

UNIVERSIDADE FEDERAL DA CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**REFERENCIAIS NÃO-INERCIAIS NO
ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI**

Patricio José Felix da Silva

CAMPINA GRANDE
- Março/ 2009 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DA CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**REFERENCIAIS NÃO-INERCIAIS NO
ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI**

Patricio José Felix da Silva

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE
- Março /2009 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586r

2009 Silva, Patrício José Felix da
Referenciais não-inerciais no espaço-tempo de Minkowski /
Patrício José Felix da Silva. — Campina Grande, 2009.
90 f.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Referências.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia.

1. Referenciais Não-Inerciais 2. Simultaneidade 3. Geometria
Não-Euclidiana I. Título.

CDU – 530.12 (043)

PATRÍCIO JOSÉ FELIX DA SILVA

REFERENCIAIS NÃO-INERCIAIS NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Dissertação aprovada em 09/03/2009

BANCA EXAMINADORA

Fábio Leal de Melo Dahia

(Presidente)

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Unidade Acadêmica de Física - UFCG

Geusa de Araújo Marques

(Membro interno)

Prof.^a Dr.^a Geusa de Araújo Marques
Unidade Acadêmica de Física - UFCG

Carlos Augusto Romero Filho

(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
UFPB

*Confere o original
Pereira*

Pereira de Oliveira
Mat. SIAPE 0334665
Secretário do Curso de Pós-Graduação em Física

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo a Deus que, presente em cada momento da minha vida, criou com perfeição a Natureza, estabelecendo cada lei física, possibilitando-me a concluir este trabalho.

Ao Prof. Fábio Leal de Melo Dahia, não só pela orientação e competência inquestionável, mas também pela paciência, incentivo e amizade, ingredientes essenciais no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Rômulo Rodrigues da Silva, pelo incentivo que recebi em momentos difíceis desta caminhada, pela sua contribuição em resoluções de problemas, elaboração de gráficos e animações gráficas utilizando o Maple.

Ao Prof. Francisco de Assis de Brito, que liderou o projeto de criação da pós-graduação em Física na UFCG em Campina Grande - PB.

A todos os professores deste departamento que contribuíram com a minha formação.

Aos meus pais, irmãos, amigos e especialmente a minha esposa, pelo apoio, confiança e incentivo.

Aos colegas de pós-graduação, em especial Alex de Albuquerque Silva e Hermes de Souza Jesuíno.

Aos estudantes de iniciação científica e funcionários do Departamento de Física.

A todos que participaram efetivamente para a conclusão deste trabalho.

A CAPES/CNPQ pelo suporte financeiro.

DEDICATÓRIA

Dedico a Deus esta conquista, pois toda honra e toda glória e para ele. Todo ser que respira é pra louvar ao Senhor. Ele é fiel e nunca desistiu de mim. Ele me carregou nos braços quando não pude caminhar, mas em nenhum momento me desamparou.

A minha esposa Eliane dos Santos Felix, pois foi ela em todo instante, mesmo antes de minha vida acadêmica começar, minha fonte de inspiração. Sem ela com certeza nada disto seria possível. Ela é o maior presente que Deus me deu, é a razão desta conquista e das próximas que ainda virão.

A minha mãe Marluce Felix da Silva, que sempre me espelhei como pessoa e como profissional. Pelo amor, carinho, compreensão e por acreditar nesta conquista antes mesmo que eu.

A meu Pai Pedro Trajano da Silva a quem eu tanto amo. Pelo exemplo de vida, pelo apoio financeiro (“... te darei o que você precisar pra você se tornar um grande homem...”), pela educação que me deu, e mesmo diante de todas as dificuldades (“... nunca ouvi falar que existe em nossa família alguém graduado...”) nunca deixou de acreditar em mim.

Aos meus irmãos Petrônio e Petrucio, pela amizade, pelo apoio e por tudo que representam pra mim.

Ao meu sogro José Felix da Silva e sogra Maria José Felix da Silva, pela amizade e exemplo de vida que eles transmitem.

Aos meus cunhados Betânia, Jairo, Aparecida, Jair, Evaldo, Luciano e Josemir .

Ao meu primo Joseilton (in memoriam) e a um dos meus melhores amigos Lauro (in memoriam).

Aos meus tios, primos e toda minha família.

Ao meu primeiro e eterno mestre Valdiélio Menezes, por ter me apresentado a Física, ministrado aulas gratuitas, me incentivando e motivando da forma que só ele sabe.

Aos meus amigos de infância e universidade, Elton (Ureião), Orlando (Negão), Jobson (Jobinha), Vandemberg (Berg), Kleriton (Kiki), Clerison (Kellu), Janailson, Siderley (Sayber), Leandro (Leleka), Tassiano, Felix (Guga), entre outros.

Aos meus ex-alunos e hoje colegas universitários Paulo César, Adiel, Daniele, Cláudio, Bruno, Joseilson, Paulo, Marcilho, entre muitos outros.

Ao Pr. Roberval pelo incentivo e orações em Cristo.

Aos colegas de Universidade Alex (Coxinha), Fábio (Egito), Igo, Hermes (Fodinha), André , Hedson e os demais.

Ao meu gato Eurico, por ser um exemplo de perseverança para qualquer ser humano,

pois apesar de todas as deficiências físicas se mostra sempre alegre.

A todos que direto ou indiretamente contribuíram para realização desse trabalho e para meu crescimento pessoal e profissional.

RESUMO

Um sistema de coordenadas tem a função de localizar os eventos do espaço-tempo com respeito a um sistema de referência. A construção do sistema de coordenadas depende crucialmente da noção de simultaneidade associada ao referencial. No entanto, não existe uma maneira natural, ou privilegiada, de definir simultaneidade para referenciais não-inerciais, mesmo no espaço-tempo de Minkowski. Cada procedimento conduz a diferentes sistemas de coordenadas. Neste trabalho, discutimos alguns métodos bem conhecidos da literatura especializada. Estudamos as coordenadas de Rindler, de Fermi-Walker, as coordenadas de Radar e as coordenadas de Emissão (ou GPS).

O sistema de coordenadas de Rindler é um dos sistemas de grande destaque porque permite simular algumas propriedades da geometria do Buraco Negro num espaço-tempo plano. As coordenadas de Rindler estão associadas a uma família de observadores uniformemente acelerados que obedecem à relação $a = \frac{1}{\rho}$, onde a é a aceleração própria do observador e ρ a sua posição inicial com respeito a algum sistema de referência inercial. Neste trabalho, propomos um método para construção de sistemas de coordenadas adaptados a observadores cuja aceleração depende da posição inicial segundo a regra $a = \frac{a_0}{\rho^n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e a_0 é uma constante, usando o princípio da localidade. O caso $n = 1$ recupera as coordenadas de Rindler. Os outros casos nos permitem discutir a relação entre a geometria não-Euclidiana das secções espaciais e referenciais acelerados, como originariamente proposto por Einstein. Além disso, com a generalização podemos simular o comportamento de observadores estáticos tanto nas proximidades do horizonte de um Buraco Negro ($n = 1$) quanto em regiões afastadas ($n = 2$).

ABSTRACT

The main role of a coordinate system is to localize the events of spacetime with respect to a frame of reference. The construction of a coordinate system depends crucially on the notion of simultaneity associated to the frame of reference. However, there is no natural manner of defining simultaneity adapted to non-inertial frames of reference, even in the case of Minkowski spacetime. Each procedure leads to different coordinate systems. In this work, we discuss some well-known methods found in the literature. We study the Rindler coordinates, Fermi-Walker coordinates, Radar coordinates and Emission (or GPS) coordinates. The system of Rindler coordinates has great interest because it simulates in a flat spacetime some aspects of a Black Hole's geometry. We can say that Rindler coordinates are adapted to a family of uniformly accelerated observers which obey the relation $a = \frac{1}{\rho}$, where a is the proper acceleration and ρ is the initial position with respect to some inertial system. In this work, we also propose a method in order to construct coordinate systems adapted to observers whose accelerations depend on the initial position according to the formula $a = \frac{a_0}{\rho^n}$, where $n \in \mathbb{N}$ and a_0 is a constant, by using the locality principle. The case $n = 1$ reproduces the Rindler coordinates. The other cases allow us to verify a connection between non-Euclidean geometry of the spatial sections and non-inertial frames of reference, as it was originally suggested by Einstein. With this generalization we can also simulate the behavior of static observers in the vicinity of a Black Hole's Horizon ($n = 1$) and also in distant regions ($n = 2$).

Conteúdo

1	Introdução	10
2	Relatividade Especial e Espaço-Tempo de Minkowski.	13
2.1	Quantidades Invariantes	14
2.2	Representação Geométrica do Espaço-Tempo	19
2.2.1	Tempo Próprio e o Intervalo	22
2.3	Quadrivetores	23
3	Observadores Uniformemente Acelerados	27
3.1	Equações de Movimento para Observadores Uniformemente Acelerados	27
3.2	Observadores Brevemente Acelerados	29
3.3	Sistema de Coordenadas de Rindler	31
3.4	Novo Sistema de Coordenadas Baseado na Família de Observadores de Rindler	34
3.5	Coordenadas Usuais de Rindler e o Novo Sistema de Coordenadas.	38
4	Alguns Métodos de Construção de Sistemas de Coordenadas	39
4.1	Transporte de Fermi-Walker	39
4.2	Coordenadas de Fermi-Walker.	43
4.2.1	Sistema de Coordenadas Local de Um Observador Acelerado.	43
4.2.2	Coordenadas de Fermi para um Observador Movendo-se em Círculo no Espaço de Minkowski.	46
4.3	Coordenadas de Radar.	51
4.3.1	Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador Inercial	55
4.3.2	Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador de Rindler	56
4.3.3	Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador em Movimento Circular e Uniforme:	57
4.4	Coordenadas de Emissão.	62
4.4.1	Coordenadas de Emissão para Observadores Inerciais no Espaço-Tempo de Minkowski.	64

4.4.2	Coordenadas de Emissão para Observadores de Rindler no Espaço-Tempo de Minkowski.	67
5	Sistemas de Coordenadas Adaptados a Observadores Uniformemente Acelerados.	70
5.1	Equações de Movimento Generalizada para Observadores Uniformemente Acelerados.	70
5.2	Sistema de Coordenadas.	72
5.3	Casos Particulares.	76
5.3.1	Sistema de Coordenadas de Observadores que Possuem a Mesma Aceleração ($n = 0$).	76
5.3.2	Sistema de Coordenadas de Observadores com Aceleração $\frac{1}{\rho}$ ($n = 1$, “ <i>Rindler</i> ”).	78
5.3.3	Sistema de Coordenadas de Observadores com Aceleração $\frac{1}{\rho^2}$ ($n = 2$).	79
5.4	Observador Estático nas Proximidades do Buraco Negro de Schwarzschild.	81
6	Comentários e Conclusões	84
	Apêndice	87
	Bibliografia	89

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho se concentra no estudo da construção de sistemas de coordenadas no espaço-tempo de Minkowski. Em trabalhos recentes muito se tem discutido sobre as formas encontradas de rotular eventos no espaço-tempo [6]-[30]. Nossa intenção consiste em apresentar sistematicamente algumas maneiras de construir sistema de coordenadas e também propor novos métodos.

A Relatividade Especial constitui a teoria indispensável para desenvolvimento deste trabalho e por este motivo dedicamos o capítulo 2 integralmente a seu estudo, dando sempre ênfase as grandezas invariantes e aos aspectos geométricos [1]-[5].

No Capítulo 3, dedicamos nosso estudo a sistemas de coordenadas associados a observadores uniformemente acelerados e as dificuldades inerentes à construções dos mesmos. É importante ressaltar que nosso estudo está restrito ao espaço-tempo plano (espaço-tempo de Minkowski). Mesmo assim, a tarefa de construir sistemas de coordenadas adaptadas a observadores acelerados não é trivial. Em geral, estas coordenadas são válidas apenas em um domínio restrito do espaço-tempo. Esta limitação está bem ilustrada no clássico exemplo de um observador brevemente acelerado [1, 6].

Um conhecido sistema de coordenadas baseado em referenciais não-inerciais é o sistema de coordenadas de Rindler [7], que é construído utilizando uma família de observadores uniformemente acelerados no espaço-tempo de Minkowski. Este sistema sempre atraiu grande atenção devido a suas características de “ simular ” alguns aspectos da geometria de buracos negros [1, 7].

As regras utilizadas para rotular os eventos no espaço-tempo podem variar de um referencial para outro. Na verdade, usando um único referencial, podemos até mesmo atribuir diferentes coordenadas a um mesmo evento, por meio de diferentes procedimentos. É com este argumento que vamos, ainda no capítulo 3, baseados nos observadores de Rindler, atribuir novas coordenadas aos eventos, que diferem das coordenadas usuais de Rindler em um aspecto específico [15]. Como veremos, a construção das coordenadas de Rindler privilegia um membro da família de observadores, pois a coordenada temporal do evento é atribuída pelo relógio de um observador particular. Em contrapartida, iremos

seguir um procedimento que deverá tratar todos os membros da família da mesma maneira. As novas coordenadas atribuídas por um referencial não-inercial possuem características bem interessantes. As secções espaciais, isto é, o conjunto de eventos que são rotulados com a mesma coordenada temporal, são curvas. Em outras palavras, a geometria das secções espaciais são não-Euclidianas. Naturalmente, a mudança de referencial não modifica a curvatura do espaço-tempo. O espaço-tempo de Minkowski é plano e esta propriedade geométrica não depende do referencial que nós escolhemos para descrevê-lo. É importante enfatizar que neste trabalho nós estaremos interessados na geometria das secções espaciais que podem ser não-Euclidianas apesar do espaço-tempo ser plano.

Nos primeiros momentos da Teoria Geral da Relatividade, Einstein discutiu um exemplo envolvendo referenciais não-inerciais (um dico girante) para explicar a conexão entre a aceleração e geometria não-Euclidiana. Esta idéia foi um importante passo para estabelecer a relação entre gravitação e geometria, que constitui o conceito básico da Teoria da Relatividade Geral. O passo complementar é o princípio da equivalência que relaciona aceleração e gravidade. Juntos, eles sugerem que gravitação e geometria podem estar conectados de alguma forma [33].

Neste contexto, o novo sistema de coordenadas que definimos pode ser utilizado para ilustrar de forma simples a conexão entre referenciais não-inerciais e espaço curvo.

O capítulo 4 foi destinado a uma revisão bibliográfica das formas mais conhecidas de construir sistema de coordenadas. Entre os diferentes procedimentos destacamos:

Coordenadas de Fermi-Walker

De acordo com este procedimento, os rótulos dos eventos ocorridos no espaço-tempo são atribuídos a partir de um sistema de coordenadas co-móvel ao observador, cujos eixos coincidem com a direção de uma tétrada que é carregada ao longo da linha de universo do observador, segundo o transporte de Fermi-Walker [25]-[27].

Coordenadas de Radar

Outro método de construção de sistemas de coordenadas de grande interesse consiste nas Coordenadas de Radar ou Coordenadas de Märzke-Wheeler. Estas coordenadas são construídas por meio de um observador que percorrendo o espaço-tempo, emite de forma continua pulsos luminosos [29]-[30]. Os pulsos são recebidos pelo evento a ser registrado e imediatamente emitidos de volta ao observador, que, ao receber novamente seu sinal, atribui, como rótulo temporal, a média aritmética do tempo gasto pelo sinal para ir e voltar, de acordo com seu ponto de vista. Já o rótulo espacial consiste na metade da distância percorrida pelo sinal durante o movimento de ida e volta.

Coordenadas de Emissão

Atualmente, muito se tem estudado sobre o procedimento que produzem as Coordenadas de Emissão ou Coordenadas de GPS [16]-[22]. Estas coordenadas são geradas a partir de quatro observadores que, movendo-se arbitrariamente no espaço-tempo, propagam, através de pulsos luminosos, seus respectivos tempos próprios. Um evento qualquer no espaço-tempo recebe como rótulo os tempos próprios difundidos pelos pulsos luminosos que interceptam-se naquele evento.

No capítulo 5, desenvolvemos uma formulação geral para construir sistemas de coordenadas adaptados a observadores não inerciais que se movem com aceleração própria constante, mas cuja intensidade varia, de um observador a outro, segundo sua distância inicial em relação à origem. Aplicando o princípio físico da localidade [23, 24], encontramos explicitamente as secções de simultaneidade no caso mais geral em que a aceleração (a) varia com a distância inicial (ρ) segundo a função $a = \frac{a_0}{\rho^n}$, com a_0 igual a uma constante e $n \in \mathbb{N}$. Discutiremos dois casos de maior interesse físico, quando $n = 1$ e $n = 2$. Esses dois casos correspondem à aceleração própria de observadores estáticos na métrica de Schwarzschild que se encontram respectivamente muito próximos do horizonte de eventos e muito longe.

Capítulo 2

Relatividade Especial e Espaço-Tempo de Minkowski.

Desde os primórdios da humanidade, o homem sempre apresentou fascínio pelos fenômenos da Natureza. A curiosidade de compreender determinados fenômenos, assim como a busca incessante para descobrirmos nossa posição e origem no universo, promoveram o desenvolvimento da ciência que nos dias atuais está presente nas mais variadas maneiras em nosso cotidiano.

As primeiras teorias propostas pelo homem que tentavam explicar os fenômenos naturais, eram compostas por mitos, quase sempre relacionados a religião, fundamentadas em simples observações.

Galileu Galilei (1564-1640), autor de descobertas fundamentais no campo da Física e Astronomia e considerado por muitos o pai da Física Moderna, adotou novas maneiras de abordar os fenômenos fundamentando-se em “ como ” eles acontecem, descrevendo-os matematicamente, utilizando-se de experimentos e sempre que possível, procurando a relação entre eles.

No campo da Mecânica, Galileu modificou conceitos e quebrou antigas teorias, desempenhando um papel fundamental para o avanço desta área. Entretanto, ficou para o físico e matemático inglês Issac Newton (1643-1727) o trabalho de sintetizar a mecânica clássica (também conhecida como mecânica newtoniana) em três leis básicas. Estas leis baseavam-se em fatos convincentes, ligados ao raciocínio cotidiano e apresentavam resultados satisfatórios diante dos limites de precisão até então observados.

Entre outros princípios, a Física Newtoniana defende que as leis da Mecânica são exatamente as mesmas em todos os sistemas inerciais¹.

Com o desenvolvimento da Teoria do Eletromagnetismo, e a descoberta de que a luz se propaga como uma onda, foi proposto um suposto meio de propagação da luz dado historicamente o nome de éter². De acordo com a Mecânica Clássica, se um observador

¹Sistema não acelerado, onde é válido o uso da lei da inércia

²Substância hipotética a qual, se imaginava, tinha entre outras propriedades a capacidade de transmitir

em repouso com relação ao éter, medir para a velocidade da luz um valor “ c ”, um outro sistema se movendo com velocidade constante v em relação ao éter, medirá uma velocidade diferente para o pulso luminoso, desde “ $c + v$ ” até “ $c - v$ ”, dependendo da direção do movimento relativo [3]. Daí então, muitos pesquisadores dedicaram-se inteiramente a detecção do éter, várias experiências foram realizadas, algumas ficaram conhecidas, devido a grande precisão, como foi o caso do interferômetro de Michelson-Morley, no entanto, nenhuma delas foi capaz de detectar o meio hipotético.

Em 1905, antes mesmo de se abandonar a hipótese do éter, Albert Einstein (1879-1955), propôs uma solução para o problema que desencadearia uma nova teoria, a Relatividade Especial ou Relatividade Restrita [3]. As suposições de Einstein, ou Princípios da Relatividade podem ser resumidos como:

1. As leis da Física são as mesmas em todos os sistemas inerciais. Não existe sistema inercial preferencial.

2. a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todos os sistemas inerciais.

A idéia da invariância da velocidade da luz, incompatível com a lei Newtoniana de adição e subtração das velocidades de referenciais que se deslocam, conduziu Einstein a estabelecer uma nova cinemática compatível com os princípios da Relatividade Especial [1]-[5]. As idéias de que tanto o comprimento quanto o tempo seriam quantidades absolutas deveriam ser abandonadas.

2.1 Quantidades Invariantes

A Relatividade Galileana (ou Clássica) está fundamentada na geometria Euclidiana tridimensional, mais um parâmetro temporal que ficou conhecido como tempo de Newton ou tempo universal³. No período de domínio da Física Clássica o espaço e o tempo eram considerados como grandezas físicas com propriedades distintas e independentes [3].

Por sua vez, a Relatividade Especial é compatível com a geometria Minkowskiana, que de certa maneira “une” o espaço e o tempo em um único conjunto quadridimensional, o espaço-tempo. Esta junção entre o espaço e o tempo desencadeou modificações severas na física clássica.

Um bom começo para o estudo da Relatividade Especial consiste em examinar quantidades invariantes. Estas quantidades revelam características reais dos objetos em estudo, não sendo influenciados pelos observadores que os medem [2]. Considere por exemplo dois pontos sobre o espaço plano (espaço euclidiano) e que podem ser localizados através de um sistema de coordenadas K , definido com os eixos x e y perpendiculares entre si (ver fig.2.1). Projetando cada ponto sobre esses eixos, podemos medir a distância “ ΔS ”

radiação eletromagnética e que permeava todo o espaço

³Para Newton, o tempo evolui no mesmo ritmo independente do observador.

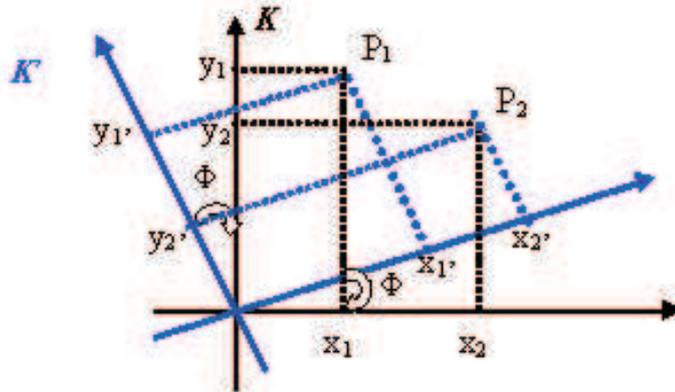


Figura 2.1: Dois sistemas de coordenadas K e K' registram os pontos P_1 e P_2 no espaço com diferentes coordenadas, porém a distância entre os pontos permanece inalterada independente do sistema de coordenadas.

entre dois pontos, sendo dada por:

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad (2.1)$$

Tomemos agora um outro sistema de coordenadas K' , onde definimos os eixos x' e y' , também perpendiculares entre si, porém submetidos a uma rotação de um ângulo “ ϕ ” com relação ao eixo original. Neste sistema, a distância entre os pontos será dada por:

$$\Delta S'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 \quad (2.2)$$

Entretanto, independente da rotação, a distância permanece invariante sobre a transformação de coordenadas, ou seja:

$$\Delta S = \Delta S' \quad (2.3)$$

Na Relatividade Restrita a coordenada temporal é incorporada as coordenadas espaciais constituindo um sistema de coordenadas (t, x, y, x) , que permite identificar os eventos do espaço-tempo. A parte do sistema de coordenadas responsável pelas coordenadas espaciais pode ser construída a partir de réguas infinitamente longas, soldadas com determinado ângulo e que juntas podem mover-se com velocidade constante. O tempo pode ser registrado com relógios distribuídos por toda régua, sincronizados de maneira que numa viagem passando por diferentes relógios, a diferença de tempo entre eles não depende da direção da viagem. Criamos assim um sistema de coordenadas inercial.

Definimos evento como sendo um acontecimento de curta duração, bem localizado no espaço. O intervalo entre dois eventos pode ser calculado por:

$$\Delta S^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (2.4)$$

c é a velocidade da luz. Convenientemente, vamos trabalhar em um sistema de medidas que $c = 1$. Caso queiramos recuperar o valor de c , basta fazermos uma análise dimensional nas demais grandezas.

Analogamente a distância entre dois pontos medida na geometria euclidiana, o intervalo é invariante quanto à escolha de um novo sistema de coordenadas, podemos dizer que ele transmite a idéia de “ distância ” no espaço-tempo.

Vamos agora introduzir uma nova notação, bem mais conveniente, a qual será muito utilizada no restante deste trabalho. Vamos denotar as coordenadas do espaço-tempo através de índices gregos variando de 0 a 3. Assim temos:

$$x^\mu : \begin{cases} x^0 = t \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases}$$

Nesta notação quando nos referimos apenas as coordenadas espaciais do espaço-tempo, utilizaremos índices latinos, que podem variar de 1 a 3.

$$x^i : \begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases}$$

Podemos reescrever a equação (2.4), nesta notação como:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.5)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, nos fornece as componentes da métrica de Minkowski no sistema K.

Utilizando a convenção de soma de Einstein, em que índices repetidos (um subscrito e outro sobrescrito), representam uma soma de termos, temos:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.6)$$

Vamos agora analisar matematicamente as transformações de coordenadas que mantêm o intervalo (2.6) invariante [2]. Uma destas transformações é a translação:

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu \quad (2.7)$$

onde a^μ representa um vetor constante. Outro tipo de transformação linear consiste em multiplicar x^μ por uma matriz $\Lambda^{\nu'}{}_\mu$:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu \quad (2.8)$$

De maneira geral, a transformação (2.8) não preserva o intervalo (2.6). No entanto, Λ pode ser construída de tal forma que o produto mantenha o intervalo invariante. Em notação matricial, temos:

$$\Delta S^2 = (\Delta x)^T \eta (\Delta x) \quad (2.9)$$

Em outro referencial temos:

$$\Delta S^2 = (\Delta x)^T \eta (\Delta x) \quad (2.10)$$

Em outro referencial temos:

$$\Delta S'^2 = (\Delta x')^T \eta (\Delta x') \quad (2.11)$$

Realizando a transformação de coordenadas (2.8) o intervalo (2.11) pode ser escrito como:

$$\Delta S'^2 = (\Delta x)^T \Lambda^T \eta \Lambda (\Delta x) \quad (2.12)$$

Para que o intervalo mantenha-se invariante ($\Delta S^2 = \Delta S'^2$), devemos ter:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (2.13)$$

As matrizes que satisfazem a equação (2.13) são conhecidas como matrizes de transformações de Lorentz. As transformações de Lorentz compreendem uma larga classe de categorias como, por exemplo, a rotação convencional no plano $x - y$:

$$\Lambda^{\mu'}{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $0 \leq \phi \leq 2\pi n$.

