UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

José Grimário de Lima Júnior

Teorias RBGs com Eletrodinâmica não Linear por Mapeamento à Relatividade Geral

Campina Grande, Paraíba, Brasil

29 de Janeiro de 2021

José Grimário de Lima Júnior

Teorias RBGs com Eletrodinâmica não Linear por Mapeamento à Relatividade Geral

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Victor Ignacio Afonso, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Victor Ignacio Afonso

Campina Grande, Paraíba, Brasil

29 de Janeiro de 2021

L732t Lima Júnior, José Grimário.
Teorias RBG_s com eletrodinâmica não linear por mapeamento à relatividade geral / José Grimário Lima Júnior. - Campina Grande, 2021.
62 f.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Victor Ignácio Afonso".
Referências.

1. Relatividade Geral. 2. Gravidade Baseada em Ricci. 3. Eletrodinâmica não Linear. 4. Mapeamento. I. Afonso, Victor Ignácio. II. Título.

CDU 530.12(043)
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO JESIEL FERREIRA GOMES CRB-15/256

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitário, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA EM 29 DE JANEIRO DE 2021

Aos vinte e nove dias do mês de janeiro do ano de dois mil e vinte e um, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **JOSÉ GRIMÁRIO DE LIMA JÚNIOR** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Victor Ignácio Afonso** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **Francisco de Assis de Brito** – Doutor em Física, o professor **Diego Rubiera-García** – Doutor em Física, sendo os dois primeiros, integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o terceiro, integrante do corpo docente do Depto. de Física Teórica & IPARCOS - U. Complutense de Madrid, Espanha. HORA DE INÍCIO: **14h00** – LOCAL: **Sala Virtual, em virtude da suspensão de atividades na UFCG decorrente do corona vírus.** Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **Victor Ignácio Afonso**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **JOSÉ GRIMÁRIO DE LIMA JÚNIOR**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado "**Teorias RBGs com Eletrodinâmica não Linearpor Mapeamento à Relatividade Geral**". Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Hélio Pereira de Oliveira, secretário, lavrei a ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 29 de janeiro de 2021.

Hélio Pereira de Oliveira
Secretário

Victor Ignácio Afonso
Presidente da Comissão e Orientador

Francisco de Assis de Brito
Examinador Interno

Diego Rubiera-García
Examinador Externo

José Grimário de Lima Júnior
Candidato(a)

João Rafael Lúcio dos Santos
Coordenador do Programa

2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **JOSÉ GRIMÁRIO DE LIMA JÚNIOR,** assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **VICTOR IGNACIO AFONSO**, **PROFESSOR 3 GRAU**, em 29/01/2021, às 15:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Diego Rubiera Garcia**, **Usuário Externo**, em 29/01/2021, às 15:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO**, **PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 29/01/2021, às 15:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **José Grimário de Lima Júnior**, **Usuário Externo**, em 01/02/2021, às 10:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade, informando o código verificador **1217637** e o código CRC **B6708392**.

Referência: Processo nº 23096.000342/2021-46 SEI nº 1217637

À minha família, amigos e a todos que estiveram comigo durante esta jornada.

Agradecimentos

- Aos meus pais, que sempre me apoiaram em minhas decisões e nunca mediram esforços para que eu chegasse até essa etapa da minha vida. Obrigado por todo o apoio e dedicação que sempre tiveram comigo. Agradeço também a meu irmão Giovani, e todos os familiares que sempre estiveram a meu lado durante esta caminhada.

- Ao meu orientador Prof. Dr. Victor Afonso, agradeço pelos ensinamentos, atenção, dedicação, paciência, conselhos, incentivo e principalmente pela confiança depositada a mim para a realização deste trabalho.

- A todos os docentes que compõem a UAF/UFCG que fizeram parte da minha vida acadêmica e que contribuíram grandemente para meu crescimento profissional e pessoal.

- A Jonas e Renato por toda ajuda e companheirismo ao longo da realização da pesquisa.

- Aos colegas que o Mestrado me presenteou agradeço pelas longas conversas e risadas, em especial: Ione Almeida, Jéferson Sales, Bruno "Lokão", Shaynne e Raissa.

- A todos os funcionários e colaboradores terceirizados da UFCG, cujo trabalho mantém toda a estrutura necessária e o bom funcionando da instituição contribuindo para a formação de todos.

- Aos amigos, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio e compreensão em minha ausência, demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho.

- Aos amigos que fiz em Campina Grande, em especial à "Tio" Marquinhos, Márcio Davi, George e à Seu Beto que me acolheu e pelas longas horas de conversas e conselhos dados.

- A todos os professores que tive ao longo de minha vida, em especial: Prof. Dr. Fábio Medeiros por ter me dado forças durante a graduação, e também, à Prof. Dr. Pedro Segundo e a Prof. Dr. Joseclécio Dantas sempre pelas longas conversas.

- A CAPES pelo suporte financeiro concedido.

- Enfim, a todos aqueles que diretamente ou indiretamente contribuíram com minha formação acadêmica, meu muito obrigado!

"Tente. E não diga
que a vitória está perdida.
Se é de batalhas
que se vive a vida."
(Raul Seixas)

Resumo

Nas últimas décadas, a descoberta da Matéria e Energia Escura trouxeram problemas para a Relatividade Geral de Einstein (RG), mesmo sendo ela uma teoria muito bem consolidada. Com isto, novas abordagens alternativas a essa teoria surgiram buscando solucionar alguns desses problemas. Em particular, as teorias de gravidade baseadas em Ricci, entre as quais se destacam as teorias $f(R)$ e a teoria inspirada na gravidade de Eddington (*EiBI*), quando formuladas "*à la Palatini*", permitem ser mapeadas na Relatividade Geral e vice-versa, tanto no nível das equações quanto no das soluções. Este fato, torna possível a utilização de resultados e métodos muito consistentes da Relatividade Geral para explorar novos resultados nesse contexto estendido da física gravitacional. Este procedimento vem sendo aplicado em alguns casos na literatura. Neste trabalho, nos concentramos na teoria da gravidade *EiBI*, acoplada a uma eletrodinâmica não linear (*NED*), e mostramos que, com o uso do mapa, é possível relacioná-la com outras *NEDs* acopladas à *RG*. Para o caso particular da eletrodinâmica de Maxwell encontramos, por meio desta correspondência, uma eletrodinâmica não linear do tipo *Born-Infeld* no lado da *RG*. Por fim, resolvendo o caso de eletrovácuo esfericamente simétrico na *RG*, mostramos como o mapa fornece diretamente as soluções certas para a *EiBI*. Este procedimento abre uma nova porta para o estudo de cenários astrofísicos e cosmológicos em teorias estendidas da gravidade, explorando todo o poder dos métodos analíticos e numéricos desenvolvidos no âmbito do *RG*.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Gravidade Baseadas em Ricci. Eletrodinâmica não linear. Mapa.

Abstract

In the last decades, the discovery of Matter and Dark Energy brought problems to Einstein's General Relativity (*GR*), even though it is a very well-established theory. With this, new alternative approaches to this theory have emerged seeking to solve some of these problems. In particular, the theories of gravity based on Ricci, among which stand out the $f(R)$ theories and the Born-Infeld theory inspired by Eddington's gravity (*EiBI*), when formulated "*à la Palatini*", allow to be mapped in General Relativity and vice versa, both at the level of equations and solutions. This fact makes it possible to use very consistent results and methods from General Relativity to explore new results in this extended context of gravitational physics. This procedure has been applied in some cases in the literature. In this work, we focus on *EiBI* coupled with a nonlinear electrodynamics *NED*, and show that, with the use of the map, it is possible to relate it to other *NEDs* coupled to *GR*. For the particular case of Maxwell's electrodynamics, we find, through this correspondence, a non-linear Born-Infeld electrodynamics on the General Relativity side. Finally, solving the case of spherically symmetrical vacuum in *GR*, we show how the map directly provides the right solutions for *EiBI*. This procedure opens a new door for the study of astrophysical and cosmological scenarios in extended theories of gravity, exploring the full power of the analytical and numerical methods developed within the scope of GR.

Keywords: General Relativity. Ricci Based Gravity. Nonlinear Electrodynamics. Map.

Sumário

1 Introdução

Desde a antiguidade, o ser humano busca apresentar explicações para os mais variados fenômenos que podem ser observados no dia a dia. Um dos questionamentos que ainda geram muitas dúvidas atualmente está diretamente relacionado à estrutura e composição do Universo.

Antes mesmo que Isaac Newton tivesse desenvolvido a teoria da Gravitação Universal, teoria esta, que é responsável por juntar a descrição dos fenômenos gravitacionais que ocorrem na Terra, como também nos Corpos Celestes, Galileu Galilei já trabalhava com alguns experimentos, como pêndulos por exemplo, a fim de verificar os efeitos da gravidade no movimento dos corpos.

Até então, a cosmologia se preocupava bem mais com a geometria do Universo, e descrevia o seu conteúdo material por meio de uma equação em que os aglomerados de galáxias eram considerados partículas de um fluido. Desse modo, a parte das equações relativísticas responsáveis por descrever o conteúdo do Universo envolvia apenas a pressão e a densidade desse fluido. No entanto, evidências observacionais foram indicando que não é possível explicar o conteúdo de matéria do Universo pensando-se somente na matéria visível, ou seja, nas estrelas, galáxias e suas aglomerações.

De fato, novos fenômenos foram observados, como a expansão acelerada do Universo, que indica a existência de uma "Energia Escura", com efeitos antigravitatorios, e a Matéria Escura, que é uma forma de matéria cuja presença é detectável apenas através de seus efeitos gravitacionais na formação e evolução de estruturas do Universo como galáxias e aglomerados de galáxias.

Até o presente momento, não existem observações diretas das partículas que compõem a Energia e a Matéria Escura. No caso da Energia Escura, uma explicação teórica está relacionada a existência de uma constante cosmológica Λ, que pode ser interpretada como efeito de flutuações quânticas do vácuo, porém nos leva ao chamado problema da constante cosmológica.

Entretanto, na busca por meios de solucionar os problemas que surgiram ao se considerar estas novas componentes no Universo no cenário da RG, passou-se a considerar teorias alternativas à RG (ou extensões dessa teoria), que tentam resolver os problemas antes citados, com sua participação reduzida ou, diretamente, sem a inclusão das Componentes Escuras. Em geral, essas teorias buscam modificar a descrição gravitacional inserindo novos graus de liberdade.

Algumas teorias de gravidade já foram descartadas graças as recentes observações gravitacionais e eletromagnéticas combinadas, produzidas durante a fusão de duas estrelas de nêutrons; e outras foram colocadas sob fortes restrições. Contudo, mostrou-se que para a classe de teorias baseadas no tensor de Ricci *RBGs* (iniciais do termo inglês: *Ricci-Based Gravities*), formuladas no formalismo métrico-afim (onde conexão e métrica são consideradas como objetos independentes), não há propagação de quaisquer graus de liberdade além das duas componentes tensoriais propagadas na teoria de Einstein.

Por outro lado, uma interessante vantagem dessas teorias é que existe uma correspondência entre seu espaço de soluções e o espaço de soluções da *RG*. Isso traz implicações técnicas importantes, pois é possível definir um problema em uma dada teoria *RBG*, mapeá-lo em *RG*, onde pode ser resolvido por métodos analíticos ou numéricos bem conhecidos e, em seguida, trazer a solução obtida de volta à teoria *RBG* original, via transformações puramente algébricas, evitando assim a necessidade de desenvolver métodos específicos para aquela teoria *RBG* em particular.

Nosso objetivo principal nesta dissertação é o estudo do mapeamento existente entre a família de teorias *RBG* e a *RG*; e mostrar que fazendo uso desse procedimento é possível buscar resultados consistentes de uma teoria, e levá-los para a outra reciprocamente.

Para isso, abordaremos uma teoria *RGB* geral, considerando matéria escalar, com o intuito de apresentar o funcionamento do método. Em seguida, estenderemos o mapeamento para o caso de fluidos anisotrópicos e, por fim, será considerado o caso onde podemos tratar a matéria eletromagnética como sendo um fluido, acoplado a teoria de gravidade *EiBI* (iniciais do termo em inglês: *Eddington-inspired Born-Infeld gravity*).

A existência deste procedimento é essencialmente útil para aplicações em astrofísica e cosmologia de modelos não lineares da matéria, especialmente aqueles com eletrodinâmica não linear *NEDs*(iniciais do termo inglês: *Nonlinear Electrodynamics*). De fato, neste último caso, a solução da Relatividade Geral é conhecida de forma fechada e exata. Isso permite encontrar soluções explícitas no lado das *RBGs*, resolvendo equações *algébricas* ao invés de diferenciais, fazendo uso do mapeamento aqui descrito. Existem dois fatores de interesse para este resultado. Por um lado, ele dá nova vida a vários desses modelos *NEDs*, em particular àqueles que são descartados no cenário da Relatividade Geral devido à falta de significado físico, já que a contraparte *NEDs* no lado *RBG*/*EiBI* pode ser de interesse físico real. Por outro lado, aproveitando toda a capacidade dos métodos analíticos e numéricos desenvolvidos dentro da RG, pode-se agora explorar em detalhe novas aplicações astrofísicas e cosmológicas de *RBGs*, em cenários menos simétricos com campos eletromagnéticos, algo dificilmente acessível previo ao desenvolvimento desse método, devido ao alta não linearidade das equações de campo *RBGs*.

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentamos as Componentes Escuras que fazem parte da composição do Universo, e os problemas que elas trazem, como também algumas possíveis vias de solução que são consideradas atualmente, com o objetivo de sanar os problemas relacionados a estas Componentes;

O capítulo 3 é responsável por exibir um caso especifico da classe de teorias *RBGs* que são conhecidas como teorias de gravidade $f(R)$, onde obtemos as equações de campo para dois formalismos distintos: o formalismo métrico e o formalismo de Palatini ou métrico-afim. Obteremos também as equações de campo para a teoria de gravidade *EiBI*;

Já o capítulo 4 é dedicado a trazer uma descrição geral das teorias *RBGs* e a obtenção das equações de campo. O método de mapeamento entre as *RBGs* e a *RG* está descrito no capítulo 5, onde apresentadas um caso geral para este método considerando um campo escalar. Descrevemos também como o mapeamento funciona no caso de fluidos anisotrópicos

No capítulo 6, particularizamos o método para o modelo gravitacional *EiBI*, onde identificamos a classe particular de fluidos anisotrópicos que os campos de eletrovácuo correspondem. Esses resultados são particularizados para a gravidade *EiBI* acoplada à eletrodinâmica de Maxwell. Encontramos a solução correspondente identificando a eletrodinâmica não linear associado no contexto da *RG* pela aplicação direta do mapeamento.

Por fim, o capítulo 7, está reservado às conclusões, onde trazemos um resumo juntamente de algumas perspectivas para pesquisas futuras.

2 O Problema das Componentes Escuras

Neste capítulo serão apresentadas as componentes escuras que são propostas como complemento à matéria visível observada no Universo, e a maneira como elas se manifestam dentro do cenário da Relatividade Geral. Discutiremos alguns dos problemas decorrentes de considerar tais componentes e quais seriam as possíveis vias de solução para estes problemas.

Uma das grandes incógnitas da atualidade está relacionada à estrutura do Universo, em particular, acerca da própria matéria que o compõe. A teoria cosmológica mais aceita atualmente afirma que o Universo consiste em três componentes principais: matéria bariônica (conhecida assim por estar composta principalmente por partículas desse tipo, descritas no modelo padrão de partículas elementares), Matéria Escura e Energia Escura [1]. Na literatura, é possível encontrar diversas evidências indiretas da presença dessas componentes no Universo. No entanto, a sua natureza ainda é objeto de estudo de grande parte dos cientistas da área, e é um dos problemas mais fundamentais da física de partículas e da cosmologia dos nossos dias [2].

Mesmo com todo o aparato tecnológico e científico disponível hoje, ainda se sabe muito pouco sobre a natureza da Matéria Escura, mesmo considerando que ela aparenta ser cinco vezes mais abundante do que a matéria comum no Universo. Além da Matéria Escura não ser visível (no sentido de não interagir eletromagneticamente), acredita-se que sua composição seja em maior parte do tipo não bariônica. Por esta razão, é extremamente difícil detectá-la, exceto pelos seus efeitos gravitacionais sobre a matéria visível [1]. A partir desses efeitos gravitacionais entre matéria bariônica e Matéria Escura, sabemos que somente cerca de 4% da densidade de matéria-energia total no Universo pode ser vista diretamente. Assim, estima-se que cerca de 22% da densidade total do Universo seja composta de Matéria Escura. Sobram então $\sim 74\%$, que acreditamos ser constituída de "Energia Escura", uma componente ainda mais estranha, que se distribui de maneira difusa pelo espaço [3]. A Energia Escura, é um componente teórico necessário para explicar a aparente expansão acelerada do Universo [1] e a sua proporção é a necessária para compatibilizar o modelo com a aparente planice do Universo em larga escala.

