



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E INFORMÁTICA
UNIDADE ACADÊMICA DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Trabalho de Conclusão de Curso

*Avaliação da Estabilidade de Modelo Não-Linear de
Para-raios*

Gabriel Vidal Negreiros Bezerra

Campina Grande - Paraíba - Brasil

Setembro de 2014

Gabriel Vidal Negreiros Bezerra

*Avaliação da Estabilidade de Modelo Não-Linear de
Para-raios*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: George Rossany Soares de Lira.

Doutor em Engenharia Elétrica

Campina Grande - Paraíba - Brasil

Setembro de 2014

Gabriel Vidal Negreiros Bezerra

*Avaliação da Estabilidade de Modelo Não-Linear de
Para-raios*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Banca Examinadora

George Rossany Soares de Lira
Doutor em Engenharia Elétrica

Karcus Marcelus Colaço Dantas
Doutor em Engenharia Elétrica

Campina Grande - Paraíba - Brasil
Setembro de 2014

De perto, na vida real, toda reta é uma curva.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois, mesmo sendo tão grande, se faz tão perto em toda a minha vida. Mostrou-me que mesmo tendo criado a ciência de todo o universo, foi capaz de descer e se tornar um de nós.

Agradeço à minha Flor, Valdice, que nos últimos anos tem levado esse curso junto comigo. A suas orações, presença, alegria e carinho deram mais cores a minha vida.

Agradeço à minha mãe e irmãos, que sempre me ajudaram e apoiaram nas noites viradas e surpresas acadêmicas. Uma maravilhosa família faz toda diferença.

Agradeço a Luiz Augusto pelo companheirismo e apoio que sempre me deu nas horas que precisei. De fato, um irmão na fé e equipe de LAT.

Agradeço aos colegas no LAT: José Fidelis, Marcus Túlius, Filipe Lucena, Lenilson, Wellington Silva, Ramon Dias, Raphael Borges, Valdemir Brito, Jalberth Fernandes e Ronimack Trajano pela amizade e apoio, por partilhar dos conhecimentos e por tornar o ambiente do LAT mais gratificante.

Agradeço aos professores do departamento de engenharia elétrica da UFCG. Sobretudo os professores George Rossany, Tarso Vilela, Karcus Marcelus e Edson Guedes, que acreditaram no meu potencial elétrico e tanto contribuíram para a minha formação intelectual.

Por fim, agradeço à coordenação do DEE da UFCG, Damásio Fernandes, Adail Silva e Tchaikovsky Oliveira por tratarem os alunos com respeito e os ajudarem de forma louvável. Tais são muito mais que professores e funcionários; são colegas e amigos que nos impulsionam para ter uma vida digna.

Gabriel Vidal

Resumo

Este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica de vários modelos de para-raios de óxido de zinco propostos na literatura, dos quais é escolhido um modelo para um estudo de estabilidade entrada-saída \mathcal{L}_2 . Na análise de estabilidade são utilizados os conceitos de função de Lyapunov e passividade, voltados a sistemas não lineares. Os resultados do trabalho indicam que o modelo proposto por Levinson e Philipp possui estabilidade \mathcal{L}_2 .

Palavras-chaves: Para-raios. Modelos. Estabilidade de Sistemas.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Organização do Trabalho	2
2 Fundamentação Teórica	3
2.1 Para-Raios de ZnO	3
2.1.1 Características Construtivas	3
2.1.2 Características Elétricas do Para-raios de ZnO	6
2.2 Modelos de Para-Raios	9
2.2.1 Modelo Convencional	9
2.2.2 Modelo de Levinson & Philipp	9
2.2.3 Modelo de Tominaga	11
2.2.4 Modelo de Horiuchi	12
2.2.5 Modelo de Schmidt	13
2.2.6 Modelo de Hileman	14
2.2.7 Modelo de Haddad	14
2.2.8 Modelo IEEE W. G. 3.4.11	15
2.2.9 Modelo de Kim	16
2.2.10 Modelo de Pinceti	16
2.2.11 Modelo de Fernandez & Diaz	17

2.2.12	Modelo de Popov	17
2.2.13	Modelo de Magro	18
2.2.14	Modelo de Lin Xin	18
2.3	Sistemas Não Lineares	19
2.3.1	Definições	19
2.3.2	Exemplos	21
2.4	Fundamentos da Teoria de Estabilidade	23
2.4.1	Espaço de Estados	23
2.4.2	Pontos de Equilíbrio e Estabilidade	25
2.4.2.1	Pontos de Equilíbrio de Sistemas Autônomos	25
2.4.2.2	Estabilidade de Pontos de Equilíbrio	26
2.4.2.3	Estabilidade Local e Global	29
2.4.3	Método Direto de Lyapunov	30
2.4.3.1	Funções definidas, semi-definidas e indefinidas	31
2.4.3.2	Função de Lyapunov	32
2.4.3.3	Teorema de Lyapunov (Estabilidade Local)	33
2.4.3.4	Teorema de Lyapunov (Estabilidade Global)	33
2.4.3.5	Teorema de Lyapunov (Instabilidade)	34
2.4.4	Função de Lyapunov de Sistemas Lineares	34
2.4.4.1	Formas Quadráticas e Matrizes Positivas Definidas	34
2.4.4.2	Função de Lyapunov par a SLIT	36
2.4.5	Função de Lyapunov de Sistemas Não Lineares	37
2.4.5.1	Teorema de Krasovskii	37
2.4.5.2	Teorema de Krasovskii Generalizado	37
2.5	Estabilidade \mathcal{L}_2	38
2.5.1	Passividade	41
2.5.2	Lema Escolhido	43
3	Avaliação de Estabilidade do Modelo de Levinson & Philipp	45
3.1	Representação do Modelo em Equações de Estado	46
3.2	Sistema Não Forçado	48

3.3 Sistema Forçado	50
4 Conclusões	55
Referências Bibliográficas	56

Lista de Figuras

2.1	Estrutura de um para-raios de ZnO com invólucro de porcelana (ABB, 2009).	4
2.2	Varistores com diâmetros e espessuras diferentes (HINRICHSEN, 2011).	5
2.3	(a) Operação do dispositivo de alívio de pressão. (b) Atuação correta da válvula de alívio de pressão (GONTIJO et al., 2003).	6
2.4	Curva característica típica de um de um para-raios de ZnO e de SiC (ABB, 1995).	7
2.5	Curva V-I típica de um varistor de ZnO (BARBOSA, 2007).	8
2.6	Modelo da resistência não linear (Modelo Convencional).	9
2.7	Modelo proposto por Levinson e Philipp (1975).	10
2.8	Modelo proposto por Levinson e Philipp com indutância adicionada. Adaptado de (LEVINSON; PHILIPP, 1976).	10
2.9	Modelo da indutância linear (TOMINAGA et al., 1979).	11
2.10	Modelo proposto por Horiuchi et al. (1988).	13
2.11	Modelo proposto por Schmidt et al. (1989).	13
2.12	Modelo proposto por Hileman et al. (1990).	14
2.13	Modelo proposto por Haddad et al. (1990).	15
2.14	Modelo proposto pelo (IEEE Working Group 3.4.11, 1992).	15
2.15	Modelo proposto por Kim et al.	16
2.16	Modelo proposto por Pinceti e Giannettoni (1999).	16
2.17	Modelo proposto por Fernandez e Diaz (2001).	17
2.18	Microestrutura do varistor de ZnO (XIN et al., 2011).	19
2.19	Sistema estável no sentido de Lyapunov (SILVA, 2006)	27
2.20	Sistema instável no sentido de Lyapunov (SILVA, 2006)	27

2.21	Sistemas assintoticamente estável. (SILVA, 2006)	28
2.22	Bacias de atração e separatriz (SILVA, 2006)	28
2.23	Sistema exponencialmente estável. (SILVA, 2006)	29
2.24	Representação geométrica de uma função positiva definida (SILVA, 2006) .	31
2.25	Representação geométrica de uma função de Lyapunov (SILVA, 2006) . . .	32
2.26	Caso em que o sistema não é globalmente estável (SILVA, 2006)	34
2.27	Representação da característica de um resistor passivo.	41
2.28	Exemplos de característica passivas e não passiva (KHALIL; GRIZZLE, 2002)	42
3.1	Ajuste de curva da característica $v - i$ do para-raios.	46
3.2	Aproximações do Circuito de Levinson e Philipp.	47

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Dada a importância dos estudos e simulações do sistema elétrico, é fundamental a avaliação dos modelos que representam os equipamentos. Modelos ineficientes podem prejudicar os resultados de uma simulação, tornando-a inverossímil em face ao sistema real, comprometendo os estudos, análises ou projetos que dependem dela.

Um modelo pode ser avaliado quanto à exatidão, oscilação, resposta em frequência, estabilidade, dentre outros.

Uma análise que apresenta um importante papel na avaliação de um modelo é o estudo da estabilidade. Tal análise pode ser realizada sob diversas perspectivas, das quais a estabilidade entrada-saída é a mais familiar. A qual enuncia que um sistema é estável se, para qualquer sinal de entrada limitado, o sinal de saída também é limitado.

A estabilidade de sistemas lineares pode ser facilmente avaliada. No entanto, sistemas não lineares, além de possuírem uma dinâmica muito mais complexa que a dos sistemas lineares, necessitam de estudos mais elaborados para a verificação da sua estabilidade.

Dentre os equipamentos de potência que apresentam uma latente necessidade de ser avaliado quanto à estabilidade, pode-se citar o para-raios. Isso se deve ao fato de serem equipamentos com característica não linear e que apresentam comportamento variável no tempo e na frequência, o que requer modelos mais elaborados. A maioria dos modelos propostos na literatura não foram avaliados quanto à estabilidade. Este é o objetivo deste trabalho.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar alguns modelos de para-raios propostos na literatura e, dentre eles, avaliar a estabilidade entrada-saída, do tipo \mathcal{L}_2 , de um modelo de para-raios. Para tal análise de estabilidade, será feita uma fundamentação teórica, após a qual, serão apresentados os cálculos algébricos para a análise da estabilidade.

1.3 Organização do Trabalho

O presente trabalho é composto por 4 capítulos. No Capítulo 2 é realizada uma fundamentação teórica dos conceitos necessários à compressão do estudo. No Capítulo 3 são realizados os cálculos da análise de estabilidade. Finalmente, no Capítulo 4 são apresentadas as conclusões.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos necessários ao objetivo do trabalho. A seguir, serão apresentadas as características do para-raios, uma revisão de alguns modelos, definição e apresentação das especificidades de sistemas não lineares e de conceitos relativos à estabilidade de sistemas lineares, bem como não lineares. Essas informações fornecerão subsídio para a escolha e avaliação da estabilidade de um modelo proposto.

2.1 Para-Raios de ZnO

Os para-raios de óxido de zinco (ZnO) são dispositivos essenciais na proteção de equipamentos dos sistemas elétricos. Sua função é limitar sobretensões que, por ventura, incidam sobre o equipamento que está sendo protegido. Enquanto está submetido ao valor de tensão nominal do sistema, o para-raios apresenta uma impedância da ordem de centenas de $M\Omega$, conduzindo uma corrente da ordem de miliampères. No entanto, quando o para-raios é submetido à sobretensões apresenta uma baixa impedância, possibilitando que a corrente do surto seja drenada à terra. Dessa forma, o nível de sobretensão é atenuado, minimizando seus efeitos sobre o equipamento que se deseja proteger. Esse princípio de funcionamento deve-se à elevada não linearidade que a curva $V - I$ do para-raios apresenta.

2.1.1 Características Construtivas

Os para-raios a óxido de zinco são equipamentos de estrutura simples. Basicamente são constituídos de uma coluna de varistores envolvida por uma coluna de porcelana ou mate-

rial polimérico, havendo ainda alguns outros componentes estruturais. Sua configuração depende do sistema ao qual será aplicado, mas no aspecto geral, segue o esquema mostrado na Figura 2.1.

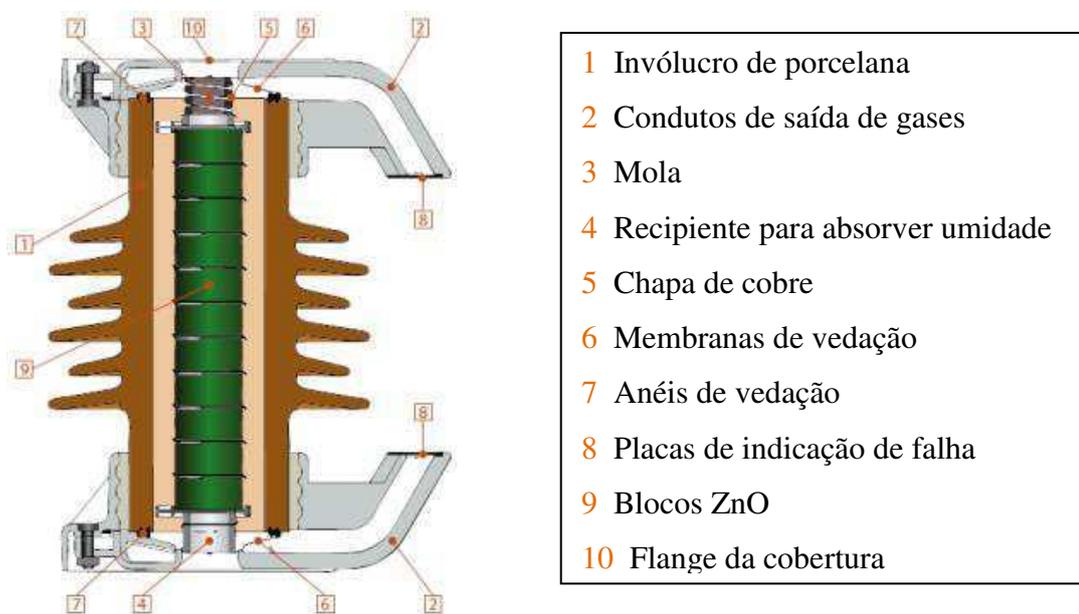


Figura 2.1 – Estrutura de um para-raios de ZnO com invólucro de porcelana (ABB, 2009).

