



**Universidade Federal de Campina Grande**

**Centro de Engenharia Elétrica e Informática**

Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

ÍTALO RODRIGO MONTE SOARES

**ANÁLISE DE ALGORITMOS PARA RECONSTRUÇÃO DE SINAIS  
ESPARSOS NA AMOSTRAGEM COMPRESSIVA**

Campina Grande, Paraíba  
Agosto de 2011

ÍTALO RODRIGO MONTE SOARES

ANÁLISE DE ALGORITMOS PARA RECONSTRUÇÃO DE SINAIS  
ESPARSOS NA AMOSTRAGEM COMPRESSIVA

*Trabalho de Conclusão de Curso submetido à  
Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da  
Universidade Federal de Campina Grande  
como parte dos requisitos necessários para a  
obtenção do grau de Bacharel em Ciências no  
Domínio da Engenharia Elétrica.*

Área de Concentração: Processamento de Sinais

Orientador:

Professor Edmar Candeia Gurjão, Dr. Sc.

Campina Grande, Paraíba  
Agosto de 2011

ÍTALO RODRIGO MONTE SOARES

ANÁLISE DE ALGORITMOS DE RECONSTRUÇÃO DO SINAL  
ESPARSO NA AMOSTRAGEM COMPRESSIVA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento de Sinais

Aprovado em        /        /

**Professor Avaliador**  
Universidade Federal de Campina Grande  
Avaliador

**Professor Edmar Candeia Gurjão, Dr. Sc.**  
Universidade Federal de Campina Grande  
Orientador, UFCG

# *Resumo*

A Amostragem Compressiva é um novo paradigma de aquisição de sinais. Ela busca solucionar uma ineficiência no processo de amostragem baseada no critério de Nyquist seguido da compressão, que captura um grande número de amostras, mas grande parte desses dados são descartados na compressão. A Amostragem Compressiva só pode ser realizada se o sinal for esparso. Os dois pontos básicos nessa nova teoria são como adquirir o sinal, tornando-o esparso antes, e como realizar a recuperação desse sinal. Neste trabalho vamos focar nesse segundo item, a recuperação do sinal esparso. Para isso, analisamos três algoritmos, o *Basis Pursuit*, o *Matching Pursuit* e o *Orthogonal Matching Pursuit*.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 5
1.1	Objetivos . . . . .	p. 5
1.2	Organização . . . . .	p. 5
<b>2</b>	<b>Representação de sinais no espaço vetorial</b>	p. 6
2.1	Espaço vetorial . . . . .	p. 6
2.2	Norma . . . . .	p. 7
2.3	Produto interno . . . . .	p. 8
2.4	Base . . . . .	p. 9
2.5	Representação esparsa . . . . .	p. 9
2.6	Projeção . . . . .	p. 10
2.7	Conjuntos ortonormais . . . . .	p. 10
<b>3</b>	<b>Amostragem Compressiva</b>	p. 11
<b>4</b>	<b>Recuperação do sinal esparso</b>	p. 14
4.1	Basis Pursuit . . . . .	p. 14
4.2	Matching Pursuit . . . . .	p. 15
4.3	Orthogonal Matching Pursuit . . . . .	p. 17
<b>5</b>	<b>Análise dos algoritmos</b>	p. 18
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	p. 23
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 24

# ***1 Introdução***

Seguindo o critério de Nyquist, o número de amostras necessárias para reconstruir sem erro um sinal é ditado pela sua largura de banda. Mesmo com essa limitação, sabe-se que alguns sinais tem uma estrutura, e dessa forma podem ser comprimidos eficientemente sem muita perda perceptível. Antes de obter essa representação compacta, o sinal inicialmente é adquirido (amostrado), calcula-se todos os coeficientes dessa representação, codifica-se os maiores coeficientes e descarta-se os demais. A questão que se levanta é se não seria possível, já na aquisição do sinal, levar em conta esse descarte de coeficientes e obter somente os mais representativos.

Essa pergunta é respondida pela Amostragem Compressiva, *Compressed Sampling* ou *Compressed Sensing* em inglês (ainda não existe consenso sobre o termo, tanto em inglês quanto em português). Essa técnica realiza a amostragem do sinal levando em conta sua redundância, e com isso permite que menos amostras sejam necessárias para representá-lo. Dessa forma, durante a amostragem já se realiza a compressão do sinal

## **1.1 Objetivos**

Estudar os conceitos básicos que envolvem a teoria da Amostragem Compressiva e analisar os algoritmos utilizados na reconstrução de sinais esparsos.

## **1.2 Organização**

No capítulo 2 são apresentados conceitos de álgebra linear e da representação de sinais no espaço vetorial. O capítulo 3 descreve a ideia de Amostragem Compressiva. No capítulo 4 são apresentados três métodos utilizados para a recuperação de sinais esparsos e no capítulo 4 são feitas as análises desses métodos. As conclusões do trabalho são apresentadas no capítulo 6.

## 2 *Representação de sinais no espaço vetorial*

Um sinal é formalmente definido como uma função de uma ou mais variáveis, a qual veicula informações sobre a natureza de um fenômeno físico. Um sistema é definido como uma entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma função, produzindo, assim, novos sinais. [17] O sinal pode ser apresentado de várias formas, como uma função contínua  $f(t)$ , uma sequência discreta de pontos  $f[n]$ , um áudio, uma imagem, etc. Neste trabalho, o sinal será representado por um vetor multidimensional. Considerando o sinal como um vetor em um espaço vetorial apropriado, os sistemas são operadores que mapeiam o sinal de um espaço vetorial para outro.

Esta representação do sinal como vetor permite trabalhar com conceitos intuitivos oriundos da geometria no  $\mathbb{R}^3$ , como comprimento, distância e ângulo, para descrever e comparar sinais. Aplicar ferramentas de análise vetorial e álgebra linear para analisar os sinais facilita a utilização de técnicas para interpolação, aproximação, transformadas e compressão da informação. Nesta seção iremos rever alguns conceitos de espaço vetorial e álgebra linear que são fundamentais para compreender a teoria da Amostragem Compressiva.

### 2.1 Espaço vetorial

Um espaço vetorial é um conjunto  $V$ , não vazio, com duas operações: soma,  $V \times V \rightarrow V$ , e multiplicação por escalar,  $K \times V \rightarrow V$  (sendo  $K$  um corpo de escalares, i.e.  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

Existem vários tipos de espaços vetoriais. Dentre eles, o espaço de Hilbert é o mais utilizado em processamento de sinais e consiste em um espaço vetorial com produto interno, o que trás uma noção de distância e ângulo ao espaço. O espaço de Hilbert obedece também uma relação de completude, uma propriedade que determina a existência de limites no espaço o suficiente para permitir que as técnicas de cálculo sejam utilizadas.

