

Sérgio Paulo Melo de Souza

# Elaboração de guias de experimentos utilizando a bancada Servomotor DC

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade  
Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade  
Federal de Campina Grande como parte dos requisitos  
necessários para a obtenção do grau de Bacharel em  
Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Controle Digital

Orientador: João Batista Morais dos Santos

**Campina Grande, Paraíba**  
**Agosto de 2011**

Sérgio Paulo Melo de Souza

# Elaboração de guias de experimentos utilizando a bancada Servomotor DC

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade  
Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade  
Federal de Campina Grande como parte dos requisitos  
necessários para a obtenção do grau de Bacharel em  
Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Controle Digital

Aprovado em:-----/-----/-----

**Professor Avaliador**

Universidade Federal de Campina Grande  
Avaliador

**Professor João Batista Moraes dos Santos**

Universidade Federal de Campina Grande  
Orientador, UFCG

*Dedico este trabalho a minha família que me apoiou e incentivou durante todos estes anos de dedicação.*

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo a elaboração de guias de experimentos para a disciplina Laboratório de Controle Digital. No decorrer do trabalho foi estudado teoria de identificação de sistemas utilizando a técnica dos Mínimos Quadrados e o método de projeto alocação de pólos utilizando o espaço de estados.

Neste trabalho serão abordados os conceitos relacionados ao método dos Mínimos Quadrados para identificação de sistemas e o método Alocação de Pólos utilizando o espaço de estados. Além disso, serão descritos as características relevantes da bancada Servomotor DC de *Feedback Instruments*. Por fim, serão mostrados os resultados deste trabalho que são os guias de experimentos elaborados.

**Palavras-chave:** Controle Digital, Mínimos Quadrados, Alocação de Pólos.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos . . . . .	1
1.2	Organização do Texto . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>3</b>
2.1	Discretização de Sistemas . . . . .	3
2.2	Alocação de Pólos Utilizando o Espaço de Estados . . . . .	4
2.2.1	Realimentação Linear de Estados . . . . .	4
2.2.2	Observadores . . . . .	6
2.2.3	Projeto do Sistema de Controle Completo . . . . .	8
2.2.4	O Problema servo . . . . .	9
2.3	Identificação de Sistemas . . . . .	10
2.3.1	Mínimos Quadrados . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Bancada de Experimentos Servomotor</b>	<b>14</b>
3.1	Unidade Mecânica . . . . .	15
3.2	Unidade Elétrica . . . . .	16
3.3	Sistema de Controle . . . . .	16
3.4	Modelo do Motor DC . . . . .	17
3.5	Controle por computador . . . . .	18
3.6	Projeto de controladores . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>21</b>
4.1	Experimento 1 - Alocação de Pólos Utilizando o Espaço de Estados . . . . .	23
4.2	Experimento 2 - Identificação de Sistemas . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>ANEXOS</b>	<b>26</b>
7.1	Guias de Experimentos . . . . .	26

## Lista de Figuras

1	Diagrama de blocos do controlador obtido combinando a realimentação linear de estados com o observador. . . . .	9
2	Diagrama de blocos introduzindo um sinal de comando no controlador com realimentação linear de estados e um observador. . . . .	10
3	Layout da bancada do módulo servomotor. . . . .	14
4	Unidade Mecânica (UM) do Módulo Servomotor. . . . .	15
5	Unidade Elétrica (UE) do Módulo Servomotor. . . . .	16
6	Sistema de controle da bancada do módulo servomotor. . . . .	17
7	Modelo elétrico-mecânico do motor DC. . . . .	18
8	Diagrama do sistema de controle por computador. . . . .	19
9	Bloco de equipamentos externos. . . . .	20
10	Diagrama de blocos do Simulink do experimento PositionModelIdent. . . . .	21
11	Diagrama de blocos do Simulink do experimento VelocityModelIdent. . . . .	21
12	Gráfico das saídas em posição do sistema real e modelado. . . . .	22
13	Gráfico das saídas em velocidade do sistema real e modelado. . . . .	22
14	Discretização ( $\Phi$ e $\Gamma$ ), ganhos de realimentação linear ( $L$ ) e ganhos do observador ( $K_1$ ). . . . .	23
15	Estrutura de controle proposta. . . . .	23

# 1 Introdução

O estudo dos sistemas de controle é de fundamental importância para os estudantes de Engenharia Elétrica, visto que os conceitos empregados neste estudo abrangem áreas da Engenharia que estão em constante crescimento como robótica e controle de máquinas.

Na automatização dos ciclos de produção, robôs e máquinas estão sendo cada vez mais utilizados para realizar tarefas que o homem antigamente fazia. Nesse contexto, problemas como a precisão e rapidez das tarefas são solucionados por sistemas de controle projetados por engenheiros especialistas em controle. Portanto, o estudo de aplicações práticas desses sistemas se torna importante para estudantes da área. Neste trabalho propõe-se o desenvolvimento de experimentos de modelagem de plantas e projeto de controladores para a disciplina Laboratório de Controle Digital utilizando as bancadas de experimentos do *Feedback Instruments*.

O método de identificação e de projeto de sistemas de controle abordados nesse trabalho são Mínimos Quadrados e Alocação de Pólos, respectivamente. Ambos assuntos são lecionados na disciplina Controle Digital. Com o método dos Mínimos Quadrados é possível obtermos um modelo do processo a partir de dados experimentais. Esse método é bastante útil quando se torna difícil ou mesmo impossível a obtenção de um modelo do processo a partir de princípios físicos. A alocação de pólos visa projetarmos um controlador de modo que o sistema tenha a característica desejada.

## 1.1 Objetivos

- Familiarizar-se com a bancada de experimentos do servomotor de precisão e do levitador magnético, ambos do *Feedback Instruments*.
- Propor experimentos que utilizem a bancada Servomotor de Precisão do *Feedback Instruments* e desenvolver guias destes para a disciplina Laboratório de Controle Digital.

## 1.2 Organização do Texto

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

- Fundamentação teórica: nesta seção são apresentados todos os conceitos necessários para desenvolvimento deste trabalho.

- Bancada de experimentos servomotor: nesta seção é dada uma visão geral sobre os componentes e utilização da bancada de experimentos.
- Resultados: aqui são apresentados os resultados obtidos por meio de simulações e experimentos durante o desenvolvimento deste trabalho como também é feito uma breve descrição sobre os guias de experimentos que foram elaborados.
- Conclusão
- Anexos: nesta seção são apresentados os guias de experimentos elaborados, os quais foram um dos objetivos desse trabalho.

## 2 Fundamentação Teórica

Nesta seção serão discutidos os conceitos de controle digital de sistemas utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Todos os conceitos e equações foram retirados de [1].

### 2.1 Discretização de Sistemas

Assumiremos inicialmente que o processo a ser controlado é descrito pelo modelo

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1b)$$

onde  $u$  representa a variável de controle,  $x$  representa o vetor de estados e  $A$  e  $B$  são matrizes constantes.

Amostrando o sistema descrito por (1), obtemos o sistema discreto

$$x(kh + h) = \phi x(kh) + \Gamma u(kh), \quad (2a)$$

$$y(kh) = Cx(kh) + Du(kh) \quad (2b)$$

onde

$$\phi = e^{Ah}, \quad (3a)$$

$$\Gamma = \int_0^h e^{As} ds \cdot B, \quad (3b)$$

Para simplificar, escrevemos o sistema (2) como

$$x(k + 1) = \phi x(k) + \Gamma u(k), \quad (4a)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (4b)$$

## 2.2 Alocação de Pólos Utilizando o Espaço de Estados

Muitos fatores diferentes devem ser considerados no projeto de sistemas de controle, por exemplo:

- Atenuação das perturbações de carga;
- Redução do efeito do ruído de medição;
- Rastreamento do sinal de controle;
- Variações e incertezas no comportamento do processo.

Os problemas de controle podem ser classificados em problemas de regulação e em problema servo. No primeiro, a principal questão é o compromisso entre a redução das perturbações de carga e as flutuações criadas pelo ruído de medição que é injetado no sistema devido à realimentação. No segundo, a principal questão é o rastreamento do sinal.

A maioria dos métodos de projeto dá foco em alguns dos aspectos mencionados acima e o projetista tem que checar se os outros requisitos também são satisfeitos. Neste trabalho foi estudado um método de projeto baseado em modelos de estado cujo propósito é obter o polinômio característico desejado do sistema em malha fechada. Este método é fácil de ser aplicado em sistemas de ordem baixa, mas pode ser difícil escolher os pólos adequados para sistemas de ordem elevada.

O método de projeto chamado de alocação de pólos do ponto de vista de realimentação de estados é utilizado quando queremos um sistema em malha fechada com os pólos especificados.

### 2.2.1 Realimentação Linear de Estados

Queremos que o sistema em malha fechada tenha o polinômio característico desejado, ou seja, as suas propriedades serão especificadas pelos pólos desse sistema, é natural admitirmos que a realimentação seja linear.

$$u(k) = -Lx(k) \tag{5}$$

Assumimos que o sistema é descrito pelas equações (1) e que o período de amostragem é tal que o processo pode ser descrito pelo sistema discreto dado pelas equações (2). O objetivo é encontrar uma lei de realimentação linear na forma (5), tal que o sistema em malha fechada tenha uma equação característica especificada.

Seja o sistema descrito por (2) e o polinômio característico da matriz  $\phi$  seja

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (6)$$

Se o sistema é alcançável, então podemos transformá-lo para sua forma canônica pela transformação  $z = Tx$ , resultando em

$$z(k+1) = \tilde{\phi}z(k) + \tilde{\Gamma}u(k) \quad (7)$$

onde

$$\tilde{\phi} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8b)$$

Os coeficientes do polinômio característico que determinam os pólos de malha fechada aparecem explicitamente nessa representação. De (5) podemos tirar a lei de realimentação

$$u = -\tilde{L}x = - \begin{bmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 & \dots & p_n - a_n \end{bmatrix} \cdot z \quad (9)$$

que gerará um sistema em malha fechada com o polinômio característico

$$P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n \quad (10)$$

Podemos encontrar a solução do problema original transformando para as coordenadas

originais.

$$u = -\tilde{L}z = -\tilde{L}Tx = -Lx \quad (11)$$

Resta determinar a matriz de transformação  $T$ . Uma forma simples de determinar esta matriz é baseada na propriedade das matrizes de alcançabilidade. Seja  $W_c$  a matriz de alcançabilidade dada por

$$W_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \phi\Gamma & \dots & \phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

e seja  $\tilde{W}_c$  a matriz de alcançabilidade de (7). As matrizes são relacionadas por  $\tilde{W}_c = TW_c$ . Logo,

$$T = \tilde{W}_c \cdot W_c^{-1} \quad (13)$$

Portanto, o cálculo da matriz de realimentação linear  $L$  é dado por

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 & \dots & p_n - a_n \end{pmatrix} \cdot \tilde{W}_c \cdot W_c^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot W_c^{-1} \cdot P(\phi) \end{aligned} \quad (14)$$

A equação (14) é conhecida como fórmula de *Ackermann*.

### 2.2.2 Observadores

Nem sempre é possível medir todos os estados de um sistema. Portanto, é interessante determinarmos os estados de um sistema a partir das medidas disponíveis e de um modelo. Assumindo que o sistema é descrito por (4), o problema consiste então em calcular ou reconstruir o estado  $x(k)$  das sequências de entradas e saídas  $y(k), y(k-1), \dots, u(k), u(k-1), \dots$ . Isto é possível se o sistema é observável.

#### ***Reconstruindo usando a dinâmica do sistema***

Este método de reconstrução tem a vantagem de ser pouco sensível ao ruído. Considerando o sistema em (4) e assumindo que o estado  $x$  deve ser aproximado pelo estado  $\hat{x}$  do modelo

$$\hat{x}(k+1) = \phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (15)$$

que tem a mesma entrada do sistema (4).

Podemos dizer que este modelo é perfeito no sentido de que os elementos das matrizes  $\phi$  e  $\Gamma$  são idênticos àqueles do sistema (4) e se as condições iniciais são as mesmas, então o estado  $\hat{x}$  do modelo (15) será igual ao estado  $x$  do sistema real em (4). Se as condições forem diferentes, então  $\hat{x}$  convergirá para  $x$  apenas se o sistema tiver estabilidade assintótica.

A reconstrução pode ser melhorada usando também as saídas medidas. Isto pode ser feito introduzindo uma realimentação da diferença entre as saídas medidas e estimadas,  $y - C\hat{x}$ .