2.1 A Matéria Escura

A primeira vez que se teve evidências relacionadas à Matéria Escura foi através de um estudo realizado há quase 100 anos pelo astrônomo suiço Fritz Zwicky [4] para explicar a dispersão da velocidade de aglomerados de galáxias. Zwicky, em seu estudo, observou que as velocidades de algumas galáxias em aglomerados eram de fato muito maiores do que era previsto pela relação massa-luminosidade [5]. Esse tema ficou esquecido durante algum tempo e só nos anos 1970s ele voltou a se destacar quando foi estabelecido por Rubin e Ford [6] que havia algum componente invisível que seria necessário para explicar por que as velocidades de rotação observadas em objetos orbitando nos arredores das galáxias eram inesperadamente altas. Com este estudo do movimento das galáxias é possível determinar a massa dos objetos astronômicos usando os outros corpos à sua volta [7]. Em diversos casos (principalmente envolvendo galáxias espirais) existe uma diferença notável na estimativa da massa total destes objetos, e é creditado à Matéria Escura essa diferença na massa.

O problema da Matéria Escura pode ser dividido em dois casos: a Matéria Escura local, próximo ao plano de nossa galáxia, que surge do estudo da sua dinâmica; e a Matéria Escura global, em torno das galáxias e aglomerados de galáxias, que foi detectada a partir da medição do *redshift*[a] no aglomerado de Coma.

No final dos anos 1970, a maioria das objeções contra a hipótese da Matéria Escura havia sido rejeitada. Porém, ainda não se tinha uma ideia clara de como explicar a restrição da nucleossíntese do Big Bang sobre a baixa densidade da matéria e a suavidade da Lei de Hubble. Esta lei foi apresentada por volta de 1923, e é incumbida de expressar a velocidade com que as Galáxias se afastam em função da sua distância, através da seguinte equação:

$$v = H_0 D \ , \tag{2.1}$$

onde, v representa a velocidade de afastamento da galáxia medida a partir do seu redshift em km/s, H_0 é a constante de Hubble e D é a distância (própria) que a radiação eletromagnética gerada pela galáxia viajou até chegar ao referencial inercial do observador, medida em Mpc[b].

As galáxias espirais apresentam braços que se enrolam em torno de uma região central que é o seu núcleo. Em torno desta grande estrutura de braços e núcleo temos toda uma região aproximadamente esférica, que envolve totalmente a galáxia, essa região é denominada de halo [3]. Acredita-se que, além gás interestelar pouco denso, uma parte da Matéria Escura necessária para explicar a dinâmica das galáxias espirais através dos halos, pode estar na forma de *MACHOs* (iniciais do termo inglês: *Massive Astronomical Compact Halo Objects*), que poderiam ser compostos por estrelas velhas como anãs vermelhas e anãs marrons; objetos formados a partir do colapso gravitacional de parte de uma nuvem

[a] *Redshift* é um termo da língua inglesa cujo o significado é “deslocamento para o vermelho”. O *redshift* é um deslocamento produzido na frequência de uma onda eletromagnética na direção de frequências mais baixas ou, equivalentemente, comprimentos de onda maiores. O *redshift* gravitacional ocorre quando o comprimento de onda da luz que sai de um corpo com grande massa (uma estrela por exemplo), é deslocado na direção do vermelho devido à perda de energia necessária para escapar do campo gravitacional do corpo.

[b] Magaparsec (Mpc) é uma unidade de medida astronômica para comprimento, sendo que 1 magaparsec equivale a 3 milhões de anos-luz.

molecular gigante que contraiu mas não alcançou massa suficiente para dar início a reações nucleares e se transformar em uma estrela. Uma outra possibilidade de *MACHOs* seriam buracos negros, cada um com uma massa de dezenas de vezes a do Sol. [8].

Um dos candidatos mais fortes à Matéria Escura são chamados *WIMPs* (iniciais do termo inglês: Weakly Interacting Massive Particles), partículas hipotéticas que teriam massas comparáveis à do próton, no entanto, seriam resistentes a interagir com a matéria usual que encontramos no Universo, com exceção da gravidade, e acredita-se que por esse motivo ainda não foram detectadas [8].

Uma questão que pode ser levantada é: qual é o papel da Matéria Escura na evolução do Universo? Para solucionar tal problema foram usadas as observações da radiação cósmica de fundo em microondas (*RCF*) ou, como é mais popularmente conhecida *CMB* (do inglês: *Cosmic Microwave Background*), e a distribuição de estruturas em larga escala [7].

A *CMB*, corresponde a uma radiação na frequência das microondas emitida no período inicial da formação do Universo, e foi constatada pela primeira vez em 1965 pelos astrônomos Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson do Bell Telephone Laboratories – New Jersey [9]. Entretanto, a *CMB* já havia sido prevista teoricamente por George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman no ano de 1948 e, posteriormente, por Robert Dicke, como resultado de uma teoria cosmológica na qual o Universo teria iniciado a partir de um estado extremamente quente e denso. A *CMB* dispõe de muitas informações a respeito do Universo primitivo [10, 11].

Em grandes escalas, os dados observacionais disponíveis são bem descritos por um modelo simples de Matéria Escura estável, sem colisão e fria (não relativística). O modelo de Matéria Escura fria se encontra entre os mais bem-sucedidos, pelo menos em grandes escalas ($> 1Mpc$) [12]. As propriedades fundamentais da Matéria Escura - por exemplo, massa de partículas, seção transversal de auto-interação, acoplamento ao modelo padrão e evolução no tempo - podem ser impressas na distribuição macroscópica da Matéria Escura de maneira detectável [13].

Além dos resultados observacionais recentes, o sucesso surpreendente do paradigma inflacionário de Matéria Escura fria ou como é conhecido na literatura *CDM* (do inglês: *Cold Dark Matter*), na explicação das medições de alta precisão da anisotropia no *CMB*, aglomerados de galáxias, floresta de Lyman-α (Ly_α)[c]. Lentes gravitacionais e outros fenômenos astrofísicos, também podem ser considerados uma evidência indireta, mas importante, da existência de um componente dominante de Energia Escura, de caráter

[c] Em espectroscopia astronômica, a floresta Lyman-α ($L_{y\alpha}$) é uma série de linhas de absorção nos espectros de galáxias e quasares distantes, decorrentes da transição eletrônica de Lyman-α do átomo de hidrogênio neutro. À medida que a luz viaja através de várias nuvens de gás com diferentes *redshifts*, várias linhas de absorção são formadas.

repulsivo [14].

As observações atuais também mostram que além da massa mínima de Matéria Escura produzida termicamente, outros mecanismos como objetos compactos seriam capazes de originar a Matéria Escura com massas consideravelmente menores. Estes objetos compactos, principalmente buracos negros, representam um dos modelos mais antigos de Matéria Escura.

Como alternativa, alguns modelos de partículas escuras podem permitir o seu resfriamento e colapso da Matéria Escura, fornecendo outro mecanismo para a formação de buracos negros [13]. De fato, é improvável que esses buracos negros irradiem para deixar uma assinatura detectável e, portanto, são candidatos naturais à Matéria Escura.

A abundância de objetos compactos testa a Matéria Escura através de um canal puramente gravitacional e, portanto, é sensível a modelos que não podem ser sondados em laboratório. A Matéria Escura do objeto compacto é fundamentalmente diferente da dos modelos de partículas; buracos negros primordiais não podem ser estudados em um acelerador e só podem ser detectados através de sua força gravitacional. As restrições atuais sugerem que os buracos negros primordiais não poderiam compor a totalidade da Matéria Escura. No entanto, essas restrições podem ser evitadas se os buracos negros primordiais estiverem agrupados espacialmente.

Várias pesquisas experimentais relacionadas à Matéria Escura de partículas não bariônicas procederam com o passar dos anos em aceleradores de partículas, através de experimentos de detecção direta, que tentam produzir e detectar essas partículas [2]. Simultaneamente a esses estudos, pesquisas indiretas sobre a natureza da Matéria Escura buscam detectar os produtos energéticos do Modelo Padrão a partir da aniquilação ou decaimento de partículas de Matéria Escura presente em sistemas astrofísicos [13]. Estes campos de estudo oferecem técnicas complementares para estudar as propriedades fundamentais da Matéria Escura. Mesmo com tantos esforços experimentais, as únicas medidas empíricas robustas e positivas da Matéria Escura até hoje, vêm de observações da sua interação gravitacional com a matéria visível em sistemas astrofísicos e cosmológicos. Assim, a Matéria Escura é estudada diretamente através da gravidade, já que é o único tipo de força à qual é acoplada que se conhece até agora.

2.2 A Energia Escura

A outra componente desconhecida, a Energia Escura, foi proposta para explicar a atual expansão acelerada do Universo. Tal fato indica que o Universo não seria governado somente por matéria comum, se a Relatividade Geral é assumida como correta, desde que é necessária uma pressão *negativa* [15], responsável por acelerar a expansão do Universo, e que é atribuída à Energia Escura.

No final dos anos 1990 a Energia Escura foi notada pela primeira vez a partir de várias observações astronômicas independentes, que incluem medições de distância das supernovas do tipo Ia (*SNIa*)[d], estimativas da idade do Universo, medições da radiação cósmica de fundo, anisotropias e estimativas de agrupamento [14].

A abordagem mais comumente usada para estudar a Energia Escura é através do seu efeito na história de expansão do Universo. Este efeito pode ser detectado através da distância de luminosidade e a distância angular. Ademais, o crescimento das estruturas em larga escala também pode fornecer restrições úteis à Energia Escura. Das observações do *CMB*, algumas distâncias podem ser extraídas para restringir a energia escura. Por exemplo, o chamado "parâmetro *shift*", que está relacionado à posição do primeiro pico acústico do espectro de potência das anisotropias *CMB*. É uma quantidade frequentemente usada em testes simples de modelos de Energia Escura e serve para analisar o seu desvio com relação ao chamado Modelo ΛCDM, conhecido também como Modelo Padrão da cosmologia, que descreveremos na próxima seção.

No atual contexto cosmológico, a Energia Escura é representada por um fluido com densidade de energia e pressão. Os dados obtidos a partir destas observações sugeriam que a Energia Escura seria um componente de energia que domina o Universo atual. A inclusão de um termo constante nas equações de campo da teoria da Relatividade Geral aparece como uma pressão adicional no tensor energia-momento e, precisamente, uma pressão negativa. Logo, a inclusão dessa componente justificaria o processo de expansão acelerada que observamos. Assim, o candidato mais simples à Energia Escura é a constante cosmológica, representada por Λ.

As considerações teóricas relacionadas constante cosmológica começaram quase um século atrás [16]. Ela foi introduzida nas equações de campo por Einstein em 1917 para descrever um modelo cosmológico estático. Em complemento a esta visão clássica, onde o vácuo é entendido como uma região desprovida de matéria, radiação ou qualquer outra forma de energia, na Teoria Quântica de Campos, o termo Λ poderia estar associado às flutuações quânticas do estado do vácuo. Essas flutuações podem ser demonstradas experimentalmente, por exemplo, através do Efeito Casimir. A constante cosmológica Λ é identificada como a densidade de energia do vácuo, sendo considerada a forma mais simples para interpretar-se fisicamente a Energia Escura, e nos possibilita explicar e conhecer o valor atual da taxa de aceleração com que o Universo se expande. Contudo, o valor teórico previsto para a constante cosmológica pela Teoria Quântica de Campos é enorme em comparação com o limite experimental obtido pelas observações de supernovas e pela *CMB*, onde a discrepância é um fator de 10^{-121} [17].

[d] Supernovas do tipo Ia é uma subcategoria das estrelas variáveis cataclísmicas, resultado de uma violenta explosão de uma estrela anã branca. Este tipo de supernova apresenta fortes linhas de silício e funcionam como "velas padrão".

2.3 Rotas de Solução para o problema das Componentes Escuras

Na seção anterior foi apresentado o chamado problema das Componentes Escuras, componentes hipotéticas do Universo, requeridas para explicar uma grande variedade de observações colhidas ao longo dos últimos 100 anos. A partir de agora, descreveremos algumas das principais rotas propostas para tentar solucioná-los. Será analisado melhor o caso do modelo com constante cosmológica ΛCDM. E também será apresentada uma noção geral do que são as Teorias de Gravidade Modificada com suas principais características.

2.3.1 Matéria Escura: O Modelo ΛCDM

O modelo ΛCDM é considerado o atual paradigma da Cosmologia. Esse modelo, baseado na Relatividade Geral de Einstein, consiste em uma constante cosmológica (Λ) mais a matéria escura fria (CDM). O modelo ΛCDM fornece um excelente ajuste com base em um número notavelmente pequeno de parâmetros cosmológicos , para a riqueza de dados observacionais de alta precisão [18]: uma série de observações que se tornaram disponíveis nas últimas duas décadas, e que nos impuseram uma composição surpreendente para a densidade de energia de diferentes componentes do Universo, que desafia qualquer explicação simples [19]. Em particular, fornece um bom ajuste para as principais observações astronômicas como a estimativa da distância de luminosidade de *SNIa*, *CMB* e *BAO*[e] (do inglês: *Baryon Acoustic Oscillations*. *BAOs* são ondas geradas pela emissão dos átomos de Hidrogênio neutro no inicio do Universo, que podem ser detectadas na faixa de rádio frequência) [20].

Por outro lado, a Matéria Escura fria foi introduzida no modelo afim de explicar as influências gravitacionais observadas em estruturas em grandes escalas, e que não podem ser explicadas pela quantidade de matéria observada [21]. Apesar dos sucessos observacionais, há um interesse persistente em estender a cosmologia além do modelo padrão, ΛCDM. Isso é motivado por uma série de questionamentos teóricos aparentemente sérios, envolvendo questões como o problema constante cosmológica, a natureza das partículas da Matéria Escura, a validade da Relatividade Geral em grandes escalas, a existência de anomalias no *CMB* e em pequenas escalas, e a previsibilidade e testabilidade do paradigma inflacionário [22].

Entre os vários candidatos à Energia Escura, a constante cosmológica Λ é fenomenologicamente a mais simples e fornece bom acordo com os dados observacionais, mesmo que esta tenha trazido consigo vários problemas desafiando a física fundamental. Na Relatividade Geral, Λ é forçada a ser uma constante verdadeira pela covariância da teoria.

[e] Inclusive a UFCG vêm trabalhando na construção de um radiotelescópio chamado BINGO (acrônico de *Baryon Acoustic Oscillations in Neutral Gas Observations*) com o intuído de medir a expansão do Universo e inferir sobre as propriedades da Energia Escura, ou seja, o BINGO captará a radiação de hidrogênio, que pode indicar a distribuição das galáxias logo após o Big Bang.

No entanto, no intuito de resolver diversos problemas, os pesquisadores têm considerado repetidamente a possibilidade de a constante cosmológica ser promovida a uma variável dinâmica. A maneira mais simples de se fazer isto é substituir Λ por um campo escalar dinâmico (com termos cinéticos e potenciais). Dessa maneira, introduz-se um novo grau de liberdade de propagação ao Universo, como foi feito na quintessência ou em outros modelos dinâmicos de Energia Escura [23]. Neste sentido, podemos modificar a teoria da gravidade, no nível da ação ou no nível das equações de campo, para criar novas teorias da gravidade projetadas para produzir a expansão acelerada tipicamente atribuída à Energia Escura ou a Λ [24].

Uma outra forma de solucionar estes problemas consiste na modificação da teoria de gravidade subjacente. Na próxima seção serão apresentadas algumas das Teorias de Gravidade Modificada.

2.3.2 Modificações da Gravidade

Desde a formulação da Teoria da Relatividade Geral feita por Albert Einstein, vários testes foram feitos afim de comprovar se os resultados experimentais corroborariam com os propostos por Einstein em sua teoria [25]. A interação gravitacional descrita a partir da Relatividade Geral forneceu uma mudança significativa de paradigma quando se trata da natureza do espaço-tempo [26]. Assim como qualquer nova hipótese, ela só seria aceita depois de explicar fenômenos já conhecidos mas que não tinham uma explicação convincente. Hoje a Relatividade Geral é uma teoria muito bem consolidada, principalmente com os testes recentes que confirmam várias das suas previsões [27, 28, 29, 30, 31]. No entanto, mesmo com essas comprovações, ao longo dos anos, várias críticas à teoria de Einstein foram levantadas, e os cientistas começaram a pensar se RG é a única teoria capaz de explicar com sucesso a interação gravitacional [32]. Este novo ponto de vista acerca da RG tem origem em diversos campos de estudo como: Astrofísica, Cosmologia, Física de Altas Energias, e a Teoria Quântica de Campos. Neste sentido, os cientistas passaram então a estudar Teorias Alternativas de Gravidade, afim de buscar respostas para esses problemas.