## 2.2 Norma

A noção de comprimento dentro da álgebra linear é dada pela função norma. Ela associa a cada vetor no espaço vetorial um número real não-negativo. A definição formal de norma é dada a seguir.

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $K$ , a norma é uma função  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in V$
- $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in V, \alpha \in K$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  (desigualdade triangular)

### Norma $l_p$

A norma  $l_p$  é um tipo de norma definida por:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} & , p \in [1, \infty); \\ \max_{i=1, \dots, N} |x_i| & , p = \infty \end{cases}$$

Na prática, apenas três normas  $l_p$  são utilizadas, são elas:

- $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$
- $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2}$
- $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |x_i|$

A noção de norma  $l_p$  pode ser estendida para  $p < 1$ . Nesse caso ela passa a ser chamada de quase-norma, pois não obedece a propriedade da desigualdade triangular presente na definição de norma. Fazendo  $p \rightarrow 0$ , temos a quase-norma chamada de  $l_0$ , definida como:  $\|\mathbf{x}\|_0 = \sum_{i=0}^{N-1} I[i]$

considerando a função  $I[k] = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x[k] = 0 \\ 1 & , \text{ se } x[k] \neq 0 \end{cases}$

Em outras palavras, a norma  $l_0$  é o número de elementos não-nulos de  $\mathbf{x}$

Para ilustrar, a Figura 2.1 mostra as normas  $l_p$  de uma circunferência unitária em  $\mathbb{R}^2$

Na análise sinais, a norma é utilizada nas medidas de um sinal ou no tamanho de um erro. A Figura 2.2 mostra a aplicação da norma para calcular o erro. É dado um sinal  $x$  no  $\mathbb{R}^2$  e

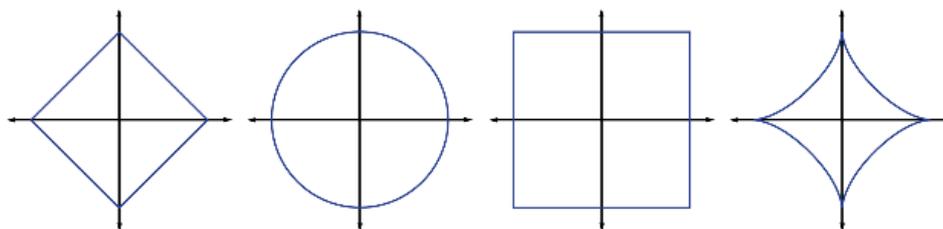


Figura 2.1: Esfera unitária no  $\mathbb{R}^2$  para normas  $l_p$  com  $p = 1, 2$  e  $\infty$  e a quase-norma para  $p = 1/2$ , respectivamente. Fonte: [8].

queremos aproximá-lo usando um ponto em um espaço  $A$  de uma dimensão. Para medirmos o erro de aproximação usando uma norma  $l_p$ , temos que achar um ponto  $\hat{x} \in A$  que tenha a menor norma  $\|x - \hat{x}\|_p$ . A escolha de  $p$  terá um efeito significativo nas propriedades do erro de aproximação resultante. Para  $p = 2$  e  $\infty$  o erro tende a espalhar, tem coeficientes nas duas dimensões. No caso de  $p = 1$  e  $p = 1/2$  o erro fica mais concentrado, tende a ser esparso.

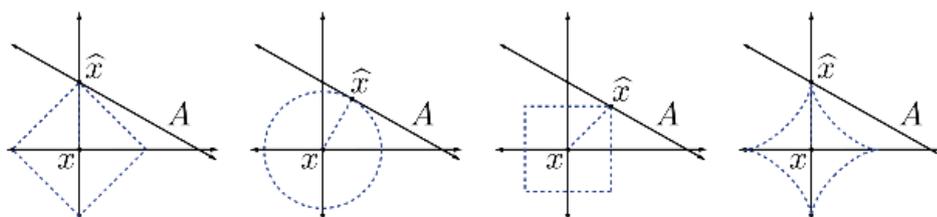


Figura 2.2: Melhor aproximação de um ponto no  $\mathbb{R}^2$  para um subespaço de uma dimensão usando a norma  $l_p$  para  $p = 1, 2$  e  $\infty$  e a quase-norma para  $p = 1/2$ , respectivamente. Fonte: [8].

## 2.3 Produto interno

Considerando  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . O produto interno é um número real que satisfaz:

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
- $\langle \alpha \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- $\langle \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in V$  e  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = 0$

Sendo  $V$  um espaço vetorial em  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \cdots x_N]^T$  e  $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \cdots y_N]^T$ , o produto interno assume a forma:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

## 2.4 Base

Dentro do espaço vetorial  $V$  existe um conjunto finito de vetores  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$  tais que qualquer outro vetor de  $V$  possa ser escrito como uma combinação linear deles. Esse conjunto de vetores é chamado de base vetorial de  $V$ .

Um exemplo de base, chamada de base canônica, para o espaço vetorial  $\mathbb{R}^N$  é:

$$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

A combinação linear que representa um sinal  $\mathbf{x}$  em uma base  $\Phi$  pode ser encontrada pelo produto interno do sinal com os vetores da base. A expressão matemática do sinal  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  representado na base  $\Phi$  é

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1, \dots, N} \alpha_i \phi_i,$$

onde  $\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \phi_i \rangle$ .

### Dicionário

O termo dicionário possui um conceito similar ao de base, porém mais abrangente. A matriz que representa a base de um sinal no  $\mathbb{R}^N$  possui exatamente  $N$  colunas linearmente independentes e cada sinal possui um único conjunto de coeficientes  $\alpha_i$ . Já um dicionário  $\Psi$  pode ser uma matriz  $N \times Z$ , com  $N$  não necessariamente igual a  $Z$ , que também representa um sinal  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  como uma combinação linear dos seus elementos (colunas da matriz  $\Psi$ ). O dicionário pode possuir mais de uma forma de representar o mesmo sinal, neste caso ele é chamado de redundante.

$$x = \alpha\Psi, \alpha \in \mathbb{R}^Z$$

## 2.5 Representação esparsa

A partir de diferentes bases podemos gerar representações diferentes para um sinal. Uma base apropriada pode deixar o sinal mais conciso, ou seja, podemos representá-lo por uma quantidade menor de coeficientes.

A esparsidade é uma medida que indica quantos coeficientes diferentes de zeros existem

em um sinal. Matematicamente, a esparsidade de um vetor  $\mathbf{x}$  é dada por  $K(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_0$ .

A base na qual a representação de um sinal é esparsa é conhecida como base de esparsidade desse sinal.