Portanto,

$$\hat{x}(k+1|k) = \phi\hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)) \quad (16)$$

onde  $K$  é uma matriz de ganho. A notação  $\hat{x}(k+1|k)$  significa a estimativa  $x(k+1)$  baseada nas medições disponíveis até o tempo  $k$ . Note que o termo  $K(y(k) - C\hat{x}(k|k-1))$  não gera contribuição se a saída estimada é igual a medida. Para calcular a matriz  $K$ , introduzimos o erro de reconstrução:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (17)$$

Subtraindo (16) de (4a), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1|k) &= \phi\tilde{x}(k|k-1) + K(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)) \\ &= (\phi - KC) \cdot \tilde{x}(k|k-1) \end{aligned} \quad (18)$$

Portanto, se  $K$  for escolhido tal que o sistema (18) seja assintoticamente estável, o erro  $\tilde{x}$  irá sempre convergir para zero.

O sistema em (16) é chamado observador do sistema (4) porque ele produz o estado do sistema a partir de medições das entradas e saídas. Agora o problema consiste em encontrar uma matriz  $K$  tal que  $\phi - KC$  tenha os autovalores prescritos.

**Teorema 1** (*Dinâmica do observador*) *Considere um sistema discreto dado por (4). Seja  $P(z)$  um polinômio de grau  $n$ , onde  $n$  é a ordem do sistema. Assumindo que o sistema é completamente observável, então existe uma matriz  $K$  tal que a matriz  $\phi - KC$  do observador (16) tem o polinômio característico  $P(z)$ .*

A determinação da matriz  $K$  no observador (16) é feita de forma análoga a determinação da matriz  $L$  na realimentação de estados. O cálculo da matriz  $K$  dado por:

$$K = P(\phi) \cdot W_o^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (19)$$

onde  $W_o = \begin{pmatrix} C & C\phi & \dots & C\phi^{n-1} \end{pmatrix}^T$

### 2.2.3 Projeto do Sistema de Controle Completo

Na seção 2.2.1 consideramos que todas as variáveis de estados são conhecidas ou medidas diretamente para calcularmos a matriz de ganho de realimentação linear  $L$ . Na seção 2.2.2 resolvemos o problema de calcular os estados a partir das saídas do sistema. Agora iremos combinar essas duas soluções para obtermos a solução desejada para o problema de alocação de pólos. Seja o sistema descrito por:

$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k), \quad (20a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (20b)$$

Uma lei de realimentação linear que relaciona  $u$  para  $y$  tal que o sistema em malha fechada tenha os pólos desejados, assumindo que todas as variáveis de estado são medidas, é dado pela equação (5). Porém, considerando que nem todos os estados possam ser medidos, a lei de realimentação linear muda para:

$$u(k) = -L\hat{x}(k|k-1) \quad (21)$$

onde  $\hat{x}$  é obtido do observador dado pela equação (16).

O sistema em malha fechada tem as propriedades desejadas. Para mostrar isso, introduzimos

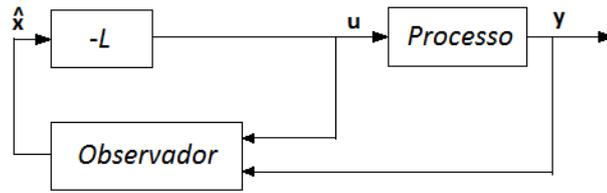
$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (22)$$

Das equações (20) e (21), temos que o sistema é descrito por:

$$x(k+1) = (\phi - \Gamma L) \cdot x(k) + \Gamma L \cdot \tilde{x}(k|k-1) \quad (23)$$

$$\tilde{x}(k+1|k) = (\phi - KC) \cdot \tilde{x}(k|k-1) \quad (24)$$

Podemos ver que o sistema tem ordem  $2n$  e os autovalores do sistema em malha fechada são os autovalores das matrizes  $\phi - \Gamma L$  e  $\phi - KC$ .



**Figura 1:** Diagrama de blocos do controlador obtido combinando a realimentação linear de estados com o observador.

O controlador pode ser visto como uma caixa preta que gera o sinal de controle a partir da saída do processo. O controlador descrito por (16) e (21) pode ser representado por uma função de transferência ao pulso da saída medida  $y$  para o sinal de controle  $u$ :

$$H_c(z) = -L \cdot (zI - \phi + \Gamma L + KC)^{-1} \cdot K \quad (25)$$

#### 2.2.4 O Problema servo

O problema servo tem por objetivo fazer os estados e as saídas do sistema responderem de uma maneira especificada a sinais de comando. Uma forma simples de obtermos a resposta desejada a sinais de comando é substituir a realimentação de estados (21) por

$$u(k) = -L\hat{x}(k) + L_c u_c(k) \quad (26)$$

onde  $u_c$  é o sinal de comando.

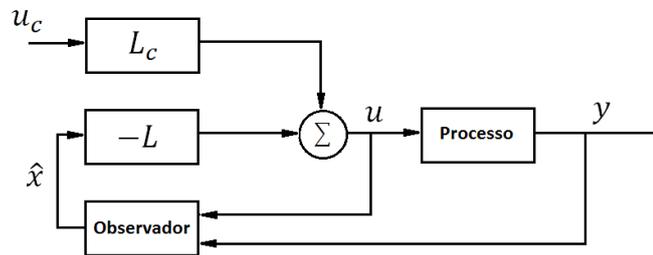
Agora sistema em malha fechada pode ser descrito por

$$x(k+1) = (\phi - \Gamma L)x(k) + \Gamma L\tilde{x}(k) + \Gamma L_c u_c(k) \quad (27a)$$

$$\tilde{x}(k+1) = (\phi - \Gamma L)\tilde{x}(k) \quad (27b)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (27c)$$

onde  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ .



**Figura 2:** Diagrama de blocos introduzindo um sinal de comando no controlador com realimentação linear de estados e um observador.

A função de transferência ao pulso do sinal de comando para a saída do processo pode ser encontrada a partir das equações em (27), que dá

$$H_{cl}(z) = C \cdot (zI - \phi - \Gamma L)^{-1} \cdot \Gamma L_c = L_c \cdot \frac{B(z)}{A_m(z)} \quad (28)$$

O sistema em malha fechada obtido com a lei de controle dada em (26) tem os mesmos zeros do processo e os pólos são os autovalores da matriz  $\phi + \Gamma L$ .

## 2.3 Identificação de Sistemas

Algumas vezes os processos podem ser obtidos a partir de princípios físicos. Porém, se torna muito difícil obtermos modelos de distúrbios, que são igualmente importantes, dessa forma. Estes modelos geralmente são obtidos de experimentos.

Em princípio, existem duas formas diferentes para os quais os modelos podem ser obtidos: a partir de conhecimento prévio (por exemplo, através de leis físicas) ou por experimentações do processo.

Em muitos casos não é possível fazer um modelo completo apenas com conhecimentos específicos. Alguns parâmetros devem ser determinados através de experimentos. Esta abordagem é chamada de identificação de sistemas. Existem muitos métodos para a análise de informações obtidas de experimentos. Um método simples, porém muito útil, é o método dos Mínimos Quadrados.

### 2.3.1 Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados é tal que os parâmetros desconhecidos devem ser escolhidos de tal forma que:

“a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os calculados multiplicados por números que medem o grau de precisão seja mínimo.”

Para serem capazes de dar uma solução analítica, os valores calculados devem ser funções lineares dos parâmetros desconhecidos.

No método dos mínimos quadrados a variável  $y$  é dada por:

$$\hat{y} = \theta_1 \cdot \varphi_1 + \theta_2 \cdot \varphi_2 + \dots + \theta_n \cdot \varphi_n \quad (29)$$

onde  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  são funções conhecidas e  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  são os parâmetros desconhecidos.

Pares de observações  $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$  são obtidos de experimentos. O problema consiste em determinar os parâmetros de tal forma que as variáveis  $\hat{y}$  calculadas a partir do modelo de (29) e os valores experimentais  $x_i$  sejam tão próximos quanto possíveis das variáveis medidas  $y_i$ .

Assumindo que todas as medições tem a mesma precisão, o método dos mínimos quadrados nos diz que os parâmetros devem ser escolhidos de tal forma que o erro seja pequeno, de acordo com uma função de custo (ou critério de desempenho). Definindo a função de custo mínimos quadrados:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \varepsilon^2 \quad (30)$$

onde

$$\varepsilon = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \phi(t) \cdot \theta$$

Para simplificar os cálculos, os seguintes vetores são definidos:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_N \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_N \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_N \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_N \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \dots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} \quad (35)$$

Assim, a função de custo pode ser reescrita como:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^T \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \|\varepsilon\|^2 \quad (36)$$

onde  $\varepsilon = y - \hat{y}$  e  $\hat{y} = \phi \cdot \theta$ .

Podemos encontrar o valor mínimo derivando a equação (36) e igualando a zero. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\theta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d\|\varepsilon\|^2}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \phi^T \cdot [y - \phi \cdot \theta] = 0 \\ \phi^T \cdot y &= \phi^T \cdot \phi \cdot \theta \end{aligned}$$

Portanto, os parâmetros  $\theta$  são dados por:

$$\theta = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi^T \cdot y \quad (37)$$

Podemos definir então:

$$R_{n \times n} = \sum_{t=1}^N \phi^T(t) \cdot \phi(t) \quad (38)$$

$$f_{n \times 1} = \sum_{t=1}^N \phi^T(t) \cdot y(t) \quad (39)$$

Assim, a estimativa pode ser calculada como:

$$\theta = R^{-1} \cdot f \quad (40)$$

onde assume-se que a inversa existe.

A solução dada pela equação (40) pode ser escrita de forma compacta. Note que a solução pode ser agrupada da seguinte maneira:

$$\theta = (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y \quad (41)$$

onde

$$\Phi = \left[ \begin{array}{cccc} \phi(1) & \phi(2) & \dots & \phi(N) \end{array} \right]^T \quad (42)$$

$$Y = \left[ \begin{array}{cccc} y(1) & y(2) & \dots & y(N) \end{array} \right]^T \quad (43)$$

### 3 Bancada de Experimentos Servomotor

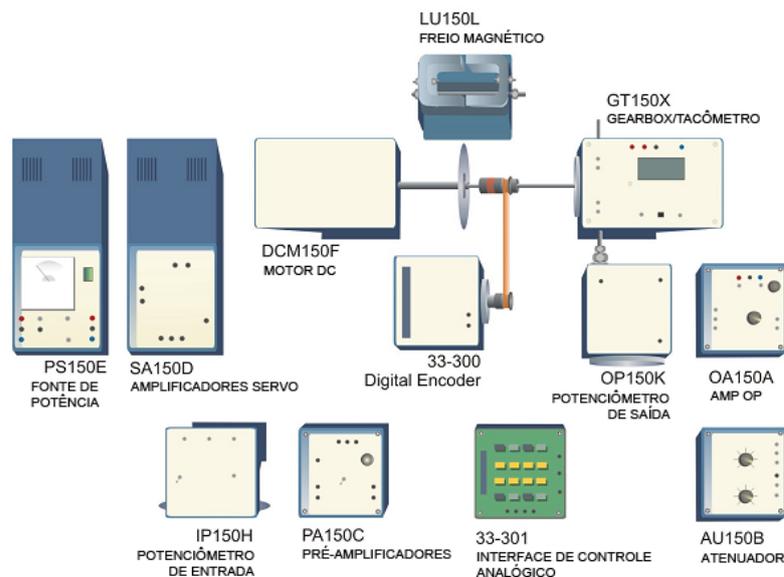
Nesta seção serão descritos as características relevantes da bancada do Servomotor DC do *Feedback Instruments* obtidas a partir dos manuais do fabricante [2,3,4].

A bancada do Módulo Servomotor serve como um modelo de um dispositivo muito popular, o Servomotor DC. A palavra servo vem do latim *servus* que significa escravo. O Servomotor destina-se a reagir a um determinado comando, por exemplo, uma posição ou velocidade desejada. Para que o dispositivo possa ser chamado de servomotor é necessário que ele seja equipado com uma unidade de medição de velocidade e posição e um acionamento.

As principais características que distinguem os servomotores dos demais motores são:

- Inércia do rotor minimizada;
- Indutância do motor minimizada;
- Suporte de tensão e magnetização melhorados;
- Projetado para suporta acelerações repentinas e operar em altas frequências.

O layout da bancada de experimentos do Módulo Servomotor é mostrado na figura 3. Podemos dividi-la em duas unidades: mecânica e elétrica. Os dispositivos que compõem cada uma das unidades são descritos a seguir.