Os para-raios de maior comprimento geralmente possuem anéis equalizadores para manter a tensão uniforme e aceitável ao longo do seu comprimento. Nesse caso, para-raios sem anéis equalizadores podem ter a sua vida útil comprometida (ABB, 2009).

A base e o topo do para-raios são constituídos de flanges de alumínio, fixados com a ajuda de cimento do tipo Portland ou a base de enxofre, sendo esse último uma melhor escolha. O cimento a base de enxofre, além de não causar corrosão no alumínio, tem uma aplicação mais fácil e atinge mais rapidamente o seu estado final de rigidez mecânica (HINRICHSEN, 2011).

Para um desempenho satisfatório e prolongação de sua vida útil, é necessário que o para-raios esteja hermeticamente fechado. O arranjo de vedação em cada extremidade é constituído de chapa de aço inoxidável com um anel de vedação de borracha. A chapa exerce uma pressão contínua sobre o anel de vedação contra o invólucro, garantindo uma vedação eficaz. Para fixar a coluna de varistores na direção longitudinal, é utilizada uma mola (ABB, 2009).

O principal elemento de um para-raios é o varistor ou bloco de ZnO, que apresenta alta não linearidade entre a tensão e a corrente. Ele corresponde a uma estrutura cilíndrica e seu diâmetro é escolhido de acordo com a capacidade de absorção de energia desejada, variando de 30 mm, para sistemas de distribuição, até 100 mm ou mais, para sistemas de alta ou extra alta tensão. A espessura das pastilhas geralmente varia entre 20 mm e 45 mm, dependendo dos métodos de produção utilizados, e geralmente é limitada pela homogeneidade dos grãos de ZnO. Quanto maior as dimensões do varistor, mais difícil conseguir uma boa homogeneidade na distribuição interna do óxido de zinco (HINRICHSEN, 2011). Na Figura 2.2 podem ser observados varistores com diversas dimensões.



Figura 2.2 – Varistores com diâmetros e espessuras diferentes (HINRICHSEN, 2011).

O invólucro de porcelana ou material polimérico evita a penetração de umidade ou de algum tipo de poluição. Essa coluna isolante possui aletas (saias) ao longo de todo o seu comprimento, aumentando assim, a distância entre os terminais e, com isso, dificultando a ocorrência de descargas superficiais devido à presença de sujeira ou umidade na superfície do para-raios.

Para reduzir o risco de explosão ou minimizar os seus efeitos, os para-raios apresentam um sistema de alívio de pressão. Em caso de aquecimento interno, com consequente aumento da pressão interna, a válvula de alívio de pressão atua, fazendo com que haja o escape dos gases antes que ocorra o rompimento da porcelana e provoque danos à vida e ao patrimônio. Para indicar que a válvula de alívio de pressão atuou, são colocadas

placas de identificação de falhas que se rompem no momento da atuação, facilitando a identificação. Na Figura 2.3 é ilustrada a operação do dispositivo de alívio de pressão.

Prevendo uma penetração de umidade devido, principalmente, ao envelhecimento da vedação, em alguns projetos de para-raios, são colocados no seu interior, próximo à base, um recipiente para absorver umidade.

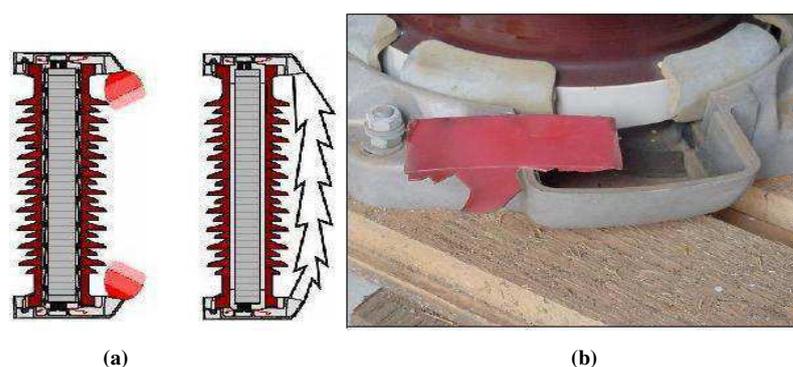


Figura 2.3 – (a) Operação do dispositivo de alívio de pressão. (b) Atuação correta da válvula de alívio de pressão (GONTIJO et al., 2003).

2.1.2 Características Elétricas do Para-raios de ZnO

A principal característica do para-raios à ZnO é a sua alta não linearidade entre a tensão e a corrente (curva V-I). Essa característica representou um avanço em relação aos para-raios convencionais a carboneto de silício (SiC), pois diferente do que ocorre com o SiC, essa característica permite sua conexão direta com o sistema elétrico, gerando apenas uma corrente de fuga da ordem de mA em condições normais de operação. Dispensou-se, então, o uso de centelhadores em série com a coluna de elementos varistores. A Figura 2.4 mostra curvas características típicas de para-raios à ZnO e à SiC (ABB, 1995).

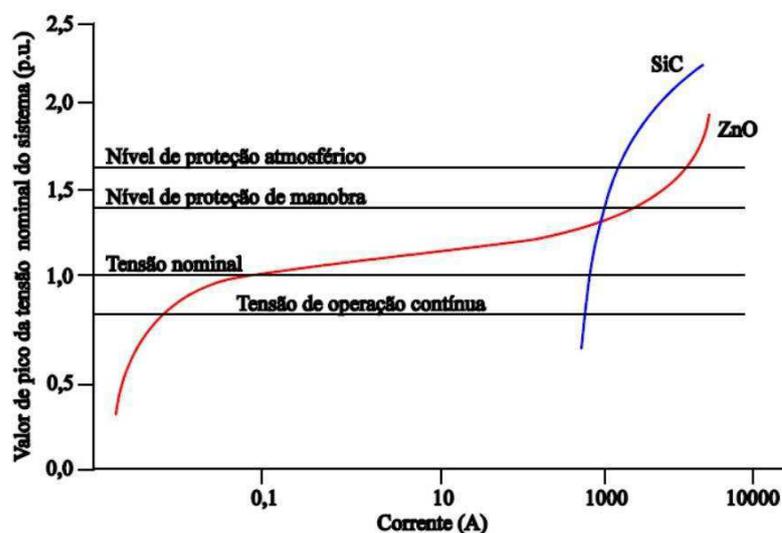


Figura 2.4 – Curva característica típica de um de um para-raios de ZnO e de SiC (ABB, 1995).

Devido a sua característica V-I altamente não linear, no para-raios à ZnO, durante a passagem de uma descarga elétrica, a corrente de fuga, que era da ordem de milipêres, pode atingir quiloampères e, quando cessada a descarga, o para-raios retorna à sua condição normal de operação.

As terminologias tensão nominal (U_r) e Máxima Tensão de Operação Contínua (MCOV), utilizadas em para-raios de ZnO, merecem atenção especial por terem conceitos diferentes dos demais equipamentos. De acordo com normas da IEC e IEEE, essas terminologias são definidas como:

- **Tensão Nominal (U_r)**. Maior valor da tensão RMS à frequência industrial admissível entre os terminais do para-raios, para a qual o para-raios é projetado para funcionar adequadamente em condições de sobretensões temporárias, tal como definido no teste de ciclo de operação (IEC, 2001).
- **Máxima Tensão de Operação Contínua (MCOV)**. Valor máximo de tensão RMS à frequência industrial, que pode ser aplicado continuamente entre os terminais do para-raios (IEEE, 2005).

Diferentemente de outros equipamentos elétricos de potência, como por exemplo, o transformador de potência, a tensão nominal do equipamento para-raios não é o valor da

tensão RMS nominal do sistema para o qual o equipamento foi projetado. Já a MCOV é similar ao conceito de tensão nominal do transformador, ou seja, máximo valor de tensão RMS à frequência industrial, que pode ser aplicado continuamente entre os terminais do equipamento.

O nível de proteção atmosférico e de manobra são valores de tensões de pico resultantes da aplicação de impulso de corrente cuja forma de onda é padronizada, $8/20 \mu s$ e $250/2500 \mu s$, respectivamente.

A curva característica V-I do para-raios de ZnO pode ser dividida em três importantes regiões, conforme a Figura 2.5 (BARBOSA, 2007):

- Região de baixas correntes de operação ou pré-ruptura, também conhecida como região de baixas tensões aplicadas (medida sob aplicação de tensões alternadas ou contínuas);
- Região altamente não linear de operação (medida por impulsos de corrente representando surtos atmosféricos e de manobra);
- Região superior de operação, também conhecida como região de *Upturn* da tensão (medida por correntes tipo $8/20 \mu s$ ou $4/10 \mu s$).

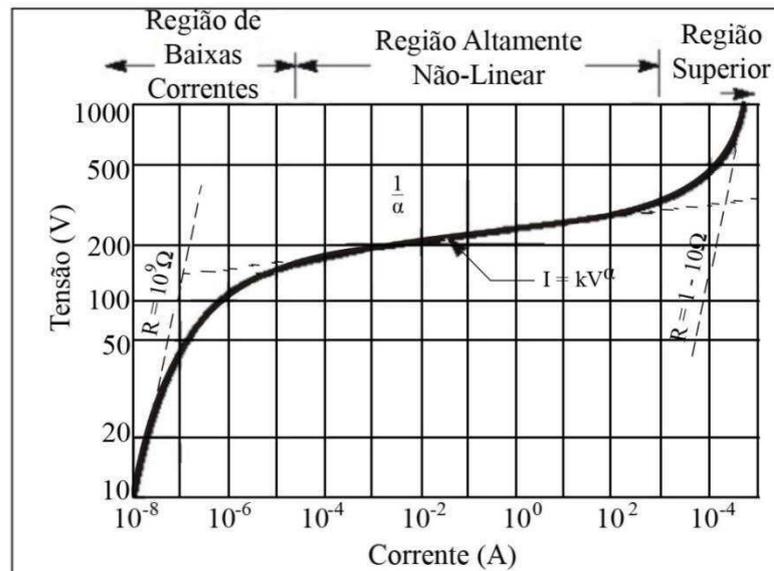


Figura 2.5 – Curva V-I típica de um varistor de ZnO (BARBOSA, 2007).

2.2 Modelos de Para-Raios

2.2.1 Modelo Convencional

Dentre os modelos de para-raios, o mais comum é o modelo convencional, onde a característica V-I do para-raios de ZnO é representada através de um resistor não linear (Figura 2.6) composto por vários segmentos, no qual cada segmento pode ser aproximado por retas ou pela equação (Leuven EMTP Center, 1987).

$$i = p \left(\frac{v}{V_{ref}} \right)^q. \quad (2.1)$$

Em tal equação, os parâmetros i e v são a corrente e a tensão no para-raios, respectivamente, q é o expoente, p o multiplicador para cada segmento e V_{ref} é uma tensão de referência arbitrária que normaliza a equação e previne problemas de representação numérica (*overflow*) durante a potenciação. Estudos mostram que esse modelo pode apresentar imprecisões por não representar a característica dinâmica do para-raios (BAYADI et al., 2003) (LIRA et al., 2012). Por esse motivo, seu uso em estudos de transitórios rápidos é desaconselhado.



Figura 2.6 – Modelo da resistência não linear (Modelo Convencional).

2.2.2 Modelo de Levinson & Philipp

Além do modelo convencional, outros modelos foram propostos ao longo dos anos. Levinson e Philipp (1975) propuseram um circuito composto por uma resistência em série com um circuito RC paralelo (Figura 2.7) para representar o varistor de ZnO. De acordo com os autores, a resistência r_g é equivalente à resistência dos grãos de zinco na microestrutura do varistor e, como seu valor é bastante pequeno, ela é responsável apenas pela subida íngreme da curva característica na região de alta corrente do varistor. Além disso, a resistência não linear R_p e a capacitância C_p foram adicionadas para reproduzir as características elétricas associadas a camada intergranular e representar as componentes resistiva e capacitiva, respectivamente, da corrente total. A resistência não linear e a

capacitância, devem ser determinadas levando-se em consideração a frequência da tensão aplicada, a fim de representar os diferentes comportamentos do varistor para tensões de diversas magnitudes e frequências.

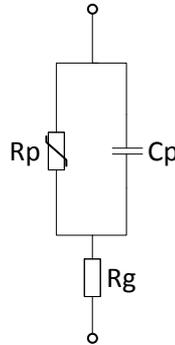


Figura 2.7 – Modelo proposto por Levinson e Philipp (1975).