## 2.6 Projeção

Dado um espaço vetorial linear  $V$ , seja  $\mathbf{y} \in V$  um vetor que fornece uma determinada direção. A projeção de qualquer vetor  $\mathbf{x} \in V$  na direção de  $\mathbf{y}$  é dada na forma:

$$\text{proj}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \cdot \mathbf{y}}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle^{1/2}}$$

Caso o vetor  $\mathbf{y}$  tenha norma unitária,  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle^{1/2} = 1$  e a projeção de  $\mathbf{x}$  na direção  $\mathbf{y}$  é

$$\text{proj}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \cdot \mathbf{y}$$

## 2.7 Conjuntos ortonormais

Em um espaço vetorial com produto interno  $V$ , dois vetores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  são ortogonais se  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ . A ortogonalidade de dois vetores é indicada pelo símbolo  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$

Um conjunto de vetores  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$  é chamado de ortonormal sempre que  $\|\phi_i\|_2 = 1$  para cada  $i$  e  $\phi_i \perp \phi_j$  para todo  $i \neq j$ . Todo conjunto ortonormal é linearmente independente e se for formado por  $N$  vetores do espaço  $\mathbb{R}^N$  é uma base ortonormal desse espaço.

### Ortogonalização de Gram-Schmidt

Todo espaço  $N$ -dimensional finito  $V$  possui uma base ortonormal  $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$ . Para achar esse conjunto de vetores ortonormais existe o processo de orthogonalização de Gram-Schmidt, que é definido por:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} \text{ e } \mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{x}_k \rangle \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{x}_k \rangle \mathbf{u}_i\|} \text{ para } k = 2, \dots, N$$

onde  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  é uma base de  $V$ .

### 3 *Amostragem Compressiva*

A Amostragem Compressiva é um novo paradigma de aquisição de sinais. Ela busca solucionar uma ineficiência no processo de amostragem baseada no critério de Nyquist seguido da compressão. Nesse processo é capturado um grande número de amostras, mas grande parte desses dados são descartados na compressão.

Os processos de aquisição e reconstrução são realizados de formas diferentes na amostragem clássica e na Amostragem Compressiva. Na primeira, a aquisição é feita por amostras do sinal em pontos específicos e a reconstrução é realizada por interpolação. Neste novo método, as medições do sinal são adquiridas pelo produto interno entre o sinal e um conjunto de funções de teste (que podem ser vetores de um dicionário específico), e na reconstrução do sinal é realizado um processo de busca. A seguir vamos descrever os princípios da Amostragem Compressiva.

Como visto no capítulo anterior, um sinal  $\mathbf{x}$  pode ser considerado um vetor em  $\mathbb{R}^N$  e representado em uma base  $\Psi$  formada pelos vetores  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ .

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N s_i \psi_i \text{ ou } \mathbf{x} = \Psi \mathbf{s}$$

sendo  $s_i = \langle \mathbf{x}, \psi_i \rangle$  e  $\mathbf{s}$  a representação do sinal domínio  $\Psi$ .

O sinal é considerado esparsos no domínio  $\Psi$  se o número de coeficientes  $s_i$  diferentes de zero ( $K$ ) for muito menor que o tamanho do sinal,  $K \ll N$ . Se a maioria destes coeficientes for próxima de zero, o sinal é compressível. Na prática é difícil encontrar um sinal esparsos, o mais comum é trabalhar com sinais compressíveis.

Um dos métodos de compressão do sinal é a chamada codificação por transformada. Ele localiza os  $K$  maiores coeficientes da representação esparsa do sinal e descarta os  $(N - K)$  restantes. O que mostra a ineficiência, pois o número de amostras ( $N$ ) é bem maior que as amostras desejadas ( $K$ ). Além disso, a localização dos maiores coeficientes deve ser codificada e colocada em um cabeçalho.

Pode-se melhorar esse processo adquirindo uma representação comprimida do sinal. Em

vez de adquirir  $N$  amostras, são realizadas  $M < N$  medidas lineares, cada uma é o produto interno entre o sinal  $\mathbf{x}$  e um conjunto de vetores  $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ ,  $y_j = \langle \mathbf{x}, \phi_j \rangle$ . Considerando o conjunto de vetores  $\phi_j^T$  como as linhas de uma matrix  $M \times N$  e as medidas  $y_i$  um vetor  $M \times 1$ , temos,

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$$

substituindo  $\mathbf{x}$  por  $\Psi \mathbf{s}$

$$\mathbf{y} = \Phi \Psi \mathbf{s} = \Theta \mathbf{s}$$

Com isso, as informações contidas no sinal  $\mathbf{x}$  estão uniformemente espalhadas nos coeficientes de  $\mathbf{y}$ . A Figura 3.1 ilustra as matrizes e vetores citados acima.

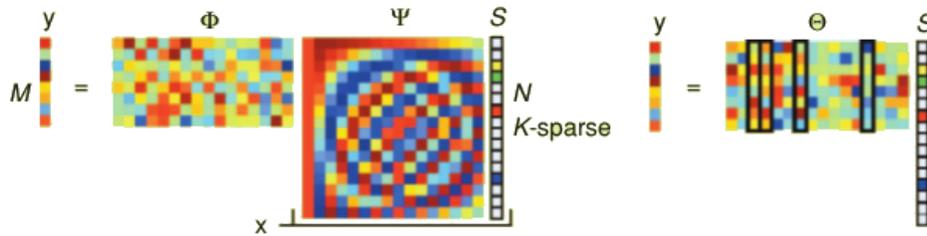


Figura 3.1: Amostragem Compressiva do sinal  $\mathbf{x}$ . Fonte: [7].

Para realizar o processo acima, duas questões são levantadas: Qual matrix  $\Phi$  deve ser utilizada e como recuperar o sinal  $\mathbf{x}$  a partir de  $\mathbf{y}$ .

Um ponto importante é garantir que o sinal não seja concentrado, simultaneamente, em ambos os domínios de esparsidade e medição,  $\Psi$  e  $\Phi$ . Em outras palavras, os dois domínios devem ser altamente descorrelacionados. Uma medida para calcular essa relação entre as bases é a coerência, que é definida como

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \cdot \max_{i,j} |\langle \phi_i, \psi_j \rangle|$$

a incoerência máxima é quando  $\mu(\Phi, \Psi) = 1$ . Matrizes aleatórias possuem grande incoerência com qualquer base fixa  $\Psi$ .

Com essa definição de coerência podemos enunciar o principal teorema da Amostragem Compressiva.