**Figura 3:** Layout da bancada do módulo servomotor.

### 3.1 Unidade Mecânica

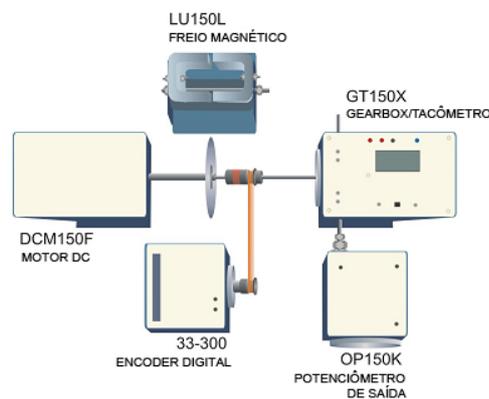
A Unidade Mecânica (UM) do Módulo Servomotor, mostrada na figura 4, é constituída dos seguintes componentes: motor dc, freio magnético, *gearbox*/tacômetro, potenciômetro de saída e o *encoder* digital.

O motor dc (DCM150F) é controlado através do Amplificador Servo. Este é conectado ao motor através de um conector especial inserido no *socket* em sua parte frontal. No eixo do motor dc temos um disco que é usado junto com o freio magnético para simular uma carga usando o efeito de correntes parasitas. O freio magnético (LU150L) é um ímã que de acordo com sua inclinação irá simular uma carga menor ou maior no eixo do motor dc.

A unidade GT150X tem duas funções, *gearbox* e tacômetro. Como *gearbox* ele serve como uma caixa de velocidades fornecendo uma menor proporção de voltas para o potenciômetro de saída. O *Gearbox* é conectado ao motor dc por meio de um acoplamento mecânico. Como tacômetro ele fornece um sinal de tensão analógico que será proporcional a velocidade do eixo do motor dc. Este sinal pode ser usado para controle de velocidade.

O potenciômetro de saída (OP150K) fornece um sinal analógico de tensão proporcional à posição do eixo do *gearbox*. Este sinal pode ser usado para controle de posição do eixo do *gearbox* ou do eixo do motor dc.

Um sinal digital de posição do eixo do motor DC é fornecido pelo *encoder* digital (33-300). Ele entrega um sinal digital pulsante para a placa de E/S do PC. Seus pulsos podem ser contados fornecendo uma medição precisa correspondente a posição do eixo do motor dc. A taxa de variação angular fornece o sinal de velocidade angular. Esta unidade é conectada ao motor por meio de uma correia de transmissão e duas rodas dentadas.



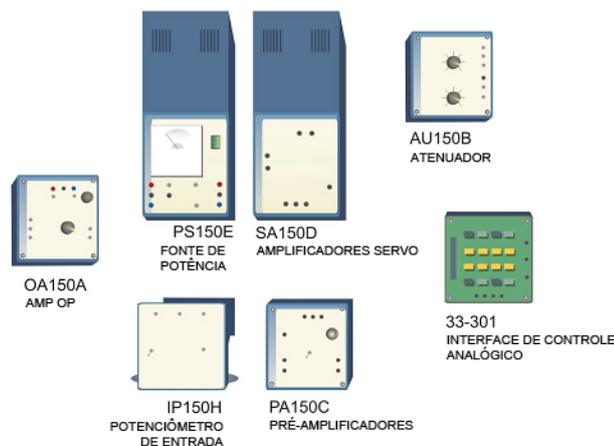
**Figura 4:** Unidade Mecânica (UM) do Módulo Servomotor.

## 3.2 Unidade Elétrica

A Unidade Elétrica (UE), mostrada na figura 5, realiza o condicionamento dos sinais permitindo que estes sejam transferidos para o computador através do cartão E/S. Os amplificadores são usados para transferir os sinais de controle, que foram gerados pelos algoritmos de controle, do computador para o motor dc. Os componentes dessa unidade são: fonte de potência, amplificador servo, pré-amplificador, unidade de interface, atenuador e o potenciômetro de entrada.

A fonte de potência (PS150E) alimenta todo o módulo com tensões entre -15V e +15V. O amplificador servo(SA150D) fornece potência controlada para o motor dc. O pré-amplificador (PA150C) e o atenuador (AU150B) realizam o condicionamento de sinais da bancada.

Com o potenciômetro de entrada (IP150H) podemos estabelecer uma referência quando optarmos por um controle de posição manual. Ele fornece ainda uma tensão analógica proporcional à sua posição angular. Na unidade de interface (33-301) é realizado o dimensionamento das entradas e saídas analógicas da placa de E/S no computador para o intervalo de -2,5V a 2,5V.

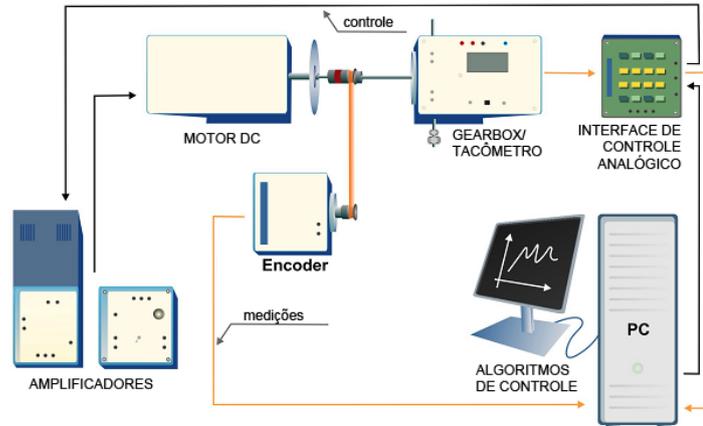


**Figura 5:** Unidade Elétrica (UE) do Módulo Servomotor.

## 3.3 Sistema de Controle

Na bancada de experimentos servomotor temos um sistema de controle que é organizado como mostra a figura 6.

Um computador com o cartão de E/S da Advantech e com os ambientes Matlab e Simulink servem como unidade principal de controle.



**Figura 6:** Sistema de controle da bancada do módulo servomotor.

Os sinais de controle são sinais de tensão no intervalo de  $-2,5V$  à  $+2,5V$  e são gerados pelos algoritmos de controle presentes no computador. Esses sinais são direcionados para uma série de amplificadores os quais são responsáveis pelo acionamento do motor dc.

A posição é medida por meio do encoder digital ou potenciômetro de saída e a velocidade pode ser medida por meio do tacômetro. Estas medições são transferidas para o computador, onde todos os algoritmos de controle são localizados, através de uma unidade de interface analógica.

### 3.4 Modelo do Motor DC

Usualmente, modelos fenomenológicos são não-lineares, o que significa que ao menos uma das variáveis de estado ( $i$ -corrente,  $\theta$ -posição) é argumento de uma função não linear. Para representarmos o modelo como uma função de transferência este modelo deve ser linearizado. No motor dc presente no Módulo Servomotor estas não linearidades são pequenas, podendo ser desprezadas. Na figura 7 temos o modelo elétrico-mecânico do motor dc.

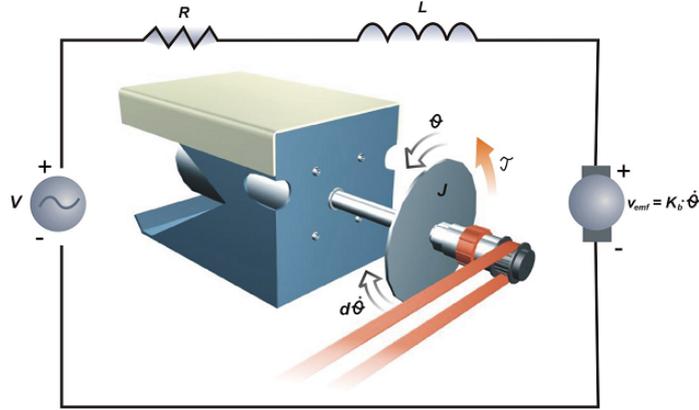
O torque gerado pelo motor dc é proporcional a corrente do motor ( $i$ ):

$$\tau = K_t \cdot i \quad (44)$$

onde  $K_t$  é a constante de torque.

A força eletromotriz induzida,  $v_{emf}$ , é uma tensão proporcional a velocidade angular do eixo:

$$v_{emf} = K_b \cdot \dot{\theta} = K_b \cdot \omega \quad (45)$$



**Figura 7:** Modelo elétrico-mecânico do motor DC.

onde  $K_b$  é uma constante que depende das propriedades físicas do motor e  $\dot{\theta} = \omega$  é a velocidade angular.

Usando a lei de Newton para o modelo mecânico do motor, obtemos:

$$J \cdot \ddot{\theta} = \sum \tau_i = d \cdot \dot{\theta} + K_t \cdot i \quad (46)$$

onde  $d$  é uma aproximação linear da fricção.

A equação que governa o comportamento elétrico do motor é:

$$u = -L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + v_{emf} = -L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + K_b \cdot \dot{\theta} \quad (47)$$

A partir das equações (46) e (47) podemos construir o espaço de estados:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-d}{J} & \frac{K_t}{J} \\ \frac{-K_b}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot u \quad (48)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} \quad (49)$$

O motor usado é um motor dc de 24V com velocidade em vazio de 4050rpm. A tabela 1 contém os valores de todos os parâmetros do motor.

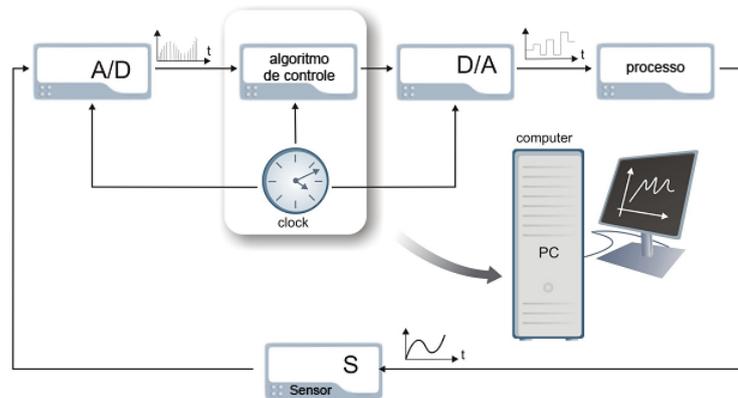
### 3.5 Controle por computador

Devido a cooperação da Advantech e da Mathworks, o projeto de um sistema de controle para o Módulo Servomotor foi simplificado de forma significativa, de modo que,

Parâmetro	Valor
$J$ - momento de inércia	$140 \cdot 10^{-7} kg \cdot m^2$
$K_t$ - constante de torque	$0,052 Nm/A$
$K_b$ - constante de força eletromotriz	$0,057 Vs/rad$
$d$ - aproximação linear da viscosidade de fricção	$1 \cdot 10^{-8} Nms/rad$
$R$ - resistência	$2,5 \Omega$
$L$ - indutância	$2,5 mH$

**Tabela 1:** Parâmetros do motor dc.

não torna-se necessário construir a aplicação em tempo real desde o início. Usando o kernel do Real-Time, você pode projetar diversos tipos de controladores e executá-los em um processo externo.

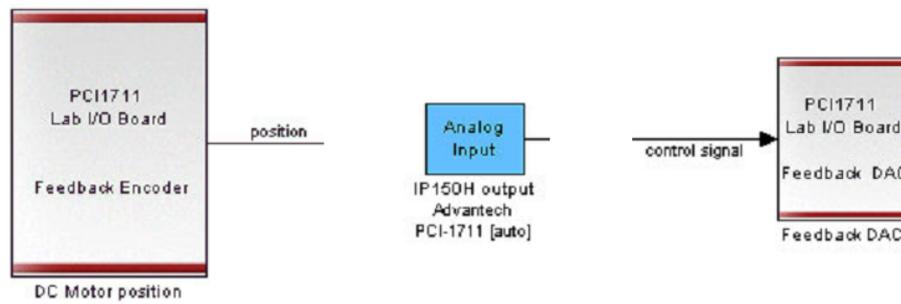


**Figura 8:** Diagrama do sistema de controle por computador.

O sistema de controle por computador mostrado na figura 6 consiste em quatro elementos: um computador, conversores D/A e A/D, o processo em si e sensores. No computador encontra-se o algoritmo de controle síncrono que gera o sinal de controle digital. Este sinal é convertido para a forma analógica pelo conversor D/A e é aplicado ao processo. As medições realizadas pelos sensores são transformadas em sinais digitais pelo conversor A/D e utilizadas pelo algoritmo de controle síncrono presente no computador.

### 3.6 Projeto de controladores

No projeto de controladores para o Módulo Servomoto é necessário o conhecimento de três blocos: Feedback Encoder, Feedback DAC e Analog Input. Estes blocos fornecem uma interface entre o computador e alguns dispositivos do módulo.



