é também multilinear e homogêneo de grau 1_G. Seja μ um homomorfismo tal que $\mu(u_l^{(j)}) = \mu_j(u_l^{(j)})$ e $\mu(v_l^{(j)}) = \mu_j(v_l^{(j)})$, $j = 1, \ldots, r$, temos então que

$$\mu(\Psi_A) = e_{ii},$$

já que $p_1 = i$.

(ii) Como Ψ_A é multilinear basta considerar o caso em que ν associa a cada variável em Ψ_A uma matriz elementar. O fato de que o polinômio tem grau 1_G nos diz que $\nu(\Psi_A)$ deve estar em

$$A_{1_G} = A_{1_G}^{(g_1)} \oplus A_{1_G}^{(g_2)} \oplus \ldots A_{1_G}^{(g_r)},$$

e, como $\nu(\Psi_A)$ é uma matriz elementar, em uma única componente dessa soma direta.

Assim, suponha que $\nu(\Psi_A) \in A_{1_G}^{(g_h)}$ para algum $g_h \neq g_k$. Então, $\nu(\Psi_j) \in A_{1_G}^{(g_h)}$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Dessa maneira podemos concluir que, para quaisquer j, l com $1 \leq j \leq r$ e $1 \leq l \leq t_j$ temos

$$\Psi_j(u_l^{(j)}) \in A_{g_k^{-1}g_j}^{(gh)} := \left\langle e_{pq} \mid |p|_A = g_h, \ |q|_A = g_h g_k^{-1} g_j \right\rangle,$$

pois, cada fator da forma $u_{\sigma(l)}^{(j)} v_l^{(j)}$ que aparece nos monômios de Ψ_j tem grau 1_G. Então, segue que

$$w_A(g_h) \cdot w_A(g_h g_k^{-1} g_j) = dim_K A_{g_k^{-1}g_j}^{(g_h)} \geq t_j = m_k m_j = w_A(g_k) w_A(g_j).$$

Dá desigualdade acima, temos que

$$w_A(g_h) \cdot w_A(g_h g_k^{-1} g_j) \geq w_A(g_k) w_A(g_j).$$

Pela maximalidade de $w_A(g_k)$, vale que

$$w_A(g_h) \cdot w_A(g_h g_k^{-1} g_j) \geq w_A(g_h) w_A(g_j).$$

E, consequentemente, vale ainda que

$$w_A(g_h g_k^{-1} g_j) \geq w_A(g_j) \quad para \ \ todo \ \ 1 \leq j \leq r.$$

Mas observe que

$$s \geq \sum_{j=1}^{r} w_A(g_h g_k^{-1} g_j) \geq \sum_{j=1}^{r} w_A(g_j) = s.$$

Portanto, vale que

$$w_A(g_h g_k^{-1} g_j) = w_A(g_j) \quad para \;\; todo \;\; 1 \leq j \leq r.$$

Com isto, chegamos a dedução de que $g_h g_k^{-1} \in H_A$, e que $\nu(\Psi_A) \in \oplus_{t \in H_A} A_{1_G}^{(tg_k)}$.

■

Sejam $A := (M_s, \mid \mid_A)$ e $B := (M_s, \mid \mid_B)$ álgebras de matrizes com graduações elementares tais que existe $h \in G$ tal que $w_B(x) = w_A(hx)$ para todo $x \in G$. Utilizamos as notações adotadas na demonstração do lema anterior para a álgebra A e consideramos a construção correspondente do polinômio Ψ_B para a álgebra B. Note que $H_A = H_B$. De fato, se $g \in H_B$ então temos

$$w_A(ghx) = w_A(hgx) = w_B(gx) = w_B(x) = w_A(hx),$$

para todo $x \in G$, portanto $g \in H_A$. Assim, $H_B \subseteq H_A$, e a inclusão oposta é provada de modo análogo. Além disso temos $I(B) = \{h^{-1}g_1, h^{-1}g_2, \ldots, h^{-1}g_r\}$ e $\max\{w_B(h) \mid h \in G\} = w_B(h^{-1}g_k) = w_A(g_k)$.