**Teorema:** Seja  $\mu^2(\Phi, \Psi)$  a coerência entre a base de amostragem  $\Phi$  e a base de esparsidade  $\Psi$ ,  $N$  a dimensão do sinal amostrado e  $S$  a sua esparsidade. O número mínimo de amostras para a perfeita reconstrução do sinal é dado por

$$M \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot S \cdot \ln(N).$$

Outro critério para garantir a perfeita reconstrução do sinal é a Propriedade de Isometria Restrita (do inglês *Restricted Isometry Property* - RIP). A definição de RIP é dada a seguir.

Para cada inteiro  $K = 1, 2, \dots, N$  defini-se a constante de isometria restritiva  $\delta_K$  de uma matriz  $\Phi$  como o menor número tal que

$$(1 - \delta_K) \leq \frac{\|\Phi \mathbf{s}\|_{l_2}^2}{\|\mathbf{s}\|_{l_2}^2} \leq (1 + \delta_K)$$

para todo vetor  $K$ -esparso  $\mathbf{s}$ .

A RIP de ordem  $2K$  para dois sinais  $K$ -esparcos,  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  implica em:

$$(1 - \delta_{2K}) \leq \frac{\|\Phi \mathbf{x}_1 - \Phi \mathbf{x}_2\|_{l_2}^2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{l_2}^2} \leq (1 + \delta_{2K})$$

Se  $\delta_{2K}$  for um valor pequeno, a distância entre os sinais será preservada quando eles forem representados na base  $\Phi$ . A Figura 3.2 ilustra essa situação.

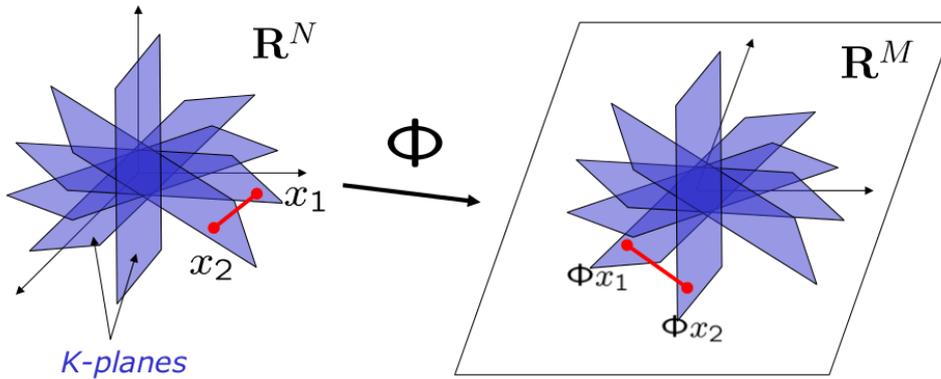


Figura 3.2: Propriedade da Isometria Restrita, garante uma recuperação robusta e eficiente do sinal esparso. Fonte: [10].

A matriz Gaussiana obedece ao critério da RIP e tem uma coerência baixa com qualquer outra matriz. Por isso, utilizamos uma base Gaussiana nos testes realizados nesse trabalho.

A pergunta que resta agora é como recuperar o sinal  $\mathbf{x}$  a partir de  $\mathbf{y}$ . Como  $\mathbf{x}$  está na sua representação esparsa  $\mathbf{s}$  é possível achar uma única solução, apesar do sistema ser indeterminado. Alguns métodos de busca do sinal  $\mathbf{s}$  são descritos no capítulo seguinte.

## 4 *Recuperação do sinal esparso*

Um dos principais pontos na teoria da Amostragem Compressiva é a recuperação do sinal esparso. O desenvolvimento de algoritmos que sejam rápidos, precisos e estáveis na reconstrução do sinal  $\mathbf{x}$  a partir de  $\mathbf{y}$  (sendo  $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x}$ ) é uma das áreas que mais tem sido pesquisada na Amostragem Compressiva.

O projeto dos algoritmos de recuperação esparsa é guiado por vários critérios, dentre eles:

- **Número mínimo de medidas** O algoritmo deve ser capaz de recuperar o sinal a partir do menor número de amostras possível;
- **Robustez ao ruído** O algoritmo deve ser estável com relação a perturbações no sinal de entrada e ruídos adicionados na medição, esses dois tipos de erros surgem naturalmente em sistemas práticos;
- **Velocidade** O algoritmo deve se esforçar para gastar o mínimo de recursos computacionais, tendo em vista que muitas aplicações trabalham com sinais de dimensões muito altas.

Existe um grande número de algoritmos e variações deles presentes na literatura. Os métodos para recuperação podem ser divididos em três categorias: baseados em otimização convexa, algoritmos gulosos e algoritmos combinatoriais. Neste trabalho vamos analisar três algoritmos diferentes, um de otimização convexa, o *Basis Pursuit*, e dois que utilizam a técnica gulosa, o *Matching Pursuit* e o *Orthogonal Matching Pursuit*.

### 4.1 **Basis Pursuit**

Um sinal é mais esparso quando possui um menor número de coeficientes diferentes de zero. Logo, para procurar esse sinal a partir de um dicionário devemos fazer a busca pelo menor norma  $l_0$ , que, como visto em 2.2, dá o número de coeficientes diferentes de zero. Entretanto, a

norma  $l_0$  não é convexa, o que torna a sua minimização um problema NP-completo. Donoho e Candès, [3] e [6], propuseram utilizar no lugar da norma  $l_0$  a norma  $l_1$ , que é convexa, fazendo com que a busca possa ser feita com programação linear. Então, o algoritmo para recuperação do sinal esparso é um que busque a minimização da norma  $l_1$ .

$$f = \sum_{i \in \Gamma} \alpha_i \phi_i, \text{ que minimiza } \|\alpha\|_1 = \sum_{i \in \Gamma} \alpha_i$$

Essa minimização é um problema de otimização convexa e utiliza o método *primal-dual interior-point* descrito em [11].

A substituição da norma  $l_0$  pela  $l_1$  não funciona para todos os casos. Existem algumas restrições relacionadas à matriz de amostragem e à matriz da base de esparsidade. A descrição dessas restrições é encontrada em [6]. Neste trabalho utilizaremos uma matriz de amostragem gaussiana normalizada, que obedece as condições para a utilização da técnica de minimização da norma  $l_1$ .

## 4.2 Matching Pursuit

O *Matching Pursuit* (MP) é um algoritmo guloso iterativo que decompõe o sinal em uma combinação linear de elementos a partir de um dicionário. No caso estudado nesse trabalho, o dicionário é a matriz de amostragem  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ . A estratégia gulosa reduz a complexidade computacional presente no *Basis Pursuit*. O desenvolvimento abaixo e suas provas estão disponíveis em [1].