Até então, tal modelo era limitado para representar o comportamento do varistor em regiões de alta corrente, visto que nessa região o varistor apresenta um comportamento predominantemente indutivo. Por conta disso, Levinson e Philipp (1976), após estudarem o comportamento do varistor de ZnO frente a altas frequências e altas correntes, incluíram em seu modelo anterior uma indutância em série, usada para representar esse efeito indutivo, conforme a Figura 2.8 apresenta.

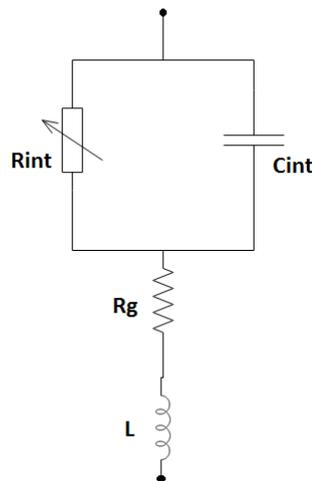


Figura 2.8 – Modelo proposto por Levinson e Philipp com indutância adicionada. Adaptado de (LEVINSON; PHILIPP, 1976).

Esse ultimo modelo de Levinson e Philipp (1976) apresenta características interessantes. Possui representação de fenômenos não lineares, indutivos e capacitivos inerentes

ao para-raios e, além disso, possui uma estrutura simples, facilitando sua utilização. Em testes e simulações anteriores a este trabalho de conclusão de curso, observou-se que o modelo proposto por Levinson e Philipp é promissor para futuros aprimoramentos, na direção do desenvolvimento de um modelo de para-raios preciso (UFCG, 2014).

2.2.3 Modelo de Tominaga

Em 1979, Tominaga et al. propuseram um modelo baseado no efeito dinâmico do para-raios. Eles observaram que o efeito de histerese do para-raios é semelhante ao produzido por uma indutância equivalente em série com uma resistência não linear e propuseram o modelo da Figura 2.9 para simular o efeito de histerese do para-raios por meio da adição de uma indutância L_e em série com uma resistência não linear. Essa abordagem teve algum mérito, pois a tensão sobre a indutância, e, portanto em todo o para-raios, iria aumentar à medida que o tempo de crista da corrente diminuísse. O circuito equivalente proposto por Tominaga et al. (1979) pode ser facilmente utilizado na modelagem de para-raios, embora haja a desvantagem que L_e deve ser determinado de antemão pela forma da corrente estimada.

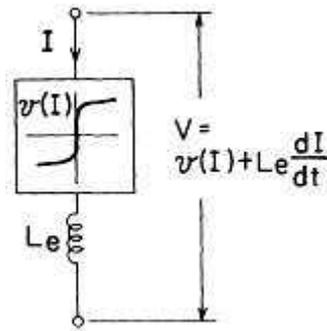


Figura 2.9 – Modelo da indutância linear (TOMINAGA et al., 1979).

Conforme explicado por Tominaga et al., os valores da resistência não linear e da indutância equivalente L_e podem ser determinados a partir do laço de histerese do para-raios. A resistência não linear deve ser determinada aproximando $v(i)$ pelo valor médio do laço de histerese e o valor da indutância equivalente L_e deve ser escolhido de modo que a tensão induzida $L_e \times (di/dt)$ expresse a diferença de potencial máxima no

laço de histerese. Portanto, tem-se:

$$\Delta V = L_e \cdot \frac{di}{dt} \cong L_e \cdot \frac{I_p}{T_F}, \quad (2.2)$$

em que I_p é a corrente de pico e T_F o tempo de frente de onda. Uma vez que o fenômeno em torno do pico de tensão é de primordial importância, I_p e T_F foram pensados para serem os principais parâmetros na determinação de L_e .

2.2.4 Modelo de Horiuchi

Estudando a absorção de energia em sistemas de transmissão em tensão contínua (HVDC), onde varistores de ZnO são utilizados em diversos equipamentos, Horiuchi et al. (1988) desenvolveram um novo modelo de para-raios. Baseados em algumas medições, tais como a dissipação de potência em varistores de ZnO, utilizados na saída de um conversor CA-CC, para diferentes ângulos de gatilho dos tiristores; e a medição de dissipação de potência e corrente de fuga no varistor quando submetido a tensões senoidais entre 50 Hz a 20 kHz; os autores concluíram que a dissipação de potência para tensões não senoidais, ou senoidais com diferentes frequências, apresentam comportamento completamente diferente das aplicações com tensões senoidais a 50 ou 60 Hz, isto é, na primeira região da curva característica, a corrente e a potência aumentam com o aumento da frequência. A partir da compreensão de tal comportamento, os autores propuseram um modelo de para-raios sugerindo a inserção da resistência R_s (Figura 2.10) ao modelo proposto por Levinson e Philipp (1975). Segundo Horiuchi *et al.*, a resistência R_p representa as perdas do varistor quando submetido a tensões CC, enquanto o outro ramo representa as perdas em altas frequências. Segundo os autores, a utilização desses dois ramos deve garantir que o modelo apresente uma dissipação de potência diferente para diferentes tensões CC e CA.

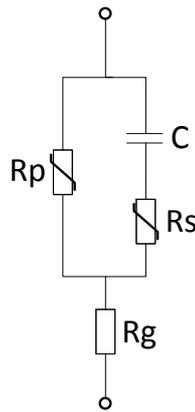


Figura 2.10 – Modelo proposto por Horiuchi et al. (1988).

2.2.5 Modelo de Schmidt

Em 1989, Schmidt et al. propuseram o circuito equivalente de para-raios de ZnO, apresentado na Figura 2.11, onde os elementos R e L são atribuídos ao grão ZnO, enquanto os outros estão relacionados com os limites de grãos. A tensão no elemento A reflete a distribuição de carga dinâmica no contorno do grão de ZnO e seu comportamento dinâmico depende da forma de onda da tensão (du/dt , U) e da constante de tempo τ para se alcançar o equilíbrio de elétrons e lacunas no contorno do grão. Para o cálculo do elemento A , as características da tensão sobre o mesmo foram avaliados a partir de medições e sua característica é dada em função da corrente i e da inclinação atual di/dt para o bloco investigado. Curvas características para determinar A foram propostas por Schmidt et al. (1989).

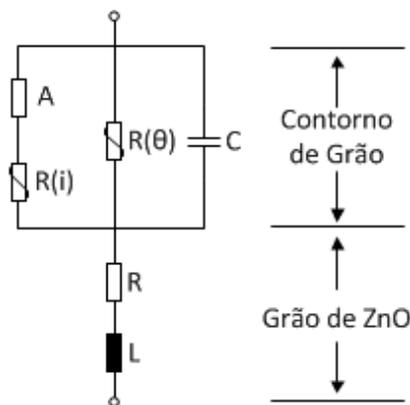


Figura 2.11 – Modelo proposto por Schmidt et al. (1989).

2.2.6 Modelo de Hileman

Uma simplificação do modelo de Schmidt et al. (1989) foi proposta por Hileman et al. (1990), a qual ficou conhecida como modelo do Cigré. No modelo proposto (Figura 2.12), a resistência $R(\theta)$ dependente da temperatura e a capacitância C foram desprezadas e as resistências $R(i)$ e R foram combinadas, formando a resistência R_I . Essa resistência é o único elemento não linear do modelo e pode ser determinada a partir das tensões residuais para impulsos de corrente de $8/20 \mu s$ com vários valores de pico. A resistência A pode ser obtida a partir das curvas propostas por Schimidt *et al.*, ou a partir de equações propostas Hileman *et al.*. L é a indutância verificada no para-raios e, dependendo do método de cálculo utilizado, pode ser representado por um valor de indutância ou por uma impedância característica e um tempo de trânsito.

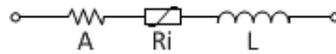


Figura 2.12 – Modelo proposto por Hileman et al. (1990).

2.2.7 Modelo de Haddad

Haddad et al. (1990) comentaram que além de o varistor de ZnO apresentar uma curva característica e uma dissipação de potência diferente para diferentes tensões DC e AC, como observado por Horiuchi et al. (1988), algumas pesquisas mostravam que essas curvas características se cruzavam em uma tensão próxima à tensão nominal do varistor. A partir dessas observações, Haddad *et al.* propuseram o modelo da Figura 2.13, onde as resistências não lineares R_p e R_s e a capacitância não linear C , devem ser determinadas levando-se em consideração a frequência do sinal aplicado, assim como a resistência linear R_{gs} . R , por sua vez, depende somente da tensão aplicada e R_g representa a resistência do grão de ZnO, importante para modelar o comportamento do varistor na região de alta corrente. Supôs-se que a presença de vários elementos dependentes da frequência representaria o comportamento dinâmico.

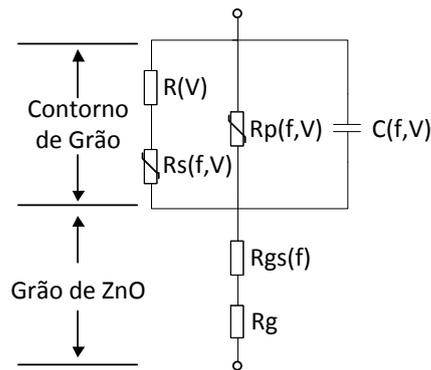


Figura 2.13 – Modelo proposto por Haddad et al. (1990).

2.2.8 Modelo IEEE W. G. 3.4.11

O modelo proposto pelo IEEE Working Group 3.4.11 (1992) formado em 1971 pelo comitê de equipamentos de proteção contra faltas do IEEE pode ser visto na Figura 2.14. Nesse modelo, a característica não linear V-I do para-raios é obtida pelas duas resistências não lineares A_0 e A_1 . O filtro $R - L$ entre as duas resistências não lineares é composto pela resistência R_1 e a indutância L_1 , sendo responsável por gerar o efeito dinâmico do modelo. Para frentes de onda lentas, o filtro $R - L$ apresenta uma impedância muito baixa e as resistências não lineares do modelo são essencialmente em paralelo. Para frentes de onda rápidas, o filtro $R - L$ apresenta uma alta impedância. Como consequência disso, o fluxo de corrente é forçado a passar mais pela resistência não linear A_0 do que pela resistência não linear A_1 . Como A_0 tem uma tensão característica maior do que A_1 , o resultado é que o modelo de para-raios gera uma tensão maior para transitórios rápidos. Tal característica gera o efeito dinâmico do modelo.

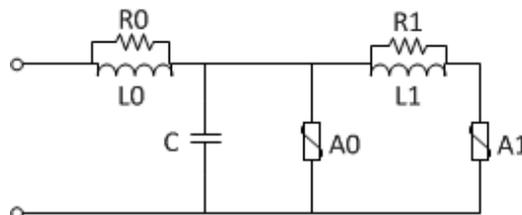


Figura 2.14 – Modelo proposto pelo (IEEE Working Group 3.4.11, 1992).

2.2.9 Modelo de Kim

Em 1996, Kim et al. propuseram o modelo da indutância não linear apresentado na Figura 2.15. Esse modelo consiste em uma resistência não linear em série com uma indutância não linear introduzida para produzir o efeito dinâmico do para-raios. Esse modelo foi construído a partir da característica V-I do impulso de onda 8/20 μs e da taxa de aumento de frente de onda da tensão para o impulso padrão e apresenta algumas dificuldades na determinação de seus parâmetros, pois, para calcular a indutância não linear do modelo, é necessário construir um laço de histerese a partir da curva do modelo convencional.



Figura 2.15 – Modelo proposto por Kim et al..

2.2.10 Modelo de Pinceti

Em 1999, uma variação simplificada do modelo do IEEE foi proposta por Pinceti e Giannettoni (1999). Observando-se o modelo na Figura 2.16, verifica-se que as resistências $R1$ e $R0$ foram substituídas pela resistência R , a qual tem a finalidade de evitar problemas numéricos, e a capacitância foi eliminada porque, segundo os autores, ela tem pouco efeito sobre o comportamento do modelo. O modo de funcionamento desse modelo é bastante similar ao proposto pelo IEEE.

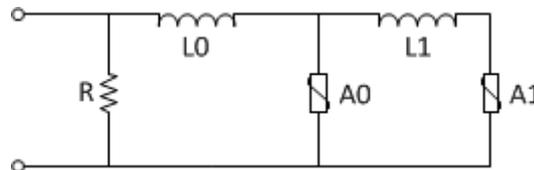


Figura 2.16 – Modelo proposto por Pinceti e Giannettoni (1999).

A principal vantagem do modelo proposto é a sua fácil determinação dos parâmetros e a sua simplificação. Os critérios propostos levam em consideração apenas as características elétricas do para-raios e não é necessário o uso de processos iterativos na determinação dos parâmetros. Segundo os autores, o modelo apresenta erros inferiores a 4,5%

para transitórios com tempo de crescimento de $1 \mu s$ a $30 \mu s$. Contudo, verifica-se uma queda de tensão inesperada na cauda da curva de tensão, onde a forma de onda produzida pelo modelo, as vezes, é bastante discordante da forma de onda de tensão obtida experimentalmente (BAYADI et al., 2003). Em alguns estudos também foram verificadas oscilações numéricas na forma da tensão fornecida pelo modelo (LIRA et al., 2007a) (LIRA et al., 2007b).