Assim, os polinômios Ψ_j relacionados às duas álgebras são os mesmos e, consequentemente, $\Psi_A = \Psi_B$. Portanto, do lema acima podemos concluir que $\nu(\Psi_A) \in \oplus_{t \in H_B} B_{1_G}^{(th^{-1}g_k)}$ para alguma substituição graduada ν de Ψ_A em B.

Visto isso, entraremos na seção ápice do nosso trabalho.

3.2 Prova dos Principais Resultados

Esta seção é dedicada à demonstração dos resultados anunciados na introdução do Capítulo. Para iniciarmos, mostraremos que se duas álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos possuem que G-graduações de modo que satisfazem as mesmas identidades polinomiais graduadas então estas álgebras são isomorfas. Isso vale para graduações arbitrárias nas álgebras consideradas.

Lema 3.2.1. *Sejam A e B álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos graduadas por um grupo G. Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $A = B = UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ como álgebras ordinárias.*

Antes de apresentarmos a demostrarmos do Lema 3.2.1, iremos expor dois resultados relevantes que servirão de base para a demonstração do mesmo.

Lema 3.2.2. *A álgebra $B = UT(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ satisfaz todas as identidades polinomiais da álgebra $A = UT(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ se, e somente se B é uma subálgebra de A.*

Prova. Se B é uma subálgebra de A, então é claro que B satisfaz as identidades polinomiais de A. Suponhamos que B satisfaça todas as identidades polinomiais de A. Consideremos $q = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ e $d = \beta_1 + \ldots + \beta_r$, então $A \subset M_d$ e, pelo Teorema 1.7.1, A satisfaz a identidade Standard

$$St_{2d}(x_1, \cdots, x_{2d}) = \sum_{\sigma \in S_{2d}} sgn\,(\sigma)\, x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \ldots x_{\sigma(2d)} = 0,$$

onde S_{2d} é o grupo de permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2d\}$. Por outro lado, temos que B contém a subálgebra $C = UT(1, \ldots, 1)$ das matrizes $q \times q$ triangulares superiores. Note que todas as identidades polinomiais de C seguem da identidade

$$[x_1, x_2] \ldots [x_{2q-1}, x_{2q}] = 0.$$

Isso implica que C não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau menor do que $2q$. Assim, $q \leq d$ e podemos considerar o mergulho canônico $A, B \subset M_d$. Assuma que B não é uma subálgebra de A, isto é, existe um par (i, j) de inteiros positivos tal que

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_i < t, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i+1} > t, \tag{3.2}$$

onde $t = \beta_1 + \ldots + \beta_j < d$. Então, $A \subset UT(t, d-t)$. Desta forma, segue do Teorema 1.8.2 que $T(M_t)T(M_{d-t}) \subset T(UT(t, d-t))$. Logo A satisfaz a identidade

$$St_{2t}(x_1, \cdots, x_{2t}) St_{2(d-t)}(y_1, \cdots, y_{2(d-t)}) = 0. \tag{3.3}$$

Como $t = \beta_1 + \ldots + \beta_j$ podemos ver que a matriz elementar $e_{t+1,t}$ pertence a B. Ademais,

$$St_{2t}(e_{11}, e_{12}, e_{22}, \cdots, e_{t,t+1}, e_{t+1,t}) = e_{11} e_{12} \ldots e_{t+1,t} = e_{1t} \tag{3.4}$$

e

$$St_{2(d-t)}(e_{t,t+1}, e_{t+1,t+1}, \cdots, e_{d-1,d}, e_{dd}) = e_{t,t+1} e_{t+1,t+1} \ldots e_{dd} = e_{td}. \tag{3.5}$$

Logo, B não satisfaz a identidade (3.3), uma contradição. Portanto, $B \subset A$. ■

Como consequência imediata deste teorema obtemos:

Corolário 3.2.3. *Se $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ e $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ são duas sequências de inteiros positivos distintas, então $T(UT(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)) \neq T(UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r))$.*

Expostos isto, vamos seguir agora com a demostração do Lema 3.2.1.