Podemos, então considerar às Teorias Alternativas de Gravidade como um novo paradigma para suprir as deficiências da Relatividade Geral em explicar certos fenômenos. Essas Teorias, são uma abordagem que, preservando os resultados positivos da Teoria de Einstein, visam resolver problemas conceituais que surgiram como consequência do avanço da precisão observacional. Em particular, o objetivo é abranger problemas como a Inflação Cósmica, Energia Escura, Matéria Escura, estruturas em grande escala e, também, fornecer pelo menos uma rota viável para o desenvolvimento da gravidade quântica [33]. Outras razões para modificar a RG surgem do problema das singularidades, que aparecem inevitavelmente na teoria, e suas consequências com relação ao "problema da informação", que surge nos buracos negros, da combinação de singularidades e horizontes de eventos que esses objetos apresentam.

Diversas teorias alternativas de gravidade vem sendo amplamente estudadas na literatura atualmente. Algumas delas são:

- *MOND* (iniciais do termo inglês: *Modified Newtonian Dynamics*) esta teoria surgiu como uma alternativa à Matéria Escura buscando solucionar o problema da curva de velocidade de rotação de galáxias espirais e sugere modificações na dinâmica newtoniana, o que resulta na alteração das leis que regem o movimento dos corpos em regimes de baixas acelerações [34].

- Teorias escalar-tensorias, propostas inicialmente em [35], que são caracterizadas pela presença de um campo escalar que, em conjunto com a métrica, são responsáveis por descrever fenômenos gravitacionais [36]. Assim, podemos dizer que as teorias escalar-tensoriais são teorias em que o campo gravitacional é descrito apenas pelo tensor métrico.

  Dentro desta classe de teorias, destacamos o modelo proposto por Brans e Dicke [37], onde, com o objetivo de preservar o princípio de equivalência, assumiram que o campo escalar deveria surgir desacoplado da lagrangiana de matéria. Na teoria de Brans-Dicke, o campo escalar, é considerado como sendo sem massa, e acopla-se com a curvatura por um fator constante [38].

- Teorias Bimétricas; propostas inicialmente por Rosen [39], esta teoria incluí dois tensores métricos de rank 2, sendo um deles uma métrica dinâmica $g_{\mu\nu}$, e o outro uma métrica não-dinâmica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, onde a métrica dinâmica se acopla aos campos de matéria e com ele podemos construir o tensor energia-momento. Já o fato, de termos a segunda métrica não-dinâmica possibilita que ela seja altamente simétrica [40].

- Teorias de dimensões extras, a ideia para esta teoria foi proposta no início do século XX por Nordström [41] e alguns anos mais tarde por Kaluza [42] e Klein [43], com o proposito de unificar os campos eletromagnéticos e gravitacionais, introduziram uma dimensões extra para unificar tais campos em um único campo de maior dimensão isto é, uma teoria 5D-dimensional, com uma dimensão extra periódica [44] .

- Modelos de Branas: a ideia central para está teoria, é que, nosso Universo seja entendido como uma parede de domínio de dimensões extras imerso em um *bulk* com mais dimensões espaciais. Os cenários de branas fornecem novas possibilidade de explicar algumas dificuldades que surgem no Modelo Padrão, como o problema da hierarquia, da constante cosmológica, a energia escura e a quantização da gravidade [45, 46, 47].

- A teoria de Horava-Lifshitz apresentada em [48], propõe modificações na RG quando se está no regime de altas energias (limite ultravioleta), e a torna, renormalizável e quantizável, que faz com que a teoria de Einstein padrão seja recuperada para o limite de baixas energias, no infra-vermelho. Porém, quando são feitas medições para o comportamento ultravioleta, é necessário inserir derivadas de ordem superior na lagrangiana, estabelecendo a renormalização [49]. Todavia essa inserção resulta em alguns problemas, como derivadas de ordem superior no tempo, que ao serem aplicadas na teoria, levam a campos fantasmas [50]

No capítulo a seguir, apresentaremos as Teorias $f(R)$ de gravidade, este tipo de teoria substitui o escalar de curvatura R por uma função mais geral do mesmo na ação de Einstein-Hilbert. Discutiremos também a possibilidade de derivar as equações de campo aplicando dois formalismos distintos, e como isso afeta a estrutura das equações no caso da teoria considerada ser distinta da de Einstein.

3 Teorias de Gravidade $f(R)$

Como dito anteriormente, à RG é uma teoria bem consolidada, e seus resultados à nível do Sistema Solar se mostram bem consistentes, embora ainda haja alguns problemas em aberto. Antes de partimos paras as Teorias $f(R)$, iremos primeiramente apresentar alguns resultados importantes da RG com o intuito de, ao final deste capítulo, fazermos um comparativo entre os resultados que já são bem conhecidos dentro do cenário da RG e os resultados presentes nas Teorias $f(R)$.

3.1 Gravitação de Einstein

Segundo Einstein, a descrição das forças gravitacionais através da curvatura é representada por um tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Este que é responsável por relacionar o elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ de um dado espaço-tempo quadrimensional. Desta maneira, a curvatura do espaço-tempo é estabelecida por uma distribuição de matéria, que é representada através do tensor Energia-Momento $T_{\mu\nu}$. Para a métrica $g_{\mu\nu}$, a curvatura é descrita pelo chamado tensor de Riemann, definido em termos da conexão afim, Γ, segundo

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\alpha} \ . \tag{3.1}$$

O tensor de Riemann, pode ser utilizado para definir vários outros tensores importantes [51]. Deste modo, realizando uma contração em (3.1) podemos definir o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\nu\lambda} \ , \tag{3.2}$$

e, contraindo (3.2) com a métrica, obtemos

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ , \tag{3.3}$$

que é o escalar de Ricci (ou escalar de curvatura) e desempenha um papel fundamental dentro das teorias de gravidade.

A gravitação de Einstein, além de trazer informações sobre o espaço-tempo, descreve sua dinâmica a partir de um conjunto de equações que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria-energia no espaço. Para se chegar às equações de Einstein em uma formulação variacional, partimos de uma ação originalmente proposta por Hilbert, dada por:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}R + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \ . \tag{3.4}$$

onde κ^2 e é a constante de Newton e seu valor é: $\kappa^2 = 8\pi G$, e S_M representa a ação de matéria, onde ψ denota coletivamente os campos de matéria.

Fazendo uso do princípio variacional de Hamilton, chegamos a:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu} \tag{3.5}$$

onde $G_{\mu\nu}$ é conhecido como tensor de Einstein, e este conjunto de 10 equações acopladas são as conhecidas Equações de Einstein. O lado direito da Eq. (3.5) descreve a distribuição das fontes de matéria-energia e o lado esquerdo a geometria do espaço-tempo consistente com esta distribuição. As equações de campo de Einstein também são responsáveis por descrever fenômenos como ondas gravitacionais e buracos negros.

3.2 Teorias $f(R)$

A classe de Teorias de Gravidade $f(R)$ vem sendo amplamente estudadas nas duas últimas décadas, pois este tipo de teoria poderia ser capaz de descrever o atual crescimento acelerado do Universo sem a necessidade de incluir um novo tipo de energia mas sim, com a inclusão de um novo grau de liberdade na Relatividade Geral [52].

Como dito no capítulo anterior, as Teorias de Gravidade $f(R)$ consistem basicamente em substituir o escalar de curvatura por uma função não linear do próprio escalar. Então, para as teorias $f(R)$, a ação de Einstein-Hilbert (3.4) é substituída por uma ação da seguinte forma:

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \ , \tag{3.6}$$

onde, S_M representa a ação de matéria e ψ denota os campos de matéria como no caso da *RG*.

3.2.1 O Formalismo Métrico

Para calcularmos as equações de campo, é necessário aplicar o princípio da mínima ação na equação (3.6), e realizar as variações em relação às variáveis do sistema, neste caso, as variações são realizadas com relação à métrica $g_{\mu\nu}$.

Na teoria de Einstein, a conexão é fixada através da equação de compatibilidade ($\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$), que é satisfeita se as componentes da conexão forem os símbolos de Christoffel da métrica $g_{\mu\nu}$ e as conexões são as de Levi-Civita. E, por este motivo, sobra apenas a métrica como variável. No formalismo métrico, o mesmo critério é obedecido, por está razão, para se obter as equações de campo para esse formalismo é suficiente apenas realizar as variações com relação a métrica . Porém, no formalismo Palatini (métrico-afim) (que estudaremos mais adiante) deixa as equações de campo fixarem a conexão. Por "coincidência", no caso da ação de Einstein-Hilbert, as equações da conexão condizem, justamente, com à mesma eq. de compatibilidade e, portanto, à mesma conexão de

Levi-Civita. Porém, para outras lagrangianas (como a de $f(R)$), essa coincidência já não acontece.

Assim, para o setor gravitacional, no formalismo métrico, obtemos

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\delta\left(\sqrt{-g}f(R)\right) = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left[\delta\left(\sqrt{-g}\right)f(R) + \sqrt{-g}\delta\left(f(R)\right)\right] \quad (3.7)$$

a partir deste ponto, com o intuito de simplificar as equações iremos considerar a seguinte notação: $f_R \equiv df/dR$ e $f \equiv f(R)$. A variação do determinante da métrica ($\sqrt{-g}$) é :

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \ , \quad (3.8)$$

lembrando que, da definição do escalar de Ricci R, temos:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \ , \quad (3.9)$$

então, obtemos:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left(\nabla_\tau\delta\Gamma^\tau{}_{\nu\mu}\right) \quad (3.10)$$

onde os símbolos de Christoffel (componentes da conexão de Levi-Civita) para a métrica $g_{\mu\nu}$ são expressos por:

$$\Gamma^\tau_{\mu\nu} \equiv \left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}g^{\tau\lambda}\left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}\right) \ . \quad (3.11)$$

e considerando que $\nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}\right) = 0 \Leftrightarrow \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.

Assim, é possível reescrever a Eq. (3.7) como

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f + g_{\mu\nu}\Box f_R - \nabla_\mu\nabla_n f_R\right]\delta g^{\mu\nu} = 0 \ . \quad (3.12)$$

Para o setor de matéria, a variação da ação pode ser resolvida de maneira semelhante, ou seja,

$$\begin{aligned}\delta S_M &= \int d^4x\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right) \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \ ,\end{aligned} \quad (3.13)$$

onde, o tensor Energia-Momento é expresso por: $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}$.

Com isto, obtem-se as seguintes equações de campo:

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box f_R - \nabla_\mu\nabla_\nu f_R = \kappa T_{\mu\nu} \ . \quad (3.14)$$

Agora, perceba que, tomando o traço da Eq. (3.14) com a métrica inversa $g^{\mu\nu}$, temos

$$3\Box f_R + f_R R - 2f_R = \kappa T \quad (3.15)$$

onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ é o traço do tensor energia-momento. A relação diferencial existente entre R e T, nos diz que as teorias $f(R)$ podem conter mais soluções do que a teoria de Einstein.

Reescrevendo as equações de campo (3.14) de gravidade para o formalismo métrico na forma das equações de Einstein, temos

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{f_R} + g_{\mu\nu}\frac{f - Rf_R}{2f_R} - \frac{g_{\mu\nu}\Box f_R + \nabla_\mu\nabla_\nu f_R}{f_R} \\ &= \frac{\kappa}{f_R}\left[T_{\mu\nu} + T^{(eff)}_{\mu\nu}\right] \ , \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde foi introduzido um tensor Energia-Momento efetivo

$$T^{(eff)}_{\mu\nu} \equiv \frac{f - Rf_R}{2}g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Box f_R + \nabla_\mu\nabla_\nu f_R \tag{3.17}$$

Desta maneira, a modificação da ação, passando da ação de Einstein-Hilbert, linear em R, para a ação $f(R)$ (3.6), se obtém uma "correção" efetiva de origem geométrica no lado das "fontes". É nesse sentido que se propõe este tipo de modificação da gravidade para resolver os problemas da Matéria e Energia Escuras.

Porém, como pode se perceber em (3.14), a equação de campo para $f(R)$ obtida no formalismo métrico, é uma equação diferencial de quarta ordem na métrica, uma vez que, em R já contenha derivadas de segunda ordem da métrica [53].

Isso causa problemas para esta teoria, como por exemplo, a aparição de "fantasmas" (*ghosts*), que a tornam instável perante pertubações, essas instabilidades se dão devido ao teorema de Ostrogradski [54], que afirma que teorias de ordens superiores não possuem um estado de mínima energia, podendo decair até estados infinitamente negativos [55].

Com o objetivo de solucionar esse tipo de problemas podemos enunciar um formalismo distinto para realizar a variação da ação descrita pela Eq. (3.6), a saber, o Formalismo de Palatini que será descrito na próxima seção.

3.2.2 O Formalismo de Palatini

Embora, não leve seu nome, o formalismo de Palatini parece ter sido inicialmente considerado por Einstein [56, 57], que o descartou ao perceber que as equações dinâmicas obtidas no caso da ação de Hilbert eram equivalentes às obtidas no formalismo métrico. Caso tivesse considerado alguma outra ação, teria percebido que essa equivalência só acontece nesse caso particular

Pela sua própria definição, o formalismo de Palatini fornece equações de campo diferenciais de segunda ordem na métrica, o que corta pela raiz os problemas das instabilidades mencionadas nas teorias de gravidade modificadas no formalismo métrico. Uma outra qualidade extremamente importante é que, também pela estrutura natural deste formalismo, as equações para as componentes da conexão são vínculos, e não equações dinâmicas. O que, em outras palavras, quer dizer que não introduz novos campos dinâmicos (capazes de se propagarem) no jogo.

Por esses motivos, o formalismo de Palatini apresenta uma via muito interessante nas tentativas de explicar a expansão acelerada do Universo sem precisar considerar a Energia Escura.

No Formalismo métrico, realizamos a variação da ação com respeito à métrica e consideramos *a priori* que a conexão é a de Levi-Civita. No Formalismo de Palatini, porém, vamos supor que métrica e conexão são entidades geométricas igualmente fundamentais e independentes. Como tal, suas equações de campo devem ser obtidas por variações independentes da ação em relação à métrica e à conexão.

Para comparar os resultados do formalismo de Palatini, estudaremos de novo nessa seção a ação da Eq. (3.6). Contudo, diferente do que ocorre no Formalismo Métrico, à conexão $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ é independente da métrica $g_{\mu\nu}$. Neste caso iremos adotar um tensor de Ricci ($\mathcal{R}_{\mu\nu}$), este que é formado a partir da conexão independente e da métrica. Com isto também podemos adotar um scalar de Ricci ($\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$), por consequência.

Tomando a variação da ação com respeito a métrica e a conexão, para o setor gravitacional, obtemos:

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4\left[\sqrt{-g}f\left(\mathcal{R}\right) + \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu}\left(\delta g^{\mu\nu}\right) + \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left(\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}\right)\right] \ , \tag{3.18}$$

e, lembrando que

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\left(\delta g^{\mu\nu}\right) \ , \tag{3.19}$$

temos que:

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} - \kappa^2T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}\right] \ . \tag{3.20}$$

Qualquer tensor de dois índices pode ser escrito como uma parte simétrica mais uma outra anti-simétrica, ou seja, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{(\mu\nu)} + \mathcal{R}_{[\mu\nu]}$, onde a parte simétrica e a parte anti-simétrica são expressas por $(\mu\nu)$ e $[\mu\nu]$ respectivamente. Então, para o primeiro termo da integral da Eq. (3.20), obtem-se $\mathcal{R}_{[\mu\nu]}\delta g^{\mu\nu} = 0$, pois a métrica inversa $g^{\mu\nu}$ é simétrica.