2.2.11 Modelo de Fernandez & Diaz

O modelo proposto por Fernandez e Diaz (2001) é outra simplificação do modelo do IEEE e pode ser visto na Figura 2.17. Nesse modelo, em comparação com o modelo do IEEE, R_0 e L_0 foram descartados, restando apenas a indutância L_1 entre as resistências não lineares A_0 e A_1 . No modelo, C_0 representa a capacitância terminal-terminal do para-raios e a resistência R em paralelo com A_0 se destina a evitar oscilações numéricas. Algumas vantagens do modelo são que todos os dados necessários podem ser encontrados no catálogo do fabricante ou, alternativamente, nas medições experimentais, além de o mecanismo de ajuste dos parâmetros não exigir cálculos iterativos. Por outro lado, o cálculo dos parâmetros do modelo possui muitos passos na determinação de A_0 , A_1 e, principalmente, L_1 .

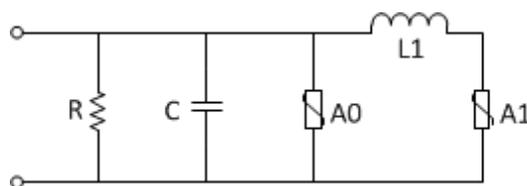


Figura 2.17 – Modelo proposto por Fernandez e Diaz (2001).

2.2.12 Modelo de Popov

Em 2001, outra simplificação do modelo do Schmidt et al. foi proposta, agora por Popov et al.. Tal simplificação proposta por Popov et al. resultou em um circuito elétrico idêntico ao proposto por Levinson e Philipp, em 1976. Assim, doravante, sempre que necessário, será citado o circuito elétrico proposto por Levinson e Philipp.

A contribuição de Popov et al. quanto ao modelo do para-raios, basicamente, foi

acrescentar ao modelo a indutância devida ao cabo que conecta o para-raios ao transformador e a capacitância devida ao tipo de transformador no qual o para-raios está conectado. A indutância é estimada a partir da distância do para-raios com os terminais do transformador e é da ordem de $5 - 20 \mu\text{H/m}$. Já a capacitância é da ordem de $1,5 \text{ nF/kV}$, quando o para-raios é ligado a transformadores de distribuição e 5 nF/kV , quando é ligado a transformadores de estação. Note-se que Popov et al. não propôs um novo modelo de para-raios mas, sim, a incorporação de indutância e capacitância provenientes de elementos do sistema ao circuito do para-raios.

2.2.13 Modelo de Magro

A partir do modelo de Pinceti e Giannettoni, Magro et al. propuseram um novo método para determinação dos parâmetros dinâmicos do modelo da Figura 2.16. Segundo os autores, o modelo de Pinceti apresenta pouca precisão para diversos para-raios de média tensão. Além disso, a determinação dos parâmetros desse modelo apresenta a dificuldade de nem sempre os dados necessários para calcular os parâmetros dinâmicos do modelo estarem disponíveis nos *datasheets* dos fabricantes, pois muitas vezes o fabricante não declara a tensão residual de impulso íngreme (com um tempo de subida entre $0,5$ e $1 \mu\text{s}$). A fim de contornar esse problema, Magro et al. propuseram um método que não depende da tensão residual de pulso íngreme para determinar os parâmetros $L0$ e $L1$, de tal modo que apresente uma boa precisão para para-raios de alta e média tensão. Dessa forma, os valores de $L1$ e $L0$ podem ser definidos conforme a seguir:

$$L1 = 0,03 V_n, \quad (2.3)$$

$$L0 = 0,01 V_n. \quad (2.4)$$

2.2.14 Modelo de Lin Xin

Xin et al. (2011) propuseram um modelo para altas frequências, baseado na microestrutura do varistor de ZnO e na teoria de polarização dos varistores de ZnO devido a campos elétricos alternados. A partir desses efeitos, os autores propuseram o modelo apresentado na Figura 2.18, onde uma parte representa o efeito dos contornos dos grãos e a outra parte representa os grãos de ZnO. Segundo os autores, o grão é equivalente a uma resistência

fixa R , que é determinada pela estrutura do para-raios, e os efeitos nos contornos dos grãos foram representados da seguinte forma: a corrente de condução é representada no ramo com a resistência não linear $R(i)$, a corrente instantânea causada pela polarização de deslocamento é representada pela capacitância C , e a corrente de relaxamento é representada pela capacitância complexa $G = i\omega C'$.

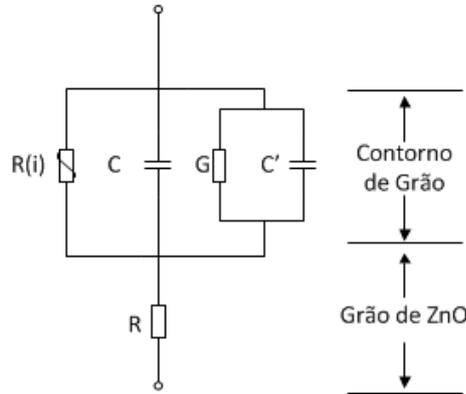


Figura 2.18 – Microestrutura do varistor de ZnO (XIN et al., 2011).

2.3 Sistemas Não Lineares

2.3.1 Definições

Sistemas não lineares são sistemas que não atendem ao princípio da superposição, ou seja, não satisfazem uma das propriedades: *aditividade* (2.5) ou *homogeneidade* (2.6), isoladamente ou simultaneamente.

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (2.5)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (2.6)$$

Uma outra forma de verificar se o sistema é linear, decorrente de (2.5) e (2.6), consiste em verificar se

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (2.7)$$

é satisfeita. Se sim, o sistema é linear. Caso contrário, é não linear. Sistemas não lineares são mais complexos que os lineares. Na presença de não linearidades em um sistema, muitas vezes é realizada a linearização do sistema em torno de um ponto de operação,

e, assim, o sistema resultante é analisado. No entanto, a linearização é uma técnica que oferece bons resultados quando o sistema opera próximo ao ponto de operação nominal, para o qual o equivalente foi calculado. Se por algum motivo, o sistema passar a operar fora das vizinhanças do ponto de operação, o sistema linearizado perderá o seu poder de predição e representação. Além disso, a dinâmica dos sistemas não lineares é mais rica que a dinâmica de sistemas lineares, o que impõe a utilização de uma matemática mais avançada para a sua análise. Fenômenos específicos surgem apenas nas presença de não linearidades ; tais não podem ser descritos ou previstos por modelos lineares. Khalil e Grizzle (2002) citam os seguintes exemplos de fenômenos essencialmente não lineares:

- *Tempo de Escape Finito*: O estado de um sistema linear vai para o infinito à medida que o tempo vai para o infinito; o estado de um sistema não linear, no entanto, pode ir para o infinito em um tempo finito.
- *Equilíbrio Múltiplos e Isolados*: Um sistema linear pode ter apenas um ponto de equilíbrio isolado; assim, no regime permanente, só pode existir apenas um ponto de operação que atrai o estado do sistema independentemente do estado inicial. Um sistema não linear pode ter mais de um ponto de equilíbrio isolado. No regime permanente, o estado pode convergir para um dos vários pontos de operação, dependendo do estado inicial do sistema.
- *Ciclos Limites*: Para um sistema linear invariante no tempo oscilar, o mesmo deve possuir um par de autovalores no eixo imaginário, o que é uma condição não robusta e quase impossível de se manter na presença de perturbações. Ainda que fosse conseguida, a amplitude da oscilação dependeria do estado inicial. Nos casos práticos reais, oscilações estáveis tem de ser produzidas por sistemas não lineares. Existem sistemas não lineares que podem entrar em uma oscilação de amplitude e frequência fixa, independentemente do estado inicial. Esse tipo de oscilação é conhecida como um ciclo limite.
- *Oscilações subarmônica, harmônica ou quase-periódica*: Um sistema linear estável submetido a uma entrada periódica produz uma saída na mesma frequência. Um

sistema não linear submetido a uma excitação periódica pode oscilar com frequências que são submúltiplos ou múltiplos da frequência da entrada. Inclusive, pode, até, gerar uma oscilação quase-periódica, um exemplo é a soma de oscilações periódicas com frequências que não são múltiplas umas das outras.

- *Caos*: Um sistema não linear pode ter um comportamento em regime permanente mais complicado, que não é equilíbrio, oscilação periódica ou oscilação quase periódica. Tal comportamento é usualmente denominado de caos. Alguns desses comportamentos exibem aleatoriedade, apesar do sistema possuir uma natureza determinística.
- *Múltiplos Modos de Comportamento*: Não é raro dois ou mais modos de comportamento serem exibidos por um mesmo sistema não linear. Um sistema não forçado pode ter mais de um ciclo limite. Um sistema forçado com uma excitação periódica pode mostrar uma resposta harmônica, subarmônica, ou um comportamento de regime permanente mais complicado, dependendo da amplitude e frequência da entrada. Ainda pode exibir um salto descontínuo na resposta, à medida que a amplitude ou frequência da excitação seja suavemente modificada.

2.3.2 Exemplos

Um exemplo de sistema não linear é o pêndulo mecânico. Considerando l como sendo o comprimento da haste do pêndulo, m a massa acoplada na extremidade da haste, k o coeficiente de viscosidade e θ o ângulo entre a haste e o eixo vertical, chega-se a equação do movimento do pêndulo

$$ml\ddot{\theta} = -mg\text{sen}\theta - kl\dot{\theta}, \quad (2.8)$$

da qual pode-se obter a representação de estados (2.9) e (2.10), considerando $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (2.9)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\text{sen}x_1 - \frac{k}{m}x_2. \quad (2.10)$$

Para se averiguar os pontos de equilíbrio do pêndulo, basta fazer $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ e resolver para x_1 e x_2 :

$$0 = x_2, \quad (2.11)$$

$$0 = -\frac{g}{l} \text{sen}x_1 - \frac{k}{m}x_2. \quad (2.12)$$

Os pontos de equilíbrio estão localizados em $(n\pi, 0)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Analisando-se a descrição física do pêndulo, intuitivamente, pode-se notar que as posições de equilíbrio são os pontos $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$; os outros pontos de equilíbrio são repetições desses dois pontos. Esse par de pontos de equilíbrio são fisicamente distintos. No caso do ponto $(0, 0)$, o pêndulo pode, facilmente, permanecer em repouso. Entretanto, caso o sistema atinja o ponto de equilíbrio $(\pi, 0)$, qualquer perturbação infinitesimal faz o pêndulo se afastar consideravelmente desse ponto. Assim, a diferença entre os dois pontos de equilíbrio são as suas propriedades de estabilidade.

Note-se que se o coeficiente de viscosidade for desprezado, o sistema oscilará indefinidamente, uma vez que não existirão fenômenos de dissipação de energia, fazendo com que a energia interna do sistema se conserve sempre com um mesmo valor. Uma outra variação do sistema inicialmente apresentado é o pêndulo com a presença de um torque de controle, que seria uma entrada do sistema. Nesse caso, as equações ficariam

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (2.13)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \text{sen}x_1 - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{ml^2}T. \quad (2.14)$$

Vale salientar que vários sistemas diferentes do pêndulo são modelados por equações similares às do pêndulo. Alguns exemplos são: o modelo de um gerador síncrono conectado a uma barra infinita (PAI, 1981), o modelo de um circuito com uma junção de *Josephson* (CHUA et al., 1987) e o modelo de um deslocador de phase (PLL) (GARDNER et al.,) (KHALIL; GRIZZLE, 2002).

2.4 Fundamentos da Teoria de Estabilidade

2.4.1 Espaço de Estados

A representação em espaço de estados é um tipo de representação de sistemas largamente utilizada na teoria de sistemas e controle. Tal representação permite análises no domínio do tempo, incluindo análises de estabilidade, e a simulação de transitórios eletromagnéticos, aplicando regras de integração às equações de estados. Alguns artigos reportados na literatura apresentam a modelagem de sistemas elétricos por meio de equações no espaço de estados, para elementos lineares e não lineares Mamiş (2003), Newton et al. (1989), Nelms et al. (1988), Mamiş e Meral (2005), Mamis (2003), Kuh e Rohrer (1965), Nelms et al. (1989). A seguir será realizada uma breve descrição sobre modelagem no espaço de estados.

Os sistemas, em geral, podem ser descritos por um número finito de equações diferenciais de primeira ordem, conforme (2.15) e (2.16). Essa forma de descrição padroniza, organiza e facilita a compreensão dos sistemas no domínio do tempo. O presente trabalho é realizado utilizando-se de análises embasadas nessa forma de descrição de sistemas.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned} \tag{2.15}$$

e

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ y_2 &= h_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde \dot{x}_i corresponde à derivada de x_i com respeito a t , e u_1, u_2, \dots, u_p são as variáveis de entrada do sistema. As variáveis t , e x_1, x_2, \dots, x_n são chamadas de variáveis de estado. Observa-se que das equações (2.15) e (2.16) pode-se criar as matrizes:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

e

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Assim, das matrizes (2.17) a (2.21), denota-se o sistema na forma compacta:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.22)$$

$$\mathbf{y} = h(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (2.23)$$

Onde a equação (2.22) é chamada de equação de estado e (2.23) equação de saída. O conjunto dessas duas equações é denominado *modelo de espaço de estados* ou simplesmente

de *modelo de estado*. Essa representação de sistemas é versátil e muito utilizada no campo da engenharia elétrica. Nos desenvolvimentos posteriores deste trabalho serão amplamente utilizadas essas notações. Alguns casos particulares de sistemas podem ser compreendidos a partir da representação (2.22). Um deles são os *sistemas não forçados* ou *em regime livre*, os quais a(s) entrada(s) do sistema é (são) considerada(s) nula(s), conforme 2.24.

