



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE.
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E INFORMÁTICA.
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Projeto Engenharia Elétrica

ALUNA: Georgina Karla Maciel de Freitas.

MATRICULA: 20011209

ORIENTADOR: Péricles Rezende Barros.

CURSO: Engenharia Elétrica.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE.
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E INFORMÁTICA.
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

IDENTIFICAÇÃO DE UM SISTEMA QUE CONTÉM UM
MÓDULO TERMOELÉTRICO UTILIZANDO FUNÇÕES
ORTONORMAIS DE LAGUERRE



Biblioteca Setorial do CDSA. Fevereiro de 2021.

Sumé - PB

Índice

1- Introdução	4
2-Identificação de um Sistema Usando Funções Ortonormais de Laguerre.....	7
2.1-Aproximação da resposta ao impulso do processo	7
2.2-Definição dos Coeficientes no Domínio do Tempo.....	7
2.3-Condição de Convergência no Domínio do Tempo.....	8
2.5-Definição dos Coeficientes no Domínio da Freqüência	9
2.8-Escolha do melhor Fator de Escalonamento no Tempo...	13
3-Resultados Obtidos	16
4-Conclusões	19
5-Referências Bibliográficas.....	20
6-Anexos.....	21
A .2-Programa utilizado na Identificação do Sistema.....	21
A .3-Prova do Teorema.....	23

INTRODUÇÃO

Neste projeto é tratado da Identificação de um modelo que caracterize a dinâmica de um sistema no qual está inserido um Módulo Termoelétrico a Efeito Peltier. O modelo a ser encontrado deve ter um número finito de termos formados pelos coeficientes estimados e para determinada função de base, que no caso são as Funções Ortonormais de Laguerre. Inicialmente é apresentado o sistema identificado. A seguir, são apresentadas as funções de Laguerre e o método proposto para a determinação dos coeficientes da expansão de um Modelo em serie de Laguerre a partir da resposta ao degrau do sistema. Também é apresentado o método utilizado para determinação do melhor fator de escalonamento no tempo para o sistema. A escolha do melhor fator de escalonamento no tempo é feita baseada no artigo proposto por Clowes(1965) generalizado para um sistema L_2 estável. Na seqüência são mostrados os resultados obtidos, ou seja, modelo encontrado para o sistema. Finalmente as conclusões, as Referências Bibliográficas e os anexos.

1-Descrição e Funcionamento do Sistema

A planta a ser identificada é formada por: um PWM (Pulse Width Modulation); um Módulo Termoelétrico; um Sensor de temperatura; e um amplificador. É mostrado na Figura 1 o Diagrama do Sistema Identificado.

O PWM (Pulse Width Modulator) é um dispositivo modulador por largura de pulso, isto é, um circuito que gera um sinal quadrado de largura variável de acordo com o sinal contínuo de entrada do mesmo. Conseqüentemente, a corrente na saída do PWM também irá variar de acordo com a sua tensão de entrada. Na planta apresentada, o sinal de entrada do PWM é considerado o sinal $u(t)$. O PWM utilizado é bipolar, ou seja, tem uma referência de tensão para um intervalo de valores de tensão de entrada que vai de 0 a 2.5 volts, e a referência da tensão de saída do é invertida para valores do sinal de entrada que vão de 2.5 a 5.0 volts.

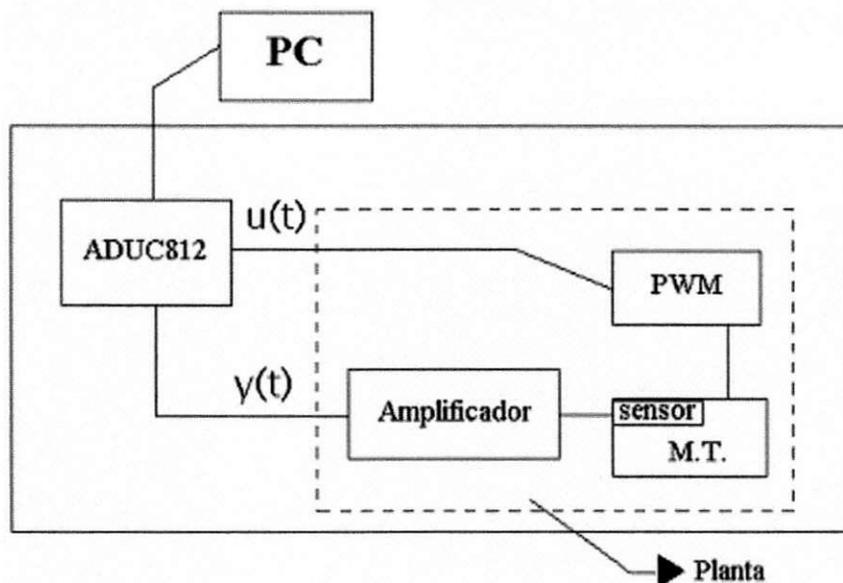


Figura 1 - Diagrama do Sistema Identificado

O Módulo termoeétrico é um dispositivo formado por semicondutores do tipo-n e do tipo-p ligados em srie a placas de metal. O funcionamento do Módulo Termoeétrico é baseado em três efeitos da Termodinâmica: o Efeito Thomson, o Efeito Seebeck e o Efeito Peltier.

O Efeito Seebeck é relacionado à geração de um potencial elétrico no interior de um material condutor quando este é submetido a um gradiente de temperatura. O exemplo mais simples de onde este fenômeno é usado é nos termopares. A aplicação de um gradiente de temperatura entre os terminais de um termopar produzirá uma tensão que é função da temperatura.