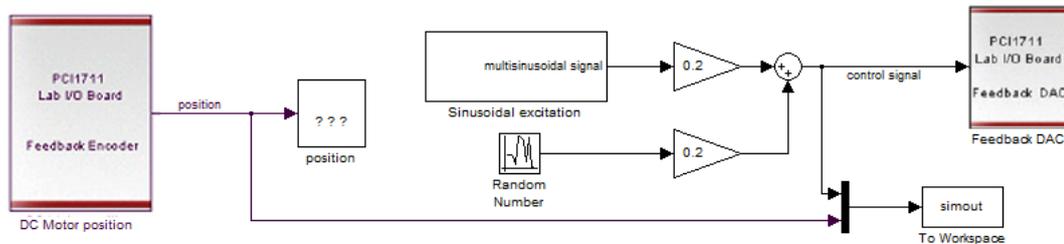
**Figura 9:** Bloco de equipamentos externos.

O Feedback Encoder tem apenas uma saída que corresponde a posição do eixo do motor em radianos. O bloco Analog Input tem uma saída e dependendo do canal escolhido na unidade de interface (33-301), estará lendo um sinal de tensão proporcional a posição ou a velocidade do dispositivo analógico apropriado (potenciômetro de saída ou tacômetro).

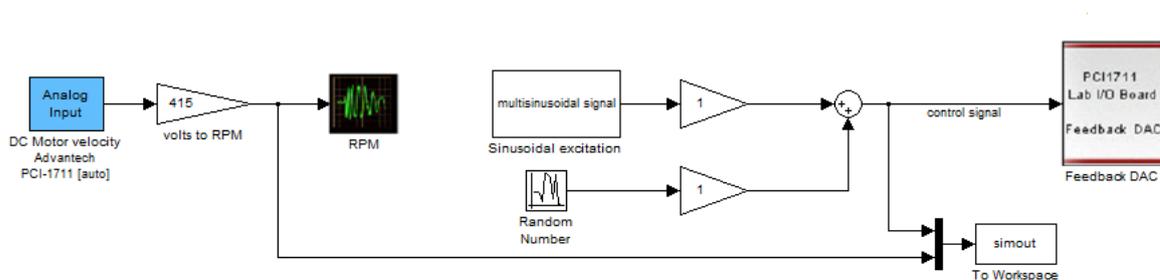
## 4 Resultados

O trabalho proposto teve como resultado a elaboração de guias de experimentos que utilizam a bancada Servomotor do *Feedback Instruments*. Durante a elaboração dos guias de experimentos foram feitos experimentos para comprovar resultados satisfatórios dos métodos estudados.

Primeiro foram obtidos os valores experimentais das entradas e saídas do sistema da bancada. Para isso, utilizamos os experimentos do *Simulink* fornecidos pelo fabricante da bancada mostrado nas figuras 10 e 11. Ambos experimentos consistem em aplicar um sinal de controle multisenoidal no sistema e armazenar a saída correspondente. Porém, no primeiro (figura 10) a saída armazenada é a posição e no segundo (figura 11) a saída armazenada é a velocidade do eixo do motor.



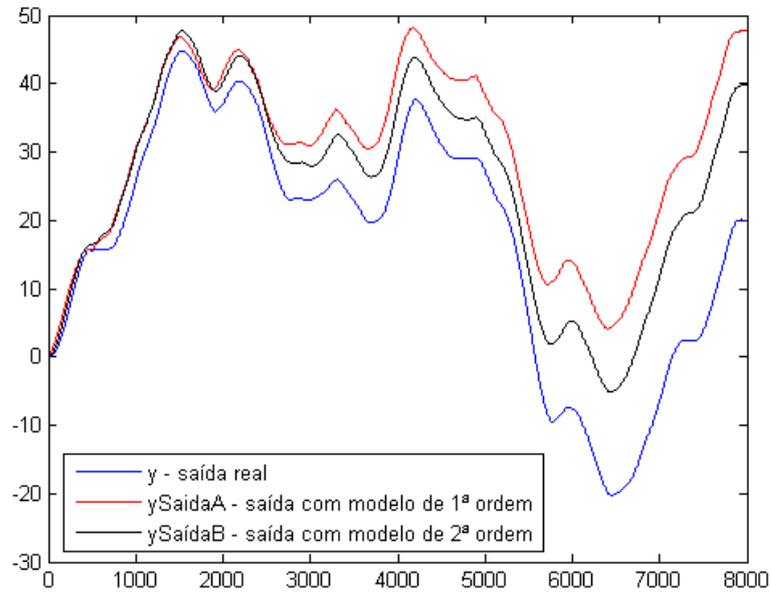
**Figura 10:** Diagrama de blocos do Simulink do experimento PositionModelIdent.



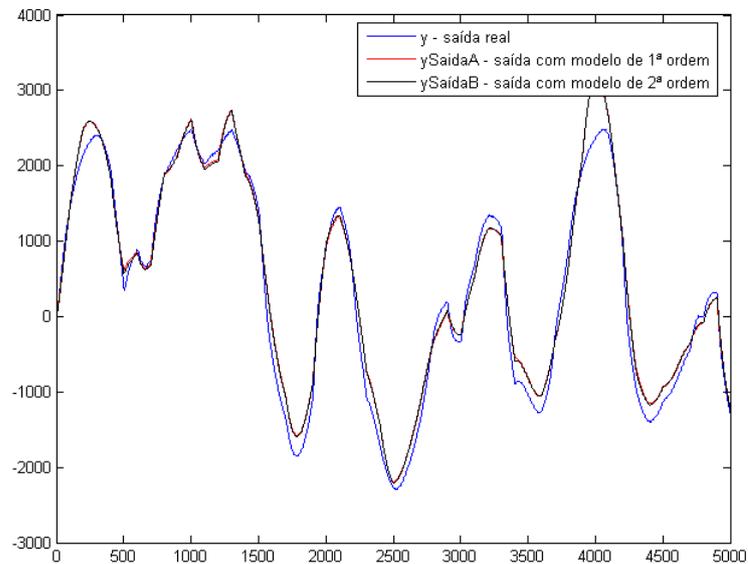
**Figura 11:** Diagrama de blocos do Simulink do experimento VelocityModelIdent.

A partir dos dados obtidos deste experimentos foi possível testar a técnica de identificação dos Mínimos Quadrados. Na figura 12 podemos ver a saída real do sistema e as saídas obtidas após a identificação do modelo de primeira e segunda ordem tomando como saída a posição. Já na figura 11 a saída tomada foi a velocidade.

Podemos observar pela figura 12 que os modelos de primeira e segunda ordem apresentam erros consideráveis. Isto pode ter ocorrido por erros inseridos na obtenção dos dados experimentais.



**Figura 12:** Gráfico das saídas em posição do sistema real e modelado.



**Figura 13:** Gráfico das saídas em velocidade do sistema real e modelado.

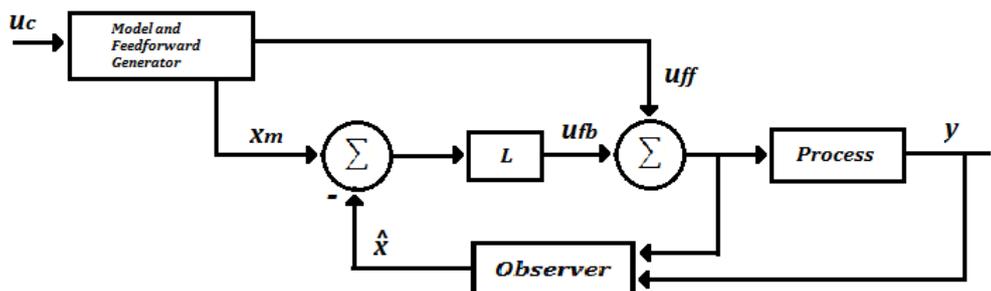
Em ambos os gráficos podemos observar que o modelo de segunda ordem possui uma representação mais fiel do sistema real que o modelo de primeira ordem. O sistema pode ser representado por modelos de ordem superior, mas não podemos garantir que o aumento

de ordem do modelo irá melhorar a representação.

A fim de desenvolver o método de projeto de alocação de pólos, o sistema foi discretizado e foram calculados os ganhos de realimentação linear e os ganhos do observador, mostrados na figura 14. Porém, tivemos dificuldade na implementação prática da estrutura de controle da figura 15 no sistema da bancada Servomotor DC.

Phi =	Gama =	L =	K1 =
1.0e+004 *	18.5714	1.0e+003 *	1.0e+003 *
-0.0422    -1.8201	-4.9000	0.0016	5.1487
0.0112    0.4478		3.5835	-1.4916

**Figura 14:** Discretização (Phi e Gama), ganhos de realimentação linear (L) e ganhos do observador (K1).



**Figura 15:** Estrutura de controle proposta.

Os testes realizados serviram de base para a elaboração dos guias de experimentos. O guia de Identificação de Sistemas foi atualizado para que incluísse a técnica dos Mínimos Quadrados com abordagem utilizada no livro [1] utilizado na disciplina de Controle Digital. Já o experimento de Alocação de Pólos foi feito integralmente. Uma breve descrição de cada guia elaborado é feito nas seções seguintes. Os guias se encontram nos anexos deste trabalho.

#### 4.1 Experimento 1 - Alocação de Pólos Utilizando o Espaço de Estados

Nesse experimento é estudado um método de projeto chamado de alocação de pólos do ponto de vista de realimentação de estados. O aluno revisará os conceitos de realimentação

linear de estados e de observadores e o método de projeto do sistema de controle completo, lecionados na disciplina Controle Digital.

Nas práticas preparatórias e experimentais o aluno utilizará os conceitos presentes no guia para o desenvolvimento do sistema de controle para a bancada do Servomotor DC.

## **4.2 Experimento 2 - Identificação de Sistemas**

Nesse experimentos foram introduzidas as técnicas Mínimos Quadrados, Resposta ao Degrau e Método do Relé para a identificação de sistemas. Ao final desse experimento o aluno deverá ser capaz de realizar a identificação de sistemas a partir de dados do processo obtidos de forma experimental.

Nas práticas experimentais o aluno utilizará o programa Matlab para a implementação das técnicas discutidas na identificação do sistema da bancada Servomotor DC. Esse sistema será representado pelos dados experimentais fornecidos aos alunos. Este guia é uma atualização do guia de experimentos já utilizado na disciplina.

## 5 Conclusão

Neste trabalho foram desenvolvidos guias de experimentos utilizando a bancada Servomotor DC do *Feedback Instruments*. Estes guias irão fornecer aos alunos da disciplina Laboratório de Controle Digital um material que os auxiliem na utilização da bancada, no projeto de sistemas de controle e na identificação de sistemas a partir de dados experimentais.

Durante o trabalho pôde-se revisar e fixar os conceitos de discretização de sistemas, alocação de pólos, realimentação linear de estados, observadores e identificação de sistemas, importantes na Engenharia de Controle.

Pode-se concluir que o objetivo final deste trabalho foi atingido e que ele contribuiu para o ambiente acadêmico do curso de Engenharia Elétrica visto que com ele foi possível revisar, fixar e implementar conceitos ministrados no curso e que os guias produzidos servirão de apoio ao alunos da disciplina Laboratório de Controle Digital.

## 6 Referências Bibliográficas

- [1] ASTROM, K.J.; WITTENMARK, B.; Computer-Controlled Systems: Theory and Design. Third Edition. Prentice Hall, 1997.
- [2] FEEDBACK INSTRUMENTS. MATLAB GUIDE for Feedback Control Instrumentation.
- [3] FEEDBACK INSTRUMENTS. Precision Modular Servo: Installation and Commissioning.
- [4] FEEDBACK INSTRUMENTS. Precision Modular Servo: Control Experiments.

## **7 ANEXOS**

### **7.1 Guías de Experimentos**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E INFORMÁTICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

## EXPERIMENTO 5 - ALOCAÇÃO DE PÓLOS: ESPAÇO DE ESTADOS

Aluno: Sérgio Paulo Melo de Souza  
Orientador: João Batista

Campina Grande, Paraíba. 2011

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Sistemas de Controle</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Discretização do Sistema</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Realimentação Linear de Estados</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Observadores</b>	<b>4</b>
5.1	Reconstruindo usando a dinâmica do sistema . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Projeto do Sistema de Controle Completo</b>	<b>6</b>
6.1	O problema servo . . . . .	7
<b>7</b>	<b>Preparação</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>Atividade Experimental</b>	<b>9</b>

# 1 Introdução

Neste guia desenvolveremos o método de projeto chamado de alocação de polos do ponto de vista de realimentação de estados. O nome alocação de polos se refere ao fato de que o projeto é formulado em termos da obtenção de um sistema em malha fechada com os polos especificados. O método será desenvolvido em algumas etapas:

1. Apresentação do sistema de controle;
2. Discretização do sistema;
3. Realimentação linear de estados;
4. Observadores para a reconstrução dos estados a partir das saídas medidas;
5. Solução do problema combinando observadores e a realimentação de estados.

Nas próximas seções cada um destas etapas será descrita.

# 2 Sistemas de Controle

Muitos fatores diferentes devem ser considerados no projeto de sistemas de controle, por exemplo:

- Atenuação das perturbações de carga;
- Redução do efeito do ruído de medição;
- Rastreamento do sinal de controle;
- Variações e incertezas no comportamento do processo.