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}). \quad (2.24)$$

Uma particularidade de (2.24) é

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (2.25)$$

também chamados de sistemas *autônomos* ou *invariantes no tempo*. Tais tipos de sistemas são invariantes ao deslocamento no tempo, uma vez que se for trocada a variável t por $\tau = t - a$, a equação de estado não é modificada. O sistema que não é autônomo é intitulado de *não autônomo* ou *variante no tempo*.

2.4.2 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade

Nesta seção serão discutidos conceitos essenciais aos estudos de estabilidade. Para simplificação da introdução aos conceitos, tomou-se o conjunto dos sistemas autônomos. No entanto, pode-se estender as definições, de forma similar, para outros sistemas. Esta seção baseia-se, em grande parte, no trabalho de Silva (2006).

2.4.2.1 Pontos de Equilíbrio de Sistemas Autônomos

Para facilitar o entendimento dos conceitos básicos acerca da teoria de estabilidade, será considerado, por hora, um sistema autônomo que tem a forma (2.25). Dadas condições iniciais $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, tais que a trajetória do estado do sistema permaneça invariante, e, portanto, sempre igual a si mesma, diz-se que x_0 é um *ponto de equilíbrio* ou *estado de equilíbrio*. Assim, com o passar do tempo, o estado do sistema não muda, se o sistema foi forçado a estar em uma condição inicial de equilíbrio. Matematicamente pode-se definir ponto de equilíbrio como:

$$\mathbf{x}_e \text{ é ponto de equilíbrio} \Leftrightarrow \forall t > 0, \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e. \quad (2.26)$$

Embora chamado de ponto de equilíbrio, vale salientar que x_e é um vetor com tamanho igual à quantidade de variáveis de estado do sistema, e portanto, à ordem do sistema. Um sistema pode ter um ou vários pontos de equilíbrio. A forma para se calcular ou identificar os pontos de equilíbrio de um sistema dá-se avaliando as equações de estado do sistema (2.25) com respeito à deriva dos estados. Da própria definição de pontos de equilíbrio, pode-se notar que se $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$ então $\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{0}$. Assim, para se obter os pontos de equilíbrio basta resolver a equação:

$$f[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{0}. \quad (2.27)$$

Como num ponto de equilíbrio o sistema não varia o seu estado, pode-se reescrever (2.27) na forma:

$$f(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

No caso de um sistema autônomo e linear pode-se calcular os pontos de equilíbrio resolvendo a equação matricial:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_e = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Dado um ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e do sistema (2.25), efetuando-se uma mudança de variáveis

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e \quad (2.30)$$

e derivando-se (2.30), obtém-se o sistema na forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z} + \mathbf{x}_e). \quad (2.31)$$

Assim, há uma correspondência biunívoca ente \mathbf{x} e \mathbf{z} . Observa-se, também, que \mathbf{z}_e é o ponto de equilíbrio correspondente a \mathbf{x}_e . Dessa forma, o comportamento do sistema (2.25) nas vizinhanças do ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e pode ser estudado avaliando-se o comportamento de (2.31) nas vizinhanças da origem $\mathbf{z}=\mathbf{0}$.

2.4.2.2 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio

Nesta seção, avaliar-se-á a estabilidade nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio dos sistemas autônomos. Dado que a mudança de variáveis (2.30) é factível, se a estabilidade do sistema for estudada em relação à origem não se perde a generalidade.

Estabilidade no Sentido de Lyapunov Um ponto de equilíbrio $x_e = 0$ é dito ser estável no sentido de Lyapunov se, para qualquer $R > 0$ existir $r(R) > 0$ tal que se $\|x(0)\| < r$ então $\|x(t)\| < R$, para todo $t > 0$. Caso contrário, o estado é dito instável. Pode-se escrever essa definição analiticamente da seguinte forma:

$$x_e = 0 (\text{é estável no sentido de Lyapunov}) \Leftrightarrow (\forall R > 0, \exists r(R) > 0 \therefore \quad (2.32)$$

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R, \forall t$$

Outra forma de entender a definição é que num sistema estável no sentido de Lyapunov, se for desejado que uma trajetória não saia fora de uma bola de raio R (qualquer que seja), então a trajetória deverá ser iniciada dentro de outra bola, cujo raio $r < R$, dependerá de R . A Figura 2.19 representa a estabilidade no sentido Lyapunov.

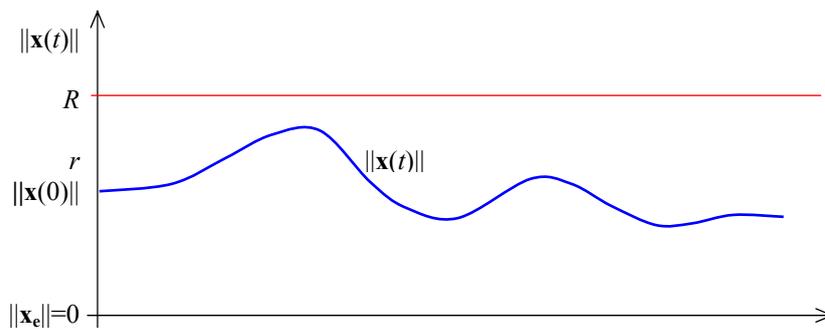


Figura 2.19 – Sistema estável no sentido de Lyapunov (SILVA, 2006)

Um sistema que é instável no sentido de Lyapunov é o oscilador de Van der Pol. A Figura 2.20 representa um esboço do comportamento desse sistema.

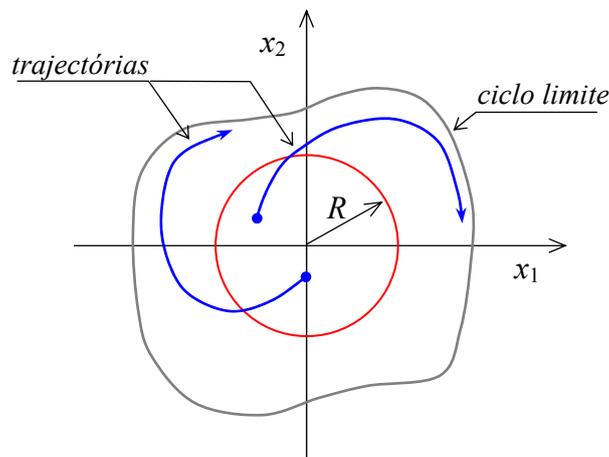


Figura 2.20 – Sistema instável no sentido de Lyapunov (SILVA, 2006)

Estabilidade Assintótica Um ponto de equilíbrio $x_e = 0$ diz-se assintoticamente estável no sentido de Lyapunov se for estável no sentido Lyapunov e ainda existir $r > 0$ tal que $\|x(0)\| < r \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. A interpretação geométrica para essa definição pode ser vista na Figura 2.21. Ao conjunto de estados B_r constituído por uma bola com o maior r para o qual a definição seja válida, dá-se o nome de *domínio de atração*, *região de atração* ou *bacia de atração* do ponto de equilíbrio Figura 2.22. A linha, superfície ou hipersuperfície que separa bacias de atração e denominada *separatriz*.

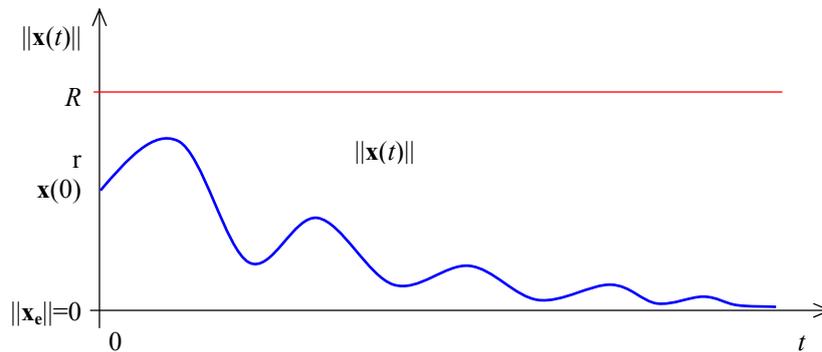


Figura 2.21 – Sistemas assintoticamente estável. (SILVA, 2006)

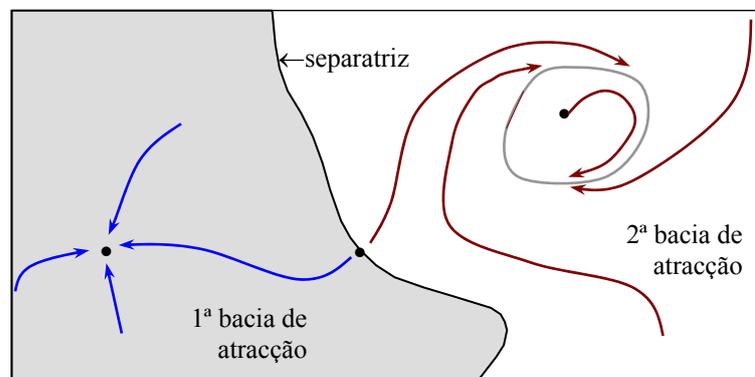


Figura 2.22 – Bacias de atração e separatriz (SILVA, 2006)

Chama-se de *marginalmente estável*, no sentido de Lyapunov, o ponto de equilíbrio que é estável mas não é assintoticamente estável. Vale salientar que existem sistemas que não são estáveis no sentido de Lyapunov e converjam para zero. Por exemplo, um sistema que, quando iniciam sua trajetória dentro de uma bola de raio $r = 1$, saem para fora da circunferência e só depois convergem para zero.

Estabilidade Exponencial Diz-se que o ponto de equilíbrio $x_e = 0$ é exponencialmente estável se existirem dois números reais $\alpha \geq 1$ e $\lambda > 0$ tais que dentro de uma bola B_r com centro na origem

$$\forall t > 0, \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}. \quad (2.33)$$

O parâmetro λ é denominado *razão de convergência* da exponencial ou decaimento. Em um sistema exponencialmente estável, o estado converge para a origem igual ou mais rápido que a exponencial. A Figura 2.23 esboça esse comportamento.

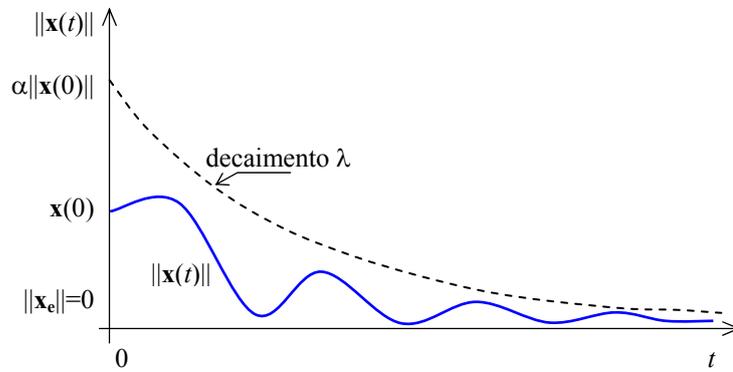


Figura 2.23 – Sistema exponencialmente estável. (SILVA, 2006)

2.4.2.3 Estabilidade Local e Global

Os conceitos apresentados nas seções anteriores reportaram-se à estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Esse tipo de estabilidade é definida como *estabilidade local*, uma vez que não diz nada a respeito do comportamento dos sistemas em estados não tão próximos a um ponto de equilíbrio. Portanto, para que o sistema como um todo seja analisado quanto à estabilidade, faz-se necessário a introdução do conceito de *estabilidade global*. Assim, define-se um ponto de equilíbrio como *globalmente estável* se o mesmo é estável independentemente do estado inicial do sistema. Ou seja, para qualquer estado inicial que o sistema tenha tomado, o estado de equilíbrio continua sendo estável. Um estado de equilíbrio é chamado de *globalmente assintoticamente estável* se for assintoticamente estável, qualquer que seja o estado inicial do sistema. Similarmente, um estado *globalmente exponencialmente estável* é aquele que é exponencialmente estável independentemente do estado inicial.

2.4.3 Método Direto de Lyapunov

O método direto de Lyapunov permite avaliar a estabilidade de um sistema através de uma função escalar do estado, nomeada função de Lyapunov, a qual pode ser compreendida como uma função que avalia a energia do sistema. É comum um sistema físico real, quer seja mecânico ou elétrico, possuir dissipação ou amplificação de energia. Quando a dissipação de energia é maior que a amplificação de energia, a energia armazenada no sistema reduz à zero, e, inevitavelmente, as variáveis do sistema (tensões elétricas, correntes, velocidade, etc.) também tenderão a tomar valores cada vez mais próximos do zero (SILVA, 2006). Assim, estudando-se o comportamento das variáveis de estado do sistema pode-se obter resultados acerca da sua estabilidade.

O segundo método de Lyapunov pode ser entendido como um método análogo à avaliação da energia de um sistema. Uma ilustração que facilita a compreensão desse conceito pode ser feita analisando-se o sistema de pêndulo simples, em regime livre, apresentado em 2.3.2.

