

# Identificação de sistemas utilizando modelos em bases de funções ortonormais com atraso

João Batista Morais dos Santos

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande - Campus de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Instrumentação e Controle

Péricles Rezende Barros, Ph.D

Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©João Batista Morais dos Santos, Fevereiro de 2013

Identificação de sistemas utilizando modelos em bases  
de funções ortonormais com atraso

João Batista Moraes dos Santos

*Tese de Doutorado apresentada em Fevereiro de 2013*

Péricles Rezende Barros, Ph.D  
Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil, Fevereiro de 2013

# Dedicatória

À minha esposa Ana Clara e à minha filha Maria Luísa.

## Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer à Deus, sem Ele nada seria possível. Agradecer pelo dom da vida, pela saúde e pelas graças concedidas todos os dias. Ainda gostaria de agradecer à Nossa Senhora pela intercessão em todos os momentos. Em seguida, gostaria de agradecer à minha esposa pela paciência, apoio, amizade e amor que sempre me ajudaram e me ajudam em todos os momentos. Aos meus pais pelos ensinamentos que me acompanham ao longo da vida.

Agradecer à meus amigos que, de uma forma ou de outra, contribuíram com sua amizade e com sugestões importantes para a realização deste trabalho. Entre todos, gostaria de agradecer em particular a George pelas discussões sobre controle e a Saulo pelo apoio com o LaTeX na geração de algumas figuras.

Ao Professor Péricles Rezende Barros, que me encaminhou durante a realização desse trabalho de tese, pelas críticas e sugestões relevantes feitas durante a orientação e pela disponibilidade durante todo o tempo. Além da amizade, apoio e oportunidades no decorrer dos anos.

Por fim, gostaria de agradecer aos professores Benemar Alencar, Maurício Beltrão, Wellington Motta, André Maitelli e Cláudio Garcia pela disposição em participar da banca de avaliação desse trabalho de Tese. Suas contribuições foram fundamentais na elaboração deste documento.

# Resumo

Neste trabalho estão apresentadas contribuições na área de identificação de sistemas para sistemas SISO (uma entrada e uma saída) e para sistemas MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas).

Primeiro são propostas técnicas de identificação de modelos de ordem reduzida para sistemas SISO, ou seja, modelos de primeira ordem com atraso (FOPTD) e de segunda ordem com atraso (SOPTD). Estes modelos são os mais utilizados no projeto e sintonia de controladores PID.

O projeto dos experimentos utilizados para obter as informações sobre o sistema são baseados no experimento do relé, ou seja, baseados na frequência crítica  $\omega_u$  em que a fase do sistema é  $-180^\circ$ . Os sinais gerados excitam o sistema em uma região de frequência que varia da baixa frequência até  $\omega_u$ . Desse modo, os modelos identificados representam o sistema em uma região maior de frequência do que aqueles obtidos utilizando apenas a informação do ponto crítico. Além disso, os modelos identificados utilizando as técnicas propostas são obtidos de forma combinada nos domínios do tempo e da frequência.

Em seguida, os modelos em bases de funções ortonormais são apresentados e utilizados quando modelos de ordem superior são necessários na representação do sistema. No entanto, a presença do atraso resulta em modelos de ordens desnecessariamente elevadas, já que aquele é descrito de forma conjunta com as dinâmicas do sistema. Desse modo, os modelos em bases de funções ortonormais com atraso (OBF-TD) são definidos. Estes são modelos combinados em que o atraso é descrito de forma separada.

No entanto, caso o objetivo final seja o projeto de controladores de ordem reduzida, como por exemplo controladores PID, ainda são necessários modelos de ordens reduzidas do tipo FOPTD e SOPTD. Desse modo, são propostas técnicas de redução de modelos utilizando modelos OBF-TD de ordens superiores com ou sem compensação do resíduo. A compensação do resíduo (informação descartada) é necessária quando a ordem do sistema é maior que um (primeira ordem) ou dois (segunda ordem). Como a ordem do sistema nem sempre é conhecida, são formuladas duas proposições para verificação da necessidade da compensação.

No contexto dos sistemas MIMO, as técnicas propostas para modelos de ordens reduzidas e para modelos em bases de funções ortonormais com atraso são formuladas. Para esses tipos de sistemas outra escolha deve ser feita durante a etapa de identificação: a escolha da estrutura multivariável. Diversas estruturas são apresentadas e descritas em

função das informações preliminares disponíveis sobre o sistema. Essas informações preliminares são as constantes de tempo e os atrasos. Além disso a metodologia experimental também deve ser escolhida: independente ou descentralizada. Na independente uma entrada é excitada por vez e na descentralizada todas as entradas são excitadas ao mesmo tempo.

Os sistemas MIMO diferem dos sistemas SISO devido à existência das interações e das direções. As direções são particularmente importantes na subclasse dos sistemas MIMO mal-condicionados. As direções se referem à dependência do ganho do sistema com relação às combinações de entradas aplicadas. Desse modo, certas combinações produzem uma variação maior nas saídas do que outras. Algumas soluções no sentido do projeto dos experimentos de identificação em malha aberta são avaliadas nesse contexto. Além disso, a qualidade dos modelos identificados utilizando resultados de simulação de um modelo simplificado de uma coluna de destilação de alta pureza são apresentados.

# Abstract

In this work are presented contributions for the identification of SISO (single input, single output) and MIMO (multiple inputs, multiple outputs) systems.

First, identification techniques of reduced order models for SISO systems are proposed, that is first order plus time delay (FOPTD) models and second order plus time delay (SOPTD) models. These models are the most common used models in the PID controllers project and tuning.

The identification experiment is based on the information obtained by the relay feedback experiment, that is based on the critical frequency  $\omega_u$  where the phase is  $-180^\circ$ . The excitation is composed of a high frequency part (relay) and a low frequency part (pulse). This way, the identified models represent the system in a wider frequency region than those models identified using just the critical point information. In addition, the identified models obtained using the proposed techniques are based on the combined information on the time and on the frequency domains.

The orthonormal bases function models are presented and they are used as high order system models. But if the time delay is present, the model order is unnecessarily high. This way, the orthonormal bases function models plus time delay (OBF-TD) are defined. These models are combined models of an orthonormal bases function model part and a time delay part.

But if the model is intended to be used to PID controller tuning, reduced order models as FOPTD or SOPTD models are required. So, it is proposed a reduction model technique using OBF-TD models with or without residue compensation. The residue compensation (information not considered) is necessary if the system order is higher than one (first order) or two (second order). Two propositions are present to verify if the residue compensation on the reduction technique is necessary because the system order is not necessarily known a priori.

The identification techniques proposed for reduced order models and orthonormal bases function models plus time delay are formulated for MIMO systems. For MIMO systems another choice need to be made: the multivariable structure. Several structures are presented and described based on the preliminary information available. These information are the time constants and the time delays. In addition to that, the experimental methodology need also to be chosen: independent or decentralized. With the independent methodology one input is excited at a time and with the decentralized methodology all the inputs are excited at the same time.

The main differences between MIMO systems and SISO systems are the presence of interactions and directions. The directionality is very important for ill-conditioned MIMO systems. These directions describe the system gain dependency with respect to the input combinations. This way, certain combinations results on a higher variation on the outputs than others. Some open loop experimental design techniques are evaluated in this context and simulation results based on a simplified high purity distillation column model are presented.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
1.1	Motivação . . . . .	4
1.2	Revisão bibliográfica . . . . .	7
1.2.1	Modelos FOPTD e SOPTD . . . . .	7
1.2.2	Bases de funções ortonormais . . . . .	8
1.2.3	Sistema MIMO mal-condicionados . . . . .	10
1.3	Definição do problema . . . . .	12
1.4	Contribuições . . . . .	12
1.5	Trabalhos publicados . . . . .	13
1.6	Organização do texto . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Fundamentos Teóricos</b>	<b>16</b>
2.1	Sistemas e sinais contínuos no tempo . . . . .	16
2.1.1	Sistemas e suas representações . . . . .	17
2.1.2	Normas de vetores, sinais e sistemas . . . . .	20
2.2	Espaço de Hilbert e bases de funções ortonormais . . . . .	22
2.2.1	Espaço de Hilbert . . . . .	22
2.2.2	Funções ortonormais . . . . .	24
2.2.3	Modelos em bases de funções ortonormais . . . . .	24
2.2.4	Aproximação da resposta ao impulso . . . . .	25
2.2.5	Aproximação da função de transferência . . . . .	25
2.2.6	Funções de Takenaka-Malmquist . . . . .	26
2.2.7	Escolha das funções base . . . . .	27
2.3	Projeto de experimentos . . . . .	28
2.3.1	Experimentos preliminares . . . . .	28
2.3.2	Experimentos finais . . . . .	30
2.4	Considerações finais . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Identificação de Modelos FOPTD e SOPTD</b>	<b>33</b>
3.1	Introdução . . . . .	33
3.2	Experimento de identificação . . . . .	34
3.3	Identificação de modelos FOPTD . . . . .	38
3.3.1	Informação no domínio da frequência . . . . .	38
3.3.2	Limites para os parâmetros . . . . .	40
3.3.3	Técnica de identificação no domínio do tempo . . . . .	41
3.4	Identificação de modelos SOPTD . . . . .	44
3.5	Exemplos de simulação . . . . .	47
3.5.1	Exemplo 1 . . . . .	47
3.5.2	Exemplo 2 . . . . .	51
3.5.3	Exemplo 3 . . . . .	53
3.6	Plataforma experimental . . . . .	56
3.6.1	Descrição . . . . .	57
3.6.2	Principais componentes . . . . .	57
3.6.3	Resultados experimentais . . . . .	59
3.7	Considerações finais . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Identificação de Sistemas SISO utilizando Modelos OBF-TD</b>	<b>62</b>
4.1	Introdução . . . . .	63
4.2	Modelos OBF-TD . . . . .	64
4.3	Estimação de Modelos OBF-TD . . . . .	66
4.3.1	Experimento de identificação . . . . .	66
4.3.2	Estimação . . . . .	66
4.4	Modelos OBF-TD em espaço de estados . . . . .	67
4.5	Identificação de modelos FOPTD e SOPTD utilizando modelos OBF-TD . . . . .	70
4.5.1	Modelos OBF-TD de ordem reduzida . . . . .	71
4.5.2	Modelos OBF-TD de ordem superior . . . . .	74
4.6	Exemplos de simulação . . . . .	82
4.6.1	Exemplo 1 . . . . .	83
4.6.2	Exemplo 2 . . . . .	86
4.6.3	Exemplo 3 . . . . .	89
4.6.4	Exemplo 4 . . . . .	91
4.7	Resultados experimentais . . . . .	97
4.8	Considerações finais . . . . .	100

<b>5</b>	<b>Identificação de Sistemas MIMO</b>	<b>101</b>
5.1	Introdução . . . . .	101
5.2	Modelos OBF-TD MIMO . . . . .	103
5.2.1	Definição . . . . .	103
5.2.2	Estruturas multivariáveis . . . . .	104
5.2.3	Estimação de modelos OBF-TD . . . . .	105
5.3	Modelos OBF-TD em espaço de estados . . . . .	106
5.4	Identificação de modelos FOPTD e SOPTD utilizando modelos OBF-TD . . . . .	111
5.4.1	Modelos OBF-TD de ordem reduzida . . . . .	111
5.4.2	Modelos OBF-TD de ordem superior . . . . .	113
5.5	Exemplo de simulação . . . . .	116
5.5.1	PARTE I - Estimação de modelos FOPTD e SOPTD . . . . .	117
5.5.2	PARTE II - Estimação de modelos OBF-TD . . . . .	119
5.6	Resultados experimentais . . . . .	121
5.7	Considerações finais . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Sistemas MIMO mal-condicionados</b>	<b>129</b>
6.1	Introdução . . . . .	129
6.2	Direções de maior e menor ganho . . . . .	130
6.3	Colunas de destilação de alta pureza . . . . .	131
6.4	Projeto dos experimentos . . . . .	134
6.4.1	Sinais não correlacionados . . . . .	135
6.4.2	Sinais rotacionados . . . . .	135
6.4.3	Sinais combinados . . . . .	137
6.5	Avaliação das direções . . . . .	140
6.6	Estimação do menor valor singular . . . . .	142
6.7	Qualidade dos modelos identificados . . . . .	143
6.7.1	Índices de qualidade . . . . .	143
6.7.2	Resultados de simulação . . . . .	144
6.8	Considerações finais . . . . .	148
<b>7</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>150</b>
7.1	Conclusões . . . . .	150
7.2	Trabalhos Futuros . . . . .	152
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>154</b>

<b>A</b>	<b>Produtos de Matrizes</b>	<b>166</b>
A.1	Produto de Hadamard . . . . .	166
A.2	Produto de Kronecker . . . . .	166

# Glossário

ARMAX	<i>Autoregressive moving average with exogenous input</i> (autorregressivos com entrada exógena e media móvel)
ARX	<i>Autoregressive with exogenous input</i> (autorregressivo com entrada exógena)
ATV	<i>Autotune Variation Method</i>
BJ	Box-Jenkins
CLP	Controlador Lógico Programável
CPU	<i>Central Process Unit</i> (unidade central de processamento)
FIR	<i>Finite impulse response</i> (resposta ao impulso finita)
FOPTD	<i>First order plus time delay</i> (primeira ordem com atraso)
GBN	<i>Generalized binary noise</i> (ruído binário generalizado)
IHM	Interface Humano Máquina
LIT	Linear e invariante no tempo
MIMO	<i>Multiple inputs multiple outputs</i> (múltiplas entradas múltiplas saídas)
MISO	<i>Multiple inputs single output</i> (múltiplas entradas uma saída)
OBF	<i>Orthonormal basis function</i> (bases de funções ortonormais)
OBF-TD	<i>Orthonormal basis function plus time delay</i> (bases de funções ortonormais com atraso)
OE	<i>Output error</i> (erro na saída)
OPC	<i>OLE for Process Control</i>
PC	<i>Personal Computer</i> (computador pessoal)
PID	Proporcional Integral Derivativo
PRBS	<i>Pseudo binary random signal</i> (sequência binária pseudo-aleatória)
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> (modulação por largura de pulso)

RG	<i>Relative gain array</i> (vetor de ganhos relativos)
SCADA	<i>Supervisory Control And Data Acquisition</i> (sistema supervisorio de controle e aquisiçao de dados)
SISO	<i>Single input single output</i> (uma entrada uma saıda)
SOPTD	<i>Second order plus time delay</i> (segunda ordem com atraso)
SVD	<i>Singular value decomposition</i> (decomposiçao em valores singulares)
TITO	<i>Two input two output</i> (duas entradas e duas saıdas)

# Lista de Tabelas

2.1	Tipos de relé . . . . .	30
3.1	Fases em função de $N_2$ e de $\alpha$ . . . . .	37
3.2	Exemplo 1 - Modelos identificados com diversos ruídos . . . . .	48
3.3	Exemplo 1 - Modelos identificados . . . . .	49
3.4	Exemplo 1 - Estimativa dos parâmetros . . . . .	49
3.5	Exemplo 1 - Limites para os parâmetros . . . . .	49
3.6	Exemplo 1 - Parâmetros em cada iteração . . . . .	49
3.7	Exemplo 1 - $\varepsilon$ e $E$ . . . . .	50
3.8	Exemplo 2 - Modelos identificados . . . . .	51
3.9	Exemplo 2 - $\varepsilon$ e $E$ . . . . .	52
3.10	Exemplo 3 - Modelos identificados . . . . .	53
3.11	Exemplo 3 - Estimativa dos parâmetros . . . . .	54
3.12	Exemplo 3 - Limites para os parâmetros . . . . .	54
3.13	Exemplo 3 - Parâmetros em cada iteração . . . . .	55
3.14	Exemplo 3 - $\varepsilon$ e $E$ . . . . .	55
3.15	Resultados experimentais - Modelos identificados . . . . .	59
3.16	Resultados experimentais - Estimativa dos parâmetros . . . . .	60
3.17	Resultados experimentais - Limites para os parâmetros . . . . .	60
3.18	Resultados experimentais - $\varepsilon$ . . . . .	61
4.1	Exemplo 1 - Modelos identificados . . . . .	83
4.2	Exemplo 1 - Coeficientes estimados . . . . .	85
4.3	Exemplo 2 - Modelos identificados SOPTD . . . . .	86
4.4	Exemplo 2 - $\varepsilon$ e $E$ . . . . .	87
4.5	Exemplo 2 - Coeficientes estimados . . . . .	88
4.6	Exemplo 3 - $\varepsilon$ e $E$ . . . . .	91
4.7	Exemplo 4 - Coeficientes estimados . . . . .	92

4.8	Exemplo 4 - $\varepsilon$ e $E$ . . . . .	92
4.9	Exemplo 4 - $\varepsilon$ e $E$ . . . . .	96
4.10	Resultados experimentais - Coeficientes estimados utilizando bases de Laguerre . . . . .	98
4.11	Resultados experimentais - Coeficientes estimados utilizando bases de Kautz	98
4.12	Resultados experimentais - $\varepsilon$ . . . . .	98
4.13	Resultados experimentais - Modelos OBF-TD reduzidos . . . . .	99
4.14	Resultados experimentais - $\varepsilon$ Modelos OBF-TD reduzidos . . . . .	99
5.1	Exemplo - $\varepsilon$ e $E$ . . . . .	119
5.2	Exemplo Modelo OBF-TD com bases de Laguerre . . . . .	120
5.3	Exemplo - Modelo OBF-TD com bases de Kautz . . . . .	120
5.4	Exemplo - $\varepsilon$ e $E$ . . . . .	121
5.5	Resultados experimentais - Modelos FOPTD e SOPTD . . . . .	123
5.6	Resultados experimentais - Modelo OBF-TD com bases de Laguerre . . . . .	125
5.7	Resultados experimentais - Modelo OBF-TD com bases de Kautz . . . . .	126
5.8	Resultados experimentais - $\varepsilon$ para modelos de ordem elevada $n = 6$ . . . . .	126
5.9	Resultados experimentais - Modelos FOPTD reduzidos . . . . .	127
5.10	Resultados experimentais - Modelos SOPTD reduzidos . . . . .	127
5.11	Resultados experimentais - $\varepsilon$ para modelos de ordem reduzida . . . . .	127
6.1	Notação . . . . .	132
6.2	Direções de maior e menor ganho . . . . .	134
6.3	Resultados de identificação . . . . .	146



# Lista de Figuras

2.1	Função geral do relé . . . . .	30
3.1	Experimento preliminar . . . . .	35
3.2	Curvas de fase em função de $\alpha$ - o símbolo $\bullet$ corresponde a $N_2 = 2$ e o símbolo $\blacksquare$ corresponde a $N_2 = 3$ . . . . .	37
3.3	Exemplo 1 - Excitação proposta . . . . .	48
3.4	Exemplo 1 - Diagramas de Nyquist . . . . .	50
3.5	Exemplo 1 - Respostas ao degrau . . . . .	50
3.6	Exemplo 2 - Excitação proposta . . . . .	51
3.7	Exemplo 2 - Diagramas de Nyquist . . . . .	52
3.8	Exemplo 2 - Respostas ao degrau . . . . .	53
3.9	Exemplo 3 - Excitação proposta . . . . .	54
3.10	Exemplo 3 - Diagramas de Nyquist . . . . .	56
3.11	Exemplo 3 - Respostas ao degrau . . . . .	56
3.12	Fotografia da plataforma experimental . . . . .	58
3.13	Diagrama do conjunto módulos Peltier, ventilador, dissipador e placa de metal . . . . .	58
3.14	Experimentos - Excitação proposta . . . . .	60
3.15	Resultados experimentais - Respostas ao degrau . . . . .	61
4.1	Representação esquemática da expansão em série do modelo OBF . . . . .	68
4.2	Exemplo 1 - Experimento de identificação utilizando PRBS . . . . .	84
4.3	Exemplo 1 - Resposta ao degrau . . . . .	84
4.4	Exemplo 1 - Resposta do processo ao PRBS (validação) . . . . .	85
4.5	Exemplo 1 - Erro absoluto em função do tempo . . . . .	86
4.6	Exemplo 2 - Resposta ao degrau . . . . .	87
4.7	Exemplo 2 - Erro absoluto em função do tempo . . . . .	88
4.8	Exemplo 3 - Resposta ao degrau . . . . .	90

4.9	Exemplo 3 - Diagramas de Nyquist . . . . .	90
4.10	Exemplo 4 - Resposta ao degrau . . . . .	93
4.11	Exemplo 4 - Diagramas de Nyquist . . . . .	93
4.12	Exemplo 4 - Resposta ao degrau . . . . .	95
4.13	Exemplo 4 - Diagramas de Nyquist . . . . .	96
4.14	Experimentos - Excitação utilizando PRBS . . . . .	97
4.15	Experimento - Resposta do processo ao PRBS (validação) . . . . .	99
5.1	Representação de um processo MIMO $p \times m$ . . . . .	102
5.2	Estrutura multivariável do modelo OBF para duas entradas e duas saídas .	107
5.3	Exemplo - Excitação proposta . . . . .	117
5.4	Exemplo - Diagramas de Nyquist . . . . .	118
5.5	Exemplo - Respostas ao degrau . . . . .	119
5.6	Exemplo - Resposta do processo ao PRBS . . . . .	120
5.7	Experimentos - Entrada $u_1$ excitada e entrada $u_2$ monitorada . . . . .	122
5.8	Experimentos - Entrada $u_2$ excitada e entrada $u_1$ monitorada . . . . .	122
5.9	Resultados experimentais - Respostas dos modelos identificados FOPTD e SOPTD . . . . .	123
5.10	Experimentos - Excitações utilizando sinais PRBS . . . . .	124
5.11	Experimentos - Saídas . . . . .	125
5.12	Experimento - Resposta do processo ao PRBS (validação) . . . . .	126
6.1	Esquema de uma coluna de destilação . . . . .	132
6.2	Valores singulares em função da frequência . . . . .	133
6.3	Excitações não correlacionadas . . . . .	135
6.4	Saídas utilizando as excitações não correlacionadas . . . . .	136
6.5	Excitações rotacionadas . . . . .	137
6.6	Saídas utilizando as excitações rotacionadas . . . . .	138
6.7	Excitações com sinais combinados . . . . .	139
6.8	Saídas utilizando as excitações com sinais combinados . . . . .	139
6.9	Direção das saídas utilizando sinais não correlacionados . . . . .	140
6.10	Direção das saídas utilizando sinais rotacionados . . . . .	141
6.11	Direção das saídas utilizando sinais combinados . . . . .	141
6.12	Curvas do menor valor singular em função da frequência - razão ótima entre as amplitudes das direções de maior e menor ganho . . . . .	142
6.13	Curvas do menor valor singular em função da frequência - 10% da razão ótima entre as amplitudes das direções de maior e menor ganho . . . . .	143

6.14 Saídas do modelo identificado em resposta ao experimento proposto . . . . 145

6.15 Valores singulares em função da frequência . . . . . 146

6.16 Curvas do menor valor singular em função da frequência para os sinais não correlacionados - traço sólido é o valor real e os tracejados são os valores estimados . . . . . 147

6.17 Curvas do menor valor singular em função da frequência para os sinais rotacionados - traço sólido é o valor real e os tracejados são os valores estimados . . . . . 148

6.18 Curvas do menor valor singular em função da frequência para os sinais combinados - traço sólido é o valor real e os tracejados são os valores estimados 148

# Capítulo 1

## Introdução

Neste Capítulo estão descritas as motivações para o desenvolvimento do trabalho, a definição do problema tratado e as contribuições. Além disso, alguns dos trabalhos desenvolvidos na literatura são apresentados na revisão bibliográfica.

### 1.1 Motivação

A modelagem pode, em termos gerais, ser descrita como a atividade de desenvolvimento de modelos. Estes modelos podem ser mentais, matemáticos, gráficos entre outros. Tais modelos são bastante importantes em diversas áreas como economia, física e engenharia.

Existem diversos motivos que justificam a modelagem ou a construção de modelos. Alguns destes são:

- Melhorar o conhecimento do sistema para previsão de falhas;
- Prever o comportamento futuro;
- Validar outros modelos existentes;
- Projetar o sistema de controle.

As metodologias de modelagem podem ser classificadas em três categorias: caixa branca, caixa preta e caixa cinza. A metodologia caixa branca baseia-se no conhecimento das leis fundamentais que regem o sistema, por exemplo as leis físicas. Na metodologia caixa preta não é utilizado nenhum conhecimento sobre o sistema, somente o comportamento em termos dos sinais das entradas e das saídas (dados medidos) está disponível. A combinação dessas duas metodologias resulta na metodologia caixa cinza.

Em muitas situações, a utilização da metodologia caixa branca ou da modelagem teórica se torna muito complexa ou até mesmo impossível. Assim, os modelos são obtidos

a partir de informações de experimentos realizados no processo real. A metodologia caixa preta e, em parte, a caixa cinza também são conhecidas como identificação de sistemas.

Do ponto de vista da identificação de sistemas, é possível listar alguns passos essenciais para o procedimento de obtenção de modelos (LJUNG, 1999):

- Projeto do experimento e coleta dos dados;
- Processamento dos dados;
- Escolha da classe de modelos;
- Parametrização da classe de modelos;
- Escolha do critério de identificação;
- Cálculo do modelo;
- Validação do modelo obtido.

Frequentemente o modelo obtido possui restrição em complexidade, ou seja, possui restrição em sua ordem. Um exemplo típico em engenharia de controle é a obtenção de modelos para o projeto de controladores: em especial, o projeto de controladores PID. Os modelos utilizados são de primeira ou segunda ordem com ou sem atrasos no tempo. Nessas situações, caso o modelo obtido seja de ordem elevada, é necessário adicionar um passo a mais no procedimento anterior:

- Redução do modelo, aproximação do modelo obtido por um modelo de ordem reduzida.

Duas premissas podem ser escolhidas durante o procedimento de identificação. Na primeira o objetivo é encontrar o modelo real do processo. Na segunda o objetivo é encontrar o modelo que melhor aproxima o processo segundo um determinado critério. Do ponto de vista do projeto do controlador, o critério pode ser a região de frequência em que o modelo será utilizado.

Nos primeiros trabalhos de identificação, o objetivo era encontrar o modelo real do processo (EYKHOFF, 1974). No entanto, dadas as classes de modelos utilizadas, o conceito de modelo real foi deixado de lado (LJUNG, 1999). Assim, o objetivo passou a ser o de como encontrar um modelo que melhor aproxime o processo (identificação aproximada). Os procedimentos de identificação aproximada mais utilizados são aqueles que minimizam o erro de predição. Neste trabalho são analisados os modelos por erro de predição de um passo a frente.

Os modelos obtidos utilizando a minimização do erro de predição geralmente representam melhor o processo na região de alta frequência (LJUNG, 1999). No entanto, para aplicações de controle e predição, outras regiões de frequência também são importantes. Esse problema pode ser resolvido a partir da pré-filtragem dos dados medidos. No entanto, como é necessário o modelo do processo para determinar o pré-filtro, esse problema não pode ser resolvido previamente, ou seja, não é possível determiná-lo antes da identificação do modelo (LJUNG, 1987, 1999).

Outro ponto que merece destaque é a não-linearidade nos parâmetros apresentada quando estruturas de modelos gerais são utilizadas. Desse modo, o critério dos mínimos quadrados não possui solução analítica para o problema de estimação. A função resultante é não linear nos parâmetros e o mínimo global pode não ser encontrado (otimização não convexa).

A partir da estrutura de modelo geral, duas estruturas específicas que resultam em funções lineares nos parâmetros são particularmente importantes: modelos ARX e modelos FIR. No entanto, os modelos do processo e do ruído não são parametrizados de forma separada quando essas estruturas são utilizadas e podem ser necessários muitos coeficientes para representar o processo com a exatidão desejada.

Dessa forma, nos últimos anos a representação de processos utilizando bases de funções ortonormais tem sido bastante utilizada na identificação de sistemas (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005). A propriedade ortonormal resulta em uma grande simplificação, tanto na análise quanto na síntese de modelos. O problema de estimação de parâmetros utilizando o critério dos mínimos quadrados é linear (otimização convexa) e os modelos do processo e do ruído podem ser parametrizados de forma independente (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005). Ainda, com a escolha apropriada das funções base, o número de parâmetros que devem ser estimados pode ser reduzido sem sacrificar a exatidão do modelo.

Além da escolha das funções base, o desenvolvimento de modelos OBF com um número reduzido de parâmetros só é possível se forem utilizadas boas estimativas dos polos dominantes do processo (TUFA; RAMASAMY; SHUHAIMI, 2011). As estimativas dos polos dominantes são normalmente obtidas a partir de um experimento de resposta ao degrau ou são baseadas no conhecimento do operador.

Em engenharia de controle, tanto os modelos obtidos utilizando o erro de predição quanto os modelos obtidos utilizando bases de funções ortonormais são normalmente utilizados para o projeto de controladores. Os controladores mais utilizados atualmente são os controladores PID. Estima-se que mais de 95% das malhas de controle utilizam essa estrutura (YU, 1999; ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006). Modelos simples de primeira ou

segunda ordem com atraso são amplamente utilizados na sintonia desses controladores. O modelo que tem recebido mais atenção é o modelo FOPTD (LJUNG, 2002).

No entanto, os modelos obtidos utilizando funções em bases ortonormais são normalmente de ordem elevada e, assim, devem ser reduzidos para modelos mais simples de primeira ou segunda ordem com atraso, de modo a realizar o projeto ou sintonia dos controladores PID. Porém, a utilização de modelos OBF na aproximação de processos com atraso resulta em modelos com ordens desnecessariamente elevadas devido à representação em série infinita do atraso.

## 1.2 Revisão bibliográfica

### 1.2.1 Modelos FOPTD e SOPTD

A identificação de modelos de ordem reduzida é de grande importância para o projeto e sintonia de controladores PID. Os modelos mais utilizados são os modelos FOPTD e SOPTD (HANG; ASTROM; WANG, 2002; ATHERTON, 2006a; MAJHI, 2007a).

Entre os diversos modelos possíveis para representar o sistema real, os de ordem reduzida tem sido fonte de muitos estudos (WANG; HANG; ZOU, 1997). O sucesso na utilização dos modelos de ordem reduzida se deve ao fato de a região de frequência, na qual a fase varia de 0 até  $-\pi$  rad, refletir a característica fundamental da resposta do sistema (LEVA, 2005; SUNG; LEE; LEE, 1998; TAN; LEE; JIANG, 2001). Dessa forma, um modelo que represente bem o processo nessa região de frequência contribui para um melhor controlador (HANG; ASTROM; WANG, 2002).

Em 1942, Ziegler e Nichols (ZIEGLER; NICHOLS, 1942) sugeriram duas técnicas simples para determinar os parâmetros de um controlador: a primeira utilizando a estimação de um modelo FOPTD a partir da resposta ao degrau; a segunda utilizando a informação do ganho crítico e da frequência crítica.

A partir dos problemas práticos apresentados pelas técnicas anteriores, Åström e Hägglund propuseram a substituição do ganho proporcional por um relé (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984). Dessa forma, a informação do sistema é obtida do ciclo limite resultante.

A identificação através do experimento do relé tem recebido muita atenção após o trabalho pioneiro de Åström e Hägglund. Luyben (LUYBEN, 1987) foi um dos primeiros a utilizar o experimento do relé na identificação de sistemas. O método de identificação e sintonia proposto, denominado ATV, se tornou um padrão para controle de processos químicos.

Mais tarde, a técnica ATV foi modificada de modo a eliminar a necessidade do co-

nhecimento prévio do ganho estático do sistema (LI; ESKINAT; LUYBEN, 1991). Outras modificações foram feitas para melhorar a identificação do modelo (CHANG; SHEN; YU, 1992). O desenvolvimento da utilização do experimento do relé para sintonia de controladores, até 1999, está documentado em (YU, 1999).

Luyben (LUYBEN, 2001) propôs a utilização do formato da resposta ao experimento do relé para melhorar as estimativas dos parâmetros do modelo FOPTD. Em (THYAGARAJAN; YU, 2003; PANDA; YU, 2005), essa técnica foi estendida para os modelos SOPDT.

Srinivasan e Chidambaram (SRINIVASAN; CHIDAMBARAM, 2003) apresentaram uma técnica para estimação dos parâmetros de um modelo FOPDT a partir de apenas um experimento do relé assimétrico. Vivek e Chidambaram (VIVEK; CHIDAMBARAM, 2005a) sugeriram uma modificação na técnica anterior para utilizar o experimento do relé simétrico. Os mesmos autores ainda sugeriram uma outra técnica para obtenção dos parâmetros de um modelo FOPDT instável (VIVEK; CHIDAMBARAM, 2005b).

Mais recentemente, na identificação de modelos FOPDT e SOPDT baseados no experimento de resposta ao degrau destacam-se as técnicas apresentadas em (FEDELE, 2009; LIU; GAO, 2010; DU et al., 2011; BALAGUER; ALFARO; ARRIETA, 2011; CHEN; LI; DING, 2011; HERRERA; IBEAS, 2012) e para técnicas baseadas no experimento do relé destacam-se (LIU; GAO, 2009; LEE; SUNG; EDGAR, 2010a, 2010b; LI; QI; SHENG, 2011; LEE et al., 2011; CHEN, 2011; VIVEK; CHIDAMBARAM, 2012).

## 1.2.2 Bases de funções ortonormais

A utilização de funções ortonormais em processamento de sinais é clássica. Os primeiros trabalhos publicados que utilizaram funções ortonormais foram os de N. Wiener e Y. W. Lee (LEE, 1931, 1960; WIENER, 1956). Tanto Wiener quanto Lee utilizaram as funções de Laguerre. Estas funções são definidas pelos polinômios de Laguerre apresentados em 1879 pelo matemático francês E. Laguerre. A relação entre os polinômios de Laguerre e as funções de Laguerre é determinada utilizando a transformação bilinear e as transformadas de Fourier.

Takenaka e Malmquist desenvolveram, de forma independente, praticamente o mesmo trabalho em bases de funções ortonormais racionais no contexto da aproximação de sistemas utilizando interpolação (TAKENAKA, 1925; MALMQUIST, 1925). As bases desenvolvidas foram creditadas ao dois pesquisadores e são atualmente conhecidas como funções de Takenaka-Malmquist ou bases de funções ortonormais generalizadas.

As funções de Takenaka-Malmquist foram utilizadas por J. L. Walsh para a aproximação de sistemas tanto no domínio do tempo discreto quanto no domínio do tempo



contínuo. Dentre os diversos trabalhos publicados, o que resume a maior parte dos seus resultados segue em (WALSH, 1935).

Nos anos cinquenta e sessenta, o problema da ortogonalização de um conjunto de funções exponenciais contínuas foi resolvido e apresentado em (KAUTZ, 1954). A ideia foi determinar a transformada de Laplace correspondente. Outros trabalhos relacionados foram desenvolvidos no mesmo período (HEAD, 1956; YOUNG; HUGGINS, 1962). As aplicações foram em grande parte nos projetos de filtros e nas aproximações de sinais. Uma visão geral da aproximação de sinais utilizando funções exponenciais ortogonais é apresentada em (LAI, 1985; KAMMLER; MCGLINN, 1987).

Neste mesmo período, a aplicação das bases de funções ortonormais na identificação de sistemas utilizando as funções de Takenaka-Malmquist segue em (ROSS, 1964; BROOME, 1965; MENDEL, 1966). Em (CLOWES, 1965; KING; PARASKEVOPOULOS, 1977, 1979), o problema de identificação de sistemas utilizando especificamente bases de Laguerre foi tratado.

Nas décadas de oitenta e noventa, o interesse na parametrização de modelos utilizando bases de funções ortonormais aumentou bastante. A propriedade ortonormal e a linearidade nos parâmetros foram algumas características que motivaram o interesse. Nesta época, os trabalhos que seguem em (WAHLBERG, 1991, 1994, 1996) utilizando as bases de Laguerre e Kautz são clássicos. Outros trabalhos relacionados à identificação de sistemas seguem em (CLEMENT, 1982; NURGES, 1987; CLUETT; WANG, 1991; HEUBERGER; HOF; BOSGRA, 1995; HOF; HEUBERGER; BOKOR, 1995; BODIN; SILVA; WAHLBERG, 1996; NINNESS; GUSTAFSSON, 1997; AKCCAY; NINNESS, 1998).

Mais recentemente, entre as contribuições na formulação teórica das propriedades das aproximações de sistemas utilizando bases de funções ortonormais, como polarização e variância, podem-se destacar os trabalhos que seguem em (AKCCAY, 2000; XIE; LJUNG, 2001; AKCCAY, 2001; NINNESS; HJALMARSSON, 2002; LECCHINI; GEVERS, 2004; NINNESS; HJALMARSSON, 2004). A principal referência em bases de funções ortonormais racionais atualmente é o livro publicado em 2005 e que traz as contribuições de diversos autores (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005).

Após o grande número de aplicações das bases de funções ortonormais na identificação de sistemas, essa área ainda é de grande interesse atualmente. Entre os trabalhos apresentados destacam-se (GOMEZ; BAEYENS, 2004; NALBANTOGLU et al., 2003; MBAREK; MESSAOUD; FAVIER, 2003; WANG, 2004; MADAKYARU; NARANG; PATWARDHAN, 2009; PATWARDHAN; SHAH, 2005; BADWE; PATWARDHAN; GUDI, 2011; TUFA; RAMASAMY; SHUHAIMI, 2011).

No contexto dos modelos OBF para sistemas MIMO, um dos primeiros trabalhos

em que os modelos OBF foram utilizados na identificação de sistemas MIMO foi o de (HEUBERGER; HOF; BOSGRA, 1990). Outros trabalhos do mesmo autor publicados seguem em (HEUBERGER; HOF; BOSGRA, 1995; HEUBERGER; HOF, 1996).

De forma paralela, outros trabalhos foram desenvolvidos na formulação das propriedades dos modelos MIMO obtidos utilizando a representação em bases ortonormais. Entre eles são destacados os trabalhos publicados em (NINNESS; GÓMEZ; WELLER, 1995; NINNESS; GÓMEZ, 1996; NINNESS; GUSTAFSSON, 1997; DONKELAAR; HEUBERGER; HOF, 1998; AKC-CAY; NINNESS, 1999).

Mas recentemente os modelos OBF foram utilizados na reparametrização de modelos ARX e ARMAX em espaço de estados. Essas técnicas foram avaliadas no contexto das colunas de destilação. Os trabalhos publicados seguem em (PATWARDHAN; SHAH, 2005; MADAKYARU; NARANG; PATWARDHAN, 2009; BADWE; PATWARDHAN; GUDI, 2011; TUFA; RAMASAMY; SHUHAIMI, 2011).

### 1.2.3 Sistema MIMO mal-condicionados

Além das interações (inexistentes no caso SISO), outra diferença entre sistemas SISO e MIMO é a presença das direções no caso multivariável. As direções se referem à dependência do ganho do sistema com relação às combinações das entradas (LI; LEE, 1996). Desse modo, certas combinações produzem uma variação maior nas saídas do que outras. Esse efeito, é mais evidente em sistemas ditos mal-condicionados.

Sistemas mal-condicionados são um desafio do ponto de vista da identificação, pois experimentos em malha aberta utilizando excitações não correlacionadas tendem a excitar o sistema quase que totalmente na direção de maior ganho. Assim, a informação da direção de maior ganho e o ruído são predominantes sobre a direção de menor ganho e o modelo obtido não é adequado para o projeto dos controladores (ZHU; STEC, 2006).

Desse modo, tanto experimentos em malha aberta utilizando a metodologia independente quanto experimentos em malha aberta utilizando a metodologia descentralizada podem resultar em modelos exatos do ponto de vista dos elementos individuais da matriz de funções de transferência. No entanto, dado que esses experimentos não excitam de forma adequada a direção de menor ganho, o modelo multivariável obtido não é confiável (LI; LEE, 1996). Desse modo, um bom modelo multivariável é mais importante do que bons modelos individuais (KOUNG; MACGREGOR, 1993).

Em (KOUNG; MACGREGOR, 1993, 1994) foi mostrado que o desempenho do controlador multivariável é muito sensível a erros nos menores valores singulares e a erros na matriz de vetores singulares de entrada. Foi proposta uma técnica de projeto de excitação em

malha aberta de modo a excitar tanto a direção de maior ganho quanto a direção de menor ganho. Como o conhecimento da direção de menor ganho é necessário para o projeto e esta informação não está disponível previamente, o projeto das excitações é executado de forma iterativa. Em (SAGFORS; WALLER, 1998), os mesmos resultados foram encontrados quando aplicados no contexto do projeto de controladores para colunas de destilação.

Em (LI; LEE, 1996) foi mostrado que as direções da matriz de ganho em regime permanente são exatamente determinadas, se tanto os elementos da matriz de ganho  $G$  quanto da matriz  $G^{-1}$  forem exatamente determinados. Eles propuseram um conjunto de experimentos SISO em malha aberta e em malha fechada. A desvantagem é o aumento do número de experimentos para sistemas com mais de duas entradas e duas saídas.

Em (MISRA; NIKOLAOU, 2003) os resultados apresentados em (KOUNG; MACGREGOR, 1993, 1994) foram utilizados no projeto de excitações para a identificação em sub-espacos de processos mal-condicionados. Eles mostraram que a informação sobre a direção de menor ganho é necessária para a correta determinação da ordem do processo.

Como em (KOUNG; MACGREGOR, 1993, 1994) não foi abordado o problema com restrições de entradas e saídas, em (BRUWER; MACGREGOR, 2006) foi proposta uma formulação que incluiu restrições nas entradas e nas saídas como valores máximos e mínimos. Em (ZHAN; LI; GEORGAKIS, 2006) o problema com restrições também foi abordado.

Em (ZHU; STEC, 2006) foi proposta uma técnica para o projeto de excitações em que o sinal é formado por uma parte de grande magnitude com entradas correlacionadas e uma parte de pequena magnitude com entradas descorrelacionadas. A parte formada por entradas correlacionadas excita a direção de menor ganho e a parte formada por entradas descorrelacionadas excita a direção de maior ganho.

Em (MICCHI; PANNOCCHIA, 2008) diversas técnicas de projeto de experimentos para a identificação de sistemas mal-condicionados foram avaliadas no contexto da identificação utilizando técnicas por sub-espacos. Em (CONNER; SEBORG, 2004) as mesmas técnicas foram avaliadas no contexto da identificação utilizando modelos FIR e ARX.

Em (KURAMOTO; VAILLANT; GARCIA, 2012) também foram feitas comparações entre diversas técnicas de projeto. Estas técnicas foram aplicadas no contexto das colunas de destilação a partir do modelo em funções de transferência simplificado. O grau de excitação de cada direção foi avaliado a partir de um parâmetro proposto.

Em (DARBY; NIKOLAOU, 2009) o problema das direções foi formulado a partir de um conjunto de inequações escritas do ponto de vista da incerteza na obtenção da informação preliminar sobre o sistema MIMO.

Em (TAN; YAP, 2012) o conceito de função de transferência virtual, ou seja, a função de transferência entre duas saídas, foi apresentado. Essa função de transferência foi definida

para o caso em que o plano de saída é igualmente excitado. Foram utilizados múltiplos senos como excitações e as harmônicas foram selecionadas de acordo com a magnitude do ganho do processo.

### 1.3 Definição do problema

A partir das seções anteriores observa-se um grande avanço na definição e uso das bases de funções ortonormais na identificação de sistemas e técnicas de identificação de modelos FOPTD e SOPTD utilizando o experimento do relé. No entanto, apesar do grande avanço no desenvolvimento dos modelos OBF para a síntese e análise, o problema da identificação de processos com atraso utilizando modelos de ordem reduzida ainda persiste.

Além disso, o número de parâmetros utilizados na representação em modelos OBF é reduzido se forem utilizadas boas estimativas dos polos dominantes do processo. Na prática, essas estimativas são normalmente obtidas utilizando um experimento de resposta ao degrau ou baseiam-se no conhecimento do operador. Experimentos de resposta ao degrau podem ser longos, são pouco informativos e muito sensíveis a perturbações durante sua realização.

Assim, os problemas em aberto ou parcialmente tratados relacionados à identificação e a aplicação de modelos utilizando bases de funções ortonormais e modelos FOPTD e SOPTD são:

- Estimação de modelos OBF para processos com atraso;
- Obtenção de modelos FOPTD e SOPTD a partir de modelos OBF. Esses modelos são necessários no projeto de controladores PID;
- Determinação dos polos dominantes do processo utilizando um procedimento ou experimento informativo do ponto de vista das componentes de frequência e menos sensível a perturbações que o experimento de resposta ao degrau;
- Estimação de modelos OBF para o caso multivariável, múltiplas entradas e múltiplas saídas;
- Avaliação das direções no contexto dos sistemas multivariáveis mal-condicionados.

### 1.4 Contribuições

As contribuições deste trabalho de doutorado são:

- Proposta de um experimento de identificação baseado no relé utilizado para obter informações sobre o processo em torno de frequências de interesse;
- Técnicas de identificação para modelos FOPTD e SOPTD nos domínios do tempo e da frequência;
- Definição e estimação de modelos OBF-TD para sistemas SISO e MIMO. Os modelos OBF-TD são modelos combinados formados por um modelo OBF e por um modelo TD (atraso). Os modelos OBF-TD são definidos tanto em funções de transferência quanto em espaço de estados;
- Técnicas de redução de modelos de ordem elevada para modelos de ordem reduzida (com ou sem compensação do resíduo), especificamente modelos FOPTD e SOPTD. As técnicas de redução foram propostas tanto para o caso SISO quanto para o caso MIMO;
- Avaliação de diversas técnicas de projeto de experimentos em malha aberta para a estimação da direção de menor ganho e comparação dos resultados do ponto de vista dos modelos identificados.

## 1.5 Trabalhos publicados

Os trabalhos publicados durante o período do Doutorado são:

- SANTOS, J. B. M. ; BARROS, P. R. Experimental Evaluation of a Time Domain Identification for FOPTD Systems using Frequency Domain Information. In: *XIX Congresso Brasileiro de Automática*, 2012, Campina Grande. p. 129-136.
- SANTOS, J. B. M. ; BARROS, P. R. Projeto de Experimentos para Identificação de Processos Multivariáveis Mal-Condicionados. In: *XIX Congresso Brasileiro de Automática*, 2012, Campina Grande. p. 2834-2841.
- SANTOS, J. B. M. ; BARROS, P. R. Preliminary process information an its use in OBF-TD model estimation. In: *16th IFAC Symposium on System Identification*, 2012, Bruxelas. Proceedings of the 16th IFAC Symposium on System Identification, 2012. p. 1808-1813.
- SANTOS, J. B. M. ; BARROS, P. R. Time Domain Identification for First-Order plus Time-Delay Systems using Frequency Domain Information. In: *37th Annual*

*Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2011, Melbourne. Proceedings of 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 2011.

- SANTOS, J. B. M. ; BARROS, P. R. Simple Identification Techniques for First-Order and Second-Order Systems. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, 2010, Bonito. Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática, 2010.
- SANTOS, J. B. M. ; BARROS, P. R. A Simple Identification Technique for Second-Order plus Time-Delay Systems. In: *9th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, 2010, Leuven. Proceedings of the 9th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems, 2010. p. 174-179.

## 1.6 Organização do texto

Este trabalho de tese está organizado da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** neste capítulo introdutório estão dispostas as motivações do trabalho, uma revisão bibliográfica, a definição do problema e as contribuições apresentadas.
- **Capítulo 2:** neste capítulo são apresentados os principais fundamentos necessários ao entendimento do trabalho. São apresentados conceitos de sistemas, sinais, bases ortonormais e projetos de experimentos.
- **Capítulo 3:** as técnicas de identificação para modelos de ordem reduzida FOPTD e SOPTD propostas são apresentadas nesse capítulo. O experimento é apresentado e as técnicas são avaliadas em exemplos de simulação.
- **Capítulo 4:** os modelos em bases de funções ortonormais com atraso OBF-TD são definidos nesse capítulo para sistemas SISO. Os modelos OBF-TD são utilizados tanto na identificação de modelos de ordem superior quanto na identificação de modelos de ordem reduzida. No caso de modelos de ordem reduzida, uma técnica de redução de modelos baseada na compensação do resíduo é proposta.
- **Capítulo 5:** neste capítulo as técnicas de identificação apresentadas nos Capítulos 3 e 4 são formuladas no contexto dos sistemas MIMO. São formuladas as representações em espaço de estados para os modelos OBF-TD MIMO e as técnicas de redução de modelos. Além disso, são apresentadas algumas das possíveis estruturas multivariáveis.

- **Capítulo 6:** neste capítulo são estudados os processos MIMO mal-condicionados. Neste contexto o problema das direções é definido e algumas soluções são apresentadas. Essas soluções são avaliadas utilizando o modelo simplificado de uma coluna de destilação de alta pureza.

# Capítulo 2

## Fundamentos Teóricos

Neste Capítulo estão apresentados os principais fundamentos teóricos utilizados ao longo deste trabalho. O Capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 2.1 são apresentados os conceitos de sistemas e sinais contínuos no tempo; na Seção 2.2 é definido o espaço de Hilbert e as bases de funções ortonormais; na Seção 2.3 são apresentados alguns conceitos relacionados ao projeto de experimentos.

### 2.1 Sistemas e sinais contínuos no tempo

Em muitos campos da ciência, por exemplo, economia, filosofia, biologia, matemática, o termo sistema é utilizado para descrever o objeto de estudo. Quando se trata de sistemas físicos para identificação e controle, o termo é utilizado para representar um processo físico que deve ser modelado ou controlado.

Sinais externos que exercem uma influência sobre o sistema são chamados de variáveis de entrada. Sinais gerados no sistema e que podem ser observados são chamados de variáveis de saída.

Uma entrada é um sinal ou vetor de sinais que comanda a operação de um processo. Um processo pode ter dois tipos de entradas:

- Entradas manipuladas  $u(t)$ .
- Entradas que não podem ser manipuladas  $d(t)$ . Estas são divididas em duas partes: entradas  $w(t)$  que podem ser medidas e entradas  $v(t)$  que não podem ser medidas.

Uma saída é um sinal ou vetor de sinais que torna possível a observação da operação de um processo. As saídas do processo são dadas por  $y(t)$  e podem ser medidas.

Das definições, um sistema ou processo pode ser compreendido como um operador que mapeia entradas em saídas.



### 2.1.1 Sistemas e suas representações

Um sistema contínuo no tempo linear e invariante no tempo (LIT) é definido no domínio de Laplace como

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2.1)$$

em que  $G(s)$  é a função de transferência do sistema,  $Y(s)$  é a transformada de Laplace de  $y(t)$  e  $U(s)$  é a transformada de Laplace de  $u(t)$ .

Um sistema contínuo no tempo LIT é estável se for analítico no semiplano esquerdo do plano  $s$ . Isto significa que todos os seus polos devem estar no semiplano esquerdo do plano  $s$  (possuir parte real negativa).

Uma representação alternativa é através da representação em espaço de estados. A representação em espaço de estados de um sistema contínuo no tempo LIT é dada por um conjunto de equações diferenciais

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.3)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor de estados com valor inicial  $x_0$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u \times 1}$  é o vetor de entradas,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times 1}$  é o vetor de saídas, as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$  são matrizes com valores reais,  $n_u$  é o número de entradas,  $n_y$  é o número de saídas e  $n$  é o número de estados.

A representação em função de transferência pode ser relacionada com a representação em espaço de estados. A relação entre elas para cada par entrada e saída quando  $x_0 = 0$  é dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2.4)$$

A relação entre uma representação em espaço de estados e uma dada função de transferência  $G(s)$  não é única, ou seja, diversas realizações em espaço de estados podem resultar na mesma função de transferência  $G(s)$ . Se  $(A, B, C, D)$  é uma realização de  $G(s)$  e  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz não singular, então  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$  também é uma realização de  $G(s)$  (CHEN, 1999). Essa transformação é conhecida como transformação de similaridade com a matriz de similaridade  $T$ .

**Definição 1 Controlabilidade:** (CHEN, 1999) O par  $(A, B)$  é dito controlável se existe uma entrada  $u(t)$  que leve o sistema de qualquer estado inicial  $x_0 = x^0$  para qualquer estado final  $x_f$  em um tempo finito.

**Definição 2 Observabilidade:** (CHEN, 1999) O par  $(A, C)$  é dito observável se para qualquer estado inicial  $x_0 = x^0$  desconhecido existe um instante de tempo finito  $t_0 > 0$  tal

que  $x^0$  possa ser determinado a partir do conhecimento das entradas e saídas no intervalo  $[0, t_0]$ .

As matrizes de controlabilidade e observabilidade associadas com uma dada realização em espaço de estados  $(A, B, C, D)$  são definidas como

$$W_c \triangleq (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) \quad (2.5)$$

$$W_o \triangleq (C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^{n-1})^T)^T. \quad (2.6)$$

Também é possível definir controlabilidade e observabilidade a partir das matrizes  $W_c$  e  $W_o$ . O par  $(A, B)$  é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade  $W_c$  tiver posto  $n$ . O par  $(A, C)$  é observável se e somente se a matriz de observabilidade  $W_o$  tiver posto  $n$ .

**Definição 3 Realização mínima:** (CHEN, 1999) *A realização em espaço de estados é dita mínima se e somente se o par  $(A, B)$  for controlável e o par  $(A, C)$  for observável. A ordem da realização em espaço de estados mínima é chamada de grau de McMillan.*

A realização  $(A, B, C, D)$  é dita assintoticamente estável se  $Re(\lambda(A)) < 0$ , em que  $Re(x)$  é a parte real do número complexo  $x$  e  $\lambda(A)$  é o conjunto formado pelos autovalores da matriz  $A$ . Então é possível definir o Graminiano de controlabilidade  $P$  e o Graminiano de observabilidade  $Q$  como

$$P = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (2.7)$$

$$Q = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt. \quad (2.8)$$

Os Graminianos  $P$  e  $Q$  satisfazem as Equações de Lyapunov

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (2.9)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0. \quad (2.10)$$

**Definição 4** *A representação em espaço de estados  $(A, B, C, D)$  em que  $Real(\lambda(A)) < 0$  é controlável se e somente se  $P > 0$  e é observável se e somente se  $Q > 0$ .*

A interpretação dos Graminianos é dada, entre outros, em (GLOVER, 1984; MIDDELTON; GOODWIN, 1990; CHEN, 1999). O graminiiano de controlabilidade  $P$  está relacionado com a quantidade de energia necessária para atingir o estado final  $x_f$  a partir de um estado inicial  $x_0 = 0$ , esta energia é igual a  $x_f^T P^{-1} x_f$ . Se  $P$  for quase singular, alguns

estados só podem ser alcançados utilizando um nível elevado de energia. Por outro lado, o graminiiano de observabilidade  $Q$  está relacionado com a quantidade de energia na saída  $y(t)$  se  $x_0 = x^0$  e  $u(t) = 0$  para  $t \geq 0$  e é dada por  $x_f^T Q x_f$ . Se  $Q$  for quase singular, alguns estados terão pequena influência na saída.