Os problemas de controle podem ser classificados em problemas de regulação e em problema servo. No primeiro, a principal questão é o compromisso entre a redução das perturbações de carga e as flutuações criadas pelo ruído de medição que é injetado no sistema devido à realimentação. No segundo, a principal questão é o rastreamento do sinal.

A maioria dos métodos de projeto dá foco em alguns dos aspectos mencionados acima e o projetista tem que checar se os outros requisitos também são satisfeitos. Neste guia iremos desenvolver um método de projeto baseado em modelos de estado cujo propósito

é obter o polinômio característico desejado do sistema em malha fechada. Este método é fácil de ser aplicado em sistemas de ordem baixa, mas pode ser difícil escolher os pólos adequados para sistemas de ordem elevada.

Assumiremos inicialmente que processo a ser controlado é descrito pelo modelo

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1b)$$

Onde  $u$  representa a variável de controle,  $x$  representa o vetor de estados e  $A$  e  $B$  são matrizes constantes.

### 3 Discretização do Sistema

Amostrando o sistema descrito por (1), obtemos o sistema discreto

$$x(kh + h) = \phi x(kh) + \Gamma u(kh), \quad (2a)$$

$$y(kh) = Cx(kh) + Du(kh) \quad (2b)$$

onde

$$\phi = e^{Ah}, \quad (3a)$$

$$\Gamma = \int_0^h e^{As} ds \cdot B, \quad (3b)$$

Para simplificar, escrevemos o sistema (2) como

$$x(k + 1) = \phi x(k) + \Gamma u(k), \quad (4a)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (4b)$$

Como queremos que o sistema em malha fechada tenha o polinômio característico desejado, ou seja, as suas propriedades serão especificadas pelos pólos desse sistema, é natural admitirmos que a realimentação seja linear.

$$u(k) = -Lx(k) \quad (5)$$

## 4 Realimentação Linear de Estados

Assumimos que o sistema é descrito pelas equações (1) e que o período de amostragem é tal que o processo pode ser descrito pelo sistema discreto das equações (2). O objetivo é encontrar uma lei de realimentação linear na forma (5) tal que o sistema em malha fechada tenha uma equação característica especificada. Seja o sistema descrito por (2) e o polinômio característico da matriz  $\phi$  seja

$$z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n \quad (6)$$

Se o sistema é alcançável, então podemos transformá-lo para sua forma canônica pela transformação  $z = Tx$ , resultando em

$$z(k+1) = \tilde{\phi}z(k) + \tilde{\Gamma}u(k) \quad (7)$$

onde

$$\tilde{\phi} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8b)$$

Os coeficientes do polinômio característico que determinam os pólos de malha fechada aparecem explicitamente nessa representação. De (5) podemos tirar a lei de realimentação

$$u = -\tilde{L}x = - \begin{pmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 & \dots & p_n - a_n \end{pmatrix} \cdot z \quad (9)$$

dá um sistema em malha fechada com o polinômio característico

$$P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n \quad (10)$$

Podemos encontrar a solução do problema original transformando para as coordenadas originais.

$$u = -\tilde{L}z = -\tilde{L}Tx = -Lx \quad (11)$$

Resta determinar a matriz de transformação  $T$ . Uma forma simples de determinar esta matriz é baseada na propriedade das matrizes de alcançabilidade. Seja  $W_c$  a matriz de alcançabilidade dada por

$$W_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \phi\Gamma & \dots & \phi_{n-1}\Gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

E seja  $\tilde{W}_c$  a matriz de alcançabilidade de (7). As matrizes são relacionadas por  $\tilde{W}_c = TW_c$ . Logo,

$$T = \tilde{W}_c \cdot W_c^{-1} \quad (13)$$

Portanto, o cálculo da matriz de realimentação linear  $L$  é dado por

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 & \dots & p_n - a_n \end{pmatrix} \cdot \tilde{W}_c \cdot W_c^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 & \dots & p_n - a_n \end{pmatrix} \cdot P(\phi) \end{aligned} \quad (14)$$

A equação (14) é conhecida como fórmula de *Ackermann*.

## 5 Observadores

Nem sempre é possível medir todos os estados de um sistema. Portanto, é interessante determinarmos os estados de um sistema a partir das medidas disponíveis e de um modelo. Assumindo que o sistema é descrito por (4), problema consiste então em calcular ou

reconstruir o estado  $x(k)$  das sequências de entradas e saídas  $y(k), y(k-1), \dots, u(k), u(k-1), \dots$ . Isto é possível se o sistema é observável.

## 5.1 Reconstruindo usando a dinâmica do sistema

Este método de reconstrução tem a vantagem de ser pouco sensível ao ruído. Considerando o sistema em (4) e assumindo que o estado  $x$  deve ser aproximado pelo estado  $\hat{x}$  do modelo

$$\hat{x}(k+1) = \phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (15)$$

que tem a mesma entrada do sistema (4).

Podemos dizer que este modelo é perfeito no sentido de que os elementos das matrizes  $\phi$  e  $\Gamma$  são idênticos àqueles do sistema (4) e se as condições iniciais são as mesmas, então o estado  $\hat{x}$  do modelo (15) será igual ao estado  $x$  do sistema real em (4). Se as condições forem diferentes, então  $\hat{x}$  convergirá para  $x$  apenas se o sistema tiver estabilidade assintótica.

A reconstrução pode ser melhorada usando também as saídas medidas. Isto pode ser feito introduzindo uma realimentação da diferença entre as saídas medidas e estimadas,  $y - C\hat{x}$ .

Portanto,

$$\hat{x}(k+1|k) = \phi\hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)) \quad (16)$$

onde  $K$  é uma matriz de ganho. A notação  $\hat{x}(k+1|k)$  significa a estimativa  $x(k+1)$  baseada nas medições disponíveis até o tempo  $k$ . Note que o termo  $K(y(k) - C\hat{x}(k|k-1))$  não gera contribuição se a saída estimada é igual a medida. Para calcular a matriz  $K$ , introduzimos o erro de reconstrução:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (17)$$

Subtraindo (16) de (4a), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1|k) &= \phi\tilde{x}(k|k-1) + K(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)) \\ &= (\phi - KC) \cdot \tilde{x}(k|k-1) \end{aligned} \quad (18)$$

Portanto, se  $K$  for escolhido tal que o sistema (18) seja assintoticamente estável, o erro  $\tilde{x}$  irá sempre convergir para zero.

O sistema em (16) é chamado observador do sistema (4) porque ele produz o estado do sistema a partir de medições das entradas e saídas. Agora o problema consiste em encontrar uma matriz  $K$  tal que  $\phi - KC$  tenha os autovalores prescritos.

**Teorema 1** (*Dinâmica do observador*) *Considere um sistema discreto dado por (4). Seja  $P(z)$  um polinômio de grau  $n$ , onde  $n$  é a ordem do sistema. Assumindo que o sistema é completamente observável, então existe uma matriz  $K$  tal que a matriz  $\phi - KC$  do observador (16) tem o polinômio característico  $P(z)$ .*

A determinação da matriz  $K$  no observador (16) é feita de forma análoga a determinação da matriz  $L$  na realimentação de estados. O cálculo da matriz  $K$  dado por:

$$K = P(\phi) \cdot W_c^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (19)$$

## 6 Projeto do Sistema de Controle Completo

Na seção 4 consideramos que todas as variáveis de estados são conhecidas ou medidas diretamente para calcularmos a matriz de ganho de realimentação linear  $L$ . Na seção 5 resolvemos o problema de calcular os estados a partir das saídas do sistema. Agora iremos combinar essas duas soluções para obtermos a solução desejada para o problema de alocação de pólos. Seja o sistema descrito por:

$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k), \quad (20a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (20b)$$

Uma lei de realimentação linear que relaciona  $u$  para  $y$  tal que o sistema em malha fechada tenha os pólos desejados, assumindo que todas as variáveis de estado são medidas, é dado pela equação (5). Porém, considerando que nem todos os estados possam ser medidos, a lei de realimentação linear muda para:

$$u(k) = -L\hat{x}(k|k-1) \quad (21)$$

onde  $\hat{x}$  é obtido do observador dado pela equação (16).

O sistema em malha fechada tem as propriedades desejadas. Para mostrar isso, introduzimos

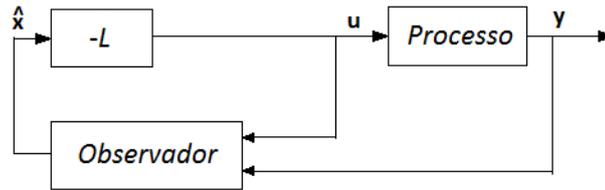
$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (22)$$

Das equações (20) e (21), temos que o sistema é descrito por:

$$x(k+1) = (\phi - \Gamma L) \cdot x(k) + \Gamma L \cdot \tilde{x}(k|k-1) \quad (23)$$

$$\tilde{x}(k+1|k) = (\phi - KC) \cdot \tilde{x}(k|k-1) \quad (24)$$

Podemos ver que o sistema tem ordem  $2n$  e os autovalores do sistema em malha fechada são os autovalores das matrizes  $\phi - \Gamma L$  e  $\phi - KC$ .



**Figura 1:** Diagrama de blocos do controlador obtido combinando a realimentação linear de estados com o observador.

O controlador pode ser visto como uma caixa preta que gera o sinal de controle a partir da saída do processo. O controlador descrito por (16) e (21) pode ser representado por uma função de transferência ao pulso da saída medida  $y$  para o sinal de controle  $u$ :

$$H_c(z) = -L \cdot (zI - \phi + \Gamma L + KC)^{-1} \cdot K \quad (25)$$

## 6.1 O problema servo

O problema servo tem por objetivo fazer os estados e as saídas do sistema responderem de uma maneira especificada a sinais de comando. Uma forma simples de obtermos a resposta desejada a sinais de comando é substituir a realimentação de estados (21) por

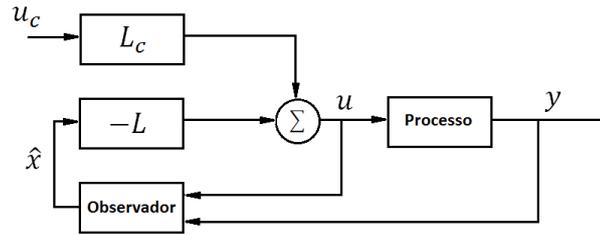
$$u(k) = -L\hat{x}(k) + L_c u_c(k) \quad (26)$$

onde  $u_c$  é o sinal de comando.

Agora sistema em malha fechada pode ser descrito por

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= (\phi - \Gamma L)x(k) + \Gamma L\tilde{x}(k) + \Gamma L_c u_c(k) \\
\tilde{x}(k+1) &= (\phi - KC)\tilde{x}(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned} \tag{27}$$

onde  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ .



**Figura 2:** Diagrama de blocos introduzindo um sinal de comando no controlador com realimentação linear de estados e um observador.

A função de transferência ao pulso do sinal de comando para a saída do processo pode ser encontrada a partir das equações em (??), que dá

$$H_{cl}(z) = C \cdot (zI - \phi - \Gamma L)^{-1} \cdot \Gamma L_c = L_c \cdot \frac{B(z)}{A_m(z)} \tag{28}$$

O sistema em malha fechada obtido com a lei de controle dada em (26) tem os mesmos zeros do processo e os pólos são os autovalores da matriz  $\phi - \Gamma L$ .

## 7 Preparação

1. Discretize o sistema do Módulo Servomotor utilizando o espaço de estado dado no guia deste.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-d}{J} & \frac{K_t}{J} \\ \frac{-K_b}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. Verifique se o sistema discreto achado no item anterior é controlável e/ou observável.
3. Calcule as matrizes ganho de realimentação de estados,  $L$ , e ganho do observador,  $K$ , para que o polinômio característico do sistema em malha fechada seja:

## 8 Atividade Experimental

1. Utilizando os blocos *Feedback Encoder*, *Feedback DAC* e *Analog Input*, construa o sistema de controle utilizando a realimentação de estados e o observador calculados na preparação.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E INFORMÁTICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

# EXPERIMENTO 3 - IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Aluno: Sérgio Paulo Melo de Souza  
Orientador: João Batista

Campina Grande, Paraíba. 2011

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Mínimos Quadrados . . . . .	1
1.2	Resposta ao Degrau . . . . .	3
1.2.1	Sistemas Não-Oscilatórios . . . . .	3
1.2.2	Sistemas Oscilatórios . . . . .	4
1.3	Modelagem a partir da Resposta ao Degrau . . . . .	5
1.4	Método do Relé . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Preparação</b>	<b>8</b>
2.1	Preparação 1 . . . . .	8
2.2	Preparação 2 . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Atividade Experimental</b>	<b>10</b>
3.1	Prática 1 . . . . .	10
3.2	Prática 2 . . . . .	10
3.3	Prática 3 . . . . .	10
3.4	Prática 4 . . . . .	11
3.5	Prática 5 . . . . .	11
<b>4</b>	<b>ANEXOS</b>	<b>11</b>

# 1 Introdução

A noção de modelos matemáticos é fundamental para a engenharia. Um modelo é uma forma bastante útil e compacta de resumir o conhecimento sobre determinado processo.