Dessa forma, as energias cinética e potencial são expressas por

$$E_c = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta})^2, \quad (2.34)$$

$$E_p = mgl(1 - \cos\theta). \quad (2.35)$$

A energia total é dada por

$$E_T = E_c + E_p \quad (2.36)$$

e pode-se verificar facilmente que

$$\frac{dE_T}{dt} = -l (\dot{\theta})^2 \leq 0 \quad (2.37)$$

e

$$-l (\dot{\theta})^2 = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0. \quad (2.38)$$

Portanto, a energia do pêndulo decresce sempre que $\dot{\theta} \neq 0$, tendendo a E_T mínimo que, no caso, ocorre para $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$, onde também $\frac{dE_T}{dt} = 0$. A derivada da energia

total do sistema E_T é sempre negativa, o que mostra que a energia total do sistema vai diminuindo até atingir o valor zero, quando $\dot{\theta} = 0$. Esse conceito é a base para o método direto de Lyapunov (YONEYAMA, 2003).

2.4.3.1 Funções definidas, semi-definidas e indefinidas

Para a compreensão do método direto de Lyapunov, a seguir serão realizadas algumas definições importantes.

Seja $V(\mathbf{x})$ uma função escalar, contínua e unívoca¹, de um vetor \mathbf{x} .

Definição 2.4.1. A função $V(\mathbf{x})$ é **localmente positiva definida**, se dentro de uma bola de raio R_0 ,

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0, & \text{para } \mathbf{x} \neq 0, \\ = 0, & \text{para } \mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Definição 2.4.2. A função $V(\mathbf{x})$ diz-se **globalmente positiva definida** se (2.39) for válida para todo espaço de estados.

Na Figura 2.27 é apresentado o esboço de uma função positiva definida. Pode-se notar que a definição de função positiva definida exige que $V(\mathbf{0}) = 0$, implicando que o seu mínimo é a origem (estado nulo). Além disso, observa-se que as curvas de nível de $V(\mathbf{x})$ não se interceptam, uma vez que $V(\mathbf{x})$ é unívoca.

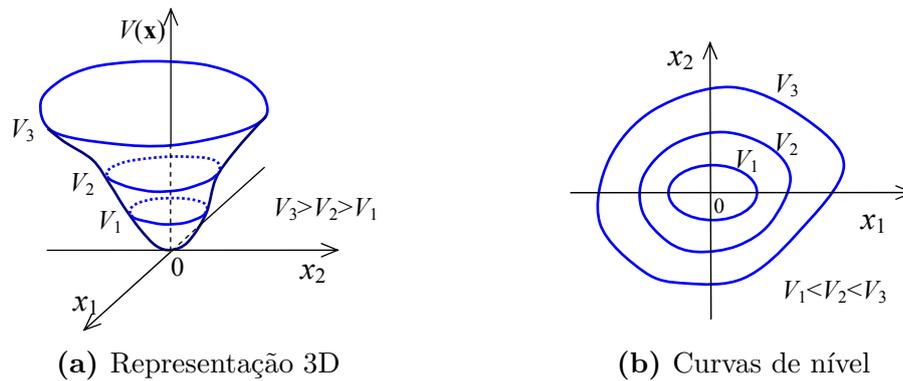


Figura 2.24 – Representação geométrica de uma função positiva definida (SILVA, 2006)

Definição 2.4.3. Uma função $V(\mathbf{x})$ é intitulada de **negativa definida** (local ou globalmente), se a sua simétrica $-V(\mathbf{x})$ for positiva definida.

¹Uma função é unívoca quando para cada elemento do domínio da função, corresponde um único elemento do contra domínio.

Definição 2.4.4. Uma função $V(\mathbf{x})$ é **positiva semi-definida** (local ou globalmente) se:

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} \geq 0, & \text{para } \mathbf{x} \neq 0, \\ = 0, & \text{para } \mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Definição 2.4.5. Diz-se que a função $V(\mathbf{x})$ é **negativa semidefinida** se $-V(\mathbf{x})$ for positiva semidefinida.

Definição 2.4.6. Uma função $V(\mathbf{x})$ é **localmente indefinida**, se dentro de uma bola de raio R_0 em torno da origem, $V(\mathbf{x})$ tomar valores positivos e negativos.

2.4.3.2 Função de Lyapunov

Teorema 2.4.1. Dentro de uma bola centrada na origem e de raio R_0 , uma função $V(\mathbf{x})$ é **função de Lyapunov** se, e somente se,

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) \text{ for positiva definida e} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) \text{ for negativa semidefinida.} \end{cases}$$

Portanto, para uma função de Lyapunov, têm-se:

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0, & \text{para } \mathbf{x} \neq 0, \\ V(\mathbf{0}) = 0, \\ \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, & \text{para } \mathbf{x} \neq 0, \\ \dot{V}(\mathbf{0}) = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Na Figura 2.25 é apresentado uma representação geométrica de uma função de Lyapunov. A condição $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ implica que a trajetória do sistema tende para a origem.

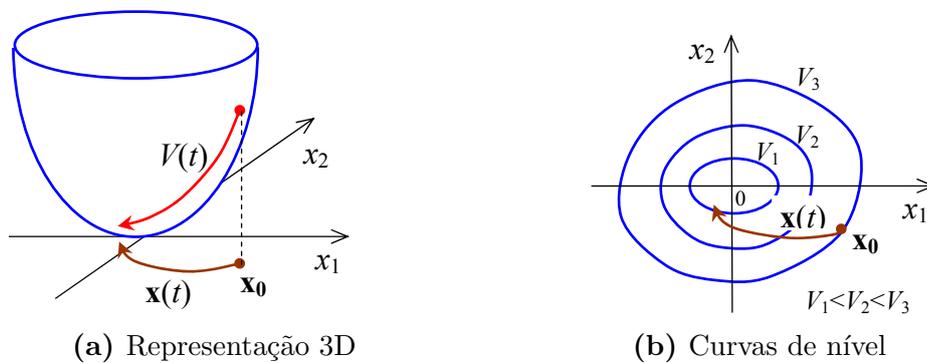


Figura 2.25 – Representação geométrica de uma função de Lyapunov (SILVA, 2006)

2.4.3.3 Teorema de Lyapunov (Estabilidade Local)

Teorema 2.4.2. O sistema autônomo, sem entrada externa, $\dot{x}(t) = f(x(t))$ é localmente estável em torno do ponto de equilíbrio $x_e = 0$, se para uma bola de raio R_0 com centro em $x_e = 0$, existir uma função escalar contínua $V(\mathbf{x})$, com $\dot{V}(\mathbf{x})$ contínua, tal que

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) \text{ é positiva definida e} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) \text{ é localmente negativa semidefinida.} \end{cases}$$

Se além disso $\dot{V}(\mathbf{x})$ for localmente negativa definida, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

Repare-se que a existência de uma função de Lyapunov é **condição suficiente** para a estabilidade do sistema, mas não é **condição necessária**, uma vez que um sistema pode ser estável e não se conhecer nenhuma função de Lyapunov associada. Assim, ao se encontrar uma função de Lyapunov para o sistema, pode-se dizer que o sistema é estável. No entanto, mesmo que após diversas tentativas não se encontre uma função de Lyapunov para o sistema, não se pode afirmar que não exista alguma, e, conseqüentemente, não se pode afirmar que o sistema seja instável.

2.4.3.4 Teorema de Lyapunov (Estabilidade Global)

Pelo método direto de Lyapunov, é possível analisar se um sistema possui estabilidade assintótica global, conforme Teorema a seguir.

Teorema 2.4.3. Considere-se o sistema autônomo $\dot{x}(t) = f(x(t))$ de ordem n , e uma função escalar contínua $V(\mathbf{x})$, com $\dot{V}(\mathbf{x})$ contínua, tal que

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) \text{ é positiva definida,} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) \text{ é negativa definida e} \\ V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \text{ quando } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \end{cases}$$

então o ponto de equilíbrio na origem é **global e assintoticamente estável**.

A última condição diz que a função $V(\mathbf{x})$ deve ser **radialmente ilimitada**. Do ponto de vista geométrico, isto quer dizer que as curvas de nível de $V(\mathbf{x})$ devem ser fechadas. Se tal fato não acontecer (como por exemplo na Figura 2.26), pode acarretar

que o estado evolua de um ponto $\mathbf{x}(0)$ para um valor infinito, com diminuição contínua de $V(\mathbf{x})$.

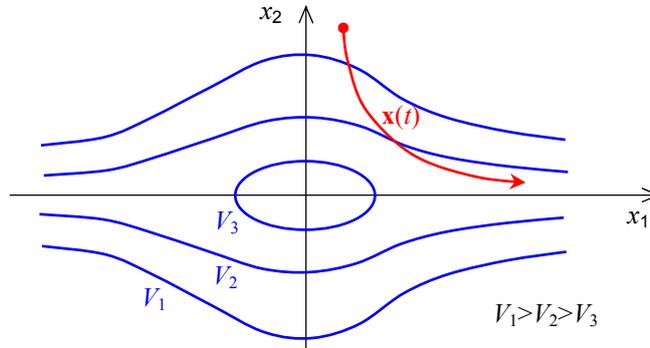


Figura 2.26 – Caso em que o sistema não é globalmente estável (SILVA, 2006)

Um sistema pode admitir mais de uma função de Lyapunov. Algumas delas poderão dar mais informação sobre a estabilidade do sistema do que outras.

2.4.3.5 Teorema de Lyapunov (Instabilidade)

Teorema 2.4.4. Um sistema autônomo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, em um ponto de equilíbrio $x_e = 0$, é instável, se dentro de um bola de raio R com centro em $x_e = 0$ existir uma função escalar $W(\mathbf{x})$ tal que:

$$\begin{cases} W(\mathbf{x}) \text{ é positiva definida, contínua, com primeiras derivadas parciais contínuas,} \\ \dot{W}(\mathbf{x}) \text{ é positiva definida,} \end{cases}$$

pois a resposta do sistema tende para infinito quando $t \rightarrow \infty$.

2.4.4 Função de Lyapunov de Sistemas Lineares

2.4.4.1 Formas Quadráticas e Matrizes Positivas Definidas

Definição 2.4.7. Dado o vetor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$, de componentes reais, designa-se por **forma quadrática** o escalar $V(\mathbf{x})$ definido pelo polinômio

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j, \quad (2.42)$$

em que os coeficientes p_{ij} são reais.

A expressão (2.42) pode ser escrita sob a forma matricial

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle. \quad (2.43)$$

Uma vez que qualquer matriz pode ser decomposta na soma de duas matrizes, uma simétrica e outra anti-simétrica, e que a forma quadrática associada a uma matriz anti-simétrica é nula, pode considerar-se que em (2.43) a matriz \mathbf{P} é simétrica. Uma matriz \mathbf{P} diz-se **positiva definida** se a forma quadrática que lhe está associada for positiva definida, ou seja,

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0, \quad (2.44)$$

a condição $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 0$ para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que aparece em (2.39), é naturalmente satisfeita.

Uma vez que $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ é o produto interno de \mathbf{x}^T e de $\mathbf{P} \mathbf{x}$, a interpretação geométrica da definição de forma quadrática positiva definida é a seguinte: O vetor \mathbf{x} e sua imagem $\mathbf{P} \mathbf{x}$ devem fazer um ângulo que esteja no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

É condição *necessária* para uma matriz ser positiva definida que os elementos da sua diagonal principal sejam estritamente positivos ($p_{ii} > 0$).

É condição *necessária e suficiente* para que uma matriz seja positiva definida que os seus menores principais sejam estritamente positivos, ou seja:

$$\Delta_1 = |p_{11}| > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.45)$$

A condição (2.45) é equivalente a dizer que, uma matriz é positiva definida se os seus valores próprios forem positivos (os valores próprios são reais porque \mathbf{P} é suposta simétrica).

Uma matriz positiva definida pode ser decomposta em:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}, \quad (2.46)$$

em que \mathbf{U} é a matriz unitária de vetores próprios de \mathbf{P} , e $\mathbf{\Lambda}$ uma matriz diagonal contendo os valores próprios de \mathbf{P} . Designando por λ_{min} e λ_{max} o menor e o maior valor próprio de \mathbf{P} , tem-se a partir de (2.46),

$$\lambda_{min} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \lambda_{max} \|\mathbf{x}\|^2. \quad (2.47)$$

De forma análoga se define uma forma quadrática positiva semidefinida (psd), negativa definida (nd), negativa semidefinida (nsd).

Os conceitos até aqui apresentados consideram sistemas invariantes no tempo, isto é, em que os elementos das matrizes não dependem do tempo.

2.4.4.2 Função de Lyapunov par a SLIT

Considere-se o sistema autônomo linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.48)$$

e uma **função candidata** a função de Lyapunov dada pela forma quadrática

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad (2.49)$$

em que \mathbf{P} é uma matriz positiva definida simétrica. Derivando $V(\mathbf{x})$ em relação ao tempo e usando (2.48) obtêm-se

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}, \quad (2.50)$$

com

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}. \quad (2.51)$$

A equação (2.51) tem o nome de **equação de Lyapunov**.

Para que a trajetória do sistema (2.48) seja estável, a matriz \mathbf{Q} deverá ser positiva definida. Se esta condição não acontecer, nada se pode concluir sobre a estabilidade do sistema. Para evitar que isto aconteça, em vez de escolher \mathbf{P} positiva definida e analisar \mathbf{Q} , procede-se de uma forma inversa: escolhe-se uma matriz \mathbf{Q} positiva definida, resolve-se a equação de Lyapunov de modo a obter \mathbf{P} e verifica-se se \mathbf{P} é positiva definida. Se isso acontecer, o sistema é assintoticamente estável (globalmente, por se tratar de um sistema linear). Caso não aconteça, o sistema é instável. O teorema que se segue resume o que acaba de ser afirmado (SILVA, 2006).