Demostração do Lema 3.2.1. Vamos assumir que $A := UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ e $B := UT(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Mostraremos que $m = n$ e $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Desde que $T_G(A) = T_G(B)$, segue da Proposição 1.5.4 que A e B satisfazem as mesmas identidades polinomiais e o resultado segue do Corolário 3.2.3. ■

Para cumprirmos com os nossos objetivos, será suficiente considerarmos apenas as diferentes G-graduações elementares sobre a mesma álgebra matricial triangular superior em blocos. Para este fim, vamos estabelecer algumas notações que iremos utilizar no decorrer da seção.

Se $|\ |_A$ é uma função que define uma graduação elementar pelo grupo G na álgebra $UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, então defina $\eta_0 := 0$ e, para cada $1 \leq i \leq m$, defina $\eta_i := \sum_{k=1}^{i} \alpha_k$ e o conjunto $I_i := \{\eta_{i-1} + 1, \ldots, \eta_i\}$. Além disso, para cada $g \in G$, defina o conjunto

$$w_A^{(i)}(g) := \left|\{s \mid s \in I_i, \quad |s|_A = g\}\right|.$$

Para todo $1 \leq i \leq j \leq m$, vamos denotar a restrição de $|\ |_A$ ao conjunto $I_i \cup I_{i+1} \ldots \cup I_{j-1} \cup I_j$ por $|\ |_A^{(i,j)}$. Chamemos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ os blocos da diagonal de A com a graduação induzida. Mais precisamente, o que estamos fazendo é, para cada $1 \leq i \leq m$, definindo $A_i := (M_{\alpha_i}, |\ |_A^{(i,i)})$. O subgrupo de invariância de $|\ |_A^{(i,i)}$ denotamos por $H_A^{(i)}$. Ademais, recorde que para cada inteiro t, o t-ésimo polinômio de Capelli $Cap_t(x_1, x_2, \ldots x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{2t+1})$ é um elemento da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$ definido como sendo

$$\sum_{\sigma \in S_t} sgn(\sigma) x_{t+1} x_{\sigma(1)} x_{t+2} x_{\sigma(2)} \ldots x_{2t} x_{\sigma(t)} x_{2t+1},$$

se $t = 0$, o polinômio correspondente é simplesmente a $(t+1)$-ésima variável x_{t+1}.

Estabelecidas as notações, vamos seguir expondo um lema que é um corolário da demonstração da Proposição 1.2.9.

Lema 3.2.4. *Seja $A := UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ uma álgebra matricial triangular superior em blocos. O polinômio de Capelli $Cap_t(x_1, x_2, \ldots x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{2t+1})$ será uma identidade polinomial de A se, e somente se, $t \geq m + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$. Além disso, definindo $k := m-1+\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$, então alguma substituição não nula de $Cap_k(x_1, x_2, \ldots x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{2t+1})$ em A deve estar na $(m-1)$-ésima potência do radical de Jacobson, $J(A)^{m-1}$. Em particular, para certos inteiros l, r tal que $1 \leq l \leq \alpha_1$ e $1 + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \leq r \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, existe* *uma substituição de* $Cap_k(x_1, x_2, \dots x_t, x_{t+1}, \dots, x_{2t+1})$ *em* A *na matriz elementar igual a* e_{lr}.

Nesta fase, estamos em condições de provar o resultado chave da seção.

Teorema 3.2.5. *Sejam* G *um grupo abeliano e* $A := (UT(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \ | \ |_A)$ *e* $B := (UT(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \ | \ |_B)$ *álgebras matriciais triangulares superiores em blocos* G*-graduadas com uma graduação elementar. Se* $T_G(B) \subseteq T_G(A)$ *e também*

(i) $m \leq 2$ *ou*

(ii) Se $m > 2$*, existe* $1 \leq d \leq m$ *tal que* $H_A^{(d)} = \langle 1_G \rangle$,

então A *e* B *são isomorfas como álgebras* G*-graduadas.*

Prova. Vamos mostrar que existe $g \in G$ tal que, para cada $1 \leq k \leq m$,

$$w_A^{(k)}(gx) = w_B^{(k)}(x), \quad \forall \ x \in G.$$

Se $m = 1$, o resultado está segue diretamente do Corolário 3.1.6.