Consideremos agora, que as conexões sejam simétricas (isto é, a torsão é nula). Podemos fazer esta consideração pois, nos casos em que, o tensor de Ricci é simétrico, a conexão pode ser escrita como sendo a soma de um termo simétrico mais uma parte vetorial, esta chamada de modo projetivo, que serve de fonte para a torção. Porém, devido a invariância projetiva do tensor de Ricci, o modo projetivo não influencia as equações de campo para a métrica e, por essa razão, é possível estabelecer desde já que a torção é nula [58, 59], logo podemos expressar:

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right) \ , \tag{3.21}$$

onde ∇ representa a derivada covariante com relação às conexões independentes. Substituindo a Eq. (3.21) em (3.20), logo, para o último termo da integral (3.20) encontramos a seguinte expressão

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left(\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}\right) = \int d^4x\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\right] \ , \tag{3.22}$$

o integrando pode ser reescrito usando a definição de derivada covariante do produto, ou seja,

$$\nabla_\lambda\left[\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\right] = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) + \nabla_\lambda\left[\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right]\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \ , \tag{3.23}$$

e

$$\nabla_\nu\left[\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\right] = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) + \nabla_\nu\left[\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right]\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) \ . \tag{3.24}$$

Substituindo as relações anteriores na Eq. (3.22), obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int d^4x\left[\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\right] \\ &\quad + \int d^4x\left[-\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right)\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) + \nabla_\nu\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.25}$$

redefinindo os índices e reorganizando os termos obtemos

$$I = \int d^4x\nabla_\lambda\sqrt{-g}J^\lambda + \int d^4x\left[-\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right) + \nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma\mu}\right)\delta^\nu_\lambda\right]\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \ , \tag{3.26}$$

onde $J^\lambda \equiv f_{\mathcal{R}}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\beta_\beta\right)$. Logo a primeira integral em (3.26) é um termo de superfície e, assumindo que se anula assintoticamente, temos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} - \kappa^2T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\right. \\ &\quad \left. + \left(\left[-\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right) + \nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma\mu}\right)\delta^\nu_\lambda\right]\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.27}$$

o segundo termo da integral, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\int d^4xH^{\mu\nu}_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \ , \tag{3.28}$$

note que, $H^{\mu\nu}_\lambda$ não possui simetria nos índices $\mu\nu$, no entanto podemos escrevê-lo como $H^{\mu\nu}_\lambda = H^{(\mu\nu)}_\lambda + H^{[\mu\nu]}_\lambda$, de modo que

$$H^{(\mu\nu)}_\lambda = -\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right) + \nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma(\mu}\right)\delta_\lambda^{\ n)} \tag{3.29}$$

e

$$H^{[\mu\nu]}_\lambda = \nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma[\mu}\right)\delta^{\nu]}_\lambda \tag{3.30}$$

Como $H^{[\mu\nu]}_\lambda = 0$, então o segundo termo da integral da Eq. (3.27), pode ser expresso como

$$\int d^4x\left[-\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right) + \nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma(\mu}\right)\delta^{\nu)}_l\right]\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{3.31}$$

Assim, a variação da ação (3.6) no formalismo de Palatini é

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu}-\frac{f}{2}g_{\mu\nu}-\kappa^2T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\right. \\ &\left.+\left(\left[-\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right)+\nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma(\mu}\right)\delta^{\nu)}_\lambda\right]\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.32}$$

A extremização requer $\delta\mathcal{S}=0$ na equação anterior, logo, da variação da ação (3.6) com relação à métrica $g^{\mu\nu}$ obtemos

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu}-\frac{f}{2}g_{\mu\nu}=\kappa^2T_{\mu\nu} \tag{3.33}$$

onde, o tensor Energia-Momento é expresso por: $T_{\mu\nu}\equiv-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}}$; dado que a ação de matéria é $\mathcal{S}_M=\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_M$. Vale lembrar que, a ação de matéria não depende das conexões $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, mas somente da métrica $g_{\mu\nu}$ e dos campos de matéria.[a]

O traço do segundo termo da Eq. (3.32), produz a equação para as componentes da conexão

$$\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right)=0 \tag{3.34}$$

Note que as equações de campo são equações de segunda ordem, ao contrário do que acontece no Formalismo Métrico que fornece equações com derivadas de quarta ordem da métrica $g_{\mu\nu}$. Note também que, tomando o traço em (3.33) com a métrica, obtemos seguinte equação algébrica

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}-2f=\kappa T\ . \tag{3.35}$$

Neste ponto, é conveniente introduzir um novo objeto, que funcionará como uma métrica auxiliar

$$h_{\mu\nu}\equiv f_{\mathcal{R}}g_{\mu\nu}\ , \tag{3.36}$$

tal que $\nabla_\lambda\left(\sqrt{-h}h^{\mu\nu}\right)=0$. Isto nos permite resolver diretamente a Eq. (3.34), cuja solução é a conexão de Levi-Civita. Portanto, as componentes da conexão em termos da nova métrica são

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}h^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu h_{\nu\sigma}+\partial_\nu h_{\mu\sigma}-\partial_\sigma h_{\mu\nu}\right) \tag{3.37}$$

ou, em termos da métrica $g_{\mu\nu}$,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2f_R}g^{\lambda\sigma}\{\partial_\mu\left(f_Rg_{\nu\sigma}\right)+\partial_\nu\left(f_Rg_{\mu\sigma}\right)-\partial_\sigma\left(f_Rg_{\mu\nu}\right)\}\ . \tag{3.38}$$

O tensor de Ricci generalizado $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ é escrito como

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}+\frac{3}{2}\frac{1}{f_{\mathcal{R}}^2}\nabla_\mu f_{\mathcal{R}}\nabla_\nu f_{\mathcal{R}}-\frac{1}{f_{\mathcal{R}}}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box\right)f_{\mathcal{R}}\ , \tag{3.39}$$

[a] Isto é um ponto importante para evitar a quebra do Princípio de Equivalência de Einstein [59].

onde $R_{\mu\nu}$ é o tenso de Ricci da RG construído pelo simbolo de Christoffel. Traçando a expressão (3.39) encontramos o escalar de Ricci

$$\mathcal{R} = R + \frac{3}{2{f_{\mathcal{R}}}^2}\nabla_\mu f_{\mathcal{R}}\nabla^\mu f_{\mathcal{R}} + \frac{3}{f_{\mathcal{R}}}\Box f_{\mathcal{R}} \ . \tag{3.40}$$

A partir dos resultados (3.39) e (3.40), podemos reescrever as equações de campo em termos do tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{f_{\mathcal{R}}}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{R} - \frac{f}{f_{\mathcal{R}}}\right) + \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box\right)f_{\mathcal{R}} - \\ &\quad \frac{3}{2}\frac{1}{{f_{\mathcal{R}}}^2}\left[\nabla_\mu f_{\mathcal{R}}\nabla_\nu f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\nabla f_{\mathcal{R}}\right)^2\right] \\ &= \frac{\kappa}{f_R}\left[T_{\mu\nu} + T^{(eff)}_{\mu\nu}\right] \ , \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde, para o formalismo de Palatini temos o seguinte tensor energia-momento efetivo

$$T^{(eff)}_{\mu\nu} = \frac{f - \mathcal{R}f_{\mathcal{R}}}{2\kappa}g_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu f_{\mathcal{R}} - g_{\ m\nu}\Box f_{\mathcal{R}}\right) - \frac{3}{2\kappa f_{\mathcal{R}}}\left[\nabla_\mu f_{\mathcal{R}}\nabla_\nu f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\nabla f_{\mathcal{R}}\right)^2\right] \tag{3.42}$$

Note que existe dependência tanto da métrica $g_{\mu\nu}$, como dos campos de matéria em ambos os lados da Eq (3.41). Isto as torna semelhantes as equações da RG contudo, o lado da fonte foi alterado.

Perceba também, que o tensor energia-momento encontrado para o formalismo de Palatini (3.42) nos temos um termo a mais o que difere do tensor energia-momento efetivo encontrado no formalismo métrico (3.17), ou seja, a mudança no formalismo vai além da modificação das equações de campo.

3.3 Além das teorias $f(R)$.

As teorias $f(R)$ são somente um caso de uma classe de teorias métrico-afíns (ou formuladas *à la* Palatini) construídas com base no tensor de Ricci, chamadas teorias *RBGs* [58, 60], que abordaremos no próximo capítulo.

Outra família dessa classe, que vem ganhando destaque nos esforços de lidar com o problema das singularidades nas soluções é a teoria de gravidade *EiBI*, proposta em [61]), pois foi constatado que, em certos sistemas, as soluções desse modelo caraterizando buracos negros ou outros objetos compactos, podem evitar ou melhorar singularidades, o que poderia trazer modificações significativas nos resultados padrão da astrofísica estelar [62, 63, 63].

3.3.1 Teoria de gravidade *EiBI*

Essa teoria de gravidade é derivada a partir da seguinte ação:

$$\mathcal{S}_{EiBI} = \frac{1}{\epsilon\kappa^2}\int d^4x\left[\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu}\left(\Gamma\right)|} - \lambda\sqrt{-g}\right] + \mathcal{S}_M\left(g_{\mu\nu}, \Psi\right) \ , \tag{3.43}$$

onde a parte de matéria é representada por $\mathcal{S}_M$, os campos de matéria são denotados por Ψ, e ϵ é o parâmetro constante da teoria com dimensão de comprimento ao quadrado. Em geral, a constante de acoplamento λ está relacionada com uma constante cosmológica efetiva $\lambda = 1 + \epsilon\Lambda$. No entanto, por simplicidade, nesse trabalho iremos considerar, como em [64], $\lambda = 1$ (ou $\Lambda = 0$).

As equações de campo da teoria *EiBI* original possui uma estrutura diferencial peculiar, que é semelhante as equações encontradas na abordagem metrico-afim das teorias $f(R)$, que vimos anteriormente, ou seja, a conexão é considerada como um campo independente. Como resultado, elas exibem problemas de instabilidades comuns com esta última e com outras teorias em que a matéria é acoplada ao escalar de Ricci, que também apresenta características semelhantes [65]. Por esse motivo, iremos considerar **apenas a parte simétrica do tensor de Ricci** construído com a conexão Γ, o que restabelece a simetria projetiva, resolvendo os problemas de instabilidades (fantasmas) [66].

Assim, podemos definir o tensor

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu} \ , \tag{3.44}$$

que resulta simétricos, sendo que $g_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu}$ o são. Desta forma a ação (3.43), se torna

$$\mathcal{S}_{BI} = \frac{1}{\epsilon\kappa^2} \int d^4x \left[\sqrt{-h} - \sqrt{-g}\right] + \mathcal{S}_M \ , \tag{3.45}$$

com $h = \det h_{\mu\nu}$ e $\det g_{\mu\nu}$. Tomando as variações independentes da métrica e da conexão obtemos as equações de movimento:

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu} - \epsilon\kappa^2 T^{\mu\nu}\right) \ , \tag{3.46}$$

$$\nabla_\mu^\Gamma\left(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\right) = 0 \ , \tag{3.47}$$

onde a eq. (3.46) é a eq campo para o tensor métrico e (3.47) é a eq. de campo para a conexão. O tensor energia-momento relacionado aos campos de matéria é expresso por: $T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{S}_M}{\delta g_{\mu\nu}}$. Tomando a eq. (3.47), podemos concluir que a conexão associada a métrica auxiliar é a de Levi-Civita, ou seja,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{h^{\lambda\beta}}{2}\left(\partial_\mu h_{\nu\beta} + \partial_\mu h_{\nu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\nu}\right) \tag{3.48}$$

3.3.1.1 Matriz auxiliar $\hat{\Omega}$

Rescrevendo a eq. (3.44) na forma:

$$\epsilon R_{\mu\nu}(h) = h_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \tag{3.49}$$

podemos pensá-la como uma equação para se obter $h_{\mu\nu}$. Note que o lado esquerdo desta eq. possui derivadas de segunda ordem na métrica $h_{\mu\nu}$ e, para resolvê-las, é necessário que exista uma relação entre a métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ e a métrica física $g_{\mu\nu}$. Assim, assumiremos que existe uma matriz $\hat{\Omega}$ que as relaciona, segundo

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\Omega^{\alpha}_{\nu} \ , \tag{3.50}$$

e substituindo essa expressão em (3.46), obtemos

$$\sqrt{|\hat{\Omega}|}\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu} - \epsilon\kappa^2 T^{\mu}_{\ \nu} \tag{3.51}$$

Agora, contraindo a eq. (3.49) com a métrica $h^{\alpha\mu}$, chegamos a:

$$\epsilon R^{\mu}_{\nu}\left(h\right) = \tfrac{1}{\epsilon}\left(\delta^{\mu}_{\nu} - h^{\alpha\mu}g_{\mu\nu}\right). \tag{3.52}$$

Trabalhando um pouco mais a expressão anterior, obtemos

$$R_{\mu\nu}\left(h\right) \;=\; \frac{1}{\epsilon}\left(\delta^{\mu}_{\nu} - \left(\Omega^{-1}\right)^{\alpha}_{\lambda} g^{\lambda\mu}g_{\alpha\nu}\right)$$

e, finalmente,

$$R_{\mu\nu}\left(h\right) \;=\; \frac{\kappa^2}{\sqrt{|\Omega|}}\left[\frac{\sqrt{|\Omega|}-1}{\epsilon\kappa^2}\delta^{\mu}_{\nu} + T^{\mu}_{\nu}\right] . \tag{3.53}$$

Se considerarmos o caso de vácuo, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$, a matriz expressa por (3.50) é proporcional à (3.51), de maneira que tanto a métrica física $g_{\mu\nu}$ quanto a métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ se tornam *conformes*, e $|\Omega| = 1$ [67]. Isso implica que, no vácuo, as soluções desta teoria são idênticas às mesmas que as encontradas na *RG*.

É possível observar que, quando utilizamos o formalismo de Palatini, as equações de campo para a métrica auxiliar, tanto para teorias $f\left(R\right)$ quanto para *EiBI* são similares na sua estrutura [68], que basicamente apresenta a forma

$$R^{\mu}_{\ \nu}(q) = \frac{\kappa^2}{\sqrt{|\hat{\Omega}|}}\left(\mathcal{L}_G\delta^{\mu}_{\ \nu} + T^{\mu}_{\ \nu}\right) \tag{3.54}$$

No caso de $f\left(R\right)$ no formalismo de Palatini, $\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa^2}f\left(R\right)$; para o caso de *EiBI* a Lagrangiana é dada por $\mathcal{L}_G = \frac{\sqrt{|\hat{\Omega}|}-\lambda}{\epsilon\kappa^2}$. No próximo capítulo, iremos trabalhar diretamente sobre a versão geral das *RBGs*, isto é, considerando uma lagrangiana de gravidade $\mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma))$ genérica.

4 Teorias baseadas no tensor de Ricci (*RBGs*)

Como vimos no capítulo anterior, as teorias de gravidade modificada tentam oferecer possíveis vias de solução para os problemas que ainda estão em aberto e que envolvem a *RG*. Principalmente, estas teorias buscam apresentar soluções para os problemas da Matéria e Energia Escura, entre outros.

No presente capítulo, apresentaremos a classe de teorias que chamamos "*RBGs*" [59] (do inglês *Ricci Based Gravities* ou Teorias de Gravidade baseadas no tensor de Ricci.

Consideremos a seguinte ação:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma)) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi_m)\right] \ , \tag{4.1}$$

onde a lagrangiana gravitacional $\mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma))$, é construida a partir da métrica de espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ (onde g indica o seu determinante), e o tensor de Ricci simetrizado $R_{(\mu\nu)}(\Gamma)$, a partir da conexão afim $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, que é independente da métrica.

O fato de não impormos *a priori* nenhuma estrutura definida para a conexão, diferente do caso da *RG*, onde se assume desde o início uma conexão do tipo Levi-Civita, implica que a princípio, em geral, deveremos levar em conta sua parte anti-simétrica, a torsão $S^{\alpha}_{\mu\nu}$. Veremos que as teorias *RBGs* resultam, por construção, independentes da torsão. E, por isto, poderemos deixá-la fora de consideração.

Para vermos isto escrevemos primeiramente a conexão em termos de suas partes simétrica $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ e anti-simétrica $S^{\alpha}_{\mu\nu}$. Assim

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = C^{\alpha}_{\mu\nu} + S^{\alpha}_{\mu\nu} \ . \tag{4.2}$$

Temos também que a lagrangiana de matéria é representada por $\mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi_m)$, onde ψ denota os campos de matéria que acoplam com a geometria apenas através da métrica $g_{\mu\nu}$.