Dado que a representação em espaço de estados não é única, as matrizes  $P$  e  $Q$  também não são únicas. O mesmo é válido para realizações mínimas, ou seja, diferentes realizações mínimas possuem diferentes matrizes  $P$  e  $Q$ .

Apesar disso, o produto  $PQ$  permanece o mesmo ou o produto  $PQ$  é invariante com respeito à transformação de similaridade (MIDDELTON; GOODWIN, 1990). Os autovalores do produto  $PQ$  são reais e positivos e a raiz quadrada desses autovalores é denominada de valores singulares de Hankel.

**Definição 5** *Valores singulares de Hankel:* (GLOVER, 1984) *Seja uma realização em espaço de estados estável  $(A, B, C, D)$  da função de transferência  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ . Os valores singulares de Hankel de  $G(s)$  são definidos como*

$$\sigma_i^H(G(s)) \triangleq \sqrt{\lambda_i(PQ)} \quad (2.11)$$

em que  $P$  é o Graminiano de controlabilidade e  $Q$  é o Graminiano de observabilidade.

Uma realização em espaço de estados em que as matrizes  $P$  e  $Q$  são iguais e diagonais é dita uma realização balanceada. Esta realização é importante, pois os estados são organizados em igualmente controláveis e observáveis.

**Teorema 6** *Um sistema com função de transferência  $G(s)$  estável possui uma representação em espaço de estados  $(A, B, C, D)$  dita balanceada se esta realização for mínima e*

$$P = Q = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

em que  $\Sigma$  é o graminiiano de  $G(s)$  e os  $\sigma_i$ 's são os autovalores de Hankel em que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ .

**Prova.** As matrizes  $P$  e  $Q$  são simétricas e semidefinidas positivas. Assim, utilizando a fatoração de Cholesky, a matriz  $Q$  pode ser escrita como

$$Q = R^T R. \quad (2.12)$$

A matriz  $S$  definida como  $S \triangleq RPR^T$  é definida positiva e, utilizando a decomposição em valores singulares, pode ser escrita como

$$S = U\Sigma^2U^T \quad (2.13)$$

em que

$$U^T U = I \quad (2.14)$$

$$\Sigma^2 = \text{diag}(\sigma_1^2 \dots \sigma_n^2). \quad (2.15)$$

A transformação de similaridade necessária é

$$T = \Sigma^{-1/2} U^T R. \quad (2.16)$$

Assim

$$\bar{P} = T P T^T = \Sigma^{-s1/2} U^T R P R^T U \Sigma^{-1/2} = \Sigma \quad (2.17)$$

$$\bar{Q} = T^{-T} Q T^{-1} = \Sigma^{1/2} U^T R^{-T} Q R^{-1} U \Sigma^{1/2} = \Sigma. \quad (2.18)$$

■

Dada uma representação em espaço de estados de um sistema estável, é sempre possível encontrar uma transformação de similaridade de modo que a representação em espaço de estados transformada seja balanceada (LAUB et al., 1987).

## 2.1.2 Normas de vetores, sinais e sistemas

É necessária uma forma de medir o tamanho dos sinais e dos sistemas. Para isso é utilizado o conceito matemático de norma. A norma mais utilizada é a norma Euclidiana de vetores  $\|x\|_2 = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_m\|^2}$ .

**Definição 7** A norma de  $x$  (que pode ser um vetor, matriz, sinal ou sistema) é um número real representado por  $\|x\|$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Não negativo:  $\|x\| > 0$ .
2. Positivo:  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
3. Homogêneo:  $\|\alpha \cdot x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$  para qualquer escalar complexo  $\alpha$ .
4. Respeita a desigualdade triangular:

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \quad (2.19)$$

O elemento  $x$  é considerado como um elemento no espaço  $V$  no campo dos números complexos  $C$ . Três tipos de objetos são considerados: vetores, sinais e sistemas.

### Norma de vetores

O vetor  $a$  possui  $m$  elementos, ou seja, é um vetor no espaço  $V = C^m$ . A norma- $p$  de  $a$  é dada por

$$\|a\|_p = \left( \sum_i |a_i|^p \right)^{1/p} \quad (2.20)$$

em que  $p \geq 1$ .

Três normas ou três valores de  $p$  são importantes. São estas:

- **Norma-1:** também conhecida como norma da soma e dada por

$$\|a\|_1 = \sum_i |a_i|. \quad (2.21)$$

- **Norma-2:** também conhecida como norma Euclidiana e dada por

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_i |a_i|^2}. \quad (2.22)$$

- **Norma- $\infty$ :** é o elemento de maior magnitude e dada por

$$\|a\|_\infty = \|a\|_{max} \triangleq \max_i |a_i| \quad (2.23)$$

### Norma de matrizes

É considerada uma matriz constante  $A$  com dimensão  $l \times m$ . A matriz  $A$  pode representar a resposta em frequência de um sistema.

**Definição 8** Uma função de uma matriz representada por  $\|A\|$  é uma norma se, além das quatro propriedades da Definição 7, também satisfizer a desigualdade multiplicativa:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (2.24)$$

Assim como no caso dos vetores, três normas são importantes:

- **Norma da soma:** soma das magnitudes dos elementos da matriz. É dada por

$$\|A\|_{soma} = \sum_{i,j} |a_{ij}|. \quad (2.25)$$

- **Norma de Frobenius:** também conhecida como norma Euclidiana. É a raiz quadrada da soma dos quadrados das magnitudes dos elementos da matriz e dada por

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^H A)} \quad (2.26)$$

em que o traço  $tr$  é a soma dos elementos da diagonal principal e  $A^H$  é o conjugado complexo transposto de  $A$ .

- **Norma do maior elemento:** é o elemento de maior magnitude e dada por

$$\|A\|_{max} = \max_{i,j} |a_{ij}| \quad (2.27)$$

### Norma de sinais

É considerada a norma temporal de um sinal variante no tempo  $e(t)$ . A norma-p é definida como

$$\|e(t)\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i |e_i(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}. \quad (2.28)$$

As três normas mais utilizadas são:

- **Norma-1:** também conhecida integral do erro absoluto (IAE) e dada por

$$\|e(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i |e_i(\tau)| d\tau. \quad (2.29)$$

- **Norma-2:** também conhecida como norma quadrática, integral do erro quadrático (ISE) ou energia do sinal e dada por

$$\|e(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_i |e_i(\tau)|^2 d\tau}. \quad (2.30)$$

- **Norma-∞:** é o valor máximo no tempo e dada por

$$\|e(t)\|_{\infty} = \max_{\tau} \left( \max_i |e_i(\tau)| \right). \quad (2.31)$$

## 2.2 Espaço de Hilbert e bases de funções ortonormais

O uso de bases de funções ortonormais na aproximação e análise é fundamental em muitas áreas de identificação de sistemas, teoria de controle e processamento de sinais. As bases de funções ortonormais formam um conjunto de funções ortogonais e normais.

### 2.2.1 Espaço de Hilbert

O espaço de vetores mais conhecido é o espaço de funções contínuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  normalmente representado por  $\mathcal{C}([a, b])$ . Para que seja realizada qualquer análise nesse espaço de vetores ou em qualquer outro, o conceito de norma é necessário. A norma define o conceito de tamanho no espaço de vetores.

Um espaço de vetores  $V$  em que o produto interno é definido é chamado de espaço com produto interno. Espaços com produto interno são importantes, pois assim é possível encontrar um conjunto de vetores ortogonais nesses espaços.

Outro conceito importante é o de espaço completo. Um espaço de vetores é dito completo se todas as sequências de Cauchy no espaço considerado convergirem para um elemento do espaço (KREYSIG, 1978).

O espaço de Hilbert  $H$  pode ser definido como um espaço completo em que o produto interno está definido. O produto interno é normalmente representado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e que se verificam as seguintes propriedades:

1.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \forall x, y \in H$ , em que  $\overline{(\cdot)}$  é o complexo conjugado;
2.  $\langle \alpha x + \beta y, u \rangle = \alpha \langle x, u \rangle + \beta \langle y, u \rangle \forall x, y, u \in H$  e  $\alpha, \beta$  são escalares;
3.  $\langle x, x \rangle > 0$  e  $\langle x, x \rangle = 0$  se e somente se  $x$  for o vetor nulo.

O produto interno pode ser utilizado para induzir a norma de um elemento nesse espaço como  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  (YOUNG, 1988).

O espaço de Hilbert  $H^2(\mathbb{R})$  de funções quadraticamente integráveis é definido como

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt \quad (2.32)$$

e para o caso  $H(\mathbb{C})$  é definido como

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(t)g^*(t)dt \quad (2.33)$$

em que  $*$  representa a operação de complexo conjugado. Uma função é dita quadraticamente integrável se

$$\int_S f^2(t)dt < \infty \quad (2.34)$$

em que  $S \subseteq \mathbb{R}$  ou  $S \subseteq \mathbb{C}$ .

A partir do produto interno é possível medir a similaridade entre elementos no espaço de Hilbert. Se o produto interno for zero  $\langle x, y \rangle = 0$ , os dois elementos são ditos ortogonais.

Um conjunto de funções  $\{f_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$  no espaço de Hilbert  $H$  é um conjunto ortogonal se todos os seus elementos são ortogonais,  $\langle f_i(t), f_j(t) \rangle = 0$  para  $i \neq j$  e  $\forall i, j \in \mathbb{Z}^+$ . Se as funções forem normalizadas tal que  $\|f_k(t)\| = 1 \forall k$  então esse conjunto é um conjunto ortonormal.

O conjunto de funções  $\{f_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$  é dito completo no espaço de Hilbert  $H$  se e somente se cada função em  $H$  puder ser escrita como uma combinação linear de um número finito de funções. Esse conjunto é denominado de base ortonormal completa.

## 2.2.2 Funções ortonormais

Uma sequência de funções reais  $f_1(t), f_2(t), \dots$  forma um conjunto ortonormal no intervalo  $(0, \infty)$  se essas funções são tais que

$$\int_0^{\infty} f_i^2(t) dt = 1 \quad (2.35)$$

$$\int_0^{\infty} f_i(t) f_j(t) dt = 0. \quad (2.36)$$

Um conjunto de funções ortonormais  $f_i(t)$  é dito completo se, exceto a função identicamente nula não existir uma função  $m(t)$  com  $\int_0^{\infty} m(t)^2 dt < \infty$  tal que

$$\int_0^{\infty} m(t) f_i(t) dt = 0 \quad (2.37)$$

em que  $i = 1, 2, \dots$

As funções de Laguerre são um exemplo de um conjunto de funções completo ortonormal (LEE, 1960). O conjunto de funções de Laguerre é definido como

$$\begin{aligned} l_1(t) &= \sqrt{2p} e^{-pt} \\ l_2(t) &= \sqrt{2p} (-2pt + 1) e^{-pt} \\ &\vdots \\ l_i(t) &= \sqrt{2p} \left[ (-1)^{i-1} \frac{(2p^{i-1})}{(i-1)!} t^{i-1} + (-1)^i \frac{(i-1)(2p^{i-2})}{(i-2)!} t^{i-2} + \dots + 1 \right] e^{-pt} \end{aligned}$$

em que  $p > 0$  é chamado de polo de Laguerre.

## 2.2.3 Modelos em bases de funções ortonormais

A forma mais utilizada para representar as funções de transferência de sistemas contínuos no tempo lineares e invariantes no tempo é a partir da expansão em série na forma

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (2.38)$$

em que  $h(\tau)$  é a resposta ao impulso do sistema.

Existem diversas estruturas de modelos que podem ser utilizadas para representar tanto a resposta ao impulso quando a função de transferência do sistema. Os modelos lineares convencionais são os modelos FIR, ARX, ARMAX, OE e BJ (LJUNG, 1999).

Como alternativa aos modelos convencionais, os modelos OBF podem ser utilizados. Os modelos OBF possuem diversas vantagens quando comparados com os modelos lineares convencionais (TUFA; RAMASAMY; SHUHAIMI, 2011). São necessários menos parâmetros para descrever as dinâmicas do processo (parcimônia), a linearidade nos parâmetros



possibilita a utilização de regressores lineares para a estimação (otimização convexa) e os modelos do processo e do ruído podem ser parametrizados de forma independente (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005).

Os modelos OBF podem ser utilizados na representação da resposta ao impulso na forma

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(t) \quad (2.39)$$

em que  $f_k(t)$  é a função base escolhida e  $c_k$  é o coeficiente da função base. Também é possível representar a função de transferência na forma

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k(s) \quad (2.40)$$

em que  $F_k(s)$  é a base escolhida e  $c_k$  é o coeficiente da base.

## 2.2.4 Aproximação da resposta ao impulso

A resposta ao impulso do sistema  $h(t)$  pode ser aproximada por funções  $f(t)$  que formam um conjunto ortonormal completo utilizando a Equação (2.39).

Os coeficientes da função base  $c_k$  são definidos como

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{\infty} f_1(t)h(t) \\ c_2 &= \int_0^{\infty} f_2(t)h(t) \\ &\vdots \\ c_k &= \int_0^{\infty} f_k(t)h(t) \end{aligned}$$

São necessários infinitos termos para que a expansão dada na Equação (2.39) convirja para a resposta ao impulso verdadeira. No entanto, para um número finito  $k = n$  existirá um erro entre a resposta ao impulso real e a aproximada.

A qualidade da aproximação pode ser medida utilizando a integral do erro dada por

$$\int_0^{\infty} \left( h(t) - \sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \right)^2 dt < \delta \quad (2.41)$$

em que  $n$  é o número de funções consideradas e  $\delta > 0$  indica a tolerância da aproximação.

## 2.2.5 Aproximação da função de transferência

A função de transferência do sistema  $G(s)$  pode ser aproximada utilizando a Equação (2.40).

Os coeficientes da base  $c_k$  são definidos como

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(j\omega)F_1(j\omega)d\omega \quad (2.42)$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(j\omega)F_2(j\omega)d\omega \quad (2.43)$$

$$\vdots = \vdots \quad (2.44)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(j\omega)F_k(j\omega)d\omega. \quad (2.45)$$

A qualidade da aproximação pode ser medida utilizando a integral do erro dada por

$$\int_0^{\infty} \left( G(j\omega) - \sum_{k=1}^n c_k F_k(j\omega) \right)^2 d\omega < \varepsilon \quad (2.46)$$

em que  $n$  é o número de funções consideradas e  $\varepsilon > 0$  indica a tolerância da aproximação.

## 2.2.6 Funções de Takenaka-Malmquist

As funções de Takenaka-Malmquist foram originalmente desenvolvidas no domínio discreto e depois formuladas no domínio contínuo. Atualmente essas funções são também conhecidas como funções ortonormais generalizadas. As funções de Takenaka-Malmquist são dadas por

$$F_k(s) = \frac{\sqrt{2Re(\xi_k)}}{s + \xi_k} \prod_{i=1}^{k-1} \left[ \frac{s - \xi_i^*}{s + \xi_i} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.47)$$

em que  $\xi_i \in \mathbb{C}$ ,  $Re(\xi_i) \geq 0$  e  $\xi_k^*$  é o complexo conjugado de  $\xi_k$ . O conjunto de funções racionais  $\{F_k\}$  é ortonormal em  $H(\Pi)$  com respeito ao produto interno

$$\langle F_n, F_m \rangle \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(j\omega)F_m^*(j\omega)d\omega \quad (2.48)$$

$$= \begin{cases} 1; & m = n \\ 0; & m \neq n \end{cases} \quad (2.49)$$

em que  $\Pi$  é o semiplano direito do plano- $s$   $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$ .

A única restrição com relação à escolha do polo  $\xi_k$  é de acordo com o Teorema seguinte.

**Teorema 9** *O conjunto de modelos descritos pelas funções de Takenaka-Malmquist  $\{F_k(s)\}_{k \geq 1}$  é dito completo em todos os espaços  $H^p(\Pi)$ ,  $1 \leq p < \infty$  se e somente se*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Re(\xi_k)}{1 + |\xi_k|^2} = \infty. \quad (2.50)$$

Esse Teorema é importante pois, satisfeita a condição, as funções de Takenaka-Malmquist podem ser consideradas em aplicações para a aproximação de sistemas. Ou seja, a combinação linear das funções resulta em uma boa aproximação.

Formalmente, considere um elemento  $X(s)$  pertencente ao espaço de funções lineares normalizados  $(E, |||_E)$  e um valor qualquer  $\epsilon > 0$ . Se, para uma ordem  $n$  suficientemente grande, for possível encontrar um elemento  $Y(s) \in sp\{F_k(s)\}_{k=1}^n$  tal que  $\|X(s) - Y(s)\|_E \leq \epsilon$  então  $sp\{F_k(s)\}_{k=1}^n$  é dito completo em  $E$ .

Também é necessário quantificar o erro na aproximação quando o número de termos é finito. Suponha que uma função de transferência  $R(s)$  possua uma expansão em frações parciais na forma

$$R(s) = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{s + \gamma_i}. \quad (2.51)$$

A aproximação de  $R(s)$  utilizando o conjunto  $\{F_k(s)\}_{k=1}^n$  com  $n$  termos é representada por  $F_n(s)$ . O valor absoluto do erro na aproximação é dado por (AKCCAY; NINNESS, 1999)

$$|R(j\omega) - F_n(j\omega)| \leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{c_i}{j\omega + \gamma_i} \right| \prod_{j=1}^n \left| \frac{\gamma_i - \xi_j}{\gamma_i + \xi_j^*} \right| \quad (2.52)$$

## 2.2.7 Escolha das funções base

A escolha das funções base determina a classe de modelos que pode ser bem representada pelo modelo OBF. Essa escolha também se dá em função da informação disponível, estimativas dos polos do sistema.

Existem diversos tipos de bases OBF as quais são parametrizadas em função dos polos pré-especificados, por exemplo, as bases de Laguerre e de Kautz. A base de Laguerre é parametrizada em termos de um único polo. A base de Kautz é parametrizada em termos de dois polos reais ou dois polos complexos. Para uma lista completa de bases e suas propriedades veja (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005).

Para  $\xi_k = p$  e  $p \in \mathbb{R}$ , a base é denominada base de Laguerre. A base de Laguerre é dada pela função base

$$F_k(s) = \frac{\sqrt{2p}}{(s+p)} \left( \frac{s-p}{s+p} \right)^{k-1} \quad (2.53)$$

em que  $k = 1, \dots, n$ ,  $p$  é o polo de Laguerre. O polo de Laguerre é escolhido baseado na constante de tempo dominante do processo.

Para  $\xi_k = p$  e  $p \in \mathbb{C}$ , a base é denominada base de Kautz. A base de Kautz é dada

pelas funções base

$$F_{2k-1}(s) = \frac{\sqrt{2bs}}{s^2 + bs + c} \left( \frac{s^2 - bs + c}{s^2 + bs + c} \right)^{k-1} \quad (2.54)$$

$$F_{2k}(s) = \frac{\sqrt{2bc}}{s^2 + bs + c} \left( \frac{s^2 - bs + c}{s^2 + bs + c} \right)^{k-1} \quad (2.55)$$

em que  $k = 1, \dots, n$  e  $b = 2\text{Re}(\xi_n)$  e  $c = |\xi_n|^2$  são os parâmetros que definem os polos de Kautz. A base de Laguerre é um caso particular da base de Kautz quando os polos são reais e iguais.

## 2.3 Projeto de experimentos

O projeto de experimentos em identificação de sistemas é uma etapa importante, pois após os dados terem sido obtidos só é possível reduzir a polarização e a variância das estimativas. Nenhuma técnica de identificação resulta em bons modelos com dados que possuem pouca informação.

Existem sistemas (econômicos, ecológicos e biológicos) em que a coleta de dados é de forma passiva, ou seja, só é possível observar o comportamento livre do sistema. Nesses sistemas, é impossível ou muito caro a realização de experimentos. Desse modo, como os dados podem não ser informativos o suficiente, a identificação se torna mais difícil.

Em sistemas de controle, normalmente é possível a realização de experimentos, sendo possível a obtenção de dados informativos o suficiente para a identificação de um modelo. Assim, um dos pontos que merece destaque no projeto de experimentos para identificação é a escolha da excitação. A escolha e o projeto das excitações são feitos em função da informação que se deseja extrair sobre o sistema, como atrasos, constantes de tempo, ganhos estáticos e não linearidades.

Os experimentos de identificação podem ser divididos em duas categorias: experimentos preliminares; experimentos finais.

### 2.3.1 Experimentos preliminares

Para o projeto de um experimento ótimo é necessário o conhecimento do modelo exato do processo real (HJALMARSSON, 2005; GEVERS; BOMBOIS, 2006). No entanto, o modelo exato em geral não é conhecido previamente. Assim, quanto mais informações sobre o processo real estiverem disponíveis melhor será o experimento de identificação.

Algumas dessas informações para o projeto podem ser obtidas a partir da experiência dos operadores do processo. Assim, uma boa comunicação entre os engenheiros de controle

e os operadores é muito importante.

No entanto, existem situações em que as informações disponíveis são poucas, inúteis ou até mesmo inexistentes. Desse modo, é necessária a realização de experimentos preliminares para a obtenção desse conhecimento.

A seguir são apresentadas algumas alternativas para a obtenção das informações preliminares necessárias para o projeto dos experimentos de identificação.

### Dados históricos

Os dados são obtidos em modo de operação normal. Nenhum experimento de identificação é realizado. O objetivo é ter uma primeira impressão sobre o processo, ou seja, constantes de tempo, níveis de ruído, atrasos entre outros.

É desejável observar o sistema em diferentes pontos de operação ou situações de operação e em malha aberta sem a atuação manual do operador.

Esta etapa é economicamente barata já que os dados necessários estão disponíveis no banco de dados.

### Experimento de resposta ao degrau

O experimento de resposta ao degrau é normalmente realizado em malha aberta e com a menor interferência do operador possível.

Nesse experimento, a amplitude é determinada de acordo com a experiência do operador. Já o tempo de duração deve ser maior que o tempo de acomodação do processo.

Experimentos de resposta ao degrau são utilizados para obter uma primeira estimativa das constantes de tempo dominantes e dos ganhos estáticos. Também é possível obter uma primeira estimativa dos atrasos existentes. O termo atraso é utilizado aqui e ao longo deste trabalho com referência ao tempo morto ou atraso puro.

### Experimento do relé

O experimento do relé consiste em substituir o controlador por um relé de amplitude  $\mu$  na malha de realimentação. Para o relé mais simples, a amplitude do elemento é o único parâmetro que deve ser especificado. O relé padrão é dado por

$$u(t) = \begin{cases} \mu_+, & \text{se } e(t) > \varepsilon_+ \\ \mu_-, & \text{se } e(t) < \varepsilon_- \end{cases} \quad (2.56)$$

em que  $\mu_+$  e  $\mu_- \in \mathbb{R}$  são a amplitude positiva e negativa, respectivamente e  $\varepsilon_+$  e  $\varepsilon_-$  são a histerese positiva e negativa, respectivamente.

A função geral do relé segue na Figura 2.1. As variações do relé ou possíveis configurações estão listadas na Tabela 2.1.

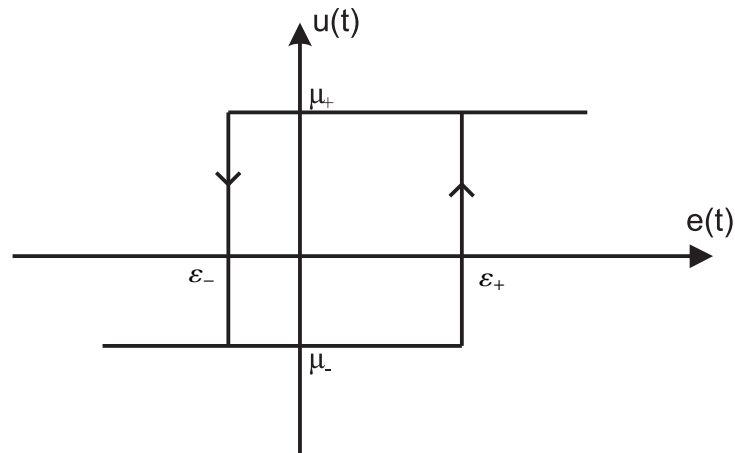


Figura 2.1: Função geral do relé

Tabela 2.1: Tipos de relé

Com histerese	$\varepsilon_+ \neq 0$ e $\varepsilon_- \neq 0$
Sem histerese	$\varepsilon_+ = 0$ e $\varepsilon_- = 0$
Assimétrico	$\mu_+ \neq \mu_-$
Simétrico	$\mu_+ = \mu_-$

O relé conhecido como padrão é o relé sem histerese ( $\varepsilon_- = \varepsilon_+ = 0$ ) e simétrico ( $\mu_+ = \mu_-$ ). O relé em que  $\mu_+ \neq \mu_-$  é chamado de assimétrico ou polarizado.

A histerese do relé é utilizada para tornar o sistema resultante menos sensível ao ruído, evitar os chaveamentos aleatórios, manter a regularidade na largura dos pulsos e dar robustez às estimativas. O tamanho da histerese  $\varepsilon$  deve ser maior que a maior amplitude do ruído para evitar mudanças aleatórias no sinal de entrada do sistema.

O experimento do relé é utilizado para excitar o processo na região de frequência em que a fase é  $-180^\circ$ . Essa frequência é conhecida como frequência crítica  $\omega_u$  e o período correspondente é o período crítico  $T_u$ . A partir dessa informação é possível determinar a região de frequência de interesse, encontrar as margens de estabilidade, constantes de tempo e atrasos.

### 2.3.2 Experimentos finais

Tendo obtido as informações preliminares necessárias para o conhecimento geral do processo, o experimento final de identificação pode ser projetado. Dois aspectos são impor-

tantes durante o projeto do experimento final: o tipo de sinal de excitação e o espectro de potência da excitação.

O tipo de excitação é importante de modo a se ter uma boa relação sinal-ruído, ou seja, a potência deve ser a maior possível. Uma forma de aumentar a potência é aumentando a amplitude, mas as amplitudes normalmente possuem restrições. Assim, para uma dada potência deseja-se que a amplitude seja mínima.

A propriedade em que a amplitude é mínima para uma dada potência é expressa no parâmetro  $C_r$ . Dado um sinal  $u(t)$  com média zero, o parâmetro  $C_r$  é definido como (LJUNG, 1999)

$$C_r = \sqrt{\frac{\max_t u^2(t)}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)}}. \quad (2.57)$$

O parâmetro  $C_r$  deve ser o menor possível. Sinais binários são os que possuem o menor fator,  $C_r = 1$ .

O conteúdo de frequência ou espectro de potência da excitação é outro aspecto importante no projeto do experimento. A distribuição do erro de modelagem no domínio da frequência é afetada pelo espectro da excitação (LJUNG, 1999).

Do ponto de vista do tipo de excitação, neste trabalho é utilizada a excitações do tipo Sequência binária pseudo-aleatória (PRBS).

Os sinais PRBS são sinais binários pseudoaleatórios. São chamados pseudoaleatórios por serem sinais determinísticos após a inicialização dos estados.

O máximo período possível de um sinal PRBS com  $n$  estados é  $M = 2^n - 1$  (o estado zero não é incluído). Um sinal PRBS com período  $M$  é chamado de sinal PRBS de tamanho máximo ou sequência  $m$  (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Um sinal PRBS pode ser gerado utilizando registradores de deslocamento. O número de registradores define o número de estágios e é dado por  $n$ . Os registradores são inicialmente ajustados em 1 ou 0. À medida que o pulso do relógio é aplicado, o valor do registrador  $k$  é transferido para o registrador  $k + 1$  e assim a sequência é obtida.

Seja  $u(t)$  um sinal PRBS de tamanho máximo com amplitudes  $-a$  e  $a$ . Assumindo que o período de amostragem seja igual ao período do relógio  $T_{clk}$  segue que (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989)

- O valor médio de  $u(t)$  é

$$\frac{a}{M} \quad (2.58)$$

- A função de autocorrelação de  $u(t)$  é

$$\begin{aligned} R_u(\tau) &= a^2 \quad \tau = 0, \pm M, \pm 2M, \dots \\ &= -\frac{a^2}{M} \quad \tau \neq 0, \pm M, \pm 2M, \dots \end{aligned} \quad (2.59)$$

- O espectro de potência de  $u(t)$  é

$$\Phi_u(\omega) = \frac{2\pi a^2}{M} \sum_{k=1}^M \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{M}\right) \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (2.60)$$

Quando o período de amostragem for igual ao período do relógio  $T_{clk}$  e  $M$  é um número grande, o sinal PRBS se aproxima a um ruído branco com média zero. Além disso, a potência é máxima para uma dada amplitude, ou seja, o parâmetro  $C_r$  é mínimo.

Vale observar que, um sinal formado por parte de um período não possui as propriedades descritas anteriormente. Isso torna a escolha do tempo de experimento um parâmetro pouco flexível.

Para o projeto de sinais PRBS do tipo passa-baixa é necessário aumentar o período do relógio  $T_{clk}$ . Desse modo, o espectro de potência tem o envelope na forma:

$$T_{clk} \left( \frac{\sin(\omega T_{clk}/2)}{\omega T_{clk}/2} \right). \quad (2.61)$$

Uma desvantagem em utilizar sinais PRBS do tipo passa-baixa é que o espectro possui amplitude zero em torno de  $\omega = \frac{2\pi k}{T_{clk}}$  com  $k = 1, 2, \dots$

A escolha do período do relógio  $T_{clk}$  pode ser realizada de diversas formas. Em (GAIK-WAD; RIVERA, 1996), foi proposto que o período de chaveamento  $T_{clk}$  satisfaça a seguinte desigualdade

$$T_{clk} \leq \frac{2,8\tau_{dom}}{\alpha_s} \quad (2.62)$$

em que  $\alpha_s \approx 2$  é a velocidade da resposta em malha fechada e  $\tau_{dom}$  é a constante de tempo dominante do processo.

## 2.4 Considerações finais

Neste Capítulo foram apresentados os principais conceitos necessários no decorrer deste trabalho. Os conceitos apresentados foram sobre normas de sinais e sistemas, bases de funções ortonormais e procedimentos para o projeto de experimentos de identificação.



## Capítulo 3

# Identificação de Modelos FOPTD e SOPTD

Neste Capítulo estão apresentadas as técnicas de identificação para modelos FOPTD e SOPTD. As técnicas apresentadas são baseadas na informação combinada no domínio do tempo e no domínio da frequência. Essas informações são obtidas utilizando um experimento baseado no experimento do relé padrão. Com isso é possível obter modelos que melhorem a resposta no domínio do tempo enquanto representam o processo em torno de frequências de interesse.

Este Capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 3.1 é apresentada uma introdução; na Seção 3.2 é apresentado o experimento utilizado; na Seção 3.3 é apresentada a técnica de identificação para modelos FOPTD; na Seção 3.4 é apresentada a técnica de identificação para modelos SOPTD; na Seção 3.5 seguem os exemplos de simulação; na Seção 3.6 segue a descrição da plataforma experimental e os resultados experimentais; e na Seção 3.7 seguem algumas considerações finais.

### 3.1 Introdução

A classe de modelos reduzidos mais utilizada no projeto de controladores em aplicações industriais é a de modelos FOPTD (HANG; ASTROM; WANG, 2002; ATHERTON, 2006b). Os modelos FOPTD são simples e capturam a dinâmica principal do processo (LJUNG, 2002).

No entanto, os modelos FOPTD são limitados quando o processo apresenta um comportamento subamortecido ou quando o processo apresenta outras dinâmicas de ordem superior. Desse modo, os modelos SOPTD descrevem melhor processos com essas características.

Muitas técnicas de identificação para modelos FOPDT e SOPTD baseiam-se na resposta ao degrau. A primeira técnica baseada nesse experimento foi a do método gráfico, descrita em (RAKE, 1980). É possível encontrar uma lista de referências sobre o assunto em (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006; AHMED; HUANG; SHAH, 2007).

Apesar do experimento de resposta ao degrau ser amplamente utilizado na prática, deve-se tomar cuidado para que o processo não seja levado para um ponto de operação muito diferente do atual. Desse modo, utilizar um pulso como sinal de excitação é preferido com relação ao degrau ou à rampa (BARRA; MOSSBERG, 2007).

Outro experimento bastante utilizado é o experimento do relé. As oscilações permanentes geradas pelo experimento são utilizadas para obter o ganho crítico  $K_u$  e a frequência crítica  $\omega_u$ . As informações do ponto crítico e do ganho estático ou do atraso podem ser utilizadas para identificar um modelo FOPTD ou SOPTD (RAMAKRISHNAN; CHIDAMBARAM, 2003; ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006; MAJHI, 2007b).

Deve-se observar que em muitos casos o processo não tem a mesma estrutura que a dos modelos FOPDT ou SOPTD. Isto significa que alguma redução de modelos é realizada e o modelo estimado captura apenas alguns aspectos do processo.

As técnicas no domínio do tempo focam apenas na resposta temporal do processo e esquecem da qualidade do modelo com relação às margens de estabilidade. Técnicas baseadas no experimento do relé correlacionam o modelo com o processo apenas na região de alta frequência (em torno da frequência crítica). Assim, não há garantia da qualidade do modelo na região de baixa frequência como, por exemplo, em torno da região da frequência de corte.

## 3.2 Experimento de identificação

No desenvolvimento do experimento de identificação algumas premissas foram assumidas: o experimento de identificação deve ser informativo tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência; não deve ser necessário qualquer conhecimento sobre o processo para o projeto do experimento. Esse último ponto é importante, dado que nesse estágio do procedimento de identificação, nenhuma informação pode estar disponível. No entanto, como é utilizado o experimento do relé, pelo menos o nível de ruído é necessário para o ajuste da histerese.

Assim, considere a excitação apresentada na Figura 3.1, a qual é composta por uma parte de alta frequência e uma parte de baixa frequência. A parte de alta frequência ( $\omega_H$ ) é gerada pelo experimento do relé padrão aplicado por  $N_1$  ciclos e com período  $T_u$ . Em seguida, um pulso retangular com largura  $N_2 T_u / 2$  é aplicado seguido de um intervalo de

$N_2T_u/2$  com entrada zero. Isto caracteriza a parte de baixa frequência ( $\omega_L$ ).

O período  $T_u$  é o período de oscilação do relé e não pode ser modificado. Este período é característico de cada processo. O período  $T_u$  não é conhecido previamente, este é obtido no momento em que o experimento é realizado.

Deve-se notar que, como o nível DC é diferente de zero o ganho em regime permanente pode ser estimado. Além disso, a parte de alta frequência está próxima da frequência crítica do processo, já que o experimento do relé padrão foi utilizado. Vale lembrar que a localização do ponto de alta frequência depende do valor da histerese.

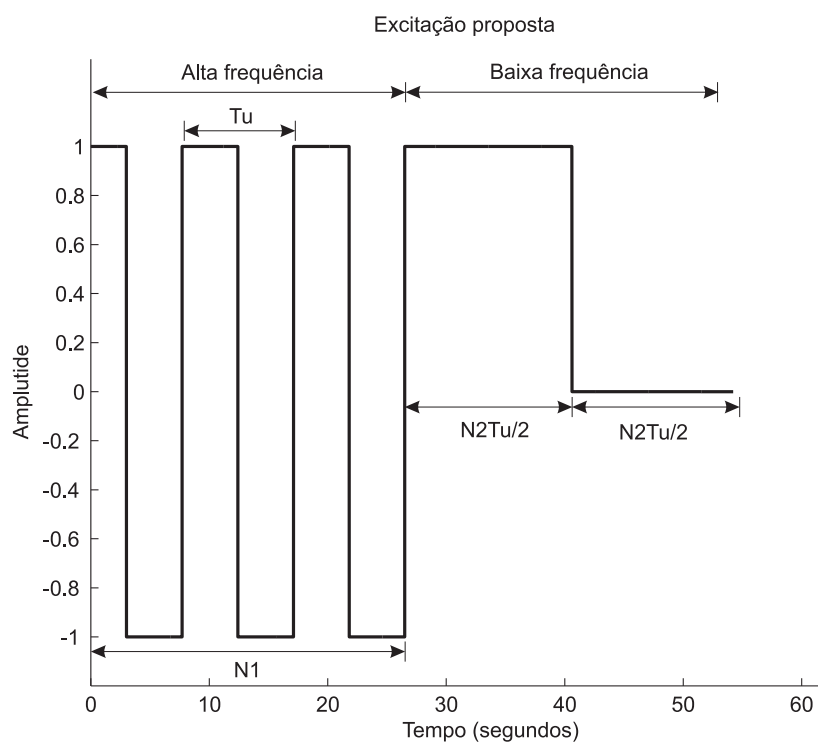


Figura 3.1: Experimento preliminar

O espectro da excitação apresentada na Figura 3.1 pode ser calculado utilizando a Transformada de Fourier. O espectro  $U(j\omega)$  como uma função do número de ciclos do relé  $N_1$  e da largura do pulso  $N_2/2$  é dado por

$$\begin{aligned}
 U(j\omega) = & \frac{T_u}{2} \cdot \text{sinc} \left( \frac{\omega \cdot T_u/4}{\pi} \right) \sum_{n=0}^{2N_1-1} \left[ (-1)^n \cdot e^{-j\omega \frac{T_u}{4}(2n+1)} \right] \\
 & + N_2 \frac{T_u}{2} \cdot \text{sinc} \left( \frac{\omega \cdot N_2 T_u/4}{\pi} \right) e^{-j\omega T_u (N_1 + \frac{N_2}{4})}.
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

De acordo com a Equação (3.1), a excitação pode ser utilizada de modo a excitar o processo em frequências desejadas relacionadas com o ponto de alta frequência ( $\omega_H$ ) e com

o ponto de baixa frequência ( $\omega_L$ ). Desse modo, a informação da resposta em frequência do processo é obtida em uma maior região de frequência.

Para o projeto do experimento é necessário determinar os parâmetros  $N_1$  e  $N_2$ . O parâmetro  $N_1$  define o número de períodos do relé e o parâmetro  $N_2$  define a largura do pulso ( $N_2T_u/2$ ) e o período do pulso ( $N_2T_u$ ).

Escolher  $N_1$  pequeno torna o experimento mais rápido, mas reduz a contribuição de potência no ponto de alta frequência. Por outro lado, escolher  $N_1$  grande torna o experimento mais longo, mas aumenta a contribuição de potência no ponto de alta frequência. Uma maior contribuição de potência melhora a relação sinal/ruído nesse ponto.

Na prática, é necessário escolher um valor de  $N_1$  tal que o intervalo de tempo resultante seja suficiente para que o regime permanente do ponto de vista das oscilações tenha sido atingido, ou seja, o período  $T_u$  seja constante. Isso é importante para que o ponto de alta frequência seja bem excitado. Em geral,  $N_1 = 3$  ou  $N_1 = 4$  é suficiente, ou seja, 3 ou 4 períodos de oscilação.

A escolha do parâmetro  $N_2$  determina qual ponto de frequência do processo é excitado pela parte de baixa frequência da excitação. É possível distinguir regiões para a escolha de  $N_2$

- $N_2$  pequeno ou próximo de  $N_1$  - o ponto de baixa frequência estará próximo do ponto de alta frequência. Nesse caso, nenhuma informação adicional é obtida;
- $N_2$  grande - nesse caso o pulso se assemelhará a um degrau e o ponto de baixa frequência estará próximo da frequência zero;
- $N_2$  intermediário - o ponto de baixa frequência estará na região em que a fase do processo está entre  $-45^\circ$  e  $-135^\circ$ . Nesse caso, a informação é importante tanto para a identificação do modelo como para o projeto do controlador.

Para um modelo FOPTD a fase em função da frequência é dada por

$$\phi(\omega) = -\omega L - \arctan \omega T \quad (3.2)$$

em que  $L$  é o atraso e  $T$  é a constante de tempo. A partir da Equação (3.2) é possível avaliar a fase do processo em função da escolha da largura do pulso  $N_2T_u/2$ .

O ponto de alta frequência  $\omega_H$  é definido a partir do período de oscilação  $T_u$  como  $\omega_H = \pi/T_u$ . Já o ponto de baixa frequência  $\omega_L$  é definido a partir do período do pulso  $N_2T_u$  como  $\omega_L = \pi/N_2T_u$ . O ponto de baixa frequência ainda pode ser escrito em função do ponto de alta frequência como  $\omega_L = \omega_H/N_2$ .

Para determinar uma boa escolha para  $N_2$ , a fase dada na Equação (3.2) foi avaliada para diversas razões de  $L/T$  ou  $\alpha$ . Em todos os casos o parâmetro  $N_2$  foi escolhido como 2 e 3. Segue na Figura 3.2 as curvas para cada um dos valores de  $\alpha$  avaliados. Na Tabela 3.1 seguem os valores obtidos para as fases para cada valor de  $N_2$  marcados na Figura 3.2.

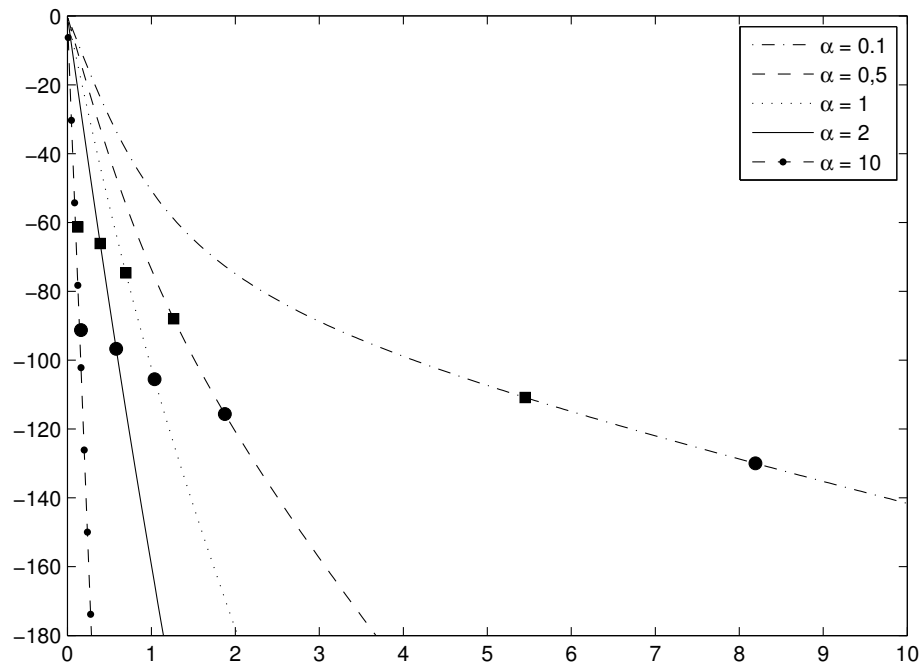


Figura 3.2: Curvas de fase em função de  $\alpha$  - o símbolo ● corresponde a  $N_2 = 2$  e o símbolo ■ corresponde a  $N_2 = 3$

Tabela 3.1: Fases em função de  $N_2$  e de  $\alpha$

	$N_2 = 2$	$N_2 = 3$
$\alpha = 0,1$	$-129,98^\circ$	$-110,84^\circ$
$\alpha = 0,5$	$-115,63^\circ$	$-87,96^\circ$
$\alpha = 1$	$-105,50^\circ$	$-74,62^\circ$
$\alpha = 2$	$-96,71^\circ$	$-66,09^\circ$
$\alpha = 10$	$-91,27^\circ$	$-61,30^\circ$

Todos os valores de  $\alpha$  e  $N_2$  utilizados resultaram em valores de fase na faixa de  $-45^\circ$  e  $-135^\circ$ . O ponto de menor fase foi de  $-61,30^\circ$  para  $\alpha = 10$  e o ponto de maior fase foi de  $-129,98^\circ$  para  $\alpha = 0,1$ .

Como a região de interesse para a localização do ponto de baixa frequência é aquela em que a fase do processo está entre  $-45^\circ$  e  $-135^\circ$ , a partir de diversos testes a recomendação para o parâmetro  $N_2$  é  $2 \leq N_2 \leq 3$ .

A vantagem de utilizar esse experimento é que o tempo de experimento é variável, vários pontos de frequência podem ser obtidos e nenhum conhecimento prévio sobre o processo é necessário.

### 3.3 Identificação de modelos FOPTD

Nessa Seção é apresentada a técnica de identificação de modelos FOPTD. A técnica proposta no domínio do tempo utiliza a informação obtida no domínio da frequência. São também propostos limites para a constante de tempo e para o atraso como valores máximos e mínimos.

O experimento apresentado na Seção anterior é utilizado para geração dos dados.

#### 3.3.1 Informação no domínio da frequência

Uma técnica de identificação para modelos FOPTD baseada no experimento do relé é apresentada em (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006) e neste trabalho é chamada de técnica Å&H. Os modelos obtidos utilizando esta técnica baseiam-se apenas no ponto crítico  $\omega_u$ .

Para um processo com estrutura FOPTD, o conhecimento de um ponto de frequência e do ganho estático caracteriza unicamente a função de transferência e é válido para todas as frequências. Por outro lado, se a estrutura do processo não for FOPTD, o modelo identificado utilizando apenas  $\omega_u$  representa o processo somente nessa frequência.

Assim, o modelo FOPTD identificado baseando-se em apenas um ponto de frequência pode ser ruim para o projeto de controladores. Desse modo, é desejável que o modelo identificado represente o processo em uma maior região de frequência. Para isso, a informação no domínio da frequência é obtida em  $\omega_i$  pontos de frequência e a proposição seguinte resume a idéia.

**Proposição 10** *Considere um modelo FOPTD  $G(s)$  dado por*

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-sL} \quad (3.3)$$

em que  $K \neq 0$  é o ganho estático,  $L \geq 0$  é o atraso e  $T > 0$  é a constante de tempo.

Defina  $|G(j\omega_i)|$  e  $\phi(\omega_i)$  como o ganho e a fase do processo em  $\omega_i$ , respectivamente. Defina o ganho relativo  $\kappa(\omega_i) = \frac{|G(j\omega_i)|}{|G(0)|}$ .

Então, os parâmetros do modelo FOPDT em função do ponto de frequência  $\omega_i$  podem ser calculados como

$$T(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i} \sqrt{\kappa^{-2}(\omega_i) - 1} \quad (3.4)$$

$$L(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i} \left( \phi(\omega_i) - \arctan(\sqrt{\kappa^{-2}(\omega_i) - 1}) \right) \quad (3.5)$$

$$K = G(0). \quad (3.6)$$

**Prova.** Dado um modelo  $G(s)$  como na Equação (3.3), o módulo na frequência  $\omega_i$  é

$$|G(j\omega_i)| = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega_i^2 + 1}}. \quad (3.7)$$

Sabendo que  $K = G(0)$  e definindo  $\kappa(\omega_i) \triangleq \frac{|G(j\omega_i)|}{G(0)}$ , tem-se

$$\kappa(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega_i^2 + 1}}. \quad (3.8)$$

Elevando ao quadrado e fazendo  $\kappa(\omega_i) = \kappa$  por simplicidade

$$\kappa^2 = \frac{1}{T^2\omega_i^2 + 1} \quad (3.9)$$

$$\kappa^2(T^2\omega_i^2 + 1) = 1 \quad (3.10)$$

$$\kappa^2 T^2 \omega_i^2 = 1 - \kappa^2 \quad (3.11)$$

$$T^2 \omega_i^2 = \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2} \quad (3.12)$$

$$T^2 \omega_i^2 = \kappa^{-2} - 1 \quad (3.13)$$

$$T\omega_i = \sqrt{\kappa^{-2} - 1} \quad (3.14)$$

$$T = \frac{1}{\omega_i} \sqrt{\kappa^{-2} - 1} \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

e então

$$T(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i} \sqrt{\kappa^{-2}(\omega_i) - 1}. \quad (3.17)$$

A fase de  $G(s)$  na frequência  $\omega_i$  representada por  $\phi(\omega_i)$  é dada por

$$\phi(\omega_i) = -\omega_i L - \arctan \omega_i T. \quad (3.18)$$

Sabendo que  $\omega_i T = \sqrt{\kappa^{-2} - 1}$  então

$$\phi(\omega_i) = -\omega_i L - \arctan \sqrt{\kappa^{-2} - 1} \quad (3.19)$$

$$\omega_i L = -\phi(\omega_i) - \arctan \sqrt{\kappa^{-2} - 1} \quad (3.20)$$

$$L = \frac{1}{\omega_i} \left( -\phi(\omega_i) - \arctan \sqrt{\kappa^{-2} - 1} \right). \quad (3.21)$$

Como a fase é calculada no sentido anti-horário, por convenção os valores de fase são negativos e então

$$L(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i} \left( \phi(\omega_i) - \arctan \sqrt{\kappa^{-2}(\omega_i) - 1} \right). \quad (3.22)$$

■

Desse modo, a informação na frequência é um conjunto de constantes de tempo e um conjunto de atrasos calculados nas frequências de interesse. Neste trabalho, os conjuntos são calculados em dois pontos de frequência: baixa  $\omega_L = \frac{\pi}{N_2 T_u}$ ; alta  $\omega_H = \frac{\pi}{T_u}$ . Assim, são obtidas duas constantes de tempo e dois atrasos.

### 3.3.2 Limites para os parâmetros

De modo a verificar uma estimativa ruim em uma dada frequência, limites para o atraso e para a constante de tempo são propostos. Estes limites são valores máximos e mínimos baseados em modelos limites obtidos da região de alta frequência.

Em (LUYBEN, 2001), os modelos limites baseados no experimento do relé são apresentados em função da relação  $L/T$  (atraso/constante de tempo). Neste trabalho, estes modelos limites são utilizados para obter valores máximos e mínimos para a constante de tempo e para o atraso. Os modelos limites são calculados no ponto de alta frequência  $\omega_H$ .

- Limites para o atraso

Quando a relação  $L/T \rightarrow \infty$ , a dinâmica de um modelo FOPTD tende para

$$G(s) = K e^{-Ls}. \quad (3.23)$$

A fase é dada por

$$\phi(\omega) = -L\omega \quad (3.24)$$

e o limite máximo para o atraso é

$$L_{max} = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}. \quad (3.25)$$

Por outro lado, quando a relação  $L/T \rightarrow 0$ , a dinâmica de um modelo FOPTD tende para

$$G(s) = \frac{(1/T)}{s} e^{-Ls}. \quad (3.26)$$

A fase é dada por

$$\phi(\omega) = -L\omega - \frac{\pi}{2} \quad (3.27)$$

e o limite inferior é encontrado como

$$L_{mim} = -\frac{\phi(\omega) + \frac{\pi}{2}}{\omega}. \quad (3.28)$$



- Limites para a constante de tempo

A fase de um modelo FOPTD é dada por

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega T) - \omega L \quad (3.29)$$

Utilizando o atraso mínimo  $L = L_{min}$  na Eq. (3.29), a contribuição de fase do atraso é mínima. Consequentemente, a contribuição de fase da constante de tempo deve ser máxima de modo a manter a igualdade verdadeira. Neste caso, o limite máximo para a constante de tempo pode ser encontrado. Esse limite máximo é dado por

$$T_{max} = -\frac{\tan(\phi(\omega) + \omega L_{min})}{\omega}. \quad (3.30)$$

O limite mínimo para a constante de tempo é  $T_{min} = 0$ .

### 3.3.3 Técnica de identificação no domínio do tempo

A técnica de identificação no domínio do tempo para modelos FOPTD apresentada nessa Seção utiliza o conjunto de estimativas dos parâmetros obtidos previamente no domínio da frequência. Desse modo, o modelo identificado representa o processo no domínio do tempo enquanto captura a dinâmica em torno de frequências de interesse.

Considere um modelo FOPTD dado na Equação (3.3) e repetido em seguida por conveniência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1} e^{-sL} \quad (3.31)$$

em que  $K$  é o ganho do sistema,  $L$  é o atraso e  $T$  é a constante de tempo. Este modelo é representado no domínio do tempo pela equação diferencial

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t - L) \quad (3.32)$$

em que  $a = 1/T$  e  $b = K/T$ .

Integrando ambos os lados da Equação (3.32) e considerando condições iniciais iguais a zero

$$y(t) = -a \int_0^t y(\tau) d\tau + b \int_0^t u(\tau - L) d\tau. \quad (3.33)$$

Fazendo uma mudança de variável e utilizando o fato de que  $u(t) = 0$  para  $t < 0$

$$y(t) = -a \int_0^t y(\tau) d\tau + b \int_0^{t-L} u(\tau) d\tau. \quad (3.34)$$

O problema agora é determinar  $a$ ,  $b$  e  $L$  levando em consideração a informação no domínio da frequência disponível. Além disso, é desejado que o modelo resultante também represente bem o processo no domínio do tempo.

A informação do processo nas frequências de interesse é obtida utilizando a Proposição 10. As frequências de interesse são  $\omega_L$  e  $\omega_H$  e o conjunto de estimativas no domínio da frequência é  $T_1$  e  $L_1$  estimados no ponto de baixa frequência  $\omega_L$ ,  $T_2$  e  $L_2$  estimados no ponto de alta frequência  $\omega_H$ .

É possível definir os parâmetros  $a$  e  $b$  em cada ponto de frequência ( $\omega_L$  e  $\omega_H$ ) como  $a_1 = 1/T_1$ ,  $a_2 = 1/T_2$ ,  $b_1 = \hat{K}/T_1$  e  $b_2 = \hat{K}/T_2$ . A estimativa inicial do ganho estático  $\hat{K}$  é obtida da componente de frequência DC da excitação proposta na Figura 3.1.

Em seguida, os parâmetros  $a$  e  $b$  que caracterizam o modelo FOPTD devem ser determinados a partir dos parâmetros  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  e  $b_2$  calculados em cada ponto de frequência. O primeiro passo é decompor  $a$  e  $b$  como uma soma ponderada dada por

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \quad (3.35)$$

$$b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \quad (3.36)$$

em que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  satisfazem a restrição  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . As variáveis  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  representam a ponderação em função da contribuição de cada ponto de frequência na estimativa final.