Assim, suponha $m \geq 2$ e considere as seguintes álgebras G-graduadas

$$A^{'} := (UT(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}), \ | \ |_A^{(1,m-1)})$$

e

$$B^{'} := (UT(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}), \ | \ |_B^{(1,m-1)}).$$

Mostremos que vale $T_G(B^{'}) \subseteq T_G(A^{'})$.

Vamos supor por contradição que essa inclusão não ocorre. Então existe um polinômio $f_1 \in T_G(B^{'}) - T_G(A^{'})$. Denotemos por $\bar{A}$ a subálgebra $UT(\alpha_{m-1}, \alpha_m)$ munida da graduação induzida por $| \ |_A^{(m-1,m)}$. Observe que o conjunto $T_G(B_m) - T_G(\bar{A})$ é não vazio, onde B_m é o m-ésimo bloco da diagonal de B. De fato, caso contrário temos $T_G(B_m) \subseteq T_G(\bar{A})$, então segue da Proposição 1.5.4 que $T(M_{\alpha_m}) = T(B_m) \subseteq T(\bar{A})$, mas o Teorema 1.8.2 implica que

$$T(\bar{A}) = T(UT(\alpha_{m-1}, \alpha_m)) = T(M_{\alpha_{m-1}}) \cdot T(M_{\alpha_m}),$$

de onde $T(M_{\alpha_m}) \subseteq T(M_{\alpha_{m-1}}) \cdot T(M_{\alpha_m})$. A Proposição 1.7.2 implica que o grau mínimo de um polinômio em $T(M_{\alpha_{m-1}}) \cdot T(M_{\alpha_m})$ é $2\alpha_{m-1} + 2\alpha_m$, por outro lado o Teorema 1.7.1

implica que o polinômio Standard $S_{2\alpha_m}$ de grau $2\alpha_m$ pertence a $T(M_{\alpha_m})$ e, portanto, a $T(M_{\alpha_{m-1}}) \cdot T(M_{\alpha_m})$, o que é um absurdo.

Escolhamos $f_2 \in T_G(B_m) - T_G(\bar{A})$ de tal forma que as variáveis são duas-a-duas diferentes das de f_1. Seja $u := \sum_{l \in SuppA} x^l$, onde os x^l são variáveis graduadas de grau l em $K\langle X_G \rangle$ não envolvidas nos polinômios f_1 e f_2. Dessa forma, $f_1 u f_2$ não é uma identidade polinomial G- graduada para a álgebra A, porém veja que

$$f_1 u f_2 \in T_G(B') \cdot T_G(B_m) \subseteq T_G(B),$$

o que contraria o fato que $T_G(B) \subseteq T_G(A)$. Portanto, a inclusão $T_G(B^{'}) \subseteq T_G(A^{'})$ acontece.

Da mesma forma, consideremos as seguintes álgebras G-graduadas

$$A^{''} := (UT(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m), \ | \ |_A^{(2,m)})$$

e

$$B^{''} := (UT(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m), \ | \ |_B^{(2,m)}).$$

Pelo argumento feito anteriormente, temos $T_G(B^{''}) \subseteq T_G(A^{''})$.

Ao continuarmos com essa recorrência chegaremos ao seguinte resultado para todo $1 \leq k \leq k' \leq m$,

$$T_G(UT(\alpha_k, \ldots, \alpha_{k'}), | \ |_B^{(k,k')}) \subset T_G(UT(\alpha_k, \ldots, \alpha_{k'}), | \ |_A^{(k,k')}). \tag{3.6}$$

Desse modo, temos

$$T_G(B_k) \subseteq T_G(A_k) \qquad \forall \ 1 \leq k \leq m.$$

Assim, usando novamente o Corolário 3.1.6, concluímos que existe $g_k \in G$ tal que

$$w_A^{(k)}(g_k x) = w_B^{(k)}(x), \quad \forall \ x \in G \ e \ \forall \ 1 \leq k \leq m. \tag{3.7}$$

Ademais, note que, para todo $1 \leq k \leq m$,

$$\begin{aligned} H_A^{(k)} &= \left\{ x \in G \mid w_A^{(k)}(gx) = w_A^{(k)}(x), \forall g \in G \right\} = \\ &= \left\{ x \in G \mid w_B^{(k)}(g_k x) = w_B^{(k)}(x), \forall g \in G \right\} = H_B^{(k)}. \end{aligned}$$

Por esta razão, no restante da prova denotaremos simplesmente por $H^{(k)}$.