A ideia principal do MP é representar o sinal  $f$  como uma soma ponderada de elementos do dicionário,  $\phi_\gamma$  (também chamados de átomos). Ele inicia projetando  $f$  no vetor  $\phi_\gamma \in \Phi$  e calculando o resíduo  $Rf$ .

$$f = \langle f, \phi_{\gamma_0} \rangle \phi_{\gamma_0} + Rf$$

como  $Rf$  é ortogonal a  $\phi_{\gamma_0}$  tem-se

$$\|f\|^2 = |\langle f, \phi_{\gamma_0} \rangle|^2 + \|Rf\|^2.$$

Para minimizar o resíduo  $\|Rf\|$  deve-se escolher  $\phi_{\gamma_0}$  que maximize  $|\langle f, \phi_{\gamma_0} \rangle|$ . A busca pelo vetor  $\phi_{\gamma_0}$  mais adequado é feita da seguinte forma:

$$|\langle f, \phi_{\gamma_0} \rangle| \geq \alpha \arg \max_{\gamma} |\langle f, \phi_{\gamma} \rangle|$$

sendo  $\alpha \in (0, 1]$  um fator de otimização.

A perseguição itera repetindo o mesmo procedimento, substituindo  $f$  por  $R^0 f$ . Supondo que o resíduo de ordem  $m$  já tenha sido encontrado, a próxima iteração escolhe um novo elemento  $\phi_{\gamma_m} \in \Phi$  tal que

$$|\langle R^m f, \phi_{\gamma_m} \rangle| \geq \alpha \arg \max_{\gamma} |\langle R^m f, \phi_{\gamma} \rangle|$$

e projeta  $R^m f$  em  $\phi_{\gamma_m}$

$$R^m f = \langle R^m f, \phi_{\gamma_m} \rangle \phi_{\gamma_m} + R^{m+1} f$$

A ortogonalidade de  $R^{m+1} f$  e  $\phi_{\gamma_m}$  implica em

$$\|R^m f\|^2 = |\langle R^m f, \phi_{\gamma_m} \rangle|^2 + \|R^{m+1} f\|^2$$

Somando os resíduos com  $m$  entre 0 e  $M - 1$

$$f = \sum_{m=0}^{M-1} \langle Rf, \phi_{\gamma_m} \rangle \phi_{\gamma_m} + R^M f$$

Um teorema apresentado em [1] prova que  $\|R^m f\|$  converge exponencialmente para zero quando  $m$  tende a infinito. Recuperando o sinal  $f$

$$f = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle Rf, \phi_{\gamma_m} \rangle \phi_{\gamma_m}$$

Na prática é utilizado um número finito de iterações usando como critério de parada um valor de erro  $\varepsilon$ . O Algoritmo 1 apresenta um pseudocódigo para o MP

---

**Algoritmo 1:** Matching Pursuit.

---

**Entrada:** Sinal:  $f$ , dicionário:  $\Phi$ .

**Saída:** Lista de coeficientes:  $\langle R^m f, \phi_{\gamma_m} \rangle$  e  $\phi_{\gamma_m}$

**início**

$R^0 f \leftarrow f$ ;

$m \leftarrow 0$ ;

**repita**

        achar  $\phi_{\gamma_m} \in \Phi$  com o maior produto interno  $\langle R^m, \phi_{\gamma_m} \rangle$

$R^{m+1} f \leftarrow R^m f - \langle R^m f, \phi_{\gamma_m} \rangle \phi_{\gamma_m}$

$m \leftarrow m + 1$

**até**  $\|R^m\| < \varepsilon$ ;

**fim**

---

### 4.3 Orthogonal Matching Pursuit

Uma pequena modificação no algoritmo MP faz com que o número de iterações para recuperar o sinal diminua. Essa nova técnica, conhecida como *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP), foi aplicada na reconstrução de sinais esparsos na Amostragem Compressiva por Tropp, [14].

Essa melhoria no MP ocorre ortogonalizando as direções da projeção, com o processo de Gram-Schmidt. A busca ortogonal faz o processo convergir com o número finito de iterações. O ponto negativo do OMP é o aumento do custo computacional devido o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

O algoritmo seleciona um elemento do dicionário, vetor  $\phi_{\gamma_m}$ , que inicialmente não é ortogonal com os vetores selecionados anteriormente,  $\{\phi_{\gamma_p}\}_{0 \leq p < m}$ . Para projetar os resíduos, um novo conjunto de componente ortogonais é introduzido  $\{u_p\}_{0 \leq p < m}$ .

Iniciando com  $u_0 = \phi_{\gamma_0}$ , o processo de busca seleciona  $\phi_{\gamma_m}$  que satisfaça

$$|\langle R^m f, \phi_{\gamma_m} \rangle| \geq \alpha \arg \max_{\gamma} |\langle R^m f, \phi_{\gamma} \rangle|$$

O algoritmo de Gram-Schmidt ortogonaliza  $\phi_{\gamma_m}$  em relação a  $\{\phi_{\gamma_p}\}_{0 \leq p < m}$  e define

$$u_m = \phi_{\gamma_m} - \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\langle \phi_{\gamma_m}, u_p \rangle}{\|u_p\|^2} u_p$$

O resíduo  $R^m f$  é projetado em  $u_m$  em vez de  $\phi_{\gamma_m}$

$$R^m f = \frac{\langle R^m f, u_m \rangle}{\|u_m\|^2} u_m + R^{m+1} f$$

Somando essa equação de  $0 \leq m < k$

$$f = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\langle R^m f, u_m \rangle}{\|u_m\|^2} u_m + R^k f$$

Provas apresentadas em [1] mostram que a convergência é obtida com um número finito de iterações  $M$  e que  $\langle R^m f, u_m \rangle = \langle R^m f, \phi_{\gamma_m} \rangle$ . Com isso, o sinal recuperado é

$$f = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\langle R^m f, \phi_{\gamma_m} \rangle}{\|u_m\|^2} u_m$$

## 5 *Análise dos algoritmos*

Utilizamos as rotinas para o Matlab disponíveis na biblioteca SparseLab para analisar os algoritmos de recuperação do sinal esparso. Essa biblioteca foi desenvolvida por Donoho e sua equipa da Universidade de Stanford, serve como base para as pesquisas feitas pelos autores e disponibilizada para a comunidade de pesquisadores da área. O SparseLab é bem documentado e de fácil utilização.

Para testar os algoritmos, geramos sinais de esparsidade  $S$  e comprimento  $N = 256$ . O sinal,  $\mathbf{x}$ , é criado escolhendo  $S$  locais aleatórios e colocando valores  $+1$  ou  $-1$  neles. Uma matriz Gaussiana  $\Phi(M \times N)$  é utilizada para realizar a amostragem, gerando o sinal  $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x}$ .