Substituindo as Equações (3.35) e (3.36) na Equação (3.34) tem-se

$$y(t) = -(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \int_0^t y(\tau) d\tau + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) \int_0^{t-L} u(\tau) d\tau \quad (3.37)$$

ou

$$\begin{aligned} y(t) = & \alpha_1 \left[ -a_1 \int_0^t y(\tau) d\tau + b_1 \int_0^{t-\hat{L}} u(\tau) d\tau \right] \\ & + \alpha_2 \left[ -a_2 \int_0^t y(\tau) d\tau + b_2 \int_0^{t-\hat{L}} u(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pode-se escrever na forma matricial

$$y(t) = \phi^T(t) \theta \quad (3.39)$$

em que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \begin{bmatrix} -a_1 \int_0^t y(\tau) d\tau + b_1 \int_0^{t-\hat{L}} u(\tau) d\tau \\ -a_2 \int_0^t y(\tau) d\tau + b_2 \int_0^{t-\hat{L}} u(\tau) d\tau \end{bmatrix} \\ \theta^T &= [\alpha_1 \quad \alpha_2]. \end{aligned}$$

O vetor de parâmetros é calculado a partir do algoritmo dos mínimos quadrados com restrição de igualdade, pois  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . A restrição é escrita na forma  $M\theta = \gamma$  e a proposição seguinte resume o procedimento.

**Proposição 11** Escolha  $\hat{L} = (L_1 + L_2)/2$  como a estimativa inicial do atraso. Encontre o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}$  a partir do algoritmo dos mínimos quadrados com restrição de igualdade ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ). A solução é dada por

$$\hat{\theta} = (R_N)^{-1} f_N + (R_N)^{-1} M^T \lambda^T \quad (3.40)$$

em que

$$\begin{aligned} \Phi &= [\phi(0) \quad \phi(1) \quad \dots \quad \phi((N-1)T_s)] \\ Y &= [y(0) \quad y(1) \quad \dots \quad y((N-1)T_s)] \\ R_N &= \Phi^T \Phi \\ f_N &= \Phi^T Y \\ \lambda &= [MR_N^{-1} M^T]^{-1} [\gamma - MR_N^{-1} f_N] \\ M &= [1 \quad 1] \\ \gamma &= 1. \end{aligned}$$

Calcule os parâmetros  $a$  e  $b$  utilizando as Equações (3.35) e (3.36), respectivamente. E calcule  $\hat{T}$  e  $\hat{K}$  de  $\hat{T} = 1/a$  e  $\hat{K} = b\hat{T}$ .

Atualize a estimativa do atraso utilizando

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega\hat{T}) - \omega\hat{L}. \quad (3.41)$$

Repita o procedimento até que o critério de parada

$$\hat{T}_k - \hat{T}_{k-1} < \beta\hat{T}_{k-1} \quad (3.42)$$

$$\hat{L}_k - \hat{L}_{k-1} < \beta\hat{L}_{k-1} \quad (3.43)$$

tenha sido satisfeito. O parâmetro  $\beta$  pertencente ao intervalo  $(0, 1)$  e  $k$  é a iteração atual.

**Prova.** É possível encontrar o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}$  utilizando a Equação (3.39) se o atraso é conhecido. Como estão disponíveis duas estimativas para o atraso,  $L_1$  e  $L_2$ , qualquer combinação pode ser utilizada. Um bom valor inicial é o valor médio  $\hat{L} = (L_1 + L_2)/2$ . A solução dos mínimos quadrados com restrição de igualdade é dada pela Equação (3.40) (NELLES, 2001).

Com  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , os parâmetros  $a$  e  $b$  são calculados utilizando a Equação (3.35) e (3.36), respectivamente. Em seguida,  $\hat{T}$  e  $\hat{K}$  são calculados por  $\hat{T} = 1/a$  e  $\hat{K} = b\hat{T}$  como definido na Equação (3.32). ■

Desse modo, o modelo FOPTD identificado representa o processo no domínio do tempo enquanto captura a dinâmica em torno das frequências de interesse. O conjunto de frequências de interesse pode ser maior dado que mais pontos da resposta em frequência estão disponíveis. Foram escolhidos apenas dois por simplicidade.

### 3.4 Identificação de modelos SOPTD

Nessa Seção é apresentada a técnica de identificação para modelos SOPTD. O mesmo experimento utilizado na geração dos dados para a identificação de modelos FOPTD é utilizado na geração dos dados para identificação de modelos SOPTD. Então, a partir de apenas um experimento, é possível obter tanto um modelo FOPTD quando um modelo SOPTD. A proposição seguinte resume a técnica.

**Proposição 12** *Considere um modelo SOPDT com função de transferência dada por*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{as^2 + bs + 1} e^{-Ls} \quad (3.44)$$

em que  $K$  é o ganho do sistema,  $L$  é o atraso e  $a$  e  $b$  são os coeficientes do polinômio do segundo grau.

Defina  $|G(j\omega_i)|$  e  $\phi(\omega_i)$  como o ganho e a fase do sistema em  $\omega_i$ , respectivamente. Assuma que o ganho  $G(0)$  e que  $G(j\omega_i)$  são estimados e defina o ganho relativo como

$$\kappa(\omega_i) = \frac{|G(j\omega_i)|}{G(0)}. \quad (3.45)$$

Resolva o sistema de equações dado por

$$\begin{cases} \omega_1^4 \alpha_1 + \omega_1^2 \alpha_2 = \frac{1 - \kappa^2(\omega_1)}{\kappa^2(\omega_1)} \\ \omega_2^4 \alpha_1 + \omega_2^2 \alpha_2 = \frac{1 - \kappa^2(\omega_2)}{\kappa^2(\omega_2)} \end{cases} \quad (3.46)$$

Então, os parâmetros do modelo SOPDT podem ser calculados como

$$\hat{a} = \sqrt{\alpha_1} \quad (3.47)$$

$$\hat{b} = \sqrt{\alpha_2 + 2\sqrt{\alpha_1}} \quad (3.48)$$

$$\hat{L}(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i} \left[ \phi(\omega_i) - \arctan \left( \frac{\hat{b}\omega_i}{1 - \hat{a}\omega_i^2} \right) \right] \quad (3.49)$$

$$\hat{K} = G(0). \quad (3.50)$$

**Prova.** Defina a relação entre os módulos na frequência como  $\kappa$  dado por

$$\kappa(\omega_i) = \frac{|G(j\omega_i)|}{G(0)}. \quad (3.51)$$

O módulo de  $G(s)$  em uma frequência qualquer é

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}. \quad (3.52)$$

Dividindo por  $|G(0)|$  a Equação (3.52) e elevando ao quadrado, tem-se

$$\frac{|G(j\omega)|^2}{|G(0)|^2} = \frac{1}{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2} = \kappa^2(\omega). \quad (3.53)$$

Desenvolvendo os termos

$$\begin{aligned} \kappa^2((1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2) &= 1 \\ \kappa^2(1 - 2a\omega^2 + a^2\omega^4 + (b\omega)^2) &= 1 \\ a^2\omega^4 + (b^2 - 2a)\omega^2 + 1 &= \frac{1}{\kappa^2} \\ a^2\omega^4 + (b^2 - 2a)\omega^2 &= \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Com a Equação (3.54) e a informação de dois pontos de frequência obtidos do experimento, é possível estruturar o seguinte sistema

$$\omega_1^4\alpha_1 + \omega_1^2\alpha_2 = \frac{1 - \kappa^2(\omega_1)}{\kappa^2(\omega_1)} \quad (3.55)$$

$$\omega_2^4\alpha_1 + \omega_2^2\alpha_2 = \frac{1 - \kappa^2(\omega_2)}{\kappa^2(\omega_2)} \quad (3.56)$$

em que  $\alpha_1 = a^2$  e  $\alpha_2 = b^2 - 2\sqrt{a}$ .

Agora, escreva a equação para a fase de  $G(s)$ , definida como

$$\phi(\omega) = -\omega L - \arctan\left(\frac{b\omega}{1 - a\omega^2}\right). \quad (3.57)$$

Utilizando a Equação (3.57), os dois pontos de frequência e as constantes de tempo estimadas, o atraso é estimado como

$$\hat{L}(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i} \left[ \phi(\omega_i) - \arctan\left(\frac{\hat{b}\omega}{1 - \hat{a}\omega^2}\right) \right]. \quad (3.58)$$

■

As frequências de interesse, pelo menos duas frequências, são escolhidas de acordo com o espectro do sinal de entrada definido pelo projeto do experimento proposto. O experimento é projetado de modo a excitar o processo em no mínimo dois pontos de frequência,  $\omega_L$  e  $\omega_H$ .

No domínio do tempo também é possível obter estimativas para o ganho estático e para o atraso. Esses parâmetros estimados no domínio do tempo são combinados com os obtidos no domínio da frequência.

O ganho estático é calculado como uma razão entre a integral dos desvios da saída e da entrada de acordo com

$$\hat{K} = \frac{\int_0^{t_b} y(t) dt}{\int_0^{t_b} u(t) dt}. \quad (3.59)$$

A estimativa para o atraso  $L$  é obtida a partir de uma procura baseada no fato da saída do processo ser zero até o instante de tempo em que  $t = L$ , ou seja,

$$\int_0^{t \geq t_1} y(t) = \int_L^{t \geq t_1} y(t). \quad (3.60)$$

em que  $t_1$  é o instante de tempo tal que  $t_1 > L$ . No contexto desse trabalho  $t_1$  é o instante de tempo do primeiro chaveamento do relé.

O procedimento é calcular o termo do lado esquerdo da Equação (3.60) e recalculá-lo o termo do lado direito fazendo uma busca no tempo. Como, em geral, a igualdade não é encontrada devido ao ruído ou precisão numérica, as integrais são subtraídas e um critério de parada  $\alpha$  é definido. Assim,

$$\int_0^{t_1} y(t) - \int_{\hat{L}}^{t_1} y(t) < \alpha \int_0^{t_1} y(t) \quad (3.61)$$

em que  $\alpha$  é um limiar que define a sensibilidade ao ruído (caso haja ruído). Uma das formas de escolher o limiar  $\alpha$  é observando o desvio padrão do sinal de saída em torno de um ponto de operação fixo.

De posse dos parâmetros obtidos segundo a Proposição 12 no domínio da frequência e os parâmetros obtidos no domínio do tempo (ganho estático e atraso), é necessário combiná-los de modo a obter o modelo SOPTD resultante. Os parâmetros são combinados da seguinte forma:

- O ganho estático calculado nos domínios do tempo e da frequência é o mesmo;
- O atraso escolhido é o máximo entre os atrasos obtidos no domínio do tempo  $L_t$  e da frequência  $L_f$ ,  $\hat{L} = \max\{L_t, L_f\}$ . O máximo é escolhido de modo a obter a escolha mais conservadora.

## 3.5 Exemplos de simulação

Nesta Seção as técnicas de identificação para modelos FOPTD e SOPTD são avaliadas. Para todos os exemplos a técnica chamada de *técnica Å&H* é apresentada em (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006), a técnica chamada de *técnica BJKM* é apresentada em (BARRA et al., 2008) e a técnica chamada de *técnica RChi* é apresentada em (RAMAKRISHNAN; CHIDAMBARAM, 2003).

Como na técnica Å&H o ganho em regime permanente é assumido conhecido e não estimado, foi assumido o ganho verdadeiro em todos os exemplos.

A função de custo utilizada na comparação das técnicas de identificação para modelos FOPTD e SOPTD no domínio do tempo é

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(kT_s) - \hat{y}(kT_s)]^2 \quad (3.62)$$

em que  $y(kT_s)$  e  $\hat{y}(kT_s)$  é a saída do processo real e estimada, respectivamente.

A função de custo no domínio da frequência é

$$E = \frac{1}{N_\omega} \sum_{k=0}^{N_\omega-1} |G(j\omega_k) - \hat{G}(j\omega_k)| \quad (3.63)$$

em que  $N_\omega$  é o número de pontos de frequência,  $G(j\omega_k)$  é a resposta em frequência do processo e  $\hat{G}(j\omega_k)$  é a resposta em frequência do modelo identificado. A região de frequência utilizada em todos os exemplos é de  $\omega = 0$  até a frequência em que a fase do processo é maior que  $-180^\circ$ .

### 3.5.1 Exemplo 1

No primeiro exemplo é utilizado um processo de primeira ordem com atraso dado por

$$G(s) = \frac{1}{(4s + 1)} e^{-3s}. \quad (3.64)$$

De modo a verificar o efeito do ruído nos modelos identificados a partir de cada uma das técnicas, foram utilizados diversos valores para a variância e, em todos os casos, a média é zero. Os modelos identificados seguem na Tabela 3.2.

Os sinais de entrada e saída para esse exemplo no caso em que a variância do ruído é 0,005 seguem na Figura 3.3. A largura do pulso  $N_2 T_u / 2$  é  $1,5 T_u$  e  $T_u = 9,4$  segundos.

Para a continuação do exemplo foram escolhidos os modelos identificados para o caso em que a variância do ruído é de 0,005. Todos os cálculos apresentados em seguida

Tabela 3.2: Exemplo 1 - Modelos identificados com diversos ruídos

Variância	0	0,005	0,01
Técnica proposta	$\frac{0,999}{(3,997s+1)}e^{-3s}$	$\frac{0,998}{(4,016s+1)}e^{-2,99s}$	$\frac{0,998}{(4,103s+1)}e^{-2,97s}$
Técnica Å&H	$\frac{1}{(3,995s+1)}e^{-2,998s}$	$\frac{1}{(4,227s+1)}e^{-2,97s}$	$\frac{1}{(4,384s+1)}e^{-2,94s}$
Técnica BJKM	$\frac{1}{(4,004s+1)}e^{-3,001s}$	$\frac{1,074}{(3,176s+1)}e^{-2,6s}$	$\frac{1,262}{(3,154s+1)}e^{-2,7s}$

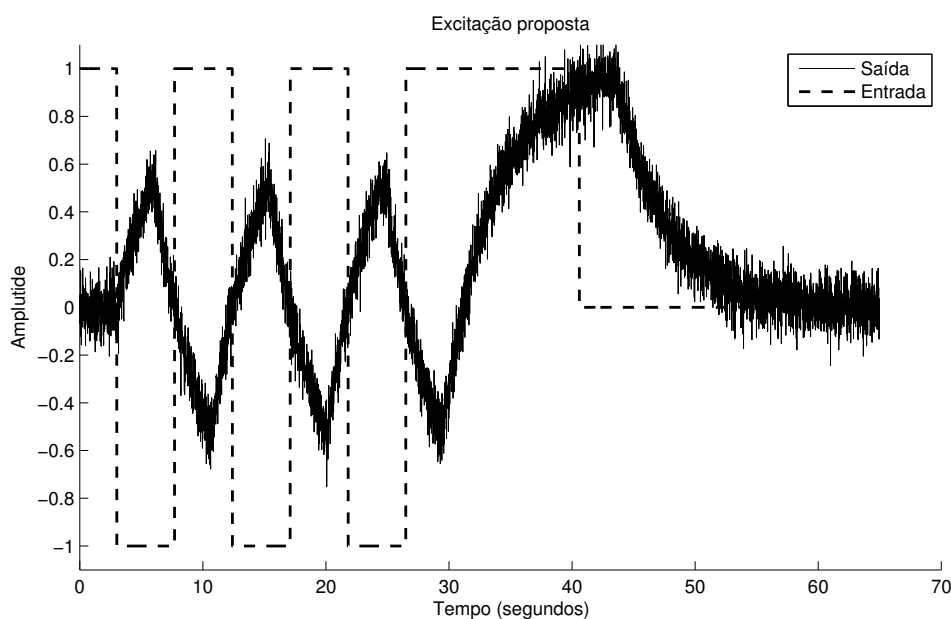


Figura 3.3: Exemplo 1 - Excitação proposta

foram realizados para esses modelos. Na Tabela 3.3 seguem a nomenclatura e os modelos utilizados.

A informação no domínio da frequência foi calculada no ponto de alta frequência ( $\omega_H$ ) e no ponto de baixa frequência ( $\omega_L$ ). As estimativas para a constante de tempo e para o atraso calculadas a partir das Equações (3.4) e (3.5) seguem na Tabela 3.4.

Os limites para o atraso e para a constante de tempo são calculados utilizando as Equações (3.25), (3.28) e (3.30). Os valores calculados seguem na Tabela 3.5. Note que as estimativas nos dois pontos de frequência tanto para o atraso quanto para a constante de tempo estão dentro do intervalo entre os valores máximos e mínimos.

De modo a reunir essas informações em um único modelo, foi utilizada a técnica de identificação no domínio do tempo. O primeiro passo foi determinar a estimativa inicial do atraso,  $\hat{L} = (L_L + L_H)/2 = (2,970 + 2,998)/2$ .

Em seguida, são calculados  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  utilizando  $T_1$ ,  $T_2$  e  $\hat{K}$ . Os parâmetros  $\alpha_1$



Tabela 3.3: Exemplo 1 - Modelos identificados

Processo 1	$G(s) = \frac{1}{(4s+1)}e^{-3s}$
Técnica proposta	$G_{1p}(s) = \frac{0,998}{(4,016s+1)}e^{-2,99s}$
Técnica Å&H	$G_{1a}(s) = \frac{1}{(4,227s+1)}e^{-2,97s}$
Técnica BJKM	$G_{1b}(s) = \frac{1,074}{(3,176s+1)}e^{-2,6s}$

Tabela 3.4: Exemplo 1 - Estimativa dos parâmetros

	$\omega_L$	$\omega_H$
$L$	2,970	2,998
$T$	3,978	3,995

Tabela 3.5: Exemplo 1 - Limites para os parâmetros

	Mínimo	Máximo
$L$	2,367	4,927
$T$	0	6,456

e  $\alpha_2$  são determinados a partir do solução do problema dos mínimos quadrados dado na Equação (3.40).

Para melhorar as estimativas iniciais encontradas, o problema é resolvido de forma iterativa, até que o critério de parada tenha sido atingido. O critério de parada é  $\beta = 0,01$  ou 1%. Em cada iteração, a estimativa do atraso é atualizada utilizando a Equação (3.41) e as estimativas da constante de tempo e do ganho também são atualizadas. As estimativas dos parâmetros em cada iteração seguem na Tabela 3.6.

Tabela 3.6: Exemplo 1 - Parâmetros em cada iteração

Iteração	$\hat{K}$	$\hat{T}$	$\hat{L}$
1	0,998	4,205	2,969
2	0,998	3,855	3,019
3	0,998	4,016	2,999

Na Tabela 3.7 seguem os valores das funções de custo nos domínios do tempo e da frequência ( $\varepsilon$  e  $E$ ) para os modelos identificados. Devido ao ruído, o modelo  $G_{1b}(s)$  resultou nos piores índices, tanto no tempo quanto na frequência.

Os diagramas de Nyquist para  $G_{1a}(s)$ ,  $G_{1b}(s)$  e  $G_{1p}(s)$  seguem na Figura 3.4. Como o sistema real é FOPTD, as respostas em frequência são bastante próximas ao real em todas as frequências exceto para  $G_{1b}(s)$ . Isto ocorre devido ao ruído presente. Note que o

Tabela 3.7: Exemplo 1 -  $\varepsilon$  e  $E$

	$G_{1p}(s)$	$G_{1a}(s)$	$G_{1b}(s)$
$\varepsilon$	$2,69 \times 10^{-6}$	$4,82 \times 10^{-5}$	$9,6 \times 10^{-3}$
$E$	0,0019	0,0127	0,1372

ganho real do sistema foi utilizado para ser possível determinar as estimativas utilizando a técnica Å&H. Na Figura 3.5 seguem as respostas ao degrau para cada um dos modelos identificados.

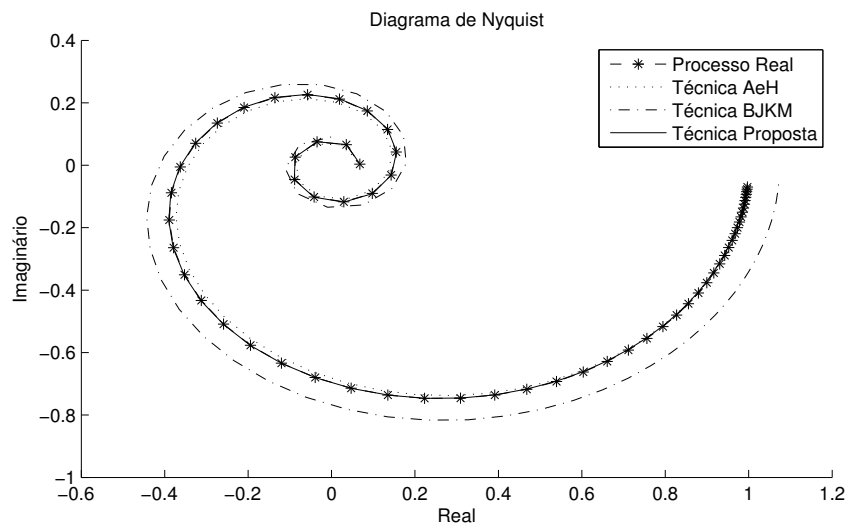


Figura 3.4: Exemplo 1 - Diagramas de Nyquist

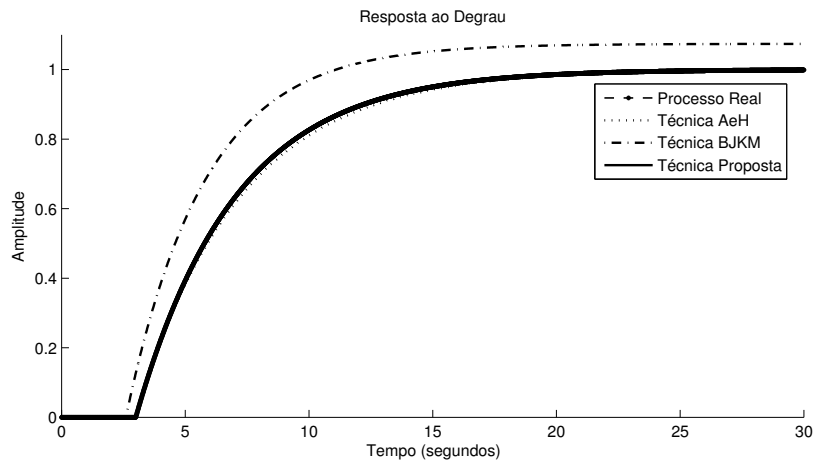


Figura 3.5: Exemplo 1 - Respostas ao degrau

### 3.5.2 Exemplo 2

O processo utilizado para o segundo exemplo é do tipo SOPTD. A função de transferência do processo é dada por

$$G_2(s) = \frac{1}{(10s + 1)(s + 1)} e^{-2s} = \frac{1}{10s^2 + 11s + 1} e^{-2s}. \quad (3.65)$$

Os modelos identificados seguem na Tabela 3.8. Foram utilizadas as técnicas propostas de primeira e de segunda ordem.

Tabela 3.8: Exemplo 2 - Modelos identificados

Processo 2	$G_2(s) = \frac{1}{10s^2 + 11s + 1} e^{-2s}$
Técnica Proposta FOPTD	$G_{2fo}(s) = \frac{0,99}{10,34s + 1} e^{-2,9s}$
Técnica Proposta SOPTD	$G_{2so}(s) = \frac{0,99}{9,98s^2 + 10,99s + 1} e^{-1,99s}$
Técnica RChi	$G_{2c}(s) = \frac{1}{12,41s^2 + 11,04s + 1} e^{-1,81s}$

Segue na Figura 3.6 a resposta do processo ao experimento proposto para o caso com ruído branco de média zero e variância 0,001, adicionado na saída do processo. A largura do pulso  $N_2 T_u / 2$  é  $1,5 T_u$  e  $T_u = 10,54$  segundos.

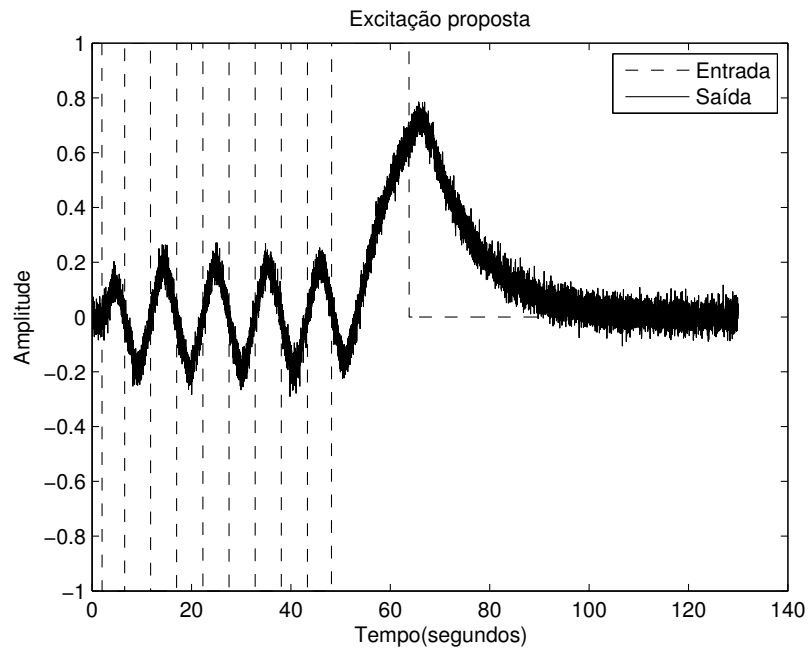


Figura 3.6: Exemplo 2 - Excitação proposta

Na Tabela 3.9 seguem os valores das funções de custo nos domínios do tempo e da frequência ( $\varepsilon$  e  $E$ ) para os modelos identificados.

Tabela 3.9: Exemplo 2 -  $\varepsilon$  e  $E$

	$G_{2fo}(s)$	$G_{2so}(s)$	$G_{2c}(s)$
$\varepsilon$	$1,61 \times 10^{-5}$	$1,92 \times 10^{-6}$	$3,54 \times 10^{-6}$
$E$	$1,44 \times 10^{-2}$	$9,11 \times 10^{-4}$	$5,3 \times 10^{-3}$

Os diagramas de Nyquist para  $G_{2fo}(s)$ ,  $G_{2so}(s)$  e  $G_{2p}(s)$  seguem na Figura 3.7. Como o sistema real é SOPTD, as respostas em frequência são bastantes próximas ao real em todas as frequências para os modelos identificados utilizando as duas técnicas de segunda ordem. O modelo de primeira ordem  $G_{2fo}(s)$  também representa bem o processo, já que o polo dominante é 10 vezes maior que o outro polo.

Na Figura 3.8 seguem as respostas ao degrau para cada um dos modelos identificados. O mesmo comportamento apresentado no domínio da frequência é verificado no domínio do tempo. Os modelos de segunda ordem representam bem o processo. O modelo de primeira ordem também representa bem e isso se deve ao fato da constante de tempo dominante ser 10 vezes maior que a outra constante de tempo.

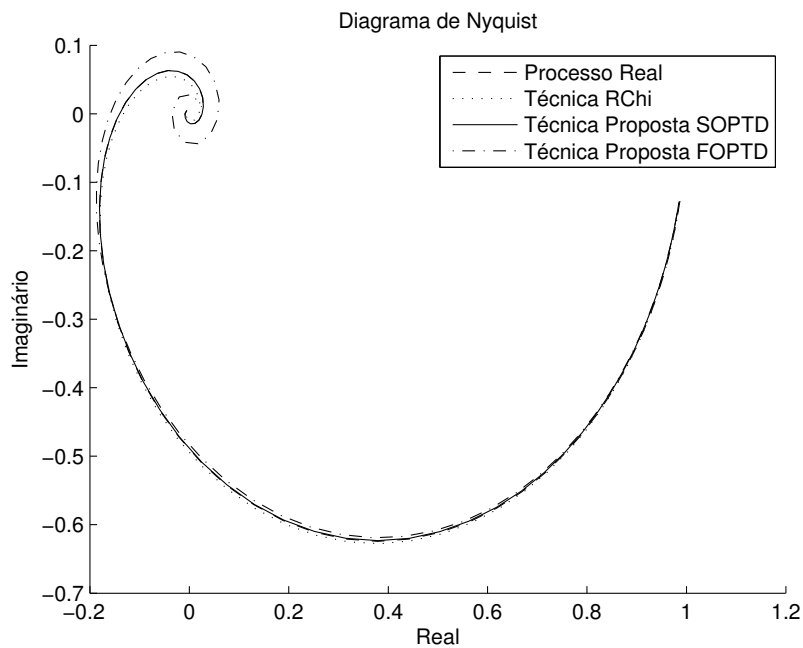


Figura 3.7: Exemplo 2 - Diagramas de Nyquist

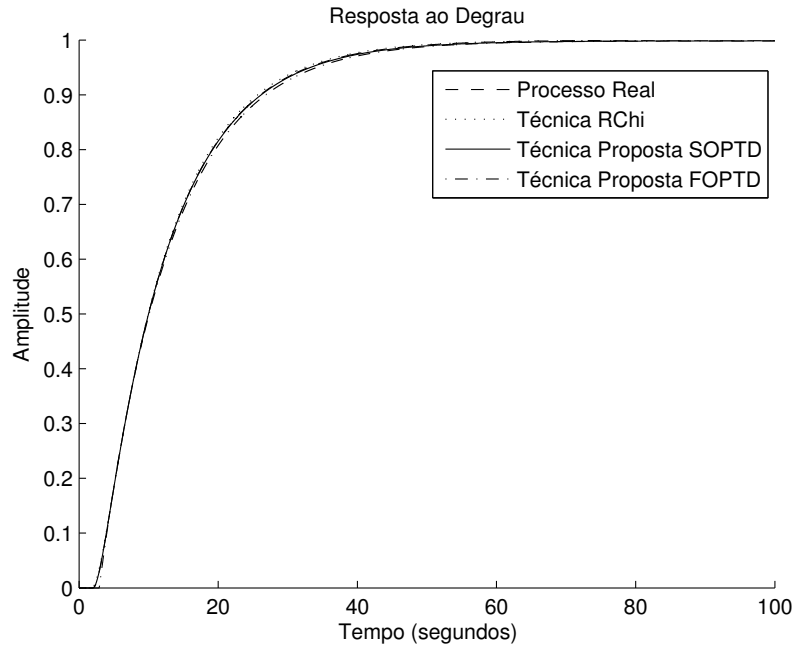


Figura 3.8: Exemplo 2 - Respostas ao degrau

### 3.5.3 Exemplo 3

No terceiro exemplo, o processo é de ordem superior. Neste exemplo, todas as técnicas de identificação para modelos FOPTD e SOPTD são utilizadas. A função de transferência do processo é dada por

$$G_2(s) = \frac{1}{(s + 1)^4} e^{-s}. \tag{3.66}$$

Os modelos identificados seguem na Tabela 3.10.

Tabela 3.10: Exemplo 3 - Modelos identificados

Processo 3	$G_3(s) = \frac{1}{(s+1)^4} e^{-s}$
Técnica Proposta FOPTD	$G_{3fo}(s) = \frac{0,99}{2,405s+1} e^{-3,01s}$
Técnica Proposta SOPTD	$G_{3so}(s) = \frac{0,99}{2,89s^2+3,11s+1} e^{-1,88s}$
Técnica Å&H	$G_{3a}(s) = \frac{1}{2,803s+1} e^{-2,91s}$
Técnica BJKM	$G_{3b}(s) = \frac{1,024}{2,933s+1} e^{-1,33s}$
Técnica RChi	$G_{3c}(s) = \frac{1}{2,8s^2+3,05s+1} e^{-1,81s}$

Segue na Figura 3.9 a resposta do processo ao experimento proposto para o caso com ruído branco de média zero e variância 0,001 adicionado na saída do processo. A largura do pulso  $N_2T_u/2$  é  $1,5T_u$  e  $T_u = 8,94$  segundos.

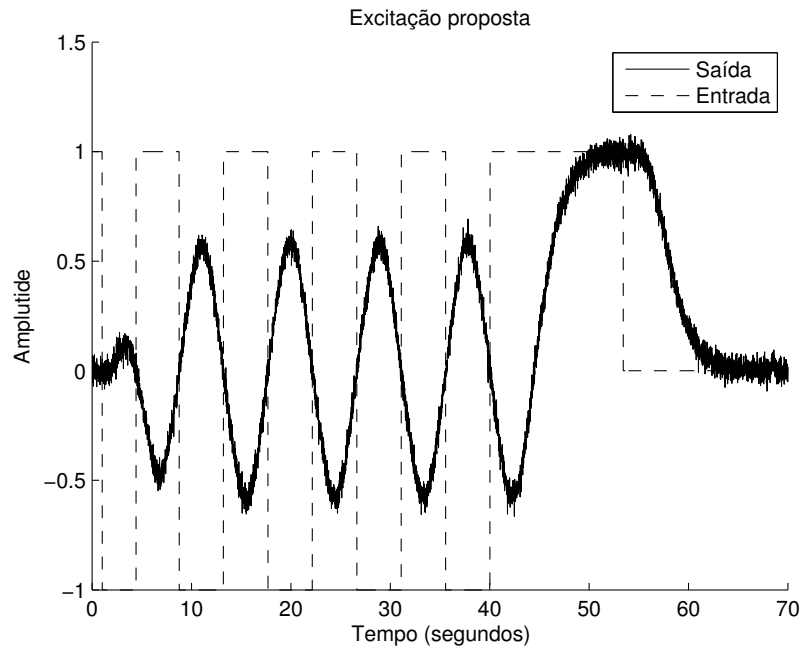


Figura 3.9: Exemplo 3 - Excitação proposta

O ponto de alta frequência ( $\omega_H$ ) corresponde à fase de  $-178^\circ$  e o ponto de baixa frequência ( $\omega_L$ ) corresponde à fase de  $-64,97^\circ$ .

Primeiro foi utilizada a técnica de identificação para modelos FOPTD. As estimativas para a constante de tempo e para o atraso seguem na Tabela 3.11. Já os valores calculados para os limites dos parâmetros seguem na Tabela 3.12.

Tabela 3.11: Exemplo 3 - Estimativa dos parâmetros

	$\omega_L$	$\omega_H$
$L$	2,99	2,91
$T$	2,072	2,803

Tabela 3.12: Exemplo 3 - Limites para os parâmetros

	Mínimo	Máximo
$L$	2,224	4,499
$T$	0	3,638

A estimativa inicial do atraso é  $\hat{L} = (L_L + L_H)/2 = (2,99 + 2,91)/2$ . Em seguida, são calculados  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  e os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são determinados a partir da Equação

(3.40). O critério de parada é  $\beta = 0,01$  ou 1%. As estimativas dos parâmetros em cada iteração seguem na Tabela 3.13.

Tabela 3.13: Exemplo 3 - Parâmetros em cada iteração

Iteração	$\hat{K}$	$\hat{T}$	$\hat{L}$
1	0,99	2,45	2,99
2	0,99	2,413	3,007
3	0,99	2,405	3,01

Em seguida, o modelo SOPTD é obtido utilizando a técnica combinada e as Equações (3.47)-(3.50).

Na Tabela 3.14 seguem os valores das funções de custo nos domínios do tempo e da frequência ( $\varepsilon$  e  $E$ ) para todos os modelos identificados. Os modelos de segunda ordem representam bem melhor o processo real, tanto utilizando a técnica proposta quanto utilizando a técnica RChi. No entanto a técnica proposta ainda apresenta melhores resultados.

Tabela 3.14: Exemplo 3 -  $\varepsilon$  e  $E$

	$G_{3a}(s)$	$G_{3b}(s)$	$G_{3c}(s)$	$G_{3fo}(s)$	$G_{3so}(s)$
$\varepsilon$	$1,4 \times 10^{-3}$	$7,8 \times 10^{-3}$	$1,32 \times 10^{-4}$	$6,86 \times 10^{-4}$	$2,47 \times 10^{-5}$
$E$	$5,53 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-1}$	$2,32 \times 10^{-2}$	$4,05 \times 10^{-2}$	$7,7 \times 10^{-3}$

Os diagramas de Nyquist dos modelos seguem na Figura 3.10. O modelo  $G_{3a}(s)$  obtido utilizando apenas a informação de um ponto de frequência, o ponto em que a fase do processo é  $-180^\circ$ , representa o processo exatamente nesse ponto (cruzamento entre as curvas). Por outro lado, o modelo  $G_{3fo}(s)$  obtido utilizando dois pontos de frequência representa o processo em uma maior região de frequência importante para o projeto do controlador. Já o modelo  $G_{3b}(s)$  resulta em um modelo que não representa bem o processo real. Mais uma vez isso ocorre devido ao ruído presente. Os modelos de segunda ordem resultam em boas representações para as duas técnicas.

Na Figura 3.11 seguem as respostas ao degrau para cada um dos modelos identificados. Assim como no domínio da frequência, os modelos de segunda ordem representa, bem melhor o processo de ordem superior no domínio do tempo.

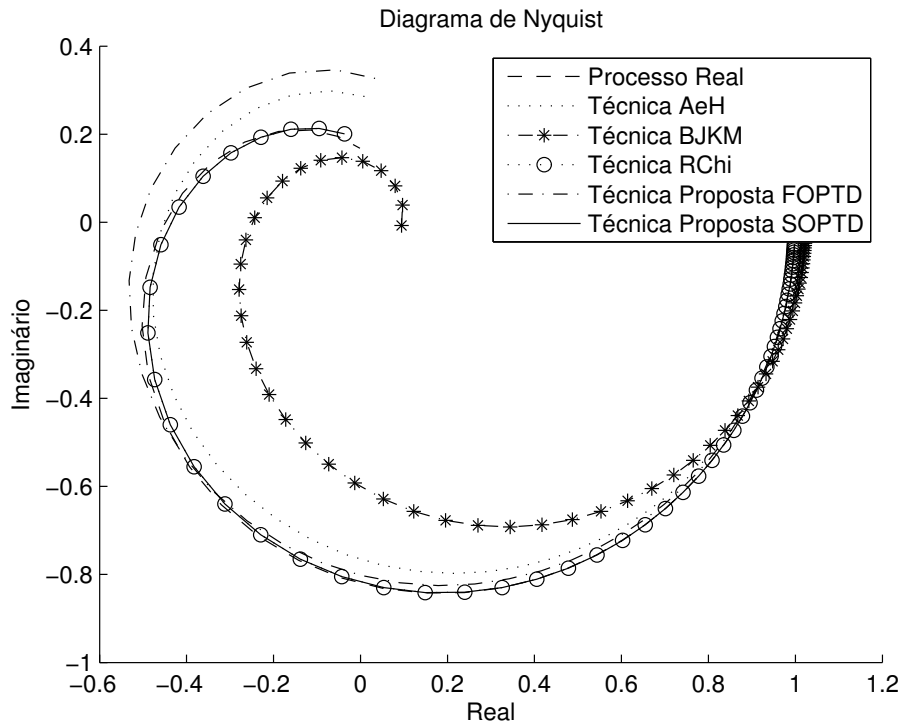


Figura 3.10: Exemplo 3 - Diagramas de Nyquist

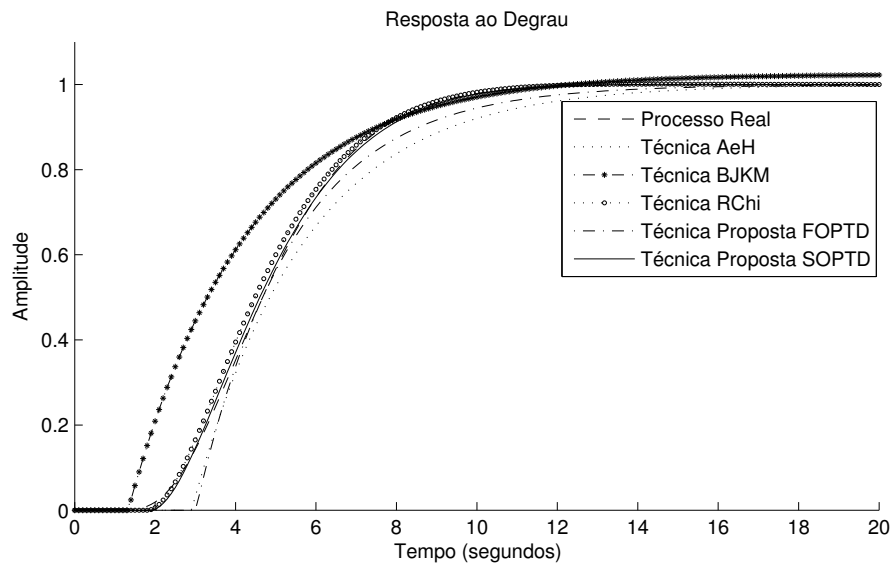


Figura 3.11: Exemplo 3 - Respostas ao degrau

### 3.6 Plataforma experimental

A plataforma experimental utilizada para a avaliação das técnicas de identificação é um processo termoelétrico que utiliza o efeito Peltier para aquecimento ou resfriamento de



uma determinada área.

### 3.6.1 Descrição

O processo termoelétrico utiliza o efeito Peltier para aquecimento ou resfriamento de uma determinada área. Peltier descobriu em 1834 que, a partir de uma corrente elétrica, era possível transformar energia elétrica em gradiente de temperatura e chamou esse fenômeno de efeito Peltier. Esse tipo de processo é muito encontrado em sistemas de resfriamento para dispositivos eletrônicos como CPUs, sensores de infravermelho e refrigeradores (GOLDSMID, 1986).

O processo termoelétrico disponível no Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle localizado no Departamento de Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Campina Grande é composto de dois módulos Peltier. Cada um deles é composto por pares termoelétricos conectados eletricamente em série e termicamente em paralelo e agrupados entre duas placas cerâmicas. Estas placas formam as faces quente e fria dos módulos, dão resistência mecânica e isolamento elétrico da região que será resfriada e do local para onde o calor será transferido (UEMURA, 1995).

Um par termoelétrico é formado por dois materiais semicondutores, um tipo n e outro tipo p. Tomando como referência uma das faces, o resfriamento ocorre quando uma corrente elétrica passa do material semicondutor tipo n para o tipo p e o aquecimento quando a corrente passa no sentido inverso (RIFFAT; MA, 2003).

O comportamento dinâmico do processo termoelétrico resulta em um modelo complexo e altamente não linear. Isso ocorre devido a dependência da temperatura com relação aos parâmetros físicos e o efeito Peltier (HUANG; DUANG, 2000). Maiores informações sobre a modelagem seguem em (BARROS; JUNIOR; SANTOS, 2008).

### 3.6.2 Principais componentes

A plataforma (Figura 3.12) é formada por dois módulos peltier, dois sensores de temperatura LM35, uma placa de metal, dois dissipadores de calor, dois ventiladores, um CLP, uma IHM e um PC com SCADA.

Na Figura 3.12, o CLP está localizado na parte superior esquerda, a IHM está na parte superior direita e o conjunto módulos Peltier, ventiladores, dissipadores, placa de metal e sensores de temperatura estão localizados na parte inferior direita.

Os módulos peltier são utilizados como bombas de calor, ou seja, aceleram o processo de resfriamento ou aquecimento da placa de metal. Os dissipadores são usados para amplificar esse efeito já que, devido a sua estrutura de construção, aumentam a área de

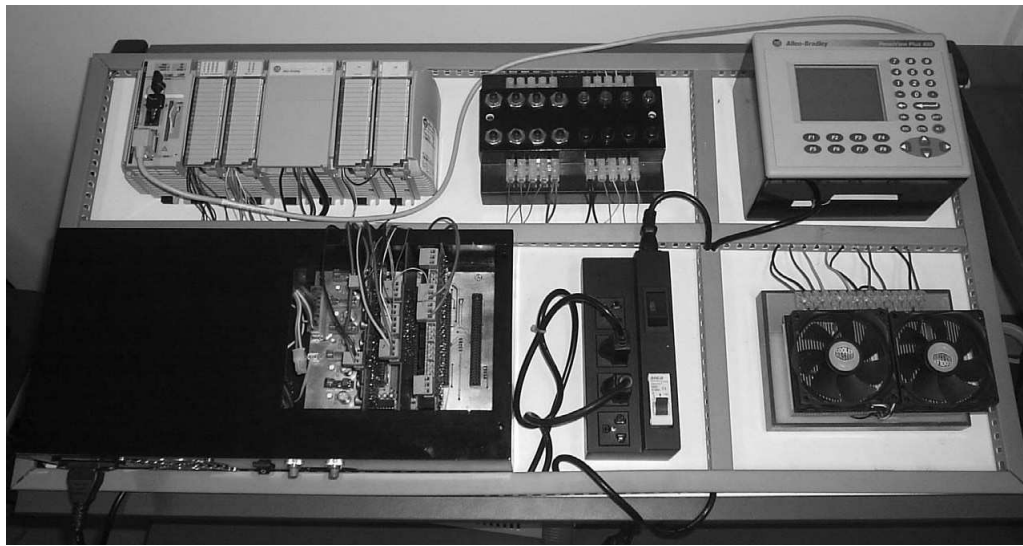


Figura 3.12: Fotografia da plataforma experimental

contato com o ar atmosférico. Os ventiladores foram instalados para retirar o ar quente entre as placas dos dissipadores, isso dá espaço para que o ar frio preencha o local. O conjunto pode ser visto em mais detalhes na Figura 3.13.

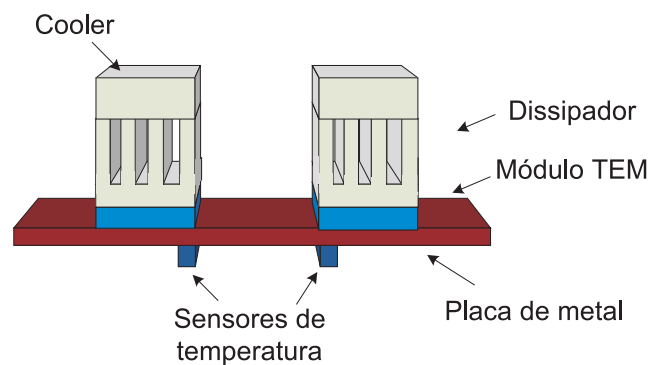


Figura 3.13: Diagrama do conjunto módulos Peltier, ventilador, dissipador e placa de metal

O processo possui a configuração de um sistema MIMO com duas entradas e duas saída ou geralmente chamado de sistema TITO com temperaturas variando de  $10^{\circ}\text{C}$  and  $70^{\circ}\text{C}$  quando opera com temperatura ambiente de  $24^{\circ}\text{C}$ . A potência necessária para o aquecimento ou resfriamento é controlada utilizando um PWM e a medição de temperatura é feita utilizando os sensores LM35. O controle é implementado em um CLP MicroLogix do fabricante Rockwell ou com o programa *Matlab*<sup>®</sup> e o *toolbox* OPC.

As entradas do processo  $u_1$  e  $u_2$  são as potências aplicadas a cada um dos módulos

Peltier. Estas entradas variam de 0 – 100% do ciclo de trabalho do atuador PWM. As saídas  $y_1$  e  $y_2$  são as temperaturas obtidas do sensores LM35 em pontos específicos da placa de metal. Estas são medidas em graus Celsius.

### 3.6.3 Resultados experimentais

Para a realização dos experimentos, a plataforma encontra-se em uma sala com temperatura ambiente controlada por um aparelho de ar condicionado em 22°C. Antes da aplicação de qualquer sinal de excitação, o ponto de operação em regime permanente é de uma entrada de 60% que corresponde a uma saída em torno de 39,2°C.

De modo a aplicar as técnicas de identificação para processos SISO apresentadas neste Capítulo, a entrada  $u_1$  foi mantida desligada e a entrada  $u_2$  foi utilizada para realização dos experimentos. Assim, para todos os casos, a identificação é realizada utilizando o par entrada/saída  $u_2/y_2$ .

Segue na Figura 3.14 a resposta do processo ao experimento proposto. Os sinais foram deslocados para o zero de modo a mostrar as curvas em uma mesma figura. O deslocamento foi realizado a partir da subtração do valor em regime permanente antes da realização do experimento.

Em seguida, foram utilizadas as técnicas de identificação e os modelos identificados seguem na Tabela 3.15.

Tabela 3.15: Resultados experimentais - Modelos identificados

Técnica Proposta FOPTD	$G_{fo}(s) = \frac{0,67}{42,67s+1}e^{-3,63s}$
Técnica Proposta SOPTD	$G_{so}(s) = \frac{0,67}{110,5s^2+36,07s+1}e^{-2,03s}$
Técnica Å&H	$G_a(s) = \frac{0,67}{50,33s+1}e^{-3,77s}$
Técnica BJKM	$G_b(s) = \frac{0,71}{49,87s+1}e^{-3,69s}$
Técnica RChi	$G_c(s) = \frac{0,64}{112,4s^2+34,2s+1}e^{-2,16s}$

O ponto de alta frequência ( $\omega_H$ ) corresponde à fase de  $-161^\circ$  e o ponto de baixa frequência ( $\omega_L$ ) corresponde à fase de  $-97,79^\circ$ .

As estimativas para cada um dos parâmetros constantes de tempo e atraso nos dois pontos de frequência seguem na Tabela 3.16. Os valores calculados para os limites dos parâmetros utilizando a técnica de identificação para modelos FOPTD seguem na Tabela 3.17.

Em seguida, o modelo SOPTD é obtido utilizando a técnica combinada e as Equações (3.47)-(3.50).

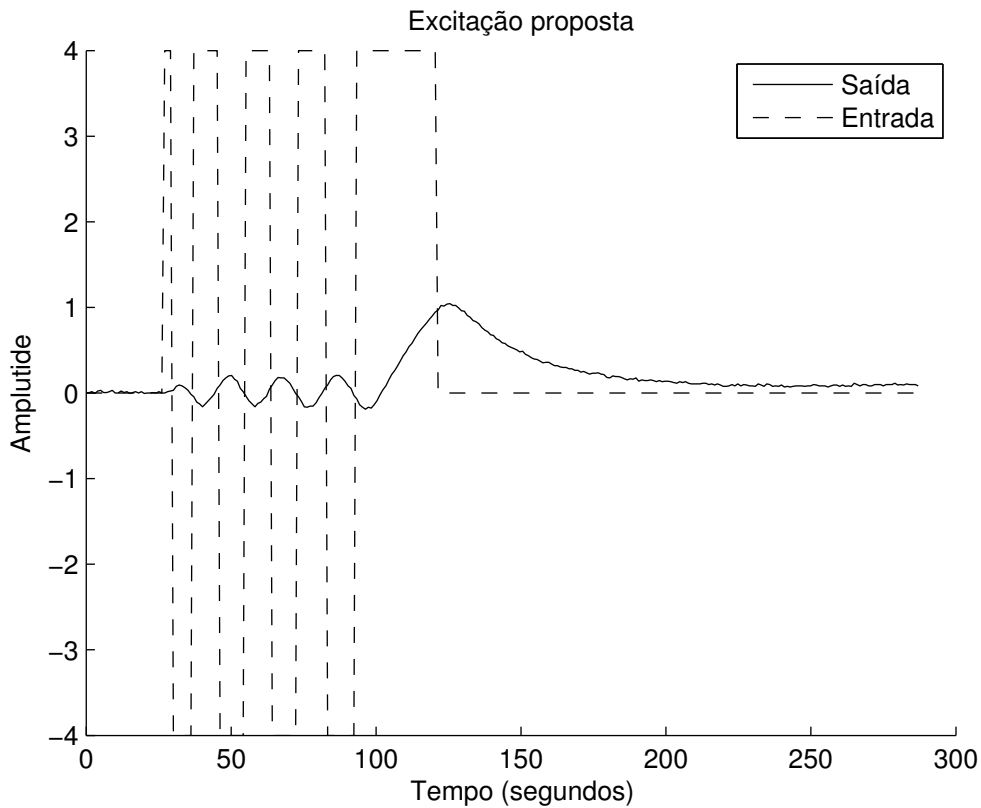


Figura 3.14: Experimentos - Excitação proposta

Tabela 3.16: Resultados experimentais - Estimativa dos parâmetros

	$\omega_L$	$\omega_H$
$L$	3,49	3,77
$T$	35,07	50,33

Tabela 3.17: Resultados experimentais - Limites para os parâmetros

	Mínimo	Máximo
$L$	2,224	4,499
$T$	0	3,638

Na Tabela 3.18 seguem os valores das funções de custo no domínio do tempo  $\varepsilon$  para todos os modelos identificados.

Na Figura 3.15 seguem as respostas ao degrau para cada um dos modelos identificados e a resposta ao degrau da plataforma experimental. Os modelos SOPTD identificados utilizando as duas técnicas resultam em erros no domínio do tempo bem menores que os modelos FOPTD utilizando qualquer uma das técnicas. No entanto, os dois modelos

Tabela 3.18: Resultados experimentais -  $\varepsilon$ 

	$G_a(s)$	$G_b(s)$	$G_c(s)$	$G_{fo}(s)$	$G_{so}(s)$
$\varepsilon$	48, 31	49, 94	28, 69	35, 78	12, 97

obtidos utilizando as técnicas apresentadas neste Capítulo representam melhor o processo do que os modelos correspondentes utilizando as técnicas apresentadas na literatura.

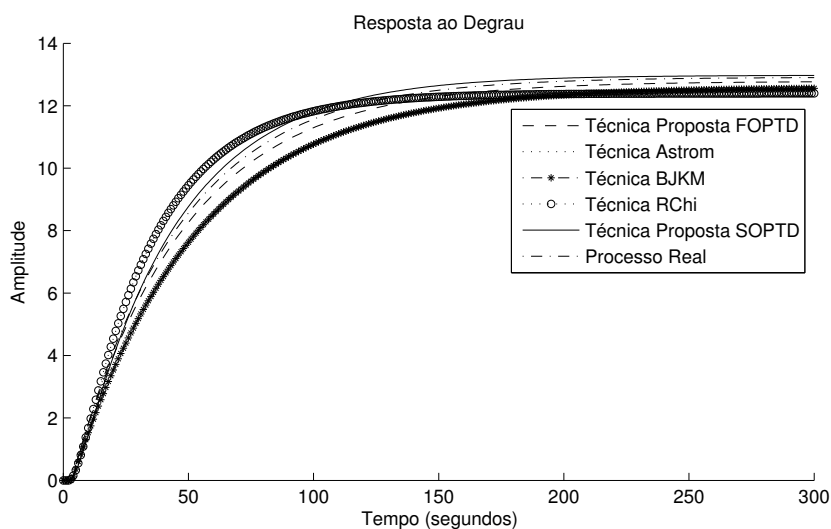


Figura 3.15: Resultados experimentais - Respostas ao degrau

### 3.7 Considerações finais

Neste Capítulo foram apresentadas as técnicas de identificação para modelos FOPTD e SOPTD. A atenção dada a esses modelos de ordem reduzida se deve ao fato de serem os modelos mais utilizados na sintonia de controladores PID.