Sejam β_1 e β_m elementos de G tais que $w_A^{(1)}(\beta_1) = \max\left\{w_A^{(1)}(g) \mid g \in G)\right\}$ e $w_A^{(m)}(\beta_m) = \max\left\{w_A^{(m)}(g) \mid g \in G)\right\}$. Escolha $i \in Bl_1$ e $j \in Bl_m$ tais que $|i|_A = \beta_1$ e $|j|_A = \beta_m$. De acordo com o Lema 3.1.8, existe um polinômio multilinear homogêneo Ψ_{A_1} com uma substituição graduada adequada não nula

$$\begin{array}{cccc} \mu^{'}: & K\langle X_G\rangle & \longrightarrow & A_1 \\ & \Psi_{A_1} & \longmapsto & \mu^{'}(\Psi_{A_1}) = e_{ii} \end{array},$$

e um polinômio multilinear homogêneo Ψ_{A_m} com uma substituição graduada adequada não nula

$$\begin{array}{cccc} \mu^{''}: & K\langle X_G\rangle & \longrightarrow & A_m \\ & \Psi_{A_m} & \longmapsto & \mu^{''}(\Psi_{A_m}) = e_{jj} \end{array}.$$

Definindo $t := m - 1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$, observamos que existem $v_1, v_2, \ldots, v_{2t+1}$ variáveis graduadas homogêneas tomadas de uma forma adequada, tais que o polinômio de Capelli na variável t tem uma avaliação graduada

$$Cap_t(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{2t+1}) = e_{ij},$$

na álgebra G-graduada A. De fato, pelo Lema 3.2.4, existe uma avaliação do polinômio $Cap_t(x_1, x_2, \ldots, x_{2t+1})$ em $UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ em matrizes elementares que será igual e_{ij}.

Nessa fase, para construirmos o nosso polinômio graduado é suficiente considerarmos uma das avaliações $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2t+1}$ das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_{2t+1}$ em matrizes elementares de $UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ tal que

$$Cap_t(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2t+1}) = e_{ij}.$$

Assim, para cada $1 \leq l \leq 2t+1$, escolhemos um v_l de grau h se o grau de $\bar{x}_l$ com respeito a graduação $|\ |_A$ é h. Por simplicidade de notação, denotemos $Cap_t(v_1, v_2, \ldots, v_{2t+1})$ por Ψ_{ij}^A.

Unindo todas as deduções até o momento, existe uma avaliação μ do polinômio $\Gamma_A := \Psi_{A_1} \cdot \Psi_{ij}^A \cdot \Psi_{A_m}$ em matrizes elementares de A tal que

$$\mu(\Gamma_A) = e_{ij}.$$

Lembrando que por hipótese $T_G(B) \subseteq T_G(A)$, conclui-se que $\Gamma_A \notin T_G(B)$, pois Γ_A não é uma identidade polinomial para A. Porém, cada avaliação graduada de Ψ_{ij}^A em B pertence a $J(B)^{m-1}$. Dessa forma, para obtermos uma avaliação graduada não nula de Γ_A em B devemos considerar avaliações graduadas para Ψ_{A_1} e Ψ_{A_m} nas matrizes elementares de B_1 e B_m, respectivamente. Da observação feita logo após o Lema 3.1.8, podemos ver que todas as avaliações graduadas de Ψ_{A_1} em B_1 estão em $\oplus_{h\in H^{(1)}}(B_1)_{1_G}^{(hg_1^{-1}\beta_1)}$, ao passo que as avaliações graduadas de Ψ_{A_m} em B_2 estão em $\oplus_{h\in H^{(m)}}(B_m)_{1_G}^{(hg_m^{-1}\beta_m)}$. Finalmente, conseguimos enxergar que as avaliações em Ψ_{ij}^A em B são combinações lineares de matrizes da forma e_{pq} com $|p|_B^{-1}\cdot|q|_B = |i|_A^{-1}\cdot|j|_A = \beta_1^{-1}\beta_m$, uma vez que este é o grau de Ψ_{ij}^A como elementos de $K\langle X_G\rangle$. Segue então que,

$$|p|_B \in H^{(1)}g_1^{-1}\beta_1 \quad e \quad |q|_B \in H^{(m)}g_m^{-1}\beta_m.$$