Já Peltier, em 1834, descobriu que um dado par termoeétrico com suas junções na mesma temperatura, se submetido à aplicação de uma tensão que produzirá uma corrente circulando no termopar, as temperaturas variam não inteiramente devido ao Efeito Joule. O calor Peltier é reversível, ou seja, quando se inverte o sentido da corrente que circula permanecendo constante o seu valor, o calor Peltier é o mesmo só que no sentido oposto. Os materiais que apresentam os maiores coeficientes de Peltier são os semicondutores. Em semicondutores “n”, o fluxo de corrente elétrica provoca uma absorção de energia (resfriamento) na extremidade negativa e uma liberação de energia (aquecimento) na extremidade positiva. O resultado é o oposto em semicondutores do tipo “p”.

Thomson, em 1854, concluiu que a condução de calor ao longo dos fios metálicos de um par termoeétrico, que não transporta corrente, origina uma distribuição uniforme de temperatura em cada fio. Quando existe corrente, modifica-se em cada fio a distribuição de temperatura em uma quantidade não inteiramente devida ao efeito Joule. A variação adicional da temperatura denomina-se Efeito Thomson.

Fundamentados nos Efeitos citados anteriormente, pode-se resumir o funcionamento do Módulo Termoeétrico da seguinte maneira: força-se à circulação de corrente pelo dispositivo, o movimento dos portadores de carga pelo material faz com que ele transporte calor de uma face para a outra. O resultado disto é que uma face do dispositivo esfria e outra esquenta, sendo então o calor bombeado de uma face para outra. Ao inverter-se a polaridade da tensão fornecida ao dispositivo inverte-se a corrente, Com isso o sentido do transporte do calor será contrário que se tinha anteriormente, ou seja, a placa que antes esfriava agora esquenta e a que esquentava agora esfria.

No presente projeto decidiu-se obter dados de uma das placas acopladas ao Módulo referentes ao aquecimento da placa. Para tal obtenção aplicou-se uma tensão de 3.5 volts na entrada da planta (entrada do PWM).

A Temperatura da placa foi aferida com o Sensor LM35 da *National Semiconductor*. O LM35 é sensor de temperatura cuja tensão de saída é linearmente proporcional à temperatura em graus Celsius. O fator de linearidade é de 10.0 mV/°C. O sensor não requer nenhuma calibração externa e sua exatidão varia de $\pm 1/4^\circ\text{C}$ para a temperatura ambiente e $\pm 3/4^\circ\text{C}$ para um intervalo de -55°C a 150°C . Como a tensão de saída do sensor de temperatura é da ordem de mV foi necessário utilizar um amplificador de modo a aplicar um ganho de 10 na tensão de saída do sensor. A tensão de saída da planta $y(t)$ é a tensão de saída do sensor já amplificada. No caso, $y(t)$ foi ligada a uma entrada analógica do Aduc812,

que por sua vez foi conectado a um PC . O microcomputador armazenou e processou todos os dados coletados dos sistema.

2-Identificação de Sistemas Usando Funções Ortonormais de Laguerre

2.1-Aproximação da resposta ao impulso do processo

A seqüência de funções reais $l_1(t), l_2(t), \dots$ é dita formar uma série ortonormal no intervalo $(0, \infty)$ se elas obedecem às seguintes propriedades

$$\int_0^{\infty} l_i(t)^2 dt = 1 \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} l_i(t)l_j(t)dt = 0 \quad (2)$$

As funções de Laguerre são um exemplo de uma série completa de funções ortonormais que satisfazem as propriedades definidas pelas Equações seguintes. A série de funções de Laguerre é definida para qualquer $p \geq 0$ como

$$\begin{aligned} l_1(t) &= \sqrt{2p} \cdot e^{-pt} \\ l_2(t) &= \sqrt{2p} \cdot (-2pt + 1) \cdot e^{-pt} \\ l_3(t) &= \sqrt{2p} \cdot (2p^2t^2 - 4pt + 1) \cdot e^{-pt} \\ &\vdots \\ l_i(t) &= \sqrt{2p} \cdot [(-1)^{i-1} \frac{(2p)^{i-1}}{(i-1)!} t^{i-1} + (-1)^i \frac{(i-1)(2p)^{i-2}}{(i-2)!} t^{i-2} + \dots + 1] \cdot e^{-pt} \end{aligned} \quad (3)$$

O parâmetro p é chamado de fator de escalonamento no tempo para as funções de Laguerre.

2.2-Definição dos Coeficientes no Domínio do Tempo

Com relação à série de funções $l_1(t), l_2(t), \dots$ que é ortonormal e completa no intervalo $(0, \infty)$, é conhecido que uma função $h(t)$ arbitrária tem uma expansão formal análoga à expansão em série de Fourier. Tal expansão tem sido amplamente utilizada em análises numéricas para aproximações de funções diferenciais e integrais. A idéia abaixo usa funções de Laguerre para representar um processo linear invariante no tempo tomando $h(t)$ como sendo a resposta ao impulso unitário do processo, onde $h(t)$ pode ser escrita como

$$h(t) = c_1 l_1(t) + c_2 l_2(t) + c_3 l_3(t) + \dots + c_i l_i(t) + \dots \quad (4)$$

e $\{c_i\}$ são os coeficientes da expansão definidos por:

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{\infty} l_1(t) h(t) dt \\ c_2 &= \int_0^{\infty} l_2(t) h(t) dt \\ &\vdots \\ c_i &= \int_0^{\infty} l_i(t) h(t) dt \end{aligned} \quad (5)$$

2.3- Condição de Convergência no Domínio do Tempo

A expansão dada em $h(t)$ na teoria requer um número infinito de termos em ordem para convergir a uma resposta ao impulso real. Contudo, a conclusão adotada de uma série de funções ortonormais assegura que, para qualquer partição da função resposta ao impulso contínuo $h(t)$ com

$$\int_0^{\infty} h(t)^2 dt < \infty \quad (6)$$

e qualquer $\varepsilon > 0$, o qual é uma medida da exatidão da aproximação, lá existe uma série truncada com um número inteiro de termos N cuja a integral do quadrado do erro entre a resposta ao impulso real e a aproximada é menor que ε , isto é

$$\int_0^{\infty} (h(t) - \sum_{i=1}^N c_i l_i(t))^2 dt < \varepsilon \quad (7)$$

Portanto, pode-se usar uma expansão truncada para aproximar a resposta ao impulso unitário $h(t)$ com um incremento no número de termos, N .