Os modelos FOPTD e SOPTD são identificados de forma combinada nos domínios do tempo e da frequência. Assim o modelo resultante melhora a resposta no tempo enquanto representa o processo real em torno de frequências de interesse.

Exemplos de simulação foram apresentados de modo a avaliar os resultados obtidos com as técnicas apresentadas em comparação com outras técnicas apresentadas na literatura. Além disso, também foram apresentados resultados experimentais utilizando uma plataforma experimental baseada em um processo termoeletrico.

## Capítulo 4

# Identificação de Sistemas SISO utilizando Modelos OBF-TD

Os modelos OBF-TD são modelos combinados formados por um modelo OBF e por um modelo de atraso TD. Essa separação possibilita a obtenção direta de modelos de ordens reduzidas de primeira ordem com atraso (FOPTD) e segunda ordem com atraso (SOPTD). Além disso, a ordem do modelo pode ser escolhida de modo a melhorar a exatidão do modelo, já que o atraso é tratado de forma separada.

Por outro lado, existem processos que não são adequadamente representados por modelos FOPTD ou SOPTD e, nesses casos, os modelos OBF-TD de ordem superior são utilizados. No entanto, do ponto de vista do projeto de controladores PID, os modelos mais utilizados são os de ordem reduzida, FOPTD e SOPTD. Assim, o problema da obtenção de modelos FOPTD e SOPTD a partir de modelos de ordem superior utilizando técnicas de redução de modelos também é tratado neste Capítulo.

Este Capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 4.1 segue uma introdução sobre os modelo OBF; na Seção 4.2, os modelos OBF-TD são definidos; na Seção 4.3, o projeto do experimento de identificação é realizado e o algoritmo de estimação é apresentado; na Seção 4.4 são apresentados os modelos OBF-TD utilizando a representação em espaço de estados; na Seção 4.5, os modelos OBF-TD são utilizados na identificação de modelos FOPTD e SOPTD e as técnicas de redução de modelos são apresentadas; na Seção 4.6 seguem os exemplos de simulação; na Seção 4.7 seguem os resultados experimentais e na Seção 4.8 seguem as considerações finais.

## 4.1 Introdução

Os modelos lineares convencionais são os modelos FIR, ARX, ARMAX, OE e BJ (LJUNG, 1999). Modelos OBF possuem diversas vantagens quando comparados com os modelos lineares convencionais (TUFA; RAMASAMY; SHUHAIMI, 2011). São necessários menos parâmetros para descrever as dinâmicas do processo (parcimônia), a linearidade nos parâmetros possibilita a utilização de regressores lineares para a estimação (otimização convexa) e os modelos do processo e do ruído podem ser parametrizados de forma independente (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005).

Existem diversos tipos de bases de funções ortonormais, as quais são parametrizadas de acordo com os polos pré-especificados, por exemplo, as bases de Laguerre e de Kautz. A base de Laguerre é parametrizada em termos de um único polo e a base de Kautz é parametrizada em termos de dois polos, que podem ser reais ou complexos. Para uma lista completa de bases e suas propriedades veja (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005).

O desenvolvimento de modelos OBF com o número reduzido de parâmetros é possível se forem utilizadas boas estimativas dos polos dominantes do processo e a base apropriada for escolhida (TUFA; RAMASAMY; SHUHAIMI, 2011). Boas estimativas dos polos dominantes são normalmente obtidas a partir de um experimento de resposta ao degrau ou são baseadas no conhecimento do operador. No entanto, experimentos de resposta ao degrau podem ser longos, são pouco informativos e muito sensíveis a perturbações durante sua realização.

Atrasos no tempo estão presentes ou são forçados em muitos processos industriais. Modelos simples de primeira ordem ou segunda ordem com atraso são amplamente utilizados na sintonia de controladores industriais. Na sintonia de controladores PID, o modelo que tem recebido mais atenção é o modelo FOPTD (primeira ordem com atraso) (LJUNG, 2002).

A utilização de modelos OBF na aproximação de processos com atraso resulta em modelos com ordens desnecessariamente elevadas, devido à representação em série infinita do atraso. No entanto, caso o atraso seja conhecido, é possível tratá-lo separadamente. Assim, o modelo do processo pode ser um modelo combinado formado por um modelo OBF e um modelo de atraso TD. Este modelo é chamado de modelo OBF-TD (bases de funções ortonormais com atraso). Nesse caso, a ordem do modelo pode ser escolhida de modo a reduzir o erro na representação da dinâmica, além de também ser possível obter diretamente modelos FOPTD e SOPTD.

A informação preliminar, necessária no desenvolvimento dos modelos OBF-TD, é obtida a partir de um experimento de identificação preliminar e das técnicas de iden-

tificação nos domínios do tempo e da frequência apresentadas no Capítulo anterior. As informações preliminares são o atraso, a(s) constante(s) de tempo e o ganho estático.

## 4.2 Modelos OBF-TD

Um modelo OBF-TD é um modelo combinado formado por um modelo OBF e um modelo de atraso TD. Este modelo combinado é possível se o atraso for conhecido previamente. A definição seguinte resume a ideia.

**Definição 13** *Considere a função de transferência do processo  $G(s)$  com atraso não nulo  $L$  e realize a decomposição  $G(s) = \tilde{G}(s)e^{-Ls}$ . A função de transferência  $\tilde{G}(s)$  pode ser descrita utilizando um modelo OBF de ordem  $n$  como*

$$\tilde{G}(s) = c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \dots + c_nF_n(s) \quad (4.1)$$

em que o conjunto  $\{F_i(s)\}_{i=1}^n$  é formado pelas bases de funções ortonormais de Takenaka-Malmquist dadas na Equação (2.47) e os  $c_i$ 's são os coeficientes da base. O modelo OBF-TD de  $G(s)$  é, então, dado por

$$G(s) = (c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \dots + c_nF_n(s))e^{-sL} \quad (4.2)$$

em que  $n$  é a ordem do modelo.

Como o atraso é tratado de forma separada nos modelos OBF-TD, a ordem pode ser escolhida de modo a reduzir o erro de estimação, dado que mais membros da série infinita são considerados. Por outro lado, como o atraso é incluído na representação em modelos OBF, a ordem do modelo é desnecessariamente elevada, já que o atraso e as dinâmicas são representados de forma conjunta.

Por exemplo, considere a função de transferência do atraso como

$$M(s) = e^{-sL} \quad (4.3)$$

em que  $L$  é o atraso. A aproximação mais utilizada para o atraso é a aproximação de Padé

$$e^{-sL} \approx \frac{1 - m_1s + m_2s^2 - \dots \pm m_i s^i}{1 + m_1s + m_2s^2 + \dots + m_i s^i} \quad (4.4)$$

em que  $i$  é a ordem da aproximação.

Assim, para representar um processo de ordem  $j$  com atraso utilizando modelos OBF seria necessário que a ordem do modelo fosse de no mínimo  $n = j + i$ . Por outro lado, utilizando modelos OBF-TD a ordem do modelo é de no mínimo  $n = j$ . Na escolha da



ordem mínima foi assumida a representação exata das dinâmicas do processo, nenhuma redução foi considerada.

**Exemplo:** Considere um processo com atraso dado por

$$H(s) = \frac{1}{s+a} e^{-sL} \quad (4.5)$$

em que  $a \in \mathbb{R}^+$  é o polo e  $L \in \mathbb{R}^+$  é o atraso.

A aproximação do atraso utilizando Padé com  $i = 1$  é

$$e^{-sL} = \frac{1 - sL/2}{1 + sL/2} \quad (4.6)$$

. Então o modelo do processo é

$$H(s) = \frac{1 - sL/2}{(s+a)(1 + sL/2)} \quad (4.7)$$

.  
Desse modo é necessário um modelo OBF-TD com  $n = 1$  enquanto é necessário um modelo OBF com  $n$  maior que 1 para a mesma exatidão na representação.

A escolha da base determina a classe de processos que podem ser adequadamente representados pelo modelo OBF-TD. Neste trabalho são consideradas duas bases: bases de Laguerre; bases de Kautz. As duas bases são casos particulares das funções de Takenaka-Malmquist dadas na Equação (2.47).

De acordo com a Equação (2.53), a base de Laguerre é dada pela função base

$$F_k(s) = \frac{\sqrt{2p}}{(s+p)} \left( \frac{s-p}{s+p} \right)^{k-1} \quad (4.8)$$

em que  $k = 1, \dots, n$ ,  $p$  é o polo de Laguerre.

De acordo com as Equações (2.54) e (2.55), a base de Kautz é dada pelas funções base

$$F_{2k-1}(s) = \frac{\sqrt{2bs}}{s^2 + bs + c} \left( \frac{s^2 - bs + c}{s^2 + bs + c} \right)^{k-1} \quad (4.9)$$

$$F_{2k}(s) = \frac{\sqrt{2bc}}{s^2 + bs + c} \left( \frac{s^2 - bs + c}{s^2 + bs + c} \right)^{k-1} \quad (4.10)$$

em que  $i = 1, \dots, n$  e  $b = 2\text{Re}(\xi_n)$  e  $c = |\xi_n|^2$  são os parâmetros que definem os polos de Kautz. A base de Laguerre é um caso particular da base de Kautz quando os polos são reais e iguais.

### 4.3 Estimação de Modelos OBF-TD

Nesta Seção estão descritos o experimento de identificação e os algoritmos utilizados para a estimação dos modelos OBF-TD.

#### 4.3.1 Experimento de identificação

As excitações frequentemente utilizadas nos experimentos de identificação apresentadas na literatura são: sinais PRBS (LJUNG, 1999), sinais GBN (TULLEKEN, 1990) e sinais formados por múltiplas senóides (PINTELO; SCHOUKENS, 2001). Para o projeto de experimentos utilizando qualquer uma dessas excitações é necessária alguma informação prévia sobre o processo.

Neste trabalho, o experimento é projetado baseado na informação preliminar obtida utilizando as técnicas apresentadas no Capítulo 3. A excitação utilizada nesse experimento é do tipo PRBS. As características e equações utilizados no projeto dessas excitações foram apresentadas no Capítulo 2.

#### 4.3.2 Estimação

De modo a obter um modelo OBF-TD utilizando tanto a base de Laguerre quanto a base de Kautz são necessárias algumas informações preliminares sobre o processo: atraso e constante de tempo. Neste trabalho a informação necessária é obtida utilizando o experimento proposto e as técnicas de identificação para processos FOPTD e SOPTD apresentadas no Capítulo 3.

Em seguida, é necessário calcular os coeficientes da base  $c_i$ 's. Devido à linearidade nos parâmetros, são utilizados regressores lineares para a estimação (otimização convexa). Os coeficientes da base dados na Equação (4.2) são estimados utilizando o algoritmo dos mínimos quadrados em que o vetor de parâmetros é

$$\theta = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T \in \mathbb{R}^n. \quad (4.11)$$

Os regressores são formados por

$$\varphi(t) = \Gamma_n u'(t) \quad (4.12)$$

em que  $u'(t) = u(t - L)$  é o sinal de entrada atrasado,

$$\Gamma_n(s) = [F_1(s) \ F_2(s) \ \dots \ F_n(s)]^T \quad (4.13)$$

e  $n$  é a ordem do modelo.

A estimativa dos coeficientes da base é dada por

$$\hat{\theta}_N = \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right] \quad (4.14)$$

em que  $\hat{\theta}_N$  é o vetor de estimativas,  $N$  é o número de pontos ou tamanho do experimento e  $y(t)$  é a saída do processo.

O procedimento para a estimação de um modelo OBF-TD é resumido no Algoritmo 14.

**Algoritmo 14** *Estimação de modelos OBF-TD*

1. *Obtenha  $a(s)$  constante(s) de tempo e atraso utilizando as técnicas apresentadas no Capítulo 3. Modelos FOPTD ou SOPTD.*
2. *Realize o projeto e execute o experimento de identificação utilizando sinais PRBS.*
3. *Escolha a base do modelo OBF-TD. Para Laguerre, escolha o polo igual ao polo obtido no modelo FOPTD. Para Kautz, escolha os polos iguais ao polos obtidos no modelo SOPTD.*
4. *Escolha a ordem  $n$  do modelo OBF-TD.*
5. *Obtenha a estimativa do modelo OBF-TD, Eq. (4.14).*

## 4.4 Modelos OBF-TD em espaço de estados

Nesta Seção é apresentado o procedimento utilizado para obter a representação em espaço de estados dos modelos OBF-TD.

O modelo OBF-TD é dado na Equação (4.2) em que  $n$  é a ordem do modelo e as funções  $\{F_i(s)\}_{i=1}^n$  formam o conjunto das funções ortonormais de Takenaka-Malmquist dadas na Equação (2.47). As funções de Takenaka-Malmquist são dadas por

$$F_k(s) = \frac{\sqrt{2Re(\xi_k)}}{s + \xi_k} \prod_{i=1}^{k-1} \left[ \frac{s - \xi_i^*}{s + \xi_i} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.15)$$

em que  $\xi_i \in \mathbb{C}$ ,  $Re(\xi_i) \geq 0$ .

A partir dessas funções pode-se definir

$$H_k(s) \triangleq \frac{s - \xi_k^*}{s + \xi_k} \quad (4.16)$$

$$A_k(s) \triangleq \frac{1}{s + \xi_k} \quad (4.17)$$

em que  $H_k(s)$  é uma função de transferência passa-tudo e  $A_k(s)$  é uma função de transferência passa-baixa.

A realização em espaço de estados mínima do modelo OBF pode ser obtida a partir da conexão em cascata das realizações mínimas das funções  $H_k(s)$  e  $A_k(s)$ , de acordo com

$$\frac{1}{s + \xi_1} \rightarrow \frac{s - \xi_2^*}{s + \xi_2} \rightarrow \frac{s - \xi_3^*}{s + \xi_3} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{s - \xi_n^*}{s + \xi_n}. \quad (4.18)$$

A realização em espaço de estados mínima da função passa-tudo  $H_k(s)$  é dada por  $(-\xi_k, 1, 2Re(-\xi_k), 1)$ . Já a realização em espaço de estados mínima da função passa-baixa  $A_k(s)$  é dada por  $(-\xi_k, 1, 1, 0)$ . Na Figura 4.1 segue o diagrama de blocos da estrutura em que  $u(t)$  é a entrada e  $y(t)$  é a saída.

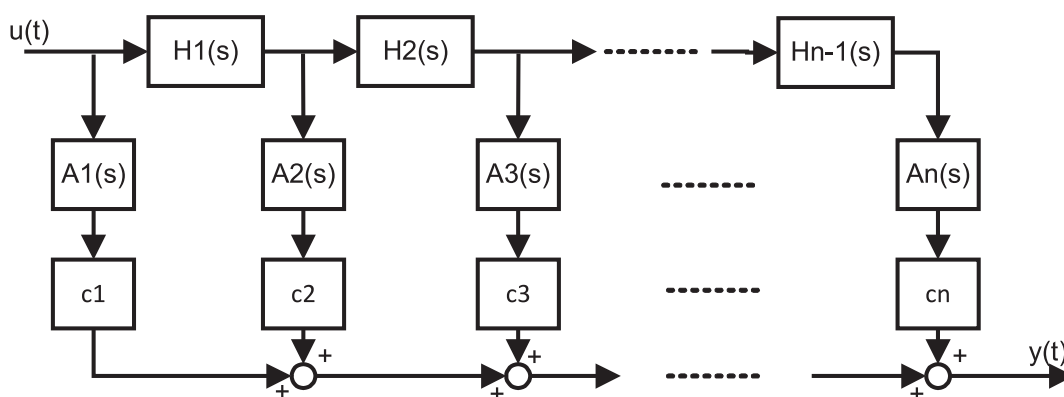


Figura 4.1: Representação esquemática da expansão em série do modelo OBF

Desse modo, a representação em espaço de estados mínima do modelo OBF é dada por  $(A, B, C, D)$  após a conexão em série de  $n$  realizações em espaço de estados em que (DESCHRIJVER; DHAENE, 2006)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 & \dots & 0 \\ B_3 D_2 C_1 & B_3 C_2 & \dots & 0 \\ B_4 D_3 D_2 C_1 & B_4 D_3 C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n D_{n-1} \dots D_2 C_1 & B_n D_{n-1} \dots D_3 C_2 & \dots & A_n \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \\ B_3 D_2 D_1 \\ \vdots \\ B_n D_{n-1} \dots D_2 D_1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$C = \begin{bmatrix} D_n \dots D_2 C_1 \\ D_n \dots D_3 C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}^T \quad (4.21)$$

$$D = D_n \dots D_1. \quad (4.22)$$

As matrizes  $C$  e  $D$  ainda devem ser modificadas para levar em consideração os coeficientes da base  $c_k$  e o ganho  $\sqrt{2\text{Re}(\xi_k)}$ . Para o caso particular em que os polos  $\xi_n$  são reais e iguais ( $\xi_n = p$ ), a situação resume-se ao caso utilizando bases de Laguerre e

$$A = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2p & -p & 0 & \dots & 0 \\ -2p & -2p & -p & \dots & 0 \\ -2p & -2p & -2p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2p & -2p & -2p & \dots & -p \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \sqrt{2p} \\ c_2 \sqrt{2p} \\ c_3 \sqrt{2p} \\ \vdots \\ c_n \sqrt{2p} \end{bmatrix}^T \quad (4.25)$$

$$D = 0. \quad (4.26)$$

Para o caso em que os polos são complexos e conjugados, o bloco que forma a matriz  $A$  dado por

$$\begin{pmatrix} -\xi_k & 0 \\ 2\text{Re}(-\xi_k) & -\xi_{k+1} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

deve ser substituído por

$$\begin{pmatrix} \text{Re}(-\xi_k) & \text{Re}(-\xi_k) - |\xi_k| \\ \text{Re}(-\xi_k) + |\xi_k| & \text{Re}(-\xi_k) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

enquanto as outras matrizes não são modificadas (DESCHRIJVER; DHAENE, 2006).

Utilizando a realização em espaço de estados do modelo OBF, a realização em espaço de estados mínima do modelo OBF-TD é

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - L) \quad (4.29)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (4.30)$$

Para as bases de Laguerre, as matrizes  $(A, B, C, D)$  são dadas nas Equações (4.23)-(4.26) e para as bases de Kautz apenas a matriz  $A$  é modificada de acordo com a Equação (4.28).

**Exemplo:** Um modelo OBF-TD de ordem  $n = 2$  utilizando bases de Laguerre é dado por

$$G(s) = \frac{\sqrt{2p}(c_1 + c_2)s + \sqrt{2p}(c_1 - c_2)p}{(s + p)^2} e^{-sL}. \quad (4.31)$$

A representação em espaço de estados de  $G(s)$  é obtida utilizando as Equações (4.23)-(4.26). Assim,

$$A = \begin{bmatrix} -p & 0 \\ -2p & -p \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1\sqrt{2p} & c_2\sqrt{2p} \end{bmatrix} \quad D = 0. \quad (4.32)$$

## 4.5 Identificação de modelos FOPTD e SOPTD utilizando modelos OBF-TD

A identificação de modelos de ordem reduzida do tipo FOPTD e SOPTD utilizando modelos OBF-TD é muito importante para o projeto de controladores PID. De modo a resolver esse problema, duas abordagens podem ser tomadas:

- Identificar modelos de ordem reduzida (FOPTD e SOPTD) diretamente de modelos OBF-TD de ordem reduzida;
- Identificar modelos de ordem reduzida (FOPTD e SOPTD) a partir de modelos OBF-TD de ordem superior utilizando um procedimento de redução de modelos.

Nesta Seção as duas abordagens são avaliadas. Primeiro é tratada a abordagem em que são utilizados modelos OBF-TD de ordem reduzida. Em seguida, são utilizados modelos OBF-TD de ordem superior. Os modelos OBF-TD de ordem superior são aproximados ou reduzidos para modelos FOPTD e SOPTD utilizando o procedimento de redução de modelos apresentado.

#### 4.5.1 Modelos OBF-TD de ordem reduzida

Primeiro é tratado o problema da obtenção de modelos de ordem reduzida (FOPTD e SOPTD) a partir de modelos OBF-TD de ordem reduzida. Neste trabalho, o termo ordem reduzida é utilizado para valores de  $n = 1$  ou  $n = 2$  (primeira ou segunda ordem).

Esse problema não pode ser resolvido utilizando modelos OBF, pois como o atraso é tratado de forma conjunta com as dinâmicas do processo, a ordem do modelo resultante será maior que a ordem desejada.

A identificação de modelos de ordem reduzida a partir de modelos OBF-TD de ordem reduzida é direta. O Algoritmo 15 resume os passos para modelos com  $n = 1$  e o Algoritmo 16 resume os passos para modelos com  $n = 2$ .

##### **Algoritmo 15** *Estimação de modelos OBF-TD do tipo FOPTD*

1. *Obtenha a constante de tempo dominante e atraso utilizando a técnica para modelos FOPTD apresentada no Capítulo 3 Seção 3.3.*
2. *Realize o projeto e execute o experimento de identificação utilizando sinais PRBS.*
3. *Escolha a base de Laguerre com o polo de Laguerre igual ao polo obtido no modelo FOPTD.*
4. *Escolha a ordem  $n$  do modelo OBF-TD como  $n = 1$ .*
5. *Escolha o atraso do modelo OBF-TD igual ao atraso do modelo FOPTD.*
6. *Obtenha a estimativa do modelo OBF-TD, Eq. (4.14).*

##### **Algoritmo 16** *Estimação de modelos OBF-TD do tipo SOPTD*

1. *Obtenha as constantes de tempo e atraso utilizando a técnica para modelos SOPTD apresentada no Capítulo 3 Seção 3.4.*
2. *Realize o projeto e execute o experimento de identificação utilizando sinais PRBS.*

3. Escolha a base de Kautz com os polos de Kautz iguais aos polos obtidos no modelo SOPTD.
4. Escolha a ordem  $n$  do modelo OBF-TD como  $n = 2$ .
5. Escolha o atraso do modelo OBF-TD igual ao atraso do modelo SOPTD.
6. Obtenha a estimativa do modelo OBF-TD, Eq. (4.14).

Caso o processo seja de segunda ordem com polos reais e iguais, a base de Kautz resulta na base de Laguerre. Assim, para processos com polos reais e iguais modelos OBF-TD com  $n = 2$  tanto bases de Laguerre quanto bases de Kautz podem ser utilizadas.

Os modelos OBF-TD de ordem reduzida representam bem o processo, caso a estrutura desse processo possa ser bem aproximada por modelos FOPTD ou SOPTD. Assim, as dinâmicas de ordem superior, case existam, não possuem grande influência no comportamento entrada/saída do processo.

No entanto é necessário validar o modelo para determinar quando um processo é bem representado ou não. Ou seja, se a ordem  $n = 1$  para bases de Laguerre ou  $n = 2$  para bases de Kautz resultam em um modelo OBF-TD que representa bem o processo.

### Validação do modelo

Um modelo FOPTD pode ser obtido diretamente, utilizando modelos OBF-TD. Fazendo  $n = 1$  na Equação (4.2) tem-se

$$G(s) = c_1 F_1(s) e^{-sL}. \quad (4.33)$$

Do mesmo modo, um modelo SOPTD pode ser obtido diretamente utilizando modelos OBF-TD. Fazendo  $n = 2$  na Equação (4.2) tem-se

$$G(s) = (c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)) e^{-sL}. \quad (4.34)$$

O objetivo é verificar se os modelos FOPTD e SOPTD, Equações (4.33) e (4.34) respectivamente, utilizando modelos OBF-TD representam bem o processo.

Para processos de primeira ordem sem atraso na forma

$$G(s) = \frac{a}{s + a} \quad (4.35)$$

em que  $a > 0$ , os coeficientes do modelo OBF utilizando as bases Laguerre podem ser calculados analiticamente utilizando as Equações (2.42)-(2.45). Estes coeficientes são



dados por

$$c_1 = \frac{a\sqrt{2p}}{a+p} \quad (4.36)$$

$$c_2 = \frac{a\sqrt{2p}}{a+p} \frac{a-p}{a+p} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} & \vdots = \vdots \\ c_n &= \frac{a\sqrt{2p}}{a+p} \frac{(a-p^{n-1})}{(a+p^{n-1})}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Das Equações (4.36)-(4.38), observa-se que se o polo de Laguerre for igual ao polo do processo ( $p = a$ ), o único coeficiente diferente de zero será  $c_1$  para qualquer ordem do modelo  $n$  escolhida. Por outro lado, dada a incerteza na localização do polo do processo  $a$ , outros coeficientes serão diferentes de zero e a ordem do modelo OBF será superior à ordem real. Apesar de outros coeficientes além de  $c_1$  serem diferentes de zero, seus valores serão tão pequenos quando comparados com  $c_1$  quão melhor for o conhecimento sobre o polo do processo  $a$ .

Desse modo, para processos de primeira ordem, é possível avaliar a escolha da base e determinar a ordem do modelo OBF observando os valores dos coeficientes da base. Vale notar que a determinação da ordem é feita após a primeira estimativa dos coeficientes ter sido obtida. A Proposição seguinte resume a ideia.

**Proposição 17** *Para processos de primeira ordem sem atraso, a ordem  $n$  do modelo OBF utilizando bases de Laguerre em que  $p \approx a$  é escolhida de acordo com o valor dos coeficientes  $c_k$  para  $k > 1$ .*

- Se  $c_k \ll c_1$  para  $k > 1$ , então o processo é bem representado por modelos OBF utilizando bases de Laguerre com  $n = 1$ .
- Caso contrário, o processo não é bem representado por modelos OBF utilizando bases de Laguerre com  $n = 1$ .

**Prova.** De acordo com as Equações (4.36)-(4.38), os coeficientes para  $k > 1$  só são iguais a zero para  $p = a$ . Para  $p \approx a$ , os coeficientes para  $k > 1$  são diferentes de zero. Seus valores são tão pequenos quanto  $p$  for próximo de  $a$ . Assim, se  $c_k \ll c_1$  para  $k > 1$  o processo possui uma estrutura que pode ser bem representada por modelos OBF com  $n = 1$ . ■

O mesmo desenvolvimento pode ser utilizado para processos de segunda ordem representados por modelos OBF utilizando as bases de Kautz. Ou seja, os únicos coeficientes diferentes de zero, se os polos de Kautz forem iguais aos polos do processo, serão  $c_1$  e  $c_2$ .

**Proposição 18** *Para processos de segunda ordem sem atraso, a ordem  $n$  do modelo OBF utilizando bases de Kautz em que os polos de Kautz são próximos dos polo reais é escolhida de acordo com o valor dos coeficientes  $c_k$  para  $k > 2$ .*

- *Se  $c_k \ll c_2$  para  $k > 2$  então o processo é bem representado por modelos OBF com  $n = 2$ .*
- *Caso contrário, o processo não é bem representado por modelo OBF com  $n = 2$ .*

**Prova.** Segue o mesmo raciocínio da proposição anterior. ■

A partir das Proposições 17 e 18 é possível determinar se modelos OBF de primeira ou segunda ordem são suficientes para representar o processo. As duas Proposições são válidas para o caso de processos sem atraso.

No entanto, a situação muda quando são analisados processos de primeira e segunda ordem com atraso. Nesses casos, as Equações (4.36)-(4.38) não são mais válidas, isto é, mesmo com o conhecimento exato dos polos do processo o número de coeficientes diferentes de zero depende da relação entre o atraso e a constante de tempo. Assim, as Proposições 17 e 18 não podem mais ser utilizadas.

Apesar disso, como nos modelos OBF-TD o atraso é tratado de forma separada, processos de primeira ordem com atraso podem ser analisados como processos de primeira ordem sem atraso e processos de segunda ordem com atraso podem ser analisados como processos de segunda ordem sem atraso. Assim, as Equações (4.36)-(4.38) continuam válidas e as Proposições 17 e 18 podem ser utilizadas. Desse modo, a partir dos valores dos coeficientes é possível determinar se a estrutura ou a base escolhida resulta em um modelo que represente bem o processo.

### 4.5.2 Modelos OBF-TD de ordem superior

Na Seção anterior, foi tratado o problema de como obter modelos de ordem reduzida a partir de modelos OBF-TD de ordem reduzida. Aqui será tratado o problema da obtenção de modelos de ordem reduzida a partir de modelos OBF-TD de ordem superior.

Os modelos OBF-TD de ordem superior são necessários quando modelos OBF-TD de ordem reduzida não representam bem o processo. Isto acontece quando as dinâmicas de ordem superior não podem ser simplesmente desprezadas. Esta conclusão pode ser obtida utilizando as Proposições 17 ou 18. Destas observa-se que modelos FOPTD ou SOPTD não representam bem o processo.

Apesar disso, os modelos FOPTD ou SOPTD são necessários para o projeto de controladores PID. Então, o problema é a obtenção de modelos FOPTD e SOPTD a partir

de modelos OBF-TD de ordem superior. Neste trabalho, modelos OBF-TD com ordem  $n \geq 3$  são ditos de ordem superior e modelos OBF-TD com ordem  $n = 1$  ou  $n = 2$  são ditos de ordem reduzida

Os procedimentos de redução de modelos mais utilizados são a truncagem balanceada e a residualização balanceada. Nestes procedimentos, o processo com função de transferência  $G(s)$  é assumido ser estável e possuir uma realização em espaço de estados balanceada  $(A, B, C, D)$ . A realização em espaço de estados é dita balanceada se os gramínicos de controlabilidade  $P$  e observabilidade  $Q$  são iguais e diagonais, conforme o Teorema 6.

Na realização em espaço de estados balanceada, cada valor singular de Hankel  $\sigma_i$  está associado com um estado  $x_i$  da representação balanceada. Desse modo, o tamanho de  $\sigma_i$  é uma medida relativa da contribuição do estado  $x_i$  na relação entrada/saída do processo. Ou seja, se  $\sigma_1 \gg \sigma_2$ , então o estado  $x_1$  possui maior influência no comportamento entrada/saída que o estado  $x_2$ . Os valores singulares de Hankel são uma medida conjunta da observabilidade e da controlabilidade de cada estado.

Assim, a partir dos valores singulares de Hankel é possível determinar quais estados contribuem mais e quais estados contribuem menos no comportamento entrada/saída. Desse modo, é possível escolher a ordem do modelo reduzido escolhendo quais estados podem ser descartados.

Para a escolha dos estados que podem ser descartados, tanto a truncagem balanceada quanto a residualização balanceada podem ser utilizadas. Estas baseiam-se na realização em espaço de estados balanceada  $(A, B, C, D)$  de  $G(s)$  particionada como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

e com a matriz de valores singulares de Hankel  $\Sigma$  particionada como

$$P = Q = \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

em que  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ ,  $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_n)$  e  $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ .

1. **Truncagem balanceada:** nessa técnica de redução de modelos, os estados que correspondem a pequenos valores singulares de Hankel são eliminados (MOORE, 1981). O modelo de ordem reduzida possui realização em espaço de estados dada por  $(A_{11}, B_1, C_1, D)$  com função de transferência  $G_t(s)$  e ordem  $k$ . Os estados associados com os valores singulares de Hankel  $\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_n$  são eliminados.

A norma infinita do erro entre  $G(s)$  e  $G_t(s)$  é dada por (GLOVER, 1984)

$$\| G(s) - G_t(s) \|_{\infty} \leq 2 \sum_{k+1}^n \sigma_i. \quad (4.41)$$

O modelo truncado  $G_t(s)$  é igual ao modelo de ordem superior  $G(s)$  na frequência infinita,  $G(\infty) = G_t(\infty) = D$ . A truncagem balanceada é utilizada quando se deseja um modelo reduzido que represente bem o processo na região de alta frequência.

2. **Residualização balanceada:** nessa técnica, as derivadas dos estados que correspondem a pequenos valores singulares de Hankel são forçadas iguais a zero. Este procedimento foi apresentado em (FERNANDO; NICHOLSON, 1982). O modelo de ordem reduzida possui realização em espaço de estados dada por  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  com função de transferência  $G_r(s)$  e ordem  $k$ . As matrizes  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  são dadas por

$$A_r = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \quad (4.42)$$

$$B_r = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \quad (4.43)$$

$$C_r = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \quad (4.44)$$

$$D_r = D - C_2A_{22}^{-1}B_2. \quad (4.45)$$

A norma infinita do erro entre  $G(s)$  e  $G_r(s)$  é dada da mesma forma que no caso da truncagem balanceada (LIU; ANDERSON, 1989), ou seja,

$$\|G(s) - G_r(s)\|_{\infty} \leq 2 \sum_{k+1}^n \sigma_i. \quad (4.46)$$

O modelo  $G_r(s)$  é igual ao modelo de ordem superior  $G(s)$  na frequência zero,  $G(0) = G_t(0)$  e o ganho estático é preservado na residualização balanceada. Essa técnica de redução é utilizada quando se deseja um modelo reduzido que represente bem o processo nas regiões de baixas e médias frequências.

## Redução de Modelos OBF-TD

O primeiro passo para a estimação de um modelo de ordem reduzida é obter a realização em espaço de estados  $(A, B, C, D)$  do modelo OBF-TD com função de transferência  $G(s)$ , Equação (4.2). A realização em espaço de estados é obtida utilizando a formulação apresentada na Seção 4.4.

A partir da realização em espaço de estados  $(A, B, C, D)$ , a realização balanceada  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$  é obtida a partir de uma transformação de similaridade, conforme o Teorema 6 e a Equação (2.16). Os Graminianos de controlabilidade  $P$  e observabilidade  $Q$  são iguais e diagonais,  $P = Q = \Sigma$  em que  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ .

Em seguida, utilizando a realização em espaço de estados balanceada  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$  e a residualização balanceada, é possível determinar a realização em espaço de estados do

modelo de ordem reduzida. É utilizada a residualização balanceada, pois deseja-se um modelo de ordem reduzida relevante nas regiões de baixas e médias frequências.

No Teorema seguinte são apresentadas as relações entre as matrizes da realização em espaço de estados balanceada  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$  do modelo OBF-TD de ordem superior e a realização balanceada  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  do modelo OBF-TD de ordem reduzida.

**Teorema 19** *Dado um modelo OBF-TD  $G(s) = e^{-sL} \sum_{k=1}^n c_k F_k(s)$  em que  $n$  é a ordem do modelo. Seja a realização em espaço de estados de  $\tilde{G}(s) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(s)$  dada por  $(A, B, C, D)$  e a realização em espaço de estados balanceada dada por  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$ .*

*As matrizes  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$  são particionadas como*

$$A_{bal} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B_{bal} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C_{bal} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

*e com a matriz de valores singulares de Hankel particionada como na Equação (4.40).*

*Assim, o modelo de ordem reduzida  $n_r = k$  será dado por  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  em que*

$$A_r = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \quad (4.48)$$

$$B_r = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \quad (4.49)$$

$$C_r = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \quad (4.50)$$

$$D_r = D_{bal} - C_2A_{22}^{-1}B_2 \quad (4.51)$$

*e a função de transferência do modelo de ordem reduzida  $G_{n_r}(s) = [C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r] e^{-sL}$ .*

**Prova.** A realização em espaço de estados de um modelo OBF-TD é obtida utilizando os procedimentos apresentados na Seção 4.4 e a realização em espaço de estados balanceada é obtida utilizando o Teorema 6 e Equação (2.16)

A obtenção das matrizes  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  a partir das matrizes  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$  é direta utilizando as Equações (4.42)-(4.45). A partir do conhecimento do atraso  $L$  a funções de transferência  $G_{n_r}(s)$  é obtida. ■

Utilizando o Teorema 19 é possível obter um modelo de ordem reduzida a partir de um modelo OBF-TD de ordem superior. Porém, o problema em que as dinâmicas de ordem superior são desprezadas ainda não foi resolvido. Assim, o modelo de ordem reduzida obtido não leva em consideração as dinâmicas desprezadas.

### Redução de Modelos OBF-TD com compensação do resíduo

Tanto na truncagem balanceada quanto na residualização balanceada, a ordem do modelo de ordem reduzida é escolhida de acordo com a magnitude dos valores singulares de Hankel

$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , ou seja, a ordem  $n_r$  é função do tamanho relativo entre os valores singulares de Hankel. No entanto, neste trabalho, a ordem do modelo reduzido é fixa,  $n_r = 1$  ou  $n_r = 2$  (primeira ordem e segunda ordem).

Nessa situação, dependendo do tamanho relativo entre os valores singulares de Hankel, as dinâmicas desprezadas podem conter informações importantes sobre o processo. Assim, é necessário incorporar de alguma forma essas informações desprezadas. A informação desprezada é chamada de resíduo.

Como exemplo, seja um processo com realização em espaço de estados balanceada de ordem  $j$  e valores singulares de Hankel  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j$  tal que  $\sigma_1 = \dots = \sigma_i$  e  $\sigma_i \gg \dots \gg \sigma_j$  para  $2 < i < j$ . A ordem do modelo reduzido deveria ser  $n_r = i$ , mas como a ordem é fixa com  $n_r = 1$  ou  $n_r = 2$ , parte da informação contida nos estados  $x_l$  para  $2 \leq l \leq i$  com  $n_r = 1$  ou  $3 \leq l \leq i$  com  $n_r = 2$  é perdida. Essa informação contida nos estados desprezados forma o resíduo.

A partir da realização em espaço de estados balanceada  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$  do modelo OBF-TD, a função de transferência da realização balanceada é

$$\tilde{G}_{bal}(s) = C_{bal}(sI - A_{bal})^{-1}B_{bal} + D_{bal} \quad (4.52)$$

em que a ordem de  $\tilde{G}_{bal}(s)$  é igual à ordem de  $\tilde{G}(s)$  que é igual a  $n$ .

Como já foi apresentado, da realização balanceada  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$  é possível determinar o modelo de ordem reduzida  $n_r$  utilizando o Teorema 19. O modelo de ordem reduzida é dado por  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  com função de transferência

$$\tilde{G}_{n_r}(s) = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r. \quad (4.53)$$

A relação entre a função de transferência  $\tilde{G}_{bal}(s)$  e a função de transferência  $\tilde{G}_{n_r}(s)$  pode ser escrita como

$$\tilde{G}_{bal}(s) = \tilde{G}_{n_r}(s) + G_{res}(s) \quad (4.54)$$

em que  $G_{res}(s)$  é o modelo do resíduo, ou seja, o modelo formado pelas dinâmicas desconsideradas.

A partir da Equação (4.54) duas situações podem ser destacadas:

1. Os valores singulares de Hankel associados aos estados representados por  $G_{res}(s)$  **são pequenos** quando comparados com os valores singulares de Hankel associados aos estados representados por  $\tilde{G}_{n_r}(s)$ ;
2. Alguns dos valores singulares de Hankel associados aos estados representados por  $G_{res}(s)$  **não são pequenos** quando comparados com os valores singulares de Hankel associados aos estados representados por  $\tilde{G}_{n_r}(s)$ .

Na primeira situação, o erro de aproximação será pequeno, dado que os valores singulares de Hankel são uma medida relativa da contribuição de cada estado na relação entrada/saída do processo. Assim as dinâmicas de ordem superior representadas pelo resíduo podem ser desprezadas, sem prejuízo na qualidade do modelo obtido. O Teorema 19 pode ser utilizado diretamente.

Na segunda situação, alguns dos estados descartados contribuem de forma significativa na relação entrada/saída do processo. Desse modo, essas dinâmicas não podem ser simplesmente desprezadas.

Para analisar a segunda situação, substitui-se a Equação (4.54) na Equação (4.2) e assim

$$G(s) = e^{-sL} \left( \tilde{G}_{n_r}(s) + G_{res}(s) \right) \quad (4.55)$$

ou seja, o modelo do processo é formado por uma contribuição do modelo de ordem reduzida e por uma contribuição do resíduo desconsiderado no processo de redução.

O objetivo da redução com compensação do resíduo é considerar a informação contida em  $G_{res}(s)$  e realizar um processo de correção em  $G_{n_r}(s) = e^{-sL} \tilde{G}_{n_r}(s)$ . Assim, parte da informação desconsiderada é incorporada no modelo de ordem reduzida.

Nesse trabalho o modelo do resíduo é assumido como

$$G_{res}(s) = \beta e^{-sL'} \quad (4.56)$$

em que  $\beta$  é o ganho e  $L'$  é o atraso. Considerando  $\beta$  pequeno, toda a informação contida no resíduo é concentrada na fase a partir do atraso  $L'$ . O modelo do resíduo é escolhido dessa forma, de modo a capturar a fase desprezada de forma linear.

O atraso  $L'$  é determinado utilizando o algoritmo dos mínimos quadrados em que a informação da fase que foi desprezada é utilizada. O parâmetro  $L'$  resulta na melhor aproximação linear da fase desprezada no sentido dos mínimos quadrados. O Teorema seguinte resume a ideia.

**Teorema 20** *Seja o modelo OBF-TD dado por  $G(s) = e^{-sL} (G_{n_r}(s) + G_{res}(s))$  em que  $G_{n_r}(s)$  é o modelo de ordem reduzida  $n_r$  e  $G_{res}(s)$  é o modelo do resíduo. Dado o modelo do resíduo por  $G_{res}(s) = \beta e^{-sL'}$ , o atraso  $L'$  é calculado utilizando o algoritmo dos mínimos quadrados na fase desprezada (fase do modelo do resíduo) fazendo*

$$\hat{\theta}_N = \left[ \frac{1}{N} \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_N} \varphi(\omega) \varphi(\omega)^T \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_N} \varphi(\omega) y(\omega) \right] \quad (4.57)$$

com  $\hat{\theta}_N = L'$ ,  $N$  é o número de pontos de frequência e

$$\varphi(\omega) = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_N] \quad (4.58)$$

$$y(\omega) = [\phi(\omega_1) \ \phi(\omega_2) \ \dots \ \phi(\omega_N)] \quad (4.59)$$

em que  $\phi(\omega_i) = \angle \sum_{k=n_r+1}^n c_k F_k(\omega_i)$ .

Substituindo o modelo do resíduo dado na Equação (4.56) na Equação (4.55), tem-se

$$G(s) = e^{-sL} \left( \tilde{G}_{n_r}(s) + \beta e^{-sL'} \right) \quad (4.60)$$

$$G(s) = e^{-sL} e^{-sL'} \left( e^{sL'} \tilde{G}_{n_r}(s) + \beta \right) \quad (4.61)$$

$$G(s) = e^{-s\bar{L}} \left( \bar{G}_{n_r}(s) + \beta \right). \quad (4.62)$$

Após a aproximação do ganho, a função  $G(s)$  representa o modelo de ordem reduzida atualizado  $G_{n_r}(s)$  e dado por

$$G_{n_r}(s) \approx e^{-s\bar{L}} \bar{G}_{n_r}(s) \quad (4.63)$$

em que  $\bar{L} = L + L'$  e  $\bar{G}_{n_r}(s) = e^{sL'} \tilde{G}_{n_r}(s)$ .

O modelo de ordem superior  $G(s)$  de ordem  $n$  foi reduzido para um modelo de ordem reduzida  $\tilde{G}_{n_r}(s)$  de ordem  $n_r$ . Este modelo contém parte da informação contida no modelo do resíduo que anteriormente era totalmente desprezada. A informação contida no resíduo modificou tanto o atraso  $L$  para o novo atraso  $\bar{L}$  quanto as dinâmicas representadas pelo modelo  $\tilde{G}_{n_r}(s)$  para  $\bar{G}_{n_r}(s)$ .

Por fim, resta determinar como levar em consideração o atraso  $L'$  nas dinâmicas representadas por  $\bar{G}_{n_r}(s)$ . Para o caso em que  $n_r = 1$ ,  $\tilde{G}_{n_r}(s)$  e  $\bar{G}_{n_r}(s)$  são funções de transferência de primeira ordem dadas por

$$\tilde{G}_{n_r}(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (4.64)$$

$$\bar{G}_{n_r}(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{sL'} \quad (4.65)$$

em que a constante de tempo  $T$  é obtida da técnica de identificação de modelos FOPTD do Capítulo 3. Nesse caso, a partir do atraso  $L'$  é possível modificar a constante de tempo  $T$  de diversas formas, entre elas  $\bar{T} = T + L'$ . Assim

$$\bar{G}_{n_r}(s) = \frac{K}{\bar{T}s + 1}. \quad (4.66)$$

Então, o atraso e a constante de tempo do modelo de ordem reduzida são corrigidos de modo a levar em consideração parte das dinâmicas representadas pelo modelo do resíduo. O atraso é modificado de  $L$  para  $\bar{L}$  e a constante de tempo de  $T$  para  $\bar{T}$ .

Todo o procedimento descrito anteriormente é resumido no Algoritmo seguinte.

**Algoritmo 21** *Estimação de modelos OBF-TD de ordem reduzida com compensação de resíduo.*



1. Obtenha a constante de tempo dominante e atraso utilizando as técnicas apresentadas no Capítulo 3. Modelos FOPTD e SOPTD.
2. Realize o projeto e execute o experimento de identificação utilizando sinais PRBS.
3. Escolha a base utilizada no modelo OBF-TD. Para Laguerre, escolha o polo igual ao polo obtido no modelo FOPTD. Para Kautz, escolha os polos iguais aos polos obtidos no modelo SOPTD.
4. Obtenha a estimativa do modelo OBF-TD de ordem superior, Eq. (4.14).
5. Obtenha a realização em espaço de estados do modelo OBF-TD, Seção 4.4.
6. Obtenha a realização balanceada usando o Teorema 6 e Equação (2.16).
7. Escolha a ordem do modelo reduzido  $n_r$  e obtenha o modelo reduzido usando o Teorema 19.
8. Dado o modelo do resíduo  $G_{res}(s)$ , calcule  $L'$  utilizando o Teorema 20.
9. Atualize a constante de tempo como  $\bar{T} = T + L'$  e o atraso como  $\bar{L} = L + L'$ .

### Redução iterativa de modelos OBF-TD com compensação de resíduo

Uma parte difícil da identificação utilizando bases de funções ortonormais é a estimação dos polos que formam as bases. Neste trabalho, as estimativas são obtidas utilizando as técnicas de identificação para modelos FOPTD e SOPTD apresentadas no Capítulo 3. Além disso, a estimação do atraso também é um ponto importante na obtenção de modelos OBF-TD.

Se os  $m$  polos do processo fossem conhecidos, seriam necessários apenas  $m$  coeficientes ou um modelo OBF-TD de ordem  $m$ , dado que o atraso é tratado separadamente. No entanto, devido ao conhecimento não exato dos polos do processo, são necessários mais coeficientes para aumentar a exatidão do modelo.

Quanto pior for a informação sobre os polos e o atraso do processo, pior será o modelo OBF-TD obtido e mais coeficientes serão necessários. Ainda, como o modelo OBF-TD de ordem superior é utilizado para obter um modelo OBF-TD de ordem reduzida com  $n_r = 1$  ou  $n_r = 2$ , as dinâmicas desconsideradas também contribuem para a qualidade desse modelo.

O problema em que as dinâmicas desconsideradas são utilizadas para atualizar os polos e o atraso foi resolvido anteriormente. Porém se o modelo resultante ainda não for

suficientemente exato, é possível utilizar esse novo modelo de ordem reduzida como uma estimativa inicial para construir um novo modelo OBF-TD de ordem superior. Ou seja, esse procedimento pode ser repetido diversas vezes até que um índice de qualidade tenha sido atingido. Essa ideia resulta no algoritmo de estimação iterativo que segue.

**Algoritmo 22** *Estimação iterativa de modelos de ordem reduzida com compensação de resíduo.*

1. *Obtenha a constante de tempo dominante e atraso utilizando as técnicas apresentadas no Capítulo 3. Modelos FOPTD e SOPTD.*
2. *Realize o projeto e execute o experimento de identificação utilizando sinais PRBS.*
3. *Escolha a base utilizada no modelo OBF-TD. Para Laguerre, escolha o polo igual ao polo obtido no modelo FOPTD. Para Kautz, escolha os polos iguais aos polos obtidos no modelo SOPTD.*
4. *Obtenha a estimativa do modelo OBF-TD de ordem superior, Eq. (4.14).*
5. *Obtenha a realização em espaço de estados do modelo OBF-TD, Seção 4.4.*
6. *Obtenha a realização balanceada usando a Definição 6 e Equação (2.16).*
7. *Escolha a ordem do modelo reduzido  $n_r$  e obtenha o modelo reduzido usando o Teorema 19.*
8. *Dado o modelo do resíduo  $G_{res}(s)$ , calcule  $L'$  utilizando o Teorema 20.*
9. *Atualize a constante de tempo como  $\bar{T} = T + L'$  e o atraso como  $\bar{L} = L + L'$ .*
10. *Valide o modelo  $G_{n_r}(s)$ . Se o índice de qualidade não for atingido, volte para o Passo 3 utilizando a informação sobre o polo e o atraso do modelo  $G_{n_r}(s)$ .*

## 4.6 Exemplos de simulação

A função de custo utilizada na comparação das técnicas de identificação são as mesmas utilizadas no Capítulo 3. No domínio do tempo é

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(kT_s) - \hat{y}(kT_s)]^2 \quad (4.67)$$

em que  $y(kT_s)$  e  $\hat{y}(kT_s)$  é a saída do processo real e estimada, respectivamente.

No domínio da frequência é dada por

$$E = \frac{1}{N_\omega} \sum_{k=0}^{N_\omega-1} |G(j\omega_k) - \hat{G}(j\omega_k)| \quad (4.68)$$

em que  $N_\omega$  é o número de pontos de frequência,  $G(j\omega_k)$  é a resposta em frequência do processo e  $\hat{G}(j\omega_k)$  é a resposta em frequência do modelo identificado. A região de frequência utilizada em todos os exemplos é de  $\omega = 0$  até a frequência em que a fase do processo é maior que  $-180^\circ$ .

O período de amostragem utilizado em todos os exemplos é o mesmo e igual a 0,01 segundos.

### 4.6.1 Exemplo 1

O processo utilizado para o primeiro exemplo é do tipo FOPTD. Esse primeiro processo é o mesmo que já foi utilizado no Capítulo 3. A função de transferência é dada por

$$G_1(s) = \frac{1}{4s + 1} e^{-3s}. \quad (4.69)$$

Os modelos identificados obtidos utilizando as técnicas de identificação de modelo FOPTD apresentadas no Capítulo 3 seguem na Tabela 4.1. Para esse exemplo foi considerado o caso com ruído de média zero e variância 0,005. Todos os cálculos e Tabelas de erros nos domínios do tempo e da frequência seguem no Exemplo 1 do Capítulo 3.

Tabela 4.1: Exemplo 1 - Modelos identificados

Processo 1	$G(s) = \frac{1}{(4s+1)} e^{-3s}$
Técnica proposta	$G_{1p}(s) = \frac{0,998}{(4,016s+1)} e^{-2,99s}$
Técnica Å&H	$G_{1a}(s) = \frac{1}{(4,227s+1)} e^{-2,97s}$
Técnica BJKM	$G_{1b}(s) = \frac{1,074}{(3,176s+1)} e^{-2,6s}$

A partir do modelo FOPTD estimado  $G_{1p}(s)$ , o experimento de identificação utilizando sinais PRBS pode ser realizado. O sinal PRBS é definido a partir do tamanho  $N_s$  e do período de chaveamento  $T_{clk}$  (GAIKWAD; RIVERA, 1996). Com  $\alpha_s = 2$ ,  $\tau_{dom} = 4,016$  segundos e  $\beta_s = 5$ , os valores escolhidos foram  $N_s = 300$  e  $T_{clk} = 2$  segundos. Segue na Figura 4.2 parte da resposta do processo ao experimento de identificação.

Nesse exemplo foram utilizadas as bases de Laguerre para o modelo OBF-TD. O polo de Laguerre é  $p = 1/4,016$  e o atraso é  $L = 2,99$ . As informações sobre o polo de Laguerre e o atraso são obtidas do modelo  $G_{1p}(s)$ .

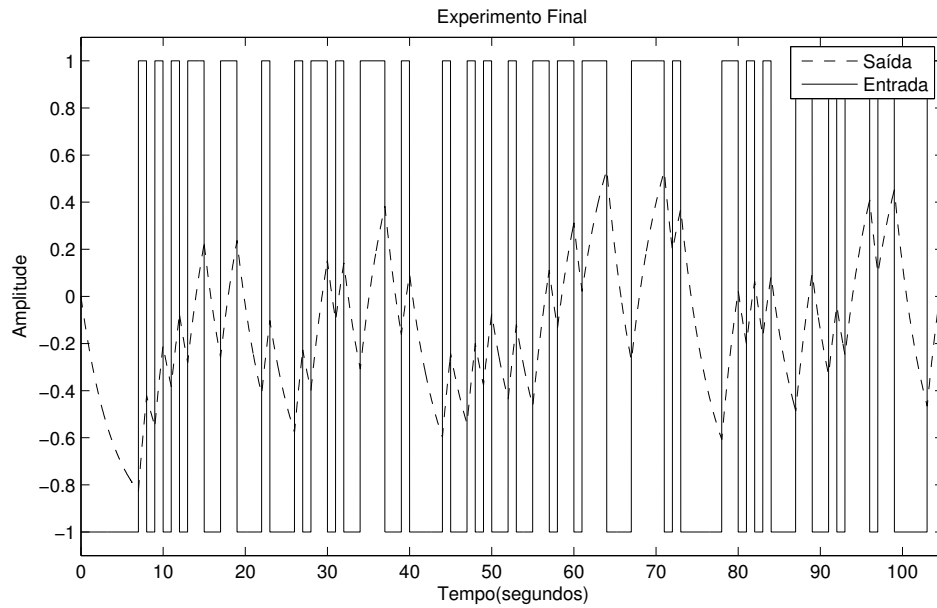


Figura 4.2: Exemplo 1 - Experimento de identificação utilizando PRBS

A ordem do modelo OBF-TD foi escolhida como  $n = 1$  e apenas um coeficiente é estimado,  $c_1 = 0,251$ . Segue na Figura 4.3 a resposta ao degrau do modelo OBF-TD com  $n = 1$  (OBF-TD1) e do modelo FOPTD  $G_{1p}(s)$  obtido anteriormente. O modelo  $G_{1p}(s)$  já é uma boa estimativa do processo, mas o modelo OBF-TD1 apresenta um refinamento no ganho de regime permanente.