Existem também os “ boosts ”, que podem ser entendidos como transformações entre referenciais que se movem relativamente com velocidade constante v . Para um movimento paralelo ao eixo x , temos:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $-\infty \leq \theta \leq \infty$.

Equacionando as transformações de coordenadas do tipo boosts, temos:

$$t' = t \cosh \theta - x \sinh \theta \quad (2.14)$$

$$x' = -t \sinh \theta + x \cosh \theta \quad (2.15)$$

$$y' = y \quad (2.16)$$

$$z' = z \quad (2.17)$$

O ângulo θ está relacionado à velocidade v entre os referenciais. O ponto $x' = 0$ (centro do referencial O') segue a equação horária $x = vt$ no referencial K . Assim, da equação (2.15), tiramos que:

$$v = \tanh \theta \quad (2.18)$$

Substituindo a eq.(2.18) nas eqs.(2.14) e (2.15), encontramos as conhecidas equações de transformações de Lorentz.

$$t' = \gamma(t - vx) \quad (2.19)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.20)$$

$$y' = y \quad (2.21)$$

$$z' = z \quad (2.22)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

Através destas equações, podemos estudar entre outros efeitos, a dilatação do tempo e a contração do espaço, medido por diferentes observadores inerciais que se encontram em movimento relativo [1]-[5].

De maneira geral podemos escrever as transformações que preservam a métrica de Minkowski invariante em uma única equação, conhecida como transformação de Poincaré.

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu'} \quad (2.23)$$

Notemos que a equação de transformação (2.23) pode representar simples translações ($a^{\mu'}$), como também boost e rotações ($\Lambda^{\mu'}_{\nu}$).

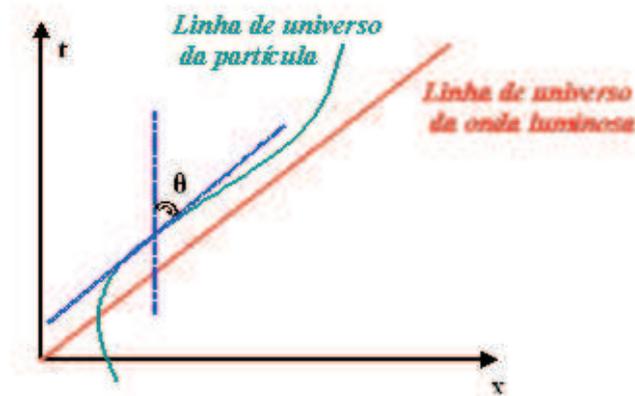


Figura 2.2: Representação Geométrica da Linha de Universo de uma partícula e de um pulso luminoso no plano do espaço-tempo.

2.2 Representação Geométrica do Espaço-Tempo

Um aparato matemático de grande utilidade para melhor compreensão da estrutura do espaço-tempo corresponde à sua representação geométrica [3, 5]. Como vimos, as equações de transformações de Lorentz estabelecem a cinemática compatível com a Relatividade Restrita, impondo uma interdependência entre transformações de coordenadas espaciais e temporais. O matemático Minkowski (1864-1909) foi um dos primeiros a estudar geometricamente a estrutura do espaço-tempo.

Por simplicidade, consideremos o espaço-tempo constituído de uma dimensão temporal e outra espacial. Traçando os eixos espacial e temporal perpendiculares entre si, estudamos o movimento de uma partícula neste sistema, descrevendo uma curva chamada *linha de universo*. Esta curva representa o lugar geométrico dos pontos no espaço-tempo correspondente ao movimento [3].

Sendo θ o ângulo formado entre a linha de universo da partícula e a vertical (ver fig.2.2). Em qualquer ponto sobre sua linha de universo:

$$\tan(\theta) = \frac{dx}{dt} = v$$

Para a relatividade a velocidade limite da matéria é a velocidade da luz, de maneira que teremos sempre $v \leq c$, ou seja, $\theta < 45^\circ$ para a matéria e $\theta = 45^\circ$ para um pulso luminoso.

Ao longo do eixo espacial, distribuimos um contínuo de observadores inerciais, que se encontram em repouso com relação ao sistema inercial K , de modo que suas linhas de universo, vistas neste referencial, evoluem como retas verticais. O eixo temporal coincide com a linha de universo do observador que parte da origem do sistema de coordenadas (ver fig.2.3). Estes observadores serão os responsáveis por rotular as coordenadas espaciais dos eventos neste referencial. No sistema de coordenadas de Minkowski, atribuímos aos eventos a mesma coordenada espacial do observador parado que cruza aquele evento.

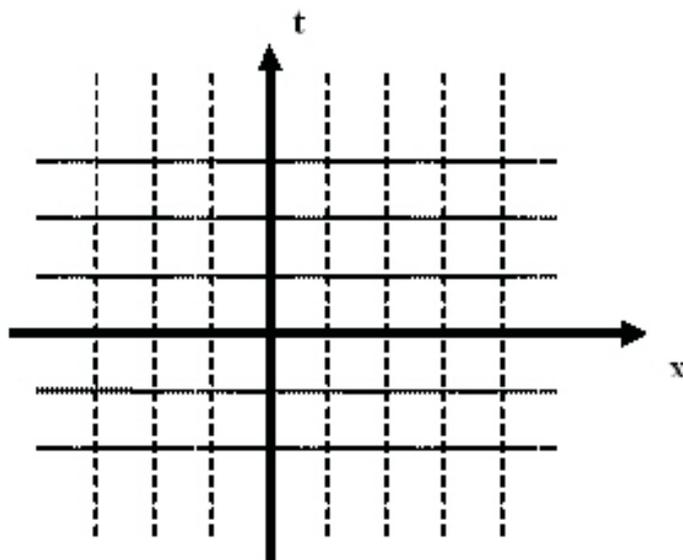


Figura 2.3: Representação geométrica de um sistema de coordenadas inercial K . As retas verticais, representam linhas de universo de observadores em repouso com relação ao sistema, já as retas horizontais representam linhas de simultaneidade.

Cada observador possui seu próprio relógio. Como os observadores estão em repouso entre si, então, os relógios apresentam os mesmos ritmos e podem ser sincronizados pelo método de Einstein, por exemplo. Sendo assim, os eventos simultâneos neste referencial correspondem a linhas retas paralelas ao eixo espacial. O próprio eixo espacial x , coincide com a linha de simultaneidade correspondente a $t = 0$.

Utilizando as equações de transformações (2.19) e (2.20), podemos construir a representação geométrica (vista pelo referencial K) de um segundo sistema de coordenadas K' , que se move com velocidade constante v com relação ao referencial K . Tomando $x' = 0$, em (2.20), encontramos $x = vt$, que descreve uma reta de inclinação v e que passa pela origem. Pela nossa construção, esta reta coincide com o eixo temporal t' . Atribuindo diferentes valores para x' , encontramos retas de mesma inclinação distribuídas continuamente sobre todo eixo espacial (ver fig.2.4), estas retas representam as linhas de universo dos observadores em repouso com relação ao referencial K' e são, neste referencial, responsáveis em atribuir as coordenadas espaciais aos eventos.

Do mesmo modo, fazendo $t' = 0$ na equação (2.19) encontramos $t = vx$, que também representa uma reta que passa pela origem mas, de inclinação $\frac{1}{v}$ com respeito ao eixo t . Pela nossa construção é de esperar que esta reta coincida com o eixo espacial x' . O ângulo formado entre os eixos espaciais (x e x') é igual ao ângulo formado entre os eixos temporais (t e t'). Utilizando diferentes valores para t' , construímos as linhas de simultaneidade para este referencial.

Comparando as linhas de simultaneidades, percebemos que os referenciais discordam

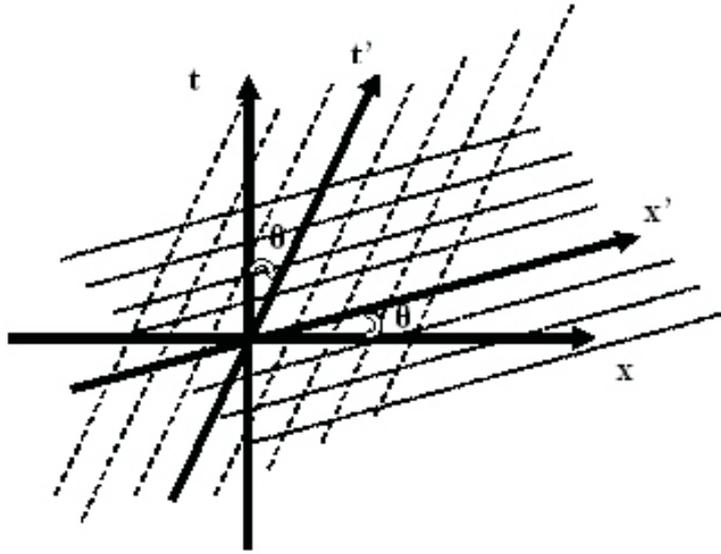


Figura 2.4: Representação geométrica de um sistema de coordenadas inercial K' , visto por um referencial também inercial K , que se afasta com velocidade relativa v .

quanto ao que é simultâneo. Em decorrência disso segue os conhecidos efeitos de dilatação temporal e contração dos comprimentos [1]-[5]. A partir das equações de transformações de Lorentz, podemos verificar (2.24) e (2.25).

$$\Delta L_p = \gamma \Delta L \quad (2.24)$$

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau \quad (2.25)$$

onde ΔL_p , ΔL , $\Delta \tau$ e Δt correspondem respectivamente ao comprimento próprio, comprimento medido por um observador em movimento, intervalo de tempo próprio e ao tempo medido por um observador em movimento.

De acordo com os princípios da Relatividade Restrita, teremos sempre $\gamma \geq 1$. As eqs.(2.24) e (2.25) traduzem os conhecidos efeitos de contração espacial e dilatação temporal que ocorre entre sistemas inerciais em movimento relativo.

Estudando as equações que descrevem as linhas de universo de um pulso luminoso, encontramos independentemente do sistema de coordenadas, $x^{(')} = \pm t^{(')}$, já que a velocidade da luz é invariante sobre as transformações de Lorentz. Temos assim, o que é chamado de cone de luz. O cone de luz determina a estrutura causal do espaço-tempo [3]. Ele divide o espaço-tempo em regiões nas quais os eventos a partir de “ O ”, podem ser classificados como:

Do tipo tempo - eventos que ocorrem nas regiões I ou II, ou seja, que podem estar conectados causalmente.

Do tipo espaço - eventos que ocorrem nas regiões III ou IV, ou seja, que não apresentam

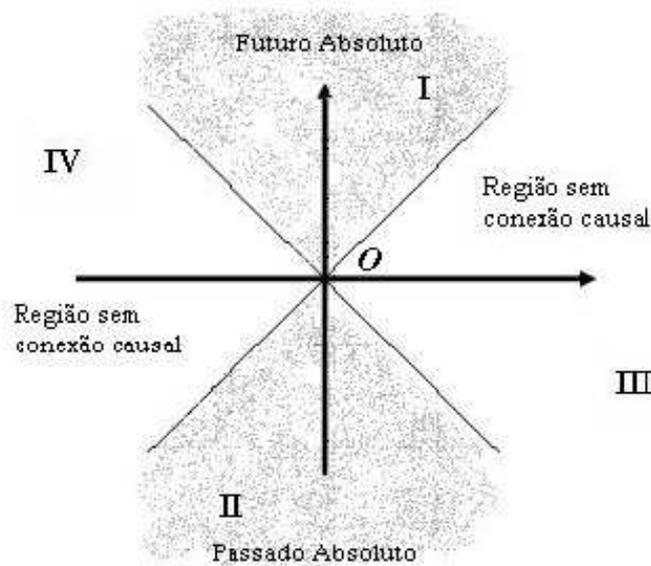


Figura 2.5: Cone de Luz com respeito ao evento O .

conexão causal.

Do tipo nulo - eventos que ocorrem sobre a linha de universo do pulso luminoso.

Calculando o intervalo entre dois eventos ocorridos na região do tipo tempo, observamos que a separação temporal é em módulo maior que a separação espacial, resultando pela nossa convenção em intervalos negativos ($\Delta S^2 < 0$). Por sua vez, eventos que ocorrem na região do tipo espaço a separação espacial é em módulo maior que a temporal, resultando em intervalos positivos ($\Delta S^2 > 0$). Já para o pulso luminoso as separações espaciais e temporais são iguais e o intervalo é sempre nulo ($\Delta S^2 = 0$).

2.2.1 Tempo Próprio e o Intervalo

Considere agora um observador executando um movimento arbitrário no espaço-tempo, analisado do ponto de vista do referencial inercial K . Tomemos dois eventos infinitesimalmente próximos ocorridos sobre a linha de universo do observador. Caso adotemos apenas uma dimensão espacial, o intervalo de separação entre esses dois eventos será:

$$ds^2 = -(dt)^2 + (dx)^2 \quad (2.26)$$

Considere agora um segundo referencial inercial K' instantaneamente co-móvel ao observador (mesma posição e velocidade), ou seja, um referencial em que a partícula encontra-se instantaneamente em repouso. Neste referencial K' , o intervalo é dado por:

$$ds'^2 = -(dt')^2 \quad (2.27)$$

De acordo com o princípio físico da localidade [23, 24] o tempo próprio $d\tau$, medido pelo observador, é igual a dt' , pois ambos possuem instantaneamente o mesmo estado físico (posição e velocidade) e portanto devem ser considerados equivalentes.

Sendo o intervalo invariante ($ds^2 = ds'^2$), segue que:

$$ds^2 = -d\tau^2 \quad (2.28)$$

Conseqüentemente:

$$d\tau = (1 - v^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.29)$$

2.3 Quadrivetores

De acordo com a geometria Euclidiana, um 3-vetor (ou tri-vetor) é uma quantidade com três componentes que, sob uma transformação de coordenadas, transforma-se como as coordenadas (x, y, z) [2][5]. Analogamente, um 4-vetor (ou quadri-vetor) é uma quantidade com 4 componentes, sendo três espaciais e uma temporal, que sob uma transformação de Lorentz, transforma-se como as coordenadas (t, x, y, z) .

Representamos geometricamente um 4-vetor A^μ no espaço-tempo como uma seta. O módulo $|\bar{A}|$ do 4-vetor A^μ é definido como:

$$|\bar{A}| = A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \quad (2.30)$$

trantando-se de um espaço-tempo plano $g_{\mu\nu}$ corresponde a métrica de Minkowski e no sistema inercial em coordenadas cartesianas temos:

$$|\bar{A}| = -A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 \quad (2.31)$$

Vamos agora descrever alguns exemplos de 4-vetores na relatividade especial:

4-Vetor Deslocamento:

Um simples exemplo de 4-vetor é o deslocamento dx^μ no espaço-tempo, que pode ser entendido como a separação entre dois eventos infinitesimalmente próximos. Seu módulo corresponde ao intervalo ds^2 . Escrito em coordenadas cartesianas, temos:

$$dx^\mu = (dt, dx, dy, dz) \quad (2.32)$$

4-Vetor Velocidade:

De acordo com a Mecânica Clássica, a velocidade instantânea de um corpo é igual a razão do deslocamento com o tempo:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \quad (2.33)$$

Do ponto de vista relativístico, estamos em busca de grandezas que se mantenham invariante por transformações de Lorentz [2]. Por este motivo a 4-velocidade v^μ é definida por meio do 4-deslocamento dx^μ e o tempo utilizado será o tempo próprio $d\tau$, ou seja, o tempo medido por um observador que acompanha o movimento do corpo. Assim, temos:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.34)$$

Utilizando as eqs.(2.29) e (2.34), podemos encontrar as componentes da quadrivelocidade em um sistema de coordenadas inercial:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (1, v^i) \quad (2.35)$$

Note que utilizando a eq.(2.31), determinamos o módulo da 4-velocidade como:

$$|v| = v^\mu v_\mu = -1 \quad (2.36)$$

4-Vetor Aceleração:

A 4-aceleração a^μ é definida como a derivada da 4-velocidade v^μ com relação ao tempo próprio τ .

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \quad (2.37)$$

De sua própria definição a 4-aceleração é perpendicular⁴ a 4-velocidade, como está demonstrado abaixo:

$$a^\mu v_\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} \bar{v}_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (v^\mu v_\mu) = 0 \quad (2.38)$$

4-Vetor Energia -Momento:

A Mecânica Clássica define momento linear como sendo o produto da massa pela velocidade, entretanto no contexto da relatividade, para que o momento mantenha-se invariante por transformações de Lorentz e o princípio da conservação do momento continue sendo válido, é essencial que o momento seja escrito em termos da 4-velocidade [5]. Com estes propósitos, o 4-momento é definido como:

$$p^\mu = m_0 v^\mu \quad (2.39)$$

onde m_0 é conhecido como massa de repouso.

⁴Para a relatividade a noção de perpendicularidade é dada pela métrica do espaço-tempo.

Analisando apenas a parte espacial do 4-momento p^i e utilizando as eqs.(2.29) e (2.33) encontramos:

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (2.40)$$

Vamos agora analisar o significado físico da parte temporal p^0 do 4-momento. Trabalhando de modo semelhante a parte espacial, é possível determinarmos que:

$$p^0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (2.41)$$

Expandindo $(1 - v^2)^{-1/2}$ em séries de potência, podemos escrever em primeira aproximação:

$$E = p^0 \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \quad (2.42)$$

Recuperando a constante c , temos:

$$E = cp^0 \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \quad (2.43)$$

O segundo termo do lado direito da eq.(2.43) é uma expressão bem conhecida na Mecânica Clássica: trata-se da energia cinética. Assim podemos concluir que E corresponde a energia relativística da partícula. Notamos que a energia contém um termo adicional não nulo (mc^2), mesmo com $v = 0$. Por este motivo, ele é chamado de energia de repouso.

O 4-momento pode então ser definido em termos de suas componentes como:

$$p^\mu = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - v^2}} \right) = (E, p^i) \quad (2.44)$$

4-Vetor Força:

Como é bem conhecido, a Força F^i é para Newton, definida como a variação do momento por intervalo de tempo.

$$F^i = \frac{dp^i}{dt} \quad (2.45)$$

No entanto, para manter-se invariante frente as transformações de Lorentz, a 4-força K^μ é definida como a variação do 4-momento com relação ao tempo próprio:

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (2.46)$$

A 4-força também é conhecida como força de Minkowski. Suas componentes espaciais estão relacionadas com a força newtoniana, por:

$$K^i = \frac{dp^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} F^i \quad (2.47)$$

Já a componente temporal da 4-força:

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dE}{d\tau} \quad (2.48)$$

podemos fisicamente interpreta-la como a potência desenvolvida pela força F^i sobre a partícula.

Capítulo 3

Observadores Uniformemente Acelerados

Trabalhar com observadores uniformemente acelerados no espaço-tempo não é sempre uma tarefa tão fácil. A construção de sistemas de coordenadas baseados nestes observadores, mesmo em um espaço-tempo plano, apresenta dificuldades. Geralmente não cobrem univocamente todo espaço-tempo [1, 6]

A família de observadores acelerados mais conhecida na literatura corresponde aos observadores de Rindler, que como estudaremos neste capítulo apresentam algumas peculiaridades bem interessantes.

3.1 Equações de Movimento para Observadores Uniformemente Acelerados

Vamos começar nosso estudo sobre observadores uniformemente acelerados conhecendo suas equações de movimento [1]. Consideremos inicialmente um observador arbitrário que percorre o espaço-tempo de Minkowski descrevendo determinada linha de universo que é registrada por um sistema de coordenadas inercial K . Vamos estudar este movimento em $(1 + 1)$ -dimensões, de modo que:

$$x^\mu = (t, x) \qquad v^\mu = (v^0, v^1) \qquad a^\mu = (a^0, a^1)$$

Como sabemos, um observador estará realizando um movimento acelerado caso sua linha de universo não seja uma reta no sistema K . Suponhamos que o observador acima descrito experimente uma aceleração própria¹ uniforme de magnitude “ a ”, de tal forma que:

$$a^\mu a_\mu = -(a^0)^2 + (a^1)^2 = a^2 \tag{3.1}$$

¹aceleração medida por um referencial inercial co-móvel ao observador.

Utilizando as equações (2.36) e (2.38) determinamos respectivamente para este movimento:

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -1 \quad (3.2)$$

$$-u^0 a^0 + u^1 a^1 = 0 \quad (3.3)$$

Sendo a equação (2.37) a equação geral para o movimento de um observador com respeito a um sistema inercial K , podemos resolvê-la utilizando as condições (3.1)-(3.3). Admitindo que o observador inicia seu movimento do repouso, partindo da posição $x(0) = a^{-1}$, obtemos as equações paramétricas que descrevem sua linha de universo:

$$t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau) \quad (3.4)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau) \quad (3.5)$$

Podemos facilmente verificar que a linha de universo deste observador descreve uma hipérbole no diagrama do espaço-tempo já que as soluções acima satisfazem à equação:

$$x^2 - t^2 = a^{-2} \quad (3.6)$$

Através das equações de movimento (3.4) e (3.5) podemos determinar, para um dado instante τ , a velocidade relativa do observador uniformemente acelerado como sendo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \tanh(a\tau) \quad (3.7)$$

No limite de baixas velocidades ($v \ll 1$) devemos recuperar a física clássica. Neste caso, de acordo com a eq.(3.7), devemos ter $\tanh(a\tau) \ll 1$, conseqüentemente $a\tau \ll 1$.

Expandindo as eqs. (3.4) e (3.5) até termos de segunda potência, obtemos:

$$t(\tau) = \tau \quad (3.8)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{a} + a \frac{\tau^2}{2} \quad (3.9)$$

As eqs. (3.8) e (3.9) definem as equações de movimento de um observador uniformemente acelerado que como podemos verificar, recupera as equações de movimento Newtoniano e obedece a equação da parábola:

$$x(t) = \frac{1}{a} + \frac{at^2}{2}$$

3.2 Observadores Brevemente Acelerados

Como descrito no capítulo anterior, o sistema de coordenadas de Minkowski pode cobrir todo espaço-tempo sem ambiguidade, pois está construído com base em observadores inerciais. Entretanto, de maneira geral, sistemas de coordenadas adaptados a observadores acelerados apresentam problemas que dificultam a sua construção. O fato é que suas linhas de universo e até mesmo suas linhas de simultaneidade podem se cruzar. Como resultado, não podemos atribuir de maneira unívoca coordenadas a todos os eventos ocorridos no espaço-tempo. Uma forma encontrada para não abandonarmos tais sistema de coordenadas consiste em restringir seu domínio de validade às regiões do espaço-tempo onde não há intersecção entre linhas de universo e entre linhas de simultaneidade [1, 6].

Consideremos dois sistemas de coordenadas inerciais K e K' tal que o referencial K' move-se com velocidade relativa v , paralela e no sentido positivo de um eixo espacial de K e que em $t = 0$ seus relógios sejam coincidentes ($x = x', t = t'$). Tomemos agora um observador que estando em repouso na origem do referencial K , experimenta uma breve aceleração de módulo constante “ a ”, atingindo a velocidade v no instante em que cruza a origem do referencial K' . A partir daí o observador mantém-se em repouso com relação a K' , ou seja, mantém-se com velocidade v em relação ao referencial K (ver fig.3.1).

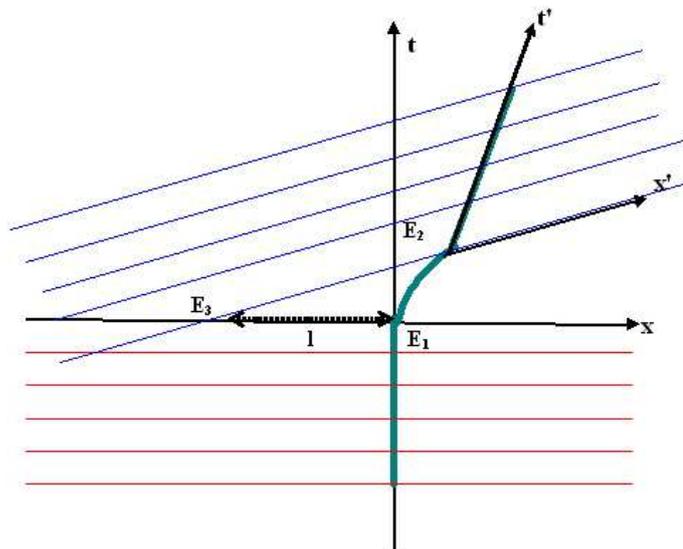


Figura 3.1: Representação geométrica da linha de universo de um observador que estando em repouso com relação ao referencial K , sofre uma breve aceleração e mantém-se em repouso com relação ao referencial K' .