Algumas vezes os processos podem ser obtidos a partir de princípios físicos. Porém, se torna muito difícil obtermos modelos de distúrbios, que são igualmente importantes, dessa forma. Estes modelos geralmente são obtidos de experimentos.

Em princípio, existem duas formas diferentes para os quais os modelos podem ser obtidos: a partir de conhecimento prévio (por exemplo, através de leis físicas) ou por experimentações do processo.

Em muitos casos não é possível fazer um modelo completo apenas com conhecimentos específicos. Alguns parâmetros devem ser determinados através de experimentos. Esta abordagem é chamada de identificação de sistemas. Existem muitos métodos para a análise de informações obtidas de experimentos. Um método simples, porém muito útil, é o método dos Mínimos Quadrados que será apresentado na próxima seção.

## 1.1 Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados é tal que os parâmetros desconhecidos devem ser escolhidos de tal forma que:

*“a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os calculados multiplicados por números que medem o grau de precisão seja mínimo.”*

Para serem capazes de dar uma solução analítica, os valores calculados devem ser funções lineares dos parâmetros desconhecidos.

No método dos mínimos quadrados a variável  $y$  é dada por:

$$\hat{y} = \theta_1 \cdot \varphi_1 + \theta_2 \cdot \varphi_2 + \dots + \theta_n \cdot \varphi_n \quad (1)$$

Onde  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  são funções conhecidas e  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  são os parâmetros desconhecidos.

Pares de observações  $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$  são obtidos de experimentos. O problema consiste em determinar os parâmetros de tal forma que as variáveis  $\hat{y}$  calculadas a partir do modelo de (1) e os valores experimentais  $x_i$  sejam tão próximos quanto possíveis das variáveis medidas  $y_i$ .

Assumindo que todas as medições tem a mesma precisão, o método dos mínimos quadrados nos diz que os parâmetros devem ser escolhidos de tal forma que o erro seja

pequeno, de acordo com uma função de custo (ou critério de desempenho). Definindo a função de custo mínimos quadrados:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \varepsilon^2 \quad (2)$$

onde

$$\varepsilon = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \phi(t) \cdot \theta$$

Para simplificar os cálculos, os seguintes vetores são definidos:

$$\varphi = \left[ \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_N \right]^T \quad (3)$$

$$\theta = \left[ \theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_N \right]^T \quad (4)$$

$$y = \left[ y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_N \right]^T \quad (5)$$

$$\varepsilon = \left[ \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_N \right]^T \quad (6)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \dots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Assim, a função de custo pode ser reescrita como:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^T \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \|\varepsilon\|^2 \quad (8)$$

onde  $\varepsilon = y - \hat{y}$  e  $\hat{y} = \phi \cdot \theta$ .

Podemos encontrar o valor mínimo derivando a equação (8) e igualando a zero. Logo,

$$\frac{dJ}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\|\varepsilon\|^2}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \phi^T \cdot [y - \phi \cdot \theta] = 0$$

$$\phi^T \cdot y = \phi^T \cdot \phi \cdot \theta$$

Portanto, os parâmetros  $\theta$  são dados por:

$$\theta = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi^T \cdot y \quad (9)$$

Podemos definir então:

$$R_{n \times m} = \sum_{t=1}^N \phi^T(t) \cdot \phi(t) \quad (10)$$

$$f_{n \times 1} = \sum_{t=1}^N \phi^T(t) \cdot y(t) \quad (11)$$

Assim, a estimativa pode ser calculada como:

$$\theta = R^{-1} \cdot f \quad (12)$$

onde assume-se que a inversa existe.

A solução dada pela equação (12) pode ser escrita de forma compacta. Note que a solução pode ser agrupada da seguinte maneira:

$$\theta = (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y \quad (13)$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(1) & \phi(2) & \dots & \phi(N) \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(N) \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

## 1.2 Resposta ao Degrau

Os métodos gráfico-temporais são bastante populares entre os operadores. Tais métodos se baseiam na observação direta da variável de saída do processo. O principal atrativo destes métodos é o apelo gráfico, que torna intuitivo o procedimento de modelagem do processo.

O método da resposta ao degrau, em particular, ainda é bastante utilizado para obter um modelo para o processo. Em regime permanente, é aplicado um degrau na entrada do processo, e a saída é registada. O modelo é então obtido a partir da curva de reação do processo, observando alguns parâmetros gráficos. Várias classes de modelos podem ser obtidas com este método.

### 1.2.1 Sistemas Não-Oscilatórios

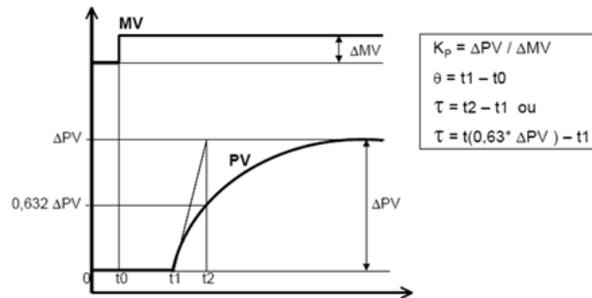


Figura 1: Resposta ao degrau para processos de característica não-oscilatória.

A saída típica de um sistema de característica não oscilatória é apresentada na figura 1. Note que o procedimento é realizado em torno de um ponto de operação, de modo que o modelo obtido é válido em uma faixa limitada. Os parâmetros que podem ser obtidos diretamente a partir da curva de reação do processo são:

- Ganho,  $G_o$ : é obtido da curva de reação pela relação da variação do sinal de saída,  $\Delta y$ , e o sinal de entrada,  $\Delta u$ , i.e.,  $G_o = \Delta y / \Delta u$ .
- Atraso de transporte,  $L$ : é obtido a partir da reta com maior inclinação possível na curva da figura 1. O prolongamento desta reta da forma mostrada leva à estimativa de  $L$ .
- Taxa de crescimento,  $G'_o$ : é obtida da inclinação da reta usada na determinação do atraso de transporte.
- Constante de tempo de primeira ordem,  $T_1$ : depende do modelo utilizado. Tipicamente, o ponto da curva que atinge 63% de  $\Delta y$  é utilizado na determinação de  $T_1$ , quando um modelo de primeira ordem é utilizado. Para modelos com mais de uma constante de tempo, outros pontos da curva de reação devem ser utilizados, e, normalmente, soluções por métodos numéricos são necessárias.

Alguns dos modelos que podem ser obtidos a partir deste procedimento são os seguintes:

$$G(s) = \frac{G_o}{T_1 \cdot s + 1}$$

$$G(s) = \frac{G_o}{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{G_o}{T_1 \cdot s + 1} \cdot e^{-Ls}$$

$$G(s) = \frac{G_o}{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1)} \cdot e^{-Ls}$$

$$G(s) = \frac{G_o}{(T_1 \cdot s + 1)^2} \cdot e^{-Ls}$$

### 1.2.2 Sistemas Oscilatórios

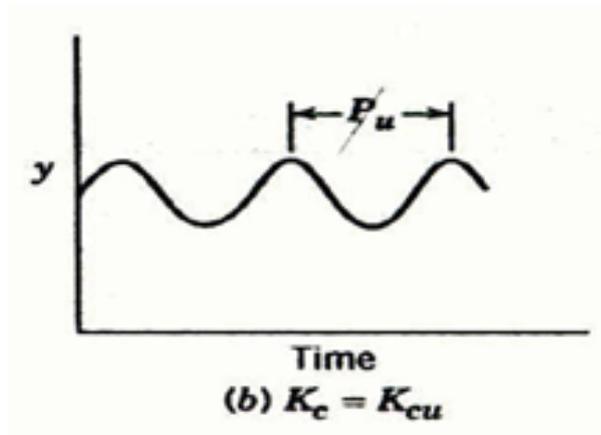


Figura 2: Resposta ao degrau para processos de característica oscilatória.

A saída típica de um sistema de característica é apresentada na figura 2. Novamente, o procedimento é realizado em torno de um ponto de operação, e o modelo obtido é válido apenas em uma certa faixa de operação. Além dos parâmetros obtidos para o caso de uma resposta não-oscilatória, existem ainda os seguintes parâmetros:

- Período de oscilação,  $T_{osc}$ : pode ser medido diretamente da curva nos primeiros instantes de oscilação, conforme mostrado na figura 2.
- Decaimento de sobresinal,  $\beta$ : é obtido a partir da relação entre os dois primeiros picos da resposta transitória, conforme mostrado na figura 2.

Os modelos típicos obtidos a partir deste procedimento são:

$$G(s) = \frac{G_o \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{G_o \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \cdot e^{-Ls}$$

### 1.3 Modelagem a partir da Resposta ao Degrau

Suponha que o processo está no estado inicial nulo e um degrau de amplitude  $h$  é aplicado em  $t=0$  à sua entrada. Ambas, saída e entrada do processo são armazenadas, desde a aplicação do degrau até o tempo em que a saída entra em regime permanente. Suponha que o modelo do processo é descrito pela função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_o}{T_1 s + 1} \cdot e^{-Ls}$$

Para esta relação, a saída  $y(t)$  para uma entrada em degrau de amplitude  $h$ , é dada por:

$$y(t) = hG_o \left( 1 - e^{-\frac{t-L}{T_1}} \right) + \omega(t), t \geq L$$

onde  $\omega(t)$  é o ruído branco presente na medição de  $y(t)$ . A equação anterior pode ser reescrita como

$$e^{-\frac{t-L}{T_1}} = 1 - \frac{y(t)}{hG_o} + \frac{\omega(t)}{hG_o}, t \geq L \quad (16)$$

Integrando  $y(t)$  de  $t = 0$  até  $t = \tau$  com  $\tau \geq L$  ( $y(t) = 0$  para  $t < L$ ), tem-se

$$\int_0^\tau y(t) dt = hG_o \left( \tau - T_1 e^{-\frac{t-L}{T_1}} \right)_{t=L}^{t=\tau} + \int_0^\tau \omega(t) dt$$

Usando a equação (16), e o fato de que  $y(L) = 0$ , tem-se então

$$\int_0^\tau y(t) dt = hG_o \left( \tau - L - T_1 \frac{y(t)}{hG_o} \right) + [T_1 \omega(t)]_{t=L}^{t=\tau} + \int_0^\tau \omega(t) dt \quad (17)$$

Defina

$$A(\tau) = \int_0^\tau y(t) dt$$

e

$$\delta(\tau) = [T_1 \omega(t)]_{t=L}^{t=\tau} + \int_0^\tau \omega(t) dt$$

Então, a equação ( 17 ) pode ser reescrita como

$$A(\tau) = hG_o \left( \tau - L - T_1 \frac{y(t)}{hG_o} \right) + \delta(t) = \begin{bmatrix} h\tau & -h & y(\tau) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_o \\ G_o L \\ T_1 \end{bmatrix} + \delta(\tau)$$

De modo que

$$A(\tau) = \phi^T(\tau) \cdot \theta + \delta(\tau) \quad (18)$$

Que é equivalente ao sistema linear usado na solução de mínimos quadrados da seção anterior com ruído dado pelo termo  $\delta(\tau)$ . Portanto,

$$\phi(\tau) = \begin{bmatrix} h\tau & -h & y(\tau) \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} G_o & G_o L & T_1 \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

As matrizes  $\Phi$  e  $Y$  são então montadas usando as expressões (14) e (15) para todas as amostras no tempo  $\tau$ , com  $\tau \geq L$ .

## 1.4 Método do Relé

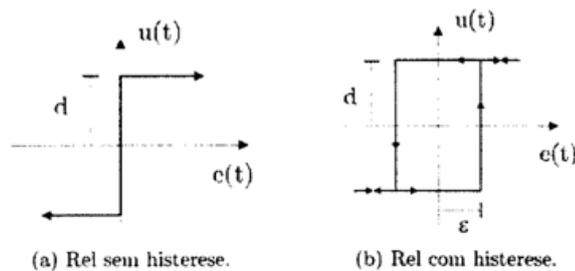


Figura 3: Saída  $u(t)$  de um Relé com entrada  $e(t)$ .