2.4- Aproximação da Função de Transferência do Processo

Em paralelo com a descrição no domínio do tempo acima, uma aproximação da Função de Transferência do processo usando funções de Laguerre também pode ser desenvolvida. A Transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$ nos leva à função de Transferência contínua no tempo do processo

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} \\ G(s) &= \int_0^{\infty} (c_1l_1(t) + c_2l_2(t) + c_3l_3(t) + \dots)e^{-st} dt \quad (8) \\ G(s) &= c_1L_1(s) + c_2L_2(s) + c_3L_3(s) + \dots + c_iL_i(s) + \dots \end{aligned}$$

onde a transformada de Laplace das funções de Laguerre, também referidas como filtros de Laguerre são dadas por

$$\begin{aligned} L_1(s) &= \frac{\sqrt{2p}}{(s+p)} \\ L_2(s) &= \sqrt{2p} \frac{(s-p)}{(s+p)} \quad (9) \\ &\vdots \\ L_i(s) &= \sqrt{2p} \frac{(s-p)^{i-1}}{(s+p)^i} \end{aligned}$$

A Função de Transferência do processo é chamada de modelo de Laguerre. Os filtros de Laguerre têm um formato simples que é facilmente identificado no qual tem todos os seus pólos no mesmo local, $-p$, e seus zeros em $+p$. O primeiro filtro é um filtro passa-baixas de primeira ordem. Todos os outros são compostos de um filtro de primeira ordem em série com filtros passa-tudo.

2.5-Definição dos Coeficientes no Domínio da Freqüência

A aplicação do teorema de Parseval para as Equações de propriedades das funções ortonormais das propriedades ortonormais no domínio da freqüência.

Os coeficientes $\{c_i\}$ podem ser determinados por:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(j\omega)L_1(j\omega)d\omega \\ c_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(j\omega)L_2(j\omega)d\omega \quad (10) \\ &\vdots \\ c_i &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(j\omega)L_i(j\omega)d\omega \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Parseval nas condições de convergência das funções de Laguerre no domínio do tempo pode-se obter a condição de convergência no domínio da Freqüência, que é dada por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (11)$$

que implica em dizer que a função de transferência do processo tem todos seus pólos estritamente no semiplano esquerdo do plano complexo e tem uma estrutura estritamente própria. A última condição implica no fato de que o grau do numerador da função de transferência ter um grau menor do que o do denominador. O processo que satisfaz estas condições é referenciado como sistema L_2 estável.

2.6-Modelo de Laguerre na forma de Espaço de Estados

È mostrado na Figura 2 o diagrama de blocos do Modelo de Laguerre (ordem N) descrito pelas Equações (9) e (10), onde $u(t)$ é à entrada do processo e $y(t)$ é à saída do processo. A entrada do processo passa pelos filtros de Laguerre e as saídas dos filtros são ponderadas pelos seus respectivos coeficientes. A soma desses sinais ponderados e filtrados equivale à saída do processo.

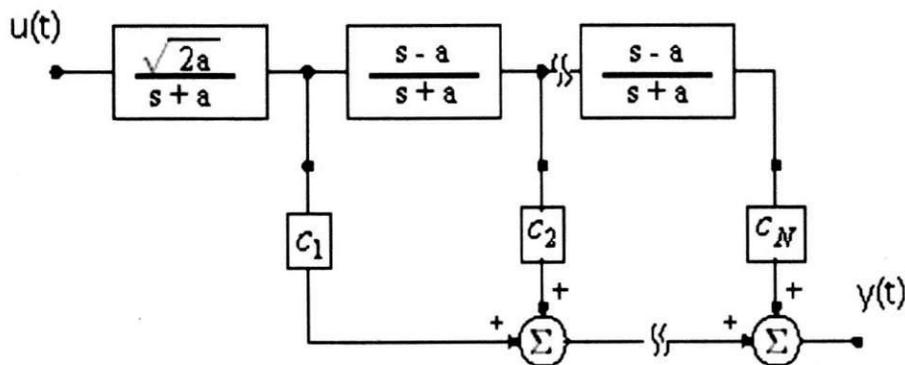


Figura 2 - Diagrama de Blocos do Modelo de Laguerre (ordem N)

Deste diagrama de blocos, pode-se encontrar o modelo de Laguerre na forma de espaço de estados. Definindo o vetor de estado como sendo

$$X(t) = [l_1(t) \ l_2(t) \ \dots \ l_i(t)]^T \quad (12)$$

e assumindo as condições iniciais do vetor de estados nulas, então a representação do modelo em espaços de estados será

$$\begin{bmatrix} \dot{l}_1(t) \\ \dot{l}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{l}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \dots & 0 \\ -2p & -p & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2p & -2p & \dots & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ \vdots \\ l_i(t) \end{bmatrix} + \sqrt{2p} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (13)$$

$$y(t) = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_i] X(t) \quad (14)$$

2.7-Estimação dos coeficientes de Laguerre a partir da resposta ao degrau do sistema

A resposta ao impulso do sistema envolve a aplicação de um sinal com amplitude infinita e duração de tempo zero. Na prática, este tipo de sinal pode ser aproximado usando um sinal com uma amplitude muito alta e pequena duração que traz algumas implicações com relação a ruídos. No entanto, a resposta ao degrau é frequentemente utilizada em processos industriais.