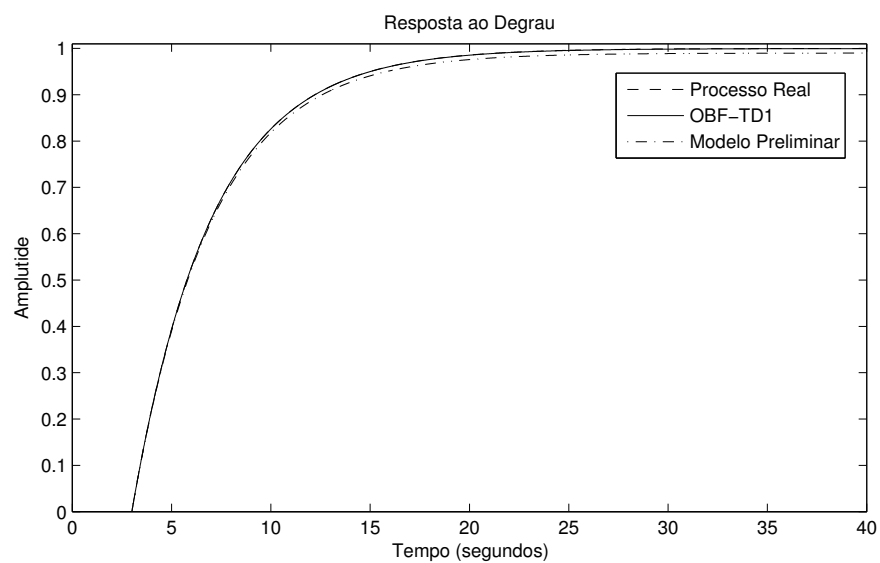


Figura 4.3: Exemplo 1 - Resposta ao degrau

Na Figura 4.4 seguem as respostas do processo, do modelo  $G_{1p}(s)$  e do modelo OBF-TD1 a uma nova sequência PRBS utilizada para validação. O PRBS de validação é do mesmo tamanho que o utilizado para identificação, mas com período de chaveamento reduzido em 1/4. Foram calculados o erros absolutos para cada um dos modelos apresentados. Os erros em função do tempo seguem na Figura 4.5.

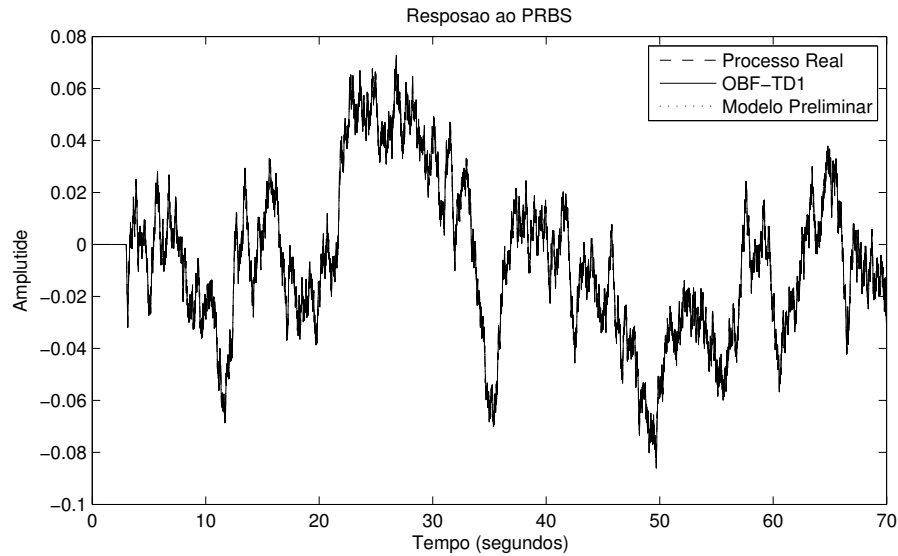


Figura 4.4: Exemplo 1 - Resposta do processo ao PRBS (validação)

O erro absoluto em função do tempo é menor para o modelo OBF-TD1, ou seja, houve um refinamento tanto do ponto de vista da resposta ao degrau quanto do ponto de vista de um sinal com espectro mais amplo de frequência.

A Proposição 17 foi utilizada para verificar se  $n = 1$  é uma boa escolha para a ordem do modelo OBF-TD. Assim, a ordem do modelo OBF-TD foi modificada para  $n = 5$  e os coeficientes foram estimados. Os valores dos coeficientes seguem na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Exemplo 1 - Coeficientes estimados

Coeficientes	$c_1 = 0,3536$
	$c_2 = 7,05 \times 10^{-4}$
	$c_3 = 1,41 \times 10^{-6}$
	$c_4 = 2,81 \times 10^{-9}$
	$c_5 = 5,61 \times 10^{-12}$

Como  $c_k \ll c_1$  para  $k > 1$ , então o processo é bem representado por um modelo OBF-TD com  $n = 1$  ou o processo é bem representado por um modelo FOPTD.

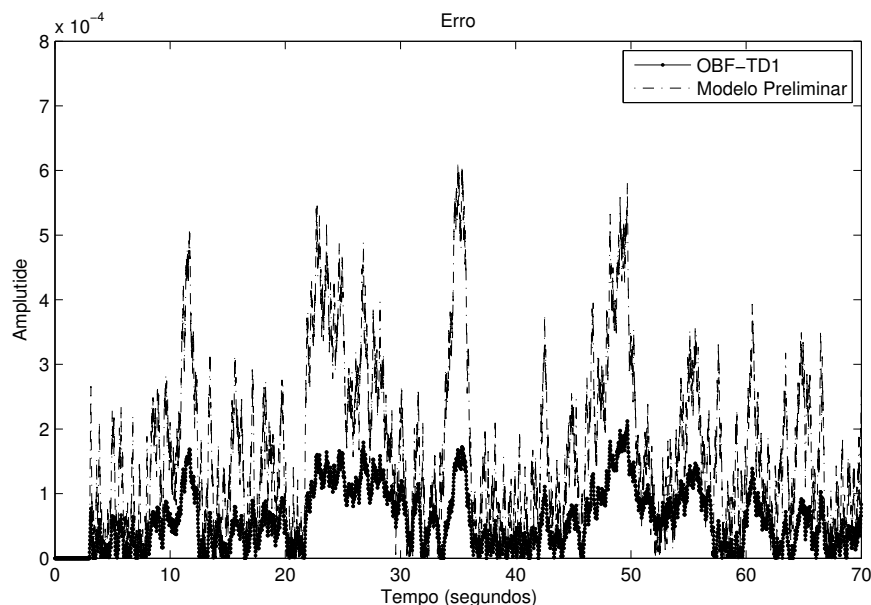


Figura 4.5: Exemplo 1 - Erro absoluto em função do tempo

### 4.6.2 Exemplo 2

O processo utilizado para o segundo exemplo é do tipo SOPTD e já foi utilizado no Capítulo 3. A função de transferência do processo é dada por

$$G_2(s) = \frac{1}{(10s + 1)(s + 1)} e^{-2s} = \frac{1}{10s^2 + 11s + 1} e^{-2s}. \quad (4.70)$$

Neste exemplo os resultados apresentados no Exemplo 2 do Capítulo 3 são utilizados. Os modelos SOPTD identificados para o caso com ruído de média zero e variância 0,005 são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Exemplo 2 - Modelos identificados SOPTD

Processo 2	$G_2(s) = \frac{1}{10s^2 + 11s + 1} e^{-2s}$
Técnica Proposta	$G_{2p}(s) = \frac{0,99}{9,98s^2 + 10,99s + 1} e^{-1,99s}$
Técnica RChi	$G_{2c}(s) = \frac{1}{12,41s^2 + 11,04s + 1} e^{-1,81s}$

Para esse exemplo, os parâmetros de projeto do sinal PRBS são  $\alpha_s = 2$ ,  $\tau_{dom} = 10$  segundos e  $\beta_s = 5$ . Os valores escolhidos foram  $N_s = 500$  e  $T_{clk} = 3$  segundos.

Nesse exemplo foram utilizadas as bases de Kautz para o modelo OBF-TD. Os polos de Kautz são iguais aos polos obtidos do modelo SOPTD  $G_{2p}(s)$  e o atraso é  $L = 1,99$ . A ordem do modelo foi escolhida como  $n = 2$ , ou seja, dois coeficientes são estimados ( $c_1 = -8,6 \times 10^{-5}$  e  $c_2 = 0,21$ )

Segue na Figura 4.6 as respostas ao degrau do modelo OBF-TD com  $n = 2$  (OBF-TD2) e do modelo SOPTD  $G_{2p}(s)$  obtido anteriormente. Os dois modelos resultam em uma boa representação do processo.

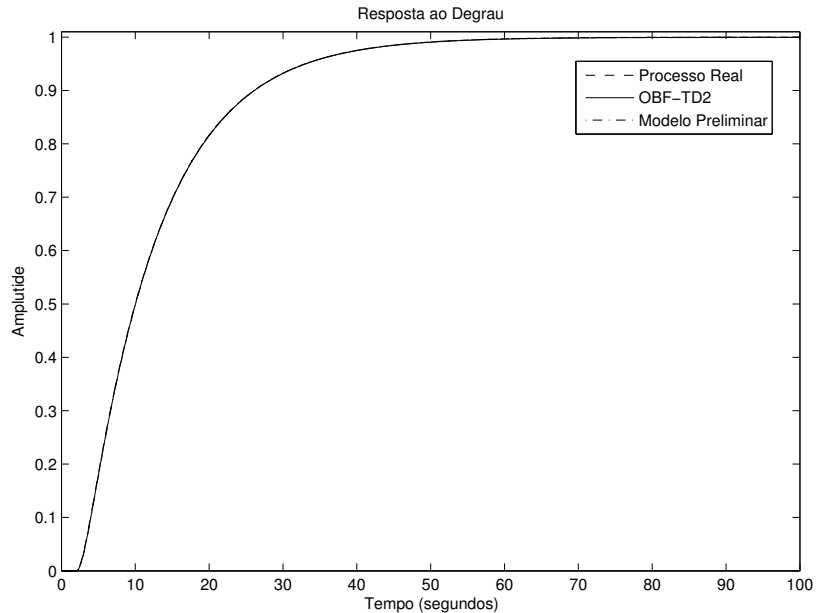


Figura 4.6: Exemplo 2 - Resposta ao degrau

Os modelos  $G_{2p}(s)$  e OBF-TD2 foram avaliados com relação a uma nova sequência PRBS utilizada para validação. O PRBS de validação é do mesmo tamanho que o utilizado para identificação, mas com período de chaveamento reduzido em 1/4. Os erros absolutos em função do tempo seguem na Figura 4.7(a) e na Figura 4.7(b) seguem os erros com uma ampliação em um intervalo de tempo para melhorar a visualização.

O modelo  $G_{2p}(s)$  já é uma boa estimativa do processo, mas o modelo OBF-TD2 apresenta um refinamento na frequência. As funções de custo nos domínios do tempo e da frequência foram calculados para o experimento de validação. Os valores seguem na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Exemplo 2 -  $\varepsilon$  e  $E$

	$G_{2p}(s)$	OBF-TD2
$\varepsilon$	$1,12 \times 10^{-7}$	$8,89 \times 10^{-8}$
$E$	$3,1 \times 10^{-3}$	$2,1 \times 10^{-4}$

A Proposição 18 foi utilizada para verificar se  $n = 2$  é uma boa escolha para a ordem

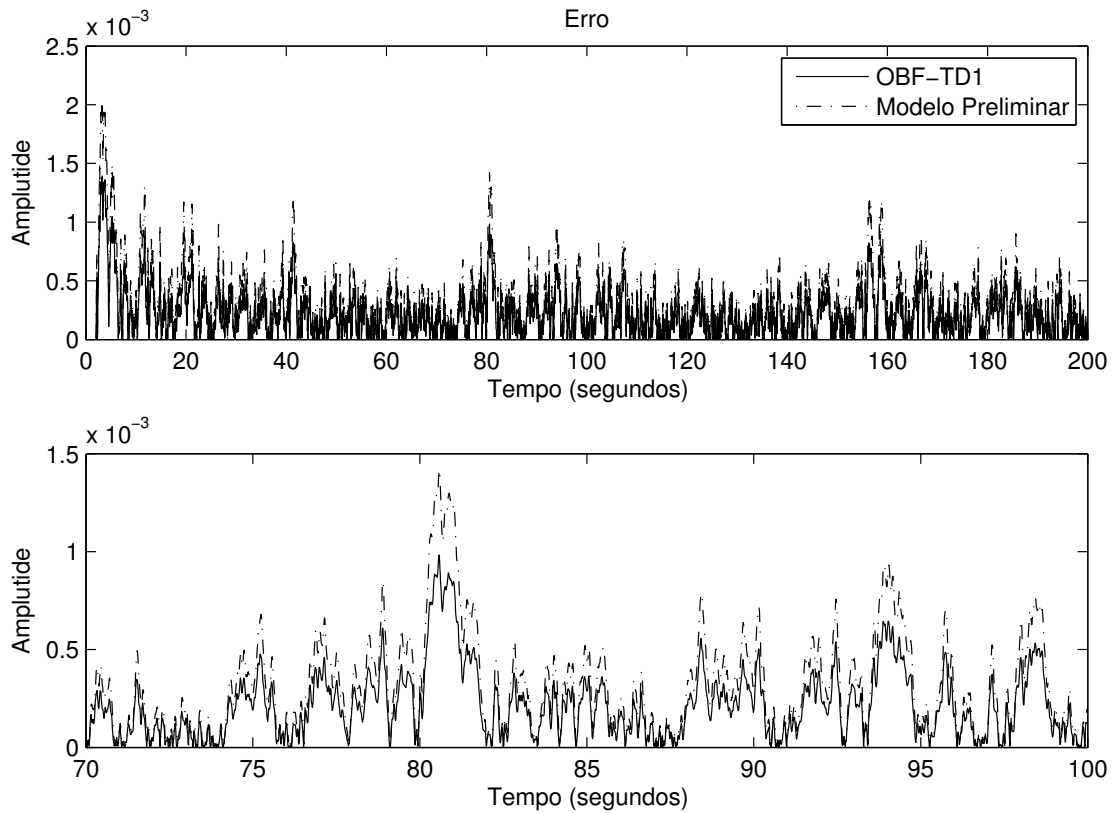


Figura 4.7: Exemplo 2 - Erro absoluto em função do tempo

do modelo OBF-TD. A ordem do modelo OBF-TD escolhida como  $n = 6$  e os coeficientes foram estimados. Os valores dos coeficientes seguem na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Exemplo 2 - Coeficientes estimados

Coeficientes	$c_1 = -8,18 \times 10^{-5}$
	$c_2 = 0,21$
	$c_3 = 8,18 \times 10^{-5}$
	$c_4 = 1,05 \times 10^{-4}$
	$c_5 = -2,81 \times 10^{-8}$
	$c_6 = 2,09 \times 10^{-8}$

Como  $c_k \ll c_2$  para  $k > 2$ , então o processo é bem representado por um modelo OBF-TD com  $n = 2$  ou o processo é bem representado por um modelo de segunda ordem com atraso.



### 4.6.3 Exemplo 3

O processo utilizado nesse exemplo é dado por

$$G_3(s) = \frac{1}{(2s+1)(s+1)(0,4s+1)(0,2s+1)}e^{-1s}. \quad (4.71)$$

Neste exemplo são utilizadas as técnicas de identificação utilizando modelos OBF-TD com bases de Laguerre e bases de Kautz. As informações das constantes de tempo e dos atrasos são obtidas utilizando as técnicas apresentadas no Capítulo 3. O modelo FOPTD obtido é dado por

$$G_{3fo}(s) = \frac{0,99}{2,67s+1}e^{-2,27s} \quad (4.72)$$

e o modelo SOPTD obtido é dado por

$$G_{3so}(s) = \frac{0,99}{2,41s^2+3,13s+1}e^{-1,45s}. \quad (4.73)$$

Os parâmetros de projeto do sinal PRBS são  $\alpha_s = 2$ ,  $\tau_{dom} = 2,67$  segundos e  $\beta_s = 5$ . Os valores escolhidos foram  $N_s = 1000$  e  $T_{clk} = 3$  segundos.

Para o modelo OBF-TD com  $n = 1$  utilizando bases de Laguerre (OBF-TD1L) apenas um coeficiente foi estimado  $c_1$ . A estimativa da constante de tempo de primeira ordem foi 2,67 e o polo de Laguerre é  $p = 1/2,67$ . O valor do coeficiente é  $c_1 = 0,432$ .

Já para o modelo OBF-TD com  $n = 2$  utilizando bases de Kautz (OBF-TD2K) dois coeficientes são estimados  $c_1$  e  $c_2$ . As estimativas das constantes de tempo de segunda ordem são 1,33 e 1,81. Os valores dos coeficientes são  $c_1 = -0,083$  e  $c_2 = 0,396$ .

Na Figura 4.8 seguem as respostas ao degrau unitário para os modelos OBF-TD1L e OBF-TD2K. Na Figura 4.9 seguem os diagramas de Nyquist. Dado que o processo é de quarta ordem o modelo utilizando bases de Kautz representam bem melhor tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. No entanto, como a constante de tempo dominante é duas vezes mais lenta que a segunda dominante e muito mais lenta que as outras, o modelo de primeira ordem com atraso utilizando bases de Laguerre também resulta em uma boa aproximação na região de baixas e médias frequências.

De modo a comparar as estimativas foi utilizada a técnica proposta em (SKOGESTAD, 2003). Dado o modelo do processo é possível obter aproximações de primeira e segunda ordem com atraso a partir de cálculos simples. O modelo FOPTD é dado por

$$G_{3kfo}(s) = \frac{1}{2,5s+1}e^{-2,1s} \quad (4.74)$$

e o modelo SOPTD é dado por

$$G_{3kso}(s) = \frac{1}{2,4s^2+3,2s+1}e^{-1,4s}. \quad (4.75)$$

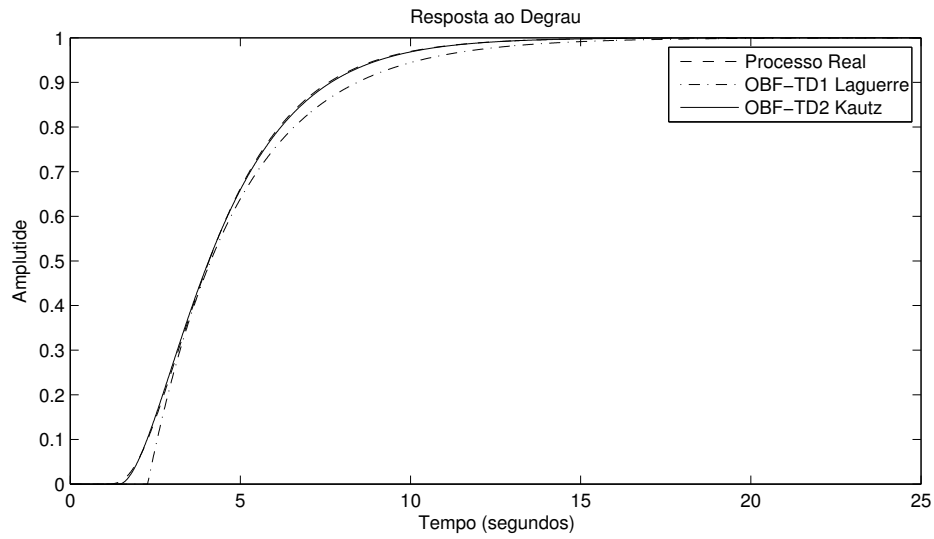


Figura 4.8: Exemplo 3 - Resposta ao degrau

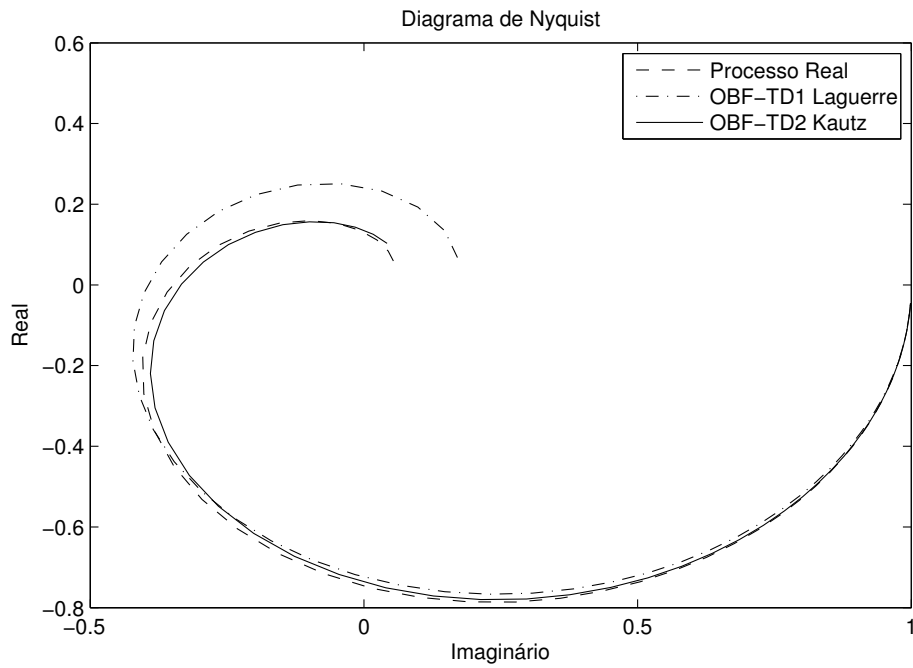


Figura 4.9: Exemplo 3 - Diagramas de Nyquist

Na Tabela 4.6 seguem os erros nos domínios do tempo e da frequência dos modelos OBF-TD1L e OBF-TD2K e dos modelos  $G_{3kfo}(s)$  e  $G_{3kso}(s)$ . A partir dos valores do erros nos domínios do tempo e da frequência pode-se concluir que o modelo OBF-TD utilizando bases de Laguerre resulta em uma representação melhor que a obtida a partir

do modelo  $G_{3kfo}(s)$ . Da mesma forma o modelo OBF-TD utilizando bases de Kautz também apresentam melhores resultados quando comparado com o modelo  $G_{3kso}(s)$ . Vale lembrar que os modelos  $G_{3kfo}(s)$  e  $G_{3kso}(s)$  são obtidos a partir do conhecimento exato da função de transferência  $G_3(s)$ , Equação (4.71).

Tabela 4.6: Exemplo 3 -  $\varepsilon$  e  $E$

	OBF-TD1L	OBF-TD2K	$G_{3kfo}(s)$	$G_{3kso}(s)$
$\varepsilon$	$1,37 \times 10^{-4}$	$2,82 \times 10^{-6}$	$2,28 \times 10^{-4}$	$7,21 \times 10^{-6}$
$E$	0,034	0,005	0,035	0,008

#### 4.6.4 Exemplo 4

##### Parte I

O quarto exemplo é de um processo de terceira ordem com atraso. A função de transferência do processo é dada por

$$G_4(s) = \frac{1}{(10s + 1)^3} e^{-20s}. \quad (4.76)$$

O modelo FOPTD identificado utilizando a técnica de identificação no domínio do tempo proposta no Capítulo 3 é

$$G_{4p}(s) = \frac{0,99}{20,28s + 1} e^{-31,4s} \quad (4.77)$$

A partir da resposta do processo à excitação proposta é possível calcular uma estimativa para o atraso puro do processo. A estimativa pode ser obtida utilizando a Equação (3.61). O cálculo da integral para o exemplo resultou em uma estimativa para o atraso puro de 20,1 segundos.

São utilizados modelos OBF-TD com bases de Laguerre em que o polo de Laguerre  $p$  é  $p = 1/20,28$ . Em seguida são escolhidas diversas ordens  $n$  do modelo OBF-TD e os coeficientes são estimados. Os valores dos coeficientes em função da ordem escolhida seguem na Tabela 4.7.

A partir dos valores dos coeficientes, o modelo OBF-TD5, representado por  $G_{OD5}(s)$ , é dado por

$$G_{OD5}(s) = \frac{B_{OD5}(s)}{A_{OD5}(s)} e^{-20,1s} \quad (4.78)$$

Tabela 4.7: Exemplo 4 - Coeficientes estimados

Ordem $n$	n=3 (OBF-TD3)	n=4 (OBF-TD4)	n=5 (OBF-TD5)
Coeficientes	$c_1 = 0,0927$ $c_2 = -0,0950$ $c_3 = -0,0280$	$c_1 = 0,0911$ $c_2 = -0,0999$ $c_3 = -0,0360$ $c_4 = 0,0050$	$c_1 = 0,0897$ $c_2 = -0,0985$ $c_3 = -0,0303$ $c_4 = 0,0046$ $c_5 = 0,0087$

em que

$$B_{OD5}(s) = -1,84 \times 10^{-2}s^4 + 3,94 \times 10^{-3}s^3 + \quad (4.79)$$

$$+ 6,71 \times 10^{-4}s^2 + 2,83 \times 10^{-5}s + 3,98 \times 10^{-7}$$

$$A_{OD5}(s) = 1,38s^5 + 3,37 \times 10^{-1}s^4 + 3,32 \times 10^{-2}s^3 + \quad (4.80)$$

$$+ 1,64 \times 10^{-3}s^2 + 4,04 \times 10^{-5}s + 3,98 \times 10^{-7}.$$

Em (WANG; CLUETT, 2000), foi proposta uma técnica de identificação utilizando modelos OBF com bases de Laguerre em que o polo de Laguerre é escolhido como o polo ótimo. O polo ótimo é obtido a partir de uma procura baseada em uma estimativa inicial resultante da resposta ao degrau do processo. Neste trabalho essa técnica é chamada de técnica W&C.

Na Figura 4.10 seguem as respostas ao degrau unitário para os modelos OBF-TD3, OBF-TD4, OBF-TD5 e para o modelo OBF obtido utilizando a técnica W&C com  $n = 5$ . Na Figura 4.11 seguem os diagramas de Nyquist.

Os resultados obtidos utilizando os modelos OBF-TD4 e OBF-TD5 são muito próximos aos resultados obtidos utilizando o modelo OBF baseado na escolha ótima do polo de Laguerre. O modelo OBF-TD3 apresenta bons resultados na região de baixa frequência até próximo da frequência em que a fase é  $-145^\circ$  e se degrada para frequências maiores.

Na Tabela 4.8 seguem os erros nos domínios do tempo e da frequência para cada um desses modelos. Como observado anteriormente, o modelo baseado na escolha ótima do polo resulta na melhor aproximação seguido do modelo OBF-TD5.

Tabela 4.8: Exemplo 4 -  $\varepsilon$  e  $E$

	W&C	OBF-TD5	OBF-TD4	OBF-TD3
$\varepsilon$	$1,27 \times 10^{-5}$	$1,45 \times 10^{-5}$	$2,67 \times 10^{-5}$	$1,27 \times 10^{-4}$
$E$	0,011	0,014	0,015	0,036

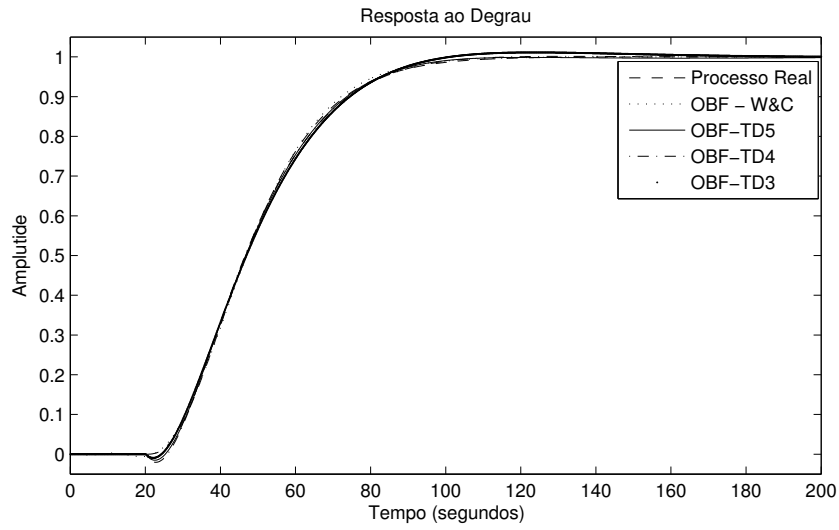


Figura 4.10: Exemplo 4 - Resposta ao degrau

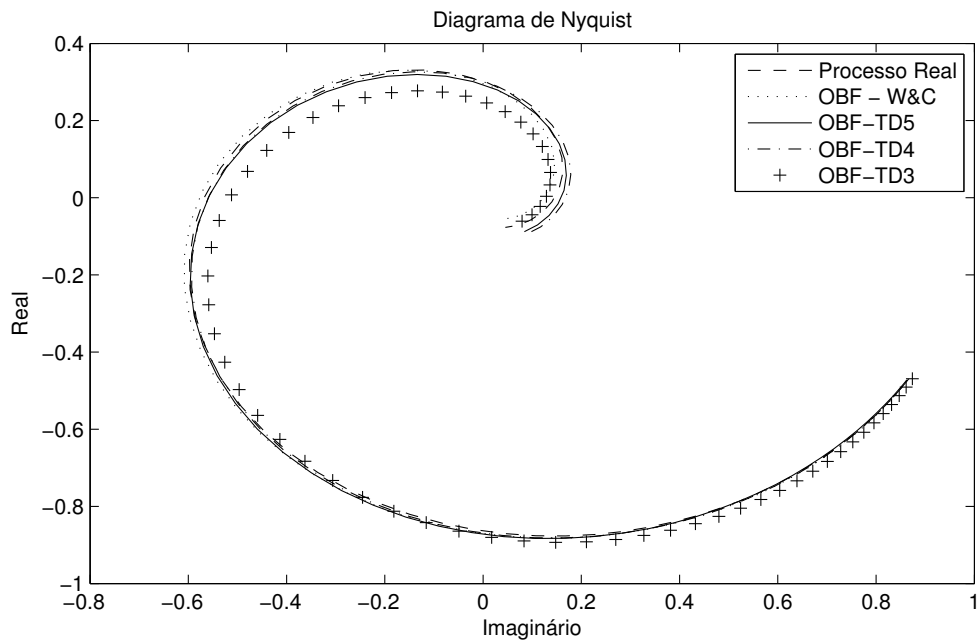


Figura 4.11: Exemplo 4 - Diagramas de Nyquist

## Parte II

Na Parte I, foi obtido o modelo OBF-TD de ordem superior com  $n = 5$  dado na Equação (4.78). Na segunda parte deste Exemplo, o objetivo é obter um modelo de ordem reduzida com  $n_r = 1$  a partir do modelo de ordem superior OBF-TD5.

O primeiro passo é obter a realização em espaço de estados de  $G_{OD5}(s)$  utilizando

o procedimento apresentado na Seção 4.4. Em seguida, é necessário obter a realização balanceada utilizando o Teorema 6 e a Equação (2.16). A função de transferência da realização balanceada é dada por

$$G_{bal}(s) = \frac{B_{bal}(s)}{A_{bal}(s)} e^{-20,1s} \quad (4.81)$$

em que

$$B_{bal}(s) = -1,35 \times 10^{-2} s^4 + 2,88 \times 10^{-3} s^3 + \quad (4.82)$$

$$+ 4,91 \times 10^{-4} s^2 + 2,07 \times 10^{-5} s + 2,91 \times 10^{-7}$$

$$A_{bal}(s) = s^5 + 2,46 \times 10^{-1} s^4 + 2,43 \times 10^{-2} s^3 + \quad (4.83)$$

$$+ 1,19 \times 10^{-3} s^2 + 2,95 \times 10^{-5} s + 2,91 \times 10^{-7}.$$

A partir da realização balanceada e da escolha da ordem do modelo reduzido  $n_r = 1$ , a função de transferência do modelo reduzido  $G_{n_r}(s)$  utilizando o Teorema 19 é dada por

$$G_{n_r}(s) = \frac{-0,323s + 0,042}{s + 0,043} e^{-20,1s}. \quad (4.84)$$

Ainda, deve-se verificar se é necessário compensar o resíduo, ou seja, se é necessário levar em consideração as dinâmicas de ordem superior desprezadas após a redução do modelo. Da Tabela 4.7 e da Proposição 17, conclui-se que a escolha de  $n_r = 1$  resulta em um modelo OBF-TD que não representa adequadamente o processo já que  $c_k \ll c_1$  para  $k > 1$  não é válido.

Essa mesma conclusão pode ser obtida a partir dos valores singulares de Hankel. A matriz de valores singulares de Hankel é dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0,6621 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1633 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0034 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0024 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,31 \times 10^{-5} \end{bmatrix}. \quad (4.85)$$

A partir da matriz  $\Sigma$  é possível concluir que a ordem do modelo reduzido deveria ser pelo menos ordem 2, ou seja, os dois primeiros estados associados ao dois primeiros valores singulares de Hankel deveriam ser considerados na redução. Como a ordem do modelo reduzido é  $n_r = 1$  a correção das dinâmicas desconsideradas é necessária.

Assim, o atraso e a constante de tempo do modelo de ordem reduzida  $G_{n_r}(s)$  devem ser corrigidos para levar em consideração as dinâmicas desprezadas após a redução. O atraso  $L'$  do modelo do resíduo  $G_{res}(s)$ , dado na Equação (5.47), é obtido utilizando o Teorema 20. O atraso é  $L' = 1,03$ .

Utilizando  $L'$ , a constante de tempo ou o polo do modelo de ordem reduzida  $G_{nr}(s)$  é corrigido utilizando a Equação (4.66). Após a correção e a aproximação do zero como um ganho mais um atraso, o modelo de ordem reduzida é dado por

$$G_{nr}(s) = \frac{0,047}{s + 0,047} e^{-30,4s}. \quad (4.86)$$

Mais uma vez foi utilizada a técnica proposta em (SKOGESTAD, 2003) para obtenção de um modelo de ordem reduzida de primeira ordem com atraso. A aproximação de primeira ordem resultante é

$$G_{sk}(s) = \frac{0,067}{s + 0,067} e^{-35s}. \quad (4.87)$$

Outra possibilidade na obtenção de um modelo de ordem reduzida a partir do modelo OBF-TD5 seria truncar diretamente esse modelo de ordem superior considerando apenas o primeiro coeficiente. Esse modelo é chamada de OBF-TD1 truncado.

Segue na Figura 4.12 as respostas ao degrau do modelo  $G_{nr}(s)$ , do modelo  $G_{sk}(s)$  e do modelo OBF-TD1 truncado. Segue na Figura 4.13 os diagramas de Nyquist dos mesmos modelos.

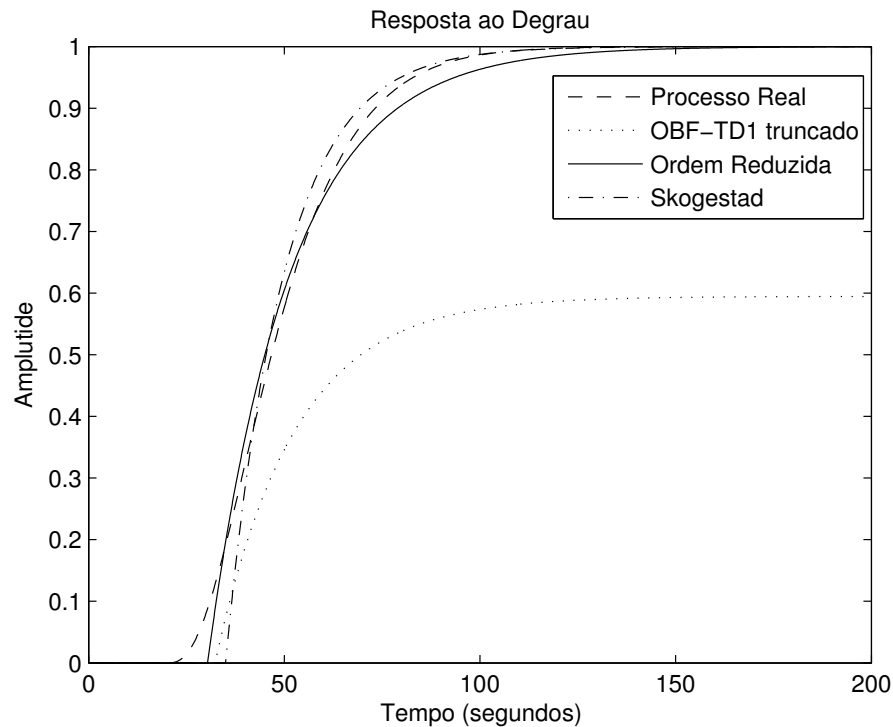


Figura 4.12: Exemplo 4 - Resposta ao degrau

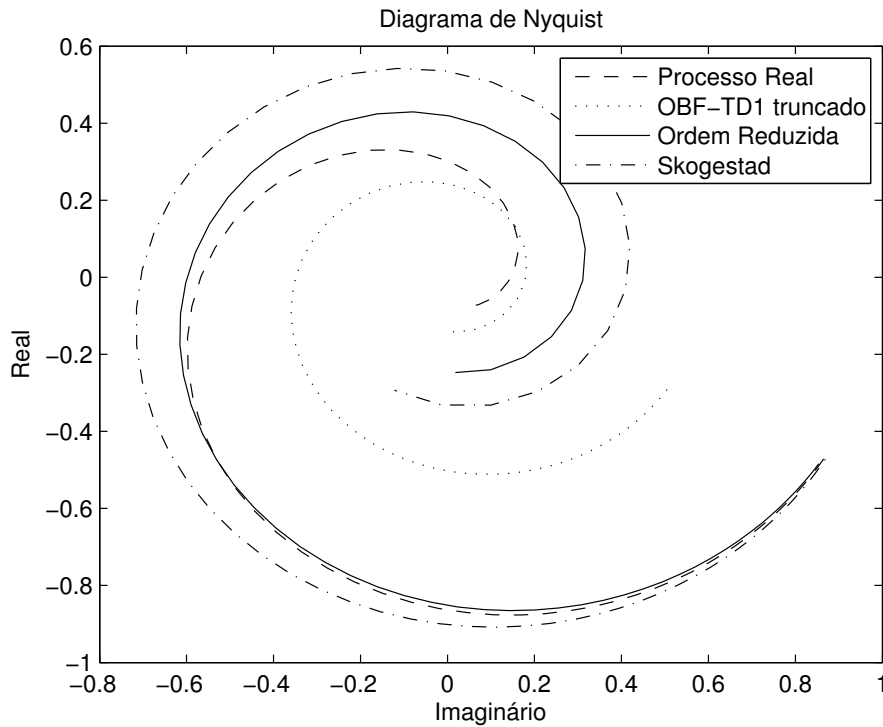


Figura 4.13: Exemplo 4 - Diagramas de Nyquist

Tabela 4.9: Exemplo 4 -  $\varepsilon$  e  $E$

	$G_{nr}(s)$	$G_{sk}(s)$
$\varepsilon$	$5,37 \times 10^{-4}$	$1,2 \times 10^{-3}$
$E$	0,068	0,108

Na Tabela 4.9 seguem os erros nos domínios do tempo e da frequência dos modelos  $G_{nr}(s)$  e  $G_{sk}(s)$ .

O modelo de primeira ordem com atraso que melhor representa o processo é o modelo  $G_{nr}(s)$  em que a compensação do resíduo foi realizada. O modelo  $G_{sk}(s)$  aproxima bem o processo do ponto de vista da resposta ao degrau, mas é ruim quando avaliado em uma faixa de frequências maior. O modelo truncado resulta na pior representação de todas.

Em seguida, o procedimento de correção do resíduo foi realizado de forma iterativa utilizando o Algoritmo 22. O novo modelo de ordem reduzida é

$$G_{nr}(s) = \frac{0,051}{s + 0,051} e^{-32,3s}. \tag{4.88}$$

Os erros nos domínios do tempo e da frequência após as iterações são  $\varepsilon = 4,54 \times 10^{-4}$  e  $E = 0,059$ . Ou, em percentuais, houve um refinamento de 15,45% no domínio do tempo e um refinamento de 13,71% no domínio da frequência.



## 4.7 Resultados experimentais

A plataforma experimental utilizada é a mesma já apresentada no Capítulo anterior (processo termoeletrico que utiliza o efeito Peltier para aquecimento ou resfriamento de uma determinada área).

A localização da plataforma experimental é a mesma, ou seja, a plataforma encontra-se em uma sala com temperatura ambiente controlada por um aparelho de ar condicionado em 22°C. E a preparação para os experimentos também é a mesma, o ponto de operação em regime permanente é de uma entrada de 60% que corresponde a uma saída em torno de 39,2°C e a identificação é realizada utilizando o par entrada/saída  $u_2/y_2$ .

A partir dos modelos FOPTD e SOPTD estimados no Capítulo anterior, o experimento de identificação utilizando sinais PRBS é realizado. Os parâmetros do sinal PRBS são  $\alpha_s = 2$ ,  $\tau_{dom} = 42,67$  segundos e  $\beta_s = 5$ . Os valores escolhidos foram  $N_s = 800$  e  $T_{clk} = 8$  segundos. O período de amostragem é de 1 segundo.

Segue na Figura 4.14 a resposta do processo ao experimento utilizando o sinal PRBS projetado. Os sinais foram deslocados para o zero de modo a mostrar as curvas em uma mesma figura. O deslocamento foi realizado a partir da subtração do valor em regime permanente antes da realização do experimento.

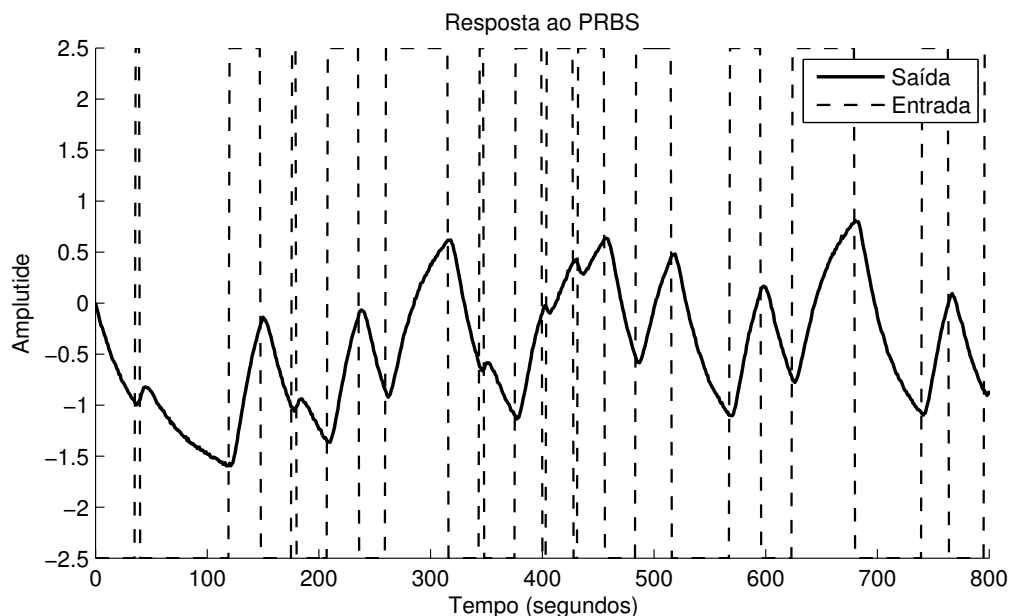


Figura 4.14: Experimentos - Excitação utilizando PRBS

Primeiro foram utilizadas as bases de Laguerre para a estimação do modelo OBF-TD. O polo de Laguerre é  $p = 1/42,67$  e o atraso é  $L = 3,63$ . As informações sobre o polo

de Laguerre e o atraso foram obtidas a partir dos resultados apresentados no Capítulo anterior na Seção 3.6.3 para o modelo  $G_{fo}(s)$ .

A ordem do modelo OBF-TD utilizando bases de Laguerre foi  $n = 5$ . Os valores dos coeficientes seguem na Tabela 4.10.

Tabela 4.10: Resultados experimentais - Coeficientes estimados utilizando bases de Laguerre

Coeficientes	$c_1 = 7,57 \times 10^{-2}$
	$c_2 = -3,33 \times 10^{-3}$
	$c_3 = 1,14 \times 10^{-2}$
	$c_4 = -1,49 \times 10^{-2}$
	$c_5 = 7,31 \times 10^{-3}$

Em seguida, foram utilizadas as bases de Kautz para a estimação do modelo OBF-TD. Os polos de Kautz são iguais aos polos do modelo  $G_{so}(s)$  e o atraso é  $L = 2,03$ . Estas informações foram obtidas a partir dos resultados apresentados no Capítulo anterior na Seção 3.6.3.

A ordem do modelo OBF-TD utilizando bases de Kautz foi  $n = 4$ . Os valores dos coeficientes seguem na Tabela 4.11.

Tabela 4.11: Resultados experimentais - Coeficientes estimados utilizando bases de Kautz

Coeficientes	$c_1 = -8,82 \times 10^{-3}$
	$c_2 = 7,39 \times 10^{-2}$
	$c_3 = -1,31 \times 10^{-2}$
	$c_4 = 7,41 \times 10^{-3}$

Na Figura 4.15 seguem as respostas do processo e dos modelos OBF-TD utilizando bases de Laguerre e utilizando bases de Kautz a uma nova sequência PRBS utilizada para validação. O tamanho do PRBS de validação é de  $N_s = 800$  e o período de chaveamento foi reduzido pela metade,  $T_{clk} = 4$  segundos.

Na Tabela 4.12 seguem os valores da função de custo no domínio do tempo  $\varepsilon$  para todos os modelos identificados.

Tabela 4.12: Resultados experimentais -  $\varepsilon$

	OBF-TD Laguerre	OBF-TD Kautz
$\varepsilon$	4,41	3,01

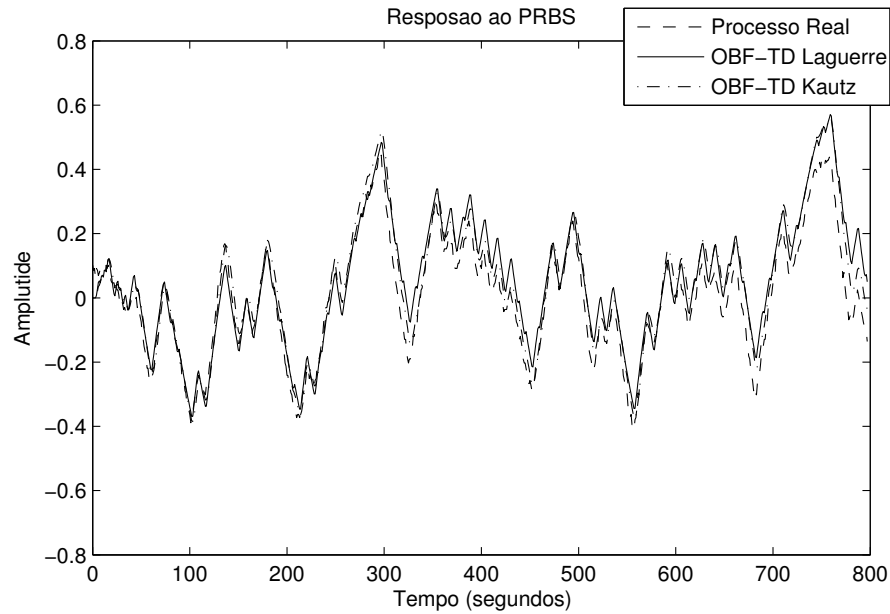


Figura 4.15: Experimento - Resposta do processo ao PRBS (validação)

Tanto o modelo utilizando bases de Laguerre quanto o modelo utilizando bases de Kautz representam bem o processo. No entanto, o bom resultado apresentado pelo modelo utilizando bases de Laguerre se deve principalmente ao fato da elevada ordem escolhida.

Em seguida, foram obtidos os modelos de ordem reduzida de primeira ordem e de segunda ordem. Ou seja, os modelos apresentados nas Tabelas 4.10 e 4.11 são reduzidos utilizando as técnicas de redução de modelos apresentadas neste Capítulo.

A partir das Proposições 17 e 18 pode-se concluir a partir dos valores dos coeficientes que é necessário utilizar a técnica de redução de modelos com compensação de resíduo. Os modelos de ordem reduzida obtidos seguem na Tabela 4.13.

Tabela 4.13: Resultados experimentais - Modelos OBF-TD reduzidos

FOPTD reduzido	$\frac{0,017}{s+0,025}e^{-3,66s}$
SOPTD reduzido	$\frac{0,007}{s^2+0,336s+0,009}e^{-2,08s}$

Na Tabela 4.14 seguem os valores da função de custo no domínio do tempo  $\varepsilon$  para todos os modelos OBF-TD de ordem reduzida.

Tabela 4.14: Resultados experimentais -  $\varepsilon$  Modelos OBF-TD reduzidos

	FOPTD reduzido	SOPTD reduzido
$\varepsilon$	35, 49	10, 62

Estes valores podem ser comparados utilizando os obtidos com os modelos FOPTD e SOPTD apresentados no Capítulo 3 na Tabela 3.18. Os modelos de ordem reduzida resultaram em modelos mais refinados do que os modelos preliminares. Tanto as constantes de tempo quando os atrasos foram atualizados a partir da informação contida no resíduo.

## 4.8 Considerações finais

Neste Capítulo foram apresentados os conceitos e técnicas para identificação de modelos SISO. As técnicas focaram no problema da estimação de modelos FOPTD e SOPTD utilizando modelos OBF-TD. Esses são os modelos de ordem reduzida mais utilizados. Essa ampla utilização se deve principalmente ao fato do controlador PID ser a estrutura de controle mais empregada na indústria.

Além dos modelos de ordem reduzida, também é possível a identificação de modelos de ordem superior utilizando os modelos OBF-TD e as informações preliminares. Os modelos de ordem superior podem ser utilizados para o projeto de controladores preditivos, por exemplo.

Por outro lado, como o objetivo principal é a obtenção de modelos de ordem reduzida, foram apresentadas técnicas de redução de modelos utilizando modelos OBF-TD. A partir da técnica de redução de modelos é possível corrigir tanto o atraso quanto a constante de tempo do modelo de ordem reduzida.

Por fim são apresentados dois algoritmos: Algoritmo 21 e Algoritmo 22. No primeiro, o modelo de ordem reduzida é obtido utilizando a compensação do resíduo. No segundo, dado que o modelo de ordem reduzida não apresenta a precisão desejada o procedimento anterior é realizado de forma iterativa. O modelo obtido em cada iteração é utilizado como informação inicial na próxima iteração.

Também foram apresentados exemplos de simulação de modo a avaliar os resultados obtidos com as técnicas apresentadas. Além disso, a plataforma do processo termoelétrico foi mais uma vez utilizada nos resultados experimentais.

# Capítulo 5

## Identificação de Sistemas MIMO

Neste Capítulo é tratado o problema da identificação de processos que possuem múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). As técnicas apresentadas nos capítulos anteriores para a identificação de modelos FOPTD, SOPTD e OBF-TD são modificadas para serem aplicadas nesse tipo de processo.

O Capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 5.1 é apresentada uma introdução sobre processos MIMO e suas diferenças com relação aos processos SISO; na Seção 5.2 os modelos OBF-TD MIMO são definidos, o procedimento de estimação é apresentado e as diversas estruturas são discutidas; na Seção 5.3 os modelos OBF-TD são definidos em espaço de estados; na Seção 5.4 os modelos OBF-TD são utilizados na identificação de modelos FOPTD e SOPTD e as técnicas de redução de modelos formuladas para o caso SISO são modificadas para o caso MIMO; na Seção 5.5 seguem os resultados de simulação; na Seção 5.6 seguem os resultados experimentais; por fim, na Seção 5.7 seguem as considerações finais.

### 5.1 Introdução

O problema de identificação se torna mais complexo quando o processo possui múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). Em processos MIMO a mudança em uma entrada geralmente afeta todas as saídas, ou seja, existem interações entre as diversas entradas e saídas.

A relação entrada/saída de um processo MIMO contínuo, causal, linear e invariante no tempo com  $m$  entradas e  $p$  saídas é dada por

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (5.1)$$

em que  $y(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  é o vetor de saídas,  $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  é o vetor de entradas e  $g(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é a matriz de resposta ao impulso.

Aplicando a transformada de Laplace na Equação (5.1) com  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ ,  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  e  $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$  tem-se

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (5.2)$$

em que  $G(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}$  é a matriz de funções de transferência. Em notação matricial

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{11}(s) & G^{12}(s) & \dots & G^{1m}(s) \\ G^{21}(s) & G^{22}(s) & \dots & G^{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{p1}(s) & G^{p2}(s) & \dots & G^{pm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Segue na Figura 5.1 a representação de  $G(s)$ .

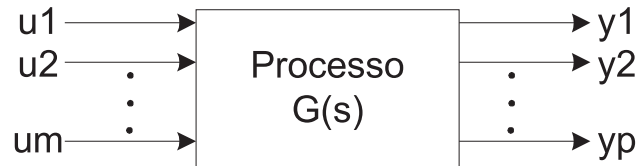


Figura 5.1: Representação de um processo MIMO  $p \times m$

Na projeto de experimentos para identificação de processos MIMO, existem duas metodologias para a realização dos experimentos (WANG; LEE; LIN, 2003):

- Experimento independente: o experimento é realizado em apenas uma entrada por vez enquanto as outras entradas são mantidas sem excitação;
- Experimento descentralizado: o experimento é realizado em todas as entradas ao mesmo tempo.

Além das interações, outra diferença entre processos SISO e MIMO é a presença das direções no caso multivariável. As direções se referem à dependência do ganho do sistema com relação às combinações de entradas aplicadas (LI; LEE, 1996). O problema das direções é tratado no próximo Capítulo.

## 5.2 Modelos OBF-TD MIMO

### 5.2.1 Definição

A utilização dos modelos OBF-TD na representação de processos MIMO segue um procedimento similar ao do caso SISO. A matriz de funções de transferência  $G(s)$  é expandida como uma série na base escolhida. Porém, no caso MIMO, cada elemento  $G^{ij}(s)$  pode ser expandido utilizando um conjunto de polos ou bases distintas. Isso é importante quando a distribuição de constantes de tempo é bastante diferente entre os elementos de  $G(s)$ .

O modelo OBF-TD SISO apresentado na Equação (4.2) é definido para o caso MIMO como segue.