Vamos admitir que o observador carrega consigo réguas e relógios constituindo assim, um sistema de coordenadas em sua vizinhança. Utilizando o princípio físico da localidade²

²De acordo com o princípio da localidade dois observadores que se encontram instantaneamente na mesma posição e velocidade possuem o mesmo estado físico (física não-quântica) e portanto devem ser

[23, 24], ou seja, tomando emprestado a noção de simultaneidade pertencente a um observador inercial co-móvel, o observador brevemente acelerado mapeia o espaço-tempo antes e depois da aceleração, obtendo como linhas de simultaneidade retas vermelhas paralelas ao eixo x (ver fig.3.1) antes da aceleração e retas azuis paralelas ao eixo x' depois da aceleração. Notemos que sobre o eixo espacial x , (de acordo com a fig.3.1) para distâncias maiores que l , há um encontro de linhas de simultaneidade, resultando em uma ambiguidade, pois eventos ocorridos em regiões afastadas da origem seriam rotulados com duas coordenadas temporais. Devemos então restringir a validade do sistema de coordenadas para regiões próximas à origem [1, 6].

Seja $E_1 = (0, 0)$ o evento que caracteriza o início da aceleração, já o evento E_2 constitui a saída do movimento uniformemente acelerado e $E_3 = (0, l)$ a posição da primeira intersecção entre as linhas de simultaneidade. Pela nossa construção, as coordenadas do evento E_2 são, de acordo com as equações (3.4) e (3.5), (observe que neste caso o observador parte da posição $x(0) = 0$), dadas por:

$$E_2 = (a^{-1} \sinh a\tau, a^{-1} \cosh a\tau - a^{-1})$$

Sendo os sistemas de coordenadas K e K' inerciais, eles estão relacionados através das equações de transformação de Lorentz. A linha de simultaneidade (ou secção de simultaneidade) correspondente a K' , é constituída pelo conjunto de eventos que recebem a mesma coordenada temporal t' . Vamos considerar o caso particular da linha de simultaneidade em que $t'=0$, que coincide com o eixo espacial x' . Usando a eq.(2.19), encontramos a equação que descreve esta linha de simultaneidade:

$$t = v(\tau)x + \frac{1}{a} \tanh(a\tau) \quad (3.10)$$

A linha de simultaneidade que passa pelo evento E_2 cruza a linha de simultaneidade $t = 0$, determinando a posição l do evento E_3 que delimita a região de validade do sistema de coordenadas. Assim, tomando $t = 0$ na eq.(3.10), encontramos:

$$l = a^{-1} \quad (3.11)$$

Concluimos então que há inconsistência física para rotular, com este sistema de coordenadas, eventos ocorridos em regiões mais afastadas que a^{-1} . Para adquirirmos uma intuição do grau desta restrição, vamos considerar o caso de um observador que experimenta uma aceleração igual ao valor da aceleração da gravidade na superfície da Terra. Fazendo uma análise dimensional para recuperarmos a unidade de distância, temos:

$$l = \frac{c^2}{a} \cong 9 \times 10^{15} m \quad (3.12)$$

considerados equivalentes inclusive quanto à determinação do que é simultâneo.

Para o caso acima descrito, a restrição não é muito severa, mas pode tornar-se apreciável à medida que a aceleração aumenta.

3.3 Sistema de Coordenadas de Rindler

Como vimos na seção 3.1, um observador uniformemente acelerado no espaço-tempo possui como linha de universo uma hipérbole cuja concavidade é definida de acordo com a intensidade da aceleração [7]. Vamos agora imaginar um conjunto de observadores uniformemente acelerados distribuídos continuamente ao longo de todo o eixo espacial. Sendo “ ρ ” a posição inicial do observador ($x(0) = \rho$), e “ a ” a aceleração que cada observador experimenta. Vamos considerar esta família de observadores partindo no instante $t = 0$ com acelerações que variam, de um observador para outro, segundo a relação:

$$a = \frac{1}{\rho} \tag{3.13}$$

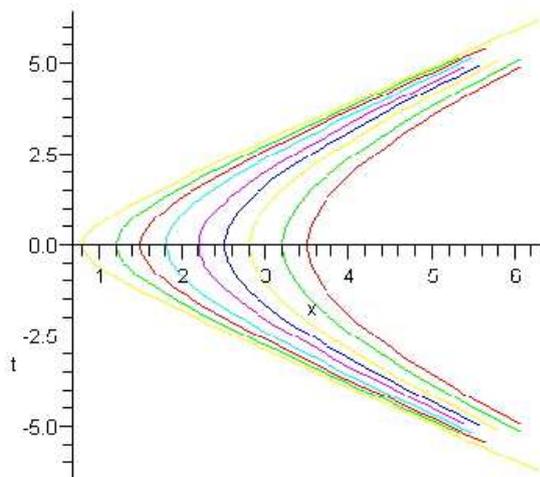


Figura 3.2: Família de Observadores de Rindler. Observadores uniformemente acelerados cuja aceleração individual diminui com suas respectivas posições iniciais $(0, \rho)$.

É importante ressaltar que cada observador executa individualmente um movimento uniformemente acelerado, porém cada um parte com uma aceleração diferente que depende do inverso de sua posição inicial. Assim podemos esperar que observadores próximos a origem estejam fortemente acelerados, com linha de universo descrevendo uma hipérbole de concavidade acentuada (ver fig.3.2), já observadores que partem de distâncias suficientemente afastadas da origem devem encontrar-se suavemente acelerados, possuindo como linha de universo praticamente retas.

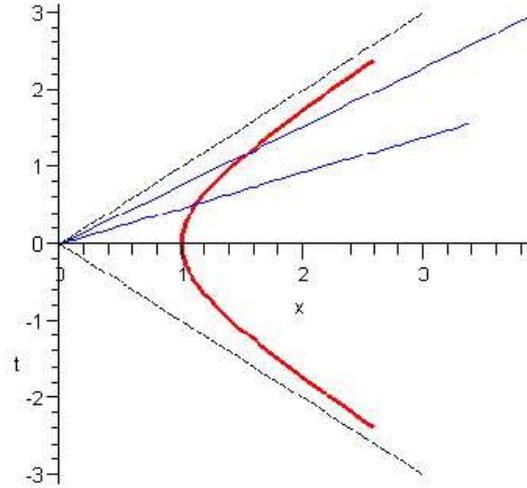


Figura 3.3: A hipérbole representa a linha de universo do observador uniformemente acelerado que parte da posição $\rho = 1$. As linhas retas correspondem a secções de simultaneidade relativas ao observador acelerado para diferentes valores do tempo ($\tau = 0.5$ e 1 respectivamente). Em $\tau = 0$ a seção de simultaneidade coincide com o eixo-x. As linhas tracejadas representam parte do cone de luz.

As coordenadas usuais de Rindler são atribuídas como se segue [7]. Tomemos um observador acelerado particular (que chamaremos de O). Para um dado instante τ existe um sistema inercial K' co-móvel ao observador escolhido O. É claro que a cada instante τ corresponderá um diferente sistema inercial co-móvel K' , já que a velocidade do observador está mudando no tempo. Para levarmos isto em conta vamos escrever $K'(\tau)$.

A construção das coordenadas de Rindler está baseada na hipótese da localidade [23, 24], que discutimos anteriormente. Sendo assim, a secção espacial Σ_τ relativa ao observador acelerado no instante τ (isto é, o conjunto de eventos que ocorrem simultaneamente de acordo com o observador O naquele instante) coincide com o eixo espacial x' do referencial $K'(\tau)$.

A origem de $K'(\tau)$ corresponde a posição do observador acelerado no instante τ , que é dado pelas equações (3.4) e (3.5) (lembrando que neste caso $a = a(\rho)$).

No diagrama do espaço-tempo, Σ_τ corresponde a uma linha reta que cruza a origem de K e tem coeficiente angular que depende da velocidade relativa do observador naquele instante. Como a velocidade do observador está aumentando no tempo, o ângulo da seção espacial Σ_τ com respeito ao eixo x do referencial K também aumenta. Deste modo, concluímos que as seções de simultaneidade relativas ao observador acelerado são linhas retas que convergem para a origem de K e assintoticamente tendem à geratriz do cone de luz à medida que a velocidade do observador torna-se próxima da velocidade da luz (fig.(3.3)).

Vamos agora considerar um evento E qualquer. Este evento está situado sobre alguma seção de simultaneidade Σ_τ . Será o valor τ que iremos considerar como coordenada temporal de Rindler para o evento E. Já a coordenada espacial desse evento, que chamaremos de ξ é definida usando o referencial $K'(\tau)$ mais uma vez. O evento E está rotulado no referencial $K'(\tau)$ com coordenadas $(t' = 0, x')$. Consideramos x' como a coordenada espacial do novo sistema. Assim, as coordenadas de Rindler para o evento serão $(\tau, \xi = x')$, por construção.

Vamos descobrir a lei de transformação entre as coordenadas de Rindler e as coordenadas (t, x) do referencial K. Sendo os referenciais K e $K'(\tau)$ inerciais, eles devem estar relacionados pelas equações de transformação de Lorentz. Tomamos então $t' = 0$ e $x' = \xi$ nas eqs. de transformações de Lorentz e sabendo que a posição inicial do referencial $K'(\tau)$ é dado pelas eqs.(3.4) e (3.5), com velocidade relativa definida na eq.(3.7), obtemos as relações entre coordenadas:

$$t = \left(\frac{1}{a} + \xi \right) \sinh(a\tau) \quad (3.14)$$

$$x = \left(\frac{1}{a} + \xi \right) \cosh(a\tau) \quad (3.15)$$

Estas equações de transformação estão bem definidas para $x > |t|$ [7]. No diagrama do espaço tempo, isto corresponde a região do lado direito do cone de luz (ver fig.3.3). Assim, as coordenadas de Rindler cobrem um domínio restrito do espaço-tempo de Minkowski, a exemplo do observador brevemente acelerado. Neste sistema de coordenadas a forma métrica 2-dimensional é dada por:

$$ds^2 = -a^2 (a^{-1} + \xi)^2 d\tau^2 + d\xi^2 \quad (3.16)$$

Estudando as linhas coordenadas associadas a ξ , ou seja, tomando $\xi = const.$ e fazendo τ variar de $-\infty$ a $+\infty$, obtemos hipérbolas que cruzam o eixo espacial ($t = 0$) em $\rho = (a^{-1} + \xi)$. Como vimos as hipérbolas correspondem a linha de universo de observadores uniformemente acelerados. Sendo assim, podemos dizer que para cada valor de ξ (consequentemente para cada valor de ρ) corresponde uma linha de universo de um observador acelerado, o qual denotaremos por O_ρ . O conjunto dos observadores formam uma família, da qual nosso observador escolhido é um mero membro que se caracteriza por partir da posição $\xi = 0$. Vamos denotá-lo por $O_{a^{-1}}$. Notemos então que também podemos interpretar a coordenada de Rindler ξ como sendo a posição inicial do observador O_ρ que cruza o evento a ser registrado, medida com relação ao observador $O_{a^{-1}}$. Assim, o observador $O_{a^{-1}}$ tem um papel privilegiado no estabelecimento das coordenadas de Rindler. Afinal, as coordenadas (τ, ξ) são definidos em função dele.

Na próxima seção, vamos construir um sistema de coordenadas utilizando a família de

observadores de Rindler, mas que se utiliza de um procedimento diferente para atribuir as coordenadas aos eventos.

3.4 Novo Sistema de Coordenadas Baseado na Família de Observadores de Rindler

A construção de sistemas de coordenadas no espaço-tempo pode ser realizada das mais variadas maneiras e, como é bem natural (mesmo para a geometria euclidiana), um mesmo evento pode ser registrado com diferentes coordenadas de acordo com os referenciais e regras utilizadas.

Empregando procedimentos fisicamente corretos, é possível estabelecermos diferentes sistemas de coordenadas a partir de um mesmo referencial. Pensando assim, vamos utilizar a família de observadores de Rindler, discutida na seção anterior, para definir novas coordenadas aos eventos [15]. Nossa abordagem, ao contrário do procedimento anterior, utilizará todos os observadores democraticamente sem privilegiar nenhum membro da família.

Considere um evento E arbitrário no espaço-tempo. Certamente este evento está situado sobre a linha de universo de algum observador de Rindler O_ρ . Como vimos na seção anterior, Rindler considerou como coordenada temporal do evento o tempo próprio τ medido pelo observador $O_{a^{-1}}$, ou seja, que parte da posição $\frac{1}{a}$.

Em nossas novas coordenadas, vamos definir como coordenada temporal do evento E o tempo próprio medido pelo observador cuja linha de universo cruza o evento E, ou seja, a nova coordenada temporal será o tempo próprio τ_ρ medido pelo observador O_ρ . Já como coordenada espacial para o evento, vamos modificar o rótulo ξ (que consiste na posição inicial relativa ao observador $O_{a^{-1}}$), pela coordenada ρ , que refere-se à posição inicial, com relação ao referencial K, do observador de Rindler que cruza o evento E. Assim o evento E será rotulado pelas coordenadas (τ_ρ, ρ) [15]. É importante enfatizar que as novas coordenadas são tão válidas quanto as coordenadas usuais de Rindler, pois sua definição parte de procedimentos fisicamente válidos.

Devemos agora descobrir como as novas coordenadas (τ_ρ, ρ) estão relacionadas com as coordenadas (t, x) . Primeiro, nós precisamos determinar a razão entre τ e τ_ρ , isto é, a relação entre os ritmos dos relógios dos observadores $O_{a^{-1}}$ e O_ρ . Ao longo da linha de universo de um observador de Rindler, ρ mantém-se constante, logo, utilizando a métrica (3.16) e as novas coordenadas, podemos escrever:

$$d\tau_\rho = a\rho d\tau \tag{3.17}$$

Assumindo que os relógios estão inicialmente sincronizados, então, por integração direta

obtemos:

$$\tau_\rho = a\rho\tau \quad (3.18)$$

Para não confundir a notação, vamos denotar τ_ρ por η . Assim, substituindo eq.(3.18) em (3.14) e (3.15), obtemos a lei de transformação de coordenadas:

$$t = \rho \sinh \frac{\eta}{\rho} \quad (3.19)$$

$$x = \rho \cosh \frac{\eta}{\rho} \quad (3.20)$$

Nestas novas coordenadas a métrica de Minkowski é dada por:

$$ds^2 = -d\eta^2 + 2\frac{\eta}{\rho}d\eta d\rho + \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) d\rho^2 \quad (3.21)$$

Analisando a métrica acima, podemos ver que as novas coordenadas não estão definidas em todo espaço-tempo, apenas para regiões onde $\rho > \eta$. Fora do intervalo $0 < \rho < \eta$, há uma mudança de caráter físico da coordenada ρ , isto é, ela torna-se uma coordenada do tipo tempo. A equação $\rho = \eta$ delimita o domínio das novas coordenadas. De acordo com as equações (3.19) e (3.20), $\rho = \eta$ corresponde a equação $t = x$ ($\tanh 1$) no referencial de Lorentz K (ver fig.3.4).

As secções de simultaneidade Σ_η , isto é, o conjunto de eventos rotulados com a mesma coordenada temporal η , são formados pelo conjunto de pontos onde os relógios dos observadores registram o mesmo tempo próprio. Para conhecermos o comportamento da secção Σ_η basta tomarmos $\eta = const.$ e variarmos ρ de 0 à ∞ nas equações (3.19) e (3.20).

Vamos chamar atenção para o fato de que, como visto na fig.(3.4), as secções espaciais neste novo referencial não são retas.

Podemos enriquecer a discussão introduzindo a segunda dimensão espacial [15]. O espaço-tempo agora é o espaço-tempo de Minkowski com (1+2)-dimensões. O procedimento utilizado para definir as coordenadas é análogo ao procedimento anterior.

Inicialmente vamos admitir uma família de observadores acelerados que desenvolve movimento radial com aceleração própria constante. A aceleração depende do inverso de sua posição inicial, justamente como os observadores de Rindler. A diferença agora é que os observadores estão uniformemente distribuídos no plano xOy e experimentam um movimento radial. As linhas de universo dos observadores no referencial de Lorentz K são

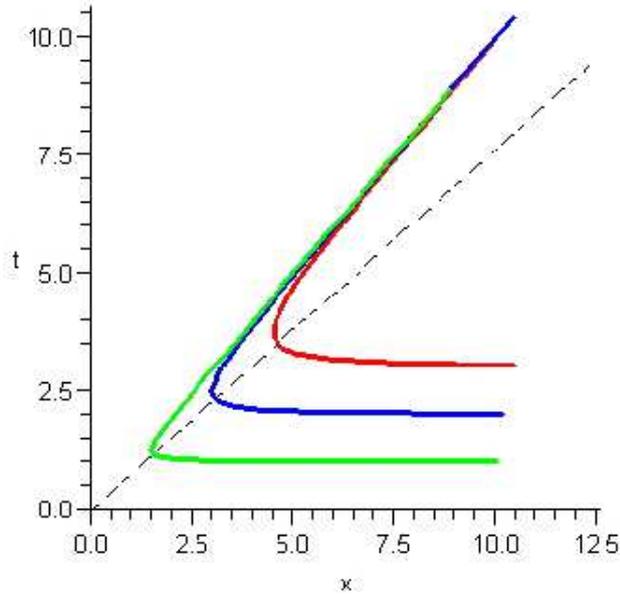


Figura 3.4: Seções de simultaneidade adaptadas ao novo referencial para diferentes valores do tempo ($\eta = 1, 2$ e 3 , respectivamente). As novas coordenadas (η, ρ) são válidas apenas no lado direito da linha tracejada $t = x(\tanh 1)$. Nesta região, as seções de simultaneidade são tipo-espaço.

agora dadas por:

$$t = \rho \sinh \left(\frac{\eta}{\rho} \right) \quad (3.22)$$

$$x = \rho \cos(\theta) \cosh \left(\frac{\eta}{\rho} \right) \quad (3.23)$$

$$y = \rho \sin(\theta) \cosh \left(\frac{\eta}{\rho} \right) \quad (3.24)$$

onde ρ e θ dão, em coordenadas polares, a posição inicial do observador $(x(0), y(0))$. As linhas de universo dos observadores são hipérbolas no plano especificado por $\theta = \text{const.}$ A versão bidimensional anterior é um caso particular quando $\theta = 0$.

Considerando a simetria de rotação dos observadores, nós podemos concluir que as seções de simultaneidade são superfícies de revolução geradas pela rotação das linhas de simultaneidade obtidas anteriormente (fig.3.4) em torno do eixo-t. Agora as seções espaciais Σ_η possuem duas dimensões e assim, é possível estudarmos sua estrutura geométrica como uma superfície Rimaniana[31].

No espaço-tempo de Minkowski tridimensional, a métrica nas novas coordenadas é

dada por:

$$ds^2 = -d\eta^2 + 2\frac{\eta}{\rho}d\eta d\rho + \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) d\rho^2 + \rho^2 \cosh^2\left(\frac{\eta}{\rho}\right) d\theta^2 \quad (3.25)$$

Cada superfície de simultaneidade é caracterizada por um específico valor de η , isto é, sobre Σ_η a coordenada η mantém-se constante. Assim a métrica induzida sobre a superfície de simultaneidade Σ_η pode ser obtida de (3.25) tomando $d\eta = 0$:

$$dl^2 = \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) d\rho^2 + \rho^2 \cosh^2\left(\frac{\eta}{\rho}\right) d\theta^2 \quad (3.26)$$

O elemento de linha dl^2 contém todas as informações das propriedades geométricas da secção espacial Σ_η . A superfície Σ_η é do tipo espaço, em outras palavras, ela têm uma métrica definida positiva, para $\rho > \eta$. Os observadores equipados com a métrica (3.26) podem medir comprimentos e ângulos sobre a superfície Σ_η e também determinar se existe curvatura.

Calculando o escalar de curvatura da secção espacial, nós encontramos:

$$R = -2\eta^3 \frac{\left(\frac{\eta}{\rho} \cosh\left(\frac{\eta}{\rho}\right) - \sinh\left(\frac{\eta}{\rho}\right)\right)}{\rho^5 \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right)^2 \cosh\left(\frac{\eta}{\rho}\right)} \quad (3.27)$$

Podemos observar imediatamente que $R \neq 0$ na região de interesse ($\rho > \eta$). Portanto as secções espaciais possuem curvatura não-nula. Em outras palavras as secções espaciais relativas ao novo referencial acelerado apresentam uma geometria não-Euclidiana. Não é difícil ver que a curvatura tende a zero para valores de ρ suficientemente grandes. Isto já era esperado pois a aceleração dos observadores tende a zero assintoticamente.

Estudando em detalhes o escalar de curvatura, encontramos que R é positivo³ na região de validade ($\rho > \eta$). Isto significa que Σ_η é uma superfície hiperbólica de acordo com o critério de classificação de superfícies.

Há um teorema na geometria diferencial, pertencente a Gauss, que estabelece uma conexão entre curvatura de superfícies e a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico definido sobre a superfície [31]. No caso da geometria Euclidiana, como conhecemos, a soma dos ângulos internos equivale a 180^0 , no caso de uma superfície não-Euclidiana a soma deve ser diferente, podendo ser maior ou menor que 180^0 dependendo do sinal do escalar de curvatura. Em nosso caso, ou seja, tratando-se de superfícies hiperbólicas, a soma deve ser menor.

Sendo assim, os observadores de Rindler podem determinar a existência da curvatura das secções espaciais medindo os ângulos internos de um triângulo sobre a superfície de simultaneidade.

³Convenção do Maple(v.10)

3.5 Coordenadas Usuais de Rindler e o Novo Sistema de Coordenadas.

Comparando o novo sistema de coordenadas e as coordenadas de Rindler, nós podemos notar que a diferença crucial entre eles está no método utilizado para rotular as coordenadas temporais e como os observadores definem a simultaneidade.

Como vimos no referencial de Rindler, secções de simultaneidade são representadas por Σ_τ que coincide instantaneamente com o eixo espacial do referencial inercial $K'(\tau)$, ou seja, a noção de simultaneidade é construída com base no princípio físico da localidade.

Em contraste, no novo sistema de coordenadas a secção de simultaneidade Σ_η é construída sem o alicerce de um procedimento físico fundamental. Neste sistema, os eventos são considerados simultâneos quando apresentam a mesma coordenada temporal, sem mais considerações.

Entretanto a definição do nosso novo sistema de coordenadas não deve ser negligenciada. Está construída por meio de um procedimento legítimo e como mencionamos, é inspirada diretamente pelo método de construção dos sistemas de coordenadas de Lorentz, tratando os observadores da mesma maneira. Além disso, como vimos a superfície Σ_η é curva. Esta característica é consequência dos relógios dos observadores apresentarem ritmos diferentes, uma vez que eles desenvolvem acelerações diferentes. Isto evidencia que a curvatura da secção espacial Σ_η surge de um efeito relativístico. Deste modo, as novas coordenadas fornecem um referencial apropriado para ilustrar a conexão entre geometria não-Euclidiana das secções espaciais e referenciais não-inerciais, como sugerido por Einstein [33].

Capítulo 4

Alguns Métodos de Construção de Sistemas de Coordenadas

Existem inúmeras maneiras de se rotular os eventos do espaço-tempo. Para o desenvolvimento deste trabalho, torna-se vital realizarmos uma revisão da literatura especializada sobre os principais métodos de construção de sistemas de coordenadas e as características intrínsecas de cada método.

4.1 Transporte de Fermi-Walker

O primeiro método de construção que estudaremos consiste em um referencial construído a partir de um transporte de Fermi-Walker. Para iniciarmos nosso estudo, vamos novamente admitir um observador qualquer descrevendo determinada linha de universo no espaço-tempo de Minkowski registrado pelo referencial inercial K . Vamos denotar por $K'(\tau)$ o referencial que é transportado ao longo da linha de universo do observador.

O transporte de Fermi-Walker oferece uma maneira de construir o referencial $K'(\tau)$ obedecendo a alguns procedimentos físicos que devem regular o posicionamento e a orientação de seus eixos [1]. Cada eixo deverá ser construído a partir de vetores bases $(e_{0'}, e_{1'}, e_{2'}, e_{3'})$ ortonormais em qualquer instante. Juntos estes vetores bases formam o que chamamos de tétrada. Uma tétrada pode ser vista como uma versão infinitesimal de um sistema de coordenadas que, neste caso, encontra-se em movimento e desloca-se junto ao observador. Estes vetores formam a base para as medidas de $K'(\tau)$ pois a orientação de cada vetor base coincide com cada um de seus eixos¹.

Estando um observador hipotético inicialmente em repouso na origem do referencial inercial K , ou seja, com linha de universo evoluindo de acordo com a 4-posição $\bar{x}^\mu = (t, 0, 0, 0)$, sua 4-velocidade estará direcionada ao longo do eixo temporal t , pois sua única

¹Devemos ressaltar que o transporte de Fermi-Walker não é o único procedimento possível para transportar uma tétrada ao longo da linha de universo de um observador. Um outro método possível é o transporte de Frenet-Serret, por exemplo [32].

componente não nula encontra-se neste eixo. Analogamente para um observador em repouso na origem do referencial $K'(\tau)$, sua 4-velocidade deverá estar direcionada no sentido do eixo temporal $t'(\tau)$, ou seja, no sentido do vetor base $e_{0'}^\mu$. Sendo o módulo da 4-velocidade unitário (eq.(2.36)) e sabendo que a tétrada constitui uma base ortonormal, o vetor base $e_{0'}^\mu$ deve ser idêntico a 4-velocidade:

$$e_{0'}^\mu = u^\mu \quad (4.1)$$

Como os vetores da tétrada estão construídos sobre o sistema de coordenadas inercial $K'(\tau)$, eles devem estar relacionados, em qualquer tempo próprio τ , com os vetores e_μ (vetores da base do referencial K), através das transformações de Lorentz.

$$e_{\mu'}(\tau) = \Lambda^\nu{}_{\mu'}(\tau) e_\nu \quad (4.2)$$

Do mesmo modo os vetores da base entre dois sucessivos instantes devem também estar relacionados pelas transformações de Lorentz. O fato é que as transformações de Lorentz, (como visto na seção 2.1) além de boosts, também envolvem rotações no espaço. No entanto, o transporte de Fermi-Walker exclui qualquer rotação ordinária entre os três vetores do tipo espaço da base. Devemos ressaltar que a 4-velocidade u^μ mesmo possuindo sempre magnitude unitária, deve modificar sua direção no caso de um movimento acelerado. A aceleração provocará modificações na direção do vetor da base do tipo tempo. Desta forma, para que os vetores da tétrada mantenham-se ortonormais é necessário que os vetores espaciais reorganizem suas direções para cada instante τ , provocando uma inevitável rotação.