Assim, existem $h_1 \in H^{(1)}$ e $h_m \in H^{(m)}$ tais que $|p|_B = h_1g_1^{-1}\beta_1$ e $|q|_B = h_mg_m^{-1}\beta_m$. isso implica que

$$\beta_1^{-1}\beta_m = |p|_B^{-1}\cdot|q|_B = \beta_1^{-1}g_1h_1^{-1}h_mg_m^{-1}\beta_m,$$

e portanto,

$$g_1h_1^{-1} = g_mh_m^{-1}.$$

Definindo $g := g_1h_1^{-1} = g_mh_m^{-1}$, chegamos a conclusão que $g_1 = gh_1$, $g_m = gh_m$ e, de acordo com a igualdade (3.7), temos que

$$w_A^{(1)}(gx) = w_A^{(1)}(g_1h_1^{-1}x) = w_A^{(1)}(g_1x) = w_B^{(1)}(x),$$

e

$$w_A^{(m)}(gx) = w_A^{(m)}(g_mh_m^{-1}x) = w_A^{(m)}(g_mx) = w_B^{(m)}(x),$$

para todo $x \in G$.

No caso $m = 2$, não temos mais nada a fazer. Então, suponhamos que $m > 2$. O argumento acima juntamente com a inclusão (3.6) implica que

$$g_r^{-1}g_s \in H^{(r)}H^{(s)}, \quad \forall \;\; 1 \le r < s \le m.$$

Além disso, partindo do pressuposto inicial temos que existe $1 \le d \le m$ tal que $H^{(d)} = \langle 1_G\rangle$. Assim, se $d > 1$, ficamos com

$$g_r^{-1}g_d \in H^{(r)}, \quad \forall \;\; 1 < r \le d,$$

e, se $d < m$, temos

$$g_d^{-1} g_s \in H^{(s)}, \quad \forall \quad d < s \leq m.$$

Consequentemente, para todo $r < d$, existe $h_r \in H^{(r)}$ tal que $g_r = g_d h_r^{-1}$ e para todo $s > d$, existe $h_s \in H^{(s)}$ tal que $g_s = g_d h_s$. Usando novamente a igualdade (3.7), chegamos que, para cada $1 \leq k \leq m$ com $k \neq d$, existe $h'_k \in H^{(k)}$ para os quais vale

$$w_A^{(k)}(g_d x) = w_A^{(k)}(g_d h'_k x) = w_A^{(k)}(g_k x) = w_B^{(k)}(x) \quad \forall\, x \in G.$$

O fato que $w_A^{(d)}(g_d x) = w_B^{(d)}(x)$ para todo $x \in G$ completa a nossa demonstração. ■

Uma consequência imediata desse teorema é o seguinte lema.

Corolário 3.2.6. *Seja G um grupo abeliano e sejam A e B álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos munidas de uma G-graduação elementar, tal que A possui dois blocos componentes ou no máximo uma quantidade finita de blocos componentes, mas pelo menos um deles, digamos A_d, tem subgrupo de invariância $H_A^{(d)} = \langle 1_G \rangle$. Então A e B são isomorfas como álgebras graduadas se, e somente se, $T_G(A) = T_G(B)$.*

Prova. Assuma que $T_G(A) = T_G(B)$. Então, em virtude do Lema 3.2.1 as álgebras A e B podem ser realizadas como a mesma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos. Assim, aplicando diretamente o Teorema anterior nós concluímos que A e B são isomórficas como álgebras G-graduadas. A implicação contrária é óbvia. ■

Nosso objetivo no momento é discutirmos quais outros resultados poderemos obter a partir do Teorema 3.5.