O sinal degrau é definido como

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ u_m, & t \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

onde a magnitude do sinal u_m é definida pelo usuário. Este teste é simples e de fácil desempenho.

A relação entre a medição da resposta ao degrau $g(t)$ e a correspondente estimação da resposta ao impulso do processo $h(t)$ é dada por

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (15)$$

Então poderíamos usar a estimativa de $h(t)$ apresentada na Equação (15) no lugar de $h(t)$ nas Equações (6). Mas a diferenciação da medição da resposta ao

degrau implicará na amplificação do efeito do ruído e causará problemas numéricos. É preferível utilizar diretamente as medições da resposta ao degrau do sistema.

Assumindo que para um degrau unitário de entrada, a saída de um sistema estável, linear, invariante no tempo é dada por

$$\hat{g}(t) = g(t) + \xi(t) \quad (16)$$

onde $g(t)$ denota a resposta ao degrau unitário real do sistema, e $\xi(t)$ denota as perturbações adicionadas ao sistema com $|\xi(t)| < \infty$. Em um processo ruidoso, a resposta ao degrau não terá valor fixo. Portanto, a média destes estados, g_{mean} , pode ser calculada usando

$$g_{\text{mean}} = \frac{1}{T_{\text{end}} - T_S} \int_{T_S}^{T_{\text{end}}} \hat{g}(t) dt \quad (17)$$

onde T_S é uma estimativa do tempo em que o processo atinge seu estado estável, e T_{end} é o tempo final da resposta ao impulso do experimento.

Substituindo $h(t)$ por $\frac{dg(t)}{dt}$ nas Equações(6), temos

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= \int_0^{\infty} \frac{dg(t)}{dt} l_i(t) dt \\ \hat{c}_i &= \int_0^{\infty} l_i(t) dg(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Após algumas manipulações chegamos a seguinte equação

$$\hat{c}_i = -\int_0^{T_S} \hat{g}(t) \dot{l}_i(t) dt - \int_{T_S}^{\infty} \hat{g}(t) \dot{l}_i(t) dt \quad (19)$$

Substituindo $g(t)$ no intervalo (T_S, ∞) com g_{mean} , então

$$-\int_{T_S}^{\infty} \hat{g}(t) \dot{l}_i(t) dt = g_{\text{mean}} L_i(T_S) \quad (20)$$

A derivada da i -ésima função de Laguerre da Equação (16) satisfaz a seguinte equação

$$\dot{l}_i(t) = -2pl_1(t) - 2pl_2(t) - \dots - pl_i(t) \quad (21)$$

Substituindo as Equações (19) e (20) na Equação (21) determinamos a estimativa do i -ésimo coeficiente como sendo

$$\hat{c}_i = 2p \int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_1(t)dt + 2p \int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_2(t)dt + \dots + p \int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_1(t)dt + g_{mean}L_i(T_s) \quad (22)$$

As equações para estimar os coeficientes do modelo Laguerre usando os dados obtidos da resposta ao degrau do sistema podem ser resumidas como a seguir

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= p \int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_1(t)dt + g_{mean}L_1(T_s) \\ \hat{c}_i &= 2p \int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_1(t)dt + p \int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_2(t)dt + g_{mean}L_2(T_s) \\ &\vdots \\ \hat{c}_i &= 2p \int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_1(t)dt + 2p \int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_2(t)dt + \dots + p \int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_1(t)dt + g_{mean}L_i(T_s) \end{aligned} \quad (23)$$

O algoritmo de estimação dos coeficientes de Laguerre resume-se em resolver a série de integrais das Equações (23). Dados $g(t_0)$, $g(t_1)$, \dots denotam a resposta ao degrau discretizada com tempo de amostragem igual a $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, para todo i , e $t_0 = 0$. Uma boa aproximação para calcular os coeficientes seria baseado no método retangular. Alternativamente, o método de Simpson seria usado para obter uma aproximação com melhor exatidão dos valores das integrais, onde

$$\int_0^{T_s} \hat{g}(t)l_i(t)dt \approx \frac{\Delta t}{3} \left[\hat{g}(t_0)l_i(t_0) + 4\hat{g}(t_1)l_i(t_1) + 2\hat{g}(t_2)l_i(t_2) + \dots + 2\hat{g}(t_{2M-2})l_i(t_{2M-2}) + \right. \\ \left. + 4\hat{g}(t_{2M-1})l_i(t_{2M-1}) + \hat{g}(t_{2M})l_i(t_{2M}) \right] \quad (24)$$

$$\text{com } M = \frac{T_s}{2\Delta t}.$$

2.8-Escolha do melhor Fator de Escalonamento no Tempo

Na teoria, a escolha do fator de escalonamento no tempo p não afeta a existência e convergência do Modelo de Laguerre com relação ao modelo de ordem N . A exatidão da aproximação aumenta com o aumento da ordem do modelo. Na prática, uma má escolha de p requer uma alta ordem do modelo de Laguerre para executar o modelo desejado com exatidão. Contudo, a estimativa de um modelo de Laguerre exato do processamento de dados com ruídos e distorções torna-se mais difícil quando usamos um alto valor para N . Portanto, uma das chaves para aplicação com êxito da aproximação do modelo de Laguerre é encontrar um método sistemático para otimização da escolha do fator de escalonamento no tempo.