**Definição 23** Considere a matriz de funções de transferência do processo  $G(s)$  com atraso não nulo  $L$ ,  $m$  entradas e  $p$  saídas dada por

$$\begin{bmatrix} G^{11}(s) & G^{12}(s) & \dots & G^{1m}(s) \\ G^{21}(s) & G^{22}(s) & \dots & G^{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{p1}(s) & G^{p2}(s) & \dots & G^{pm}(s) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Dado que a decomposição  $G^{ij}(s) = \tilde{G}^{ij}(s)e^{-L^{ij}s}$  pode ser realizada, a função de transferência  $\tilde{G}^{ij}(s)$  pode ser descrita utilizando um modelo OBF de ordem  $n$  como

$$\tilde{G}^{ij}(s) = c_1^{ij} F_1^{ij}(s) + c_2^{ij} F_2^{ij}(s) + \dots + c_{n^{ij}}^{ij} F_{n^{ij}}^{ij}(s) = \sum_{l=1}^{n^{ij}} c_l^{ij} F_l^{ij}(s) \quad (5.5)$$

em que o conjunto  $\{F_l^{ij}(s)\}_{l=1}^{n^{ij}}$  é formado por bases de funções ortonormais de Takenaka-Malmquist dadas na Equação (2.47) e os  $c_l^{ij}$ 's são os coeficientes das bases. O modelo OBF-TD de  $G^{ij}(s)$  é dado por

$$G^{ij}(s) = (c_1^{ij} F_1^{ij}(s) + c_2^{ij} F_2^{ij}(s) + \dots + c_{n^{ij}}^{ij} F_{n^{ij}}^{ij}(s))e^{-sL^{ij}} = e^{-sL^{ij}} \sum_{l=1}^{n^{ij}} c_l^{ij} F_l^{ij}(s) \quad (5.6)$$

em que  $n$  é a ordem do modelo OBF-TD.

Então, o modelo  $G(s)$  é dado por

$$G(s) = e^{-Ls} \sum_{l=1}^{n^{ij}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m c_l^{ij} F_l^{ij}(s) \quad (5.7)$$

em que  $\{F_l^{ij}(s)\}_{l=1}^{n^{ij}}$  com  $1 \leq i \leq p$  e  $1 \leq j \leq m$  são as bases.

No caso de modelos OBF-TD MIMO, é necessário o conhecimento aproximado do atraso e das constantes de tempo de cada elemento que forma a matriz de funções de transferência  $G(s)$ . Dependendo dessas informações, a base de cada elemento do modelo multivariável pode ser escolhida de forma independente. As bases escolhidas para o caso MIMO são as mesmas utilizadas para o caso SISO: bases de Laguerre e bases de Kautz.

## 5.2.2 Estruturas multivariáveis

No caso de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, existem diversas estruturas que podem ser utilizadas na construção de modelos em bases de funções ortonormais.

Os modelos OBF-TD foram definidos para o caso em que cada elemento da matriz de funções de transferência é parametrizado de forma independente. Ou seja, é possível escolher para cada elemento a base, o(s) polo(s), o atraso e a ordem do modelo. A estrutura dada na Equação (5.7) é chamada de **Estrutura 1**.

No entanto, outras estruturas também são possíveis e utilizadas, dependendo da informação disponível sobre o sistema. Algumas das possíveis estruturas são destacadas em seguida.

- **Estrutura 2:** a ordem, a base e a informação sobre os polos são as mesmas para todos os elementos.

$$G(s) = \sum_{l=1}^n \Theta_i \begin{bmatrix} F_l(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_l(s) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

em que  $\Theta_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ;

- **Estrutura 3:** dinâmicas diferentes para cada coluna (entrada).

$$G(s) = \sum_{l=1}^n \Theta_i \begin{bmatrix} F_l^1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_l^m(s) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

em que  $\Theta_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ;

- **Estrutura 4:** dinâmicas diferentes para cada linha (saída).

$$G(s) = \sum_{l=1}^n \begin{bmatrix} F_l^1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_l^p(s) \end{bmatrix} \Theta_i \quad (5.10)$$

em que  $\Theta_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ;



- **Estrutura 5:** dinâmicas diferentes para cada elemento da matriz (saída).

$$G(s) = \sum_{l=1}^n \Theta_l \begin{bmatrix} F_l^{11}(s) & \dots & F_l^{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ F_l^{p1}(s) & & F_l^{pm}(s) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

em que  $\Theta_l \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Essa estrutura difere da **Estrutura 1** na escolha da ordem dos modelos.

Vale observar que todas as estruturas apresentadas são lineares nos parâmetros. A diferença entre elas está na informação necessária sobre as dinâmicas envolvidas. Dessa forma, a partir do conhecimento preliminar sobre o sistema é possível escolher a estrutura e reduzir o número de parâmetros que deve ser estimado.

Também é importante observar que quanto mais flexível for a estrutura escolhida, mais informação sobre o processo é necessária. A flexibilidade está relacionada com a possibilidade de representar um processo com dinâmicas bem diferentes utilizando um número reduzido de parâmetros.

### 5.2.3 Estimação de modelos OBF-TD

#### Experimento de identificação

Os sinais utilizados para o caso SISO também são utilizados para o caso MIMO, sinais PRBS. A metodologia escolhida para a realização do experimento é a descentralizada, ou seja, todas as entradas são excitadas ao mesmo tempo. Desse modo, é possível avaliar tanto as interações quanto as direções do processo.

O projeto de sinais do tipo passa-baixa é realizado a partir do conhecimento prévio das dinâmicas envolvidas. Para cada entrada  $u_i(t)$  é projetado um sinal com características diferentes caso as dinâmicas sejam diferentes. A Equação (2.62) é novamente utilizada, mas nesse caso  $\tau_{dom}$  é escolhido como a constante de tempo da malha direta.

#### Estimação

A relação entre as entradas e saídas pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{11}(s) & G^{12}(s) & \dots & G^{1m}(s) \\ G^{21}(s) & G^{22}(s) & \dots & G^{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{p1}(s) & G^{p2}(s) & \dots & G^{pm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

ou

$$\begin{cases} Y_1(s) = G^{11}(s)U_1(s) + G^{12}U_2(s) + \dots + G^{1m}(s)U_m(s) \\ Y_2(s) = G^{21}(s)U_1(s) + G^{22}U_2(s) + \dots + G^{2m}(s)U_m(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) = G^{p1}(s)U_1(s) + G^{p2}U_2(s) + \dots + G^{pm}(s)U_m(s) \end{cases} \quad (5.13)$$

Assim, o modelo OBF-TD MIMO de dimensão  $p \times m$  pode ser subdividido em  $p$  modelos OBF-TD MISO (múltiplas entradas e uma saída). Ou seja,

$$\begin{cases} Y_1(s) = \left( e^{-sL^{11}} \sum_{l=1}^{n^{11}} c_l^{11} F_l^{11}(s) \right) U_1(s) + \dots + \left( e^{-sL^{1m}} \sum_{l=1}^{n^{1m}} c_l^{1m} F_l^{1m}(s) \right) U_m(s) \\ Y_2(s) = \left( e^{-sL^{21}} \sum_{l=1}^{n^{21}} c_l^{21} F_l^{21}(s) \right) U_1(s) + \dots + \left( e^{-sL^{2m}} \sum_{l=1}^{n^{2m}} c_l^{2m} F_l^{2m}(s) \right) U_m(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) = \left( e^{-sL^{p1}} \sum_{l=1}^{n^{p1}} c_l^{p1} F_l^{p1}(s) \right) U_1(s) + \dots + \left( e^{-sL^{pm}} \sum_{l=1}^{n^{pm}} c_l^{pm} F_l^{pm}(s) \right) U_m(s) \end{cases} \quad (5.14)$$

em que  $L^{ij}$  é obtido a partir das técnicas de identificação FOPTD e SOPTD e  $F_l^{ij}$  é escolhido de acordo com a informação disponível sobre as constantes de tempo.

Devido à linearidade nos parâmetros, são utilizados regressores lineares para a estimação. Os coeficientes das bases são estimados utilizando o algoritmo dos mínimos quadrados para cada modelo MISO. O vetor de parâmetros é

$$\theta_i = [c_1^{i1} \dots c_{n^{i1}}^{i1} c_1^{i2} \dots c_{n^{i2}}^{i2} \dots c_1^{im} \dots c_{n^{im}}^{im}]^T. \quad (5.15)$$

para  $1 \leq i \leq p$ .

Os regressores são dados por

$$\varphi_i(t) = \Gamma_n^i u'_j(t) \quad (5.16)$$

em que  $u'_j(t) = u_j(t - L^{ij})$  é o sinal de entrada  $j$  atrasado para  $1 \leq j \leq m$  e

$$\Gamma_n^i(s) = [F_1^{i1}(s) \dots F_{n^{i1}}^{i1}(s) F_1^{i2}(s) \dots F_{n^{i2}}^{i2}(s) \dots F_1^{im}(s) \dots F_{n^{im}}^{im}(s)]^T. \quad (5.17)$$

Assim, as estimativas dos coeficientes do modelo são dadas por

$$(\hat{\theta}_N)_i = \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_i(t) \varphi_i^T(t) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_i(t) y_i(t) \right] \quad (5.18)$$

em que  $(\hat{\theta}_N)_i$  é o vetor de estimativas dos coeficientes correspondentes à saída  $i$ ,  $N$  é o número de pontos ou tamanho do experimento e  $y_i(t)$  é a saída do processo  $i$ .

### 5.3 Modelos OBF-TD em espaço de estados

Assim como no caso dos modelos OBF-TD SISO, nesta Seção é apresentado o procedimento utilizado para obter a representação em espaço de estados no caso MIMO. Nesta

Seção foi utilizada a **Estrutura 2** apresentada na Equação (5.8). No entanto, o mesmo procedimento pode ser utilizado para as outras estruturas. Na Figura 5.2 segue um diagrama para o caso de um processo MIMO com duas entradas e duas saídas.

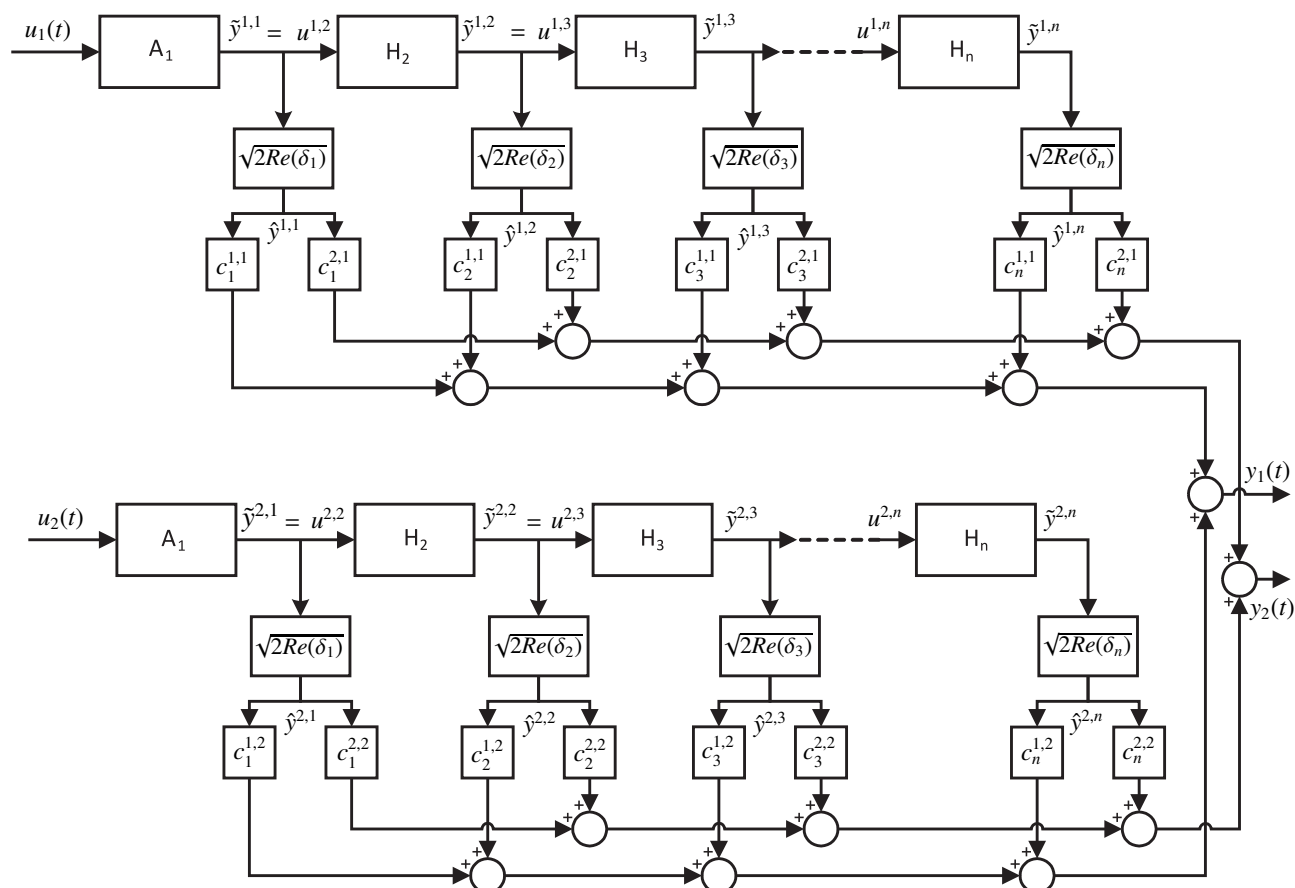


Figura 5.2: Estrutura multivariável do modelo OBF para duas entradas e duas saídas

A partir de um elemento  $l$  qualquer (passa-tudo), a representação em espaço de estados com relação a uma entrada  $j$  é dada por

$$\dot{x}^{j,l}(t) = A_l^j x^{j,l}(t) + B_l^j u^{j,l}(t) \quad (5.19)$$

$$\tilde{y}^{j,l}(t) = C_l^j x^{j,l}(t) + D_l^j u^{j,l}(t) \quad (5.20)$$

em que  $(A_l^j, B_l^j, C_l^j, D_l^j) = (-\xi_l, 1, 2\text{Re}(-\xi_l), 1)$ .

Tomando o elemento  $l$  em todas as entradas, define-se

$$x^l(t) \triangleq [x^{1,l}(t), x^{2,l}(t), \dots, x^{m,l}(t)]^T \quad (5.21)$$

$$\tilde{y}^l(t) \triangleq [\tilde{y}^{1,l}(t), \tilde{y}^{2,l}(t), \dots, \tilde{y}^{m,l}(t)]^T \quad (5.22)$$

$$\tilde{u}^l(t) \triangleq [\tilde{u}^{1,l}(t), \tilde{u}^{2,l}(t), \dots, \tilde{u}^{m,l}(t)]^T \quad (5.23)$$

e, desse modo, é possível escrever

$$\dot{x}^l(t) = A_l x^l(t) + B_l \tilde{u}^l(t) \quad (5.24)$$

$$\tilde{y}^l(t) = C_l x^l(t) + D_l \tilde{u}^l(t) \quad (5.25)$$

em que

$$A_l = \begin{bmatrix} A_l^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_l^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_l^m \end{bmatrix}, \quad B_l = \begin{bmatrix} B_l^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_l^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_l^m \end{bmatrix}$$

$$C_l = \begin{bmatrix} C_l^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_l^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_l^m \end{bmatrix}, \quad D_l = \begin{bmatrix} D_l^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_l^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_l^m \end{bmatrix}.$$

Considerando agora a cascata de  $n$  elementos com realização em espaço de estados  $(A_l, B_l, C_l, D_l)$  em que  $l = 1, 2, \dots, n$  e definindo

$$x(t) \triangleq [x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)]^T \quad (5.26)$$

$$\tilde{y}(t) \triangleq [\tilde{y}^1(t), \tilde{y}^2(t), \dots, \tilde{y}^n(t)]^T \quad (5.27)$$

é possível escrever

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.28)$$

$$\tilde{y}(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (5.29)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 & \dots & 0 \\ B_3 D_2 C_1 & B_3 C_2 & \dots & 0 \\ B_4 D_3 D_2 C_1 & B_4 D_3 C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n D_{n-1} \dots D_2 C_1 & B_n D_{n-1} \dots D_3 C_2 & \dots & A_n \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \\ B_3 D_2 D_1 \\ \vdots \\ B_n D_{n-1} \dots D_2 D_1 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$C = \begin{bmatrix} D_n \dots D_2 C_1 \\ D_n \dots D_3 C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}^T \quad (5.32)$$

$$D = D_n \dots D_1. \quad (5.33)$$

Em seguida, é necessário levar em consideração os coeficientes da base  $c_l$  e o ganho  $\sqrt{2\text{Re}(\xi_l)}$ . No caso MIMO, a substituição não é direta, dado que existem diversas saídas ( $p$  saídas). Assim, considere que para uma dada entrada  $j$

$$\hat{y}^{j,l}(t) = \sqrt{2\text{Re}(\xi_l)} \tilde{y}^{j,l}(t) \quad (5.34)$$

e levando em consideração todas as entradas

$$\hat{y}^l(t) = \sqrt{2\text{Re}(\xi_l)} \tilde{y}^l(t). \quad (5.35)$$

Desse modo, a relação entre as saídas após a cascata de  $n$  elementos é dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{y}^{1,1}(t) \\ \hat{y}^{2,1}(t) \\ \vdots \\ \hat{y}^{m,1}(t) \\ \hat{y}^{1,2}(t) \\ \vdots \\ \hat{y}^{m,2}(t) \\ \vdots \\ \hat{y}^{1,n}(t) \\ \vdots \\ \hat{y}^{m,n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\text{Re}(\xi_1)} \tilde{y}^{1,1}(t) \\ \sqrt{2\text{Re}(\xi_1)} \tilde{y}^{2,1}(t) \\ \vdots \\ \sqrt{2\text{Re}(\xi_1)} \tilde{y}^{m,1}(t) \\ \sqrt{2\text{Re}(\xi_2)} \tilde{y}^{1,2}(t) \\ \vdots \\ \sqrt{2\text{Re}(\xi_2)} \tilde{y}^{m,2}(t) \\ \vdots \\ \sqrt{2\text{Re}(\xi_n)} \tilde{y}^{1,n}(t) \\ \vdots \\ \sqrt{2\text{Re}(\xi_n)} \tilde{y}^{m,n}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

A matriz do lado direito da Equação (5.36) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2\text{Re}(\xi_1)} & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{2\text{Re}(\xi_1)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \sqrt{2\text{Re}(\xi_n)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \sqrt{2\text{Re}(\xi_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}^{1,1}(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{m,1}(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{1,n}(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{m,n}(t) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

ou ainda

$$\left( \begin{bmatrix} \sqrt{2\operatorname{Re}(\xi_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{2\operatorname{Re}(\xi_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{2\operatorname{Re}(\xi_n)} \end{bmatrix} \otimes I_m \right) \begin{bmatrix} \tilde{y}^{1,1}(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{m,1}(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{1,n}(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{m,n}(t) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

em que  $\otimes$  é o produto de Kronecker (Apêndice A),  $I_m$  é a matriz identidade de ordem  $m$ .

Assim, a Equação (5.36) se torna

$$\hat{y}(t) = (\Lambda \otimes I_m) \tilde{y}(t). \quad (5.39)$$

Do ponto de vista dos coeficientes, é possível escrever a saída  $i$  como

$$y_i(t) = \sum_{l=1}^n [c_l^{i,1}, c_l^{i,2}, \dots, c_l^{i,m}] \hat{y}^l(t). \quad (5.40)$$

Fazendo

$$c_l^i = [c_l^{i,1}, c_l^{i,2}, \dots, c_l^{i,m}] \quad (5.41)$$

tem-se

$$y_i(t) = [c_1^i, c_2^i, \dots, c_n^i] \hat{y}(t). \quad (5.42)$$

Escrevendo na forma matricial para todas as saídas

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^p & c_2^p & \dots & c_n^p \end{bmatrix} \hat{y}(t) = \Theta^T \hat{y}(t). \quad (5.43)$$

Assim, a realização em espaço de estados do modelo OBF é dada por  $(A, B, \Theta^T(\Lambda \otimes I_m)C, D)$ .

Devido à existência dos atrasos e como o modelo OBF-TD é estimado a partir de  $p$  modelos MISO, é possível subdividir o modelo em espaço de estados de modo a simplificar a forma com que os atrasos são avaliados. Assim, fazendo  $\Theta(\Lambda \otimes I_m)C = \bar{C}$  tem-se

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - L) \quad (5.44)$$

$$y_i(t) = \bar{C}_i x(t) + Du(t - L) \quad (5.45)$$

em que  $\bar{C}_i$  é a coluna  $i$  de  $\bar{C}$ ,  $1 \leq i \leq p$  e

$$u(t - L) = [u_1(t - L^{i_1}) \ u_2(t - L^{i_2}) \ \dots \ u_m(t - L^{i_m})]^T \quad (5.46)$$

## 5.4 Identificação de modelos FOPTD e SOPTD utilizando modelos OBF-TD

Modelos MIMO de ordem reduzida do tipo FOPTD e SOPTD são importantes tanto para o projeto de controladores PID como para o projeto de desacopladores. A mesma metodologia desenvolvida para o caso SISO na Seção 4.5 é utilizada para o caso MIMO.

No entanto, no caso MIMO, a matriz de funções de transferência não é formada necessariamente por apenas um tipo de modelo de ordem reduzida, ou seja, alguns elementos podem ser bem representados por modelos FOPTD enquanto outros por modelos SOPTD. Diversas combinações entre os elementos que formam a matriz de funções de transferência são possíveis e, diferente do caso SISO, mais um parâmetro deve ser escolhido: a estrutura do modelo MIMO OBF-TD (Subseção 5.2.2).

As duas abordagens tomadas são:

- Identificar modelos de ordem reduzida (FOPTD e SOPTD) diretamente de modelos OBF-TD de ordem reduzida;
- Identificar modelos de ordem reduzida (FOPTD e SOPTD) a partir de modelos OBF-TD de ordem superior utilizando um procedimento de redução de modelos.

### 5.4.1 Modelos OBF-TD de ordem reduzida

Nessa primeira abordagem cada elemento da matriz de funções de transferência é assumido possuir ordem  $n = 1$  ou  $n = 2$ . O procedimento de estimação é direto, como descrito na Subseção 5.2.3.

Dependendo da estrutura escolhida, o modelo MIMO OBF-TD será parametrizado de acordo com a informação em comum. Porém, em todos os casos o modelo MIMO é subdividido em  $p$  modelos MISO. O Algoritmo 24 resume os passos.

**Algoritmo 24** *Estimação de modelos OBF-TD MIMO de ordem reduzida*

1. *Realize o experimento descrito no Capítulo 3 Seção 3.2 utilizando a metodologia independente, cada entrada é excitada por vez.*
2. *Obtenha  $a(s)$  constante(s) de tempo e atrasos utilizando as técnicas para modelos FOPTD ou SOPTD apresentadas no Capítulo 3.*
3. *Realize o projeto e execute o experimento de identificação utilizando sinais PRBS utilizando a metodologia descentralizada, todas as entradas são excitadas ao mesmo tempo.*

4. Escolha a estrutura do modelo multivariável, Subseção 5.2.2.
5. Escolha a base apropriada. Para base de Laguerre escolha o polo de Laguerre igual ao polo obtido no modelo FOPTD e para base de Kautz escolha os polos de Kautz iguais aos polos obtidos no modelo SOPTD.
6. Escolha a ordem  $n$  do modelo OBF-TD,  $n = 1$  ou  $n = 2$ . A forma de escolha da ordem depende da estrutura utilizada.
7. Obtenha a estimativa do modelo OBF-TD MIMO, Subseção 5.2.3.

### Validação do modelo

Independente da estrutura escolhida para o modelo multivariável, a validação é realizada individualmente para cada elemento da matriz de funções de transferência a partir da análise dos coeficientes estimados. Assim, o procedimento de validação de um modelo MIMO  $p \times m$  é realizado  $pm$  vezes. Desse modo, certos elementos podem ser bem representados por modelos de ordem reduzida enquanto outros não.

Como o procedimento de validação é realizado por elemento, as Proposições 17 e 18 apresentadas no Capítulo 4 para modelos SISO podem ser utilizadas sem alterações.

Vale observar que a validação do modelo a partir da análise dos coeficientes é possível para sistemas com atraso, pois no caso dos modelos OBF-TD o atraso é tratado de forma separada. Caso contrário isso não seria possível.

O procedimento para validação do modelo MIMO baseado nos valores dos coeficientes é realizado da seguinte forma:

- A Proposição 17 para modelos FOPTD e a Proposição 18 para modelos SOPTD são aplicadas em cada elemento da matriz de funções de transferência;
- Em seguida, classificam-se os elementos que são bem representados e os que não são bem representados pela ordem reduzida escolhida;
- Por fim, a ordem e/ou a base dos elementos que não são bem representados são modificadas e o modelo é estimado novamente.

Nas situações em que a validação do modelo de ordem reduzida indica que existem elementos na matriz de funções de transferência que não são bem representados pela ordem e/ou a base escolhida, é necessário repetir o passo de estimação de acordo com a estrutura escolhida. Nesse caso, essa nova estimação é realizada utilizando um modelo OBF-TD de ordem superior.



### 5.4.2 Modelos OBF-TD de ordem superior

Os modelos OBF-TD de ordem superior são necessários quando modelos OBF-TD de ordem reduzida não representam bem o processo. Isto acontece quando as dinâmicas de ordem superior não podem ser desprezadas.

No entanto, como o objetivo é a identificação de modelos FOPTD e SOPTD a partir de modelos OBF-TD, é necessário um procedimento de redução de modelos.

#### Redução de modelos OBF-TD

Assim como no caso dos modelos SISO, a técnica de redução de modelos utilizada é a da residualização balanceada. A residualização balanceada é utilizada pois deseja-se um modelo de ordem reduzida relevante nas regiões de baixas e médias frequências.

Primeiro é necessário obter a realização em espaço de estados  $(A, B, C, D)$  do modelo OBF-TD com matriz de funções de transferência  $G(s)$ . Dependendo da estrutura escolhida, a forma de se obter a realização em espaço de estados é diferente. Na Seção 5.3 foi utilizada a Estrutura 2 e a realização em espaço de estados é obtida para toda a matriz de funções de transferência  $G(s)$ .

Em seguida, é obtida a realização balanceada  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$  a partir de uma transformação de similaridade, Teorema 6 e Equação (2.16).

As relações entre as matrizes da realização em espaço de estados balanceada  $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$  do modelo OBF-TD de ordem superior e as matrizes da realização em espaço de estados do modelo de ordem reduzida  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  são dadas no Teorema 19 do Capítulo 4.

Vale observar que neste trabalho é assumido que independente da estrutura escolhida **o procedimento de redução de modelos é realizado por elemento**, ou seja, esse procedimento é repetido  $pm$  vezes. Desse modo, esse procedimento é semelhante ao já apresentado para modelos SISO.

#### Redução de Modelos OBF-TD com compensação do resíduo

Na residualização balanceada a ordem do modelo de ordem reduzida é escolhida de acordo com os valores singulares de Hankel  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ . No entanto, como neste trabalho a ordem reduzida é fixa ( $n_r = 1$  ou  $n_r = 2$ ), as dinâmicas desprezadas (resíduo) podem conter informações importantes sobre o processo.

A compensação do resíduo é necessária quando alguns dos valores singulares de Hankel associados aos estados descartados não são pequenos quando comparados com os valores singulares de Hankel associados aos estados considerados no modelo de ordem reduzida.

Nessa situação, alguns dos estados descartados contribuem de forma significativa na relação entrada/saída do processo.

Mais uma vez, o modelo do resíduo é dado por

$$G_{res}(s) = \beta e^{-sL'} \quad (5.47)$$

em que  $\beta$  é o ganho e  $L'$  é o atraso. Deseja-se determinar o atraso  $L'$  que resulta na compensação linear da fase desprezada. Para isso é utilizado o Teorema 20 do Capítulo 4.

O procedimento para estimação do atraso  $L'$  e determinação do novo atraso  $\bar{L}$  é **realizado por elemento da matriz de funções de transferência**, independente da estrutura multivariável utilizada. A determinação dos novos polos ou constantes de tempo também é realizada por elemento, independente da estrutura escolhida. Esse procedimento simplifica a compensação e o cálculo do atraso  $L'$ .

Todo o procedimento descrito anteriormente é resumido no Algoritmo seguinte.

**Algoritmo 25** *Estimação de modelos OBF-TD MIMO de ordem reduzida com compensação de resíduo.*

1. *Realize o experimento descrito no Capítulo 3 Seção 3.2 utilizando a metodologia independente, cada entrada é excitada por vez.*
2. *Obtenha  $a(s)$  constante(s) de tempo e atrasos utilizando as técnicas para modelos FOPTD ou SOPTD apresentadas no Capítulo 3.*
3. *Realize o projeto e execute o experimento de identificação utilizando sinais PRBS utilizando a metodologia descentralizada, todas as entradas são excitadas ao mesmo tempo.*
4. *Escolha a estrutura do modelo multivariável, Subseção 5.2.2.*
5. *Escolha a base apropriada. Para base de Laguerre escolha o polo de Laguerre igual ao polo obtido no modelo FOPTD e para base de Kautz escolha os polos de Kautz iguais aos polos obtidos no modelo SOPTD.*
6. *Obtenha a estimativa do modelo OBF-TD MIMO de ordem superior, Subseção 5.2.3.*
7. *Obtenha a realização em espaço de estados, Seção 5.3. O agrupamento dos elementos na obtenção da representação em espaço de estados depende da estrutura escolhida.*
8. *Obtenha a realização balanceada usando o Teorema 6 e a Equação (2.16).*

9. Escolha a ordem do modelo reduzido  $n_r$  e obtenha o modelo reduzido usando o Teorema 19 do Capítulo 4.
10. Independente da estrutura, dado o modelo do resíduo  $G_{res}(s)$ , calcule  $L^{(ij)}$  utilizando o Teorema 20 para cada elemento da matriz de funções de transferência.
11. Independente da estrutura, atualize o atraso  $\bar{L}^{ij} = L^{ij} + L^{(ij)}$  e a constante  $\bar{T}^{ij} = T^{ij} + L^{(ij)}$  de tempo por elemento da matriz de funções de transferência.

### Redução iterativa de modelos OBF-TD com compensação de resíduo

O procedimento de redução de modelos também pode ser realizado de forma iterativa. As iterações são importantes dado que o erro entre os polos e os atrasos estimados podem não ser pequenos. Quanto pior for a informação sobre os polos e o atraso do processo, pior será o modelo OBF-TD obtido e mais coeficientes serão necessários.

Desse modo, a informação contida no modelo de ordem reduzida após a compensação do resíduo pode ser utilizada para uma nova estimação de um modelo OBF-TD de ordem superior. Esse novo modelo é novamente reduzido e um novo modelo de ordem reduzida é obtido.

O procedimento iterativo pode ser repetido até que um determinado critério de qualidade do modelo seja atingido. Assim, é adicionado mais um passo no Algoritmo 25 e segue abaixo.

**Algoritmo 26** *Estimação de modelos OBF-TD MIMO de ordem reduzida com compensação de resíduo.*

1. Realize o experimento descrito no Capítulo 3 Seção 3.2 utilizando a metodologia independente, cada entrada é excitada por vez.
2. Obtenha  $a(s)$  constante(s) de tempo e atrasos utilizando as técnicas para modelos FOPTD ou SOPTD apresentadas no Capítulo 3.
3. Realize o projeto e execute o experimento de identificação utilizando sinais PRBS utilizando a metodologia descentralizada, todas as entradas são excitadas ao mesmo tempo.
4. Escolha a estrutura do modelo multivariável, Subseção 5.2.2.
5. Escolha a base apropriada. Para base de Laguerre escolha o polo de Laguerre igual ao polo obtido no modelo FOPTD e para base de Kautz escolha os polos de Kautz iguais aos polos obtidos no modelo SOPTD.

6. Obtenha a estimativa do modelo OBF-TD MIMO de ordem superior, Subseção 5.2.3.
7. Obtenha a realização em espaço de estados, Seção 5.3. O agrupamento dos elementos na obtenção da representação em espaço de estados depende da estrutura escolhida.
8. Obtenha a realização balanceada usando o Teorema 6 e Equação (2.16).
9. Escolha a ordem do modelo reduzido  $n_r$  e obtenha o modelo reduzido usando o Teorema 19 do Capítulo 4.
10. Independente da estrutura, dado o modelo do resíduo  $G_{res}(s)$ , calcule  $L^{ij'}$  utilizando o Teorema 20 para cada elemento da matriz de funções de transferência.
11. Independente da estrutura, atualize o atraso  $\bar{L}^{ij} = L^{ij} + L^{ij'}$  e a constante  $\bar{T}^{ij} = T^{ij} + L^{ij'}$  de tempo por elemento da matriz de funções de transferência.
12. Valide o modelo de ordem reduzida  $G_{n_r}(s)$ . Se a precisão não for suficiente, volte para o Passo 5 utilizando a informação sobre o polo e o atraso do modelo  $G_{n_r}(s)$ .

## 5.5 Exemplo de simulação

As funções de custo são as mesmas utilizadas nos capítulos anteriores. No domínio do tempo é

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(kT_s) - \hat{y}(kT_s)]^2 \quad (5.48)$$

em que  $y(kT_s)$  e  $\hat{y}(kT_s)$  é a saída do processo real e estimada, respectivamente.

No domínio da frequência é dada por

$$E = \frac{1}{N_\omega} \sum_{k=0}^{N_\omega-1} |G(j\omega_k) - \hat{G}(j\omega_k)| \quad (5.49)$$

em que  $N_\omega$  é o número de pontos de frequência,  $G(j\omega_k)$  é a resposta em frequência do processo e  $\hat{G}(j\omega_k)$  é a resposta em frequência do modelo identificado. A região de frequência utilizada em todos os exemplos é de  $\omega = 0$  até a frequência em que a fase do processo é maior que  $-180^\circ$ .

O processo utilizado como exemplo possui modelo em funções de transferência dado por

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,8}{(2s+1)(5s+1)} e^{-2,5s} & \frac{1}{(2s+1)^2} e^{-s} \\ \frac{1,5}{4s+1} e^{-3s} & \frac{1}{(s+1)^4} e^{-s} \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Este exemplo é dividido em duas partes: na parte I são obtidos os modelos FOPTD e SOPTD; na parte II são obtidos os modelos OBF-TD.

### 5.5.1 PARTE I - Estimação de modelos FOPTD e SOPTD

O experimento utilizando a excitação apresentada na Figura 3.1 é utilizado também para o caso MIMO. A excitação é composta por uma parte de alta frequência ( $\omega_H$ ) gerada pelo experimento do relé padrão aplicado por  $N_1$  ciclos com período  $T_u$  e uma parte de baixa frequência ( $\omega_L$ ) gerada por um pulso de largura  $N_2 T_u/2$ . O período  $T_u$  é obtido durante a realização do experimento.

A metodologia para a realização do experimento escolhida é a independente, ou seja, uma entrada é excitada por vez enquanto as outras permanecem sem excitação. Assim, é possível controlar o experimento de forma simples e avaliar a contribuição de uma determinada entrada em cada uma das saídas. Para um processo MIMO com  $n$  entradas e  $n$  saídas são necessários pelo menos  $n$  experimentos.

Segue na Figura 5.3 a resposta do processo ao experimento proposto para o caso com ruído branco de média zero e variância 0,001. Nesta Figura também é possível observar o acoplamento existente entre as entradas e as saídas. A resposta da saída  $y_2(t)$  com relação à entrada  $u_1(t)$  é observada de 0 segundos a aproximadamente 100 segundos na Figura 5.3(b) enquanto a resposta da saída  $y_1(t)$  com relação à entrada  $u_2(t)$  é observada de aproximadamente 110 segundos a 200 segundos na Figura 5.3(a).

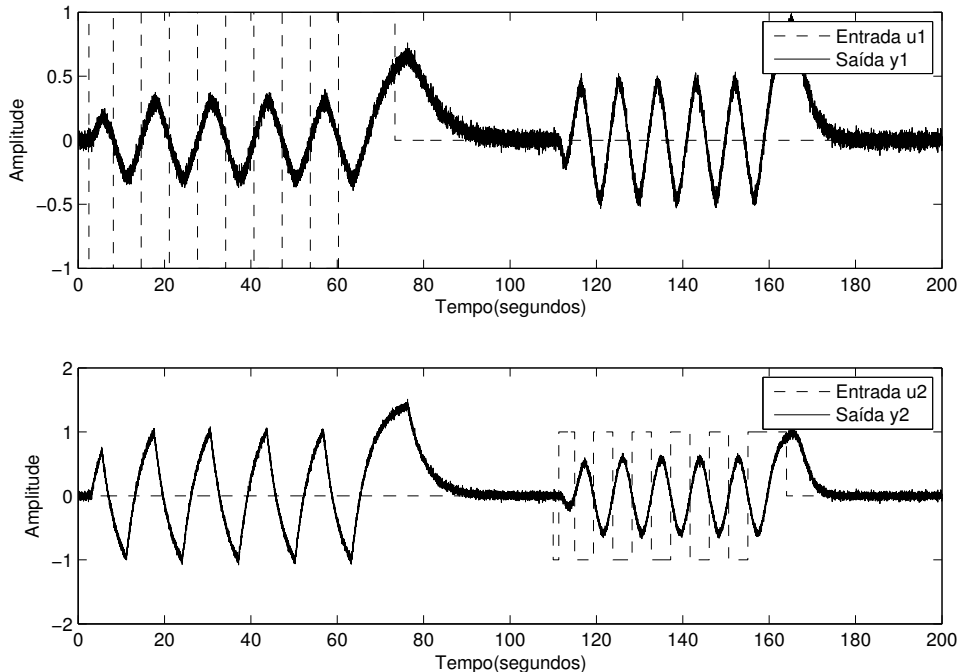


Figura 5.3: Exemplo - Excitação proposta

Como as entradas são excitadas uma por vez, é possível utilizar os pares entradas e saídas para identificar cada uma das funções de transferência do processo MIMO. Assim as mesmas técnicas propostas no Capítulo 3 são utilizadas e o processo MIMO é subdividido em diversos processos SISO.

O modelo obtido utilizando a técnica de identificação para modelos FOPTD é dado por

$$G_{FO}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,79}{6,31s+1}e^{-3,99s} & \frac{0,99}{4,24s+1}e^{-2,02s} \\ \frac{1,5}{4,01s+1}e^{-2,99s} & \frac{0,99}{2,4s+1}e^{-3,01s} \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Já o modelo obtido utilizando a técnica de identificação para modelos SOPTD é dado por

$$G_{SO}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,79}{9,99s^2+7s+1}e^{-2,5s} & \frac{0,99}{4,01s^2+3,99s+1}e^{-1s} \\ \frac{1,5}{0,3s^2+4,01s+1}e^{-2,99s} & \frac{0,99}{2,89s^2+3,11s+1}e^{-1,88s} \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Segue na Figura 5.4 os diagramas de Nyquist dos modelos identificados  $G_{FO}(s)$  e  $G_{SO}(s)$  e do processo  $G(s)$ . E na Figura 5.5 seguem as respostas ao degrau. O modelo  $G_{SO}(s)$  representa bem melhor o processo real em todos os elementos da matriz de funções de transferência. Apenas na função de transferência  $G^{21}(s)$  é que os modelos FOPTD e SOPTD resultam na mesma qualidade pois o elemento é de primeira ordem com atraso.

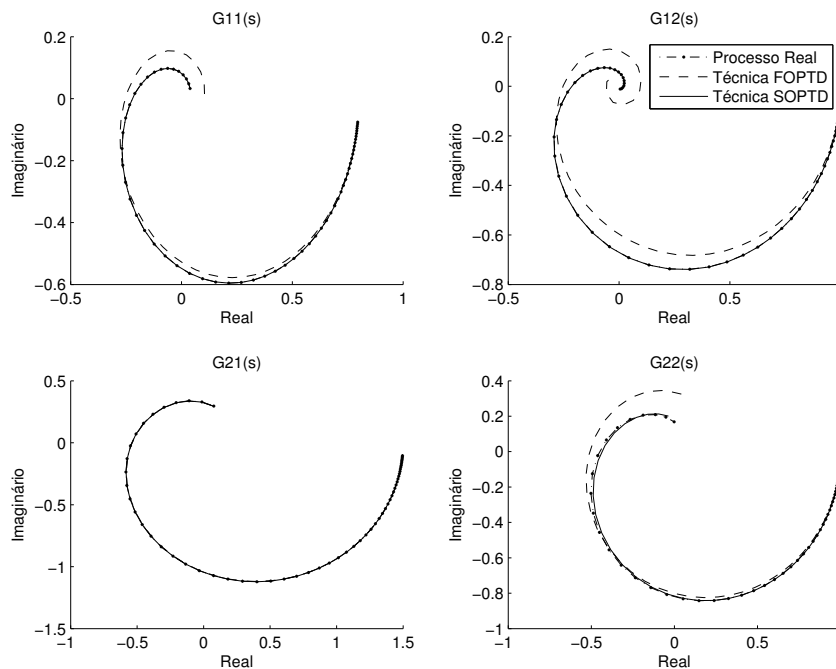


Figura 5.4: Exemplo - Diagramas de Nyquist

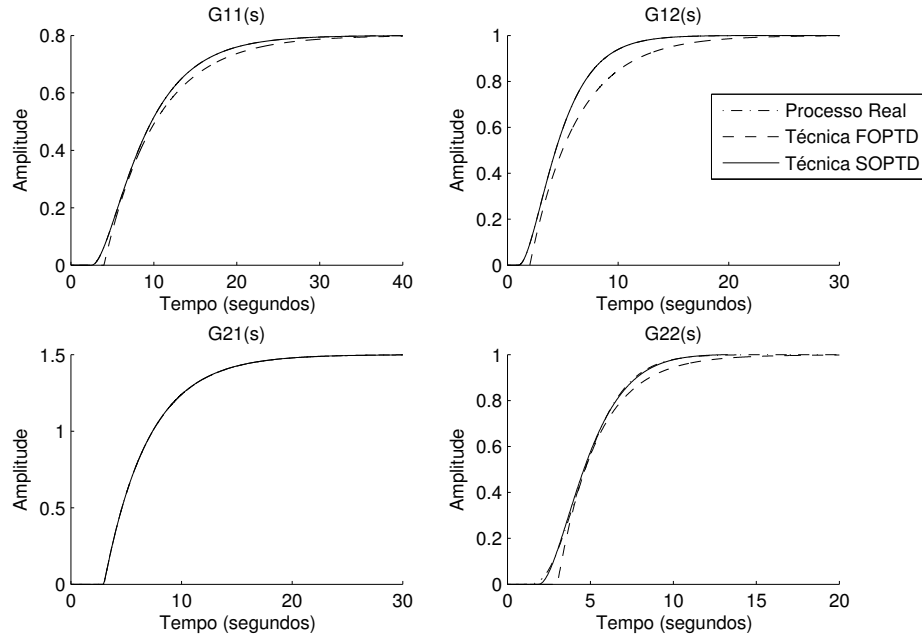


Figura 5.5: Exemplo - Respostas ao degrau

Os erros nos domínios do tempo e da frequência foram calculados para cada um dos elementos identificados. Seus valores seguem na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Exemplo -  $\varepsilon$  e  $E$

	$G_{11}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{22}(s)$
$G_{FO}(s)$	$\varepsilon = 3,7 \times 10^{-4}$ $E = 3,0 \times 10^{-2}$	$\varepsilon = 2,4 \times 10^{-3}$ $E = 7,6 \times 10^{-2}$	$\varepsilon = 6,3 \times 10^{-7}$ $E = 1,5 \times 10^{-3}$	$\varepsilon = 6,4 \times 10^{-4}$ $E = 4,0 \times 10^{-2}$
$G_{SO}(s)$	$\varepsilon = 7,0 \times 10^{-9}$ $E = 1,7 \times 10^{-4}$	$\varepsilon = 2,8 \times 10^{-8}$ $E = 3,3 \times 10^{-4}$	$\varepsilon = 5,7 \times 10^{-7}$ $E = 6,7 \times 10^{-4}$	$\varepsilon = 3,6 \times 10^{-5}$ $E = 7,3 \times 10^{-3}$

### 5.5.2 PARTE II - Estimação de modelos OBF-TD

As informações sobre as constantes de tempo e os atrasos necessárias para a estimação dos modelos OBF-TD foram obtidas na PARTE I desse Exemplo.

A metodologia experimental utilizada é a metodologia descentralizada e os sinais utilizados como excitação são do tipo PRBS. Os parâmetros de projeto dos sinais PRBS descritos em (GAIKWAD; RIVERA, 1996) são  $\alpha_s = 2$ ,  $\tau_{dom}^H = 6,31$  segundos,  $\tau_{dom}^L = 2,4$  segundos e  $\beta_s = 5$ . Os valores escolhidos foram  $N_s = 1000$  e  $T_{clk} = 2$  segundos e o período

de amostragem foi de 0,1 segundos. Segue na Figura 5.6 parte da resposta do processo ao PRBS.

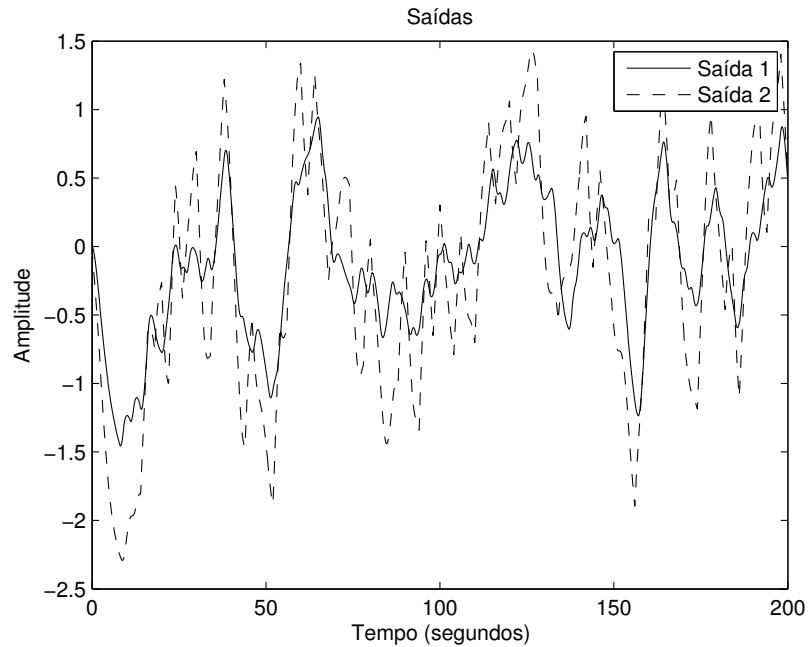


Figura 5.6: Exemplo - Resposta do processo ao PRBS

A partir dos dados obtidos com a realização dos experimentos utilizando sinais PRBS e das informações sobre as constantes de tempo e dos atrasos, os modelos OBF-TD utilizando bases de Laguerre e Kautz são estimados. Seguem nas Tabelas 5.2 e 5.3 os valores dos coeficientes para cada modelo estimado.

Tabela 5.2: Exemplo Modelo OBF-TD com bases de Laguerre

	$G_{11}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{22}(s)$
$c_i$ 's	$c_1 = 0,127$	$c_1 = 0,367$	$c_1 = 0,267$	$c_1 = 0,120$

Tabela 5.3: Exemplo - Modelo OBF-TD com bases de Kautz

	$G_{11}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{22}(s)$
$c_i$ 's	$c_1 = -0,070$	$c_1 = 0,093$	$c_1 = -0,114$	$c_1 = -0,146$
	$c_2 = -0,177$	$c_2 = 0,175$	$c_2 = 0,327$	$c_2 = 0,268$

Os erros nos domínios do tempo e da frequência foram calculados para cada um dos modelos OBF-TD identificados utilizando as duas bases escolhidas. Os valores seguem na Tabela 5.4. Os modelo OBF-TDL é obtido utilizando bases de Laguerre e o modelo OBF-TDK é obtido utilizando bases de Kautz.



Tabela 5.4: Exemplo -  $\varepsilon$  e  $E$ 

	$G_{11}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{22}(s)$
OBF-TDL	$\varepsilon = 1,3 \times 10^{-4}$ $E = 8,9 \times 10^{-3}$	$\varepsilon = 4,3 \times 10^{-4}$ $E = 1,8 \times 10^{-2}$	$\varepsilon = 6,1 \times 10^{-7}$ $E = 1,0 \times 10^{-3}$	$\varepsilon = 3,2 \times 10^{-4}$ $E = 2,6 \times 10^{-2}$
OBF-TDK	$\varepsilon = 6,6 \times 10^{-9}$ $E = 1,4 \times 10^{-4}$	$\varepsilon = 2,5 \times 10^{-8}$ $E = 3,0 \times 10^{-4}$	$\varepsilon = 5,7 \times 10^{-7}$ $E = 6,6 \times 10^{-4}$	$\varepsilon = 3,1 \times 10^{-5}$ $E = 5,2 \times 10^{-3}$

Comparando a Tabela 5.1 dos erros nos domínios do tempo e da frequência para os modelos FOPTD e SOPTD e a Tabela 5.4 dos erros nos domínios do tempo e da frequência para os modelos OBF-TD de primeira ordem utilizando bases de Laguerre e de segunda ordem utilizando bases de Kautz observa-se que houve um refinamento tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência em todos os elementos que formam a matriz de funções de transferência. No entanto, os erros seriam ainda menores, caso fossem escolhidas ordens diferentes para cada elemento individual.

## 5.6 Resultados experimentais

A plataforma experimental utilizada é a mesma já apresentada nos Capítulos anteriores. A plataforma encontra-se em uma sala com temperatura ambiente controlada por um aparelho de ar condicionado em 22°C. O ponto de operação em regime permanente é para as duas entradas de 60% que corresponde as saídas em torno de 39,2°C.

De modo a aplicar as técnicas de identificação para processos MIMO apresentadas neste Capítulo, foram excitadas as duas entradas  $u_1$  e  $u_2$  e observadas as duas saídas  $y_1$  e  $y_2$ .

Primeiro foi realizado o experimento proposto utilizando a excitação apresentada no Capítulo 3 e que segue na Figura 3.1. A metodologia para a realização do experimento é a independente, isto é, uma entrada é excitada por vez enquanto as outras não são excitadas.

Segue na Figura 5.7 a resposta do processo ao experimento proposto quando a entrada  $u_1$  é excitada e a entrada  $u_2$  é monitorada e na Figura 5.8 segue a resposta do processo quando a entrada  $u_2$  é excitada e a entrada  $u_1$  é monitorada. Os sinais foram deslocados para o zero de modo a mostrar as curvas em uma mesma figura. O deslocamento foi realizado a partir da subtração do valor em regime permanente antes da realização do experimento.

Em seguida, foram utilizadas as técnicas de identificação para modelos FOPTD e

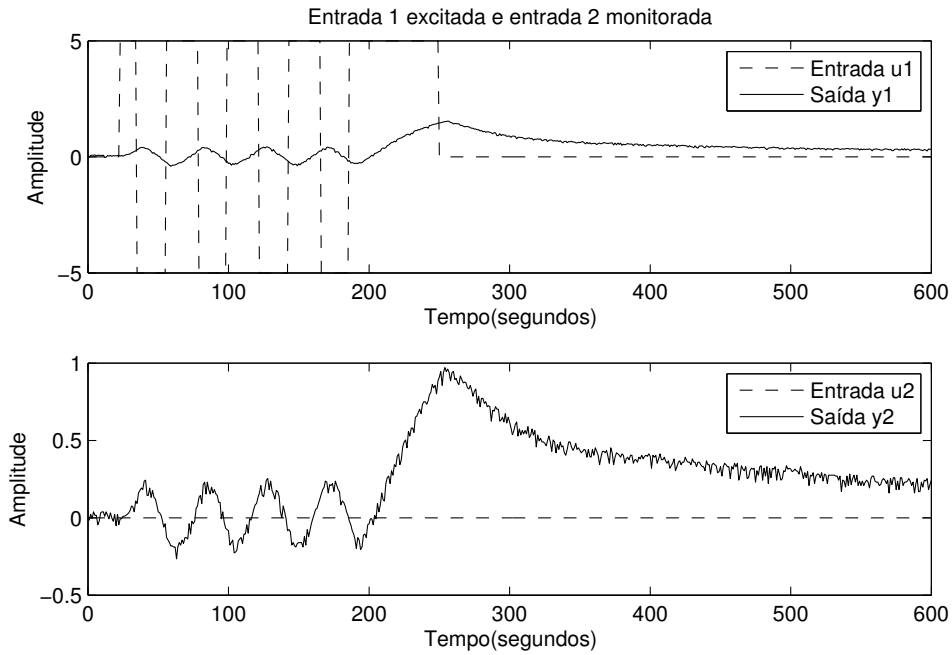


Figura 5.7: Experimentos - Entrada  $u_1$  excitada e entrada  $u_2$  monitorada

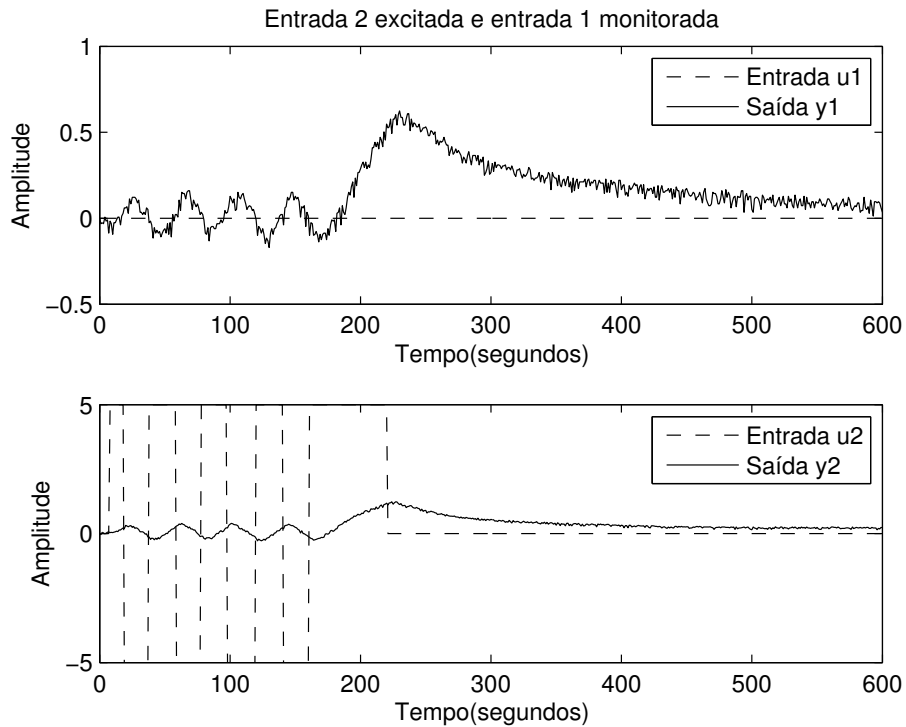


Figura 5.8: Experimentos - Entrada  $u_2$  excitada e entrada  $u_1$  monitorada

SOPTD. Os modelos obtidos seguem na Tabela 5.5 e as respostas dos modelos identificados aos experimentos realizados seguem na Figura 5.9.