De acordo com a Física Clássica, a rotação de um vetor pode ser definida em termos do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$. Considere na fig.(4.1) o eixo vertical como o eixo de simetria da rotação. Sendo $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t+dt)$ as velocidades do observador em dois instantes infinitesimalmente próximos, temos:

$$\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + d\vec{v} \quad (4.3)$$

Sendo $d\vec{v}$ o vetor variação de velocidade para um determinado intervalo de tempo dt , temos que:

$$dv = v \sin(\phi) d\theta \quad (4.4)$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por dt e definindo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, logo:

$$\frac{dv}{dt} = \omega v \sin\theta \quad (4.5)$$

A rotação ocorre no plano perpendicular a velocidade angular $\vec{\omega}$ e a velocidade \vec{v} .

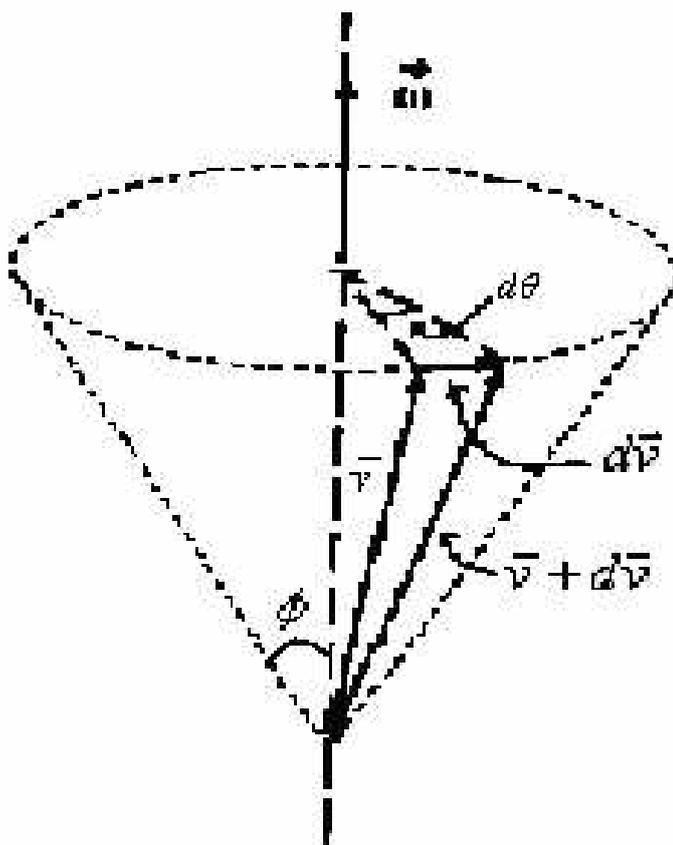


Figura 4.1: Vetor velocidade de módulo constante, girando em torno de um eixo.

Sendo assim, a eq.(4.5) corresponde ao módulo do produto vetorial:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (4.6)$$

Em termos das componentes podemos reescrever (4.6) como:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\Omega_{ik}v_k \quad (4.7)$$

onde $\Omega_{jk} = -\Omega_{kj} = \omega_i \epsilon_{ijk}$ ($\epsilon_{ijk} \rightarrow$ pseudo-tensor totalmente anti-simétrico).

Pela nossa construção, Ω_{ik} (tensor anti-simétrico), atua como um operador que rotaciona o vetor velocidade ao longo de um eixo de simetria definido por $\vec{\omega}$.

Para o espaço-tempo quadrimensional definiremos a rotação como:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = -\Omega^{\mu\nu}v_\nu \quad (4.8)$$

com $\Omega^{\mu\nu} = -\Omega^{\nu\mu}$.

A propriedade de anti-simetria é essencial para garantir que o módulo do vetor não é

afetado pela rotação. De fato, temos:

$$\frac{d}{d\tau}(v_\mu v^\mu) = 2v_\mu \left(\frac{dv^\mu}{d\tau}\right) = -2\Omega^{\mu\nu} v_\mu v_\nu = 0 \quad (4.9)$$

pois $\Omega^{\mu\nu}$ é anti-simétrico e $v_\mu v_\nu$ é simétrico.

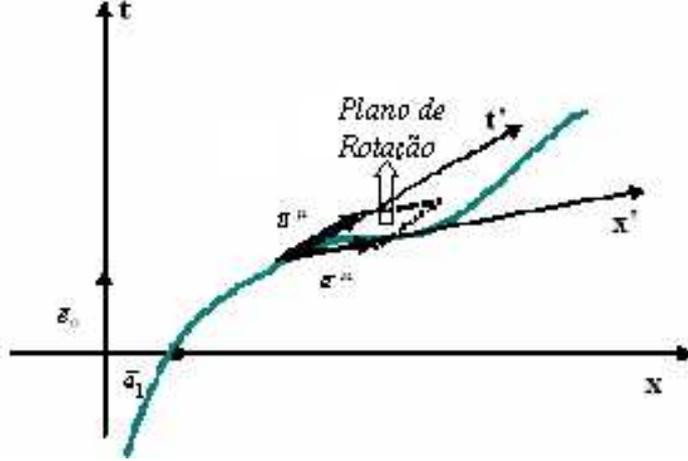


Figura 4.2: Plano de rotação formado pelos 4-vetores velocidade \bar{u}^μ e aceleração \bar{a}^μ .

O transporte de Fermi-Walker de um vetor v^μ prescreve que, como já mencionado anteriormente, o vetor sofra apenas a rotação necessária para se ajustar à nova direção do vetor e_0 . Para obedecer a esta condição, a matriz de rotação deverá ser formada pela combinação de v^μ e a^μ , ou seja:

$$\Omega^{\mu\nu} = \alpha(a^\mu u^\nu) + \beta(a^\nu u^\mu) \quad (4.10)$$

com α e β constantes. Sendo $\Omega^{\mu\nu}$ antisimétrico, logo:

$$\alpha = -\beta.$$

De (4.8), fazendo $v^\mu = u^\mu$, temos:

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = -\Omega^{\mu\nu} u_\nu = -[\alpha(a^\mu u^\nu) + \beta(a^\nu u^\mu)] u_\nu$$

Assim devemos ter $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, de modo que:

$$\Omega^{\mu\nu} = (a^\mu u^\nu) - (a^\nu u^\mu) \quad (4.11)$$

Deste modo, seja v^μ um vetor qualquer que obedece à relação:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = (a^\nu u^\mu - a^\mu u^\nu) v_\nu \quad (4.12)$$

dizemos que este vetor sofreu um transporte de Fermi-Walker ao longo da linha de universo do observador cuja 4-velocidade é u^μ [1]. Construímos então o sistema de coordenadas associado ao observador acelerado, realizando o transporte de Fermi-Walker dos vetores da tétrada $(e_{0'}, e_{1'}, e_{2'}, e_{3'})$ ao longo da linha de universo do observador.

4.2 Coordenadas de Fermi-Walker.

Agora que conhecemos como a tétrada é transportada (de acordo com o transporte de Fermi-Walker) ao longo da linha de universo do observador podemos definir as coordenadas de Fermi-Walker [26].

Vamos admitir o observador percorrendo o espaço-tempo quadridimensional examinado pelo sistema de coordenada inercial K . Este referencial atribui a um dado evento E as coordenadas x_E^μ . Por sua vez, o mesmo evento é registrado com as coordenadas de Fermi-Walker F^μ . As coordenadas de Fermi-Walker F^μ são atribuídas a partir de uma geodésica do tipo espaço que parte do evento e cruza a linha de universo do observador perpendicularmente.

Vamos nomear o evento P sobre a linha de universo do observador como sendo o ponto de interseção com a geodésica tipo espaço (ver fig.(4.3)). A primeira coordenada de Fermi-Walker (F^0) corresponde ao tempo próprio τ medido pelo observador no instante em que ocorre o evento P .

Seja n^μ um vetor unitário na direção da geodésica (consequentemente perpendicular a quadrivelocidade u^μ do observador naquele ponto) e σ^2 o intervalo entre os eventos P e E , consequentemente σn^μ corresponde ao vetor que liga estes dois eventos no espaço-tempo. As coordenadas espaciais (F^i) correspondem respectivamente as projeções do vetor σn^μ na direção de cada vetor da tétrada e_i^μ carregada pelo observador.

$$F^i = \sigma n^\alpha e_\alpha^i = g_{\mu\nu} \sigma n^\mu (\tau) \eta^{ij} e_j^\nu (\tau) \quad (4.13)$$

Vamos a seguir realizar algumas aplicações particulares que podem mostrar-se bastante instrutivas.

4.2.1 Sistema de Coordenadas Local de Um Observador Acelerado.

Uma aplicação de interesse consiste em analisar um observador que executa um movimento com aceleração constante de módulo “ a ” que, como estudamos no capítulo anterior, realiza um movimento hiperbólico [1]. As equações (3.4) e (3.5) correspondem as equações de movimento para o observador uniformemente acelerado no plano do espaço-

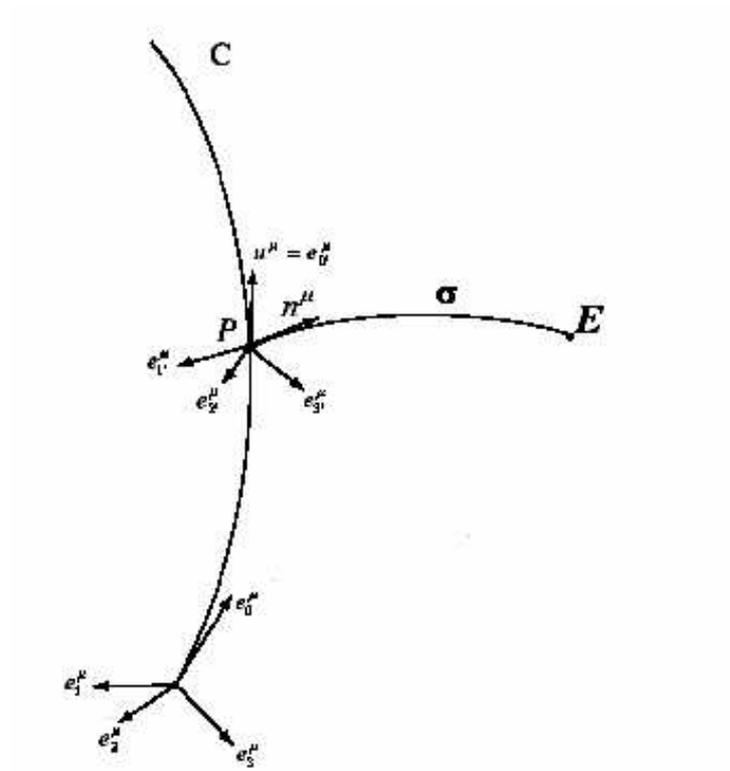


Figura 4.3: Representação geométrica da construção das coordenadas de Fermi-Walker. Um observador que descreve linha de universo C , transporta de acordo com o Transporte de Fermi-Walker uma tétrada.

tempo. Para este caso, observemos o seguinte conjunto de vetores :

$$(e_{0'})^\mu = (\cosh a\tau, \sinh a\tau, 0, 0) \quad (4.14)$$

$$(e_{1'})^\mu = (\sinh a\tau, \cosh a\tau, 0, 0) \quad (4.15)$$

$$(e_{2'})^\mu = (0, 0, 1, 0) \quad (4.16)$$

$$(e_{3'})^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (4.17)$$

Podemos verificar que os vetores acima constituem uma base (tétrada), que obedece a relação (4.12), ou seja, formam uma base de vetores ortonormais, que foi transportada ao longo da linha de universo do observador, por meio do transporte de Fermi-Walker. Notemos que o vetor base $(e_{0'})^\mu$ definido acima é igual a 4-velocidade do observador.

Agora que conhecemos a tétrada transportada ao longo da linha de universo do observador em movimento uniformemente acelerado, podemos construir as coordenadas de Fermi-Walker para esta aplicação.

Seja um ponto E arbitrário no espaço-tempo um evento a ser registrado com as coordenadas de Fermi-Walker (F^μ) . As coordenadas que rotulam o evento são construídas a partir de uma geodésica do tipo espaço, que passa pelo evento e cruza a linha de universo do observador perpendicularmente no ponto P . Sejam x_E^μ e x_P^μ respectivamente as coordenadas do evento E e P registrados pelo referencial inercial K . Como trata-se do espaço-tempo de Minkowski, esta geodésica coincide com uma reta que conecta os eventos E e P . Assim, podemos escrever:

$$n^\mu = C(x_E^\mu - x_P^\mu) \quad (4.18)$$

onde C é a constante de normalização, que faz de n^μ um vetor unitário.

A primeira coordenada de Fermi-Walker (F^0) corresponde ao tempo próprio τ medido pelo observador no instante em que ocorre o evento P . Sendo n^μ o vetor unitário na direção da geodésica, o mesmo deverá ser naquele instante, perpendicular a 4-velocidade $u^\mu|_P$. Assim, a coordenada temporal τ será obtida resolvendo a equação:

$$n^\mu u_\mu|_P = g_{\mu\nu} n^\mu e_{0'}^\nu(\tau) = 0 \quad (4.19)$$

A equação (4.19) corresponde a equação de um plano. Desta forma, o conjunto de vetores unitários n^μ perpendiculares a 4-velocidade $u^\mu|_P$ pertencem a um mesmo plano, em outras palavras, as superfícies de simultaneidade construídas no espaço-tempo de Minkowski, através do procedimento de Fermi-Walker, serão sempre planas.

Desenvolvendo a eq.(4.19) para esta situação, obtemos:

$$x_E^0 = [\tanh(a\tau)] x_E^1 \quad (4.20)$$

Para obtermos as coordenadas espaciais, admitimos σ^2 como o intervalo entre os eventos P e E. Consequentemente σn^μ corresponde ao vetor que liga os dois eventos no espaço-tempo. Utilizando a eq.(4.13), as coordenadas espaciais (F^i), surgem da projeção do vetor σn^μ na direção de cada vetor da tétrada e_i^μ carregada pelo observador. Considerando o movimento no espaço-tempo (1+1)-dimensional, temos:

$$F^1 = C\sigma \left[\frac{x_E^1}{\cosh(a\tau)} - \frac{1}{a} \right] \quad (4.21)$$

No entanto, da condição de normalização:

$$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 1 \quad (4.22)$$

Tiramos que:

$$C\sigma = 1 \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.21) e isolando x_E^1 , obtemos:

$$x_E^1 = \left(\frac{1}{a} + F^1 \right) \cosh(a\tau) \quad (4.24)$$

Agora, substituindo (4.24) em (4.20), encontramos:

$$x_E^0 = \left(\frac{1}{a} + F^1 \right) \sinh(a\tau) \quad (4.25)$$

As equações (4.24) e (4.25) correspondem as equações de transformação entre as coordenadas de Fermi-Walker ($F^0 = \tau, F^1$) e as coordenadas inerciais (x_E^0, x_E^1) atribuídas pelo referencial K .

Como já afirmado anteriormente, a geodésica do tipo espaço que liga os eventos é uma reta, pois, estamos considerando o espaço-tempo plano. Para a situação descrita, a projeção do vetor σn^μ na direção do vetor da tétrada e_1^μ carregada pelo observador, ou seja, a coordenada de Fermi F^1 coincide com a coordenada espacial ξ atribuída pelos observadores de Rindler.

Desta forma, o procedimento de Fermi-Walker, quando aplicado a um observador de aceleração constante, reproduz as coordenadas usuais de Rindler (3.14) e (3.15).

4.2.2 Coordenadas de Fermi para um Observador Movendo-se em Círculo no Espaço de Minkowski.

Vamos agora admitir um observador com velocidade de magnitude constante no espaço-tempo de Minkowski, descrevendo sobre o plano espacial xOy um círculo de raio constante “ R ” centrado na origem de um dado sistema de coordenadas K [25, 29].

Analisando apenas o movimento espacial, as equações de movimento para este observador serão:

$$x = R \cos \omega t \quad (4.26)$$

$$y = R \sin \omega t \quad (4.27)$$

$$z = 0 \quad (4.28)$$

onde ω é a velocidade angular. Para este movimento a velocidade linear v é tal que: $v = \omega R$.

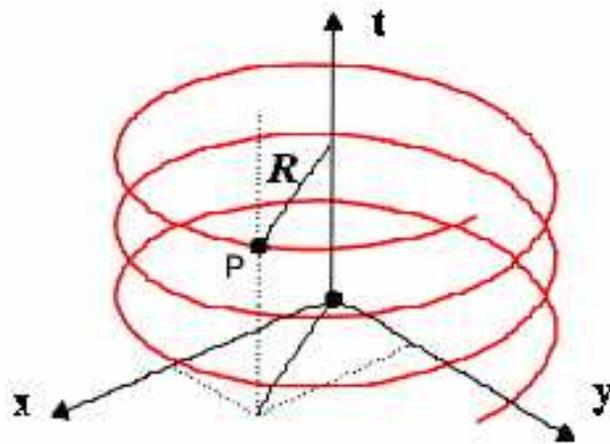


Figura 4.4: Representação geométrica de uma partícula executando movimento circular e uniforme no espaço-tempo de Minkowski.

Estando o observador munido de réguas e relógios ideais, ele poderá constituir em sua vizinhança um sistema de coordenadas. Para este fim, vamos reexpressar suas equações de movimento em função do tempo próprio τ . De acordo com a eq.(2.29), estando os relógios inicialmente sincronizados, por integração direta, temos que:

$$t = \gamma \tau \quad (4.29)$$

onde $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Vamos considerar que a base do sistema de coordenadas constituído pelo observador acelerado, ou seja, os quadri vetores ortonormais $e_{(\sigma)}^\mu$, que juntos formam a tétrada, são carregados ao longo da sua linha de universo do observador por meio do transporte de Fermi-Walker.

Calculando a 4-velocidade u^μ e a 4-aceleração a^μ , para este movimento, em função do

tempo próprio, encontramos respectivamente:

$$u^\mu = \gamma [1, -R\omega \sin(\omega\gamma\tau), R\omega \cos(\omega\gamma\tau), 0] \quad (4.30)$$

$$a^\mu = -R\gamma^2\omega^2 [0, \cos(\omega\gamma\tau), \sin(\omega\gamma\tau), 0] \quad (4.31)$$

Pelo transporte de Fermi-Walker, em qualquer instante sobre a linha de universo do observador, os vetores da base (tétrada) transportada satisfazem à relação:

$$g_{\mu\nu}e_{(\alpha)}^\mu e_{(\beta)}^\nu = \eta_{\alpha\beta} \quad (4.32)$$

Seja P_0 um determinado ponto sobre a linha de universo da partícula (ou observador) caracterizado por $\tau = 0$. De acordo com a eq.(4.1) para a tétrada, neste ponto P_0 , temos:

$$e_0^\mu (\tau = 0) = \gamma(1, 0, v, 0) \quad (4.33)$$

Determinando o vetor da base do tipo tempo em P_0 , podemos agora com um certo grau de liberdade, definir os vetores da base relativos aos eixos espaciais. Um possível conjunto de vetores que obedecem à relação (4.32) é:

$$e_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (4.34)$$

$$e_2^\mu = (v\gamma, 0, \gamma, 0) \quad (4.35)$$

$$e_3^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (4.36)$$

As equações (4.33)-(4.36) representam as componentes dos vetores da tétrada no ponto P_0 . Consideremos agora um ponto P arbitrário sobre a linha de universo do observador. Precisamos encontrar a tétrada que foi transportada de P_0 a P através do Transporte de Fermi-Walker, ou seja, uma tétrada que obedeça à relação (4.12). Como sabemos, o vetor $e_{0'}^\mu$ deverá coincidir com a 4-velocidade u^μ . Já os demais vetores da base, podem ser calculados resolvendo a eq.(4.12) e impondo a condição inicial de ortogonalidade. Notemos que os vetores abaixo satisfazem à essas condições.

$$e_{0'}^\mu = [\gamma, -\gamma v \sin(\omega\gamma\tau), \gamma v \cos(\omega\gamma\tau), 0] \quad (4.37)$$

$$e_{1'}^\mu = [\gamma v \sin(\gamma^2\omega\tau), -\gamma \cos(\gamma\omega\tau) \cos(\gamma^2\omega\tau) + \gamma \sin(\omega\gamma\tau) \sin(\gamma^2\omega\tau), \cos(\gamma^2\omega\tau) \sin(\gamma\omega\tau) - \gamma \cos(\gamma\omega\tau) \sin(\gamma^2\omega\tau), 0] \quad (4.38)$$

$$e_{2'}^\mu = [\gamma v \cos(\gamma^2\omega\tau), -\gamma \cos(\gamma^2\omega\tau) \sin(\gamma\omega\tau) + \cos(\omega\gamma\tau) \sin(\gamma^2\omega\tau), \gamma \cos(\gamma\omega\tau) \cos(\gamma^2\omega\tau) + \sin(\gamma\omega\tau) \sin(\gamma^2\omega\tau), 0] \quad (4.39)$$

$$e_{3'}^\mu = [0, 0, 0, 1] \quad (4.40)$$

Verificando que esses vetores satisfazem à eq.(4.12), podemos assegurar que os mesmos foram transportados de P_0 à P através do Transporte de Fermi-Walker.

Agora que conhecemos a tétrada transportada ao longo da linha de universo do observador em movimento circular, podemos definir regras para atribuir coordenadas aos eventos ocorridos no espaço-tempo [25, 29].

Dado um evento E arbitrário ocorrido no espaço-tempo, as coordenadas de Fermi (F^μ) que rotulam este evento são, como vimos, atribuídas a partir da geodésica do tipo espaço que passa pelo evento e cruza a linha de universo do observador perpendicularmente. Chamemos de P este ponto de intersecção. Agora, sejam x_E^μ e x_P^μ respectivamente as coordenadas do evento E e P registrados pelo referencial inercial K . Como já sabemos, a 4-velocidade u^μ é um 4-vetor tangente à linha de universo do observador. Por sua vez, um vetor unitário n^μ na direção da geodésica que liga os eventos P e E deve ser normal à linha de universo do observador e conseqüentemente perpendicular à sua 4-velocidade, obedecendo à eq.(4.19).

A solução da eq.(4.19) nos revelará o instante τ , em que a 4-velocidade do observador encontra-se perpendicular à geodésica que liga os pontos P e E . A primeira coordenada de Fermi (F^0) corresponderá ao tempo próprio τ medido pelo observador.

$$F^0 = \tau \quad (4.41)$$

Como já mencionamos, a situação em estudo trata-se do espaço-tempo de Minkowski, e por isso, a geodésica é uma linha reta que conecta os eventos E e P . Assim, o vetor unitário n^μ pode ser determinado por (4.18).

Desenvolvendo a eq.(4.19) e usando (4.18) e (4.37), encontramos após isolar x_P^0 ;

$$x_P^0 = t = \gamma\tau = x_E^0 + v [(x_E^1 - x_P^1) \sin(\gamma\omega\tau) - (x_E^2 - x_P^2) \cos(\gamma\omega\tau)] \quad (4.42)$$

com $x_P^1 = R \cos(\omega\gamma\tau)$ e $x_P^2 = R \sin(\omega\gamma\tau)$.

Resolvendo a eq.(4.42) para τ , encontramos a coordenada temporal do evento E , no sistema de coordenadas de Fermi-Walker. Acontece que, a resolução exata não é simples. No entanto, para limites de baixas velocidades, podemos estudá-la pelo método das aproximações.

Primeiro notemos que quando ($v \rightarrow 0$), a eq.(4.42) pode ser aproximada a:

$$x_P^0 = x_E^0 = t = \tau \quad (4.43)$$

Ou seja, na aproximação de primeira ordem, a coordenada temporal de Fermi (τ) para o evento E , coincide com o tempo coordenado t do referencial K (ver fig.(4.5)).

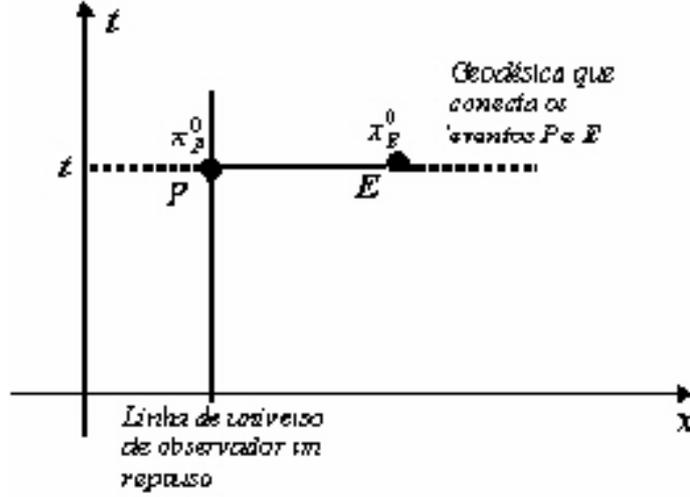


Figura 4.5: Coordenada temporal de Fermi para um observador em repouso no espaço-tempo de Minkowski. A reta vertical representa a linha de universo do observador, já a reta horizontal representa a geodésica que conecta os eventos P e E.