Uma forma de determinar o ganho e a frequência crítica de uma planta,  $K_u$  e  $\omega_u$ , utilizando um relé, como o da figura 3, é proposta em Astrom e Hagglund. Considere o sistema em malha fechada da figura 5 na qual o relé tem amplitude  $d$ . Para várias classes de processos, o sistema exibe um ciclo de limite cujas condições podem ser determinadas aproximadamente usando o método de análise por funções descritivas.

A oscilação ocorre no ponto em que

$$N(a) = G_p(j\omega) = -1$$

onde

$$N(a) = \frac{4d}{\pi a}$$

É a função descritiva do relé da figura 3(a), que relaciona a amplitude do primeiro harmônico do sinal na entrada do relé,  $a$ , com a amplitude do primeiro harmônico do sinal na saída do relé,  $N(a)$ . O método da função descritiva tem uma interpretação física interessante. Na figura 4(a), são sobrepostas a função descritiva do relé e a curva de Nyquist de um processo  $G_p(s)$ . Assim, se  $a$  é a amplitude na saída do processo, a intersecção das curvas mostradas ocorre no ponto crítico, de modo que,

$$G_p(j\omega_u) = -\frac{\pi a}{4d}$$

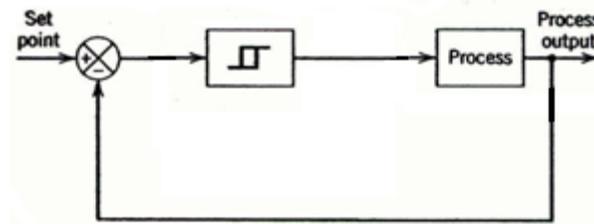


Figura 4: Processo com realimentação por relé.

Note que a amplitude na saída do processo pode ser controlada a partir da amplitude  $d$  do relé. Lembre-se que os resultados das funções descritivas é um resultado aproximado, uma vez que apenas a primeira harmônica do sinal na saída do relé é considerada.

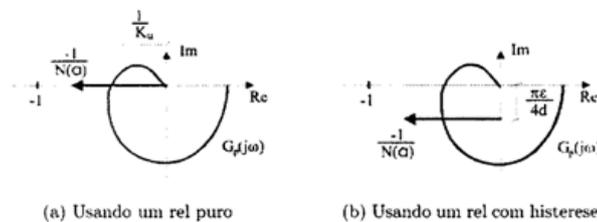


Figura 5: Curva de Nyquist de um processo  $G_p$  de função descritiva de um relé  $N(a)$ .

Levando em conta a presença de ruído no experimento apresentado na figura 5, a

utilização de um relé puro provoca chaveamento aleatório. Este problema pode ser contornado adicionando uma histerese ao relé puro, como na figura 3(b). Para um relé com histerese  $\varepsilon$ , o ponto da resposta em frequência do processo é determinado agora pela intersecção de sua curva de Nyquist com

$$-\frac{1}{N(a)} = -\frac{\pi}{4d} \cdot \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} - j\frac{\pi\varepsilon}{4d} \quad (21)$$

Que são retas paralelas ao semi-eixo real negativo. Da figura 4(b). utilizando o relé com histerese no experimento da figura 5(b). Ainda com  $a(s) = 1$ , obtem-se valores aproximados para  $K_u$  e  $\omega_u$ , desde que a histerese,  $\varepsilon$ , seja pequena.

## 2 Preparação

### 2.1 Preparação 1

Escreva dois programas no Matlab para calcular os parâmetros de um sistema linear discreto usando o método dos Mínimos Quadrados (seção 1.1). Os programas devem calcular cada um dos parâmetros dos modelos discretos

$$G_1(s) = \frac{b_1q_{-1}}{1 + a_1q_{-1}}$$

$$G_1(s) = \frac{b_1q_{-1} + b_2q_{-2}}{1 + a_1q_{-1} + a_2q_{-2}}$$

A partir de  $N$  amostras dos sinais  $y$  e  $u$ . Para facilitar, escreva a saída  $y$  em função da entrada  $u$  usando os modelos indicados na forma de regressão linear:

- Modelo  $G_1$

$$y(t) + a_1y(t-1) = b_1u(t-1) \Rightarrow y(t) = -a_1y(t-1) + b_1u(t-1)$$

$$= \begin{bmatrix} -y(t-1) & u(t-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \phi_1^T(t) \cdot \theta_1 \quad (22)$$

- Modelo  $G_2$

$$y(t) + a_1y(t-1) + a_2y(t-2) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2)$$

$$\Rightarrow y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) + b_1u(t-1) + b_2u(t-2)$$

$$= \begin{bmatrix} -y(t-1) & -y(t-2) & u(t-1) & u(t-2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \phi_2^T(t) \cdot \theta_2 \quad (23)$$

Para fazer os programas, siga os seguintes passos para cada um individualmente:

- Defina o tamanho do vetor de parâmetros  $\theta$ , a partir das expressões em (22) e (23).
- Crie matrizes  $R$  e  $f$  com valores nulos, nas dimensões:  $R \rightarrow$  matriz quadrada de ordem igual ao numero de colunas de  $\theta$ ;  $f \rightarrow$  Matriz coluna, com tamanho igual ao tamanho de  $\theta$ .
- Neste passo, deve-se criar um laço usando o comando *for...end* para implementar os somatórios das expressões (10) e (11). Lembre-se de que no Matlab os vetores possuem índices a partir do numeral 1 (não existe  $y(0)$ ,  $y(-1)$ , etc). Observe portanto o índice do vetor na hora de definir a variável de contagem do laço *for...end*. A cada iteração do laço:
  - Monte uma variável *Phi* contendo o vetor  $\Phi(t)$ , com  $t$  a iteração atual, usando a equação (22) para o primeiro programa e a equação (23) para o segundo programa.
  - Calcule a matriz  $R$  como sendo:  $R = R + \phi(t)\phi^T(t)$ .
  - Calcule a matriz  $f$  como sendo:  $f = f + \phi(t)y(t)$ .
- Ao sair do laço, crie uma variável *teta* que será o vetor de parâmetros obtidos a partir da expressão (12), i.e.,  $\theta = R^{-1} \cdot f$ .
- Para cada programa, monte variáveis *num* e *den* contendo o numerador e denominador do modelo respectivamente, extraindo os parâmetros a partir da variável  $\theta$  criada no passo anterior. Por exemplo, para o segundo programa

$$\begin{aligned} num &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \\ den &= \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde os elementos destes vetores são obtidos de  $\theta$ .

## 2.2 Preparação 2

Adapte o programa desenvolvido na preparação 1 para a estimação de parâmetros a partir da resposta ao degrau (seção 1.3). Não se esqueça de incluir o cálculo de  $A(\tau)$  dentro do laço principal do programa. Para o cálculo de  $A(\theta)$  a cada iteração, aproxime a integral por uma soma, i.e.,

$$A(\tau) = \int_0^{\tau} y(t)dt \cong \Delta t \sum_{n=0}^{\tau} y(n\Delta t)$$

Dica:

- O tamanho do vetor  $\theta$  neste caso é 3 (equação 20);
- A variável de controle do laço deve ser modificada para suportar apenas os valores  $\tau > L$ ;
- A variável *Phi* montada no programa anterior a cada laço de iteração deve ser substituída pela expressão (19). Deste modo, o cálculo da matriz *R* continua sendo feito da mesma forma.
- Note que no cálculo da matriz *f* (equação 11) o sinal  $y(t)$  deve ser substituído por  $A(\theta)$  (compare as equações (7) e (18))
- Assuma  $\Delta = 1$  e use a função *sum.m* do Matlab para calcular o somatório a cada iteração. Lembre-se de fornecer os limites no sinal na hora de utilizar a função (Ex:  $A = \text{sum}(y(1:\tau));$ ).

## 3 Atividade Experimental

### 3.1 Prática 1

Execute na linha de comando do Matlab o programa *smIdentPos.m* (Utilização:  $[y, u] = \text{smIdentPos}(Npts);$ ). Plote na tela os sinais discretos  $u$  e  $y$ . Verifique o primeiro programa da preparação 1 usando os dados gerados pelo programa *prat1e2.m*. Simule o modelo obtido usando o mesmo sinal  $u$  como entrada (função *dlsim*), e plote em uma mesma figura ambos, o sinal  $y$  e o simulado. Use  $Npts = 200$ .

- Questão 1: Obtenha o equivalente contínuo do modelo discreto obtido e anote o resultado, indicando o(s) pólo(s) do modelo obtido (use a função *d2c.m* e assumo que o período de amostragem é unitário).

- Questão 2: há alguma discrepância entre o sinal de saída do sistema real e aquele obtido usando o modelo estimado? Explique a resposta.

### 3.2 Prática 2

Execute novamente o programa *smIdentPos.m*. (Utilização:  $[y, u] = \text{smIdentPos}(Npts);$ ). Verifique agora o segundo programa da preparação A usando os dados gerados pelo programa *smIdentPos.m*. Simule o modelo obtido usando o mesmo sinal  $u$  como entrada (função *dlsim*), e plote em uma mesma figura ambos, o sinal  $y$  e o simulado. Use  $Npts = 200$ .

- Questão 1: Obtenha o equivalente contínuo do modelo discreto obtido e anote o resultado, indicando o(s) pólo(s) do modelo obtido.
- Questão 2: Há alguma discrepância entre o sinal de saída do sistema real e aquele obtido usando o modelo estimado? Explique a resposta.

### 3.3 Prática 3

Execute na linha de comando do Matlab o programa *smIdentPos.m* (Utilização:  $[y, u] = \text{prat3}(Npts);$ ). Plote na tela os sinais discretos  $u$  e  $y$ . Verifique o programa da preparação 1 usando os dados gerados pelo programa *smIdentPos.m*. Simule o modelo obtido usando o mesmo sinal  $u$  como entrada (função *dlsim*), e plote em uma mesma figura ambos, o sinal  $y$  e o simulado. Use  $Npts = 200$ .

- Questão 1: Obtenha o equivalente contínuo do modelo discreto obtido e anote o resultado, indicando o(s) pólo(s) do modelo obtido (use a função *d2c.m* e assuma que o período de amostragem é unitário).
- Questão 2: há alguma discrepância entre o sinal de saída do sistema real e aquele obtido usando o modelo estimado? Explique a resposta.

### 3.4 Prática 4

Verifique o programa da prática 2 usando os dados gerados pelo programa fornecido *degrau.m*. (Utilização:  $[y, u] = \text{degrau}(Npts, L);$ ). Simule o modelo obtido usando o sinal  $u$  como entrada e plote em uma mesma figura ambos, o sinal  $y$  e o simulado. Use  $Npts = 200$  e  $L = 30$ .

- Questão 1: anote o modelo obtido na forma

$$G(s) = \frac{G_o}{T_1s + 1} \cdot e^{-Ls}$$

### 3.5 Prática 5

Monte no Simulink o método do relé da figura 3, usando a planta

$$G(s) = \frac{1}{s + 1} \cdot e^{-Ls}$$

Simule o experimento de modo a ver um número razoável de oscilações na saída da planta.

Blocos necessários no Simulink: *Transfer Fnc*, *Relay*, *Auto-Scale*, *Graph*, *Sum*, *Step*.

- Questão 1: obtenha estimativas para o ganho crítico e a frequência crítica observando a saída do sistema quando submetido a uma realimentação com relé.
- Questão 2: existe alguma diferença entre os valores exatos (calculados na preparação) e os valores obtidos com o experimento com relé? Justifique sua resposta.

## 4 ANEXOS

`smIdentPos.m` .....

```
function [y,u] = smIdentPos(Npts)
load ident_pos.txt
i=1;
u=ident_pos(1:Npts,1);
y=ident_pos(1:Npts,2);
end
```

.....



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E INFORMÁTICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

# MÓDULO SERVOMOTOR DC

Aluno: Sérgio Paulo Melo de Souza  
Orientador: João Batista

Campina Grande, Paraíba. 2011

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bancada do Módulo Servomotor</b>	<b>1</b>
2.1	Unidade Mecânica . . . . .	2
2.2	Unidade Elétrica . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Sistema de controle</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Modelo do Motor DC</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Controle por computador</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Projeto de controladores</b>	<b>6</b>

# 1 Introdução

A bancada do Módulo Servomotor serve como um modelo de um dispositivo muito popular, o Servomotor DC. A palavra servo vem do latim *servus* que significa escravo. O Servomotor destina-se a reagir a um determinado comando, por exemplo, uma posição ou velocidade desejada. Para que o dispositivo possa ser chamado de servomotor é necessário que ele seja equipado com uma unidade de medição de velocidade e posição e um acionamento.

As principais características que distinguem os servomotores dos demais motores são:

- Inércia do rotor minimizada;
- Indutância do motor minimizada;
- Suporte de tensão e magnetização melhorados;
- Projetado para suporta acelerações repentinas e operar em altas frequências.