Sabe-se que a integral do erro entre a resposta ao impulso do processo e a resposta ao impulso do modelo de Laguerre de n -ésima ordem é definida como

$$E = \int_0^{\infty} (h(t) - \sum_{i=1}^N c_i l_i(t))^2 dt \quad (25)$$

e a derivada desta integral com relação a $\{c_i\}$ é dada por

$$\frac{dE}{dc_i} = -2 \int_0^\infty [h(t) - \sum_{i=1}^N c_i l_i(t)] l_i(t) dt \quad (26)$$

Usando as propriedades referentes à ortonormalidade das funções de Laguerre, e fazendo algumas manipulações algébricas vemos que a equação do erro pode ser reescrita como

$$E = \int_0^\infty h(t)^2 dt - \sum_{i=1}^N c_i^2 \quad (27)$$

onde as expressões para os coeficientes de Laguerre e as propriedades ortonormais das funções de Laguerre tem sido usadas.

Podemos representa no domínio da freqüência como:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| G(j\omega) - \sum_{i=1}^N c_i L_i(j\omega) \right|^2 d\omega \quad (28)$$

As expressões para os coeficientes de Laguerre na Equação (11) em termos da resposta em freqüência do processo podem ser encontradas pela minimização da Equação (12). O erro E pode também ser expresso de uma forma similar, onde

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega - \sum_{i=1}^N c_i^2 \quad (29)$$

O primeiro termo do segundo membro das Equações (29) e (27) são independentes de p , e então somente o segundo termo é função de p . Conseqüentemente, para um dado modelo de ordem N , o erro mínimo com relação à p ocorre no máximo de $\sum_{i=1}^N c_i^2$. Então, o problema de achar um ótimo valor para p é encontrar o máximo da função perda definida por:

$$V = \sum_{i=1}^N c_i^2 \quad (30)$$

2.8.1-Ótima Escolha do Fator de Escalonamento no Tempo p

A ótima escolha do fator de escalonamento no tempo p descrita por Clowes(1965) é generalizada aqui por qualquer sistema estável L_2 .

Teorema: Dado que os coeficientes de Laguerre $\{c_i\}$ podem ser obtidos da Equação (12), e assumindo que o verdadeiro sistema $G(s)$ é L_2 estável, quando a derivada da função de custo V com relação à p é dada por:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{d(\sum_{i=1}^N c_i^2)}{dp} = \frac{N}{p} c_N c_{N+1} \quad (31)$$

A prova do Teorema encontra-se em anexo.

Então, o problema de encontrar o máximo de $\sum_{i=1}^N c_i^2$ com relação a p resume-se em determinar a expressão dos coeficientes c_N ou c_{N+1} como uma função de p e então checar se o valor do produto $c_N c_{N+1}$ muda de sinal positivo para negativo quando p é incrementado. Cada valor de p correspondente a um máximo pode então ser usado para calcular o valor atual de $\sum_{i=1}^N c_i^2$ para determinar o melhor fator de escalonamento p .

Para um dado modelo de ordem N , a Equação (30) mostra que pode-se procurar o valor de p que corresponde a um zero de c_{N+1} . Em outras palavras, a ordem do modelo poderia ser reduzida para a ordem $N-1$ sem qualquer alteração na exatidão do modelo.

Na prática, o primeiro passo que deve ser dado com relação à escolha de p é identificar o intervalo no qual ele está localizado. Usando o tempo em que o processo atinge o seu estado estável T_S , pode-se formar um intervalo $[p_{min}, p_{max}]$, onde a extremidade inferior do intervalo, $p_{min} = \frac{4a5}{T_S}$, é escolhida para corresponder aproximadamente ao ótimo valor de p para um processo de primeira ordem com tempo de acomodação T_S . A extremidade superior do intervalo, p_{max} , é escolhida ser $5p_{min}$ para modelos de ordem baixa ($N \leq 4$) ou $10 p_{min}$ para modelos de alta ordem. O intervalo é dividido em uma série de intervalos discretos para o fator de escalonamento no tempo p , para encontrarmos para qual valor de p o sistema tem uma dinâmica melhor.

Usando os dados da resposta ao degrau do sistema para um dado modelo de ordem N , os coeficientes de Laguerre c_N e c_{N+1} são calculados para cada valor do fator de escalonamento no tempo do intervalo. Então, o produto $c_N c_{N+1}$ é determinado para cada valor de p no intervalo e as regiões onde $c_N c_{N+1}$ mudam de sinal de positivo para negativo são identificadas. E o valor de p onde o produto dos coeficientes é nulo, corresponde ao melhor fator de escalonamento para o sistema.

3-Resultados Obtidos

Aplicou-se um degrau de 3.5 Volts na entrada do sistema com o objetivo de se obter os dados necessários para determinar os coeficientes de Laguerre do modelo. Foi utilizado um programa feito no Matlab para aplicar o degrau e obter a saída do sistema, que no caso é a tensão referente à temperatura de uma das placas do Módulo Termoelétrico. A rotina utilizada encontra-se em anexo. A Figura 3 mostra a resposta ao Degrau do Sistema Real.