Valenti e Zaicev mostraram em [31] que, se K é um corpo algebricamente fechado, qualquer graduação em $A := UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ por um grupo abeliano finito G é uma combinação de uma graduação fina com uma graduação elementar. Em particular, existe uma decomposição $\alpha_1 = ts_1, \alpha_2 = ts_2, \ldots, \alpha_r = ts_r$, um subgrupo F de G e uma n-upla $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$, com $n := n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, tal que A é isomórfica a $M_t \otimes UT(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ como álgebras G-graduadas, onde M_t é uma álgebra F-graduada com a graduação fina com suporte F e $UT(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ tem uma graduação elementar definida por $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$.

Quando a ordem de G é prima, então o subgrupo F é igual a G ou a $\langle 1_G \rangle$. Se ocorrer o primeiro caso, então ficamos com $|G| = t^2$, mas isso não pode ocorrer pela ordem de G ser prima. Logo, deve ocorrer que $F = \langle 1_G \rangle$ e assim $t = 1$.

A mesma inclusão acontece quando existe $1 \leq j \leq m$ tal que $mdc(|G|, \alpha_j) = 1$. De fato, temos que $t^2 = |Supp_{M_t}|$ divide $|G|$. Consequentemente, teremos que t divide $|G|$. Como a ordem de G é prima então vale que $mdc(|G|, ts_j) = 1$ e assim, temos que $t = 1$.

Podemos resumir todas essas deduções no seguinte lema

Lema 3.2.7. *Seja G um grupo abeliano finito e seja $A := UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ uma álgebra de matriz triangular superior em bloco sobre um corpo algebricamente fechado. Se*

(i) G tem ordem prima ou

(ii) existe $1 \leq j \leq m$ tal que $mdc(|G|, ts_j) = 1$,

então qualquer G-graduação em A é isomórfica a uma graduação elementar.

Nesse momento temos uma bagagem suficiente para resolvermos o problema para graduações induzidas por grupos abelianos de ordem prima ou cuja ordem é coprima com o tamanho de pelo menos um dos blocos componentes de uma álgebra de matriz triangular superior em bloco. Vale a pena observar que a declaração para grupos de ordem prima já foi provada para o caso onde $G = \mathbb{Z}_2$.

Teorema 3.2.8. *Seja G um grupo abeliano finito e sejam A e B álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos G-graduadas sobre um corpo algebricamente fechado. Assuma que G tem ordem prima ou existe um bloco componente, digamos A_j, de A cujo tamanho α_j é coprimo com a ordem de G. Então, A e B são isomórficas como álgebras G-graduadas se, e somente se, $T_G(A) = T_G(B)$.*

Prova. Suponha que $T_G(A) = T_G(B)$. Então, pelo Lema 3.2.1, as álgebras A e B podem ser realizadas como a mesma álgebra $UT(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Além disso, podemos assumir pelo Lema 3.2.7 que as graduações em ambas as álgebras são elementares. Quando for o caso do grupo G ter ordem prima, se existe pelo menos um bloco componente de A tendo o subgrupo de invariância igual a $\langle 1_G \rangle$, então, pelo Teorema 3.2.5, A e B são álgebras G-graduadas isomórficas. Caso contrário, para todo $1 \leq i \leq m$, vale que $H_A^{(i)} = H_B^{(i)} = G$, o que implica

$$w_A^{(i)}(g) = w_B^{(i)}(g) \qquad \textit{para cada} \;\; g \in G,$$

e, portanto, concluímos que A e B são álgebras G-graduadas isomórficas.

Agora, suponhamos que $mdc(|G|, \alpha_j) = 1$. Como sabemos que $\left|H_A^{(j)}\right|$ divide α_j e, pelo Teorema de Lagrange, segue que $\left|H_A^{(j)}\right|$ divide a ordem de G. Daí, temos que $\left|H_A^{(j)}\right| = 1$, e, pelo Teorema 3.2.5, concluímos que A e B são álgebras G-graduadas isomórficas.

A reciproca é imediata, uma vez que se A e B possuem os mesmas identidades polinomiais graduadas, então elas são álgebras G-graduadas isomórficas. $\blacksquare$

Bibliografia

[1] E. Aljadeff, D. Haile, *Simple G-graded algebras and their polynomial identities*, Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014), 1749–1771.