O objetivo era recuperar um sinal  $\hat{x}$  mais próximo possível do sinal original  $\mathbf{x}$  tendo como entrada a matriz de amostragem  $\Phi$  e o sinal  $\mathbf{y}$ .

Foram utilizadas três rotinas para recuperar o sinal, SolveBP.m, SolveMP.m e SolveOMP.m. Elas implementam os algoritmos *Basis Pursuit*, *Matching Pursuit* e *Orthogonal Matching Pursuit*, respectivamente. Podemos determinar a tolerância ao erro  $\|\hat{x} - x\|_2$  como critério de parada para os algoritmos, fixamos esse valor em  $10^{-5}$  para todos os exemplos do trabalho.

Para verificar e comparar o desempenho dos três métodos de recuperação, utilizamos sinais de diferentes esparsidade  $S$  e variamos o número de amostras  $M$  da matriz  $\Phi$ . Para cada conjunto de valores  $(S, M)$  repetimos 100 vezes o procedimento e calculamos a média do erro  $\|\hat{x} - x\|_2$ . As Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 e a Tabela 5.1 mostram os resultados obtidos.

Tabela 5.1: Número de amostragem  $M$  a partir do qual o sinal  $S$ -esparso foi recuperado.

	<i>Basis Pursuit</i>	<i>Matching Pursuit</i>	<i>Orthogonal Matching Pursuit</i>
<b>S</b>	<b>M</b>	<b>M</b>	<b>M</b>
4	49	73	41
12	89	121	89
20	113	145	97
28	129	169	121
36	153	193	137

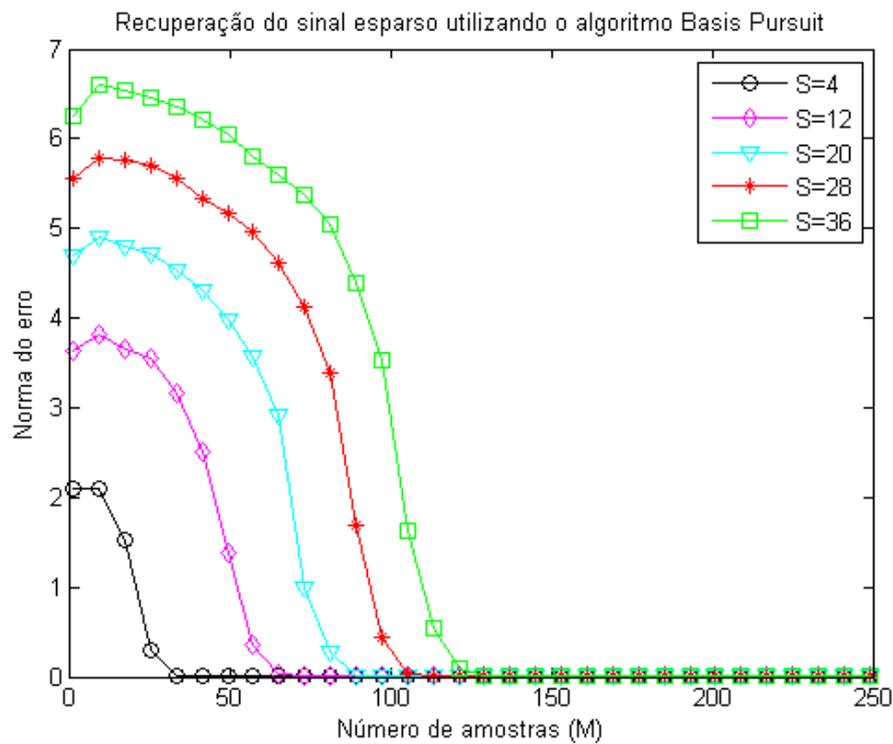


Figura 5.1: Erro na reconstrução do sinal em função do número  $M$  de medições para diferentes níveis de esparsidade  $S$  com o método BP

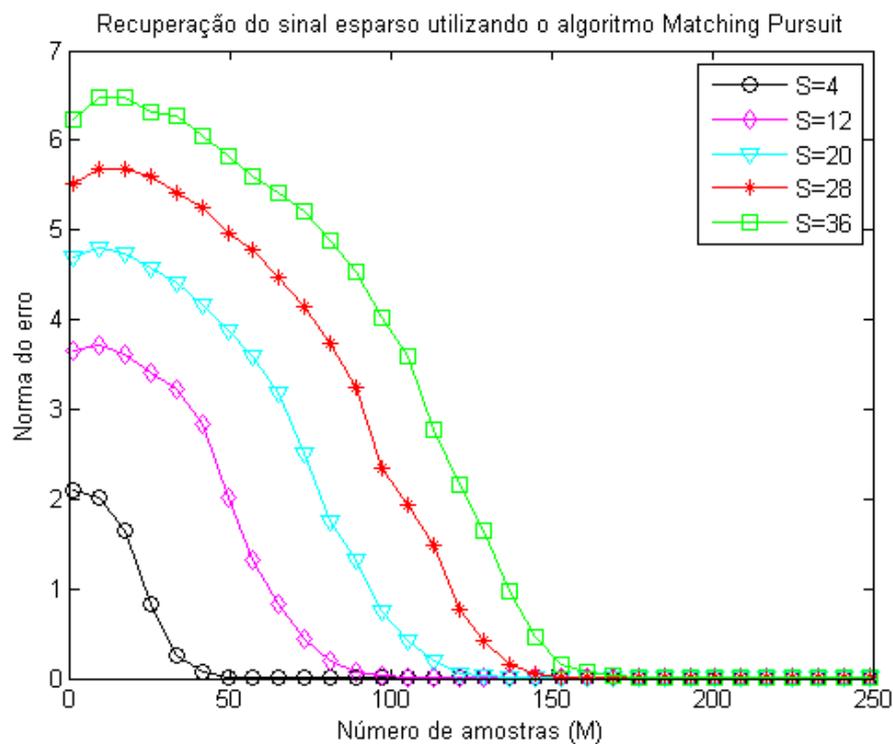


Figura 5.2: Erro na reconstrução do sinal em função do número  $M$  de medições para diferentes níveis de esparsidade  $S$  com o método MP