Podemos prosseguir expandindo a eq.(4.42) em série de Taylor, obtendo, como resposta para termos até segunda potência, a seguinte expressão:

$$F^0 = x_E^0 + [x_E^1 \sin(x_E^0 \omega) - x_E^2 \cos(x_E^0 \omega)] v - \frac{1}{2} x_E^0 v^2 \quad (4.44)$$

A equação acima corresponde a coordenada temporal de Fermi para o evento E.

Resta-nos agora determinar as coordenadas espaciais ($F^{(i)}$). Sendo σ^2 o intervalo entre os eventos P e E, consequentemente σn^μ corresponde ao vetor que liga os dois eventos no espaço-tempo. Vamos então projetar este vetor na direção de cada vetor da tétrada carregada pelo observador. As coordenadas espaciais de Fermi corresponderão respectivamente as projeções encontradas. Assim temos:

$$F^i = \sigma n^\alpha e_\alpha^i = g_{\mu\nu} \sigma n^\mu (\tau) \eta^{ij} e_j^\nu (\tau) \quad (4.45)$$

Desenvolvendo a eq.(4.45) para o movimento em estudo e substituído τ pelo valor da coordenada temporal de Fermi obtido em (4.44), obtemos:

$$F^1 = x_E^1 - a \cos(x_E^0 \omega) + \frac{1}{4} [x_E^1 - x_E^1 \cos(2x_E^0 \omega) - x_E^2 \sin(2x_E^0 \omega)] v^2 \quad (4.46)$$

$$F^2 = x_E^2 - a \sin(x_E^0 \omega) + \frac{1}{4} [x_E^2 + x_E^2 \cos(2x_E^0 \omega) - x_E^1 \sin(2x_E^0 \omega)] v^2 \quad (4.47)$$

$$F^3 = x_E^3 \quad (4.48)$$

De maneira inversa, podemos expressar as equações de transformação de coordenadas,

como:

$$x_E^0 = F^0 + [F^2 \cos(\omega F^0) - F^1 \sin(\omega F^0)] + \frac{1}{2} F^0 v^2 \quad (4.49)$$

$$x_E^1 = F^1 + R \cos(\omega F^0) + \frac{1}{4} [F^1 - F^1 \cos(2\omega F^0) - F^2 \sin(2\omega F^0)] v^2 \quad (4.50)$$

$$x_E^2 = F^2 + R \sin(\omega F^0) + \frac{1}{4} [F^2 - F^2 \cos(2\omega F^0) - F^1 \sin(2\omega F^0)] v^2 \quad (4.51)$$

$$x_E^3 = F^3 \quad (4.52)$$

Estas equações correspondem as coordenadas espaciais de Fermi medidas pelo observador que executa o movimento circular. Neste sistema de coordenadas a métrica será:

$$ds^2 = -(1 + \lambda)^2 (dF^0)^2 + (dF^1)^2 + (dF^2)^2 + (dF^3)^2 \quad (4.53)$$

onde $\lambda = -\frac{1}{a} [F^1 \cos(\omega F^0) + F^2 \sin(\omega F^0)] v^2$

4.3 Coordenadas de Radar.

Um outro método conhecido para rotular eventos no espaço-tempo consiste nas coordenadas de Märzke-Wheeler, comumente conhecidas como coordenadas de Radar. Este método consiste em uma extensão da convenção de sincronização de Einstein.

De acordo com Einstein, uma forma de sincronização consiste em equipar um dos observadores com um equipamento que emita luz. Por exemplo, o observador A equipado com uma lanterna, que é acionada no instante t em direção ao observador B . Ao receber o feixe luminoso, B acertará seu relógio para o instante $t + \frac{L}{c}$, pois B deverá levar em conta o avanço do relógio de A durante a propagação do sinal.

Para construirmos a coordenadas de Radar [28]-[30], imaginemos um observador arbitrário que percorre o espaço-tempo construindo determinada linha de universo, que denotaremos por $P(\tau)$. Seja E um evento qualquer ocorrido no espaço-tempo. As coordenadas Radar que localizam este evento são atribuídas da seguinte forma: ao longo de toda sua linha de universo, o observador emite pulsos luminosos. O evento E recebe determinado pulso luminoso e instantaneamente o emite de volta em direção ao observador.

Sejam τ_1 e τ_2 os instantes de emissão e recepção dos sinais pelo observador (ver fig.(4.6)), convencionalmente rotulamos como coordenada temporal e distância espacial do evento E respectivamente:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2} (\tau_1 + \tau_2) \quad (4.54)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (\tau_2 - \tau_1) \quad (4.55)$$

Podemos acrescentar mais duas coordenadas angulares que especificam a direção de

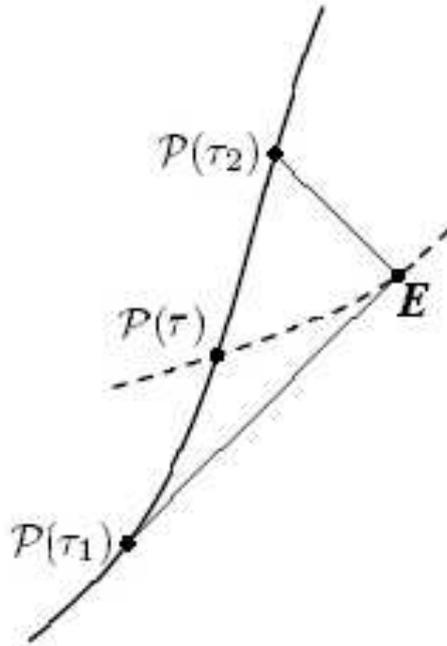


Figura 4.6: Procedimento geral para determinação das coordenadas Radar.

E com respeito a $P(\bar{\tau})$. O pulso luminoso emitido pelo observador na posição $P(\tau_1)$ delimita a região de eventos que podem ser influenciadas por $P(\tau_1)$. Analogamente o pulso reenviado pelo evento E e que é recebido pelo observador na posição $P(\tau_2)$ delimita o que chamamos de *passado causal* para o evento $P(\tau_2)$. O evento E encontra-se no ponto de interseção dos cones que delimitam o passado e o futuro causal de $P(\tau_2)$ e $P(\tau_1)$ respectivamente. De acordo as coordenadas Radar, todos os eventos nesta intersecção recebem a mesma coordenada temporal e portanto devem ser considerados simultâneos ao evento $P(\bar{\tau})$. Devemos enfatizar que este procedimento torna-se natural se analisado do ponto de vista do observador que emite e recebe o sinal luminoso, pois, como sabemos, a luz apresenta a mesma velocidade independente do referencial, de modo que ele registrará o mesmo intervalo de tempo para a luz ir e retornar, sendo para ele normal considerar a coordenada temporal a média aritmética entre o tempo de emissão e recepção do sinal. Já a coordenada espacial corresponde, do seu ponto de vista, a metade da distância percorrida pela luz para ir ao evento e retornar ao observador.

É de nosso interesse determinar as superfícies de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}}$ geradas a partir deste procedimento. Para que $\Sigma_{\bar{\tau}}$ expresse os eventos que ocorrem simultaneamente, é fundamental que esta superfície seja do tipo espaço².

Para provarmos que este método garante superfícies de simultaneidade do tipo espaço [28], considere a fig.(4.7). Suponhamos que o observador em estudo emite em intervalos de tempo infinitesimalmente próximos ($P(\tau_1)$ e $P(\tau_1 + \delta\tau_1)$) dois pulsos luminosos que

²Dado dois eventos ocorridos sobre uma superfície do tipo espaço não é possível fisicamente que eles mantenham conexão causal.

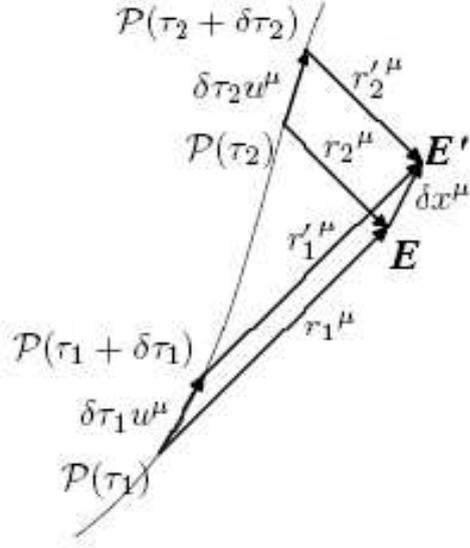


Figura 4.7: Procedimento de Märzk-Wheeler. As superfícies de simultaneidade são tipo-espaço.

são respectivamente recebidos e imediatamente emitidos na posição dos eventos E e E' , retornando ao observador nas posições $P(\tau_2)$ e $P(\tau_2 + \delta\tau_2)$. Os vetores r_1^μ , $r_1'^\mu$, r_2^μ e $r_2'^\mu$ representam deslocamentos do pulso luminoso, conseqüentemente são vetores nulos (ou do tipo luz). Da fig.(4.7) podemos observar que:

$$r_2'^\mu = r_2^\mu + \delta x^\mu - \delta\tau_2 u^\mu$$

Calculando o módulo quadrado para os vetores acima, e desprezando os termos de segunda ordem, temos:

$$|r_2'^\mu|^2 = |r_2^\mu + \delta x^\mu - \delta\tau_2 u^\mu|^2 = 0$$

$$2r_2^\mu (\delta x_\mu - \delta\tau_2 u_\mu) = 0 \quad (4.56)$$

lembrando que $r^\mu r_\mu = 0$. No entanto a equação acima, pode ser reescrita como:

$$r_2^\nu \delta x_\nu = \delta\tau_2 r_2^\nu u_\nu \quad (4.57)$$

Dividindo (4.57) por δx^μ , obtemos no limite de δ infinitesimalmente pequeno:

$$\frac{\partial\tau_2}{\partial x^\mu} = \frac{r_{2\mu}}{r_2^\nu u_\nu(\tau_2)} \quad (4.58)$$

Analogamente para $r_1'^{\mu}$, temos: $r_1'^{\mu} = r_1^{\mu} + \delta x^{\mu} - \delta \tau_1 u^{\mu}$. Consequentemente;

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x^{\mu}} = \frac{r_{1\mu}}{r_1^{\mu} u_{\nu}(\tau_1)} \quad (4.59)$$

Pela nossa construção $\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x^{\mu}}$ consiste em um vetor normal a superfície de simultaneidade. Da eq.(4.54) podemos escrever:

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x^{\mu}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{1\mu}}{r_1^{\mu} u_{\nu}(\tau_1)} + \frac{r_{2\mu}}{r_2^{\mu} u_{\nu}(\tau_2)} \right) \quad (4.60)$$

Portanto:

$$\left| \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x^{\mu}} \right|^2 = \frac{r_1^{\mu} r_{2\mu}}{(r_1^{\nu} u_{\nu}(\tau_1)) (r_2^{\nu} u_{\nu}(\tau_2))} \quad (4.61)$$

Observando a fig.(4.7), podemos perceber que o vetor $A^{\mu} = (r_1^{\mu} - r_2^{\mu})$, ou seja, o vetor que conecta os eventos $P(\tau_1)$ e $P(\tau_2)$ deve ser do tipo-tempo já que estes eventos estão conectados causalmente. Deste modo, pela nossa construção:

$$A^{\mu} A_{\mu} < 0$$

Sendo r_1^{μ} e r_2^{μ} vetores nulos, da equação acima tiramos que:

$$r_1^{\mu} r_{2\mu} > 0 \quad (4.62)$$

Como sabemos u_{ν} consiste em um 4-vetor, tal que $u^{\mu} u_{\mu} = -1$. Vamos escolher um sistema de coordenadas co-móvel ao observador no instante τ_1 de modo que: $u^{0'} = -1$ e $u^{1'} = u^{2'} = u^{3'} = 0$. Sendo assim, para o espaço-tempo de Minkowski, temos:

$$r_1^{\mu'} u_{\mu'}(\tau_1) = -r_1^{0'} u_{0'} = r_1^{0'}$$

Como o vetor $r_1^{\mu'}$ aponta na direção futura do cone de luz, pela nossa convenção podemos assegurar que $r_1^{0'} > 0$. Sendo o produto interno entre vetores uma quantidade invariante, podemos concluir que:

$$r_1^{\mu} u_{\mu}(\tau_1) > 0 \quad (4.63)$$

em qualquer referencial.

Analogamente, escolhendo um sistema de coordenadas co-móvel ao observador no instante τ_2 , e observando que o vetor $r_2^{\mu'}$ aponta na direção negativa do eixo temporal, podemos assegurar que $r_2^{0'} < 0$, de modo que:

$$r_2^{\mu'} u_{\mu'}(\tau_2) = r_2^{0'} < 0 \quad (4.64)$$

Analisando as eqs.(4.62)-(4.64), podemos facilmente observar que o módulo do vetor normal a uma dada superfície de simultaneidade representado na eq. (4.61) é sempre

negativo, ou seja, do tipo tempo. Este critério nos garante que a superfície é do tipo espaço.

A construção de sistemas de coordenadas no espaço-tempo de Minkowski, a partir do método de Fermi-Walker, como vimos, resulta em superfícies (ou hipersuperfícies) de simultaneidades planas (ou hiperplanos), já que a geodésica do tipo espaço utilizada nesse procedimento, para registrar as coordenadas, são retas no espaço-tempo plano.

Entretanto, o sistema de coordenadas de Radar produz superfícies de simultaneidade cuja geometria depende do tipo de movimento do observador. Deste modo, suas superfícies de simultaneidade podem apresentar curvatura, mesmo tratando-se do espaço-tempo plano. É o caso das coordenadas de Radar aplicadas a um observador em movimento circular e uniforme, como veremos a seguir em uma das aplicações.

4.3.1 Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador Inercial

Consideremos outra vez nosso sistema de coordenadas K , que registra o movimento de um observador também inercial no espaço-tempo de Minkowski em (1+1)-dimensões. Este observador carrega consigo uma lanterna e emite continuamente feixes luminosos. Seja $E = (t_E, x_E)$ um evento arbitrário o qual queremos determinar seu rótulo de acordo com as coordenadas de Radar [28, 29].

Sendo v a velocidade do observador, suas coordenadas, vistas pelo referencial K , obedecem à equação:

$$x = vt \quad (4.65)$$

No entanto, como vimos no capítulo 2, podemos escrever as coordenadas x e t em termos do tempo próprio τ . Estando os eventos $P(\tau_1)$ e $P(\tau_2)$ sobre a linha de universo do observador inercial, as coordenadas $x(\tau)$ e $t(\tau)$ destes eventos serão:

$$P(\tau_1) = \begin{cases} t_1(\tau_1) = \frac{\tau_1}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_1(\tau_1) = \frac{v\tau_1}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \quad P(\tau_2) = \begin{cases} t_2(\tau_2) = \frac{\tau_2}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_2(\tau_2) = \frac{v\tau_2}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \quad \text{onde } c=1$$

Os eventos $P(\tau_1)$ e E estão conectados por uma reta de 45° de inclinação, que corresponde a linha de universo do pulso luminoso, conseqüentemente

$$t_E - t_1(\tau_1) = x_E - x_1(\tau_1) \quad (4.66)$$

Analogamente para os eventos $P(\tau_2)$ e E , temos:

$$t_2(\tau_2) - t_E = -[x_2(\tau_2) - x_E] \quad (4.67)$$

Substituindo as coordenadas dos eventos $P(\tau_1)$ e $P(\tau_2)$ nas equações acima, obtemos

como tempo de emissão e recepção dos pulsos luminosos, respectivamente:

$$\tau_1 = (t_E - x_E) \frac{1 + v}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.68)$$

$$\tau_2 = (t_E + x_E) \frac{1 - v}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.69)$$

De acordo com as eq.(4.54) e (4.55), as coordenadas do evento E serão:

$$\bar{\tau} = \frac{t_E - vx_E}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.70)$$

$$\sigma = \frac{x_E - vt_E}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.71)$$

Notemos que as equações acima coincidem com as equações de transformação de Lorentz (2.19) e (2.20), o que já devíamos esperar, pois, as coordenadas de referenciais inerciais estão relacionadas pelas transformações de Lorentz.

4.3.2 Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador de Rindler

Como já conhecemos, um observador de Rindler é um observador uniformemente acelerado cuja linha de universo descreve o arco de uma hipérbole no diagrama do espaço-tempo de Minkowski, com equações de movimento dadas por (3.4) e (3.5). Vamos trabalhar de maneira semelhante ao realizado com o observador inercial. No sistema K, os eventos $P(\tau_1)$ e $P(\tau_2)$ possuem coordenadas $t(\tau)$ e $x(\tau)$, que, de acordo com (3.4) e (3.5), são:

$$P(\tau_1) = \begin{cases} t_1(\tau_1) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau_1) \\ x_1(\tau_1) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau_1) \end{cases} \quad P(\tau_2) = \begin{cases} t_2(\tau_2) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau_2) \\ x_2(\tau_2) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau_2) \end{cases}$$

As coordenadas dos eventos $P(\tau_1)$ e E devem satisfazer à eq.(4.66), deste modo, determinamos o tempo próprio no instante de emissão do pulso luminoso que atinge E:

$$\tau_1 = -\frac{1}{a} \ln [(x_E - t_E) a] \quad (4.72)$$

Já os eventos $P(\tau_2)$ e E devem satisfazer à eq.(4.67). Segue que o tempo próprio do instante de recepção do pulso luminoso refletido em E é:

$$\tau_2 = \frac{1}{a} \ln [(x_E + t_E) a] \quad (4.73)$$

De acordo com as eq.(4.54) e (4.55), as coordenadas do evento E para este observador serão a partir do procedimento de coordenadas de radar:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{x_E + t_E}{x_E - t_E} \right] \quad (4.74)$$

$$\sigma = \frac{1}{2a} \ln [a^2 (x_E^2 - t_E^2)] \quad (4.75)$$

De maneira inversa temos:

$$t = \frac{1}{a} e^{a\sigma} \sinh(a\bar{\tau}) \quad (4.76)$$

$$x = \frac{1}{a} e^{a\sigma} \cosh(a\bar{\tau}) \quad (4.77)$$

As coordenadas de Märzke-Wheeler acima apresentam grandes semelhanças com as coordenadas usuais de Rindler (eqs.(3.14) e (3.15)). Comparando os resultados obtidos, observamos que

$$\bar{\tau} = \tau \quad (4.78)$$

Já a coordenada espacial, obedece a relação:

$$\sigma = \ln(1 + a\xi) \quad (4.79)$$

4.3.3 Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador em Movimento Circular e Uniforme:

Para estudarmos um observador que executa um movimento circular e uniforme (M.C.U) no espaço-tempo de Minkowski, necessitamos agora de, no mínimo, (1+2)-dimensões. Em coordenadas polares, as equações de movimento para este observador visto pelo referencial padrão $K = K(t, r, \phi)$, serão:

$$t = \gamma\tau \quad (4.80)$$

$$r = R \quad (4.81)$$

$$\phi = \Omega\tau \quad (4.82)$$

com $\gamma = [1 - \omega^2 R^2]^{-1/2}$. Nesta notação ω corresponde a velocidade angular vista pelo referencial K , Ω corresponde a velocidade angular própria e R é o raio da trajetória. Em termos da velocidade angular própria Ω , podemos escrever γ como:

$$\gamma = [1 + \Omega^2 R^2]^{1/2} \quad (4.83)$$

Estamos interessados em atribuir coordenadas de Radar para os eventos [28, 29]. Va-

mos nos preocupar inicialmente com os eventos ocorridos sobre a superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$. Com este objetivo, vamos determinar todos os eventos que, sobre esta superfície, recebem o mesmo rótulo espacial σ . De acordo com o procedimento descrito (eq.(4.54) e (4.55)), os eventos que obedecem a estas especificações devem fazer parte simultaneamente do cone de luz futuro a $P(\tau = -\sigma)$ e do cone de luz passado a $P(\tau = \sigma)$, ou seja, encontram-se na intersecção dos cones luminosos. Variando o valor σ , construímos a superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$.

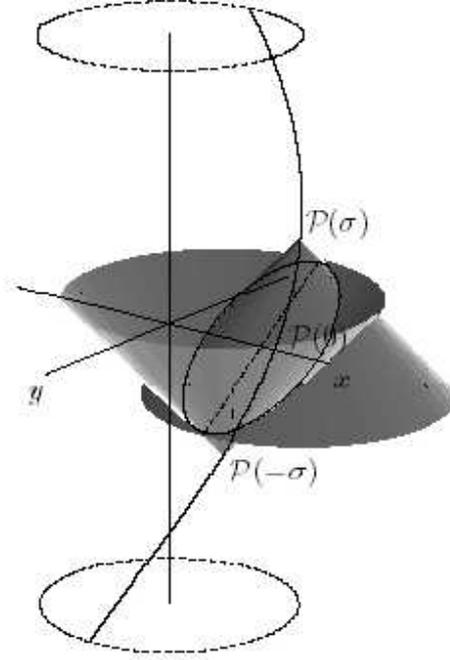


Figura 4.8: Intersecção do cone de luz futuro a $P(\sigma)$ com o cone de luz passado a $P(-\sigma)$ definindo uma elipse

Em coordenadas cartesianas, as equações de movimento para o observador serão:

$$t = [1 + \Omega^2 R^2]^{1/2} \tau \quad (4.84)$$

$$x^1 = R \cos \Omega \tau \quad (4.85)$$

$$x^2 = R \sin \Omega \tau \quad (4.86)$$

$$x^3 = 0 \quad (4.87)$$

Seja $S(\sigma)$ as curvas na superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$ a uma distância σ do observador (eq.(4.55)). Estando os eventos $P(-\sigma)$ e E conectados pelo cone de luz ($ds^2 = 0$), conseqüentemente o módulo da separação espacial entre estes eventos deverá coincidir com o módulo da separação temporal, ou seja:

$$|x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| = t_E - t [P(-\sigma)] \equiv \Delta t(-\sigma) \quad (4.88)$$

com $l = 1, 2$ e $|x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| = \left[\sum_{i=1}^3 \{x_E^i - x^i [P(-\sigma)]\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$.

Analogamente para os eventos E e $P(\sigma)$, temos:

$$|x_E^l - x^l [P(\sigma)]| = -t_E + t [P(\sigma)] \equiv \Delta t(\sigma) \quad (4.89)$$

Somando (4.88) e (4.89) encontramos:

$$|x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| + |x_E^l - x^l [P(\sigma)]| = t [P(\sigma)] - t [P(-\sigma)] = 2\sqrt{1 + \Omega^2 R^2} \sigma \quad (4.90)$$

A eq.(4.90) nos lembra a equação de uma elipse, pois, a soma das distâncias de qualquer dos seus pontos aos focos, corresponde a duas vezes o tamanho do semi-eixo maior:

$$\overline{E'P(\sigma)} + \overline{E'P(-\sigma)} = 2A(\sigma) = \text{const.} \quad (4.91)$$

E' corresponde a projeção do evento E no plano x^1Ox^2 . Sendo $A(\sigma)$ o semi-eixo maior da elipse. A partir desta definição, podemos facilmente observar que fixado um valor σ , a eq.(4.90) descreve uma elipse, que tem $P(\sigma)$ e $P(-\sigma)$ como seus focos e cujo semi-eixo maior é:

$$A(\sigma) = \sqrt{1 + R^2 \Omega^2} \sigma \quad (4.92)$$

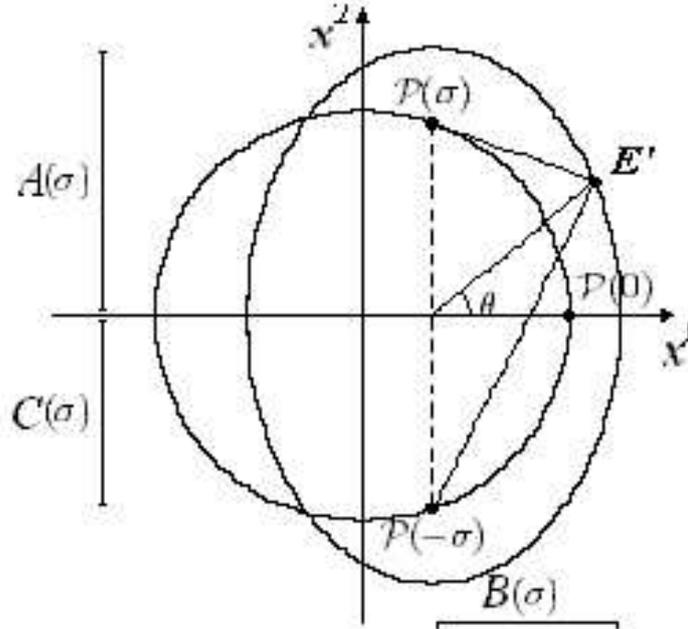


Figura 4.9: A circunferência representa o traço da linha de universo do observador projetado no plano xOy . A elipse é formada pela projeção (no plano x^1Ox^2) da curva $S(\sigma)$, que se encontra na superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$.

Nossa próxima tarefa consiste em localizar os focos $P(\sigma)$ e $P(-\sigma)$. Como os focos da elipse formada pertencem a linha de universo do observador, podemos determiná-los a partir das equações horárias (4.85) e (4.86). Fazendo $\tau = \sigma$ e $\tau = -\sigma$, obtemos respectivamente:

$$P(\sigma) \equiv \begin{cases} x^1 = R \cos \Omega \sigma \\ x^2 = R \sin \Omega \sigma \end{cases} \quad (4.93)$$

$$P(-\sigma) \equiv \begin{cases} x^1 = R \cos \Omega \sigma \\ x^2 = -R \sin \Omega \sigma \end{cases} \quad (4.94)$$

A partir das eqs.(4.93) e (4.94), e sabendo que o eixo maior da elipse corta os focos $P(\sigma)$ e $P(-\sigma)$, concluímos que este eixo é paralelo ao eixo espacial x^2 do referencial K. (ver fig.(4.9)).