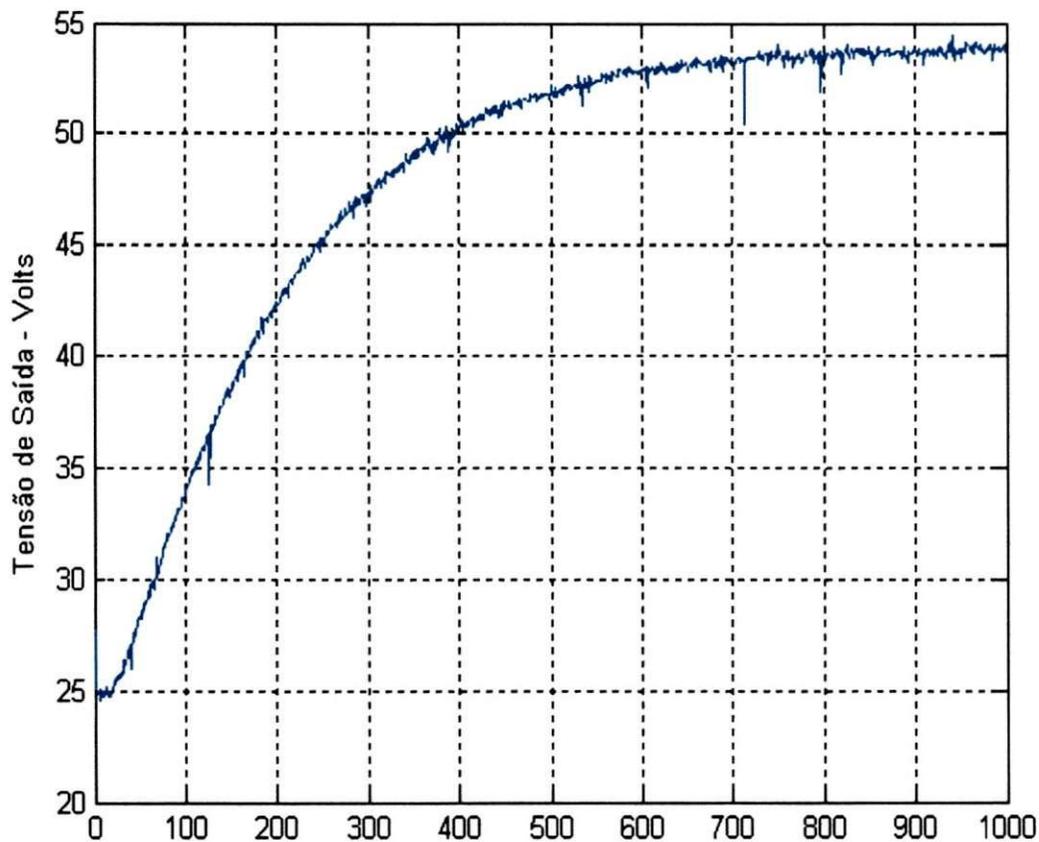


Figura 3 - Resposta ao Degrau do Sistema Real

Após se ter obtido os dados referentes à resposta ao degrau do sistema, passou-se para a segunda etapa que se refere à determinação dos coeficientes do Modelo de Laguerre. Para obter tais coeficientes foi feito um programa, também no Matlab e que se encontra em anexo, baseado no método anteriormente citado que utiliza Polinômios na determinação das funções de Laguerre. As integrais a serem resolvidas para calcular os coeficientes foram aproximadas segundo a regra de Simpson.

Antes de determinar os coeficientes foi necessário escolher a ordem do modelo. Baseado em informações colhidas em artigos que tratam da modelagem do Módulo Termoelétrico, verificou-se que um modelo de segunda ordem seria satisfatório. Tendo escolhido a ordem do modelo partiu-se para o fator de escalonamento no tempo p . Foi determinado o intervalo no qual deveria estar inserido o fator de escalonamento no tempo para o sistema aqui descrito. Ao observar a Figura 3 pode-se constatar que o tempo de acomodação do sistema T_S é de aproximadamente 800s e pode-se verificar também que $T_{end} = 1000s$. Tendo estes dados, chega-se ao seguinte intervalo $p_{min} = 0.00625$ e $p_{max} = 0.03125$. De posse do intervalo, pode-se verificar que o melhor valor para fator de escalonamento para um Modelo de Laguerre de segunda ordem é de $p = 0.0093$. Após se ter encontrado o melhor fator de escalonamento no tempo determinou-se os coeficientes do modelo de Laguerre de segunda ordem para o Sistema. Os coeficientes e o Modelo encontrados foram

$$\begin{aligned}c_1 &= 0.2980 \\c_2 &= -0.2627\end{aligned}$$

nos fornecendo a seguinte Função de Transferência para o Sistema

$$\hat{G}(s) = \frac{5.31 \cdot 10^{-3} s + 4.98 \cdot 10^{-5}}{(s + 0.0094)^2}$$

Em seguida aplicou-se um degrau na entrada do modelo encontrado para comparar sua resposta ao degrau com a do sistema real. Para fazer esta comparação, adicionou-se uma tensão de offset de -25 volts ao sistema real para

mudar sua referência para zero. A Figura 4 mostra a resposta ao degrau do Sistema Real e do Modelo de Laguerre.