4.1 Equações de campo nas *RBGs*

Para obtermos as equações de campo, consideraremos a variação da ação (4.1), tomando as variações independentes em relação à métrica e à conexão. Temos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left\{\delta\left[\sqrt{-g}\mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma))\right]\right\} + \delta\mathcal{S}_m \\ &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left\{\left[\delta\sqrt{-g}\right]\mathcal{L}_G + \sqrt{-g}\left[\delta\mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma))\right]\right\}\delta\mathcal{S}_m \end{aligned} \tag{4.3}$$

Vamos considerar as seguintes relações:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{4.4}$$

e

$$\delta\mathcal{L}_G\left(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma)\right) = \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial R_{(\mu\nu)}(\Gamma)}\delta R_{(\mu\nu)}(\Gamma) \tag{4.5}$$

substituindo os resultados (4.4) e (4.5) em (4.3), obtemos

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left\{\sqrt{-g}\left[\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2}g_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial R_{(\mu\nu)}(\Gamma)}\delta R_{(\mu\nu)}(\Gamma)\right\} + \delta\mathcal{S}_m \tag{4.6}$$

A variação do Tensor de Ricci é dado por:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\right) + 2S^\lambda_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu} \tag{4.7}$$

vamos considerar também, que $Z^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial R_{\mu\nu}}$. Assim, a Eq. (4.6) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left\{\sqrt{-g}\left[\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2}g_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}\right. \\ &\left. + Z^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\right) + 2S^\lambda_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\right]\right\} + \delta\mathcal{S}_m\ .\end{aligned} \tag{4.8}$$

Agora iremos trabalhar apenas com o segundo termo da integral (4.8), desta forma, temos

$$I_\Gamma = \int d^4x\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right) - \nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\right) + 2S^\lambda_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\right] \tag{4.9}$$

reorganizando os termos e considerando que $K^\lambda \equiv Z^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\beta}$, a Eq. (4.9) se torna

$$\begin{aligned}I_\Gamma &= \int d^4x\left\{\nabla_\lambda\left(K^\lambda\sqrt{-g}\right) - \delta\Gamma^\lambda_{\nu\beta}\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right)\right. \\ &\left. + \sqrt{-g}Z^{\mu\nu}_\alpha\left[-\nabla_\mu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\beta}\right) + 2S^\lambda_{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\beta}\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.10}$$

manipulando a expressão anterior e isolando o termo de fronteira, chegamos a

$$I_\Gamma = \int d^4x\left\{\partial_\mu\left(\sqrt{-g}K^\lambda\right) - \nabla_\lambda\left[\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right) - 2S^\sigma_{\sigma\mu}\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right]\delta\Gamma^\lambda_{\nu\beta}\right\} \tag{4.11}$$

Agora, podemos substituir este resultado na expressão (4.6)

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left\{\sqrt{-g}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2}g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + 2\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}K^\lambda\right)\right. \\ &\left. + 2\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right) + S^\nu_{\sigma\rho}Z^{\sigma\rho} + 2S^\sigma_{\sigma\mu}Z^{\mu\nu}\right]\delta\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\right\} + \delta\mathcal{S}_m\ .\end{aligned} \tag{4.12}$$

Logo, as equações de campo tem a forma

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2}g_{\mu\nu} \tag{4.13}$$

$$\kappa^2 H_\alpha{}^{\nu\beta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right) + S^\nu_{\sigma\rho}Z^{\sigma\rho} + 2S^\sigma_{\sigma\mu}Z^{\mu\nu}\ , \tag{4.14}$$

o tensor Energia-Momento para os campos de matéria é expresso por $T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta g^{\mu\nu}}$. O acoplamento de conexão-matéria é dado pelo tensor ${H_\alpha}^{\nu\beta}$, no entanto, assumiremos que os campos de matéria não esteja acoplado à conexão, portanto teremos ${H_\alpha}^{\nu\beta} = 0$. Assim a Eq. (4.14) se torna

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu}\right) + S^\nu_{\sigma\rho}Z^{\sigma\rho} + 2S^\sigma_{\sigma\mu}Z^{\mu\nu} \ . \tag{4.15}$$

Tomando a expressão (4.2), e considerando que a derivada covariante para um dado tensor qualquer V_ν é dado por

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - C^\alpha_{\mu\nu}V_\alpha - S^\alpha_{\mu\nu}V_\alpha = \nabla^C_\mu V_\nu - S^\alpha_{\mu\nu}V_\alpha \ , \tag{4.16}$$

esta expressão nos permite reescrever a Eq. (4.15) como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^C_\lambda\left(\sqrt{-g}Z^{[\mu\nu]}\right) = S^\lambda_{\mu\alpha}Z^{[\mu\nu]} - S^\beta_{\mu\lambda}Z^{[\mu\nu]} \ . \tag{4.17}$$

Esta relação, é responsável por permitir que possamos trabalhar, tanto para o caso em que matéria esteja acoplada à conexão, quanto para o caso em que não tenha acoplamento entre conexão e matéria.

Associando um tensor de Kronecker δ^μ_α ao tensor $Z^{\beta\nu}$. Desta forma a eq. anterior pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^C_\lambda\left(\sqrt{-g}\delta^\mu_\alpha Z^{[\beta\nu]}\right) = S^\lambda_{\mu\alpha}\delta^\mu_\lambda Z^{[\beta\nu]} - S^\beta_{\mu\lambda}\delta^\mu_\alpha Z^{[\lambda\nu]} \tag{4.18}$$

Agora, trançando para $\mu\alpha$ e, após realizar algumas manipulações, chegamos à

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla^C_\mu\left(\sqrt{-g}Z^{\beta\nu}\right) = S^\nu_{\alpha\lambda}Z^{[\beta\lambda]} - S^\beta_{\alpha\lambda}Z^{[\nu\lambda]} - S^\lambda_{\alpha\lambda}Z^{\beta\nu} + \frac{S^\sigma_{\lambda\sigma}}{3}\left(\delta^\nu_\alpha Z^{\beta\lambda} - \delta^\beta_\alpha Z^{\nu\lambda}\right) \tag{4.19}$$

A partir da equação anterior, podemos propor uma descrição alternativa para a conexão, que será expressa em termos de uma nova variável $\tilde{\Gamma}$. Estamos propondo essa nova conexão pois, buscamos obter o tensor de Ricci simetrizado vai depender Considerando a torsão, a parte simétrica de $\tilde{\Gamma}$ irá se relacionar com Γ, da seguinte forma:

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(\delta^\lambda_\nu S^\sigma_{\sigma\mu} - \delta^\lambda_\mu S^\sigma_{\sigma\nu}\right) \tag{4.20}$$

Onde, definindo que $\tilde{S}^\lambda_{\mu\nu} \equiv \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, tal que:

$$\tilde{C}^\lambda_{\mu\nu} = C^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\left(\delta^\lambda_\nu S^\sigma_{\sigma\mu} - \delta^\lambda_\mu S^\sigma_{\sigma\nu}\right) \tag{4.21}$$

e

$$\tilde{S}^\lambda_{\mu\nu} = S^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\left(\delta^\lambda_\nu S^\sigma_{\sigma\mu} - \delta^\lambda_\mu S^\sigma_{\sigma\nu}\right) \tag{4.22}$$

assumindo as propriedades de simetria da conexão $\tilde{\Gamma}$, na eq. (4.19), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\mu^{\tilde{C}}\left(\sqrt{-g}Z^{\beta\nu}\right) &= \left(\tilde{S}^{\nu}_{\alpha\lambda}g^{\beta\kappa} - \tilde{S}^{\beta}_{\alpha\lambda}g^{\lambda\kappa}\right)g^{\lambda\rho}Z_{\kappa\rho} + \tfrac{2}{3}\delta^{\lambda}_{\lambda}S^{\sigma}_{\sigma\alpha}\left(g^{\beta\nu} - g^{\nu\beta}\right)\left(g^{\kappa\rho} - g^{\rho\kappa}\right)Z_{\kappa\rho} \\ &= \left(\tilde{S}^{\nu}_{\alpha\lambda}g^{\beta\kappa} - \tilde{S}^{\beta}_{\alpha\lambda}g^{\lambda\kappa}\right)g^{\lambda\rho}Z_{\kappa\rho} \qquad (4.23)\end{aligned}$$

Como estamos considerando o tensor de Ricci simétrico, então $Z_{\kappa\rho} = 0$ e, também a torsão $\tilde{S}^{\lambda}_{\mu\nu}$ é nula. Assim, $\nabla_\mu^{\tilde{C}} \to \nabla_\mu^{\Gamma} = \nabla_\mu^{C}$, portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\mu^{\Gamma}\left(\sqrt{-g}Z^{\beta\nu}\right) = 0 \qquad (4.24)$$

que implica na dependência da conexão na derivada.

4.2 Métrica auxiliar e matriz de deformação

Agora, associando um tensor simétrico $q_{\mu\nu}$, tal que

$$\sqrt{-g}\,g^{\beta\lambda}Z^{\nu}_{\lambda} = \sqrt{-q}\,q^{\beta\nu}\ , \qquad (4.25)$$

a relação (4.24) se reduz a uma equação de compatibilidade para $q_{\mu\nu}$, que funcionará como uma métrica auxiliar

$$\nabla_\mu\left(\sqrt{-q}\,q^{\beta\nu}\right) = 0 \qquad (4.26)$$

Portanto, podemos agora escrever as componentes da conexão Γ, como os símbolos de Christoffel em termos do novo tensor $q_{\mu\nu}$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{q^{\lambda\alpha}}{2}\left(\nabla_\mu^{\tilde{C}}q_{\nu\alpha} + \nabla_\nu^{\tilde{C}}q_{\mu\alpha} - \nabla^{\tilde{C}}{}_{a}q_{\mu\nu}\right) \qquad (4.27)$$

Neste ponto, iremos introduzir uma matriz de deformação Ω, esta que será responsável por relacionar a métrica de espaço tempo $g_{\mu\nu}$ com a métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$ algebricamente da seguinte maneira:

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\Omega^{\alpha}_{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad q^{\mu\nu} = \left(\Omega^{-1}\right)^{\mu}_{\ \alpha}g^{\alpha\nu} \qquad (4.28)$$

Vale salientar que, como veremos adiante, $\Omega^{\alpha}{}_{\nu}$ é determinada pelo conteúdo de matéria, através do tensor de energia-momento.

A matriz $\hat{\Omega}$, em conjunto com a relação acima, nos permite reformular a definição da equação da métrica auxiliar dada pela expressão (4.25). Logo, obtemos

$$\sqrt{-q}q^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}\Omega^{\nu}_{\alpha} \qquad (4.29)$$

A partir deste resultado podemos expressar o tensor de Riemann em termos da métrica auxiliar

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}(\Gamma) = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}\left(\tilde{C}\right) + \nabla_\mu^{\tilde{C}}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \nabla_\nu^{\tilde{C}}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} \qquad (4.30)$$

uma vez que conhecemos o tensor de Riemann, contraindo a relação anterior obtemos os tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu}\left(\Gamma\right) = R_{\mu\nu}\left(\tilde{C}\right) + \nabla^{\tilde{C}}_{[\mu}\Gamma_{\nu]} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \tag{4.31}$$

Juntando essas últimas expressões, podemos construir o tensor de Einstein, para obter as equações na forma semelhante às da Relatividade Geral,

$$G^{\mu}{}_{\nu}(q) = \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[T^{\mu}{}_{\nu} - \left(\mathcal{L}_G + \frac{T}{2}\right)\delta^{\nu}_{\mu}\right] \ . \tag{4.32}$$

No próximo capítulo, apresentaremos um método desenvolvido recentemente, que consiste em um procedimento algébrico capaz de realizar um mapeamento entre as teorias *RBGs* e a Relatividade Geral, relacionando as equações de campo e as soluções.

5 Mapeamento *RBGs* para *RG*

Neste Capítulo trataremos de um método de mapeamento, apresentado primeiramente em [69], que é capaz de levar as equações e soluções das Teorias *RBGs* para a *RG*, e vice-versa. Este procedimento é um método algébrico para mapear as equações de campo de teorias métrico-afins de gravidade não lineares (da classe *RBG*), acopladas à matéria descrita por uma determinada lagrangiana, nas equações de campo da *RG* acopladas a uma lagrangiana descrevendo o mesmo tipo de de matéria porém, com uma estrutura (dinâmica) diferente [70].

A grande vantagem disto é que permite fazer uso dos métodos e resultados bem estabelecidos no contexto da *RG*, para resolver sistemas das *RBGs* que, devido ao fato de serem fortemente não lineares, possuem uma dificuldade muito maior [69].

Consideraremos primeiramente o caso geral com matéria escalar e, em seguida, mostraremos que o procedimento pode ser estendido em forma bastante direta para o caso em que a fonte é descrita por um fluido anisotrópico.

5.1 Mapeamento com matéria escalar

Como dito anteriormente iremos apresentar um caso geral do método de mapeamento entre as teorias *RBGs* e a *RG*, onde iremos considerar campos escalares. Apesar deste ser o tipo mais simples de matéria, desempenham, por um lado, um papel importante na cosmologia inflacionária, e em modelos de Energia Escura. Por outro lado, no contexto das *RGBs*, permite a obtenção de soluções caraterizando objetos compactos (escalas astrofísicas), com interessantes propriedades em relação à sua estrutura (sem horizonte de eventos e sem singularidade central, mas com estrutura de buraco de minhoca), que varia em função da teoria específica de gravidade, $\mathcal{L}_G$, considerada.

Assim, vamos considerar uma teoria de gravidade $\mathcal{L}_G$ arbitrária, acoplada a um campo escalar real com ação genérica não canônica $P(X)$, descrita pela seguinte ação:

$$\mathcal{S}_m(X,\phi) = -\frac{1}{2}\int d^4\sqrt{-g}P\left(X,\phi\right) \tag{5.1}$$

onde $X = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi$ e P é uma função escalar arbitrária de seus argumentos. Então, realizando a variação da expressão anterior

$$\delta\mathcal{S}_m(X,\phi) = -\frac{1}{2}\int d^4\left(\delta\sqrt{-g}\right)P\left(X,\phi\right) + \left(\delta P\left(X,\phi\right)\right)\sqrt{-g} \tag{5.2}$$

lembrando que a variação de $\sqrt{-g}$ é dado por

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{5.3}$$

e a variação da função $P(X,\phi)$ é

$$\delta P(X,\phi) = \frac{\partial P}{\partial X}\delta X + \frac{\partial P}{\partial \phi}\delta\phi = P_X \delta X \tag{5.4}$$

onde, estamos considerando $P_X \equiv dP/dX$. Agora, substituindo as expressões (5.3) e (5.4) em (5.2), chagamos a

$$\delta \mathcal{S}_m(X,\phi) = -\frac{1}{2}\int d^4 \left\{\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right] P(X,\phi) + P_X \delta X \sqrt{-g}\right\} \tag{5.5}$$

manipulando a expressão anterior, obtemos

$$\delta \mathcal{S}_m(X,\phi) = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\nu} g_{\alpha\nu}\left\{P_X g^{\alpha\nu}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi - \frac{P(X,\phi)}{2}\right\} \tag{5.6}$$

logo, o tensor energia-momento é dado por:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = P_X g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi - \frac{P(X,\phi)}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}, \tag{5.7}$$

ou ainda, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte maneira

$$T^{\mu}{}_{\nu} = P_X X^{\mu}_{\nu} - \frac{P(X,\phi)}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}. \tag{5.8}$$

considerando que $X^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi$ e, portanto, $X = X^{\alpha}_{\alpha}$ é seu traço.

Note também que podemos realizar uma expansão de $\hat{\Omega}$ em séries de potência do tensor energia-momento

$$\Omega^{\alpha}{}_{\nu} = a_0(X,\phi)\,\delta^{\mu}{}_{\nu} + a_1(X_1,\phi)\,T^{\mu}{}_{\nu} + a_2(X_2,\phi)\,T^{\mu}{}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\nu} + \cdots \tag{5.9}$$

Esta é uma maneira bastante conveniente para expressar o tensor energia-momento, pois podemos expressá-lo como potências de X. Um fato importante em se ter esta relação está ligada aos campos de matéria. Pois, X é responsável por descrever a dinâmica dos campos escalares.

Agora, com o intuito de simplificar a expansão anterior, tomemos a eq. (5.8). Assim, $\Omega^{\alpha}{}_{\nu}$, deve apresentar a forma

$$\Omega^{\alpha}{}_{\nu} = C(X,\phi)\,\delta^{\mu}{}_{\nu} + D(X,\phi)\,X^{\mu}{}_{\nu} \tag{5.10}$$

onde as funções $C(X,\phi)$ e $D(X,\phi)$ são dependentes do modelo de gravidade estudado.