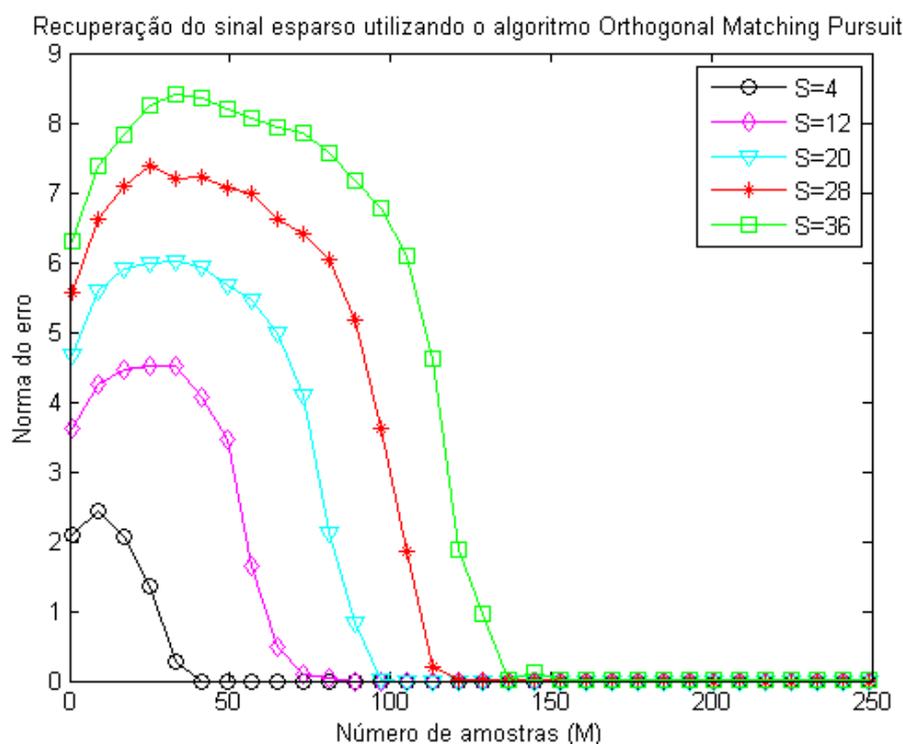


Figura 5.3: Erro na reconstrução do sinal em função do número  $M$  de medições para diferentes níveis de esparsidade  $S$  com o método OMP

Os resultados comprovaram a teoria da Amostragem Compressiva. Mostraram que é possível recuperar um sinal amostrado com uma quantidade de amostras menor que a indicada no teorema de Nyquist, pelo qual só seria necessário uma recuperação do sinal se  $M \geq 128$ . Outra conclusão que podemos tirar dos resultados é a de que quando mais esparso é o sinal, menos amostras são necessárias para recuperá-lo.

Comparando o desempenho dos métodos, constatamos que o *Basis Pursuit* e o *Orthogonal Matching Pursuit* são similares e superiores ao *Matching Pursuit*.

Outro teste comparativo foi realizado. Este mais ilustrativo já que envolve apenas um sinal, ao contrário do anterior que repetia o processo para 100 sinais diferentes em cada situação. A Figura 5.4 mostra a recuperação de um mesmo sinal de tamanho  $N = 256$  e esparsidade  $S = 10$  amostrado por uma matriz  $M \times N$  com  $M = 60$ , utilizando os três métodos. A Figura 5.5 repete o mesmo experimento, modificando apenas o  $M$  para 55.

Com 60 amostras o OMP realizou uma reconstrução perfeita do sinal, com  $\|\hat{x} - x\|_2 = 2,7 \cdot 10^{-16}$ . O MP também conseguiu uma boa aproximação, com  $\|\hat{x} - x\|_2 = 5,7 \cdot 10^{-5}$ . Já o MP apresentou o maior erro,  $\|\hat{x} - x\|_2 = 0,7$ .

Com apenas 5 amostras a menos,  $M = 55$ , o MP e o OMP não conseguem recuperar o sinal.

Já o BP manteve uma aproximação aceitável.

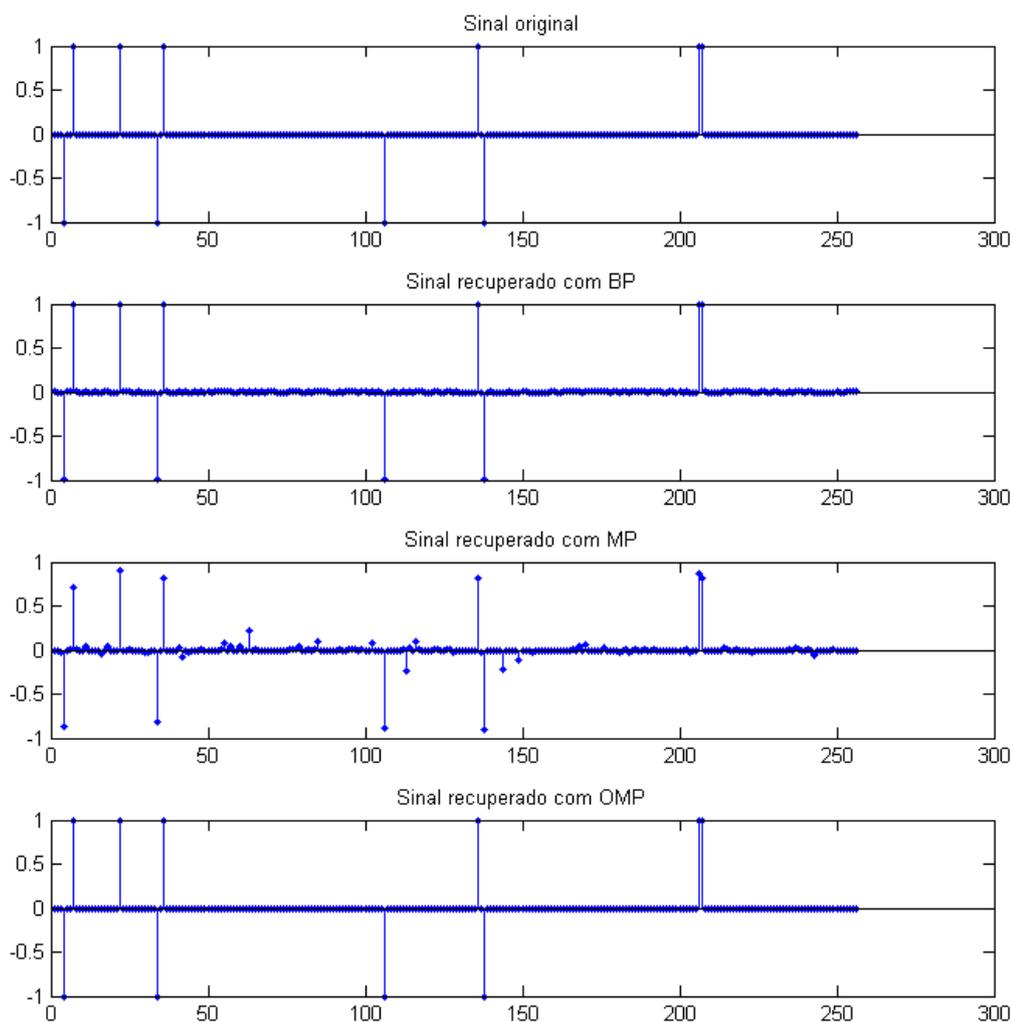


Figura 5.4: Comparação da recuperação do sinal esparsos pelos métodos BP, MP e OMP, com uma amostragem de  $M = 60$ .