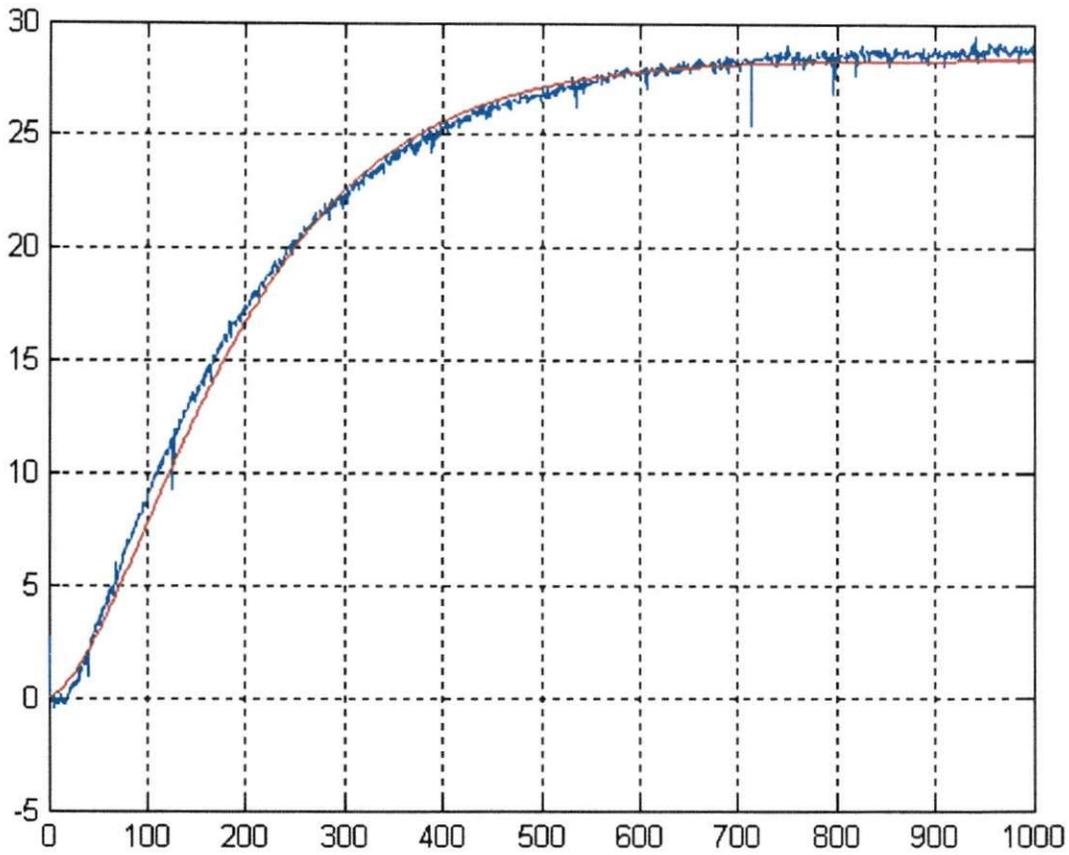


Figura 4 - Resposta ao Degrau do Sistema Real e Modelo de Laguerre

4- Conclusões

Podemos verificar que a Identificação do Sistema utilizando bases ortonormais de Laguerre foi satisfatória, apesar do sinal de saída da planta ser bastante ruidoso. Isto se deve ao fato das funções de Laguerre se comportarem como filtros no domínio da frequência fazendo, portanto, a filtragem dos dados utilizados para determinar os coeficientes. Também podemos verificar que o método utilizado para determinar as Funções de Laguerre e, conseqüentemente, os coeficientes de Laguerre diferem dos demais pelo fato dos coeficientes serem calculados independentemente uns dos outros. Isto torna o método mais favorável, pois qualquer incremento ou decremento na ordem N do modelo não afeta os coeficientes previamente estimados, para o mesmo valor de p .

A qualidade do modelo pode ser verificada pela análise da diferença entre o Sistema real e o Modelo de Laguerre encontrado para o sistema, quando aplicado um degrau em ambos. Vê-se que o valor do fator de escalonamento no tempo p foi uma ótima escolha porque foi encontrado um sistema de baixa ordem para representar o processo.

5-Referências Bibliográficas

- 1- G. J. Clowes, "Choice of the time-scaling factor for linear system approximations using orthonormal Laguerre functions," ZEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-10, pp. 487-489, 1965.
- 2- L. Wang and W. R. Cluett, "Optimal Choice of Time-scaling Factor for Linear System Approximations Using Laguerre Models", IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 39, NO. 7, JULY 1994.

6-Anexos

A .1-Programa utilizado na aplicação de um degrau de 3.5 volts e coleta dos dados necessários na Identificação do Sistema.

```
%Resposta ao Degrau do Sistema (Tempo de Aplicação igual a 1000 segundos)
s1 = serial('COM1');%relaciona um objeto s1 com a porta serial COM1
fopen(s1) %habilita s1
u = zeros(1,1000)';%Vetor de entradas
y = zeros(1,1000)';%Vetor de saída
b2 = 3.5;%Aumenta a temperatura da placa do Módulo termoeletrico
b21 = (b2*4096)/5;% Converte o valor decimal para hexa
bq = num2str(b21);% Converte de número para string
for k = 1 : 1000
    fprintf(s1,'LNAR0');
    out=fscanf(s1);
    v1=out(3:6);
    v2=str2num(v1);
    v3=(v2*2.5)/4096;
    vm=4.39*v3;
    TM=vm*10
    y(k)=TM;
    str=strcat('LNAW0',bq);fprintf(s1,str);fscanf(s1);
    u(k) = b2;
    pause(1);
end
fclose(s1)
save('PeltierTeste','y','u','-ascii')% salva os valores da Entrada e Saída
%Variação da Temperatura
figure(1)%Plota a resposta ao degrau do Sistema
plot(y),grid on,title('Temperatura do Módulo Termoeletrico')
```