Devido a estrutura que a equação (5.10) apresenta, é permitido mostrar que a dependência que existe do lado direito da equação (4.32) em $g^{\mu\nu}$, pode ser eliminada em favor dos campos de matéria e de $q^{\mu\nu}$. Note então que, pela relação (4.28), temos que:

$$g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi = q^{\mu\beta}\Omega^{\alpha}_{\beta}\partial_\alpha\phi = q^{\mu\beta}\left(C\delta^{a}_{\beta} + DX^{\alpha}_{\beta}\right)\partial_\alpha\phi = (C+DX)\,q^{\mu\beta}\partial_\beta\phi \tag{5.11}$$

Então, podemos escrever

$$X^{\mu}_{\nu} = (C + DX)\, Y^{\mu}_{\nu}, \tag{5.12}$$

e, consequentemente

$$Y = \frac{X}{C + DX} \tag{5.13}$$

lembrando que $Y^{\mu}_{\nu} = q^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\phi\partial_{\nu}\phi$ e $Y \equiv Y^{\mu}_{\mu}$, considerando esta função $Y = Y\,(X, \phi)$ podemos obter uma relação inversa. Desta maneira, os termos dependentes da métrica $g_{\mu\nu}$ do lado direito da equação (4.32) podem ser expressos em termos da métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$. Isso permite uma interpretação de $\tilde{T}_{\mu\nu}$ como um tensor Energia-Momento real dos campos de matéria no espaço-tempo relacionado com $q_{\mu\nu}$. Logo, podemos assumir a existência de um modelo de campo escalar descrito por uma ação:

$$\tilde{\mathcal{S}}_m\,(Y, \phi) = -\frac{1}{2}\int d^4\sqrt{-q}K\,(Y, \phi)\,, \tag{5.14}$$

a variação da expressão anterior obtem-se que o tensor energia momento tem a forma

$$\tilde{T}^{\mu}{}_{\nu} = K_Y Y^{\mu}_{\nu} - \frac{K\,(Y, \phi)}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}. \tag{5.15}$$

onde, temos também um Tensor Energia-Momento associando $\tilde{T}^{\mu}_{\nu} = K_Y Y^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\tilde{K}\,(Y, \phi)$. Assim, para que o mapeamento entre as Teorias *RBGs* acopladas a um campo de matéria escalar e a *RG* acoplada a um outro campo escalar, deve-se solucionar a seguinte equação algébrica

$$\tilde{T}^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[T^{\mu}_{\nu} - \left(\mathcal{L}_G + \frac{T}{2}\right)\delta^{\mu}{}_{\nu}\right]\,, \tag{5.16}$$

Considerando as seguintes relações:

$$\begin{aligned} K_Y Y^{\mu}_{\nu} &= \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} P_X X^{\mu}_{\nu} && (5.17)\\ K\,(Y, \phi) &= \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left(2\mathcal{L}_G + XP_X - P\,(X, \phi)\right) && (5.18)\end{aligned}$$

substituindo as relações (5.17) e (5.18) na eq. (5.16), obtemos

$$\tilde{T}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[P_X X^{\mu}{}_{\nu} - \left(\mathcal{L}_G + \frac{XP_X - P}{2}\right)\delta^{\mu}{}_{\nu}\right]\,, \tag{5.19}$$

Perceba também que, o traço da eq. (5.12) combinado com a eq. (5.17) nos dá

$$K_Y = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} P_X\,(C + DX)\,. \tag{5.20}$$

Finalmente, para estabelecer o mapeamento de maneira adequada entre teorias acopladas à matéria escalar, é necessário se a solução é compatível com as equações de evolução dos campos escalares, que surgem da variação de matéria em relação ao campo escalar e pode ser escrita em duas formas equivalentes, que são:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}P_X g^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\phi\right) - \sqrt{-g}\frac{P_{\phi}}{2} &= 0 && (5.21)\\ \partial_{\mu}\left(\sqrt{-q}K_Z q^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\phi\right) - \sqrt{-q}\frac{K_{\phi}}{2} &= 0 && (5.22)\end{aligned}$$

Agora, considerando o determinante da eq. (4.28) e o traço das eqs. (5.12) e (5.17), encontramos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}P_X g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi &= \sqrt{-q}\left(C+DX\right)K_Y q^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi \\ &= \sqrt{-q}K_Y q^{\mu\alpha}\partial_{\ a}\phi \end{aligned} \tag{5.23}$$

A partir deste resultado, e comparando as eqs. (5.21) e (5.21), chegamos a:

$$K_\phi = \frac{P_\phi}{|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \tag{5.24}$$

onde, $K_\phi \equiv \partial_\phi K\left(Y,\phi\right)$.

A eq. (5.24) em conjunto com as eqs. (5.17) e (5.18) formam o sistema de equações referentes ao mapeamento.

5.2 Mapeamento com fluidos anisotrópicos

Na seção anterior, apresentamos o caso geral do método de mapeamento para *RGBs* acopladas a matéria escalar, e obtivemos equações explícitas, a partir da relação entre os correspondentes tensores de energia-momento.

Independente dos campos de matéria, essa relação pode ser aplicada também ao caso em que a matéria considerada pode ser interpretada como um fluido. Nesse caso, podemos partir diretamente das equações que relacionam $T_{\mu\nu}$ e $\tilde{T}_{\mu\nu}$. No intuito de manter o problema o mais geral possível, consideraremos um fluido anisotrópico, descrito por um tensor energia-momento com a forma[71]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p_\perp)U^\mu U^\nu + p_\perp g^{\mu\nu} + (p_r - p_\perp)\chi^\mu\chi^\nu \ , \tag{5.25}$$

onde $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$ e $g_{\mu\nu}\chi^\mu\chi^\nu = 1$ são vetores unitários temporal e espacial, respectivamente; ρ representa a densidade de energia, e p_r e $p_\perp$ são as pressões radial e transversal (a χ^μ) (um fluido perfeito é o caso particular em que $p_r = p_\perp$). Contraindo a eq. (5.25) com a métrica $g^{\mu\nu}$, obtemos

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p_\perp)U^\mu U_\nu + p_\perp\delta^\mu{}_\nu + (p_r - p_\perp)\chi^\mu\chi_\nu \ , \tag{5.26}$$

e seu traço é dado por:

$$T = \rho - p_r - 2p_\perp \tag{5.27}$$

Nas coordenadas adaptadas ao fluido (comóveis), o tensor energia-momento (5.25) fica diagonal:

$$T^{\mu\nu} = diag(-\rho, p_r, p_\perp, p_\perp). \tag{5.28}$$

Este resultado nos será bastante útil mais adiante.

Para podermos utilizar o método de mapeamento neste caso, precisamos compor a estrutura algébrica compatível com a do fluido anisotrópico em questão. Propomos então o seguinte ansatz para a matriz de deformação da eq. (4.28) que tem a forma

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = \alpha\delta^{\mu}{}_{\nu} + \beta U^{\mu}U_{\nu} + \gamma\chi^{\mu}\chi_{\nu}\ . \tag{5.29}$$

onde os coeficientes α, β e γ são funções de ρ, p_r e $p_\perp$. Substituindo então as eqs. (5.26) e (5.27) no tensor de Einstein expresso pela eq. (4.32), obtemos

$$G^{\mu}{}_{\nu}(q) = \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{-1/2}}\left[(\rho + p_\perp)U^{\mu}U_{\nu} + (p_r - p_\perp)\chi^{\mu}\chi_{\nu} + \left(\frac{\rho - p_r}{2} - \mathcal{L}_G\right)\delta^{\mu}{}_{\nu}\right]\ . \tag{5.30}$$

Neste ponto, iremos considerar um novo fluido, este acoplado a RG, com o objetivo de explorar as possíveis correspondências entre as variáveis em termos da métrica q e as variáveis da métrica g. Para identificá-las, as densidades de energia, e as pressões radiais e tangenciais dadas em termos da métrica q, serão denotadas segundo: ρ^q, p^q_r e $p^q_\perp$. Assim, o tensor energia-momento em termos da métrica q, é expresso na forma

$$\bar{T}^{\mu}{}_{\nu} = (\rho^q + p^q_\perp)V^{\mu}V_{\nu} + p^q_\perp\delta^{\mu}{}_{\nu} + (p^q_r - p^q_\perp)\xi^{\mu}\xi_{\nu}\ , \tag{5.31}$$

Agora, considerando que

$$G^{\mu}_{\nu}(q) = k^2\bar{T}^{\mu}_{\nu}(q) \tag{5.32}$$

substituindo (5.30) e (5.31) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{-1/2}}\left[(\rho + p_\perp)U^{\mu}U_{\nu} + (p_r - p_\perp)\chi^{\mu}\chi_{\nu} + \left(\frac{\rho - p_r}{2} - \mathcal{L}_G\right)\delta^{\mu}{}_{\nu}\right] &= \\ = k^2(\rho^q + p^q_\perp)V^{\mu}V_{\nu} + p^q_\perp\delta^{\mu}{}_{\nu} \quad &+ \quad (p^q_r - p^q_\perp)\xi^{\mu}\xi_{\nu}\ , \end{aligned} \tag{5.33}$$

o que, assumindo as relações $U^{\mu}U_{\nu} = V^{\mu}V_{\nu}$ e $\chi^{\mu}\chi_{\nu} = \xi^{\mu}\xi_{\nu}$, nos leva em

$$p^q_\perp = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\left[\frac{\rho - p_r}{2} - \mathcal{L}_G\right] \tag{5.34}$$

$$\rho^q + p^q_\perp = \frac{\rho + p_\perp}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \tag{5.35}$$

$$p^q_r - p^q_\perp = \frac{p_r - p_\perp}{|\hat{\Omega}|^{1/2}}\ . \tag{5.36}$$

Esse sistema de três equações é responsável por fornecer a correspondência entre os dois conjuntos de escalares expressos por: $\{\rho, p_r, p_\perp\}$ e $\{\rho^q, p^q_r, p^q_\perp\}$. Esta correspondência nos permitirá, uma vez definida a Lagrangiana gravitacional $\mathcal{L}_G$ da RGB que formos estudar, escrever a matriz $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$ da eq. (5.29) em termos das soluções encontradas na RG.

6 Aplicação do Mapa: Gravidade *EiBI* com Eletrodinâmica não linear

Como um exemplo de aplicação de todos resultados que obtemos até agora, iremos implementar o método de mapeamento para o caso da teoria de gravidade *EiBI*, acoplada a campos eletromagnéticos descritos por uma teoria não linear. Veremos como esse sistema extremamente não linear (não linear no setor de gravidade e não linear no setor de matéria) pode ser levado a uma forma muito mais palpável, pondo em evidencia a potência do método de mapeamento.

6.1 Gravidade *EiBI* com fluido anisotrópico

Note que, partindo das relações para o fluido anisotrópico que foram descritas na seção anterior, e utilizando a forma diagonal do tensor de energia momento obtida em (5.28), o determinante de $\hat{\Omega}$ pode ser calculado explicitamente a partir da eq. (3.51), e obtendo-se:

$$\sqrt{|\hat{\Omega}|} = \left[(\lambda - \rho)\,(\lambda - p_r)\,(\lambda - p_\perp)^2\right] \ . \tag{6.1}$$

Por outro lado, multiplicando ambos os lados da eq. (3.51) pela matriz $\hat{\Omega}$ obtemos

$$\sqrt{|\hat{\Omega}|}\delta^\mu{}_\nu = \Omega^\mu{}_\alpha \left[\lambda\delta^\alpha_\nu - \epsilon\kappa^2 T^\alpha_\nu\right] \ . \tag{6.2}$$

Substituindo agora o ansatz (5.29) para a $\Omega^\mu{}_\nu$ e o tensor energia-momento (5.26) na equação anterior, ficamos com

$$\sqrt{|\hat{\Omega}|}\delta^\mu{}_\nu = (\alpha\delta^\mu{}_\alpha + \beta U^\mu U_\alpha + \gamma\chi^\mu\chi_\alpha)\Big[\lambda\delta^\alpha_\nu - \epsilon\kappa^2\left((\rho+p_\perp)U^\alpha U_\nu + p_\perp\delta^\alpha{}_\nu + (p_r - p_\perp)\chi^\alpha\chi_\nu\right)\Big] \ , \tag{6.3}$$

substituindo também o determinante de $\hat{\Omega}$ (6.1) na eq. anterior e, após realizar algumas manipulações algébricas, e introduzindo a notação $\tilde{\rho} \equiv \epsilon\kappa^2\rho$, $\tilde{p}_r \equiv \epsilon\kappa^2 p_r$ e $\tilde{p}_\perp \equiv \epsilon\kappa^2 p_\perp$, chegamos ao seguinte conjunto de equações:

$$\alpha = \frac{(\lambda - \tilde{p}_\perp)\,(\lambda - \tilde{p}_r)^{1/2}}{(\lambda + \tilde{\rho})^{1/2}} \tag{6.4}$$

$$\beta = \frac{(\lambda - \tilde{p}_\perp)\,(\lambda + \tilde{\rho})^{1/2}}{(\lambda - \tilde{p}_r)^{1/2}} \ , \tag{6.5}$$

$$\gamma = (\lambda + \tilde{\rho})^{1/2}\,(\lambda - \tilde{p}_r)^{1/2} \, . \tag{6.6}$$

Lembrando que a lagrangiana para a teoria de gravidade *EiBI* é $\mathcal{L}_{EiBI} = (\sqrt{|\hat{\Omega}|} - \lambda)/\epsilon\kappa^2$, e utilizando o determinante de $\hat{\Omega}$ obtido em (6.1), e aplicado no conjunto de equações

(5.34), (5.35) e (5.36), obtemos

$$\lambda + \tilde{\rho} = \sqrt{\frac{1+\left[\tilde{p}_\perp^q + \frac{(\tilde{\rho}^q+\tilde{p}_r^q)}{2}\right]}{1+\left[\tilde{p}_\perp^q - \frac{(\tilde{\rho}^q+\tilde{p}_r^q)}{2}\right]}}\frac{1}{[1+\frac{(\tilde{p}_r^q-\tilde{\rho}^q)}{2}]} \tag{6.7}$$

$$\lambda - \tilde{p}_r = \sqrt{\frac{1+\left[\tilde{p}_\perp^q - \frac{(\tilde{\rho}^q+\tilde{p}_r^q)}{2}\right]}{1+\left[\tilde{p}_\perp^q + \frac{(\tilde{\rho}^q+\tilde{p}_r^q)}{2}\right]}}\frac{1}{[1+\frac{(\tilde{p}_r^q-\tilde{\rho}^q)}{2}]} \tag{6.8}$$

$$\lambda - \tilde{p}_\perp = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\tilde{p}_\perp^q + \frac{(\tilde{\rho}^q+\tilde{p}_r^q)}{2}\right]}\sqrt{1+\left[\tilde{p}_\perp^q - \frac{(\tilde{\rho}^q+\tilde{p}_r^q)}{2}\right]}} \,, \tag{6.9}$$

onde $\tilde{\rho}^q \equiv \epsilon\kappa^2\rho^q$, $\tilde{p}_r^q \equiv \epsilon\kappa^2 p_r^q$ e $\tilde{p}_\perp^q \equiv \epsilon\kappa^2 p_\perp^q$, são funções do fluido na *RG*. Essas relações são as responsáveis por estabelecerem a correspondência explícita entre as funções do fluido do lado da *RG* (sobrescrito q) e as do lado da Teoria *EiBI*.

6.2 Mapeamento de fluidos eletromagnéticos

Um exemplo interessante a se considerar, onde podemos aplicar os resultados obtidos em forma geral, é o caso das eletrodinâmicas não-linares (*NEDs*, do inglês: *Nonlinear Electrodynamics*), pois os campos eletromagnéticos, mesmo em modelos não lineares, podem ser descritos como fluidos anisotrópicos.

6.2.1 *NEDs* como fluidos anisotrópicos

A lagrangiana de Maxwell se escreve na forma

$$S_{\text{Max}} = \frac{1}{8\pi}\int d^4x\sqrt{-g}F \,, \tag{6.10}$$

ou seja, é linear no invariante $F = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, sendo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor de campo eletromagnético é $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$. Logo, chamamos de eletrodinâmica não linear (*NED*) a um modelo de campos eletromagnéticos descrito por uma ação da forma

$$S_{\text{NED}} = \frac{1}{8\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\,\phi(F) \tag{6.11}$$

onde $\phi(F)$ é uma função arbitrária do invariante F. Assim, a equação de campo para o campo *NEDs* toma a forma

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\,\phi_F F^{\mu\nu}) = 0 \,, \tag{6.12}$$

onde $\phi_F = d\phi/dF$, e o correspondente tensor de energia momento é dado por

$$T^\mu{}_\nu = -\tfrac{1}{4\pi}\left[\phi_F F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\nu - \tfrac{1}{2}\phi(F)\delta^\mu{}_\nu\right] \,. \tag{6.13}$$

Para nosso objetivo de mostrar que as *NEDs* podem ser interpretadas como fluidos, é conveniente estudar um caso concreto. Por simplicidade, consideraremos uma configuração esfericamente simétrica e estática. Logo, o invariante assume a forma $F = -g_{tt}g_{rr}(F^{tr})^2$, e a equação (6.12) se reduz para a componente na direção radial, $\partial_r(\phi_F r^2\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}F^{tr}) = 0$, que pode ser integrada para obtermos$\phi_F r^2\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}F^{tr} = Q$, onde a constante de integração Q está relacionada com a carga elétrica do campo. Em termos do invariante, essa mesma expressão leva a $F\phi_F^2 = Q^2/r^4$, que é uma equação algébrica para $F = F(r)$, que dependerá da função $\phi(F)$ escolhida.

Substituindo esses resultados na expressão (6.13) do tensor energia-momento

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{8\pi}\mathrm{diag}\left(\phi - 2F\phi_F,\, \phi - 2F\phi_F,\, \phi,\, \phi\right) \ , \tag{6.14}$$

e comparando com (5.26), vemos que as *NEDs* podem, de fato, ser interpretadas como fluidos anisotrópicos que satisfazem as relações:

$$\phi - 2F\phi_F \ = \ -\rho\,, \qquad p_r = -\rho\,, \qquad p_\perp = \phi(F) \ . \tag{6.15}$$

A primeira equação implica que o invariante deverá ser uma função da densidade, $F = F(\rho)$. A última relação permite então interpretar também $p_\perp = K(\rho)$, onde a função $K(\rho)$ carateriza o modelo de fluido particular, do mesmo jeito que $\phi(F)$ especifica a *NED*.