O centro da elipse é equidistante dos focos e será, então, dada por $(x = R \cos(\Omega\sigma), y = 0)$.

Definimos θ como o ângulo formado entre o eixo horizontal e um segmento de reta traçado do evento E' ao centro da elipse. Assim, podemos parametrizar os pontos da elipse, como:

$$x = B(\sigma) \cos \theta + R \cos \Omega \sigma \quad (4.95)$$

$$y = A(\sigma) \sin \theta \quad (4.96)$$

onde $B(\sigma)$ é o semi-eixo menor.

Definindo $C(\sigma)$ como a metade da distância entre os focos, ou seja, o módulo da distância do centro da elipse a um dos focos, logo:

$$C(\sigma) = R \sin \Omega \sigma \quad (4.97)$$

Da construção da elipse, sabemos que:

$$B(\sigma) = \sqrt{A^2(\sigma) - C^2(\sigma)} = \sqrt{(1 + R^2 \Omega^2) \sigma^2 - R^2 \sin^2 \Omega \sigma} \quad (4.98)$$

Podemos usar σ e θ como as novas coordenadas espaciais, adaptadas ao observador, que identificam os eventos sobre a superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$. A coordenada σ corresponde a distância do ponto ao observador e θ dá a direção. Pensando desta forma, as equações (4.95) e (4.96) podem ser entendidas como a lei de transformação entre as coordenadas espaciais (σ, θ) e as coordenadas (x, y) do sistema inercial K. Resta-nos estudarmos a coordenada temporal.

Isolando t_E nas equações (4.88) e (4.89), encontramos respectivamente que:

$$t_E = t [P(-\sigma)] + \Delta t(-\sigma) \quad (4.99)$$

$$t_E = t [P(\sigma)] - \Delta t(\sigma) \quad (4.100)$$

Calculando a coordenada temporal para os focos ($P(\tau = \sigma)$ e $P(\tau = -\sigma)$). A partir da equação de movimento (4.84), encontramos:

$$t [P(\sigma)] = -t [P(-\sigma)] = [1 + \Omega^2 R^2]^{1/2} \sigma \quad (4.101)$$

Somando (4.99) e (4.100) e substituindo a primeira igualdade da equação (4.101), obtemos:

$$t_E = \frac{1}{2} [\Delta t(-\sigma) - \Delta t(\sigma)] \quad (4.102)$$

Agora, escrevendo $\Delta t(-\sigma)$ e $\Delta t(\sigma)$ em termos das coordenadas espaciais, como se encontra nas eq.(4.88) e (4.89), podemos escrever:

$$\Delta t(\sigma) = |x_E^l - x^l [P(\sigma)]| \quad (4.103)$$

$$\Delta t(-\sigma) = |x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| \quad (4.104)$$

Substituindo (4.103) e (4.104) em (4.102), encontramos:

$$t_E = \frac{1}{2} |x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| - \frac{1}{2} |x_E^l - x^l [P(\sigma)]| \quad (4.105)$$

Desenvolvendo a equação acima e substituindo os respectivos valores das coordenadas espaciais, obtemos:

$$t_E = C(\sigma) \sin \theta \quad (4.106)$$

As equações (4.95), (4.96) e (4.106) são as equações paramétricas da superfície $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$, que pode ser visualizadas na fig.(4.10).

Para encontrarmos a transformação de coordenadas completa, isto é, válida para qualquer instante $\bar{\tau}$, podemos aplicar o seguinte raciocínio. Devido a simetria do movimento de rotação, podemos deduzir o comportamento das secções de simultaneidade em um instante arbitrário τ . No instante τ , de acordo com a equação horária, o observador se encontra no ponto $\left[(1 + \Omega^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \tau, R \cos(\Omega\tau), R \sin(\Omega\tau), 0 \right]$. Portanto, com relação à sua posição no instante $\bar{\tau} = 0$, houve uma translação na direção do eixo t da quantidade $(1 + \Omega^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \tau$ e uma rotação em torno do eixo z pelo ângulo $\Omega\tau$. Aplicando esta transformação a cada ponto da superfície $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$, encontramos a superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}}$. Segue então que a completa transformação entre as coordenadas do referencial inercial K

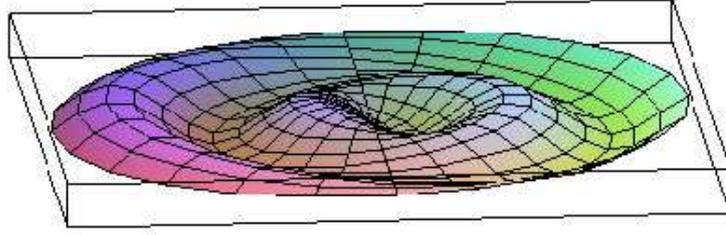


Figura 4.10: Representação geométrica da superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$.

e as coordenadas de Radar será:

$$t = C(\sigma) \sin \theta + \sqrt{1 + R^2 \Omega^2} \tau \quad (4.107)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \tau & -\sin \Omega \tau & 0 \\ \sin \Omega \tau & \cos \Omega \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B(\sigma) \cos \theta + R \cos \Omega \tau \\ A(\sigma) \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

4.4 Coordenadas de Emissão.

Um sistema de coordenadas de grande destaque nos últimos anos consiste nas coordenadas de emissão [16]-[22]. Estas coordenadas são construídas a partir de um sistema de posicionamento relativístico, semelhante ao sistema de posicionamento global (GPS³).

O GPS permite a um usuário situado na superfície da Terra ou em suas proximidades, dispor, a qualquer instante, de pelo menos quatro satélites, a partir dos quais pode se localizar com considerável precisão. A localização é feita a partir da distância percorrida pelo sinal eletromagnético, entre o usuário e os satélites, levando-se em conta efeitos relativísticos devido a não sincronização entre os relógios. Conhecendo previamente as coordenadas dos satélites em um sistema de coordenadas apropriado, podemos encontrar as coordenadas do usuário neste mesmo sistema e a localização se reduz a solução de um sistema de equações, como veremos mais adiante.

As coordenadas de emissão, como explicado com detalhes na Ref.[20], no espaço-tempo (1+3)-dimensional, são igualmente construídas a partir de quatro emissores⁴ que se movem com linhas de universo arbitrarias no espaço-tempo, carregando individualmente relógios ideais. Cada emissor envia continuamente sinais luminosos que difundem ao longo das geodésicas nulas o tempo próprio τ_μ do emissor no instante da emissão. Todos os eventos ocorridos sobre a linha de universo do sinal luminoso devem ser registrados com a mesma coordenada τ_μ .

³Global Positioning System

⁴Na prática, os emissores podem ser entendidos como satélites distribuídos ao redor da Terra e o usuário como um indivíduo a ser localizada sobre a superfície da Terra.

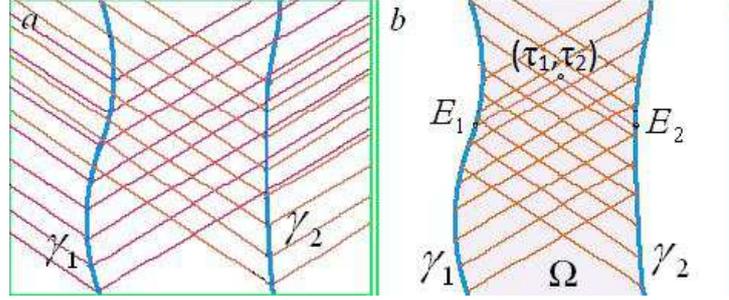


Figura 4.11: (a) Linha de universo dos emissores e dos sinais luminosos que propagam os respectivos tempos próprios. (b) O domínio de validade das coordenadas restringe-se à região Ω entre os observadores.

Como trata-se de quatro emissores que enviam continuamente sinais luminosos, um ponto P do espaço-tempo, deverá ser cortado por quatro geodésicas nulas e conseqüentemente rotulado com quatro números $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, que correspondem respectivamente, aos tempos próprios dos emissores no instante da emissão. Os quatro números $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ correspondem as coordenadas de emissão para o evento P .

No caso do espaço-tempo $(1+1)$ -dimensional, as coordenadas de emissão são construídas utilizando apenas dois emissores, cujas linhas de universo denotaremos por γ_1 e γ_2 . Estes observadores difundem no espaço-tempo, através de sinais luminosos, seus respectivos tempos próprios τ_1 e τ_2 , que são usados como coordenadas para localizar a posição do usuário.

Seja E_1 o instante de emissão da coordenada τ_1 pelo emissor γ_1 . O emissor γ_2 atribui ao evento E_1 a coordenada $\bar{\tau}_2$ (ver fig.(4.12)). O sinal luminoso emitido pelo observador γ_1 difundem os valores τ_1 e $\bar{\tau}_2$. Analogamente, sendo E_2 o instante de emissão da coordenada τ_2 pelo observador γ_2 , o observador γ_1 atribuirá ao evento E_2 a coordenada $\bar{\tau}_1$. O sinal luminoso emitido pelo observador γ_2 difundem os valores τ_2 e $\bar{\tau}_1$.

Assim, para cada valor de τ_1 temos um respectivo $\bar{\tau}_2$ ($\varphi(\tau_1) = \bar{\tau}_2$) e do mesmo modo, cada valor de τ_2 temos um respectivo $\bar{\tau}_1$ ($\varphi(\tau_2) = \bar{\tau}_1$). Com estas informações, podemos recuperar as equações das trajetórias dos emissores em termos das coordenadas de emissão.

Do mesmo modo como os outros sistemas de coordenadas que apresentamos, as coordenadas de emissão não cobrem todo o espaço-tempo [16, 17]. Como apresentamos acima, as coordenadas de emissão são atribuídas a partir da interseção de geodésicas nulas. Consideremos o caso particular de dois observadores no espaço-tempo plano $(1+1)$ -dimensional. Analisando a fig.(4.11), podemos verificar que, na região do espaço-tempo entre as linha de universo dos emissores, os eventos podem ser distinguidos pelas coordenadas (τ_1, τ_2) . Entretanto, para as demais regiões, os sinais luminosos percorrem trajetórias que podem coincidir com a trajetória de um outro sinal, havendo ambigüidade na atribuição de coordenadas. Assim, a validade dessas coordenadas está restrita a um domínio local Ω , que corresponde a região entre as linhas de universo dos emissores.

4.4.1 Coordenadas de Emissão para Observadores Inerciais no Espaço-Tempo de Minkowski.

Uma das situações mais simples para construirmos coordenadas de emissão consiste em trabalharmos com emissores inerciais no espaço-tempo plano [16, 21]. Vamos admitir dois emissores inerciais, de linhas de universo γ_1 e γ_2 , que se movimentam no espaço-tempo (1+1)-dimensional, com velocidades constante v_1 e v_2 respectivamente.

Num determinado ponto $E_1 = (t_1, x_1)$ sobre a linha de universo γ_1 , visto pelo referencial K , o primeiro emissor envia um sinal luminoso, que propaga seu tempo próprio. Este sinal cruza o evento P e o marca com a coordenada τ_1 (ver.fig.(4.12)). Analogamente, no ponto $E_2 = (t_2, x_2)$ sobre a linha de universo γ_2 , o observador inercial emite um sinal luminoso, que propaga seu tempo próprio e cruza o evento P , e o registra com a coordenada τ_2 . Desta maneira, o evento P de coordenadas (t, x) no referencial K é registrado, em coordenadas de emissão, com o rótulo (τ_1, τ_2) .

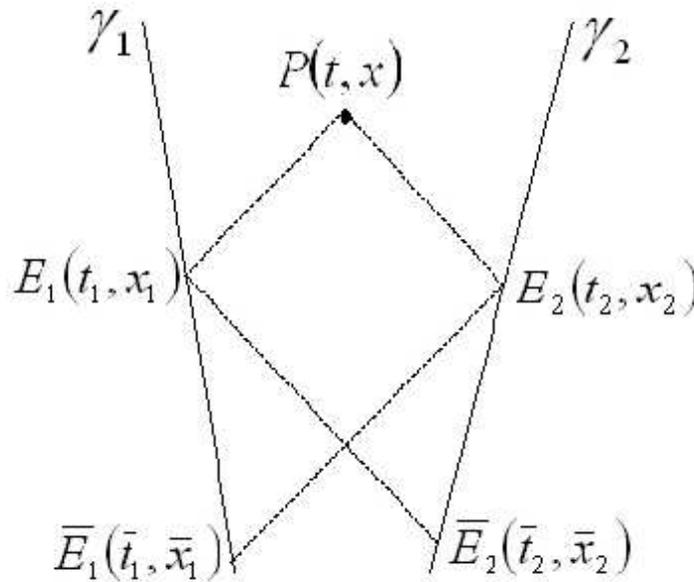


Figura 4.12: Dois observadores inerciais no espaço-tempo plano emitem respectivamente nos pontos E_1 e E_2 sinais luminosos que progagam seus tempos próprios e registram o evento P com coordenadas (τ_1, τ_2) . Os eventos \bar{E}_1 e \bar{E}_2 correspondem aos pontos de emissão dos sinais luminosos que cruzam a linha de universo do observador oposto respectivamente em E_2 e E_1 .

As linhas de universo dos emissores são descritas no referencial K pelas seguintes equações:

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} t_1 = t \\ x_1 = v_1 t + c_1 \end{cases} \quad (4.109)$$

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} t_2 = t \\ x_2 = v_2 t + c_2 \end{cases} \quad (4.110)$$

Nestas coordenadas, c_1 e c_2 são constantes que definem as posições espaciais dos emissores em $t = 0$. Podemos relacionar os tempos próprios dos emissores com o tempo (t), medido pelo referencial inercial K. Através da eq.(2.29), temos:

$$t = \frac{\tau_1}{\sqrt{1 - (v_1)^2}} \quad (4.111)$$

$$t = \frac{\tau_2}{\sqrt{1 - (v_2)^2}} \quad (4.112)$$

Estamos utilizando a condição de que no instante $t = 0$, os relógios dos observadores registram $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Podemos, então, escrever as equações de movimento (4.109) e (4.110) dos observadores em termos dos tempos τ_1 e τ_2 :

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} t_1 = \frac{\tau_1}{\sqrt{1 - (v_1)^2}} \\ x_1 = \frac{v_1 \tau_1}{\sqrt{1 - (v_1)^2}} + c_1 \end{cases} \quad (4.113)$$

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} t_2 = \frac{\tau_2}{\sqrt{1 - (v_2)^2}} \\ x_2 = \frac{v_2 \tau_2}{\sqrt{1 - (v_2)^2}} + c_2 \end{cases} \quad (4.114)$$

De acordo com a construção das coordenadas de emissão em (1+1)-dimensões, os eventos $E_1 = (t_1, x_1)$ e $P(t, x)$ estão conectados por uma reta que fisicamente representa a linha de universo do pulso luminoso, e portanto de equação:

$$x - x_1 = t - t_1 \quad (4.115)$$

Substituindo (4.113) na equação acima, obtemos:

$$x - t = -\frac{\tau_1}{\lambda_1} + c_1 \quad (4.116)$$

onde $\lambda_1 = \left[\frac{1+v_1}{1-v_1} \right]^{\frac{1}{2}}$.

Do mesmo modo, os eventos $E_2 = (t_2, x_2)$ e $P(t, x)$ também devem estar conectados

por uma reta, mas agora definida por:

$$x - x_2 = -(t - t_2) \quad (4.117)$$

Substituindo (4.114) na equação acima, obtemos:

$$x + t = \lambda_2 \tau_2 + c_2 \quad (4.118)$$

onde $\lambda_2 = \left[\frac{1+v_2}{1-v_2} \right]^{\frac{1}{2}}$.

A partir de (4.116) e (4.118), obtemos a lei de transformação entre as coordenadas do referencial K e as coordenadas de emissão:

$$x = \frac{1}{2} \left[-\frac{\tau_1}{\lambda_1} + \lambda_2 \tau_2 + c_3 \right] \quad (4.119)$$

$$t = \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_1}{\lambda_1} + \lambda_2 \tau_2 + c_4 \right] \quad (4.120)$$

onde $c_3 = c_1 + c_2$ e $c_4 = c_2 - c_1$.

Neste sistema de coordenadas a métrica bidimensional é dada por:

$$ds^2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.121)$$

Podemos também expressar a linha de universo dos emissores γ_1 e γ_2 nas coordenadas de emissão. Este processo é análogo ao utilizado para determinação da equação de transformação de coordenadas. Sendo $\bar{\tau}_1$ o tempo próprio registrado pelo emissor γ_1 no instante de emissão do sinal luminoso em $\bar{E}_1(\bar{t}_1, \bar{x}_1)$. O sinal atinge a linha de universo do observador γ_2 no ponto $E_2(t_2, x_2)$, ou seja, no instante τ_2 para este observador. Os eventos \bar{E}_1 e E_2 estão conectados pela reta:

$$x_2 - \bar{x}_1 = t_2 - \bar{t}_1 \quad (4.122)$$

Substituindo as equações de movimento (4.113) e (4.114) para os referidos tempos próprios, obtemos, para a reta acima, a equação:

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tau_2 + \tau_{01} \quad (4.123)$$

onde $\tau_{01} = \lambda_1(c_1 - c_2)$.

Do mesmo modo, sendo $\bar{\tau}_2$ o tempo próprio registrado pelo observador γ_2 no instante de emissão do sinal luminoso em $\bar{E}_2(\bar{t}_2, \bar{x}_2)$. O sinal atinge a linha de universo do observador

γ_1 no ponto $E_1(t_1, x_1)$. Os eventos \bar{E}_2 e E_1 estão conectados pela reta:

$$x_1 - \bar{x}_2 = -(t_1 - \bar{t}_2) \quad (4.124)$$

Consequentemente, obtemos:

$$\bar{\tau}_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tau_1 + \tau_{02} \quad (4.125)$$

onde $\tau_{02} = \frac{1}{\lambda_2} (c_1 - c_2)$.

Assim, as linhas de universo dos observadores são representadas em coordenadas de emissão, por:

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} \tau_1 = \tau_1 \\ \tau_2 = \varphi_1(\tau_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tau_1 + \tau_{02} \end{cases} \quad (4.126)$$

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} \tau_1 = \varphi_2(\tau_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tau_2 + \tau_{01} \\ \tau_2 = \tau_2 \end{cases} \quad (4.127)$$

4.4.2 Coordenadas de Emissão para Observadores de Rindler no Espaço-Tempo de Minkowski.

Vamos agora construir as coordenadas de emissão, a partir de dois observadores de Rindler [17, 21], que se movimentam no espaço-tempo (1+1)-dimensional com linhas de universo γ_1 e γ_2 que são descritas no referencial K de acordo com a eqs.(3.4) e (3.5), da seguintes forma:

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} t_1 = \rho_1 \sinh\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}\right) \\ x_1 = \rho_1 \cosh\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}\right) \end{cases} \quad (4.128)$$

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} t_2 = \rho_2 \sinh\left(\frac{\tau_2}{\rho_2}\right) \\ x_2 = \rho_2 \cosh\left(\frac{\tau_2}{\rho_2}\right) \end{cases} \quad (4.129)$$

onde τ_1 e τ_2 correspondem as coordenadas de emissão. Já ρ_1 e ρ_2 correspondem as posições iniciais ($t = 0$) dos observadores, que no caso de Rindler, obedecem à eq.(3.13).

Vamos trabalhar de maneira análoga ao caso inercial, a diferença está apenas nas equações de movimento dos observadores. Sendo E_1 um ponto sobre a linha de universo γ_1 em que é emitido o sinal eletromagnético que registra um evento $P(t, x)$ com a coordenada τ_1 , e E_2 o ponto sobre a linha de universo γ_2 em que é emitido o sinal eletromagnético que registra um evento $P(t, x)$ com a coordenada τ_2 .

Pela construção das coordenadas de emissão, os eventos $E_1 = (t_1, x_1)$ e $P(t, x)$ estão conectados pela reta:

$$t - t_1 = x - x_1 \quad (4.130)$$

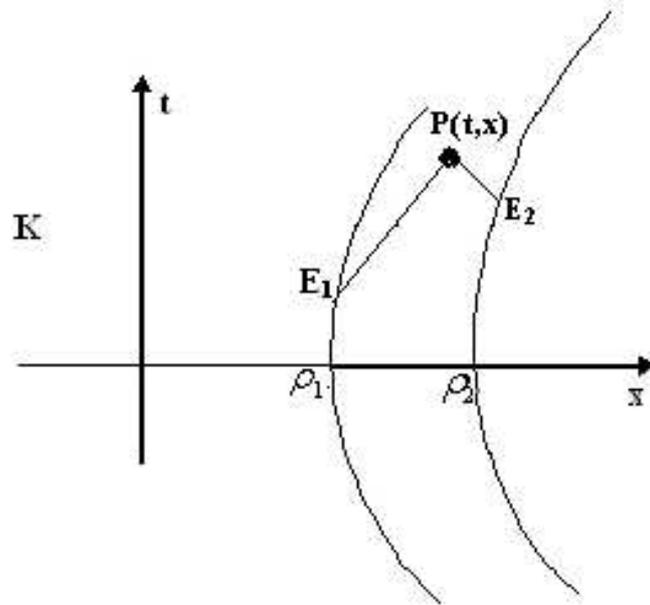


Figura 4.13: Dois observadores de Rindler no espaço-tempo plano, que partem das posições ρ_1 e ρ_2 , emitem respectivamente nos pontos E_1 e E_2 sinais luminosos que propagam seus tempos próprios e registram o evento P com coordenadas (τ_1, τ_2) .

Substituindo x_1 e t_1 de (4.128) obtemos, para a reta acima, a equação:

$$t - x = \rho_1 \left[\sinh \left(\frac{\tau_1}{\rho_1} \right) - \cosh \left(\frac{\tau_1}{\rho_1} \right) \right] \quad (4.131)$$

Do mesmo modo, os eventos $E_2 = (t_2, x_2)$ e $P(t, x)$ também devem estar conectados por uma reta, mas agora definida por:

$$x - x_2 = -(t - t_2) \quad (4.132)$$

Substituindo x_2 e t_2 de (4.129) na equação, obtemos:

$$t + x = \rho_2 \left[\sinh \left(\frac{\tau_2}{\rho_2} \right) - \cosh \left(\frac{\tau_2}{\rho_2} \right) \right] \quad (4.133)$$

As retas definidas em (4.131) e (4.133) exibem a relação entre as coordenadas registradas pelo referencial K e as coordenadas de emissão. Resolvendo essas equações, obtemos:

$$t = \frac{1}{2} \left(-\rho_1 e^{-\frac{\tau_1}{\rho_1}} + \rho_2 e^{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \right) \quad (4.134)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\rho_1 e^{-\frac{\tau_1}{\rho_1}} + \rho_2 e^{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \right) \quad (4.135)$$

As eqs.(4.134) e (4.135) correspondem as equações de transformações, entre as coordenadas cartesianas (t, x) e as coordenadas de emissão (τ_1, τ_2) , para emissores de Rindler. Neste novo sistema de coordenadas a métrica bidimensional é dada por:

$$ds^2 = -e^{-\frac{\tau_1}{\rho_1}} e^{\frac{\tau_2}{\rho_2}} d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.136)$$

Vamos agora expressar a linha de universo dos observadores γ_1 e γ_2 nas coordenadas de emissão τ_1 e τ_2 . De maneira análoga ao caso inercial, o evento $\bar{E}_1(\bar{t}_1, \bar{x}_1)$ (ponto de emissão sobre a linha de universo γ_1 da coordenada $\bar{\tau}_1$) está conectado com o evento $E_2(t_2, x_2)$ através de uma reta. Do mesmo, o evento $\bar{E}_2(\bar{t}_2, \bar{x}_2)$ (ponto de emissão sobre a linha de universo γ_2 da coordenada $\bar{\tau}_2$) também está conectado com o evento $E_2(t_2, x_2)$ através de uma reta.

Substituindo nessas retas as equações de movimento (4.128) e (4.129) para os referidos tempos próprios, obtemos:

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \tau_2 + \tau'_{01} \quad (4.137)$$

$$\bar{\tau}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \tau_1 + \tau'_{02} \quad (4.138)$$

onde $\tau'_{01} = -\rho_1 \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ e $\tau'_{02} = \rho_2 \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$.

Capítulo 5

Sistemas de Coordenadas Adaptados a Observadores Uniformemente Acelerados.

Como vimos, o capítulo 3 deste trabalho foi dedicado integralmente ao estudo de sistemas de coordenadas construídos a partir de observadores uniformemente acelerados no espaço-tempo de Minkowski. O sistema de coordenadas de Rindler, por exemplo, está adaptado a uma família de observadores cujas acelerações permanecem constantes ao longo de suas linhas de universo, mas que variam, de um observador para outro, com o inverso da posição inicial ($a = \frac{1}{\rho}$) [7]. Neste capítulo estudamos a construção de sistemas de coordenadas baseados em observadores acelerados cujas acelerações, variam, de um observador para outro, segundo a função $a = \frac{a_0}{\rho^n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e a_0 é uma constante de módulo unitário e cuja unidade de medida é igual a $[\text{comprimento}]^{n-1}$. Nesse contexto mais geral, o sistema de coordenadas de Rindler surge como um caso particular em que $n = 1$. Nossa motivação física encontra-se no fato de que esta generalização pode simular a aceleração sofrida por observadores estáticos tanto nas proximidades de um buraco negro quanto para regiões afastadas.