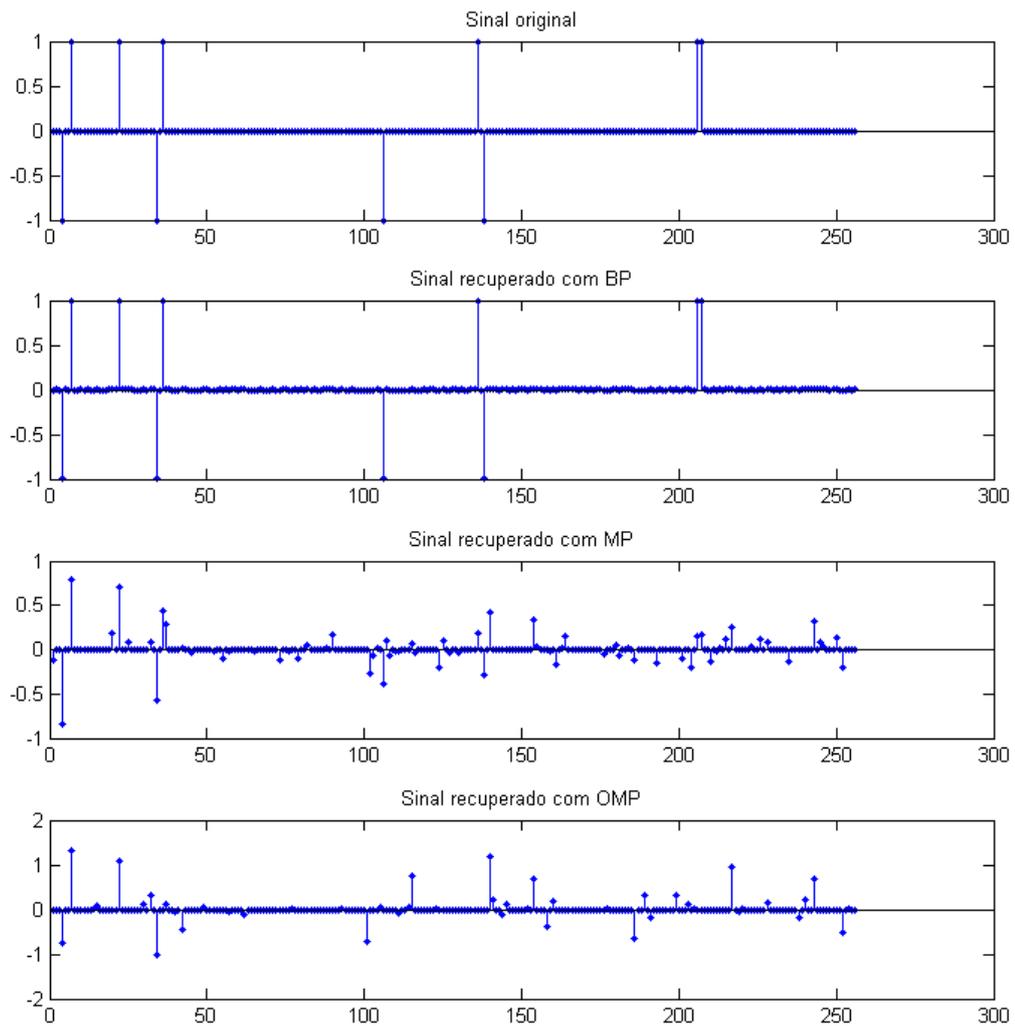


Figura 5.5: Comparação da recuperação do sinal esparso pelos métodos BP, MP e OMP, com uma amostragem de  $M = 55$ .

## 6 *Conclusões*

Neste trabalho foram apresentados os conceitos presentes na Amostragem Compressiva. A revisão de álgebra linear e o conhecimento das técnicas de recuperação do sinal esparso servirão de base para um trabalho mais aprofundado na área.

Em relação aos algoritmos analisados concluímos que o *Basis Pursuit* e o *Orthogonal Matching Pursuit* apresentam resultados parecidos. O *Matching Pursuit* apresentou resultados inferiores, logo, não é recomendado a sua utilização em trabalhos futuros.

## *Referências Bibliográficas*

1. **Mallat, Stéphane.** *A Wavelet Tour of Signal Processing*. s.l. : Academic Press, 1999.
2. **Candès, E. J. and Wakin, M.** An introduction to compressive sampling: A sensing / sampling paradigm that goes against the common knowledge in data acquisition. *IEEE Signal Processing Magazine*. Março 2008, Vol. 25.
3. **Donoho, D. L.** Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*. Abril 2006, pp. 489-509.
4. **Candès, E. J. and Rosemberg, J.** Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*. 2007, Vol. 23.
5. **Candès, E. J., Romberg, J. and Tao, T.** Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2006, Vol. 52.
6. **Baraniuk, R. G.** Compressive Sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*. Julho 2007.
7. **Baraniuk, R., et al., et al.** An Introduction to Compressive Sensing. *Connexions*. [Online] Abril 2011. <http://cnx.org/content/col11133/1.5/>.
8. **Davenport, M.** Digital Signal Processing. *Connexions*. [Online] Julho 2010. <http://cnx.org/content/col11172/1.3/>.
9. **Romberg, J. and Wakin, M.** Compressed Sensing: A Tutorial. *IEEE Statistical Signal Processing Workshop*. Agosto 2007.
10. **Boyd, S. and Vandenberghe, L.** *Convex Optimization*. Cambridge : Cambridge University Press, 2004.
11. **Moon, T. K. and Stirling.** *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*. New Jersey : Prentice Hall, 2000.
12. **Schulz, A., et al., et al.** *Compressive Sensing*. Rio de Janeiro : IMPA, 2010.
13. **Meyer, C. D.** *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia : SIAM.
14. **Tropp, J. A.** Signal Recovery From Random Measurements Via Orthogonal Matching Pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*. Dezembro 2007, Vol. 53.
15. **Tropp, J. A., Gilbert, A. C. and Strauss, M. J.** Algorithms for simultaneous sparse approximation. part ii: Greedy pursuit. *Signal Processing*. Março 2006, Vol. 86.
16. **Medeiros, R. J. V.** *Investigação sobre aplicação de Amostragem Compressiva a Sinais de Áudio*. Campina Grande : s.n., 2010.
17. **Haykin, S. and Veen, B. V.** *Sinais e Sistemas*. São Paulo : Bookman, 2002.