Teorema 2.4.5. É condição necessária e suficiente para que o SLIT autônomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ seja estritamente estável que para qualquer matriz positiva definida, \mathbf{Q} , a única solução da equação de Lyapunov (2.51) seja simétrica e positiva definida.

2.4.5 Função de Lyapunov de Sistemas Não Lineares

A dificuldade da utilização do método direto de Lyapunov é a dificuldade de obter a função de Lyapunov. Por tal motivo, é indispensável dispor-se de um método sistemático para tal. Dentre os métodos existentes, uma maneira simples é a que decorre do Teorema de Krasovskii (SILVA, 2006).

2.4.5.1 Teorema de Krasovskii

Seja o sistema autônomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.52)$$

com $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ suave, tendo como ponto de equilíbrio de interesse a origem do espaço de estados.

Seja $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ o jacobiano do sistema:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (2.53)$$

Se numa região Ω em torno do ponto de equilíbrio, a matriz

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

for negativa definida, o ponto de equilíbrio é *assintoticamente estável*. Uma função de Lyapunov do sistema é

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.55)$$

Se além de (2.55) ser negativa definida, se tiver

$$\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty, \quad (2.56)$$

então o ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável.

2.4.5.2 Teorema de Krasovskii Generalizado

Considere o sistema (2.52). É condição necessária e suficiente para que a origem seja assintoticamente estável, que existam duas matrizes positiva definida simétricas \mathbf{P} e \mathbf{Q} , tais que para todo o $\mathbf{x} \neq 0$ a matriz

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} \quad (2.57)$$

seja negativa semidefinida numa vizinhança Ω da origem. Uma função de Lyapunov para o sistema é

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.58)$$

Se a região Ω for todo o espaço de estados e além disso $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, então o sistema é *globalmente estável* (SILVA, 2006).

2.5 Estabilidade \mathcal{L}_2

Até o momento, tem-se apresentado conceitos de estabilidade muito relacionados como o comportamento das variáveis de estado. No entanto, outro conceito de estabilidade muito intuitivo é a estabilidade entrada-saída. Esse tipo de avaliação da estabilidade considera o sistema como uma caixa preta onde as variáveis internas não são analisadas, mas apenas a relação entre entrada e saída. No âmbito do conceito de estabilidade entrada-saída é que é definida a estabilidade \mathcal{L} . Ou seja, a definição matemática de estabilidade \mathcal{L} é um tipo de estabilidade entrada-saída. Dentre os diversos tipos de estabilidade \mathcal{L} , a do tipo \mathcal{L}_2 torna-se especialmente atraente, uma vez que está relacionada com a energia dos sinais. Os desenvolvimentos desta seção baseiam-se na obra de Khalil e Grizzle (2002).

Dado um sistema em que a relação entrada-saída é dada por

$$y = Hu, \quad (2.59)$$

onde H é algum operador de mapeamento que especifica y em termos de u . A entrada u pertence ao espaço de sinais que mapeia o intervalo de tempo $[0, \infty)$ em um espaço Euclidiano R^m ; isto é, $u : [0, \infty) \rightarrow R^m$. Para mensurar o sinal, faz-se necessário a introdução do conceito da função *norma* $\|u\|$, a qual satisfaz as propriedades:

- A norma de um sinal é zero se e somente se o sinal é identicamente igual a zero e é estritamente positiva caso contrário;
- Escalonar um sinal resulta em um escalonamento correspondente na norma; isto é, $\|\alpha u\| = \alpha \|u\|$ para qualquer constante positiva e qualquer sinal u ;
- A norma satisfaz a inequação do triângulo $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$ para quaisquer sinais u_1 e u_2 .

Para o espaço de funções limitadas e contínua por partes, a norma é definida como

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty \quad (2.60)$$

e o espaço é denotado por \mathcal{L}_∞^m . Para o espaço de funções quadrado-integráveis contínua por partes, a norma é definida por

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_a^\infty u^T(t)u(t) dt} < \infty \quad (2.61)$$

e o espaço é denotado por \mathcal{L}_2^m . Mais genericamente, o espaço \mathcal{L}_p^m , para $1 \leq p < \infty$ é definido como o conjunto de todas funções contínua por partes $u : [0, \infty) \rightarrow R^m$ tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_a^\infty \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty. \quad (2.62)$$

O subscrito p em \mathcal{L}_p^m refere-se ao tipo da norma- p usada para definir o espaço, enquanto o sobrescrito m é a dimensão do sinal u .

Entendendo-se por $u \in \mathcal{L}^m$ como uma entrada "bem comportada", é levantado o questionamento se a saída y será "bem comportada" de forma que $y \in \mathcal{L}^q$. Um sistema que possui a propriedade de que para qualquer entrada "bem comportada" uma saída "bem comportada" seja gerada, é definido como um sistema estável. No entanto, não pode-se definir H como um mapeamento de \mathcal{L}^m em \mathcal{L}^q , porque o sistema pode ser instável, no sentido de que uma entrada $u \in \mathcal{L}^m$ gere uma saída y que não pertença a \mathcal{L}^q . Assim, H é comumente definida como um mapeamento de um espaço estendido \mathcal{L}_e^m em um espaço estendido \mathcal{L}_e^q , onde \mathcal{L}_e^m é definido por

$$\mathcal{L}_e^m = \{u | u_\tau \in \mathcal{L}^m, \forall \tau \in [0, \infty)\} \quad (2.63)$$

e u_τ é um truncamento de u definido por

$$u_\tau = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}. \quad (2.64)$$

O espaço estendido \mathcal{L}_e^m é um espaço linear que contém o espaço não estendido \mathcal{L}^m como subconjunto. Isso permite lidar com sinais "sempre-crescentes" não limitados. Por exemplo, o sinal $u(t) = t$ não pertence ao espaço \mathcal{L}_∞ , mas o seu truncamento,

$$u_\tau = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}, \quad (2.65)$$

pertence a \mathcal{L}_∞ para todo τ finito. Assim, $u(t) = t$ pertence ao espaço estendido $\mathcal{L}_{\infty e}$.

Um mapeamento $H : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$ é dito ser causal se o valor da saída $(Hu)(t)$ em qualquer tempo t depende apenas dos valores da entrada até o tempo t . Isso é equivalente a

$$(Hu)_\tau = (Hu_\tau)_\tau. \quad (2.66)$$

Casualidade é uma propriedade intrínseca ao sistemas dinâmicos representados por modelos de estado.

Com os espaços dos sinais de saída e de entrada definidos, pode-se definir estabilidade entrada-saída.

Definição 2.5.1. Um mapeamento $H : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$ possui estabilidade \mathcal{L} se existe uma função α de classe \mathcal{K} , definida em $[0, \infty)$, e uma constante não negativa β tal que

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}}) + \beta, \quad (2.67)$$

para todo $u \in \mathcal{L}_e^m$ e $\tau \in [0, \infty)$. O mapeamento é dito ser \mathcal{L} estável com *ganho finito* se existe uma constante não negativa γ e β tais que

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma\|u_\tau\|_{\mathcal{L}} + \beta, \quad (2.68)$$

para todo $u \in \mathcal{L}_e^m$ e $\tau \in [0, \infty)$.

A constante β em 2.67 e 2.68 é chamada termo *bias*. Quando a desigualdade (2.68) é satisfeita, usualmente, é interessante saber o menor γ possível para o qual existe um β tal que (2.68) é satisfeita. Quando esse valor de γ é bem definido, o mesmo é chamado de *ganho do sistema*. Quando a inequação (2.68) é satisfeita com algum $\gamma \geq 0$, diz-se que o sistema possui um ganho \mathcal{L} menor ou igual a γ .

Para sistemas \mathcal{L} estáveis causais, pode-se mostrar por argumentos simples que

$$u \in \mathcal{L}^m \Rightarrow Hu \in \mathcal{L}^q \quad (2.69)$$

e

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha(\|u\|_{\mathcal{L}}) + \beta, \quad \forall u \in \mathcal{L}^m. \quad (2.70)$$

Para sistemas causais, \mathcal{L} estáveis de *ganho finito*, a inequação mencionada acima toma a forma

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{L}} + \beta, \quad \forall u \in \mathcal{L}^m. \quad (2.71)$$

A definição de estabilidade \mathcal{L}_{∞} é a noção familiar de estabilidade entrada-limitada-saída-limitada ou BIBO (*bounded-input-bounded-output*); ou seja, se o sistema é \mathcal{L}_{∞} estável, então para qualquer entrada limitada $u(t)$, a saída $Hu(t)$ será limitada.

Vale salientar que, na teoria de estabilidade \mathcal{L} , alguns teoremas e lemas desenvolvidos são essenciais para que o sistema possa ser avaliado quanto à sua estabilidade. No entanto, tais teoremas e lemas nem sempre são tão triviais de serem utilizados. Dependendo do sistema a ser avaliado uns podem ser mais convenientes que outros. Alguns deles dialogam com a teoria de Lyapunov e com os conceitos de *Passividade*. No presente trabalho averiguou-se um lema, em especial, como uma direção viável para a análise de estabilidade do modelo de para-raios escolhido. Para melhor compreensão do lema apresentado no fim deste capítulo será introduzida na próxima seção o conceito de *passividade*.

2.5.1 Passividade

O conceito de *passividade* diz respeito ao comportamento da entrada e saída conjuntamente. Para ilustrar melhor esse conceito, tomou-se o exemplo de uma resistência elétrica; sendo a tensão u o sinal de entrada e a corrente y o sinal de saída (Figura 2.27).

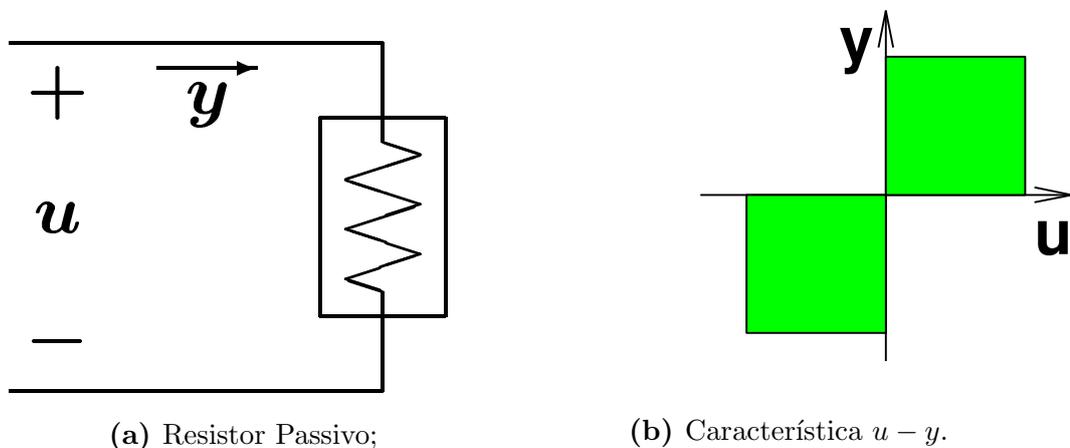


Figura 2.27 – Representação da característica de um resistor passivo.

Observa-se que a característica $u - y$ do resistor é descrita apenas no primeiro e terceiro quadrantes. O elemento resistivo é passivo se o fluxo de potência é sempre não negativo; ou seja, $uy \geq 0$ para toda a característica $u - y$ do resistor. Logo, para qualquer entrada u , o sistema-resistor sempre gerará uma saída y tal que a inequação $uy \geq 0$ será sempre verdadeira. Observe-se que a passividade é uma característica intrínseca ao sistema e não depende do sinal de entrada u . A Figura 2.28 apresenta exemplos de sistemas, ou elementos, quanto à passividade.

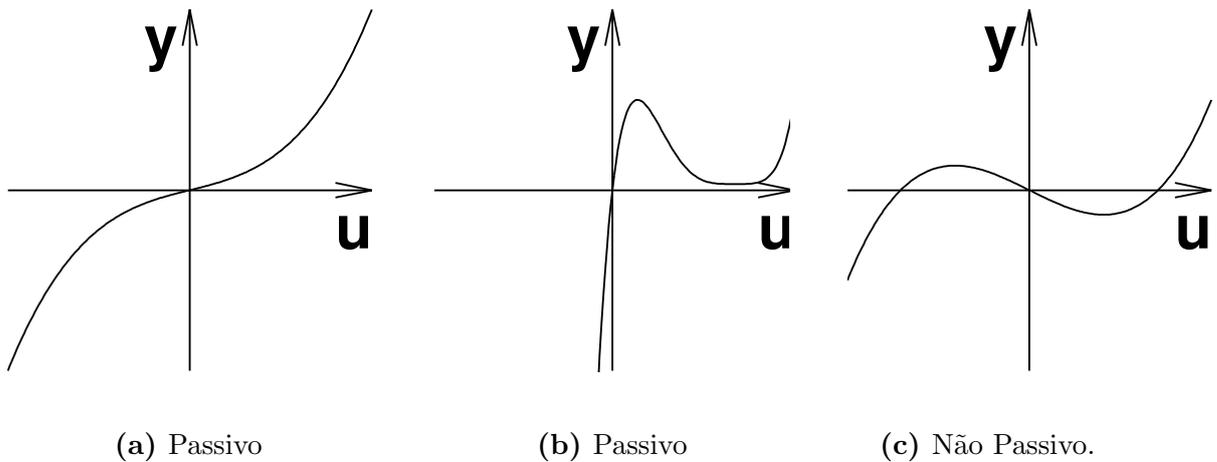


Figura 2.28 – Exemplos de característica passivas e não passiva (KHALIL; GRIZZLE, 2002)

Além disso, embora no exemplo do resistor o sinal u e y tenham dimensão um, o conceito se estende para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. De uma forma mais geral, segue uma definição mais formal de passividade e dos tipos de passividade:

Definição 2.5.2. Um dado sistema $y = (t, u)$ é

- *passivo*, se $u^T y \geq 0$;
- *sem perdas*, se $u^T y = 0$;
- *passivo, de entrada realimentada*, se $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ para alguma função φ ;
- *estritamente passivo quanto à entrada*, se $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ e $u^T \varphi(u) > 0, \forall u \neq 0$;
- *passivo, de saída realimentada*, se $u^T y \geq y^T \rho(y)$ para alguma função ρ ;

- *estritamente passivo quanto à saída*, se $u^T y \geq u^T \rho(y)$ e $y^T \rho(y) > 0, \forall y \neq 0$.