5.1 Equações de Movimento Generalizada para Observadores Uniformemente Acelerados.

No capítulo 3, estudando a linha de universo de um observador uniformemente acelerado (aceleração própria constante “ a ”), determinamos as eqs.(3.4) e (3.5) como sendo equações que regem seu movimento no espaço-tempo plano [1].

Vamos agora admitir um observador uniformemente acelerado, também no espaço-tempo de Minkowski, que possui aceleração própria dependendo de sua distância inicial

a origem (ρ), segundo a função:

$$a(\rho) = \frac{a_0}{\rho^n} = \frac{1}{\rho^n} \quad (5.1)$$

com $n \in \mathbb{N}$ e a_0 uma constante. Para preservar a unidade de medida da aceleração $a(\rho)$, a_0 deve ter unidade de [comprimento] $^{n-1}$. Por simplicidade, vamos tomar $a_0 = 1$.

Admitindo que o observador inicia seu movimento do repouso, partindo da posição $x(\tau = 0) = \rho$, suas equações de movimento são:

$$t = \rho^n \sinh\left(\frac{\tau}{\rho^n}\right) \quad (5.2)$$

$$x = \rho^n \cosh\left(\frac{\tau}{\rho^n}\right) - \rho^n + \rho \quad (5.3)$$

Este observador possui como linha de universo o arco de uma hipérbole de equação:

$$(x + \rho^n - \rho)^2 - t^2 = \rho^{2n} \quad (5.4)$$

Notemos que, calculando a quadri-aceleração a^μ para as equações de movimento (5.2) e (5.3), obtemos:

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \left(\frac{1}{\rho^n} \sinh\left(\frac{\tau}{\rho^n}\right), \frac{1}{\rho^n} \cosh\left(\frac{\tau}{\rho^n}\right), 0, 0 \right) \quad (5.5)$$

Sendo $a = (a^\mu a_\mu)^{\frac{1}{2}}$ o módulo da quadri-aceleração, verificamos que, de fato, o movimento descrito apresenta aceleração definida na eq.(5.1).

Analogamente a eq.(3.7), para um determinado instante τ , a velocidade relativa deste observador com relação ao referencial inercial K , será:

$$v = \tanh\left(\frac{\tau}{\rho^n}\right) \quad (5.6)$$

No entanto, da eq.(5.2), podemos escrever:

$$\sinh\left(\frac{\tau}{\rho^n}\right) = \frac{1}{\rho^n} t \quad (5.7)$$

A partir da relação matemática:

$$\cosh^2\left(\frac{\tau}{\rho^n}\right) - \sinh^2\left(\frac{\tau}{\rho^n}\right) = 1 \quad (5.8)$$

Substituindo (5.7) na relação acima, obtemos:

$$\cosh\left(\frac{\tau}{\rho^n}\right) = \left[1 + \left(\frac{1}{\rho^n} t\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

Deste modo, a partir das eqs.(5.7) e (5.9), a velocidade do observador acelerado O_ρ , no instante t (medido por K), pode ser reescrita como:

$$v = \frac{t}{[\rho^{2n} + t^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.10)$$

5.2 Sistema de Coordenadas.

Como já discutimos em capítulos anteriores, o sistema de coordenadas tem o papel de rotular os eventos do espaço-tempo com quatro números, que correspondem as coordenadas do evento e que devem identificá-lo univocamente. Vamos agora definir uma formulação para construir sistemas de coordenadas adaptados a observadores uniformemente acelerados, cujas acelerações próprias obedecem à eq.(5.1).

Vamos admitir uma família de observadores uniformemente acelerados, distribuídos continuamente sobre todo eixo espacial que individualmente obedecem às eqs.(5.2) e (5.3). Seguindo a regra de construções de sistemas de coordenadas empregadas em alguns casos anteriores, como por exemplo, nas coordenadas usuais de Rindler, teríamos alguns problemas a enfrentar, tratando-se do caso geral (5.1).

Como vimos na seção 3.3, as coordenadas de Rindler (τ, ξ) são construídas com base no princípio físico da localidade [23][24], mas, a partir de um observador privilegiado O_{a-1} . Este observador peculiar, tem o papel de definir o que é simultâneo para o sistema de coordenada. Além do mais, a coordenada espacial ξ atribuída a um dado evento, pode ser entendida como a distância inicial entre o observador que cruza o evento e o observador privilegiado.

Todavia, como já discutido anteriormente, a noção de simultaneidade construída com base no princípio físico da localidade depende diretamente da velocidade instantânea do observador que registra os eventos [23]. Para o caso geral (5.1), a velocidade dos observadores varia, digamos, de modo mais arbitrária. Caso optássemos por um observador privilegiado, sua linha de simultaneidade cruzaria a linha de universo dos demais observadores da família, encontrando-os com velocidades diferentes, e, por isto, discordariam entre si quanto à noção de simultaneidade. Podemos pensar da seguinte maneira: a linha de simultaneidade definida para o observador que parte da posição ρ_0 (ver fig.(5.1)), intercepta a linha de universo do observador que parte da posição ρ_1 (posição a direita de ρ_0), num instante, em que, de modo geral, $v_0 \neq v_1$, onde v_0 e v_1 correspondem a velocidade instantânea dos observadores em relação ao referencial K . Por sua vez, a noção de simultaneidade definida pelo observador que parte da posição ρ_1 pode não concordar com a idéia de simultaneidade de um observador à sua direita e assim sucessivamente.

Para resolvermos esta dificuldade, vamos construir nossas novas coordenadas, ainda com base no princípio da localidade, mas agora, permitindo que cada observador tenha o direito de definir o que é simultâneo, apenas, nas proximidades de sua linha de universo.

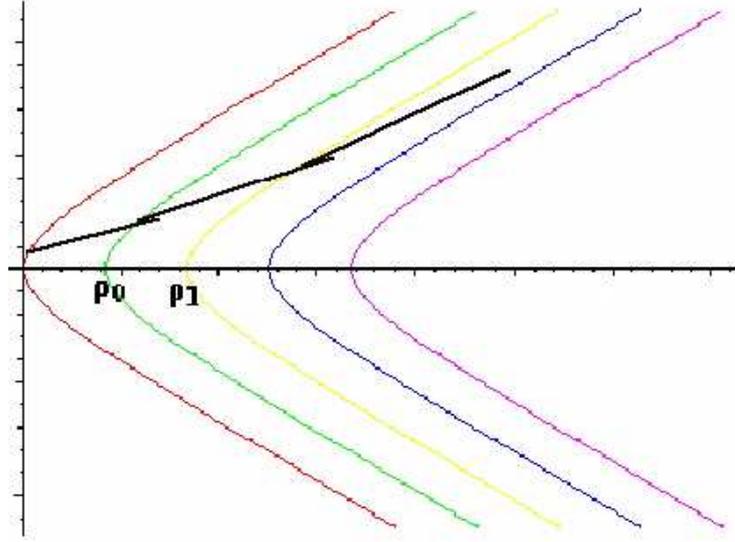


Figura 5.1: Caso particular de nossa generalização em que $n = 0$. A linha de simultaneidade definida para o observador que parte de ρ_0 intercepta a linha de universo do observador que parte de ρ_1 num instante em que $v_1 > v_0$. Observadores a direita de ρ_0 , conseqüentemente não concordarão com sua noção de simultaneidade.

Desta maneira, a linha de simultaneidade, que denotaremos por $t(x)$, para este sistema de coordenadas, é construída fazendo uma “ ligação ”, no limite do contínuo, entre todas as subsecções de simultaneidades dos observadores. De maneira geral, estas linhas de simultaneidades não são retas, podendo apresentar curvatura de acordo com o valor de n .

Para a coordenada espacial dos eventos, vamos atribuir a posição inicial ρ do observador que cruza o evento a ser registrado. Como veremos mais adiante, de acordo com o valor de n , a linha de universo dos observadores podem se cruzar. Para evitar a ambigüidade na atribuição das coordenadas espaciais, devemos nos restringir às regiões em que os eventos são cortados por um único observador [1, 6].

Para construirmos matematicamente as novas coordenadas, vamos seguir o seguinte raciocínio. Considere um ponto genérico, de coordenadas (t, x) , sobre alguma linha de simultaneidade. Por este ponto passa a linha de universo de algum observador O_ρ . Este observador pode ser encontrado por meio da eq.(5.4) e é ele que detém o direito de estabelecer localmente (em torno do ponto (t, x)) a linha de simultaneidade. Seguindo esta prescrição, temos então, que, no ponto (t, x) , o coeficiente angular da linha de simultaneidade $t(x)$ deve coincidir com a velocidade de O_ρ no instante t , que, por sua vez, pode ser calculada usando (5.10). Concluímos, portanto, que a linha de simultaneidade deve satisfazer à equação:

$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{t(x)}{[\rho^{2n}(x) + t^2(x)]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.11)$$

Resolvendo a eq.(5.11), encontramos a equação que estabelece as linhas de simultaneidade para a família de observadores. Entretanto, da forma como está escrita, a eq.(5.11) é de difícil solução direta, pois precisamos determinar explicitamente, a função $\rho(x, t(x))$, a partir da eq.(5.4), o que não é uma tarefa fácil. Entretanto, podemos reescrever a eq.(5.4) como:

$$t = [(x - \rho)^2 + 2(x - \rho)\rho^n]^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

Sendo assim:

$$dt = \left\{ \frac{(x - \rho + \rho^n)}{[(x - \rho)^2 + 2(x - \rho)\rho^n]^{1/2}} \right\} dx + \left\{ \frac{-x + \rho + nx\rho^{n-1} - (n+1)\rho^n}{[(x - \rho)^2 + 2(x - \rho)\rho^n]^{1/2}} \right\} d\rho \quad (5.13)$$

Substituindo (5.12) e (5.13) em (5.11), obtemos uma equação diferencial para $\rho(x, t(x))$:

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{-\rho^{2n}}{[-x + \rho + nx\rho^{n-1} - (n+1)\rho^n][x + \rho^n - \rho]} \quad (5.14)$$

Integrando a eq.(5.14) encontramos:

$$x = \frac{(2\rho^n - \rho)C + e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}}\rho^{2n+1}}{e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}}\rho^{2n} - C} \quad (5.15)$$

onde C é uma constante de integração que identifica as linhas de simultaneidade. Para cada valor C escolhido, temos uma linha de simultaneidade. Como veremos, podemos colocar C em função do tempo próprio τ medido por algum observador.

Substituindo (5.15) em (5.4), obtemos:

$$t = \left\{ \left[\frac{(2\rho^n - \rho)C + e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}}\rho^{2n+1}}{e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}}\rho^{2n} - C} + \rho^n - \rho \right]^2 - \rho^{2n} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.16)$$

As eqs.(5.15) e (5.16) são equações paramétricas, em termos de C e ρ , das linhas de simultaneidade de nosso sistema de coordenadas.

Como mencionado anteriormente, a constante C pode ser relacionada ao tempo próprio de algum observador designado. Para verificar isto, vamos admitir que a linha de simultaneidade começa a ser construída a partir do observador $O_{\rho=1}$, isto é, o observador que parte da posição inicial $\rho = 1$. Da eq.(5.3), para este observador, temos:

$$x_0 = \cosh(\tau) \quad (5.17)$$

Substituindo a condição inicial acima na eq.(5.15), determinamos a constante C como

sendo:

$$C = \frac{e^{\frac{2}{n-1}} [\cosh(\tau) - 1]}{\cosh(\tau) + 1} \quad (5.18)$$

Substituindo (5.18) em (5.15) e (5.16), encontramos a lei de transformação entre as coordenadas (t, x) do referencial inercial K e as novas coordenadas (τ, ρ) adaptadas a família de observadores não-inerciais.

Vamos agora introduzir a segunda dimensão espacial. O espaço-tempo será o espaço-tempo de Minkowski tridimensional. Utilizando um procedimento análogo ao caso (1+1)-dimensional, redefinimos nossas coordenadas admitindo a família de observadores movendo-se radialmente com aceleração própria constante. A diferença agora é que os observadores estão uniformemente distribuídos sobre o plano xOy e experimentam um movimento radial. As equações de transformação entre as coordenadas do referencial inercial K e as novas coordenadas oriundas da generalização, serão:

$$t = \left\{ \left[\frac{(2\rho^n - \rho) \frac{e^{\frac{2}{n-1}} [\cosh(\tau) - 1]}{\cosh(\tau) + 1} + e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}} \rho^{2n+1}}{e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}} \rho^{2n} - \frac{e^{\frac{2}{n-1}} [\cosh(\tau) - 1]}{\cosh(\tau) + 1}} + \rho^n - \rho \right]^2 - \rho^{2n} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

$$x = \cos(\theta) \left\{ \frac{(2\rho^n - \rho) \frac{e^{\frac{2}{n-1}} [\cosh(\tau) - 1]}{\cosh(\tau) + 1} + e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}} \rho^{2n+1}}{e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}} \rho^{2n} - \frac{e^{\frac{2}{n-1}} [\cosh(\tau) - 1]}{\cosh(\tau) + 1}} \right\} \quad (5.20)$$

$$y = \sin(\theta) \left\{ \frac{(2\rho^n - \rho) \frac{e^{\frac{2}{n-1}} [\cosh(\tau) - 1]}{\cosh(\tau) + 1} + e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}} \rho^{2n+1}}{e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}} \rho^{2n} - \frac{e^{\frac{2}{n-1}} [\cosh(\tau) - 1]}{\cosh(\tau) + 1}} \right\} \quad (5.21)$$

onde ρ e θ em coordenadas polares, localizam a posição inicial do observador $(x(0), y(0))$. Mantendo τ constante e fazendo ρ variar de 0 a ∞ e θ de 0 a 2π , obtemos a superfície de simultaneidade (Σ_τ) do novo sistema de coordenadas. Calculando a métrica induzida sobre a superfície de simultaneidade Σ_τ , encontramos:

$$dl^2 = \left\{ \frac{[-4n\rho^{n+1} + 4n^2\rho^{2n} + \rho^2] C^2 + 2e^{\frac{2\rho^{-n+1}}{n-1}} C [\rho^{2(n+1)} - 2n\rho^{3(n+1)}] + e^{4\rho^{-n+1}} \rho^{2+4n}}{\rho^2 \left[C - e^{\frac{2\rho^{-n+1}}{n-1}} \rho^{2n} \right]^2} \right\} d\rho^2 + \left\{ \left(\frac{-2C\rho^n + C\rho - e^{\frac{2\rho^{-n+1}}{n-1}} \rho^{2n+1}}{-e^{\frac{2\rho^{-n+1}}{n-1}} \rho^{2n} + C} \right)^2 \right\} d\theta^2 \quad (5.22)$$

Agora é possível estudarmos a estrutura geométrica de Σ_τ como uma superfície Rimaniana [31]. Com a métrica induzida, podemos determinar o escalar de curvatura R da seção espacial, a partir do qual, como veremos, encontraremos para determinados valores de n , que $R \neq 0$. Isto significa que as seções espaciais podem possuir curvatura não-nula. Sendo assim, o novo sistema de coordenadas também pode a exemplo daquele pro-

posto na secção 3.4, ser utilizado para mostrar a conexão entre geometria não-Euclidiana (das secções espaciais) e referenciais não-inerciais, como sugerido originariamente por Einstein[33].

5.3 Casos Particulares.

5.3.1 Sistema de Coordenadas de Observadores que Possuem a Mesma Aceleração ($n = 0$).

Uma particularidade de nossa generalização é o caso em que $n = 0$. Para este caso todos os observadores sofrem a mesma aceleração ($a = 1$), de maneira que suas linhas de universo descrevem no espaço-tempo hipérbolas de mesma concavidade. As equações que descrevem as linhas de universo destes observadores no espaço-tempo de Minkowski serão:

$$t = \sinh(\tau) \quad (5.23)$$

$$x = \cosh(\tau) - 1 + \rho \quad (5.24)$$

Neste caso, a linha de simultaneidade definida para o primeiro observador, utilizando o princípio da localidade, cruza a linha de universo de um segundo observador que se encontra a uma velocidade maior que o primeiro. Considerando este raciocínio para um contínuo de observadores desta mesma família, observaremos que suas linhas de simultaneidade inclinam-se cada vez mais.

As equações que relacionam as coordenadas atribuídas aos eventos pelo referencial inercial padrão (t,x) e as coordenada atribuídas por este novo referencial em termos de C , serão:

$$t = \frac{2\sqrt{C}e^{-\rho}}{e^{-2\rho} - C} \quad (5.25)$$

$$x = \frac{(2 - \rho)C + e^{-2\rho}\rho}{e^{-2\rho} - C} \quad (5.26)$$

com $C = \frac{e^{-2}(\cosh(\tau)-1)}{(\cosh(\tau)+1)}$.

Mantendo $\tau = const.$ e fazendo ρ variar, obtemos as linhas de simultaneidade do novo sistema de coordenadas. Na fig.(5.2) podemos visualizar a linha de simultaneidade $\Sigma_{\tau=1}$.

Considerando a segunda dimensão espacial, a forma da métrica induzida na superfície de simultaneidade será:

$$dl^2 = \left[\frac{C^2 + 2Ce^{-2\rho} + 2e^{2\rho}}{(C - e^{-2\rho})^2} \right] d\rho^2 + \left[\frac{(-2C + C\rho - e^{-2\rho}\rho)^2}{(C - e^{-2\rho})^2} \right] d\theta^2 \quad (5.27)$$

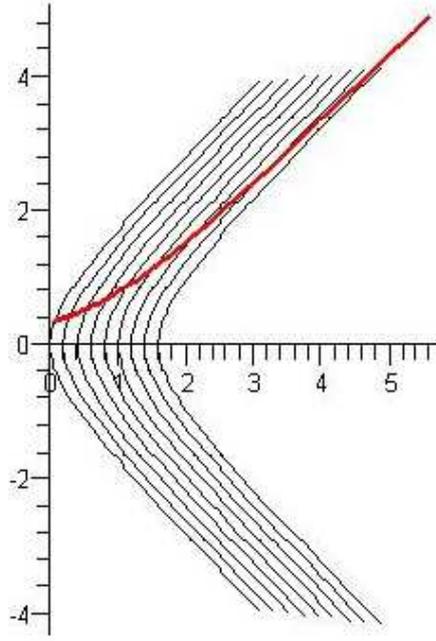


Figura 5.2: Linha de simultaneidade ($\tau = 1$) para um sistema de coordenadas construídos a partir de observadores que apresentam a mesma aceleração constante. Os arcos de hipérbolas representam linhas de universo de alguns destes observadores igualmente espaçados.

Assim como outros sistemas de coordenadas que já estudamos, este sistema também apresenta domínio de validade restrito. Analisando a métrica induzida acima, percebemos uma restrição para o domínio das coordenadas, pois devemos ter:

$$(C - e^{-2\rho})^2 \neq 0 \quad (5.28)$$

Sendo assim, temos:

$$C \neq e^{-2\rho} \quad (5.29)$$

Calculando o escalar de curvatura R , a partir de (5.27), obtemos:

$$R = -4 \frac{[2e^{-2\rho}C^4 + 7C^3e^{-4\rho} + C^3e^{4\rho} + 4C^2e^{2\rho} + 4C^2e^{-6\rho} + C - Ce^{-8\rho} - 2e^{-2\rho}]}{[C^2 + 2e^{-2\rho}C + e^{4\rho}]^2 [-2C + C\rho - \rho e^{-2\rho}]} \quad (5.30)$$

Para a região de interesse, ou seja, na região onde $C \neq e^{-2\rho}$, o escalar de curvatura não é nulo (ver Apêndice). Consequentemente as seções espaciais apresentam curvatura não-nula, ou seja, geometria não-Euclidiana.

5.3.2 Sistema de Coordenadas de Observadores com Aceleração $\frac{1}{\rho}$ ($n = 1$, “ Rindler ”).

Este é sem dúvida um caso de grande interesse. Quando a aceleração própria de cada observador cai com o inverso de sua distância inicial à origem ($n = 1$), como veremos, nossa formulação nos permite recuperar o sistema de coordenadas usuais de Rindler.

Estudando as equações de transformações (5.15) e (5.16), percebemos que estas equações não permitem uma direta substituição de $n = 1$, pois estas equações não estão definidas para este valor de n .

O problema está no termo $e^{2\frac{\rho^{-n+1}}{n-1}}$. No entanto, podemos estudá-lo no limite $n \rightarrow 1$. De fato, vamos definir a função delta (δ), como: $\delta = 1 - n$ ($\delta \ll 1$). Sendo assim, podemos escrever:

$$\rho^{1-n} = \rho^\delta = e^{\delta \ln \rho} \approx 1 + \delta \ln \rho \quad (5.31)$$

Deste modo, temos que:

$$e^{\frac{2\rho^{1-n}}{n-1}} = e^{\frac{2}{n-1}[1+(1-n)\ln(\rho)]} = e^{\frac{2}{n-1}} \rho^{-2} \quad (5.32)$$

Lembrando que $C = \frac{e^{\frac{2}{n-1}[\cosh(\tau)-1]}}{\cosh(\tau)+1}$, vamos escrever:

$$C = e^{\frac{2}{n-1}} C^* \quad (5.33)$$

onde $C^* = \frac{\cosh(\tau)-1}{\cosh(\tau)+1}$.

Substituindo (5.32) e (5.33) em (5.15) e (5.16), as equações de transformações de coordenadas se reduzem a:

$$x = \rho \left(\frac{1 + C^*}{1 - C^*} \right) = \rho \cosh(\tau) \quad (5.34)$$

$$t = \rho \left[\left(\frac{1 + C^*}{1 - C^*} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} = \rho \sinh(\tau) \quad (5.35)$$

As eqs.(5.34) e (5.35) correspondem exatamente as equações de transformações entre as coordenadas (t, x) e as coordenadas de Rindler (ρ, τ) em (3.14) e (3.15), adaptadas ao observador com aceleração $a = 1$.

É fácil ver que as linhas de simultaneidade ($\tau = const.$) são retas cujos coeficientes angulares são numericamente iguais a velocidade instantânea do observador que parte da posição $\rho = 1$.

É curioso observar que no caso particular da generalização em que $n = 1$, a linha de simultaneidade, definida por um dado observador (com base no princípio físico da localidade), cruza a linha de universo dos demais observadores da família, no exato instante, em

que todos possuem a mesma velocidade. Desta forma, todos os observadores concordam quanto à simultaneidade de eventos.

5.3.3 Sistema de Coordenadas de Observadores com Aceleração $\frac{1}{\rho^2}$ ($n = 2$).

No caso em que os observadores sofrem uma aceleração que cai com o quadrado da distância inicial, suas linhas de universo também descrevem hipérbolas no espaço-tempo, no entanto, com concavidades mais acentuadas para observadores mais próximos da origem. As equações que descrevem as linhas de universo destes observadores no espaço-tempo de Minkowski serão:

$$t = \rho^2 \sinh\left(\frac{\tau}{\rho^2}\right) \quad (5.36)$$

$$x = \rho^2 \cosh\left(\frac{\tau}{\rho^2}\right) - \rho^2 + \rho \quad (5.37)$$

Neste caso, a linha de simultaneidade definida para um dado observador acelerado, cruza a linha de universo de um segundo observador a sua direita que se encontra a uma velocidade menor. Considerando este raciocínio para vários observadores desta mesma família, podemos esperar que as linhas de simultaneidade inclinem-se cada vez menos. Vamos verificar este resultado.

As equações que relacionam as coordenadas atribuídas aos eventos pelo referencial inercial padrão (t,x) e as coordenada atribuídas por este novo referencial em termos de C , são:

$$t = \frac{2\rho^4 \sqrt{C} e^{\left(\frac{1}{\rho}\right)}}{e^{\frac{2}{\rho}} \rho^4 - C} \quad (5.38)$$

$$x = \frac{(2\rho^2 - \rho) C + e^{\frac{2}{\rho}} \rho^5}{e^{\frac{2}{\rho}} \rho^4 - C} \quad (5.39)$$

onde $C = e^2 \left[\frac{\cosh(\tau)-1}{\cosh(\tau)+1} \right]$.

Mantendo τ constante e variando ρ , encontramos as linhas de simultaneidade Σ_τ . Na fig.(5.3), podemos visualizar a linha de simultaneidade $\Sigma_{\tau=1}$.

Considerando a segunda dimensão espacial, em vez da linha, teremos agora superfícies

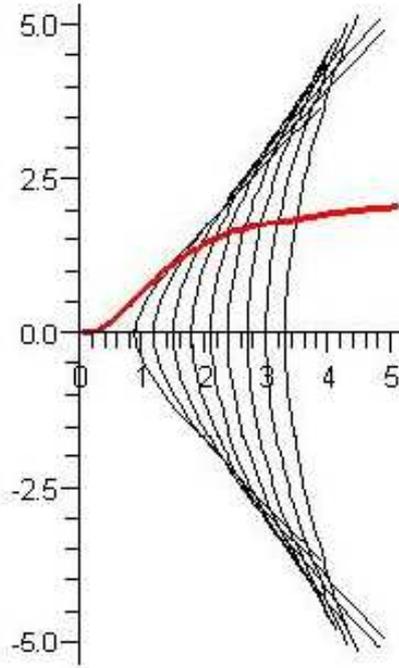


Figura 5.3: Linha de simultaneidade ($\tau = 1$) para um sistema de coordenadas construídos a partir de observadores que apresentam aceleração da forma $a = \frac{1}{\rho^2}$. Os arcos de hipérbolas representam linhas de universo de alguns destes observadores igualmente espaçados.

de simultaneidade. A métrica induzida na superfície de simultaneidade Σ_τ será:

$$dl^2 = \left[\frac{(-8\rho^3 + 16\rho^4 + \rho^2)C^2 + 2e^{\frac{2}{\rho}}C(\rho^6 - 4\rho^9) + e^{\frac{4}{\rho}}\rho^{10}}{\rho^2(C - e^{\frac{2}{\rho}}\rho^4)^2} \right] d\rho^2 + \left[\left(\frac{-2C\rho^2 + C\rho - e^{\frac{2}{\rho}}\rho^5}{-e^{\frac{2}{\rho}}\rho^4 + C} \right)^2 d\theta^2 \right] \quad (5.40)$$

Calculando o escalar de curvatura R , é possível verificar que as seções espaciais apresentam curvatura não-nula (ver Apêndice), de modo que este sistema de coordenada também pode ser utilizado para mostrar a conexão entre geometria não-Euclidiana do espaço e referenciais não-inerciais.