Tabela 5.5: Resultados experimentais - Modelos FOPTD e SOPTD

Técnica Proposta FOPTD	$G_{fo}(s) =$	$\left[ \begin{array}{cc} \frac{0,65}{100,4s+1}e^{-5,73s} & \frac{0,35}{117,1s+1}e^{-10,3s} \\ \frac{0,51}{119s+1}e^{-8,7s} & \frac{0,32}{102,6s+1}e^{-8,4s} \end{array} \right]$
Técnica Proposta SOPTD	$G_{so}(s) =$	$\left[ \begin{array}{cc} \frac{0,65}{464,3s^2+90,81s+1}e^{-4,12s} & \frac{0,35}{653,3s^2+96,59s+1}e^{-6,82s} \\ \frac{0,51}{676,2s^2+99s+1}e^{-7,3s} & \frac{0,32}{477,9s^2+91,5s+1}e^{-6,49s} \end{array} \right]$

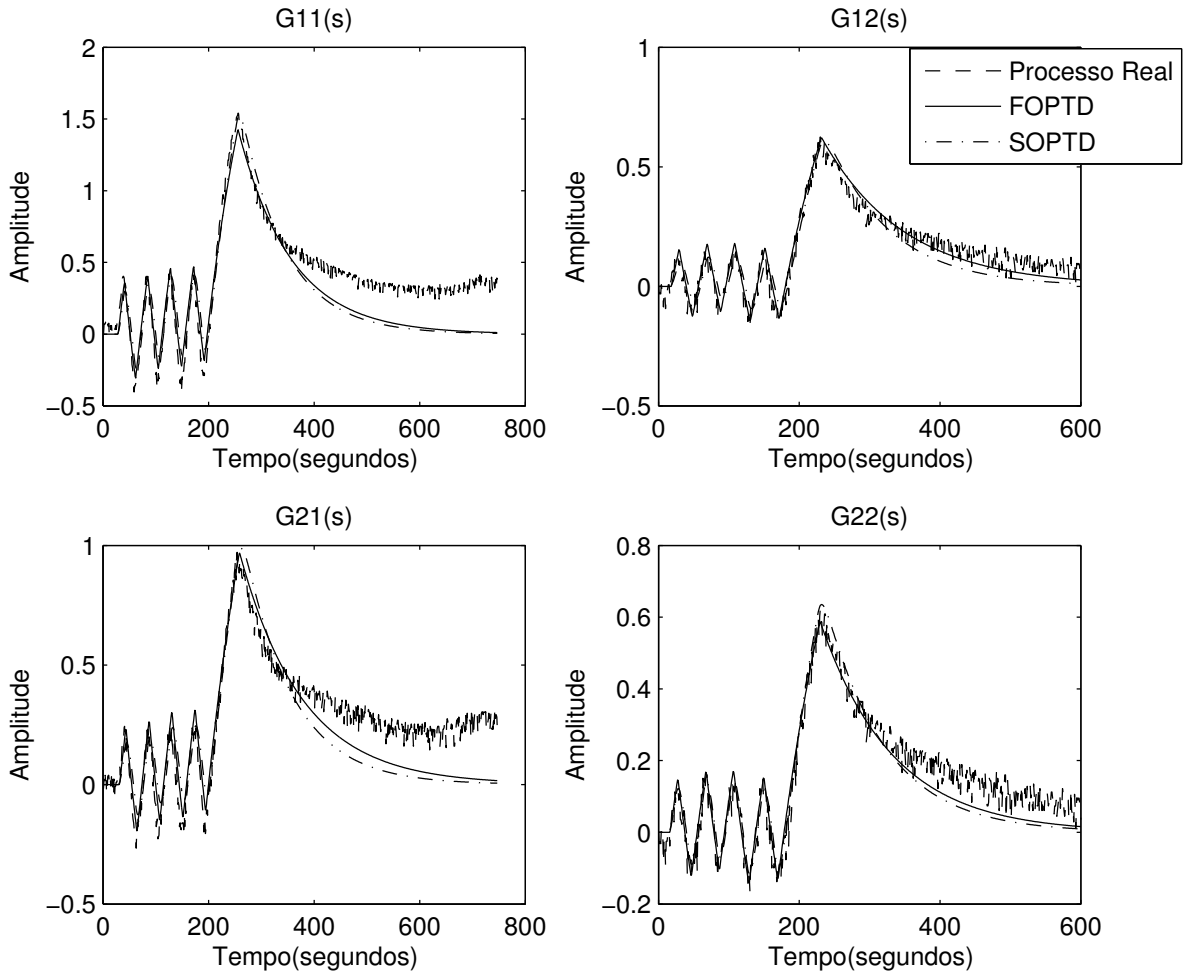


Figura 5.9: Resultados experimentais - Respostas dos modelos identificados FOPTD e SOPTD

Da Figura 5.9 conclui-se que os modelos FOPTD e SOPTD obtidos representam bem o processo. A resposta observada a partir do instante de tempo de aproximadamente 400

segundos nos gráficos referentes aos modelos  $G_{11}(s)$  e  $G_{21}(s)$  indica que os modelos não conseguem descrever o comportamento observado. Isso pode ser explicado, pois o ponto de operação foi modificado devido às perturbações de baixa frequência.

O próximo passo é estimar os modelos OBF-TD para cada um dos elementos da matriz de funções de transferência. A partir do modelo FOPTD  $G_{fo}(s)$  e do modelo SOPTD  $G_{so}(s)$  o experimento de identificação utilizando sinais PRBS é projetado. Os parâmetros de projeto são  $\alpha_s = 2$ ,  $\tau_{dom}^H = 119$  segundos,  $\tau_{dom}^L = 100,4$  segundos e  $\beta_s = 5$ . Os valores escolhidos foram  $N_s = 1000$  e  $T_{clk} = 8$  segundos e o período de amostragem é de 1 segundo.

Segue na Figura 5.10 parte dos sinais PRBS utilizados no experimento. Esse experimento foi realizado utilizando a metodologia descentralizada, ou seja, as duas entradas são excitadas ao mesmo tempo. Já na Figura 5.11 seguem as respostas do processo em cada saída com relação aos experimentos realizados. Os sinais foram deslocados para o zero de modo a mostrar as curvas em uma mesma figura.

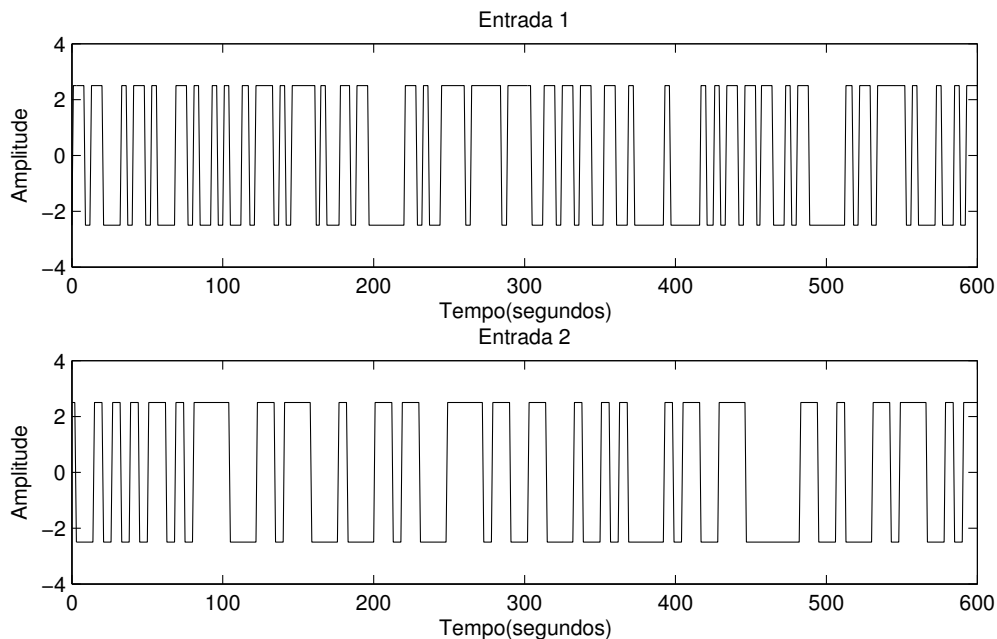


Figura 5.10: Experimentos - Excitações utilizando sinais PRBS

A partir dos dados obtidos utilizando sinais PRBS e das informações sobre as constantes de tempo e dos atrasos dados na Tabela 5.5, os modelos OBF-TD utilizando bases de Laguerre e Kautz são estimados. A estrutura escolhida foi a **Estrutura 2** e as constantes de tempo utilizadas são as mais lentas. Outras estruturas poderiam ter sido utilizadas já que estão disponíveis informações sobre todos os elementos da matriz de funções de

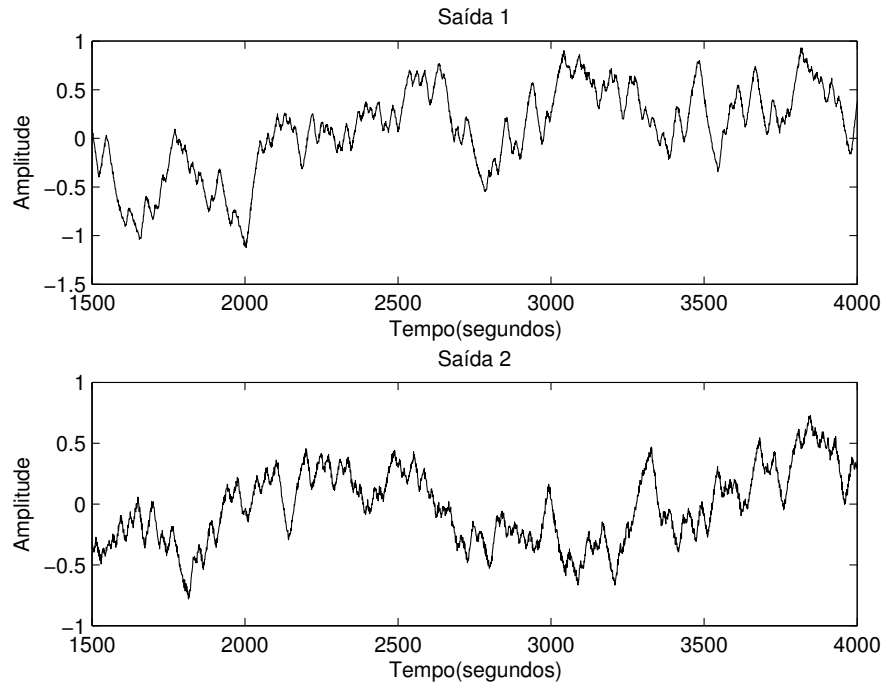


Figura 5.11: Experimentos - Saídas

transferência.

Seguem nas Tabelas 5.6 e 5.7 os valores dos coeficientes para cada modelo estimado. Tanto para os modelos utilizando bases de Laguerre quanto para os utilizando bases de Kautz a ordem escolhida foi  $n = 6$ .

Tabela 5.6: Resultados experimentais - Modelo OBF-TD com bases de Laguerre

	$G_{11}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{22}(s)$
$c_i$ 's	$c_1 = 0,044$	$c_1 = 0,025$	$c_1 = 0,021$	$c_1 = 0,041$
	$c_2 = -0,001$	$c_2 = -0,002$	$c_2 = -0,004$	$c_2 = -0,006$
	$c_3 = 0,006$	$c_3 = 0,004$	$c_3 = 0,007$	$c_3 = 0,008$
	$c_4 = -0,009$	$c_4 = -0,007$	$c_4 = -0,005$	$c_4 = -0,005$
	$c_5 = 0,05$	$c_5 = -0,001$	$c_5 = -0,005$	$c_5 = 0,002$
	$c_6 = -0,007$	$c_6 = -0,004$	$c_6 = -0,002$	$c_6 = -0,007$

Na Figura 5.12 seguem as respostas do processo e dos modelos OBF-TD utilizando bases de Laguerre e utilizando bases de Kautz a uma nova sequência PRBS utilizada para validação. O tamanho do PRBS de validação é de  $N_s = 800$  e o período de chaveamento é de  $T_{clk} = 8$  segundos.

Na Tabela 5.8 seguem os valores da função de custo no domínio do tempo  $\varepsilon$  para

Tabela 5.7: Resultados experimentais - Modelo OBF-TD com bases de Kautz

	$G_{11}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{22}(s)$
$c_i$ 's	$c_1 = -0,002$	$c_1 = 0,007$	$c_1 = -0,002$	$c_1 = 0,004$
	$c_2 = 0,043$	$c_2 = 0,055$	$c_2 = 0,025$	$c_2 = 0,039$
	$c_3 = -0,006$	$c_3 = -0,009$	$c_3 = -0,003$	$c_3 = -0,005$
	$c_4 = -0,004$	$c_4 = -0,003$	$c_4 = 0,006$	$c_4 = 0,003$
	$c_5 = 0,001$	$c_5 = 0,005$	$c_5 = 0,001$	$c_5 = 0,002$
	$c_6 = 0,005$	$c_6 = 0,005$	$c_6 = -0,006$	$c_6 = 0,009$

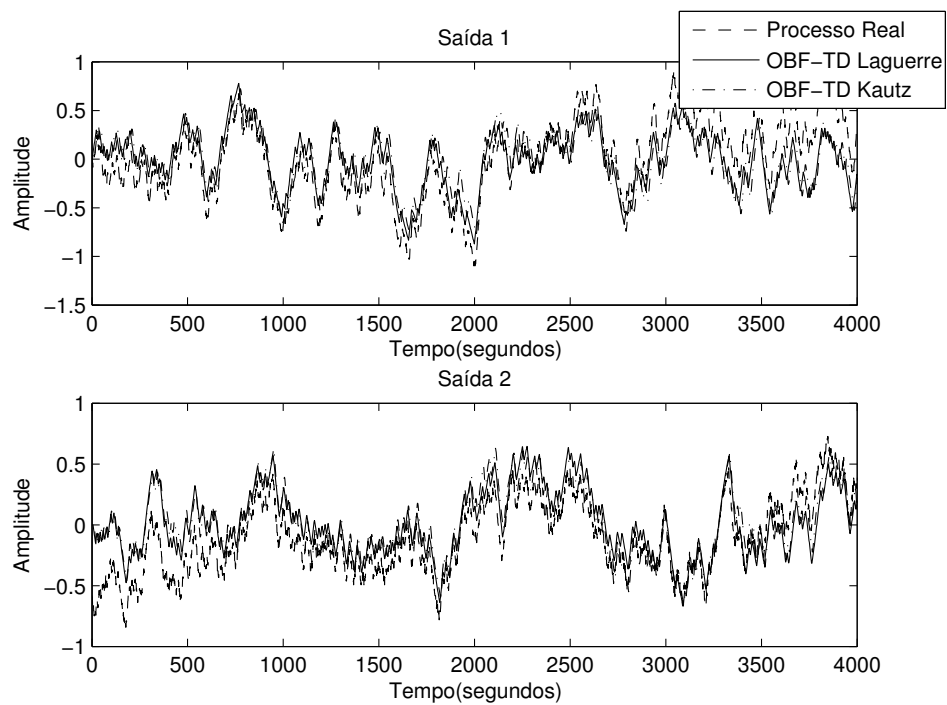


Figura 5.12: Experimento - Resposta do processo ao PRBS (validação)

os modelos OBF-TD de ordem elevada identificados utilizando tanto bases de Laguerre quanto bases de Kautz.

Tabela 5.8: Resultados experimentais -  $\varepsilon$  para modelos de ordem elevada  $n = 6$

	$G_{11}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{22}(s)$
OBF-TD Laguerre	0,080	0,105	0,042	0,047
OBF-TD Kautz	0,076	0,086	0,041	0,043

Em seguida, foram obtidos os modelos de ordem reduzida baseados tanto no modelo OBF-TD em bases de Laguerre quanto em bases de Kautz. A ordem do modelo de ordem

reduzida baseado no modelo OBF-TD em bases de Laguerre foi  $n = 1$  e do modelo de ordem reduzida baseado no modelo OBF-TD em bases de Kautz foi  $n = 2$ . Seguem nas Tabelas 5.9 e 5.10 os valores dos coeficientes para cada modelo estimado.

Tabela 5.9: Resultados experimentais - Modelos FOPTD reduzidos

	$G_{11}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{22}(s)$
$c_i$ 's	$c_1 = 0,067$	$c_1 = 0,042$	$c_1 = 0,023$	$c_1 = 0,039$

Tabela 5.10: Resultados experimentais - Modelos SOPTD reduzidos

	$G_{11}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{22}(s)$
$c_i$ 's	$c_1 = -0,001$ $c_2 = 0,042$	$c_1 = -0,004$ $c_2 = 0,042$	$c_1 = -0,003$ $c_2 = 0,024$	$c_1 = 0,001$ $c_2 = 0,039$

Na Tabela 5.11 seguem os valores da função de custo no domínio do tempo  $\varepsilon$  para os modelos  $G_{FO}(s)$  e  $G_{SO}(s)$  (Tabela 5.5) e para os modelos de ordem reduzida FOPTD (Tabela 5.9) e SOPTD (Tabela 5.10).

Tabela 5.11: Resultados experimentais -  $\varepsilon$  para modelos de ordem reduzida

	$G_{11}(s)$	$G_{21}(s)$	$G_{12}(s)$	$G_{22}(s)$
FOPTD	0,122	0,116	0,044	0,061
FOPTD reduzido	0,106	0,113	0,043	0,059
SOPTD	0,101	0,109	0,043	0,052
SOPTD reduzido	0,082	0,107	0,042	0,051

A partir dos resultados apresentados nas Tabelas 5.8 e 5.11 pode-se observar que os modelos de ordem elevada obtidos utilizando tanto as bases de Laguerre quanto as bases de Kautz resultaram nos menores erros no domínio do tempo. Os modelos de ordem elevada utilizando bases de Kautz apresentam os menores índices entre todos os modelos estimados. Melhores resultados do ponto de vista do índice no domínio do tempo poderiam ser obtidos utilizando outras estruturas, no entanto como as constantes de tempo são próximas o esforço em tratar modelos mais complexos não resulta em ganhos elevados.

Já do ponto de vista dos modelos de ordem reduzida, os modelos FOPTD reduzidos e SOPTD reduzidos resultaram em um refinamento quando comparados com os modelos  $G_{FO}(s)$  e  $G_{SO}(s)$  obtidos anteriormente. Isso ocorreu tanto na comparação entre os modelos de primeira ordem quanto na comparação entre os modelos de segunda ordem.

## 5.7 Considerações finais

Neste Capítulo foi tratado o problema da identificação de sistemas MIMO. Foram apresentadas as técnicas de identificação para modelos FOPTD e SOPTD. A grande diferença entre as técnicas para sistemas SISO está no procedimento experimental, já que as técnicas são praticamente as mesmas.

Em seguida, foram definidos os modelos OBF-TD para o caso MIMO e o procedimento de estimação foi apresentado. O procedimento experimental utilizado foi o descentralizado e o modelo MIMO foi subdividido em modelos MISO. Um ponto importante é que na definição apresentada, cada elemento da matriz de funções de transferência pode ser parametrizado utilizando uma base e/ou ordem diferente.

Inexistente no caso de processos SISO, o conceito de estrutura multivariável foi definido em função da informação preliminar necessária sobre o processo. A partir da escolha da estrutura é possível aumentar a flexibilidade do modelo e reduzir o número de parâmetros que deve ser estimado.

Por fim, foram apresentados exemplos de simulação e resultados experimentais de modo a avaliar os resultados obtidos com as técnicas apresentadas.



# Capítulo 6

## Sistemas MIMO mal-condicionados

Nesta Capítulo o problema das direções é formulado e algumas técnicas apresentadas na literatura são avaliadas no estudo de caso de um modelo simplificado de uma coluna de destilação de alta pureza.

O Capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 6.1 é apresenta uma introdução sobre os processos MIMO mal-condicionados; na Seção 6.2 as direções de maior e menor ganho são formuladas do ponto de vista da decomposição SVD; na Seção 6.3 segue a descrição da coluna de destilação de alta pureza; na Seção 6.4 são descritas as técnicas de projeto de experimentais utilizados; na Seção 6.5 as excitações projetadas são avaliadas do ponto de vista das direções de menor e maior ganho; na Seção 6.6 segue uma comparação entre as estimativas dos menores valores singulares; na Seção 6.7 os modelos OBF-TD identificados utilizando cada uma das técnicas de projeto de experimentos são comparados a partir de alguns índices de qualidade; e por fim, na Seção 6.8 seguem as considerações finais.

### 6.1 Introdução

Além das interações, outra diferença entre processos SISO e MIMO é a presença das direções no caso multivariável. As direções se referem à dependência do ganho do sistema com relação às combinações de entradas aplicadas (LI; LEE, 1996). Desse modo, certas combinações produzem uma variação maior nas saídas do que outras.

As combinações que produzem maiores variações nas saídas excitam a direção de maior ganho. Por outro lado, as combinações que produzem menores variações nas saídas excitam a direção de menor ganho.

A forma convencional de se obter modelos MIMO é utilizar a metodologia experimental independente, identificar os modelos SISO e, por fim, combiná-los na matriz multivariável.

No entanto, quando modelos SISO são combinados, pequenos erros nas funções de transferências individuais podem resultar em um modelo MIMO que não representa bem o sistema. Ou seja, certas combinações de erros nos modelos SISO degradam a qualidade do modelo MIMO.

Esse efeito, em que certas combinações influenciam mais que outras, é mais evidente em sistemas ditos mal-condicionados. Nesse tipo de sistema, mesmo pequenos erros nos elementos individuais podem causar grandes erros nas direções.

Desse modo, um desafio na estimação de modelos para sistemas MIMO é a obtenção exata da informação sobre as direções. Esse ponto é particularmente importante em sistemas mal-condicionados, pois experimentos em malha aberta com entradas independentes não excitam de forma adequada as direções. Exemplos de processos mal-condicionados são as colunas de destilação de alta pureza e os trocadores de calor (JACOBSEN; SKOGESTAD, 1993).

## 6.2 Direções de maior e menor ganho

As direções podem ser analisadas examinando a decomposição em valores singulares (SVD) da matriz de funções de transferência (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Essas direções são quantificadas a partir dos valores singulares e dos vetores singulares de entrada e de saída. Os valores singulares representam uma generalização multivariável do conceito de ganho dos processos SISO.

Seja  $G(s)$  uma matriz  $n \times n$  com  $G(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dada uma frequência  $\omega$ , a decomposição SVD de  $G(j\omega)$  ou  $G$  pode ser escrita como

$$G = W \Sigma V^H$$

$$G = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^H \\ v_2^H \\ \vdots \\ v_n^H \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

em que  $V^H$  é o complexo conjugado transposto de  $V$ ,  $w_i$  e  $v_i$  são vetores que formam os espaços  $\mathbb{R}^n$  das saídas e das entradas. Os elementos  $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$  são chamados de valores singulares e são organizados de forma decrescente em magnitude ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$ ). Os vetores  $w_i$  são chamados de vetores singulares ou de rotação da saída e os vetores  $v_i$  são chamados de vetores singulares ou de rotação de entrada.

Um sistema é dito mal-condicionado quando  $\sigma_1 \gg \sigma_n$ . A direção é chamada de direção de maior ganho se o valor singular correspondente é grande (com relação aos outros valores

singulares). Por outro lado, a direção é chamada de direção de menor ganho se o valor singular correspondente é pequeno. O número de condicionamento  $\gamma$  é a razão entre o maior e o menor valor singular.

**Exemplo:** Considere um sistema  $2 \times 2$  com matriz dada por  $G_A$ . A decomposição SVD da relação entrada e saída, em regime permanente, é dada por

$$y = G_A u \quad (6.2)$$

$$= (W \Sigma V^T) u = W \Sigma (V^T u) = W \Sigma z \quad (6.3)$$

$$= [w_1 \ w_2] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$= (\sigma_1 z_1) w_1 + (\sigma_2 z_2) w_2 \quad (6.5)$$

em que  $z_i = v_i^T u_i$ .

Nesse caso,  $w_1$  é a direção de maior ganho de saída e  $v_1$  é a direção de maior ganho de entrada associados ao maior valor singular  $\sigma_1$ . E  $w_2$  é a direção de menor ganho de saída e  $v_2$  é a direção de menor ganho de entrada associados ao menor valor singular  $\sigma_2$ .

A saída  $y$  é uma combinação das direções  $w_1$  e  $w_2$  e de  $\sigma_1 z_1$  e  $\sigma_2 z_2$ . Se o sistema for mal-condicionado ( $\sigma_1 \gg \sigma_2$ ) e  $u_1$  e  $u_2$  tenham a mesma amplitude, a saída será quase que completamente dominada pela direção  $w_1$ , ou seja,

$$y \approx \sigma_1 z_1 w_1. \quad (6.6)$$

### 6.3 Colunas de destilação de alta pureza

Neste trabalho, o problema das direções será avaliado utilizando um modelo simplificado de uma coluna de destilação de alta pureza.

As colunas de destilação de alta pureza têm sido objeto de estudo por serem processos que apresentam não linearidades elevadas e interações severas (RIVERA et al., 2007). Além disso, a matriz de ganho estático é altamente mal-condicionada (SKOGESTAD; MORARI; DOYLE, 1988). O esquema de uma coluna de destilação segue na Figura 6.1 e a notação utilizada segue na Tabela 6.1.

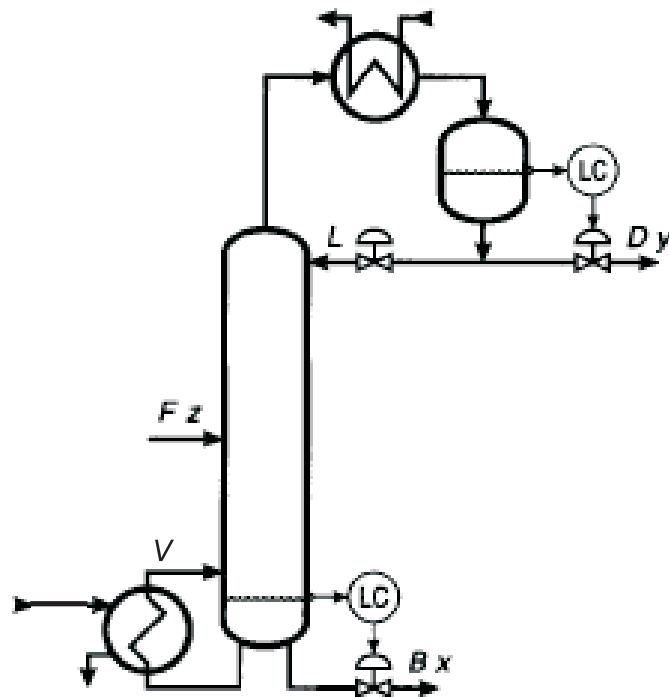


Figura 6.1: Esquema de uma coluna de destilação

Tabela 6.1: Notação

$F$	fluxo de entrada ou alimentação
$z$	composição do fluxo de entrada
$V$	refluxo de fundo
$B$	fluxo do produto de fundo
$x$	composição do produto mais leve no fundo
$L$	refluxo de topo
$D$	fluxo do produto de topo
$y$	composição do produto mais leve no topo

A destilação é um processo de separação muito antigo, que tem por objetivo separar dois ou mais líquidos misturados em dois ou mais fluxos de saída com diferentes composições. Este processo baseia-se na diferença de volatilidade entre os componentes que devem ser separados.

O principal objetivo é que o fluxo de topo  $D$  seja o mais puro possível, ou seja, a composição  $y$  do componente mais leve seja próxima de 100%. Conseqüentemente, a composição de fundo  $x$  do componente mais leve no fluxo de fundo  $B$  deve ser próxima de 0%. Desse modo, o componente leve pode ser extraído no topo e o componente pesado

no fundo.

Existem duas configurações de operação amplamente utilizadas para o ajuste das composições de topo  $y$  e de fundo  $x$ : refluxo de topo e de fundo (LV); fluxo de topo e refluxo de fundo (DV). Na configuração LV os refluxos de topo e de fundo são utilizados como entradas. Já na configuração DV o fluxo de topo e o refluxo de fundo são utilizados como entradas.

Neste trabalho, a configuração LV é utilizada, ou seja, o refluxo de topo L e o refluxo de fundo V são as entradas, enquanto a composição de topo  $y$  e a composição de fundo  $x$  são as saídas.

O modelo em função de transferência de uma coluna de destilação de alta pureza com configuração LV é dado em (SKOGESTAD; LUNDSTROM, 1990). Como o modelo não possui atraso em nenhum elemento da matriz de funções de transferência, este foi modificado e é dado por

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{87,8}{194s+1} e^{-s} & \frac{-86,4(12,1s+1)}{(194s+1)(15s+1)} e^{-3s} \\ \frac{108,2}{194s+1} e^{-4s} & \frac{-109,6(17,3s+1)}{(194s+1)(15s+1)} e^{-5,5s} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Segue na Figura 6.2 as curvas dos valores singulares em função da frequência. O número de condicionamento é maior na região de baixa frequência, ou seja, o processo é bastante mal-condicionado nessa região e a pior situação com relação ao condicionamento do processo ocorre em regime permanente.

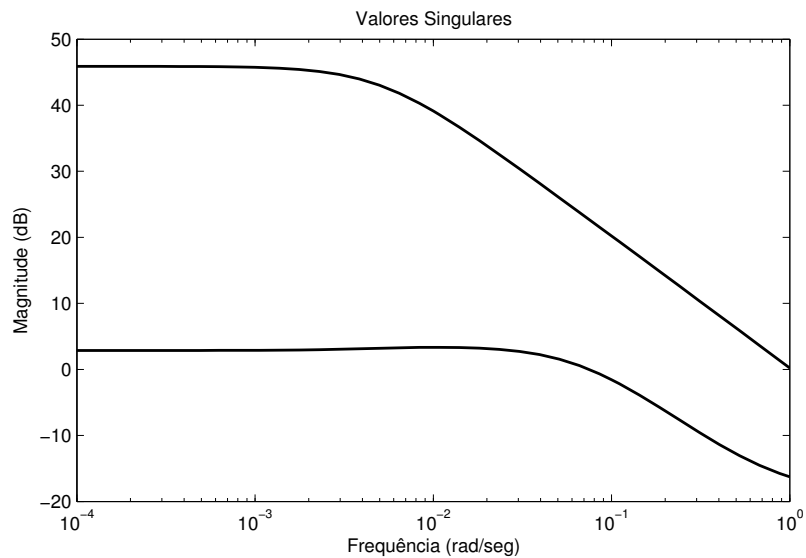


Figura 6.2: Valores singulares em função da frequência

A decomposição SVD em regime permanente de  $G(s)$  é dada por

$$W = \begin{bmatrix} 0,625 & -0,781 \\ 0,781 & 0,625 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 197,2 & 0 \\ 0 & 1,39 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$V^T = \begin{bmatrix} 0,707 & -0,708 \\ -0,708 & -0,707 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Comparando essa decomposição em SVD com a da Equação (6.1) é possível identificar as direções de maior e menor ganho e os ganhos correspondentes. O resumo segue na Tabela 6.2. O número de condicionamento é  $\gamma = 197,2/1,39 = 141,9$ .

Tabela 6.2: Direções de maior e menor ganho

Maior ganho de entrada	$[0,707 \ -0,708]$
Menor ganho de entrada	$[-0,708 \ -0,707]$
Maior ganho de saída	$[0,625 \ 0,781]^T$
Menor ganho de saída	$[-0,781 \ 0,625]^T$
Maior valor singular	$\sigma_1 = 197,2$
Menor valor singular	$\sigma_2 = 1,39$

Como  $\sigma_1 \gg \sigma_2$ , esse processo é mal-condicionado. Assim, as amplitudes das excitações na direção de menor ganho devem ser muito maiores que as amplitudes das excitações na direção de maior ganho para a mesma contribuição nas saídas. Caso contrário, as saídas serão quase que totalmente dominadas pela direção de maior ganho.

Na direção de maior ganho, as saídas se movem na mesma direção quando as entradas se movem em direções opostas. Por outro lado, na direção de menor ganho, as saídas se movem em direções opostas quando as entradas se movem na mesma direção.

## 6.4 Projeto dos experimentos

Para o projeto dos experimentos em malha aberta são utilizadas três técnicas: sinais não correlacionados; sinais rotacionados (KOUNG; MACGREGOR, 1993); sinais combinados (ZHU; STEC, 2006). A metodologia experimental é a descentralizada e os sinais utilizados são do tipo PRBS.

### 6.4.1 Sinais não correlacionados

O procedimento usual é utilizar nas duas entradas sinais não correlacionados. Como as duas direções da matriz de rotação de entradas possuem a mesma amplitude, o termo correspondente a direção de menor ganho terá um efeito praticamente desprezível nas saídas já que  $\sigma_1 \gg \sigma_2$ . Assim, a saída é perturbada quase que totalmente apenas na direção de maior ganho da saída.

Na Figura 6.3 seguem as excitações projetadas da forma não correlacionada ou independente com mesma amplitude. Na Figura 6.4 seguem as respostas correspondentes das saídas para o caso sem ruído.

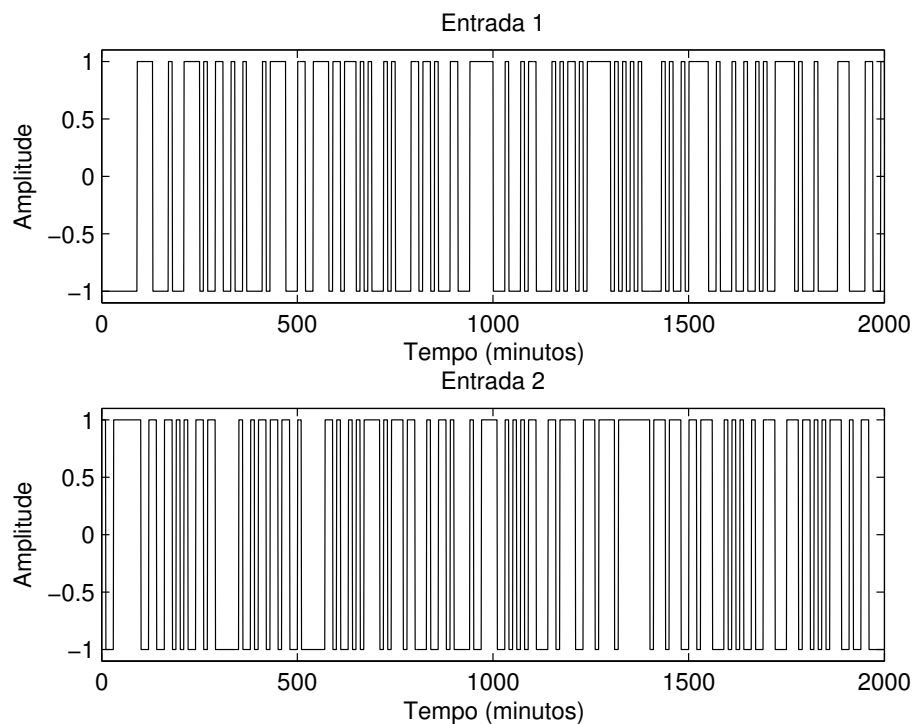


Figura 6.3: Excitações não correlacionadas

Da Figura 6.4, percebe-se que as duas saídas se movem praticamente da mesma forma, ou seja, estão alinhadas com a direção de maior ganho das saídas. O termo correspondente ao menor valor singular possui um efeito desprezível nas saídas.

### 6.4.2 Sinais rotacionados

A técnica de projeto proposta em (KOUNG; MACGREGOR, 1993) é aumentar a amplitude da excitação correspondente à direção de menor ganho. Para isso é necessário o conhecimento da matriz de rotação ou direções de entrada  $V^T$ . Nesta técnica, as amplitudes das

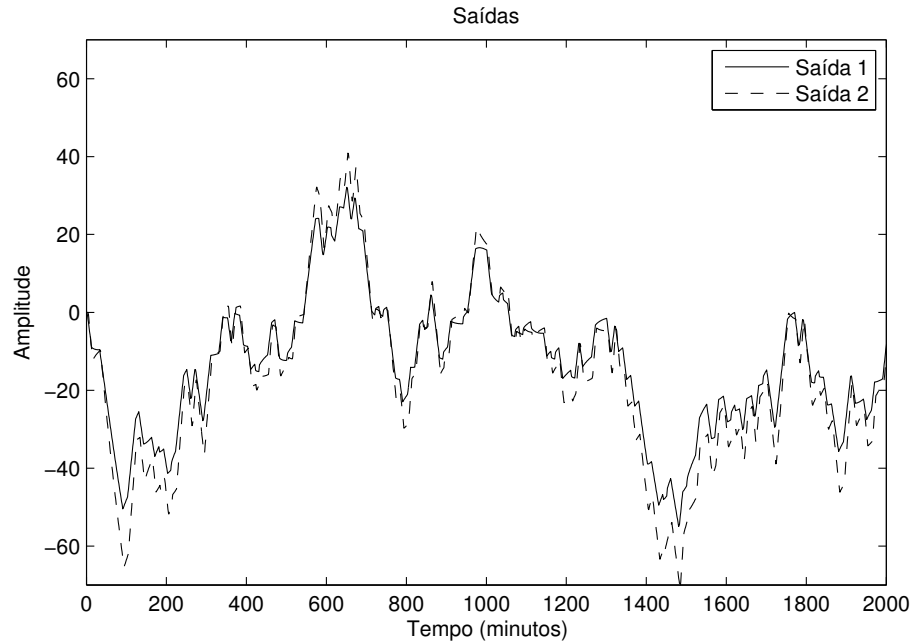


Figura 6.4: Saídas utilizando as excitações não correlacionadas

excitações são determinadas em função da razão entre os valores singulares.

Considere uma transformação das entradas baseada na decomposição em SVD da matriz de ganho estático  $G$  dada por

$$y = Gu = (W\Sigma V^T)u = (W\Sigma)(V^T u) = \Omega z \quad (6.11)$$

em que  $z$  é o resultado da multiplicação do vetor de entradas em regime permanente pela matriz de rotação das entradas  $V^T$ . O vetor  $z$  é chamado de vetor de entradas rotacionadas. A matriz  $\Omega$  é a matriz de rotação de saída modificada pelos valores singulares. Os vetores de entrada  $u$  e de saída  $y$  são os valores em regime permanente da entrada e da saída.

A técnica proposta consiste no projeto das excitações rotacionadas  $z$  de forma independente. A razão ótima das amplitudes das entradas rotacionadas é dada por

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \gamma \quad (6.12)$$

em que  $\gamma$  é o número que indica o condicionamento da matriz. Desse modo, a amplitude é maior na excitação rotacionada correspondente à direção de menor ganho.

Com o conhecimento da matriz de rotação das entradas  $V^T$  é possível transformar as excitações rotacionadas nas excitações que serão aplicadas ao processo, dado que  $u = Vz$ .

Na Figura 6.5 seguem as excitações  $u(t)$  projetadas assumindo  $V^T$  conhecido. A amplitude da entrada rotacionada correspondente ao menor valor singular é 14,19 vezes



maior que a amplitude da entrada rotacionada correspondente ao maior valor singular. Na Figura 6.6 seguem as respostas das saídas para o caso sem ruído.

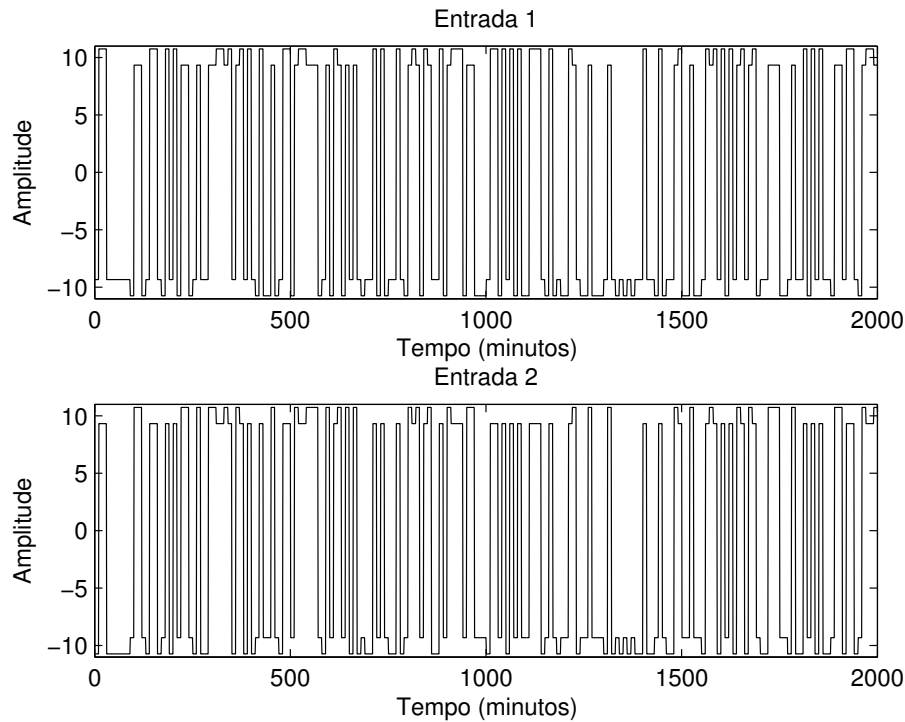


Figura 6.5: Excitações rotacionadas

Diferentemente do caso anterior, é possível perceber na Figura 6.6 que as saídas apresentam um comportamento misto, ou seja, se movem na mesma direção e em direções opostas. Isto acontece pois, devido à maior amplitude na direção de menor ganho, as direções de maior e menor ganho foram excitadas.

### 6.4.3 Sinais combinados

Os sinais combinados são sinais formados por dois tipos de períodos: períodos que excitam a direção de maior ganho e períodos que excitam a direção de menor ganho. Estes sinais foram apresentados em (ZHU; STEC, 2006).

Para o projeto desse sinais, é utilizado o fato de que, pela definição da decomposição em SVD, as direções de maior e menor ganho são ortogonais. Assim, é utilizado apenas o conhecimento da direção de maior ganho.

Essa técnica foi proposta para processos do tipo colunas de destilação em que a direção de maior ganho é  $[1 \ -1]^T$  e a direção de menor ganho é  $[1 \ 1]^T$ .

A técnica de projeto é composta de dois passos ou dois experimentos:

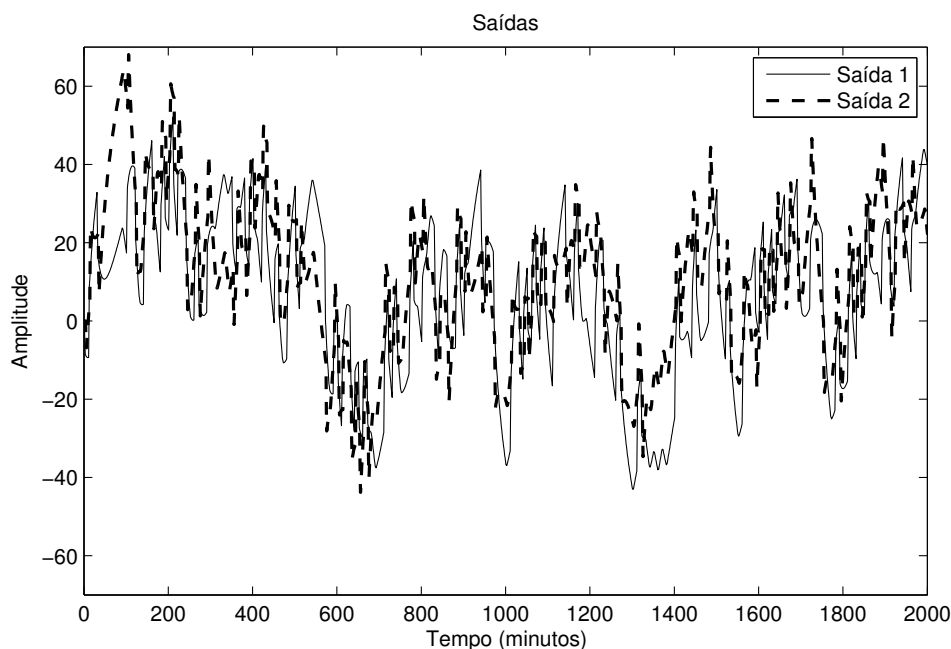


Figura 6.6: Saídas utilizando as excitações rotacionadas

1. **Experimento na direção de maior ganho:** o experimento é realizado utilizando excitações não correlacionadas. O modelo estimado representa bem o processo na direção de maior ganho;
2. **Experimento na direção de maior e menor ganho:** o experimento é realizado utilizando sinais que possuem dois períodos. Períodos com sinais não correlacionados de pequena amplitude e períodos com sinais correlacionados de grande amplitude. A razão entre as duas amplitudes pode ser determinada a partir do modelo obtido no primeiro experimento.

Os períodos com excitações não correlacionadas de pequena amplitude excitam a direção de maior ganho, enquanto que os períodos com excitações correlacionadas de grande amplitude excitam a direção de menor ganho. Segue na Figura 6.7 as excitações projetadas. Segue na Figura 6.8(a) as saídas correspondentes e segue na Figura 6.8(b) uma ampliação de parte do intervalo de tempo referente ao período em que a direção de menor ganho é excitada (saídas são descorrelacionadas).

O período de pequena amplitude na entrada e excitações independentes (0 a 2000 minutos) resulta em saídas com grande amplitude e correlacionadas, ou seja, orientadas com a direção de maior ganho. Por outro lado, o período de grande amplitude na entrada e excitações correlacionadas (2000 a 4000 minutos) resulta em saídas com pequena amplitude e descorrelacionadas, ou seja, orientadas com a direção de menor ganho.

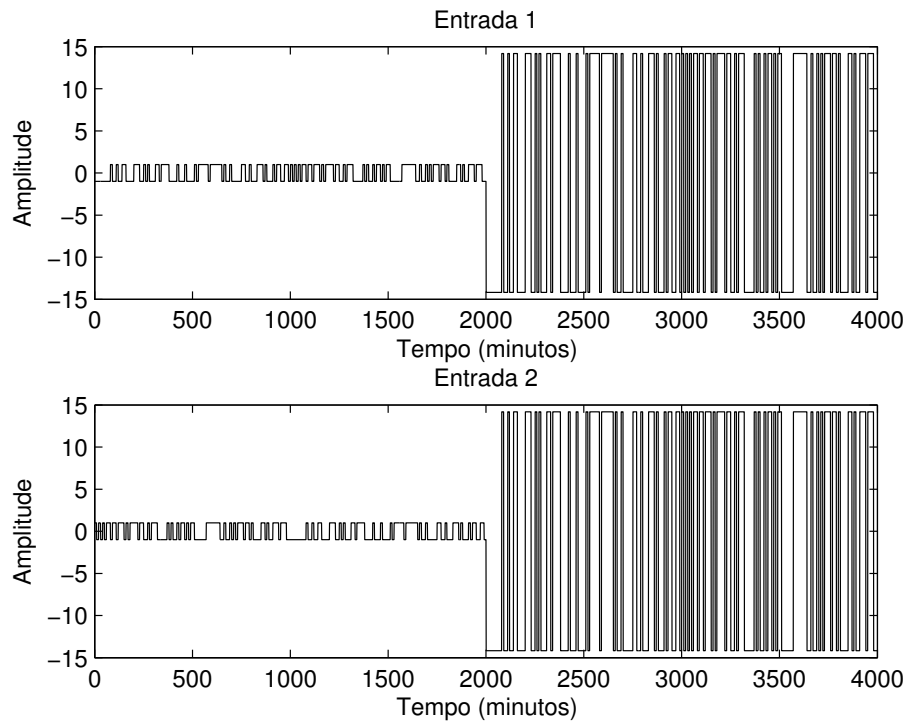


Figura 6.7: Excitações com sinais combinados

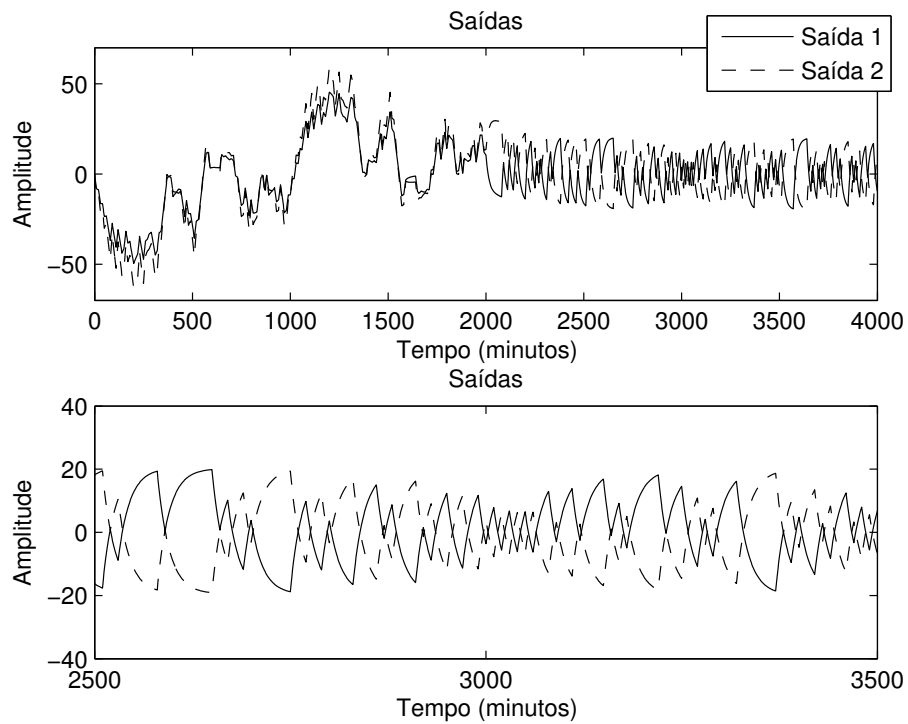


Figura 6.8: Saídas utilizando as excitações com sinais combinados

O período correspondente à direção de menor ganho possui amplitude 14,19 vezes maior que o período correspondente a direção de maior ganho. Mesmo assim, a saída correspondente possui amplitude aproximadamente igual.

## 6.5 Avaliação das direções

Após o projeto das excitações utilizando cada uma das técnicas apresentadas, é necessário avaliar como as direções do processo são excitadas. Seguem nas Figuras 6.9, 6.10 e 6.11 os gráficos da saída 1 versus a saída 2 para cada uma das técnicas. Na Figura 6.9 segue a indicação das direções de maior e menor ganho da saída.

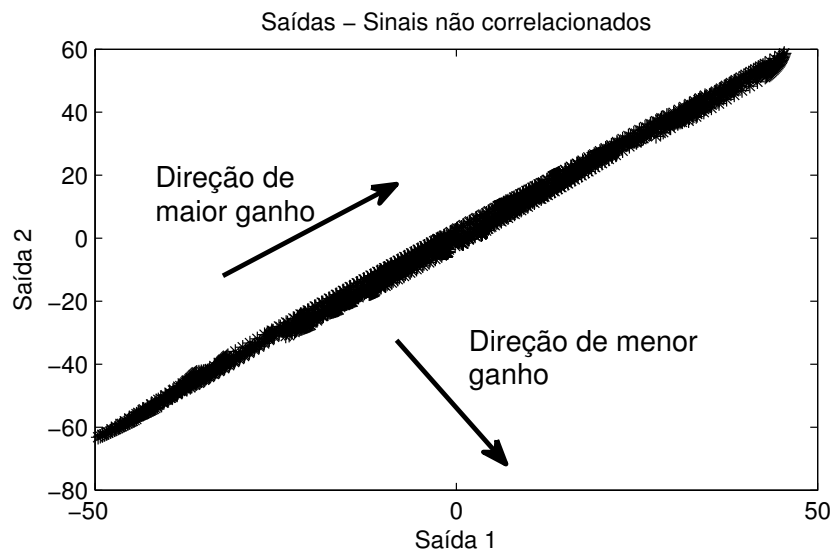


Figura 6.9: Direção das saídas utilizando sinais não correlacionados

Quando as entradas são excitadas utilizando os sinais não correlacionados, o processo é excitado apenas na direção de maior ganho, Figura 6.9. As saídas se movem quase que apenas na direção de maior ganho  $[0, 625 \ 0, 781]^T$  ou  $[-0, 625 \ -0, 781]^T$ .

Quando são utilizados sinais rotacionados, o processo é excitado tanto na direção de maior ganho quanto na direção de menor ganho, Figura 6.10. Isso é possível devido ao conhecimento da matriz de direções de entradas  $V$  e da relação entre as amplitudes  $\gamma$ .

Para a técnica utilizando sinais combinados é possível listar dois períodos bem distintos. Esse característica também é observada na Figura 6.11. O processo é excitada tanto na direção de maior ganho quanto na direção de menor ganho.

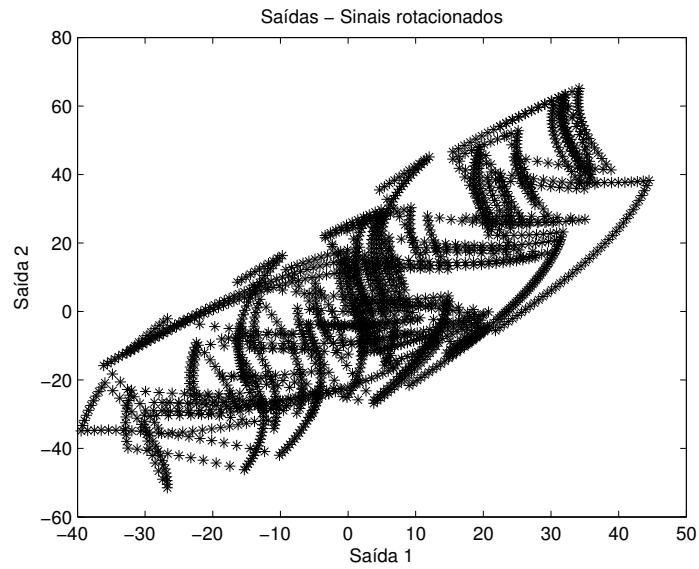


Figura 6.10: Direção das saídas utilizando sinais rotacionados

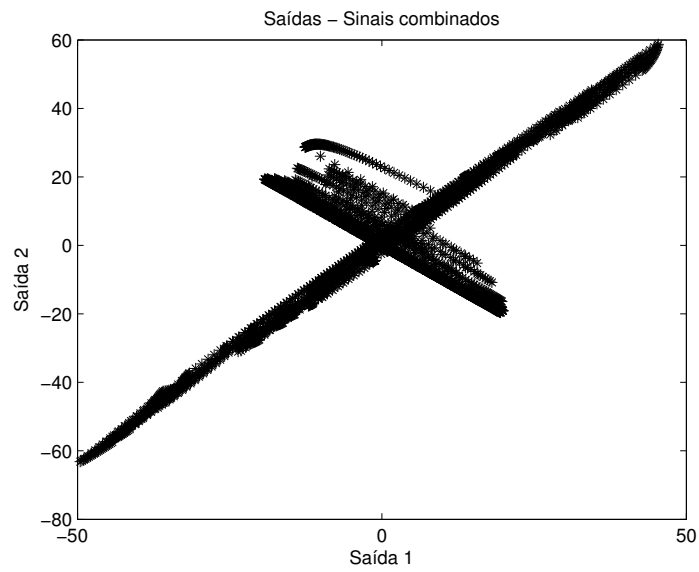


Figura 6.11: Direção das saídas utilizando sinais combinados

## 6.6 Estimação do menor valor singular

Tanto os sinais rotacionados como os sinais combinados excitam a direção de menor ganho enquanto os sinais não correlacionados não excitam a direção de menor ganho. Resta verificar como a informação sobre o menor valor singular é capturada pelos modelos estimados utilizando cada um desses sinais.