Nessa altura é possível visualizar de forma clara um ponto que vale a pena ser destacado. Olhando para o lado esquerdo das Eqs. (6.7) e (6.8) é fácil ver que a condição da *NED* no referencial da *RGB*, $p_r = -\rho$, leva *automaticamente* numa condição análoga, $p_r^q = -\rho^q$, no referencial da *RG*. A consequência disto é que uma *NED* acoplada a uma *RGB* é mapeada naturalmente em um *NED* acoplada a *RG*. Perceba que no meio da grande não linearidade do mapa entre essas teorias, essa propriedade não é nem um pouco obvia.

Assim, as Eqs. (6.7), (6.8) e (6.9) que mapeiam *EiBI* em *RG*, quando particularizadas para o caso do "fluido eletromagnético", se simplificam para a forma

$$\tilde{\rho}_{\rm EiBI} \ = \ \frac{\tilde{\rho}_{\rm RG}}{1 - \tilde{\rho}_{\rm RG}} \tag{6.16}$$

$$\tilde{K}_{\rm EiBI} \ = \ \frac{\tilde{K}_{\rm RG}}{1 + \tilde{K}_{\rm RG}} \ , \tag{6.17}$$

onde $\tilde{K}_{\rm EiBI}(\tilde{\rho}_{\rm EiBI})$ e $\tilde{K}_{\rm GR}(\tilde{\rho}_{\rm GR})$ são as funções que especificam os fluidos/*NEDs* na *EiBI* e na *RG* respectivamente, e tomamos $\lambda = 1$ (soluções assintoticamente planas).

6.2.2 Exemplo: Eletrodinâmica de Maxwell

Até aqui, mostramos que existe um mapa explícito capaz de relacionar *EiBI* com *RG*, no caso de setores de matéria de campos eletromagnéticos governados por dinâmicas gerais (não-lineares ou *NEDs*), utilizando sua interpretação como fluidos anisotrópicos. Como exemplo simples, porém muito ilustrativo, vamos considerar agora a eletrodinâmica de Maxwell acoplada à gravidade *EiBI*.

A lagrangiana de Maxwell é um funcional *linear* no invariante eletromagnético, isto é, $\phi(F) = F$. Portanto, as condições (6.15) obtidas na seção anterior para o "fluido eletromagnético" se reduzem para: $p_r = -\rho = \phi(F) - 2F\phi_F = -F$, logo $F_{\rm Max} = \rho$. Além disso, lembrando que $F\phi_F^2 = Q^2/r^4$, obtemos $F_{\rm Max} = Q^2/r^4$. Por último, $p_\perp = \phi(F) = F$ e $p_\perp = K(\rho)$. Portanto, no caso de *EiBI* acoplado a Maxwell temos $K_{EiBI} = \rho_{EiBI}$.

As equações de mapeamento de fluido (6.16) e (6.17) nos fornecem as funções correspondentes ao fluido no lado da *RG*, que tem a forma

$$\tilde{\rho}_{\rm RG} = \frac{\tilde{\rho}_{\rm EiBI}}{1+\tilde{\rho}_{\rm EiBI}} \tag{6.18}$$

$$\tilde{K}_{\rm RG} = \frac{\tilde{\rho}_{\rm RG}}{1-2\tilde{\rho}_{\rm RG}} \, . \tag{6.19}$$

6.2.2.1 Lagrangiana *NED* em *RG*

Temos obtido o mapa entre as componentes dos fluidos, de Maxwell acoplado a *EiBI*, e um *NED* acoplado à *RG*. Portanto, já estamos em condições de reconstruirmos a lagrangeana da *NED* do lado da *GR*.

Propomos então uma ação para uma *NED* arbitrária, análoga a (6.11), que acopla com $q_{\mu\nu}$

$$S_{\rm NED} = \frac{1}{8\pi}\int d^4x\sqrt{-q}\,\Phi(Z) \tag{6.20}$$

onde o invariante eletromagnético $Z = -\frac{1}{2}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ está associado ao tensor de campo $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ e $B^{\mu\nu} = q^{\mu\alpha}q^{\nu\beta}B_{\alpha\beta}$.

Para configurações eletrostáticas com simetria esférica, o correspondente tensor de energia momento (6.13) será

$$\bar{T}^\mu{}_\nu = \frac{1}{8\pi}{\rm diag}(\Phi - 2Z\Phi_Z, \Phi - 2Z\Phi_Z, \Phi, \Phi) \, , \tag{6.21}$$

e as relações (6.15) nesse caso se escrevem na forma $\tilde{\rho}_{\rm GR} = 2Z\hat{\Phi}_Z - \hat{\Phi}$ e $\tilde{K}_{\rm GR} = \hat{\Phi}$, onde $\hat{\Phi} \equiv (\epsilon\kappa^2/8\pi)\Phi$. Utilizando então (6.19), obtemos uma equação diferencial para $\hat{\Phi}$ da forma

$$Z\frac{d\hat{\Phi}}{dZ} = \frac{\hat{\Phi}+\hat{\Phi}^2}{1+2\hat{\Phi}} \tag{6.22}$$

Cuja solução é a equação quadrática $\hat{\Phi}^2 + \hat{\Phi} - Z/(4Z_0) = 0$, com Z_0 constante de integração. Portanto, a função $\hat{\Phi}(Z)$, isto é, a densidade lagrangena da *NED* acoplada à *RG*, é da forma:

$$\hat{\Phi}(Z) = \tfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\tfrac{Z}{Z_0}}\right) \, , \tag{6.23}$$

onde temos escolhido o ramo com sinal positivo para recuperar a eletrodinâmica de Maxwell ($\Phi \sim Z$) no limite de campos fracos; Isto também fixa a constante de integração, já que $\hat{\Phi} = (\epsilon\kappa^2/8\pi)\,\Phi \sim Z/(4Z_0)$, e então $Z_0^{-1} = (\epsilon\kappa^2/2\pi)$.

O surpreendente dessa expressão (6.23) é que sua forma coincide exatamente com a densidade Lagrangiana da eletrodinâmica de *Born-Infeld* [72],

$$\mathcal{L}_{BI} = 2\beta^2\left(1-\sqrt{1-\tfrac{X}{\beta^2}}\right) \ , \tag{6.24}$$

onde o parâmetro de *Born-Infeld* β foi introduzido originalmente para evitar a divergência do campo elétrico e da auto-energia de uma carga pontual.

De fato, as equações do campo *NED* neste caso, $\nabla_\mu\left(\Phi_Z B^{\mu\nu}\right)=0$ [a], para soluções estáticas esfericamente simétricas ficam $x^2\Phi_Z Z^{1/2}=Q$, com $Z=-q_{tt}q_{rr}(Z^{tr})^2$. Assim, obtemos o invariante de campo[b]

$$Z(x) = \frac{Q^2}{x^4}\frac{1}{\left(1-\frac{\epsilon\kappa^2}{2\pi}\frac{Q^2}{x^4}\right)} \ , \tag{6.25}$$

Para o lado eletrodinâmico de *Born-Infeld* correto, isto é, Para o sinal "correto" ($\epsilon<0$) do parâmetro de *Born-Infeld*, $Z(x)$ produz um campo elétrico limitado no centro, $Z(x=0)=\beta^2=|2\pi/\epsilon\kappa^2|=Z_0$, que é o comportamento esperado para este modelo.

Com isto temos resolvido o mapeamento do setor da matéria. Agora só falta aplicar o mapa no setor gravitacional, ou seja, para às funções da métrica.

6.2.2.2 Matriz deformação.

O conjunto de equações (6.37), (6.38) e (6.30) estabelecem o mapeamento entre as componentes dos tensores energia-momento acoplados às duas teorias de gravidade. Porém, o objetivo final do mapeamento é obter *soluções* gravitacionais de forma explícita.

A aplicação fica particularmente transparente quando a solução da *RG* é conhecida de forma analítica. Assim, o último passo do mapeamento será gerar a solução para as funções métricas no lado da *EiBI* (acoplada à eletrodinâmica de Maxwell), partindo da sua contraparte da *RG* (acoplada à eletrodinâmica de *Born-Infeld* (6.24)).

Invertendo a relação (4.28), obtemos $g_{\mu\nu}=\left(\Omega^{-1}\right)_\mu^{\ \alpha} q_{\alpha\nu}$. Portanto, basta aplicar a inversa da matriz deformação a uma solução de *RG*, para obtermos soluções explicitas da teoria *EiBI*. Para isso, temos que escrevê-la em termos dos campos de matéria. De acordo com (6.14), o tensor energia-momento é da forma

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{8\pi}\mathrm{diag}(-\rho_{\mathrm{EiBI}},-\rho_{\mathrm{EiBI}},K_{\mathrm{EiBI}},K_{\mathrm{EiBI}}) \ . \tag{6.26}$$

Porém, como vimos antes, usando o conjunto de eqs. (6.17), (6.19) e (6.16), é possível mostrar que $K_{\mathrm{EiBI}}=\tilde{\rho}_{\mathrm{EiBI}}$. Assim, a relação Eq. (3.51), $\sqrt{|\hat{\Omega}|}\left(\Omega^{-1}\right)^\mu{}_\nu=\delta^\mu{}_\nu-\epsilon\kappa^2 T^\mu{}_\nu$, nos leva em

$$\hat{\Omega}^{-1} = \mathrm{diag}(\Omega_-^{-1},\Omega_-^{-1},\Omega_+^{-1},\Omega_+^{-1})\,, \quad \text{com} \quad \Omega_\pm \equiv 1\pm\tilde{\rho}_{\mathrm{EiBI}} \tag{6.27}$$

[a] Lembre que para a métrica $q_{\mu\nu}$ se cumpre $\nabla_\lambda q^{\mu\nu}=\nabla_\lambda\sqrt{-q}=0$.

[b] Aqui estamos considerando que x é a coordenada radial da solução esfericamente simétrica.

onde estamos considerando que $\sqrt{|\hat{\Omega}|} = 1 - \tilde{\rho}^2_{\rm EiBI}$

Dado que nos interessa mapear soluções de RG em soluções *EiBI*, precisamos escrever $\Omega^\mu{}_\nu$ em termos da matéria de *RG*. Usando (6.16) obtemos

$$\Omega_+^{-1} = 1 - \tilde{\rho}_{\rm RG} \ , \qquad \Omega_-^{-1} = \frac{1-\tilde{\rho}_{\rm RG}}{1-2\tilde{\rho}_{\rm RG}} \ . \tag{6.28}$$

6.2.2.3 Mapeamento da solução de eletrovácuo (*RG*)

Do lado da *NEDs* acopladas à *RG*, tomaremos as bem conhecidas soluções de eletrovácuo; que são esfericamente simétricas, assintoticamente planas ($\lambda = 1$), e que se aproximam a Maxwell no infinito. A métrica possui a forma (veja Apêndice A e Ref. [73])

$$ds^2_{GR} = -C(x)dt^2 + \frac{dx^2}{C(x)} + x^2 d\Omega^2(\theta,\phi) \ , \tag{6.29}$$

onde

$$C(x) = 1 - \frac{2M(x)}{x} \ , \qquad M(x) = M_0 + \tfrac{\kappa^2}{2}\int_x^\infty (x')^2\, T^t{}_t(x')dx' \tag{6.30}$$

com

$$T^t{}_t = -\rho_{GR} = \frac{1}{2\epsilon\kappa^2}\left[1 - \sqrt{1 - \tfrac{\epsilon\kappa^2 Q^2}{2\pi x^4}}\right] \tag{6.31}$$

Introduzindo uma variável adimensional $y \equiv x/r_c$, com $r_c^4 \equiv -\epsilon\kappa^2 Q^2/2\pi$, para simplificar as expressões obtemos $\tilde{\rho}_{\rm RG} = \frac{y^2 - \sqrt{y^4+1}}{2y^2}$. Substituindo em (6.28), obtemos

$$\Omega_+^{-1}(y) = \frac{y^2+\sqrt{y^4+1}}{2y^2} \ , \qquad \Omega_-^{-1}(y) = \frac{y^2+\sqrt{y^4+1}}{2\sqrt{y^4+1}} \tag{6.32}$$

Logo, escrevendo o elemento de linha da métrica *EiBI*, $g_{\mu\nu}$, na forma genérica

$$ds^2_{\rm EiBI} \ = \ -A(r)dt^2 + B^{-1}(r)dx^2 + r^2(x)d\Omega^2 \ , \tag{6.33}$$

o mapa entre as métricas, $ds^2_{\rm EiBI} = \hat{\Omega}\, ds^2_{GR}$, leva em

$$A(z) \ = \ \Omega_-^{-1}(y)\, C(r_c y) = \tag{6.34}$$

$$B(z) \ = \ \Omega_-(y)\, C(r_c y) \tag{6.35}$$

$$z^2(y) \ = \ \Omega_+^{-1}(y)\, y^2 = \tfrac{1}{2}(y^2 + \sqrt{y^4+1}) \tag{6.36}$$

onde, por praticidade, definimos a função radial adimensional $z(x) \equiv r(x)/r_c$. A relação entre as funções radiais é a chave para escrever tudo coerentemente. Assim, invertendo (6.36) vemos que: $y^2 = \frac{4z^4-1}{4z^4}$. Derivando esta relação, podemos escrever $\frac{dy}{dz} = \Omega_+^{-1/2}/z^6 = \Omega_+^{5/2}/y^6 = \Omega_-/\Omega_+^{1/2}$.

Para completar a correspondência, basta, além da relação entre as coordenadas radiais (6.36), escrever o elemento de linha (6.33) na forma conveniente

$$ds^2_{\text{EiBI}} = -\frac{\bar{C}(y)}{\Omega_-}dt^2 + \frac{dy^2}{\Omega_-\bar{C}(y)} + z^2(y)d\Omega^2 \tag{6.37}$$

onde e a coordenada temporal foi redefinida na forma $(r_c\, t) \to t$, e

$$\bar{C}(y) = \frac{1}{r_c}\left[1 - \frac{2\bar{M}(y)}{y}\right] , \qquad \bar{M}(y) = \frac{1}{r_c}\left[M_0 - \tfrac{1}{2\epsilon}\int_{r_c y}^{\infty} y^2 \tilde{\rho}_{\text{RG}}(y)dy\right] \tag{6.38}$$

com

$$\tilde{\rho}_{\text{RG}}(y) = \frac{y^2 - \sqrt{y^4+1}}{2y^2} \; . \tag{6.39}$$

Integrando esta expressão, especifica-se totalmente o elemento de linha.

Vale a pena, como último detalhe, conferir a escrita da função de massa da solução, em termos das variáveis adequadas, isto é, da densidade do fluido acoplado a *EiBI*. Para isso, é mais simples olharmos a sua derivada (A.8)

$$\bar{M}_x(y) = -\tfrac{r_c}{2\epsilon} y^2 \tilde{\rho}_{\text{GR}}(y) = -\tfrac{r_c}{2\epsilon}\left(y^2 - \sqrt{y^4+1}\right) \; . \tag{6.40}$$

Logo, escrevendo $M_z = M_x \left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)$, temos

$$\bar{M}_z = -\frac{r_c^3}{\epsilon}\frac{\rho_{\text{EiBI}}(y)}{\Omega_+^{1/2} z^4} = -\frac{r_c^3}{\epsilon}\frac{\Omega_+^{3/2}\rho_{\text{EiBI}}(y)}{y^4} \; , \tag{6.41}$$

onde usamos que: $\rho_{\text{EiBI}}(y) = \frac{y^2 - \sqrt{y^4+1}}{y^2+\sqrt{y^4+1}}$.

Isto finalmente resolve o problema.

7 Conclusões

Iniciamos este trabalho apresentado uma discussão acerca do conteúdo presente na composição do Universo, onde podemos destacar: Matéria Bariônica, Matéria e Energia Escuras, sendo que as duas últimas se mostram as mais abundantes no Universo pois, somadas, representam cerca de $\sim 96\%$ da sua composição total. A natureza destes componentes ainda é um mistério, no entanto são de grande importância para explicar certos fenômenos, como por exemplo, a aparente fase atual de expansão acelerada do Universo.

Devido a incógnita que são as componentes escuras, alguns caminhos podem ser considerados, com o objetivo de tentar resolver os problemas presentes que surgem ao incluirmos essas componentes. Podemos destacar o Modelo ΛCDM como o principal candidato incluindo Matéria e Energia Escura, na descrição da cosmologia. Este modelo, que considera a constante cosmológica Λ como o candidato mais acessível a Energia Escura, oferece bons ajustes para as principais observações disponíveis atualmente, além de ajudar a explicar as influências gravitacionais em grandes escalas.