[2] E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, *Representability and Specht problem for G-graded algebras*, Adv. Math. 225 (2010), no. 5, 2391–2428.

[3] Y. Bahturin, S. Sehgal, M. Zaicev, *Group gradings on associative algebras*. J. Algebra 241 (2001), 677–698.

[4] Y. Bahturin, M. Zaicev, S. K. Sehgal, *Finite-dimensional simple graded algebras*, Sb. Math. 199 (2008), 965–983.

[5] Y. Bahturin, M. Zaicev, *Graded algebras and graded identities*, in: Polynomial Identities and Combinatorial Methods, Pantelleria, (2001), in: Lect. Notes Pure Appl. Math., vol.355, Dekker, New York, (2003), pp.101–139.

[6] I. Balaba, *Isomorphisms of graded endomorphism rings of progenerators*.J. Math. Sci. 152 (2008), 451–455.

[7] I. Balaba, A. Mikhalev, *Isomorphisms and anti-isomorphisms of endomorphism rings of graded modules close to free ones*. Doklady Math. 79 (2009), 255–257.

[8] M. Bărăscu, S. Dăscălescu, *Good gradings on upper block triangular matrix algebras*, Com. Algebra 41 (2013), 4290–4298.

[9] C. Boboc, S. Dăscălescu, *Gradings of matrix algebras by cyclic groups*. Comm. Algebra 29 (1999), 5013–5021.

[10] S. Caenepeel, S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, *On gradings of matrix algebras and descent theory*. Comm. Algebra 30 (2002), 5901–592.

[11] S. Dăscălescu, B. Ion, C. Năstăsescu, J. Rios Montes, *Group gradings on full matrix rings*. J. Algebra 220 (1999), 709–728.

[12] O. David, *Graded embeddings of finite dimensional simple graded algebras*, J. Algebra 367 (2012), 120–141.

[13] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov, A. Valenti, *Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities*. J. Algebra 275 (2004), 550–566.

[14] O. M. Di Vincenzo, E. Spinelli, *A characterization of minimal algebras with involution*, Israel J. Math. 186 (2011), 381–400.

[15] O. M. Di Vincenzo, E. Spinelli, *On some minimal supervarieties of exponential growth*, J. Algebra 368 (2012), 182–198.

[16] V. Drensky, M. Racine, *Distinguishing simple Jordan algebras by means of polynomial identities*, Comm. Algebra 20 (1992), 309–327.

[17] A. Giambruno, M. Zaicev, *Codimension growth and minimal superalgebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 5091–5117.

[18] A. Giambruno, M. Zaicev, *Minimal varieties of algebras of exponential growth*, Adv. Math. 174 (2003), 310–323.

[19] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys Monogr., vol.122, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).

[20] R. Hazrath, *The graded structure of Leavitt path algebras*. To appear in Israel J. Math (2010).

[21] N. Jacobson, *Basic Algebra*. Second edition. Dover. San Francisco, (1985).

[22] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 496–500.

[23] A. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Transl. Math. Monogr., vol.87, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1991).

[24] P. Koshlukov, M. Zaicev, *Identities and isomorphisms of graded simple algebras*, Linear Algebra Appl. 432 (2010), 3141–3148.

[25] A. Kushkulei, Y. Razmyslov, *Varieties generated by irreducible representations of Lie algebras*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 5 (1983), 4–7.

[26] T. Y. Lam, *First Course in Noncommutative Rings.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York, (2001).

[27] C. Năstăsescu, F. Oystaeyen, *Methods of Graded Rings.* Lecture Notes in Math., Vol. 1836. Springer Verlag (2004).

[28] I. Shestakov, M. Zaicev, *Polynomial identities of finite dimensional simple algebras*, Comm. Algebra 39 (2011), 929–932.

[29] I. Sviridova, *Identities of pi-algebras graded by a finite abelian group*, Com. Algebra 39 (2011), no. 9, 3462–3490.

[30] A. Valenti, M. Zaicev, *Abelian gradings on upper block triangular matrices*, Canad. Math. Bull. 55 (2012), 208–213.

[31] A. Valenti, M. Zaicev, *Group gradings on upper triangular matrices.* Arch. Math. 89 (2007), 33–40.