Como discutido no capítulo 3, sistemas de coordenadas associados a observadores acelerados apresentam validade local. Os sistemas de coordenadas aqui descritos não são diferentes. Eles não cobrem todos os eventos do espaço-tempo. De fato, para $n \geq 2$, encontramos observadores cujas linhas de universo se interceptam, provocando ambiguidade na atribuição das coordenadas espaciais dos eventos.

Como ilustração vamos analisar a situação em estudo ($n = 2$). Dado um observador

que em $\tau = 0$ encontra-se localizado na posição ρ , devemos descobrir a posição ρ' do observador que o intercepta. No ponto de interseção, as linhas de universo devem apresentar as mesmas coordenadas (x, t) :

$$\begin{cases} (x + \rho^2 - \rho)^2 - t^2 = \rho^4 \\ (x + \rho'^2 - \rho')^2 - t^2 = \rho'^4 \end{cases}$$

Eliminando t das equações, encontramos três relações:

$$\rho' = \rho, \rho' = -\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \pm \sqrt{-12\rho^2 + 8\rho x + 4\rho + 4x^2 - 12x + 1}$$

A primeira relação é trivial. Vamos, assim, nos concentrar nas outras duas. Observe que, se a expressão no interior da raiz quadrada for negativa, não haverá solução real para as equações. Isto significa que os observadores O_ρ e $O_{\rho'}$ não se cruzam. Sendo assim, a condição:

$$-12\rho^2 + 8\rho x + 4\rho + 4x^2 - 12x + 1 < 0$$

fornece a região do espaço-tempo onde não ocorre interseção entre linhas de universo dos observadores acelerados. Matematicamente ela pode ser expressa por:

$$-\rho + \frac{3}{2} - \sqrt{4\rho^2 - 4\rho + 2} < x < -\rho + \frac{3}{2} + \sqrt{4\rho^2 - 4\rho + 2}$$

5.4 Observador Estático nas Proximidades do Buraco Negro de Schwarzschild.

Consideremos um Buraco Negro de massa M , estático e com simetria esférica [1, 4]. Suponha que existe naquela região um observador em repouso com relação ao Buraco Negro. Obviamente este observador estará acelerado com relação a um referencial em queda livre. Podemos pensar da seguinte maneira: para um foguete se manter em repouso em uma região onde existe um Buraco Negro, ele deve acionar suas turbinas.

Na região exterior ao Buraco Negro, a geometria do espaço-tempo é descrita pela métrica de Schwarzschild, que em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) é dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (5.41)$$

onde G é a constante de gravitação universal.

Seja x_P^μ as coordenadas do corpo estático no ponto P do espaço-tempo. Assim temos: $x_P^\mu = (t, r, \theta, \phi)$. Estando o observador estático, temos:

$$t = t(\tau) \quad r = const. \quad \theta = const. \quad \phi = const.$$

Fazendo r , θ e ϕ constantes em (5.41) e substituindo (2.28), obtemos:

$$\frac{dt}{d\tau} = \left[1 - 2\frac{GM}{r} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.42)$$

Seja u_P^μ a 4-velocidade do corpo estático, então:

$$u_P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, 0 \right) = \left(\left[1 - 2\frac{GM}{r} \right]^{-\frac{1}{2}}, 0, 0, 0 \right) \quad (5.43)$$

A quadri-aceleração a_P^μ que o corpo experimenta com relação ao referencial em queda livre pode ser calculada por meio da derivada covariante:

$$a_P^\mu = u^\nu (\nabla_\nu u^\mu) = u_P^\nu \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu u^\alpha \right) \quad (5.44)$$

onde $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\beta} (g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\nu,\beta})$ ¹.

Analisando cada componente da quadri-aceleração separadamente, obtemos:

$$a_P^\mu = \left(0, \frac{GM}{r^2}, 0, 0 \right) \quad (5.45)$$

Portanto o módulo da quadri-aceleração a será:

$$a = \left(1 - 2\frac{GM}{r} \right)^{-1} \frac{GM}{r^2} \quad (5.46)$$

Vamos, agora, introduzir uma nova coordenada ρ que mede a distância do corpo estático ao horizonte de eventos (R_s). A relação entre ρ e r , será dada por:

$$\int_0^\rho d\rho = \int_{R_s=2GM}^r \left[1 - 2\frac{GM}{r} \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (5.47)$$

Resolvendo a integral acima, obtemos:

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2rGM} + GM \ln \left(-GM + r + \sqrt{r^2 - 2rGM} \right) - GM \ln (GM) \quad (5.48)$$

Gostaríamos de colocar r em função de ρ . Suponha que o observador se encontra próximo do raio de Schwarzschild ($R_s = 2GM$). Podemos, então escrever:

$$r = R_s + \frac{\delta^2(\rho)}{R_s} \quad (5.49)$$

onde $\delta(\rho)$ é muito pequeno comparado a R_s . Substituindo a equação acima em (5.48) e

¹Notação: $g_{\alpha\beta,\nu} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}$

admitindo termos até $\delta^3(\rho)$, encontramos:

$$\rho = 2\delta(\rho) + \frac{1}{3R_s^2}\delta^3(\rho) \quad (5.50)$$

Vamos agora expandir a função $\delta(\rho)$ em série de potências:

$$\delta(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + \dots + \quad (5.51)$$

onde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ são constantes. Substituindo a equação (5.51) em (5.50) e admitindo termos até ρ^3 , encontramos:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{1}{48R_s^2}$$

Segue, então, que:

$$\delta(\rho) = \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{48R_s^2}\rho^3 \quad (5.52)$$

Substituindo (5.49) e (5.52) em (5.46) obtemos, em segunda aproximação, o módulo da 4-aceleração necessária para um observador manter-se estático nas proximidades do Buraco Negro de Schwarzschild, em termos de ρ :

$$a(\rho \rightarrow 0) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{3R_s^2}\rho \quad (5.53)$$

A partir da equação acima, podemos observar que, em primeira aproximação, observadores estáticos na vizinhanças do Buraco Negro de Schwarzschild estão submetidos a mesma aceleração sofrida pelos observadores de Rindler no espaço-tempo de Minkowski. É por este motivo que o referencial de Rindler consegue simular alguns aspectos geométricos dos Buracos Negros.

Por outro lado, para $r \gg R_s$, ou seja, para regiões suficientemente afastadas do Buraco Negro, temos $\rho = r$ e $a = \frac{GM}{\rho^2}$. Neste domínio, verificamos, como seria de se esperar, que a aceleração coincide com a previsão da Teoria Gravitacional Newtoniana. Esta situação pode ser simulada pelo caso $n = 2$ de nossa generalização.

Assim esta proposta de generalização para sistema de coordenadas construídos a partir de observadores que experimentam aceleração uniforme permite simular o comportamento de observadores tanto nas proximidades de um buraco negro ($n = 1$) quanto para regiões afastadas ($n = 2$).

Capítulo 6

Comentários e Conclusões

Nesse trabalho realizamos um estudo sobre os métodos de construção de sistemas de coordenadas no espaço-tempo de Minkowski e as dificuldades inerentes a cada método. Vimos que a tarefa de localizar eventos no espaço-tempo consiste, de maneira geral, em atribuir quatro números, que constituem as coordenadas do evento. Estes números são provenientes de regras e critérios que podem variar de um sistema de coordenadas para outro.

Nossos sistemas de coordenadas foram construídos no espaço-tempo de Minkowski. Ainda assim, enfrentamos algumas dificuldades para rotular os eventos, quando os sistemas de coordenadas são construídos a partir de observadores acelerados. Em geral, estes sistemas apresentam validade local, como buscamos evidenciar nos diferentes sistemas de coordenadas que apresentamos.

A literatura oferece diversas maneiras de construir sistemas de coordenadas. Em nosso trabalho nos preocupamos em sistematizar as formas mais conhecidas de construir sistemas de coordenadas, além de propormos novos métodos. Da literatura, estudamos as coordenadas usuais de Rindler. Vimos que a família de observadores de Rindler é composta de observadores acelerados, com acelerações inversamente proporcionais as suas respectivas posições iniciais (ρ). Para este referencial, as coordenadas são atribuídas a partir de um observador privilegiado da família, que parte da posição $\rho = \frac{1}{a}$, onde a é a aceleração própria do observador.

A partir da família de observadores de Rindler, construímos um novo sistema de coordenadas, adotando uma nova regra para rotular os eventos. Neste novo sistema, a coordenada temporal para o evento corresponde ao tempo próprio τ medido pelo observador que cruza o evento. Esta modificação resultou em superfícies de simultaneidade com curvatura. Deste modo, este referencial pode ser utilizado para mostrar a conexão entre geometria não-Euclidiana das secções espaciais e referenciais não-inerciais.

Outro método de construção de sistemas de coordenadas de grande destaque que estudamos, foi o método de Fermi-Walker. As coordenadas de Fermi-Walker ou coordenadas de Fermi, são, como vimos, construídas através de uma tétrada que experimenta

um transporte de Fermi-Walker ao longo da linha de universo do observador. Dado um evento arbitrário, deve existir uma geodésica do tipo espaço que passa pelo evento e cruza a linha de universo do observador perpendicularmente em um certo ponto P. A coordenada temporal de Fermi equivale ao tempo próprio τ medido pelo observador no ponto P. Já as coordenadas espaciais correspondem respectivamente as projeções de um vetor que liga P ao evento, na direção de cada eixo espacial da tétrada carregada pelo observador. Aplicando este método a observadores uniformemente acelerados, como vimos, recaímos nas coordenadas usuais de Rindler. Aplicamos também o mesmo procedimento para um observador em movimento circular.

As coordenadas de Marzke-Wheeler, ou coordenadas de Radar, baseiam-se em uma extensão do procedimento de sincronização de Einstein. Estas coordenadas são construídas a partir de um observador que emite pulsos eletromagnéticos que são recebidos e imediatamente reenviados pelo evento a ser registrado. De acordo com as coordenadas de radar, este observador atribui como coordenada temporal, a média aritmética do tempo gasto pelo sinal para ir e voltar, medido por seu relógio. Já a coordenada espacial corresponde a metade da distância percorrida pelo sinal durante o movimento de ida e volta, estimada pelo observador.

Ao contrário do procedimento das coordenadas de Fermi-Walker que, no espaço-tempo de Minkowski, gera superfícies de simultaneidade planas, o procedimento das coordenadas de radar gera superfícies de simultaneidade que podem apresentar curvatura dependendo do movimento do observador. Construímos as coordenadas Radar para um observador inercial e vimos que, para este caso, as equações de transformações entre essas coordenadas e as coordenadas cartesianas (t, x) , medidas por um referencial inercial, coincidem com as equações de transformações de Lorentz. Aplicamos igualmente este procedimento para um observador de Rindler e um observador em movimento circular e analisamos as suas respectivas superfícies de simultaneidade.

Estudamos também as coordenadas de emissão ou coordenadas de GPS, que recebem este nome pelo fato de serem construídas de modo semelhante ao famoso Sistema de Posicionamento Global. Assim como o GPS, estas coordenadas são construídas utilizando quatro emissores, que na prática podem ser entendidos como satélites. Dado um usuário que deseja se localizar, cada satélite emite um sinal eletromagnético que percorre o espaço-tempo propagando o tempo próprio do emissor, correspondente ao instante da emissão. O usuário, que pode ser pensado como um observador na superfície da Terra, recebe conseqüentemente quatro sinais com a informação $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, que correspondem as coordenadas que localizam o usuário. No espaço-tempo bidimensional, construímos as coordenadas de emissão para emissores inerciais utilizando apenas dois satélites. O mesmo fizemos para emissores pertencentes a família de observadores de Rindler.

Aproveitamos a oportunidade para enriquecer ainda mais o quadro de construção de sistema de coordenadas, propondo uma construção para sistemas de coordenadas baseados

em observadores cuja aceleração “ a ” depende de sua posição inicial “ ρ ” segundo a equação $a = \frac{a_0}{\rho^n}$, com $n \in \mathbb{N}$ e a_0 é uma constante. Nestes sistemas de coordenadas, as coordenadas temporais são construídas com base no princípio físico da localidade. Porém, ao contrário das coordenadas de Rindler usuais, que são atribuídas utilizando um observador privilegiado, para essas coordenadas, cada observador tem o direito de definir o que é simultâneo nas proximidades de sua linha de universo. As linhas de simultaneidades surgem da ligação, no limite do contínuo, entre segmentos das linhas de simultaneidade individuais. As coordenadas espaciais correspondem a posição inicial do observador que cruza o evento.

Para estas novas coordenadas, encontramos as equações de transformações com respeito às coordenadas (t, x) de um referencial inercial. No caso particular em que $n = 0$, vimos que todos os observadores apresentam a mesma aceleração. Neste caso, a linha de simultaneidade inclina cada vez mais com relação ao eixo espacial para $x \rightarrow \infty$. Uma das propriedades interessantes dessas coordenadas é que na superfície de simultaneidade, o escalar de curvatura R não é nulo, significando que as secções espaciais possuem curvatura.

No caso em que $n = 1$ a generalização recupera as coordenadas usuais de Rindler. O curioso é que as coordenadas de Rindler são atribuídas originariamente por um único observador, já nossas coordenadas são atribuídas por toda família de observadores. No entanto, para $n = 1$, todos os observadores concordam com a noção de simultaneidade construída a partir do princípio da localidade, reconduzindo, deste modo, às coordenadas Rindler. No caso de $n = 2$, os observadores possuem linhas de universo com concavidade mais acentuadas para observadores próximos da origem. Para esta situação a linha de simultaneidade inclina cada vez menos, tornado-se paralela ao eixo espacial para longas distâncias. Como ilustramos geometricamente, para $n \geq 2$, as linhas de universo dos observadores podem se cruzar, gerando ambiguidade na hora rotular os eventos. Devemos restringir a validade destas coordenadas para um domínio local.

Como verificamos, esta generalização é útil para mostrar que as secções espaciais de referenciais não-inerciais podem ter uma geometria não-Euclidiana. Além disso, a generalização nos permite simular o comportamento de observadores estáticos, tanto nas proximidades do Buraco Negro de Schwarzschild (caso $n = 1$), quanto para regiões suficientemente afastadas (caso $n = 2$).

Uma perspectiva futura deste trabalho consiste em construir um sistema de coordenada adaptados a observadores que estão submetidos a uma força central do tipo Coulombiana. Este sistema torna-se interessante pelo fato da aceleração dos observadores dependerem do tempo. Outra perspectiva é tentar realizar aplicações dos sistemas de coordenadas que estudamos em um espaço-tempo com curvatura como, por exemplo, no espaço-tempo de Schwarzschild e Kerr.

Apêndice

No capítulo 5, construímos uma proposta para sistemas de coordenadas adaptadas a observadores acelerados, que pode ser usada para discutir a relação entre referenciais não-inerciais e a geometria das secções espaciais.

Podemos obter informações a respeito da geometria do espaço, através do Escalar de curvatura R , das secções de simultaneidade.

Em nossa generalização, os observadores apresentam aceleração “ a ” que depende da posição inicial “ ρ ” dos observadores, segundo a função:

$$a = \frac{a_0}{\rho^n}$$

onde $a_0 = 1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para a situação particular em que $n = 1$, a generalização recupera as coordenadas usuais de Rindler (ver secção 5.3.2). Neste caso, as secções espaciais são planas e o Escalar de Curvatura R é consequentemente nulo.

No caso da generalização em que $n = 0$, o escalar de curvatura R é dado pela eq.(5.30). O gráfico de R em função de ρ , para a eq.(5.30), está descrito na fig.(1) deste apêndice.

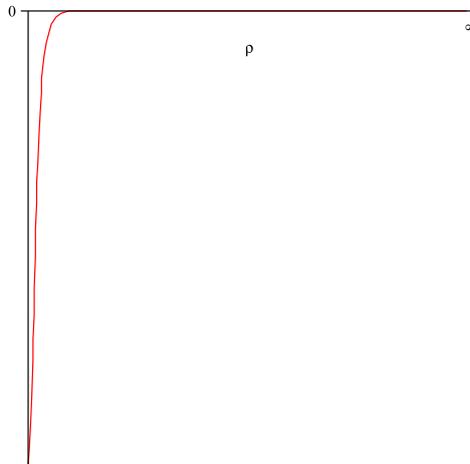


Figura 1: Caso em que $n = 0$. Gráfico do Escalar de Curvatura R em função de ρ , para $\tau = 0, 1$. Como $R < 0$, de acordo com a convenção adotada, as secções de simultaneidade são consideradas superfícies esféricas.

A partir desta figura, podemos afirmar que, na região de validade deste referencial ($C \neq e^{-2\rho}$), o escalar de curvatura R sobre as secções espaciais é negativo ($R < 0$)¹. Isto significa que, de acordo com o critério de classificação de superfícies, as secções espaciais são superfícies esféricas.

¹Convenção do Maple(v.10)

Por sua vez, a situação particular da generalização em que $n = 2$, o escalar de curvatura R , obtido a partir da métrica induzida (5.40), é dado por:

$$R = \frac{\left(8e^{\frac{2}{\rho}}C\rho \left(\begin{array}{l} e^{\frac{6}{\rho}}\rho^{12} - e^{\frac{6}{\rho}}\rho^{16} - 4e^{\frac{6}{\rho}}\rho^{13} + 2e^{\frac{6}{\rho}}\rho^{15} - 16C^3\rho + 31e^{\frac{4}{\rho}}C\rho^{12} + 45e^{\frac{2}{\rho}}C^2\rho^6 \\ -170C^3\rho^3 + 3C^2e^{\frac{2}{\rho}}\rho^4 + 20C^3\rho^5 - 20C^2e^{\frac{2}{\rho}}\rho^5 + 113C^3\rho^4 + 85C^3\rho^2 + 3e^{\frac{6}{\rho}}\rho^{14} \\ -5e^{\frac{4}{\rho}}C\rho^{10} + 3Ce^{\frac{4}{\rho}}\rho^8 - 64C^2e^{\frac{2}{\rho}}\rho^9 - 42e^{\frac{2}{\rho}}C^2\rho^7 + 2e^{\frac{4}{\rho}}C\rho^{11} + C^3 \\ +49C^2e^{\frac{2}{\rho}}\rho^8 - 20e^{\frac{4}{\rho}}C\rho^{13} - 8e^{\frac{4}{\rho}}C\rho^9 \end{array} \right) \right)}{\left(\left(-8C^2\rho + 16C^2\rho^2 + C^2 + 2e^{\frac{2}{\rho}}C\rho^4 - 8e^{\frac{2}{\rho}}C\rho^7 + e^{\frac{4}{\rho}}\rho^8 \right)^2 \left(2C\rho - C + e^{\frac{2}{\rho}}\rho^4 \right) \right)}$$

Como vimos na secção (5.3.3), este sistema de coordenadas apresenta domínio de validade restrito, pois, as linhas de universo dos observadores se interceptam.

Nosso sistema de coordenadas começa a ser construído a partir do observador que parte da posição $\rho = 1$. Neste caso, da condição de validade definida na secção (5.3.3), o valor da coordenada espacial x (registrada pelo observador inercial K) em que ocorre a primeira intersecção será em $x = 1 + \sqrt{2}$. Substituindo esse valor de x na eq.(5.39), encontramos a posição inicial ρ' do primeiro observador que cruza a linha de universo do observador $O_{\rho=1}$ como sendo $\rho' \simeq 0,71$. Restringindo a validade do sistema de coordenadas ao intervalo $0,71 < \rho < 1$, construímos o gráfico de R em função de ρ , que está descrito na figura (2) deste apêndice. Nesta região observamos que $R > 0$. De acordo com o critério de classificação de superfícies, as secções espaciais são superfícies hiperbólicas.

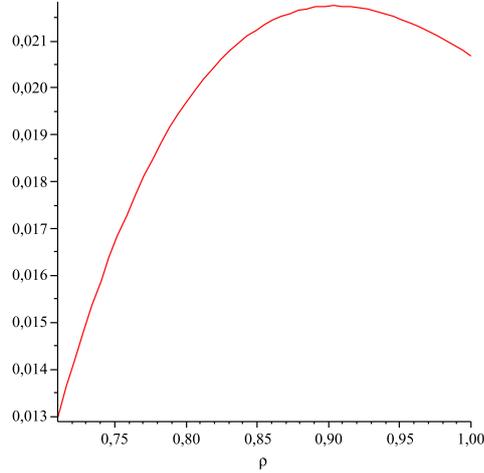


Figura 2: Caso em que $n = 2$. Gráfico do Escalar de Curvatura R em função de ρ , com ρ variando de 0,71 a 1, e $\tau = 0,1$. Como $R > 0$, de acordo com a convenção adotada, as secções de simultaneidade são consideradas superfícies hiperbólicas.

Bibliografia

- [1] C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, New York, 1973), pp.1-70, 163-176, 593-619.
- [2] Carroll, S. M. - *Lectores Notes on General Relativity* (Institute for Theoretical Physics, California, 1997), pp. 1-30.
- [3] Resnick, Robert, -*Introdução a Relatividade Especial*, São Paulo, Ed. Univ. de São Paulo e Ed. Polígono, (1971).
- [4] Ohanian, Hans C. -*Gravitation And Spacetime* -(Rensselaer Polytechnic Institute, New York-London, 1976), pp. 47-83, 306-359.
- [5] Griffiths, David J. - *Introduction to Eletrodynamics* - 3rd ed. (Upper Saddle River, New Jersey 1999), pp.477-521.
- [6] K. Marzlin, *Phys. Lett. A* **215**, 1 (1996)
- [7] W. Rindler, *Am J. Phys.* **34**, 1174 (1975)
- [8] J. R. Letaw and J. D. Pfaustsch, *J. Math. Phys.* **23**, 425 (1982).
- [9] S. Gao, Z. Kuang and C. Liang, *J. Math. Phys.* **39**, 2862 (1998).
- [10] D. Alba and L. Lusanna, *Simultaneity, radar 4 coordinates and the (3+1) point of view about accelerated observers in special relativity*, gr-qc/0311058.
- [11] D. Alba and L. Lusanna, *Generalized radar 4-coordinates and equal-time Cauchy surfaces for arbitrary accelerated observers*, gr-qc/0501090.
- [12] E. Minguzzi, *Simultaneity in special and general relativity*, gr-qc/0506127.
- [13] E. Minguzzi, *Class. Quantum Grav.* **20**, 2443 (2003).
- [14] C. G.-Huang and H.-Y. Guo, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1035 (2006).
- [15] P. J. Felix da Silva, F. Dahia, *Int.J.Mod.Phys.A* vol.22, No13, 2383 (2007)
- [16] Coll B., Ferrando J.J., Morales J. A., *Phys. Rev. D* **73**, 081017 (2006), gr-qc/0602015

- [17] Coll B., Ferrando J.J., Morales J. A., *Phys.Rev.* D74: 104003, (2006), gr-qc/0607037
- [18] Coll B., J.M. Pozo *Class. Quant. Grav.* 23: 7395-7416, (2006), gr-qc/0606044
- [19] Coll B., Ferrando J.J., Morales J.A, *Phys.Rev.* D73: 084017, (2006), gr-qc/0602015
- [20] Coll B., *AIP Conf.Proc.*841:277-284,2006. Also in *Oviedo 2006, *A century of relativity physics** 277-284, gr-qc/0601110
- [21] Ruggiero, M. L., Tartaglia, A., *Int. J. Mod. Phys.* D17: 311- 326, (2008), gr-qcarXiv:0710.0788
- [22] Rovelli, C., *Phys.Rev.*D65:044017, (2002). gr-qc/0110003
- [23] B. Mashhoon, *The hypothesis of locality and its limitation*, gr-qc/0303029.
- [24] G. Longhi, *Found. Phys.*19, 201-223, (2006), gr-qc/0610053.
- [25] Thomas B. Bahder, *Fermi coordinates of an observer moving in a circle in Minkowski space: Apparent behavior of clocks.* gr-qc/9811009
- [26] Karl-Peter Marzlin, *Gen. Rel. Grav.* 26: 619, (1994), gr-qc/9402010.
- [27] J. W. Maluf, F. f. Faria, *Annalen Phys.*17: 326-335, (2008). arXiv: gr-qc0804.2502.
- [28] M. Pauri, M. Vallisneri, *Found. Phys. Lett.*13: 401-425, 2000, gr-qc/0006095.
- [29] D. Bini, L. Lusanna, B. Mashhoon, *Int. J. Mod. Phys.* D 14: 1413-1429, 2005 gr-qc/0409052.
- [30] E. Minguzzi, *Am. J. Phys.* 73: 1117-1121, 2005, physics/0412024.
- [31] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Prentice-Hall, New Jersey, 1976), pp. 264-265.
- [32] J.B. Formiga, C. Romero, *On the differential geometry of curves in Minkowski space.*, Jan 2006. e-Print: gr-qc/0601002.
- [33] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, 5th edn. (Princeton University Press, New Jersey, 1970), pp. 32-34.