A .2-Programa utilizado na Identificação do Sistema

```

% Estimação dos coeficientes da expansão tendo como base as funções de
% Laguerre a partir da resposta ao degrau do Sistema
clear all;
close all;
clc

% Lê dados do arquivo Dados Coletados
S = load('Peltier.txt','-ascii');
U = S(:,1);
Yr=S(:,2);
Y = S(:,2)-25;

%Inicializando variáveis

DeltaT = 1.24;% Passo de Integaração
a=0.0093;%Fator de escalonamento no Tempo
Tend=1000;%Tempo total de coleta dos dados
m = Tend;
n = 2;% Ordem do Modelo de Laguerre
Yt = 0;
Ts = 800;% Tempo em que o sistema atinge seu estado estável

%Calculo dos Polinomios utilizados para gerar as funções de Laguerre
%( método proposto por Atkinson(1989))

P = zeros(m,n);
for x = 1 : (m+ 1)
P(x,1) = 1;
P(x,2)= 1-2*a*x;
for k = 3 : n
P(x,k)=((2*(k-2)+ 1-(2*a*x))/(k-1))*P(x,k-1)-((k-2)*P(x,k-2))/(k-1);
end
end

%Calculo das funções de Laguerre(L(x,k))

L = zeros(Tend,n);
for x = 1 : (Tend+ 1)
for k = 1 : n
L(x,k)= P(x,k)*sqrt(2*a)*exp(-a*(x-1));
end
end

%Calculo da média dos valores estáveis

```

```

for i = Ts : Tend
    Yt = Yt + Y(i);
end
Gm = Yt/(Tend-Ts);

%Calculo das Integrais(Método de Simpson) que determinam os coeficientes
%de acordo com a definição
C = zeros(n,1);
for k = 1 : n
    S = 0;
    R(1)= 0;
    for x = 1:3:(Ts-2)
        S = S + Y(x)*L(x,k) + 4*Y(x+1)*L(x+1,k) + 2*Y(x+2)*L(x+2,k);
    end
    I = (DeltaT/3)*S;
    R(k+1) = R(k) + 2*a*I;
    C(k) = R(k) + a*I + Gm*L(Ts+1,k);
end
%Modelo encontrado

s=tf('s');
Glaguerre = 0;
for k = 1 : n
    Flaguerre(k) = sqrt(2*a)*((s-a)^(k-1))/((s+a)^k);
    Glaguerre = Glaguerre + C(k)*Flaguerre(k);
end
T = 1 : 1000;
[Yl,T] = step( Glaguerre , T);
YL=3.5*Yl;%Referente ao degrau de entrada de 3.5 volts
figure(1)
plot(Yr),grid on,ylabel('Tensão de Saída - Volts')
figure(2)
plot(T,Y,'b',T,YL,'r'), grid on, title('Resposta ao Degrau - Modelo de Laguerre e
Peltier')

```

A . 3 - Prova do Teorema utilizado na escolha do melhor fator de escalonamento no tempo p

LEMA: para qualquer $p > 0$, a transformada de Laplace das funções de Laguerre dadas nas Equações (4) satisfazem a igualdade abaixo

$$2p \frac{d(L_i(s))}{dp} = iL_{i+1}(s) - (i-1)L_{i-1}(s) \quad (1)$$

PROVA DO LEMA: Pode-se facilmente mostrar que para $i=1$

$$2p \frac{d(L_1(s))}{dp} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{s-p}{(s+p)^2} = \frac{1}{2p} L_2(s) \quad (2)$$

e para $i=2$

$$2p \frac{d(L_2(s))}{dp} = 2L_3(s) - L_1(s) \quad (3)$$

Agora assumindo que para $i > 3$, a seguinte igualdade é verdadeira

$$2p \frac{d(L_{i-1}(s))}{dp} = (i-1)L_i(s) - (i-2)L_{i-2}(s) \quad (4)$$

Então, nós devemos demonstrar que

$$2p \frac{d(L_i(s))}{dp} = iL_{i+1}(s) - (i-1)L_{i-1}(s) \quad (5)$$

Usando as Equações (10)

$$L_i(s) = L_{i-1}(s) \frac{s-p}{s+p} \quad (6)$$

Nós podemos escrever

$$2p \frac{d(L_i(s))}{dp} = 2p \left[\frac{d(L_{i-1}(s))}{dp} \frac{s-p}{s+p} - L_{i-1}(s) \frac{2s}{(s+p)^2} \right] \quad (7)$$

e substituindo (26) na Equação (27) temos

$$2p \frac{d(L_i(s))}{dp} = 2p \left[(i-1)L_i(s) - (i-2)L_{i-2}(s) \right] \frac{s-p}{s+p} - L_{i-1}(s) \frac{4ps}{(s+p)^2} \quad (8)$$

$$2p \frac{d(L_i(s))}{dp} = iL_{i+1}(s) - (i-2)L_{i-1}(s) - L_{i-1}(s) \left[\frac{(s-p)^2}{(s+p)^2} + \frac{4ps}{(s+p)^2} \right] \quad (9)-(10)$$

$$2p \frac{d(L_i(s))}{dp} = iL_{i+1}(s) - (i-2)L_{i-1}(s)$$

que prova o Lema por indução.

PROVA DO TEOREMA

Note que das Equações (11)

$$2p \frac{dc_i}{dp} = \frac{2p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(jw) \frac{dL_i(jw)}{dp} dw \quad (11)$$

Aplicando o Lema dado

$$2p \frac{dc_i}{dp} = ic_{i+1} - (i-1)c_{i-1} \quad (12)$$

que é equivalente à

$$2c_i \frac{dc_i}{dp} = \frac{1}{p} [ic_i c_{i+1} - (i-1)c_i c_{i-1}] \quad (13)$$

Considerando que

$$\frac{d(\sum_{i=1}^N c_i^2)}{dp} = 2 \sum_{i=1}^N c_i \frac{dc_i}{dp} \quad (14)$$

e aplicando o somatório em ambos os membros da Equação (14)

$$\frac{d(\sum_{i=1}^N c_i^2)}{dp} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N [ic_i c_{i+1} - (i-1)c_i c_{i-1}] \quad (15)$$

$$\frac{d(\sum_{i=1}^N c_i^2)}{dp} = \frac{N}{p} c_N c_{N+1} \quad (16)$$

que prova o teorema.