## 2 Bancada do Módulo Servomotor

O layout da bancada de experimentos do Módulo Servomotor é mostrado na 1. Podemos dividi-la em duas unidades: mecânica e elétrica. Os dispositivos que compõem cada uma das unidades são descritos a seguir.

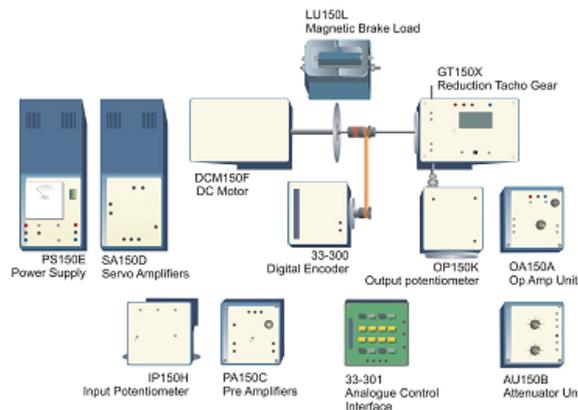


Figura 1: Layout da bancada do módulo servomotor.

## 2.1 Unidade Mecânica

A Unidade Mecânica (UE) do Módulo Servomotor é constituída dos seguintes componentes: motor dc, freio magnético, *gearbox*/tacômetro, potenciômetro de saída e o *encoder* digital.

O motor dc (DCM150F) é controlado através do Amplificador Servo. Este é conectado ao motor através de um conector especial inserido no *socket* em sua parte frontal. No eixo do motor dc temos um disco que é usado junto com o freio magnético para simular uma carga usando o efeito de correntes parasitas. O freio magnético (LU150L) é um ímã que de acordo com sua inclinação irá simular uma carga menor ou maior no eixo do motor dc.

A unidade GT150X tem duas funções, *gearbox* e tacômetro. Como *gearbox* ele serve como uma caixa de velocidades fornecendo uma menor proporção de voltas para o potenciômetro de saída. O *Gearbox* é conectado ao motor dc por meio de um acoplamento mecânico. Como tacômetro ele fornece um sinal de tensão analógico que será proporcional a velocidade do eixo do motor dc. Este sinal pode ser usado para controle de velocidade.

O potenciômetro de saída (OP150K) fornece um sinal de tensão analógica proporcional à posição do eixo do *gearbox*. Este sinal pode ser usado para controle de posição do eixo do *gearbox* ou do eixo do motor dc. Um sinal digital de posição do eixo do motor DC é fornecido pelo *encoder* digital (33-300). Ele entrega um sinal digital pulsante para a placa de E/S do PC. Seus pulsos podem ser contados fornecendo uma medição precisa correspondente a posição do eixo do motor dc. A taxa de variação angular fornece o sinal de velocidade angular. Esta unidade é conectada ao motor por meio de uma correia de transmissão e duas rodas dentadas.

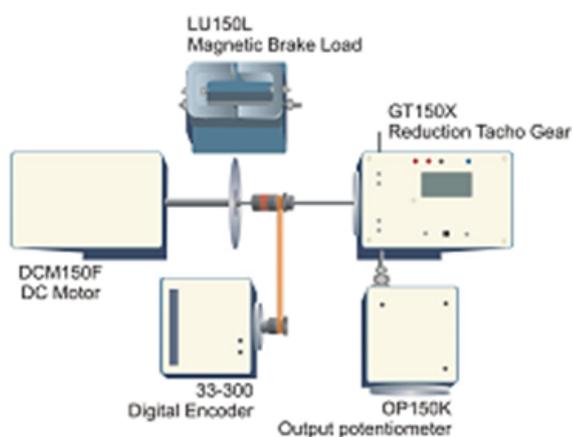


Figura 2: Unidade Mecânica (UM) do Módulo Servomotor.

## 2.2 Unidade Elétrica

A Unidade Elétrica (UE), mostrada na figura 3, realiza o condicionamento dos sinais permitindo que estes sejam transferidos para o computador através do cartão E/S. Os amplificadores são usados para transferir os sinais de controle, que foram gerados pelos algoritmos de controle, do computador para o motor dc. Os componentes dessa unidade são: fonte de potência, amplificador servo, pré-amplificador, unidade de interface, atenuador e o potenciômetro de entrada.

A fonte de potência (PS150E) alimenta todo o módulo com tensões entre -15V e +15V. O amplificador servo(SA150D) fornece potência controlada para o motor dc. O pré-amplificador (PA150C) fornece o sinal no intervalo correto para o amplificador servo. O atenuador (AU150B) define a entrada do circuito de controle do motor para o nível correto de operação.

Com o potenciômetro de entrada (IP150H) podemos estabelecer uma referência quando optarmos por um controle de posição manual. Ele fornece ainda uma tensão analógica proporcional à sua posição angular. Na unidade de interface (33-301) é realizado o dimensionamento das entradas e saídas analógicas da placa de E/S no computador para o intervalo correto de operação.

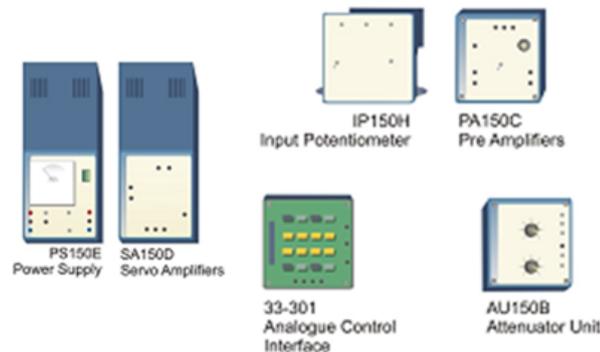


Figura 3: Unidade Elétrica (UE) do Módulo Servomotor.

## 3 Sistema de controle

No Módulo Servomotor temos um sistema de controle que é organizado como mostra a figura 4.

Um computador com o cartão de E/S da Advantech e com os ambientes Matlab e Simulink servem como unidade principal de controle.

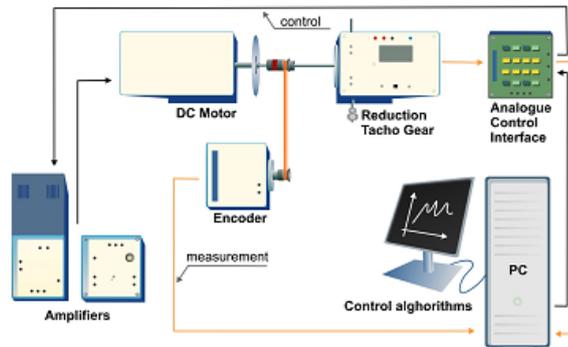


Figura 4: Sistema de controle da bancada do módulo servomotor.

Os sinais de controle são sinais de tensão no intervalo de  $-2,5V$  à  $+2,5V$  e são gerados pelos algoritmos de controle presentes no computador. Esses sinais são direcionados para uma série de amplificadores os quais são responsáveis pelo acionamento do motor dc.

A velocidade e a posição são medidas por meio do encoder digital ou do tacômetro e potenciômetro de saída. Estas medições são transferidas para o computador, onde todos os algoritmos de controle são localizados, através de uma unidade de interface analógica.

## 4 Modelo do Motor DC

Usualmente, modelos fenomenológicos são não-lineares, o que significa que ao menos uma das variáveis de estado ( $i$ -corrente,  $\theta$ -posição) é argumento de uma função não linear. Para representarmos o modelo como uma função de transferência este modelo deve ser linearizado. No motor dc presente no Módulo Servomotor estas não linearidades são pequenas, podendo ser desprezadas. Na figura 5 temos o modelo elétrico-mecânico do motor dc.

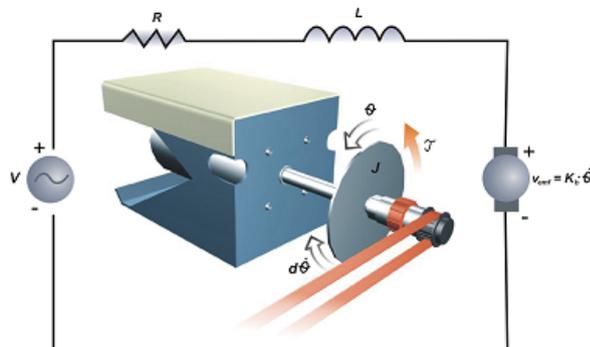


Figura 5: Modelo elétrico-mecânico do motor DC.

O torque gerado pelo motor dc é proporcional a corrente do motor ( $i$ ):

$$\tau = K_t \cdot i \quad (1)$$

onde  $K_t$  é a constante de torque.

A força eletromotriz induzida,  $v_{emf}$ , é uma tensão proporcional a velocidade angular do eixo:

$$v_{emf} = K_b \cdot \dot{\theta} = K_b \cdot \omega \quad (2)$$

onde  $K_b$  é uma constante que depende das propriedades físicas do motor e  $\dot{\theta} = \omega$  é a velocidade angular.

Usando a lei de Newton para o modelo mecânico do motor, obtemos:

$$J \cdot \ddot{\theta} = \sum \tau_i = d \cdot \dot{\theta} + K_t \cdot i \quad (3)$$

onde  $d$  é uma aproximação linear da fricção.

A equação que governa o comportamento elétrico do motor é:

$$u = -L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = -L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + K_b \cdot \dot{\theta} \quad (4)$$

A partir das equações (3) e (4) podemos construir o espaço de estados:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-d}{J} & \frac{K_t}{J} \\ \frac{-K_b}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot u \quad (5)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ i \end{bmatrix} \quad (6)$$

O motor usado é um motor dc de 24V com velocidade em vazio de 4050rpm. A figura 6 contém os valores de todos os parâmetros do motor.

## 5 Controle por computador

Devido a cooperação da Advantech e da Mathworks, o projeto de um sistema de controle para o Módulo Servomotor foi simplificado de forma significativa, de modo que, não torna-se necessário construir a aplicação em tempo real desde o início. Usando o kernel do Real-Time, você pode projetar diversos tipos de controladores e executá-los em

Parameter	Value
<b>J</b> - moment of inertia	$140 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
<b>K<sub>t</sub></b> - torque constant	$0.052 \text{ Nm/A}$
<b>K<sub>b</sub></b> - electromotive force constant	$0.057 \text{ Vs/rad}$
<b>d</b> - linear approximation of viscous friction	$1 \cdot 10^{-6} \text{ Nms/rad}$
<b>R</b> - resistance	$2.5 \Omega$
<b>L</b> - inductance	$2.5 \text{ mH}$

Figura 6: Parâmetros do motor dc.

um processo externo.

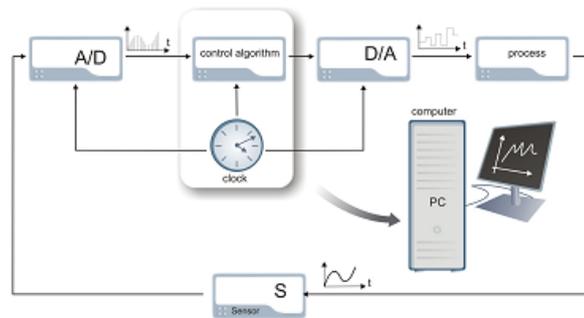


Figura 7: Diagrama do sistema de controle por computador.

O sistema de controle por computador mostrado na figura 6 consiste em quatro elementos: um computador, conversores D/A e A/D, o processo em si e sensores. No computador encontra-se o algoritmo de controle síncrono que gera o sinal de controle digital. Este sinal é convertido para a forma analógica pelo conversor D/A e é aplicado ao processo. As medições realizadas pelos sensores são transformadas em sinais digitais pelo conversor A/D e utilizadas pelo algoritmo de controle síncrono presente no computador.

## 6 Projeto de controladores

No projeto de controladores para o Módulo Servomoto é necessário o conhecimento de três blocos: Feedback Encoder, Feedback DAC e Analog Input. Estes blocos fornecem uma interface entre o computador e alguns dispositivos do módulo.

O Feedback Encoder tem apenas uma saída que corresponde a posição do eixo do motor em radianos. O bloco Analog Input tem uma saída e dependendo do canal escolhido na unidade de interface (33-301), estará lendo um sinal de tensão proporcional a posição ou a velocidade do dispositivo analógico apropriado (potenciômetro de saída ou tacômetro).

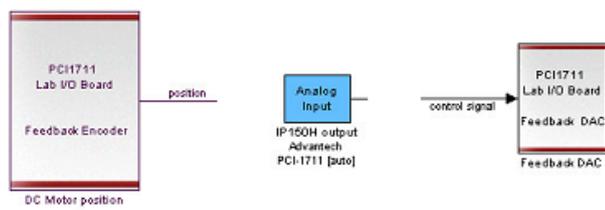


Figura 8: Bloco de equipamentos externos.