No entanto, a falta de evidencias diretas da existência de partículas de matéria escura, junto com as limitações da constante cosmológica, deram espaço para a consideração de outras possibilidades para solucionar os problemas dessas componentes escuras. Em particular, as chamadas teorias de gravidade modificada. Embora sabendo que a Relatividade Geral é uma teoria muito bem consolidada, as teorias alternativas conservam seus resultados positivos presentes na Relatividade Geral. Dentre as diversas teorias de gravidade disponíveis na literatura, neste trabalho foi considerado o formalismo métrico ou de Palatini, no tratamento de teorias que fazem parte da classe de Teorias *RBGs*, com particular ênfase na teoria *EiBI*.

Este trabalho também apresentou alguns dos principais resultados da Relatividade Geral, como o escalar de Ricci, que tem um papel fundamental dentro das teorias de gravidade $f(R)$. Em seguida foram discutidos os formalismos métrico e de Palatini, onde obtemos equações de campo para as teorias de gravidade $f(R)$. Viu-se que as equação de campo obtida no formalismo métrico é de quarta ordem na métrica o que causa problemas para esta teoria. Já, no formalismo de Palatini, as equações de campo são de segunda ordem. Uma outra questão que se pode levantar está ligado ao tensor energia-momento efetivo encontrado para ambos os casos que, mostra que as equações de campos não são os únicos resultados distintos entre os formalismos. Uma outra teoria de gravidade aqui estuda é a teoria de gravidade *EiBI*. Nessa teoria, como no formalismo de Palatini a conexão é gerada por uma métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$.

Em seguida, foi proposto um caso geral para a classe de teorias *RBGs*. Onde foi demonstrado que as equações de campo possuem uma estrutura semelhante a da Relatividade, porém, em termos de uma métrica auxiliar. E o tensor energia-momento em que a matéria é acoplada à métrica auxiliar, reproduz exatamente a estrutura da equação de Einstein da *RG*.

A partir dos resultados obtidos no caso geral da teorias *RBGs*, foi possível trabalhar o método de mapeamento, responsável por levar as soluções das teorias *RBGs* para a *RG* e vice-versa. Este procedimento só é possível, graças às características presentes nas equações de campo das teorias *RBGs*. Para mostrar o funcionamento deste método, consideramos o caso para um único campo escalar descrito por lagrangianas canônica, para assim obter as equações gerais do mapeamento neste caso. E também, mostramos que este procedimento pode ser estendido ao caso de se considerar que a matéria acoplada seja um fluido anisotrópico.

Ainda dentro do cenário de fluidos, usamos o mapeamento afim de mostrar a correspondência existente entre os espaços de soluções da teoria de gravidade *EiBI* e da *RG* acoplados a fluidos eletromagnéticos como fonte de matéria. Além disso, o mapeamento foi utilizado juntamente com o fato de que, campos elétricos esfericamente simétricos, não lineares, possam ser vistos como um tipo particular de fluido anisotrópico, para construir as soluções de eletrovácuo *EiBI* em termos das soluções correspondentes presentes no cenário da *RG*.

Considerando ainda, como uma aplicação explícita do mapa, pode-se mostrar que quando *EiBI* é acoplado à eletrodinâmica de Maxwell, a teoria da matéria correspondente no lado *RG* é um *NED* específico com uma estrutura de raiz quadrada, que para o ramo negativo do parâmetro *EiBI* coincide exatamente com a da teoria da eletrodinâmica de *Born-Infeld*.

O método descrito neste trabalho permitirá futuramente melhorar as diversas aplicações nos cenário da astrofísica e cosmologia, podendo assim, abrir uma nova porta para abordar problemas no cenário destes campos, que antes eram inacessíveis devido à dificuldade de se resolver explicitamente as equações de campo. A partir disto, as soluções regulares, ondas gravitacionais, assinaturas de objetos compactos sem horizonte, configurações cosmológicas menos simétricas e assim por diante, nas teorias *RBGs*, agora poderão ser abordadas a partir de uma nova perspectiva usando a capacidade total dos métodos analíticos e, também numéricos desenvolvidos presentes no cenário da *RG*.

Referências

1 DRAKOS, N. *The Evolution of Dark Matter Haloes in Mergers*. Tese (Doutorado) — Waterloo U., 2019.

2 BELYAEV, A. Decoding the Nature of Dark Matter at Current and Future Experiments. *Front.in Phys.*, v. 7, p. 90, 2019.

3 VEIGA, C.; OTHERS. Cosmologia: Da Origem ao fim do universo. *Rio de Janeiro: Observatório Nacional*, 2015.

4 ZWICKY, F. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helv. Phys. Acta*, v. 6, p. 110–127, 1933. [Gen. Rel. Grav.41,207(2009)].

5 BRANDÃO, R. R. *Halos de matéria escura e campos escalares*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo.

6 RUBIN, V. C.; FORD W. K., J.; THONNARD, N. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. iv. systematic dynamical properties, sa -> sc. *apjl*, v. 225, p. L107–L111, nov 1978.

7 EINASTO, J. Dark Matter. *Braz. J. Phys.*, v. 43, p. 369–374, 2013.

8 VEIGA, C. H. et al. Módulo 3: A teoria relativística da gravitação e a nova visão do conteúdo do universo. In: *Cosmologia: Da Origem ao fim do Universo*. Rio de Janeiro: Observatório Nacional, 2015.

9 JR, R. dos S. M. Relações distância-redshift e testes de supernovas ia em um modelo cosmológico anisotrópico.

10 RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107154834.

11 DODELSON, S.; 1941-1969)., A. P. L. . *Modern Cosmology*. [S.l.]: Elsevier Science, 2003. ISBN 9780122191411.

12 LóPEZ-CORREDOIRA, M. Problems with the dark matter and dark energy hypotheses, and alternative ideas. In: *Cosmology on Small Scales 2018: Dark Matter Problem and Selected Controversies in Cosmology Prague, Czech Republic, September 26-29, 2018*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 126–138.

13 DRLICA-WAGNER, A. et al. Probing the Fundamental Nature of Dark Matter with the Large Synoptic Survey Telescope. 2019.

14 ALCANIZ, J. S. Dark energy and some alternatives: a brief overview. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 36, n. 4A, p. 1109–1117, 2006.

15 BANERJEE, A.; JASIM, M. K.; PRADHAN, A. Analytical model of dark energy stars. 2019.

16 LI, M. et al. Dark Energy: A Brief Review. *Front. Phys.(Beijing)*, v. 8, p. 828–846, 2013.

17 LOMBRISER, L. On the cosmological constant problem. *Physics Letters B*, v. 797, p. 134804, 2019. ISSN 0370-2693.

18 DURRER, R.; MAARTENS, R. Dark Energy and Modified Gravity. In: *Dark Energy: Observational & Theoretical Approaches, ed. P Ruiz-Lapuente (Cambridge UP, 2010), pp48 - 91*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 48 – 91.

19 PADMANABHAN, T. Dark energy and gravity. *Gen. Rel. Grav.*, v. 40, p. 529–564, 2008.

20 RIBEIRO, A. M. Modelos cosmológicos de energia escura: aspectos teóricos e vínculos observacionais. 2013.

21 ALCÂNTARA, P. M. d. C. et al. Modelo lambda-cdm emergente. Universidade Federal de Roraima, 2018.

22 BULL, P. et al. Beyond ΛCDM: Problems, solutions, and the road ahead. *Phys. Dark Univ.*, v. 12, p. 56–99, 2016.

23 RAO, H.; ZHAO, D. Eddington-inspired Born-Infeld Gravity with Varying Cosmological Constant. 11 2019.

24 MCLEOD, M. A. *Cosmology and the Local Group in ΛCDM and Modified Gravity*. Tese (Doutorado) — U. Coll. London, 10 2018.

25 WILL, C. M. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Rel.*, v. 17, p. 4, 2014.

26 OLIVEIRA, T. B. R. d. F. Um estudo sobre a violação de causalidade em teorias f(r) de gravidade. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015.

27 ASMODELLE, E. *Tests of General Relativity: A Review*. Dissertação (Mestrado) — Central Lancashire U., 2017.

28 DODWELL, G. F. G. F.; DAVIDSON, C. R. Determination of the deflection of light by the sun's gravitational field from observations made at cordillo downs, south australia, during the total eclipse of 1922 september 21. Edinburgh : Neill & Co, 1924. Reprinted from the Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 84, no. 3.

29 ABBOTT, B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.

30 EVERITT, C. W. F. Experimental tests of general relativity: Past, present and future. In: _____. *Physics and Contemporary Needs: Volume 4*. Boston, MA: Springer US, 1980. p. 529–555. ISBN 978-1-4684-7624-8.

31 BAMBI, C. Classical tests of general relativity. In: _____. *Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduate Students of Physics*. Singapore: Springer Singapore, 2018. p. 163–178. ISBN 978-981-13-1090-4.

32 FARAONI, V.; CAPOZZIELLO, S. *Beyond Einstein Gravity : A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Dordrecht: Springer, 2011. v. 170. ISBN 9789400701649, 9789400701656.

33 CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. Extended Theories of Gravity. *Phys. Rept.*, v. 509, p. 167–321, 2011.

34 MILGROM, M. The MOND paradigm. 1 2008.

35 JORDAN, P. Nature 164 637 jordan p 1959. *Z. Phys*, v. 157, p. 112, 1949.

36 ALMEIDA, T. S. et al. Teoria escalar-tensorial: Uma abordagem geométrica. Universidade Federal da Paraíba, 2014.

37 BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical review*, APS, v. 124, n. 3, p. 925, 1961.

38 PEREIRA, S. F. Modelos cosmológicos escalares-tensoriais. 2006.

39 ROSEN, N. A bi-metric theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 4, n. 6, p. 435–447, 1973.

40 COSTA, S. S. da. *Gravidade Modificada e Cosmologia.* Tese (Doutorado) — Observatório Nacional, 2019.

41 NORDSTRöM, G. *On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields.* 2007.

42 KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 27, n. 14, p. 1870001, 2018.

43 KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 37, n. 12, p. 895–906, 1926.

44 SILVA, P. M. L. T. d. Cosmologia de branas e teorias modificadas da gravitação em dimensões arbitrárias. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2017.

45 LUE, A. The phenomenology of dvali-gabadadze-porrati cosmologies. *Phys. Rept.*, v. 423, p. 1–48, 2006.

46 SAHNI, V. Cosmological surprises from braneworld models of dark energy. In: *14th Workshop on General Relativity and Gravitation.* [S.l.: s.n.], 2005. p. 95–115.

47 NUNES, J. V. Q. *Defeitos Topológicos, Energia Escura e Mundo Brana.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.

48 HORAVA, P. Quantum Gravity at a Lifshitz Point. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 084008, 2009.

49 NUNES, J. V. Q. *Modelos Cosmológicos e Buracos Negros no Contexto da Gravitação de Horava-Lifshitz.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2015.

50 SOTIRIOU, T. P.; VISSER, M.; WEINFURTNER, S. Quantum gravity without Lorentz invariance. *JHEP*, v. 10, p. 033, 2009.

51 D'INVERNO, R.; D'INVERNO, L. *Introducing Einstein's Relativity.* [S.l.]: Clarendon Press, 1992. (Comparative Pathobiology - Studies in the Postmodern Theory of Education). ISBN 9780198596868.

52 PEREIRA, F. B. L. d. C. D. Análise termodinâmica de um buraco negro com monopolo global em teorias f(r). Niterói, 2017.

53 SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. f(R) Theories Of Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, v. 82, p. 451–497, 2010.

54 OSTROGRADSKY, M. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersbourg*, v. 6, n. 4, p. 385–517, 1850.

55 BACHEGA, R. R. A. *Investigação da física do setor escuro com ondas gravitacionais*. Tese (Doutorado) — U. Sao Paulo (main), 2019.

56 EINSTEIN, A. Einheitliche feldtheorie yon gravitation und elektrizität. *Sitzungsber. Pruess. Akad. Wiss*, v. 414, 1925.

57 FERRARIS, M.; FRANCAVIGLIA, M.; REINA, C. Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 "palatini's method" discovered by einstein in 1925. *General relativity and gravitation*, Springer, v. 14, n. 3, p. 243–254, 1982.

58 OLMO, G. J. Palatini Approach to Modified Gravity: f(R) Theories and Beyond. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 20, p. 413–462, 2011.

59 AFONSO, V. I. et al. The trivial role of torsion in projective invariant theories of gravity with non-minimally coupled matter fields. *Class. Quant. Grav.*, v. 34, n. 23, p. 235003, 2017.

60 FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. f(R) theories. *Living Rev. Rel.*, v. 13, p. 3, 2010.

61 BANADOS, M.; FERREIRA, P. G. Eddington's theory of gravity and its progeny. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 011101, 2010. [Erratum: Phys.Rev.Lett. 113, 119901 (2014)].

62 JIMENEZ, J. B. et al. Born–Infeld inspired modifications of gravity. *Phys. Rept.*, v. 727, p. 1–129, 2018.

63 ESCAMILLA-RIVERA, C.; BANADOS, M.; FERREIRA, P. G. A tensor instability in the Eddington inspired Born-Infeld Theory of Gravity. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 087302, 2012.

64 NASCIMENTO, J. et al. Nonlinear σ-models in the Eddington-inspired Born-Infeld Gravity. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 6, p. 064043, 2020.

65 PANI, P.; SOTIRIOU, T. P. Surface singularities in Eddington-inspired Born-Infeld gravity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 109, p. 251102, 2012.

66 JIMÉNEZ, J. B.; DELHOM, A. Instabilities in metric-affine theories of gravity with higher order curvature terms. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 6, p. 585, 2020.

67 SOARES, A. R. *ALGUNS ASPECTOS DAS TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVITAÇÃO VIA FORMALISMO DE PALATINI*. 2020.

68 OLMO, G. J. Nonsingular Black Holes in Palatini Extensions of General Relativity. *Springer Proc. Phys.*, v. 176, p. 183–219, 2016.

69 AFONSO, V. I.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Mapping Ricci-based theories of gravity into general relativity. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 2, p. 021503, 2018.

70 AFONSO, V. I. et al. Correspondence between modified gravity and general relativity with scalar fields. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 4, p. 044040, 2019.

71 SANTOS, R. F. d.; JÚNIOR, A. C. A. d. F.; ULHOA, S. C. Hidrodinâmica relativística: a representação de diversos fluidos em relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, 2020.

72 BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, v. 144, n. 852, p. 425–451, 1934.

73 AFONSO, V. I. et al. Mapping nonlinear gravity into General Relativity with nonlinear electrodynamics. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 10, p. 866, 2018.

Apêndices

APÊNDICE A – Solução de eletrovácuo (RG)

Vamos descrever brevemente as conhecidas soluções de eletrovácuo esfericamente simétricas de NEDs acopladas à RG. Neste caso, para soluções assintoticamente planas ($\lambda = 1$), e que se aproximam a Maxwell no infinito, temos

$$ds^2_{GR} = -C(x)dt^2 + \frac{dx^2}{C(x)} + x^2 d\Omega^2 \ , \tag{A.1}$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\phi^2$ é o elemento angular das 2-esferas, e

$$C(x) = 1 - \frac{2M(x)}{x} \tag{A.2}$$

$$M(x) = M_0 + \frac{\kappa^2}{2}\int_x^\infty x^2 T^t{}_t(x)dx \tag{A.3}$$

com M_0 a massa de Schwarzschild, e $T^t_{\ t} = -\rho_{\rm RG}$. Estas expressões fornecem a métrica em forma direta quando um dado modelo é especificado.

Ao aplicarmos a condição de conservação $\nabla^{(g)}_\mu T^{\mu\nu} = 0$, à geometria esfericamente simétrica estática (6.37) do nosso fluido NED, obtemos a equação [a]

$$\frac{d\rho}{dx} + \frac{2[\rho + K(\rho)]}{x} = 0 \ . \tag{A.4}$$

Separando variáveis e realizando uma primeira integração se chega em

$$x^2 = x_0^2 \exp\left[-\int^\rho \frac{d\rho'}{\rho' + K(\rho')}\right] \ , \tag{A.5}$$

onde x_0 é uma constante de integração. Substituindo (6.19) na equação anterior e integrando chegamos na equação quadrática

$$\epsilon\kappa^2\rho^2 - \rho + \tfrac{x_0^4}{x^4} = 0 \ , \tag{A.6}$$

cuja solução, levando em conta o limite assintótico de Maxwell ($\rho\,(x \to \infty) \to Q^2/(8\pi x^4)$), é

$$\rho = \tfrac{1}{2\epsilon\kappa^2}\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{\epsilon\kappa^2 Q^2}{2\pi x^4}}\right) \ . \tag{A.7}$$

onde tomaremos $\epsilon < 0$. Assim, da eq.(6.30), temos que

$$M_x = -\tfrac{x^2}{2\epsilon}\tilde{\rho} = -\tfrac{x^2}{4\epsilon}\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{\epsilon\kappa^2 Q^2}{2\pi x^4}}\right) \ , \tag{A.8}$$

onde $M_x \equiv dM/dx$.

[a] Nos cálculos que seguem, $\rho = \rho_{RG}$.