Foram identificados modelos do tipo OBF-TD utilizando bases de Laguerre com  $n = 3$ . Segue na Figura 6.12 as curvas dos menores valores singulares em função da frequência para cada um desses modelos estimados.

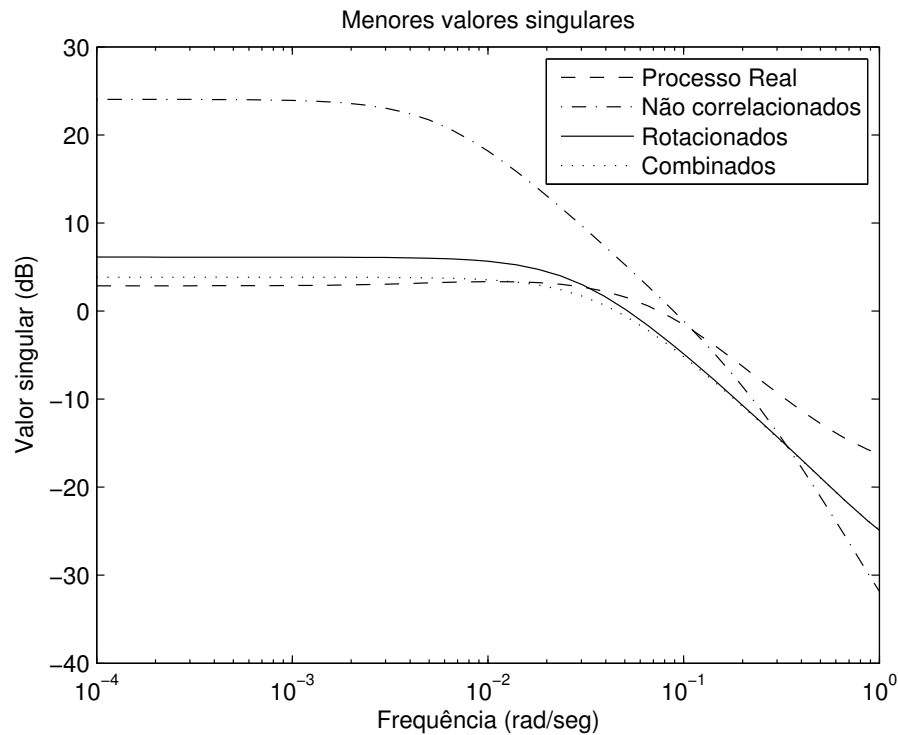


Figura 6.12: Curvas do menor valor singular em função da frequência - razão ótima entre as amplitudes das direções de maior e menor ganho

Os modelos obtidos utilizando como excitação tanto os sinais rotacionados como os sinais combinados representam bem o processo na direção de menor ganho. Por outro lado, o modelo obtido utilizando como excitação sinais não correlacionados não representa bem o processo na direção de menor ganho.

A qualidade dos modelos obtidos com relação à direção de menor ganho é função do conhecimento preliminar sobre o processo real do ponto de vista dos valores singulares. No exemplo apresentado na Figura 6.12 foi utilizada a razão ótima entre as amplitudes das componentes das direções de menor e maior ganho.

Caso seja utilizada uma razão diferente, a informação sobre a direção de menor ganho será reduzida. Na Figura 6.13 seguem as curvas dos menores valores singulares estimados quando a relação entre as amplitudes das componentes das direções de maior e menor ganho são 10% da razão ótima.

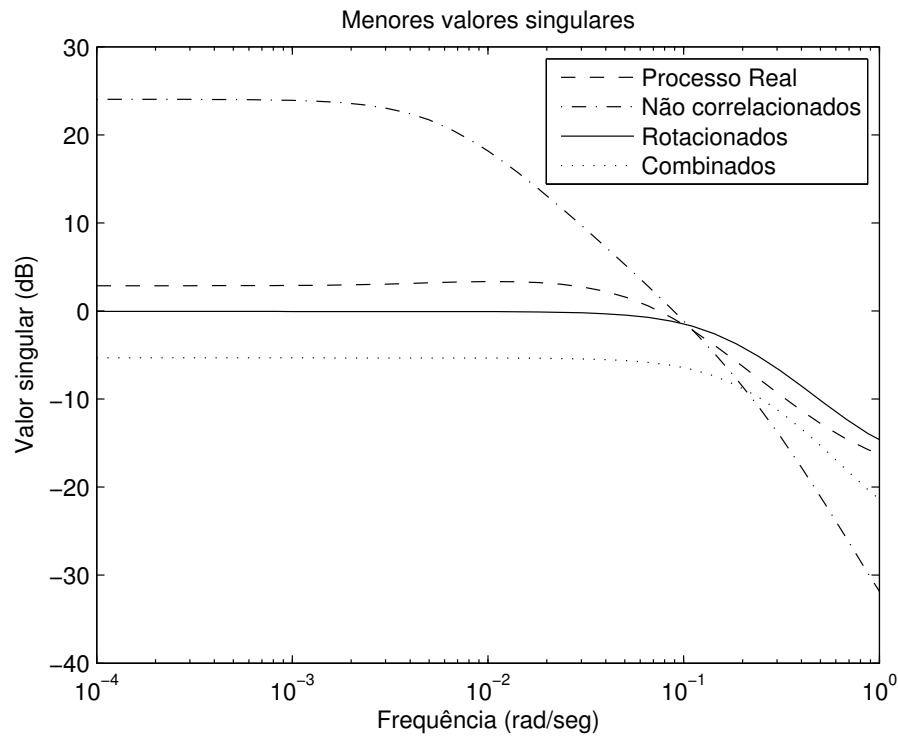


Figura 6.13: Curvas do menor valor singular em função da frequência - 10% da razão ótima entre as amplitudes das direções de maior e menor ganho

No caso limite em que as amplitudes das componentes de maior e menor ganho são iguais, os resultados obtidos com os sinais rotacionados e combinados são os mesmos que os obtidos com os sinais não correlacionados.

## 6.7 Qualidade dos modelos identificados

### 6.7.1 Índices de qualidade

Em regime permanente, (GARCIA; MORARI, 1985) mostraram que para um sistema estável em malha aberta é possível projetar um controlador multivariável que resultará em uma malha fechada estável se e somente se

$$\zeta_k = \operatorname{Re} \left( \lambda_i \left( G\hat{G}^{-1} \right) \right) > 0 \quad \forall i \quad (6.13)$$

em que  $\lambda_i$  é o autovalor  $i$  da matriz,  $\text{Re}(\cdot)$  é a parte real de um número complexo,  $G$  é a matriz de ganho em regime permanente do processo e  $\hat{G}$  é a matriz de ganho em regime permanente identificada.

O desempenho do controlador multivariável pode ser analisado a partir do índice de desempenho (RPM). Um valor elevado do RPM é um condição suficiente para um desempenho ruim do controlador (KOUNG; MACGREGOR, 1993). O RPM é dado por

$$RPM = \|\hat{G}G^{-1} - I\|_2. \quad (6.14)$$

O erro na estimativa dos valores singulares indica se o processo foi adequadamente excitado em cada uma das direções. O erro quadrático é dado por

$$\epsilon_i = (\sigma_i - \hat{\sigma}_i)^2 \quad (6.15)$$

em que  $\sigma_i$  é o valor singular  $i$  do processo real e  $\hat{\sigma}_i$  é o valor singular  $i$  estimado.

Outro parâmetro considerado para verificar a qualidade dos modelos é o RGA . O RGA é importante para o projeto dos controladores (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). O RGA de uma matriz é definido como

$$RGA(G) = G \circ (G^{-1})^T \quad (6.16)$$

em que  $\circ$  é o produto de Hadamard ou produto de Schur (Apêndice A). Para um processo  $2 \times 2$  é necessário calcular apenas um elemento da matriz RGA, ou seja,  $\lambda_{11}$ . Desse modo, é calculado o módulo do erro entre o valor real e o estimado a partir de

$$J_\lambda = |\lambda_{11} - \hat{\lambda}_{11}|. \quad (6.17)$$

## 6.7.2 Resultados de simulação

Para cada saída foram identificados modelos OBF-TD de uma saída e múltiplas entradas (MISO) utilizando bases de Laguerre e  $n = 3$ . Como é necessário escolher o polo de Laguerre, primeiro foram realizados os experimentos utilizando a excitação proposta no Capítulo 3 utilizando a metodologia independente. A matriz de funções de transferência identificada utilizando a técnica para modelos FOPTD é dada por

$$G_{FO}(s) = \begin{bmatrix} \frac{86,5}{196,4s+1}e^{-1,01s} & \frac{107,3}{196,0s+1}e^{-4,02s} \\ \frac{-84,8}{226,2s+1}e^{-3,11s} & \frac{-106,6}{213,1s+1}e^{-5,33s} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Segue na Figura 6.14 as saídas do modelo simplificado da coluna de destilação dado na Equação (6.7) e as saídas do modelo identificado  $G_{FO}(s)$ . Foi adicionado ruído nas saídas de média zero e variância 0,01.



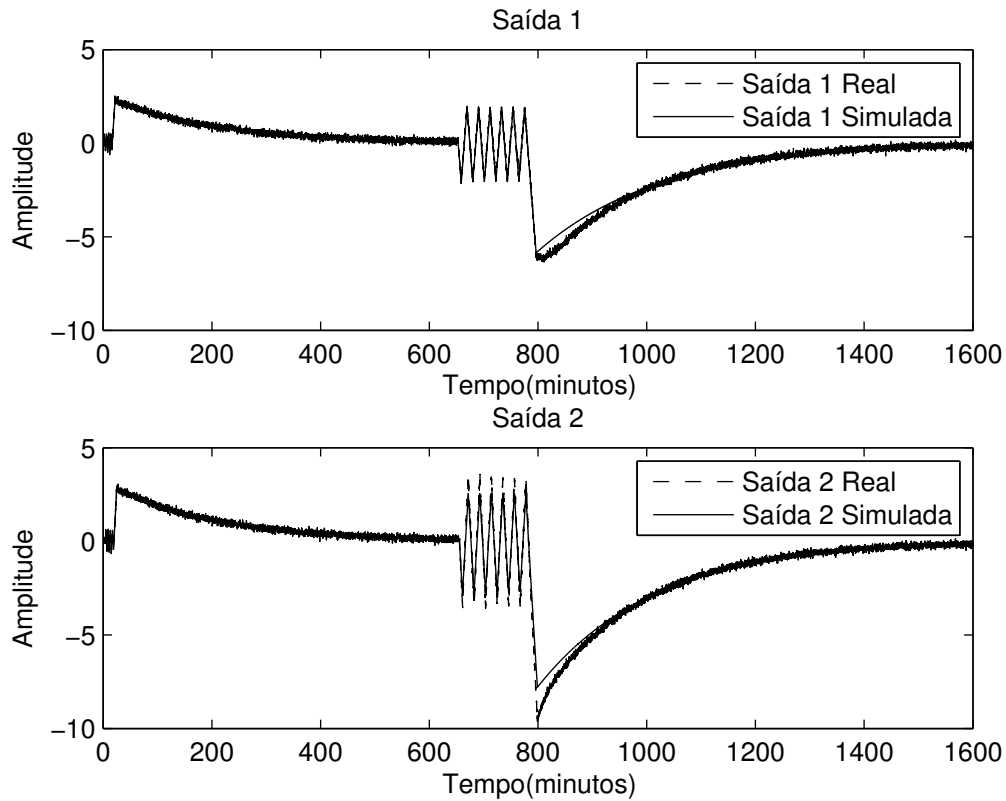


Figura 6.14: Saídas do modelo identificado em resposta ao experimento proposto

Da Figura 6.14 observa-se que o modelo representa bem o processo do ponto de vista do experimento preliminar realizado. No entanto, quando avalia-se a informação na direção de menor ganho representada no modelo FOPTD identificado a situação é diferente.

Segue na Figura 6.15 as curvas do maior e do menor valor singular do modelo FOPTD  $G_{FO}(s)$  e do modelo da coluna de destilação. O modelo FOPTD representa bem o maior valor singular, mas não contém praticamente nenhuma informação sobre a direção de menor ganho. Isso acontece pois como  $\sigma_1 \gg \sigma_2$  as saídas são dominadas pela direção de maior ganho.

O modelo FOPTD obtido utilizando a metodologia experimental independente não representa bem o processo do ponto de vista do menor valor singular. A informação contida nos sinais de saída não capturam esta informação. Assim, foram utilizadas as técnicas de projetos de experimentos com sinais não correlacionados, sinais rotacionados e sinais combinados. A metodologia experimental utilizada para essas técnicas é a descentralizada.

A partir dos sinais apresentados nas Figuras 6.3 (não correlacionados), 6.5 (rotacionados) e 6.7 (combinados) foram obtidos os modelos OBF-TD de uma saída e múltiplas

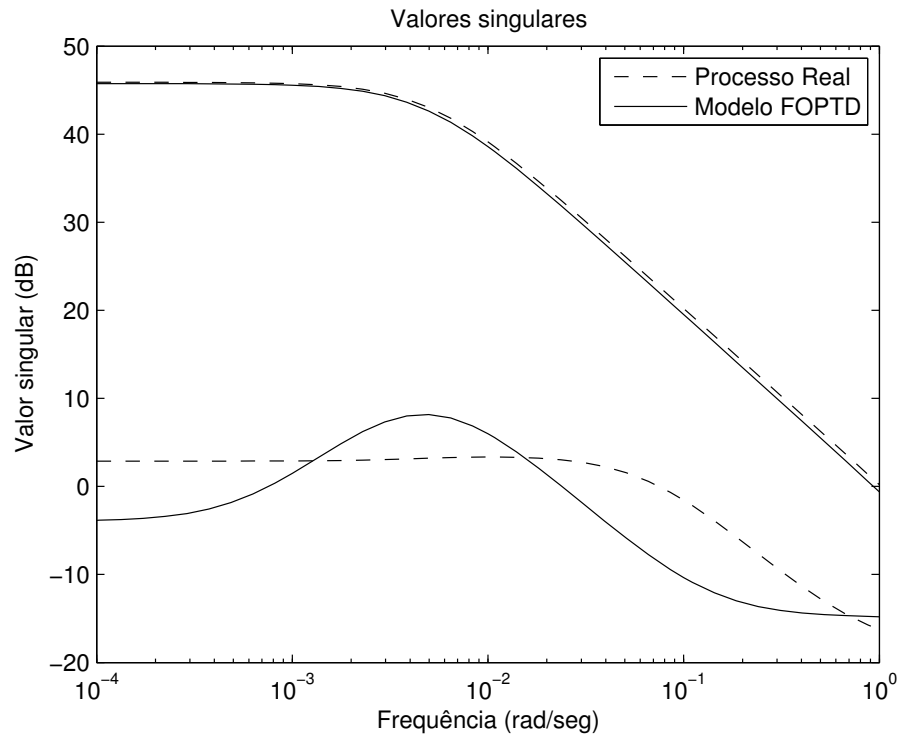


Figura 6.15: Valores singulares em função da frequência

entradas (MISO) utilizando bases de Laguerre e  $n = 3$ . De modo a analisar a qualidade dos modelos OBF-TD identificados, foram realizadas 100 simulações utilizando o mesmo procedimento anteriormente apresentado. Como são 3 modelos por simulação foram identificados um total de 300 modelos. Em cada simulação, o mesmo ruído foi utilizado para todas as técnicas de projeto de experimento e adicionado nas duas saídas. Para o projeto do ruído foi utilizado um gerador de números aleatórios com distribuição uniforme de média zero e variância de  $(0, 25)^2$ .

Na Tabela 6.3 seguem as médias dos valores calculados para todas as simulações. Apenas as matrizes de ganho em regime permanente foram comparadas. Os experimentos utilizando sinais não correlacionados foram realizados de forma independente (EI1) e descentralizado (EI2).

Tabela 6.3: Resultados de identificação

Técnica de projeto	% instáveis ( $\zeta_k$ )	RPM	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$J_\lambda$
Sinais não correlacionados (EI1)	59	1,87	$3,57e^{-2}$	5,21	23,12
Sinais não correlacionados (EI2)	56	2,17	$4,01e^{-2}$	4,48	22,54
Sinais rotacionados	0	0,69	$3,48e^{-1}$	$1,03e^{-2}$	6,34
Sinais combinados	0	0,71	$3,37e^{-1}$	$1,84e^{-2}$	7,12

Utilizando os sinais correlacionados, os modelos identificados violaram a condição de estabilidade da Equação (6.13) em 62% dos casos para o caso EI1 e em 58% dos casos para o caso EI2. Por outro lado, quando os sinais rotacionados e os sinais combinados foram utilizados, a condição não foi violada nenhuma vez. Ou seja, é possível encontrar um controlador multivariável que estabilize a malha fechada para todos os modelos obtidos.

No entanto, os modelos obtidos a partir dos sinais não correlacionados resultaram nos menores erros de estimação no maior valor singular  $\sigma_1$  com relação às outras técnicas de projeto. Porém, a estimativa do menor valor singular  $\sigma_2$  é ruim. Ou seja, com a utilização dos sinais não correlacionados a informação obtida concentra-se na direção de maior ganho, Figura 6.9.

Do ponto de vista dos erros no elementos  $\lambda_{11}$  da matriz de RGA os resultados são melhores quando são utilizados os sinais combinados e rotacionados. Quanto menor forem os erros obtidos em cada uma das técnicas de projeto melhor.

Seguem na Figuras 6.16, 6.17 e 6.18 as curvas do menores valores singulares para todos os modelos simulados utilizando cada uma das técnicas de projeto de experimentos. Percebe-se que os melhores resultados são obtidos utilizando tanto a técnica de projeto de excitações com sinais rotacionados quanto a técnica de projeto com sinais combinados.

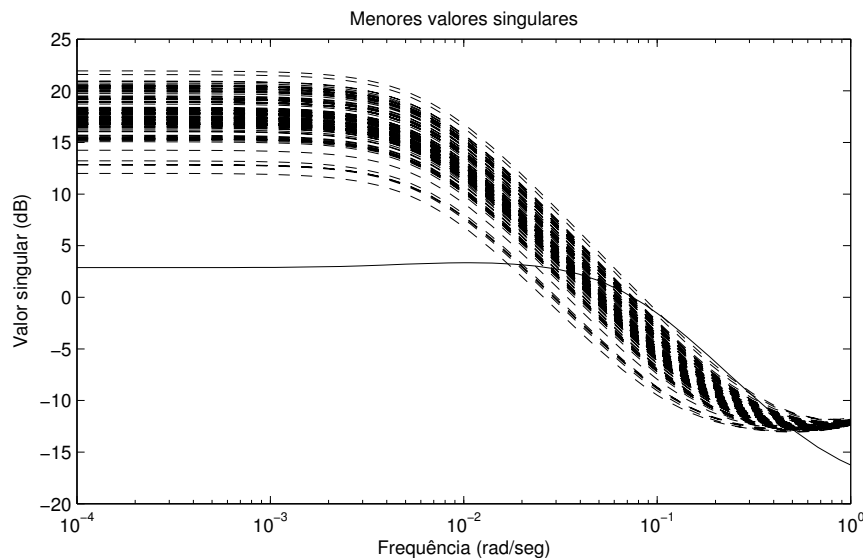


Figura 6.16: Curvas do menor valor singular em função da frequência para os sinais não correlacionados - traço sólido é o valor real e os tracejados são os valores estimados

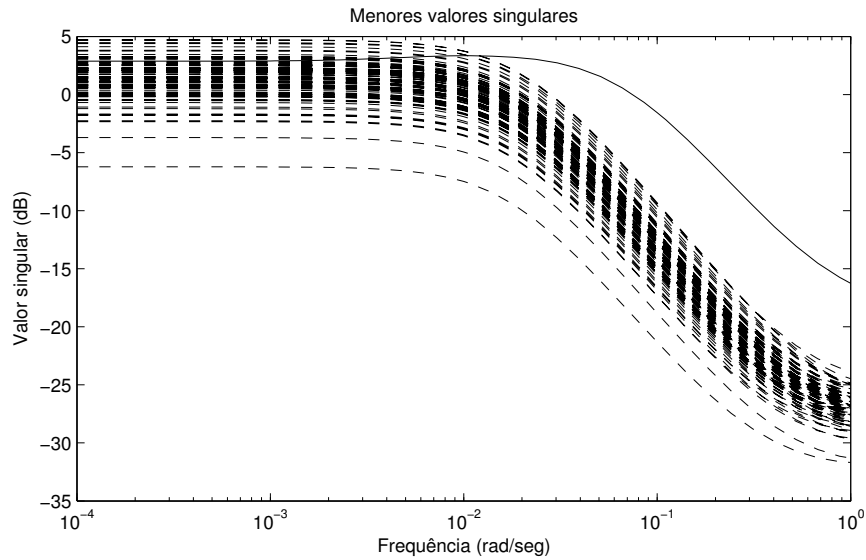


Figura 6.17: Curvas do menor valor singular em função da frequência para os sinais rotacionados - traço sólido é o valor real e os tracejados são os valores estimados

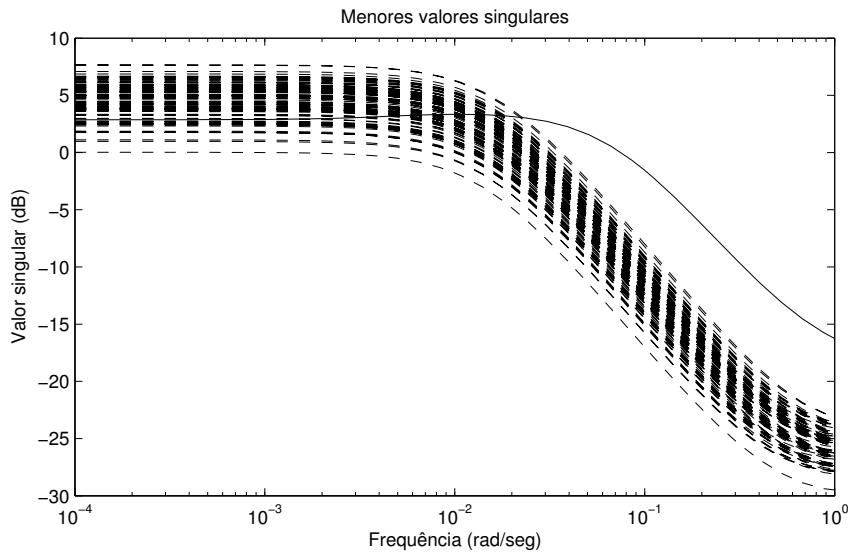


Figura 6.18: Curvas do menor valor singular em função da frequência para os sinais combinados - traço sólido é o valor real e os tracejados são os valores estimados

## 6.8 Considerações finais

Neste Capítulo, o problema das direções, inexistente no caso de sistemas SISO, foi apresentado e algumas soluções foram avaliadas. O processo utilizado como exemplo foi o de uma coluna de destilação de alta pureza.

Para cada uma das técnicas de projeto de excitações foram obtidos 100 modelos e di-

versos índices foram calculados para avaliar a qualidade dos modelos identificados. Para todos os casos foi observado que os experimentos utilizando sinais rotacionados e combinados resultam em melhores modelos quando comparados com os modelos obtidos utilizando os sinais não correlacionados.

# Capítulo 7

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 7.1 Conclusões

Nesta Tese foi considerado o problema de identificação aproximada de sistemas com atraso. O problema foi delimitado na identificação de sistemas com atraso utilizando modelos de ordem reduzida (primeira ordem e segunda ordem) e modelos de ordem superior utilizando bases de funções ortonormais.

No Capítulo 1 foram apresentados alguns dos desenvolvimentos anteriores e mais recentes correlatos ao problema. Os modelos de ordens reduzidas analisados foram os modelos FOPTD e SOPTD, dado que são os mais utilizados no projeto de controladores PID. Já os modelos de ordem elevada analisados foram aqueles obtidos utilizando bases de funções ortonormais.

Dentre os dois grandes problemas abordados, primeiro foi tratado no Capítulo 3 o problema da identificação de modelos de ordem reduzida FOPTD e SOPTD em sistemas que apresentam apenas uma entrada e uma saída, sistemas SISO. As técnicas apresentadas são baseadas na informação combinada no domínio do tempo e no domínio da frequência. As informações necessárias sobre o processo são obtidas a partir de um experimento proposto baseado no experimento do relé. Além de exemplos de simulação foram realizados testes experimentais utilizando a plataforma de um processo termoelétrico para validação das técnicas.

Em seguida, no Capítulo 4, foi abordado o problema de como obter modelos de ordem superior para sistemas SISO. Dentre as diversas possibilidades existentes para a escolha da estrutura do modelo foi escolhida a estrutura utilizando bases de funções ortonormais. Esses modelos possuem diversas vantagens quando comparados com os modelos lineares convencionais (FIR, ARX, ARMAX, OE e BJ) (TUFA; RAMASAMY; SHUHAIMI, 2011). São necessários menos parâmetros para descrever as dinâmicas do processo (parcimônia), a

linearidade nos parâmetros possibilita a utilização de regressores lineares para a estimação (otimização convexa) e os modelos do processo e do ruído podem ser parametrizados de forma independente (HEUBERGER; HOF; WAHLBERG, 2005).

Por outro lado, foi observado que para processos com atraso, as ordens dos modelos OBF são desnecessariamente elevadas devido à representação em série infinita do atraso. Assim, foi proposto um modelo combinado formado por um modelo OBF e um modelo de atraso (OBF-TD). Dessa forma, a ordem do modelo pode ser escolhida de modo a reduzir o erro na representação da dinâmica, além de também ser possível obter diretamente modelos FOPTD e SOPTD.

Ainda no Capítulo 4 foi tratado o problema de como reduzir um modelo OBF-TD de ordem superior para modelos de ordem reduzida do tipo FOPTD ou SOPTD. As técnicas convencionais baseiam-se na magnitude dos valores singulares de Hankel para a escolha da ordem do modelo reduzido. No entanto, no contexto deste trabalho, a ordem reduzida é fixa e, desse modo, uma parte importante da informação pode ser perdida (resíduo). Isso acontece quando a ordem ótima é maior que a ordem desejada. Nesses casos, foi proposta uma técnica de redução de modelos de modo a compensar parcialmente o resíduo a partir da fase desprezada pela redução. A fase desprezada é aproximada de forma linear por um atraso e esse parâmetro é utilizado para atualizar tanto o atraso quanto a(s) constante(s) de tempo previamente obtidas.

Além disso também é possível utilizar o modelo atualizado após a compensação como modelo inicial para uma nova estimativa do modelo de ordem elevada. Esse procedimento melhora a qualidade do modelo de ordem reduzida no sentido dos índices nos domínios do tempo e da frequência. Desse modo, foi proposta a versão iterativa da técnica de redução com compensação de resíduo apresentada anteriormente. Também foram realizadas simulações e testes experimentais utilizando a mesma plataforma de um processo térmico para validação das técnicas.

No Capítulo 5 foi abordado o problema da identificação de sistemas MIMO. Neste contexto é necessário escolher tanto a metodologia experimental quanto a estrutura do modelo multivariável. A metodologia pode ser independente ou descentralizada enquanto a estrutura multivariável está relacionada com a informação preliminar disponível sobre o sistema MIMO.

Para o caso MIMO, a utilização de modelos em bases de funções ortonormais resulta em outra propriedade desejada: o problema pode ser diretamente subdividido em diversos problemas MISO. Assim, os algoritmos de estimação são mais simples e o custo computacional é menor.

Em seguida, as técnicas de identificação para modelos FOPTD e SOPTD, as técnicas

de identificação para modelos OBF-TD e de redução com ou sem compensação de resíduo além dos algoritmos apresentados para o caso SISO foram estendidas para o caso MIMO. Essencialmente, os procedimentos são os mesmos, dado que o problema MIMO pode ser subdividido em diversos problemas MISO.

Por fim, no Capítulo 6, o problema das direções foi definido e algumas soluções do ponto de vista do projeto do experimento de identificação em malha aberta foram avaliadas. Essas técnicas foram analisadas a partir do modelo simplificado de uma coluna de destilação de alta pureza. A partir dos resultados apresentados observa-se que a metodologia tradicionalmente utilizada na realização de experimentos de identificação não resulta em modelos que descrevem bem o processo na direção de menor ganho. Estes modelos podem resultar em malhas fechadas instáveis em diversos casos. Desse modo, é recomendado que sejam utilizadas técnicas de projeto de experimentos que levem em consideração a direcionalidade do ganho.

## 7.2 Trabalhos Futuros

Alguns pontos explorados de forma parcial ou inexplorados neste Trabalho de Tese podem ser utilizados como sugestão para o desenvolvimentos de outros trabalhos. Entre eles destacam-se:

- Modificar a técnica de identificação para modelos SOPTD. Definir uma função de custo e utilizar o mesmo ambiente definido para o caso dos modelos FOPTD;
- Avaliar a qualidade dos modelos identificados do ponto de vista dos controladores projetados. Avaliar em malha fechada;
- Propor técnicas de identificação ótima dos polos que formam as bases dos modelos OBF-TD partindo das estimativas iniciais disponíveis;
- Inserir no problema da estimação ótima do polos a procura do atraso a partir da estimativa inicial disponível;
- Formular as técnicas de redução de modelos para outros modelos de resíduo. Avaliar a compensação não-linear da informação descartada;
- Avaliar técnicas de projeto de experimentos para processos mal-condicionados em malha fechada;
- Avaliar em malha fechada o comportamento dos modelos obtidos a partir de cada uma das técnicas de projeto de experimentos para processos mal-condicionados;



- Analisar a capacidade da predição  $k$  passos à frente dos modelos OBF-TD. Isto é necessário para o projeto de controladores preditivos.

# Referências Bibliográficas

- AHMED, S.; HUANG, B.; SHAH, S. L. Novel identification method from step response. *Control Engineering Practice*, v. 15, p. 545–556, 2007.
- AKCCAY, H. Continuous-time stable and unstable system modeling with orthonormal basis functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 10, p. 513–531, 2000.
- AKCCAY, H. Synthesis of complete rational orthonormal bases with prescribed asymptotic order. *Automatica*, v. 37, p. 559–564, 2001.
- AKCCAY, H.; NINNESS, B. M. Rational basis functions for robust identification from frequency and time-domain measurements. *Automatica*, v. 39, n. 9, p. 1101–1117, 1998.
- AKCCAY, H.; NINNESS, B. M. Orthonormal basis functions for modeling continuous-time systems. *Signal Processing*, v. 77, p. 261–274, 1999.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica*, v. 20, p. 645–651, 1984.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *Advanced PID Control*. Research Triangle Park, North Carolina: Instrument Society of America, 2006.
- ATHERTON, D. P. Relay autotuning: An overview and alternative approach. *Ind. Eng. Chem.*, v. 45, n. 12, p. 4075–4080, 2006.
- ATHERTON, D. P. Relay autotuning: An overview and alternative approach. *Ind. Eng. Chem.*, v. 45, n. 12, p. 4075–4080, 2006.
- BADWE, A. S.; PATWARDHAN, S. C.; GUDI, R. D. Closed-loop identification using direct approach and high order arx/gobf-arx models. *Journal of Process Control*, v. 21, p. 1056–1071, 2011.

- BALAGUER, P.; ALFARO, V.; ARRIETA, O. Second order inverse response process identification from transient step response. *ISA Transactions*, v. 50, n. 2, p. 231–238, 2011.
- BARRA, B. A. L. de la; JIN, L.; KIM, Y. C.; MOSSBERG, M. Identification of first-order time-delay systems using two different pulse inputs. In: 17TH IFAC WORLD CONGRESS. Seoul (Korea), 2008. p. 14366 – 14371.
- BARRA, B. A. L. de la; MOSSBERG, M. Identification of under-damped second-order systems using finite duration rectangular pulse inputs. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE. New York (USA), 2007. p. 834 – 839.
- BARROS, P. R.; JUNIOR, G. A.; SANTOS, J. B. M. dos. Two-input two-output laboratory-scale temperature system based on peltier modules. In: 17TH IFAC WORLD CONGRESS. Seoul, Korea, 2008. p. 9737–9772.
- BODIN, P.; SILVA, T. O. e; WAHLBERG, B. On the construction of orthonormal basis functions for system identification. In: 13TH IFAC WORLD CONGRESS. San Francisco, USA, 1996. v. 1, p. 369–374.
- BROOME, P. W. Discrete orthonormal sequences. *Journal of the Association for Computing Machinery*, v. 12, n. 2, p. 151–168, 1965.
- BRUWER, M. J.; MACGREGOR, J. F. Robust multi-variable identification: optimal experimental design with constraints. *Journal of Process Control*, v. 16, p. 581–600, 2006.
- CHANG, R.; SHEN, S.; YU, C. Derivation of transfer function from relay feedback methods. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 31, p. 855–860, 1992.
- CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. New York, USA: Oxford University Press, 1999.
- CHEN, J. System identification and control of fopdt or sopdt processes. *Advanced Materials Research*, v. 317, p. 2393–2397, 2011.
- CHEN, L.; LI, J.; DING, R. Identification for the second-order systems based on the step response. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 53, p. 1074–1083, 2011.
- CLEMENT, P. R. Laguerre functions in signal analysis and parameter identification. *Journal of the Franklin Institute*, v. 313, n. 2, p. 85–95, 1982.

CLOWES, G. J. Choice of the time-scaling factor for linear system approximations using orthonormal laguerre functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 10, p. 487–489, 1965.

CLUETT, W. R.; WANG, L. Some asymptotic results in recursive identification using laguerre models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 5, p. 313–333, 1991.

CONNER, J. S.; SEBORG, D. E. An evaluation of mimo input designs for process identification. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 43, 2004.

DARBY, M. L.; NIKOLAOU, M. Multivariable system identification for integral controllability. *Automatica*, v. 45, p. 2194–2204, 2009.

DESCHRIJVER, D.; DHAENE, T. Parametric identification of frequency systems using orthonormal rational bases. In: 14TH IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM IDENTIFICATION. Newcastle, Australia, 2006. p. 837–842.

DONKELAAR, E. T. van; HEUBERGER, P. S. C.; HOF, P. M. J. V. den. Identification of a fluidized catalytic craking unit: an orthonormal basis functions approach. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE. Philadelphia, USA, 1998. p. 1814–1917.

DU, Y. Y.; TSAI, J. S. H.; PATIL, H.; SHIEH, L. S.; CHEN, Y. Indirect identification of continuous-time delay systems from step response. *Applied Mathematical Modelling*, v. 35, p. 594–611, 2011.

EYKHOFF, P. *System Identification: Parameter and State Estimation*. Londres: Wiley & Sons, 1974.

FEDELE, G. A new method to estimate a first-order plus time delay model from step response. *Journal of the Franklin Institute*, v. 346, p. 1–9, 2009.

FERNANDO, K. V.; NICHOLSON, H. Singular perturbational model reduction of balanced systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 27, n. 2, p. 466–468, 1982.

GAIKWAD, S. V.; RIVERA, D. E. Controle relevant input signal design for multivariable system identification: Application to high-purity distillation. In: 13TH IFAC WORLD CONGRESS. New York, EUA, 1996. p. 349–354.

GARCIA, C. E.; MORARI, M. Internal model control. 2. design procedure for multivariable systems. *Ind. Eng. Chem. Process Des.*, v. 21, p. 308–323, 1985.

- GEVERS, M.; BOMBOIS, X. From open-loop to control-oriented design. In: 14TH IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM IDENTIFICATION. Newcastle, Australia, 2006. p. 1329–1334.
- GLOVER, K. All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their l-infinity error bounds. *International Journal of Control*, v. 39, n. 6, p. 741–766, 1984.
- GOLDSMID, H. J. *Electronic Refrigeration*. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall, Inc, 1986.
- GOMEZ, J. C.; BAEYENS, E. Identification of block-oriented nonlinear systems using orthonormal bases. *Journal of Process Control*, v. 14, p. 685–697, 2004.
- HANG, C. C.; ASTROM, K. J.; WANG, Q. G. Relay feedback auto-tuning of process controllers - a tutorial review. *Ind. Eng. Chem.*, v. 12, p. 143–163, 2002.
- HEAD, J. W. Approximation to transient by means of laguerre series. *Cambridge Philosophy Society*, v. 52, p. 64–651, 1956.
- HERRERA, J.; IBEAS, A. On-line delay estimation for stable, unstable and integrating systems under step response. *ISA Transactions*, v. 51, p. 351–361, 2012.
- HEUBERGER, P.; HOF, P. V. den; WAHLBERG, B. *Modeling and Identification with Rational Orthonormal Basis Functions*. USA: Springer-Verlag London Limited, 2005.
- HEUBERGER, P. S. C.; HOF, P. M. J. V. den. The hambo transform: A signal and system transform induced by generalized orthonormal basis functions. In: 13TH IFAC WORLD CONGRESS. San Francisco, USA, 1996. p. 357–362.
- HEUBERGER, P. S. C.; HOF, P. M. J. V. den; BOSGRA, O. H. Approximate system identification using system based orthonormal functions. In: 29TH CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL. Honolulu, Hawaii, 1990. p. 1086–1092.
- HEUBERGER, P. S. C.; HOF, P. M. J. V. den; BOSGRA, O. H. A generalized orthonormal basis for linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, n. 3, p. 451–465, 1995.
- HJALMARSSON, H. From experiment design to closed loop control. *Automatica*, v. 41, n. 3, p. 393–438, 2005.

- HOF, P. M. J. V. den; HEUBERGER, P. S. C.; BOKOR, J. System identification with generalized orthonormal basis functions. *Automatica*, v. 31, n. 12, p. 1821–1834, 1995.
- HUANG, B. J.; DUANG, C. L. System dynamic model and temperature control of a thermoelectric cooler. *International Journal of Refrigeration*, v. 23, p. 197–207, 2000.
- JACOBSEN, E. W.; SKOGESTAD, S. Identification of dynamic models for ill-conditioned plants - a benchmark problem. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE. Groningen, The Netherlands, 1993.
- KAMMLER, D. W.; MCGLINN, R. J. A bibliography for approximation with exponential sums. *Journal of Computers on Applied Mathematics*, v. 4, n. 2, p. 167–173, 1987.
- KAUTZ, W. H. Transient synthesis in the time domain. *IRE Transactions on Circuit Theory*, v. 3, p. 29–39, 1954.
- KING, R. E.; PARASKEVOPOULOS, P. N. Digital laguerre filters. *Circuit Theory and Applications*, v. 5, p. 81–91, 1977.
- KING, R. E.; PARASKEVOPOULOS, P. N. Parametric identification of discrete time siso systems. *International Journal of Control*, v. 30, p. 1023–1029, 1979.
- KOUNG, C.; MACGREGOR, J. Design of identification experiments for robust control. a geometric approach for bivariate processes. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 32, p. 1658–1666, 1993.
- KOUNG, C.-W.; MACGREGOR, J. F. Identification for robust multivariable control: the design of experiments. *Automatica*, v. 30, p. 1541–1554, 1994.
- KREYSIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley and Sons, 1978.
- KURAMOTO, A. S.; VAILLANT, O. R.; GARCIA, C. Effectiveness of signal excitation design methods for ill-conditioned processes identification. In: 8TH IFAC SYMPOSIUM ON ADVANCED CONTROL OF CHEMICAL PROCESSES. Furama Riverfront, Singapore, 2012. p. 337–342.
- LAI, D. C. Signal processing with orthonormalized exponentials. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 27, p. 409–420, 1985.

- LAUB, A. J.; HEATH, M. T.; PAGE, C. C.; WARD, R. C. Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 32, n. 2, p. 115–122, 1987.
- LECCHINI, A.; GEVERS, M. Explicit expression of the parameter bias in identification of laguerre models from step response. *System and Control Letters*, v. 52, p. 149–165, 2004.
- LEE, J.; KIM, J.-S.; BYEON, J.; SUNG, S. W.; EDGAR, T. F. Relay feedback identification for processes under drift and noise environments. *AIChE Journal*, v. 57, n. 7, p. 1809–1816, 2011.
- LEE, J.; SUNG, S. W.; EDGAR, T. F. Area method for a biased relay feedback system. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 49, p. 8016–8020, 2010.
- LEE, J.; SUNG, S. W.; EDGAR, T. F. Area methods for relay feedback tests. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 49, p. 7807–7813, 2010.
- LEE, Y. W. Synthesis of electrical networks by means of fourier transforms of laguerre's functions. *Journal of Mathematics and Philosophy*, v. 11, p. 83–113, 1931.
- LEE, Y. W. *Statistical Theory of Communication*. New York, USA: John Wiley and Sons, 1960.
- LEVA, A. Model-based proportional-integral-derivative autotuning improved with relay feedback identification. *IEE Control Theory Applications*, v. 152, n. 2, p. 247–256, 2005.
- LI, W.; ESKINAT, E.; LUYBEN, W. L. An improved autotune identification method. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 30, p. 1530–1541, 1991.
- LI, W.; LEE, J. H. Control relevant identification of ill-conditioned systems: Estimation of gain directionality. *Computers Chem. Eng.*, v. 20, n. 8, p. 1023–1042, 1996.
- LI, Y. Y.; QI, G.-Q.; SHENG, A. Frequency parameterization of h-infinity pid controllers via relay feedback: A graphical approach. *Journal of Process Control*, v. 21, p. 448–461, 2011.
- LIU, T.; GAO, F. A generalized relay identification method for time delay and non-minimum phase processes. *Automatica*, v. 45, n. 4, p. 1072–1079, 2009.

- LIU, T.; GAO, F. A frequency domain step response identification method for continuous-time processes with time delay. *Journal of Process Control*, v. 20, n. 7, p. 800–809, 2010.
- LIU, Y.; ANDERSON, B. D. O. Singular perturbation approximation of balanced systems. *International Journal of Control*, v. 50, n. 4, p. 1379–1405, 1989.
- LJUNG, L. Choice of prefilters and forgetting factors in noise free identification. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE. Pittsburgh (USA), 1987. p. 1409–1415.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. New York, USA: Prentice Hall, 1999.
- LJUNG, L. Identification for control - simples process models. In: 41TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL. Newcastle, Australia, 2002. p. 4652–4657.
- LUYBEN, W. L. Derivation of transfer functions for highly nonlinear distillations columns. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 26, n. 12, p. 2490–2495, 1987.
- LUYBEN, W. L. Getting more information from relay-feedback tests. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 40, p. 4391–4402, 2001.
- MADAKYARU, M.; NARANG, A.; PATWARDHAN, S. C. Development of arx models for predictive control using fractional order and orthonormal basis filter parametrization. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 48, p. 8966–8979, 2009.
- MAJHI, S. Relay based identification of process with time delay. *Journal of Process Control*, v. 17, p. 93–101, 2007.
- MAJHI, S. Relay based identification of process with time delay. *Journal of Process Control*, v. 17, p. 93–101, 2007.
- MALMQUIST, F. Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points. *Comptes Rendus du Sixième Congrès des mathématiciens scandinaves*, p. 253–259, 1925.
- MBAREK, A.; MESSAOUD, H.; FAVIER, G. Robust predictive control using kautz model. In: 10TH IEEE INTERNACIONAL CONFERENCE ON ELECTRONICS, CIRCUITS AND SYSTEMS. Sharjah, United Arab Emirates, 2003. p. 184–187.



MENDEL, J. M. A unified approach to the synthesis of orthonormal exponential functions useful in systems analysis. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, v. 2, n. 1, p. 54–62, 1966.

MICCHI, A.; PANNOCCHIA, G. Comparison of input signals in subspace identification of multivariable ill-conditioned systems. *Journal of Process Control*, v. 18, p. 582–593, 2008.

MIDDELTON, R. H.; GOODWIN, G. C. *Digital Control and Estimation*. New York, USA: Prentice Hall, 1990.

MISRA, P.; NIKOLAOU, M. Input design for model order determination in subspace identification. *AIChE Journal*, v. 49, n. 8, p. 2124–2132, 2003.

MOORE, B. C. Principal components analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. *Chemical Engineering Science*, v. 38, n. 11, p. 1881–1891, 1981.

NALBANTOGLU, V.; BOKOR, J.; BALAS, G.; GASPAR, P. System identification with generalized orthonormal basis: an application to flexible structures. *Control Engineering Practice*, v. 11, p. 245–259, 2003.

NELLES, O. *Nonlinear System Identification*. 1st. ed. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2001.

NINNESS, B. M.; GÓMEZ, J. Asymptotic mimo analysis of mimo systems estimates by the use of orthonormal bases. In: 13TH IFAC WORLD CONGRESS. San Francisco, USA, 1996. p. 363–368.

NINNESS, B. M.; GÓMEZ, J.; WELLER, S. MIMO system identification using orthonormal basis function. In: 34TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL. New Orleans, USA, 1995. p. 703–708.

NINNESS, B. M.; GUSTAFSSON, F. A unifying construction of orthonormal bases for system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 4, p. 515–521, 1997.

NINNESS, B. M.; HJALMARSSON, H. Accurate quantification of variance error. In: 15TH IFAC WORLD CONGRESS. Barcelona, Spain, 2002.

- NINNESS, B. M.; HJALMARSSON, H. Variance error quantifications that are exact for finite model order. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 49, n. 12, p. 12–26, 2004.
- NURGES, Y. Laguerre models in problems of approximation and identification of discrete systems. *Automation and Remote Control*, v. 48, p. 346–352, 1987.
- PANDA, R. C.; YU, C. C. Shape factor of relay response curves and its use in autotuning. *Journal of Process Control*, v. 15, p. 893–906, 2005.
- PATWARDHAN, S. C.; SHAH, S. L. From data to diagnostics and control using generalized orthonormal basis filter. part i: development of state observers. *Journal of Process Control*, v. 15, p. 819–835, 2005.
- PINTELON, R.; SCHOUKENS, J. *System Identification - A Frequency Domain Approach*. New York, USA: IEEE Press, 2001.
- RAKE, H. Step response and frequency response methods. *Automatica*, v. 16, p. 519–526, 1980.
- RAMAKRISHNAN, V.; CHIDAMBARAM, M. Estimation of a soptd transfer function model using a single asymmetrical relay feedback test. *Computers and Chemical Engineering*, v. 27, p. 1779–1784, 2003.
- RIFFAT, S. B.; MA, X. Thermoelectrics: a review of present and potential applications. *Applied Thermal Engineering*, v. 23, p. 913–935, 2003.
- RIVERA, D. E.; LEE, H.; MITTELMANN, H. D.; BRAUN, M. W. High-purity distillation: using plant-friendly multisine signals to identify a strongly interactive process. *IEEE Control System Magazine*, v. 28, p. 72–89, 2007.
- ROSS, D. C. Orthonormal exponentials. *IEEE Transactions on Communication and Electronics*, v. 12, p. 173–176, 1964.
- SAGFORS, M. F.; WALLER, K. V. Multivariable control of ill-conditioned distillation columns utilizing process knowledge. *Journal of Process Control*, v. 8, n. 3, p. 197–208, 1998.
- SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning. *Journal of Process Control*, v. 13, p. 291–309, 2003.

- SKOGESTAD, S.; LUNDSTROM, P.  $\mu$ -optimal lv-control of distillation column. *Computer Chem. Eng.*, v. 14, p. 401–413, 1990.
- SKOGESTAD, S.; MORARI, M.; DOYLE, J. C. Robust control of ill-conditioned plant: high-purity distillation. *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 33, p. 1092–1105, 1988.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control*. Inglaterra: John Wiley Sons, 2005. 574 p. ISBN 047001167X.
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. *System Identification*. New York: Prentice Hall, 1989.
- SRINIVASAN, K.; CHIDAMBARAM, M. Modified relay feedback method for improved system identification. *Computers and Chemical Engineering*, v. 27, p. 727–732, 2003.
- SUNG, S. W.; LEE, I. B.; LEE, B. K. On-line process identification and automatic tuning method for pid controllers. *Chem. Eng. Sci.*, v. 53, n. 10, p. 1847–1859, 1998.
- TAKENAKA, S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolation. *Japanese Journal of Mathematics*, v. 2, p. 129–145, 1925.
- TAN, A. H.; YAP, T. T. V. Signal design for the identification of multivariable ill-conditioned systems using virtual transfer function between inputs. *IET Control Theory and Applications*, v. 6, n. 3, p. 394–402, 2012.
- TAN, K. K.; LEE, T. H.; JIANG, X. On-line relay identification, assessment and tuning of pid controller. *Journal of Process Control*, v. 11, p. 483–496, 2001.
- THYAGARAJAN, T.; YU, C. C. Improved auto-tuning using shape factor from relay feedback. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 42, p. 4425–4440, 2003.
- TUFA, L.; RAMASAMY, M.; SHUHAIMI, M. Improved method for development of parsimonious orthonormal basis filter models. *Journal of Process Control*, v. 21, p. 36–45, 2011.
- TULLEKEN, H. Generalized binary noise test-signal concept for improved identification-experiment design. *Automatica*, v. 26, n. 1, p. 37–49, 1990.
- UEMURA, K.-I. Commercial peltier modules. In: ROWE, D. M. (Ed.). *CRC Handbook of Thermoelectrics*. [S.l.]: CRC Press, 1995. p. 621–631.
- VIVEK, S.; CHIDAMBARAM, M. Identification using single symmetrical relay feedback test. *Computers and Chemical Engineering*, v. 29, p. 1625–1630, 2005.

- VIVEK, S.; CHIDAMBARAM, M. An improved relay auto tuning of pid controllers for unstable foptd systems. *Computers and Chemical Engineering*, v. 29, p. 2060–2068, 2005.
- VIVEK, S.; CHIDAMBARAM, M. An improved relay auto tuning of pid controllers for critically damped soptd systems. *Chemical Engineering Communications*, v. 199, n. 11, p. 1437–1462, 2012.
- WAHLBERG, B. System identification using laguerre models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 5, p. 551–562, 1991.
- WAHLBERG, B. System identification using kautz models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 6, p. 1276–1282, 1994.
- WAHLBERG, B. On approximation of stable linear dynamical systems using laguerre and kautz functions. *Automatica*, v. 32, n. 5, p. 693–708, 1996.
- WALSH, J. L. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, v. 20, 1935.
- WANG, L.; CLUETT, W. *From Plant Data to Process Control - Ideas for process identification and PID design*. London, England: Taylor & Francis, 2000.
- WANG, L. P. Discrete model predictive controller design using laguerre functions. *Journal of Process Control*, v. 14, p. 131–142, 2004.
- WANG, Q.; LEE, T. H.; LIN, C. *Relay Feedback - Analysis, Identification and Control*. Londres: Springer, 2003. 381 p. ISBN 1852336501.
- WANG, Q.-G.; HANG, C.-C.; ZOU, B. Low order modeling from relay feedback. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 36, p. 375–381, 1997.
- WIENER, N. *The Theory of Prediction, Modern Mathematics for Engineers*. New York: McGraw-Hill, 1956. 226 p.
- XIE, L. L.; LJUNG, L. Asymptotic variance expressions for estimated frequency functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, p. 1887–1899, 2001.
- YOUNG, N. *An Introduction to Hilbert Space*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- YOUNG, T. Y.; HUGGINS, W. H. Complementary signals and orthogonalized exponentials. *IRE Transactions on Circuit Theory*, v. 9, p. 362–370, 1962.

YU, C.-C. *Autotuning of PID Controllers - Relay Feedback Approach*. Londres: Springer, 1999. 226 p. (Advances in PID Control). ISBN 3540762507.

ZHAN, Q.; LI, T.; GEORGAKIS, C. Steady state optimal test signal design for multivariable model based control. *Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 45, p. 8514–8527, 2006.

ZHU, Y.; STEC, P. Simple control-relevant identification test methods for a class of ill-conditioned processes. *Journal of Process Control*, v. 16, p. 1113–1120, 2006.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimun settings for automatic controllers. *Transactions of the A.S.M.E.*, v. 64, p. 759–768, 1942.

# Apêndice A

## Produtos de Matrizes

### A.1 Produto de Hadamard

O produto de Hadamard é uma operação binária entre duas matrizes de mesma dimensão. Essa operação também é chamada de produto elemento por elemento ou produto de Schur.

Sejam duas matrizes de mesma dimensão  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , o produto de Hadamard  $A \circ B$  é uma matriz de mesma dimensão, ou seja,  $A \circ B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  em que cada elemento é dado por

$$(A \circ B)_{ij} = A_{ij} \cdot B_{ij} \quad (\text{A.1})$$

em que os índices  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

De forma explícita

$$A \circ B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{12}B_{12} & \dots & A_{1n}B_{1n} \\ A_{21}B_{21} & A_{22}B_{22} & \dots & A_{2n}B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_{m1} & A_{m2}B_{m2} & \dots & A_{mn}B_{mn} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Produto de Kronecker

O produto de Kronecker é uma operação entre duas matrizes de dimensões quaisquer em que o resultado é uma matriz em bloco.

Seja uma matriz  $A$  de dimensão  $m \times n$  e uma matriz  $B$  de dimensão  $p \times q$ , o produto de Kronecker  $A \otimes B$  é uma matriz em bloco de dimensão  $mp \times nq$  em que cada elemento é dado por

$$(A \otimes B)_{ij} = A_{ij}B \quad (\text{A.4})$$

em que os índices  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

De forma explícita

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \otimes B \quad (\text{A.5})$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$