Em todos os casos a inequação deve ser válida para todo (t, u) .

Outra forma de avaliar um sistema quanto a passividade é realizada utilizando uma função $V(x)$, com propriedades similares à função de Lyapunov, e comparar o produto interno $u^T y$ com a sua derivada (\dot{V}).

Definição 2.5.3. O sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.72)$$

$$y = h(x, u) \quad (2.73)$$

é dito ser passivo se existe uma função positiva definida continuamente diferenciável $\dot{V}(x)$ tal que

$$u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \forall (x, u) \in R^n \times R^p. \quad (2.74)$$

Além disso, é denominado

- *sem perdas* se $u^T y = \dot{V}$
- *passivo, de entrada realimentada*, se $u^T y \geq \dot{V} + u^T \varphi(u)$ para alguma função φ .
- *estritamente passivo quanto à entrada*, se $u^T y \geq \dot{V} + u^T \varphi(u)$ e $u^T \varphi(u) > 0, \forall u \neq 0$
- *passivo, de saída realimentada*, se $u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho(y)$ para alguma função ρ .
- *estritamente passivo quanto à saída*, se $u^T y \geq \dot{V} + u^T \rho(y)$ e $y^T \rho(y) > 0, \forall y \neq 0$
- *estritamente passivo*, se $u^T y \geq \dot{V} + \psi(x)$ para alguma função positiva definida ψ .

Em todos os casos a inequação deve ser válida para todo (t, u) .

2.5.2 Lema Escolhido

Todo os conhecimentos introduzidos nos capítulos e seções anteriores são fundamentos para a compreensão de um lema que nos permite estudar e calcular a estabilidade do modelo de para-raios proposto por Levinson e Philipp. No presente trabalho esse lema possui significativa importância, uma vez que foi o meio encontrado para avaliar o sistema

não linear escolhido. Embora possa não ser a única maneira de avaliar o modelo de Levinson e Philipp, foi o caminho que se apresentou como o mais razoável. Tal lema utiliza-se dos conceitos de passividade e função de Lyapunov apresentados anteriormente, de forma a concluir acerca da estabilidade de um sistema não linear.

O lema enuncia que: se um sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.75}$$

$$y = h(x, u) \tag{2.76}$$

é *estritamente passivo quanto à saída*, satisfazendo $uy \geq \dot{V} + \delta y^2$, para algum $\delta > 0$, então ele possui estabilidade \mathcal{L}_2 com *ganho finito* e seu ganho é menor ou igual a $1/\delta$.

Capítulo 3

Avaliação de Estabilidade do Modelo de Levinson & Philipp

Durante observações preliminares, verificou-se que o modelo proposto por Levinson e Philipp apresenta uma estrutura simples e promissora para aprimoramentos (UFCG, 2014). Nota-se que é um modelo que leva em conta a característica não linear do para-raios, sua capacitância e indutância, ao mesmo tempo que possui uma estrutura simples, desconsiderando outros fenômenos mais minuciosos (efeitos da temperatura, polarização, etc). Por essas características, tal modelo pode se tornar fundamento para o desenvolvimento de um novo modelo de para-raios que apresente maior exatidão. Assim, observou-se a importância da avaliação da estabilidade desse modelo, sendo esta avaliação, um dos objetivos principais deste trabalho.

O comportamento físico de um para-raios possui estabilidade entrada-saída. Assim, um modelo que se propõe a representá-lo deve, necessariamente, apresentar esse mesmo comportamento. Dessa forma, a análise de estabilidade acrescenta confiabilidade quanto à utilização de um modelo. Quando o modelo a ser estudado é não linear, a análise de estabilidade apresenta uma especial importância, uma vez que a dinâmica dos sistemas não lineares é muito mais complexa que a dos sistemas lineares. Assim, pretende-se, aqui, realizar uma análise de estabilidade do modelo proposto por Levinson e Philipp (1976), apresentado na seção 2.2.2. Utilizando-se dos conceitos previamente discutidos, realizou-se os cálculos que estão apresentados nas próximas seções.

3.1 Representação do Modelo em Equações de Estado

Inicialmente, com o intuito de facilitar os cálculos de estabilidade, representou-se o modelo proposto por Levinson e Philipp através de equações de estado no formato mais genérico (Equações 2.22 e 2.23). Na Figura 3.2a é apresentado o modelo de Levinson e Philipp, onde C é a capacitância do circuito, R a resistência linear, L a indutância e R_a a resistência não linear do circuito, obtida a partir da curva $v - i$ do para-raios de ZnO.

Dispondo da curva $v - i$ de um fabricante de para-raios, observou-se, mediante procedimento de ajuste de curvas (Figura 3.1), que a característica $v - i$ (não linear) do para-raios pode ser aproximada por uma expressão, da forma

$$i_a = f(v_a), \quad (3.1)$$

$$i_a = (4,367 \cdot 10^{-9})v_a^3, \quad (3.2)$$

onde v_a é a tensão sobre a resistência não linear, e i_a a respectiva corrente.

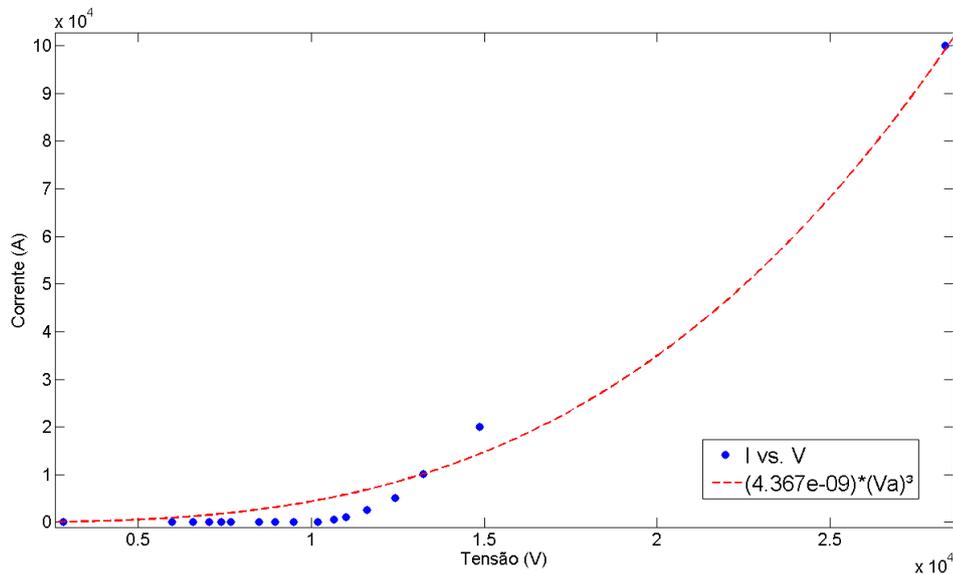


Figura 3.1 – Ajuste de curva da característica $v - i$ do para-raios.

Para a obtenção do sistema de equações que representa o circuito da Figura 3.2a, tomou-se como variáveis de estados do circuito a tensão v_c na capacitância e a corrente i_l na indutância. Além disso, efetuou-se uma transformação aproximada da fonte de

corrente (Figura 3.2b), inserindo uma alta resistência R_x em paralelo, a fim de obter um equivalente *Thevenin* do circuito (Figura 3.2c). Note-se que a inserção da resistência R_x não prejudica a representatividade do modelo, uma vez que pode ser entendida como a condutância do ar entre os terminais do para-raios e, de fato, é muito alta em relação a R .

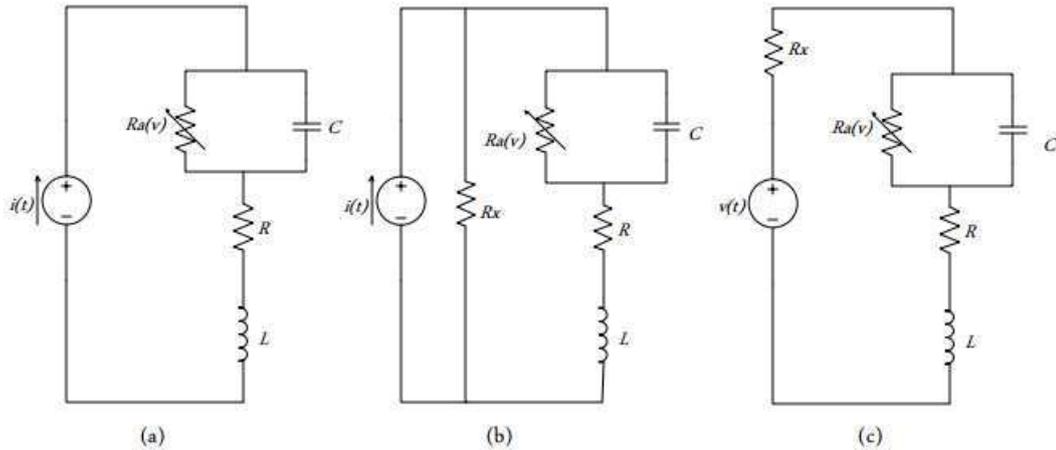


Figura 3.2 – Aproximações do Circuito de Levinson e Philipp.

Do circuito, obtêm-se as seguintes equações

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}, \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

$$v_l = L \frac{di_l}{dt}, \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

$$i = i_c + i_a, \quad (3.7)$$

$$(3.8)$$

$$v = v_x + v_c + v_r + v_l. \quad (3.9)$$

De (3.7) chega-se a

$$i_c = i - i_a. \quad (3.10)$$

Substituindo-se i_c em 3.10, obtém-se

$$C \frac{dv_c}{dt} = i - i_a. \quad (3.11)$$

Agora, da equação (3.9), obtém-se

$$v_l = v - v_x - v_c - v_r. \quad (3.12)$$

Substituindo-se v_l e fazendo $i_l = i$

$$L \frac{di_l}{dt} = v - v_x - v_c - v_r, \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

$$L \frac{di_l}{dt} = v - R_x i_l - v_c - R i, \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

$$L \frac{di}{dt} = -(R_x + R)i - v_c + v. \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

Assim, das equações (3.11) e (3.17), isolando as derivadas, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}(R_x + R)i - \frac{1}{L}v_c + \frac{1}{L}v, \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i - \frac{1}{C}i_a, \\ v_M = v - v_x. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Sabendo-se que $v_a = v_c$, substituindo i_a pela expressão da resistência não linear (3.2) obtém-se, finalmente, o sistema de equações na forma (2.22)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}(R_x + R)i - \frac{1}{L}v_c + \frac{1}{L}v(t), \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i - \frac{1}{C}(4.367 \cdot 10^{-9})v_a^3, \\ v_M = -R_x i + v(t). \end{array} \right. \quad (3.20)$$

3.2 Sistema Não Forçado

Considerando-se que o modelo de Levinson e Philipp esteja em regime livre, ou seja, a entrada externa seja nula, a estabilidade pode ser avaliada encontrando-se uma função

de Lyapunov para o sistema. Considerando $i = x_1$, $v_c = x_2$ e $v(t) = u(t) = 0$, o sistema (3.20) fica:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{L}(R_x + R)x_1 - \frac{1}{L}x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{C} \cdot (4.367 \cdot 10^{-9})x_2^3. \end{cases} \quad (3.21)$$

Considerando-se $c_1 = \frac{1}{L}(R_x + R)$, $c_2 = \frac{1}{L}$ e $c_3 = \frac{1}{C}$, o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -c_1x_1 - c_2x_2, \\ \dot{x}_2 = c_3x_1 - c_3 \cdot (4.367 \cdot 10^{-9})x_2^3. \end{cases} \quad (3.22)$$

Observou-se, por tentativa e erro, que uma função de Lyapunov para o sistema (3.22) é:

$$V(x) = \frac{1}{2c_2}x_1^2 + \frac{1}{2c_3}x_2^2. \quad (3.23)$$

De fato, facilmente percebe-se pela expressão (3.23) que $V(x)$ é positiva definida, uma vez que $x_1^2 \geq 0$ e $x_2^2 \geq 0$. Além disso,

$$\dot{V}(x) = \frac{2}{2c_2}x_1\dot{x}_1 + \frac{2}{2c_3}x_2\dot{x}_2, \quad (3.24)$$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{c_2}x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{c_3}x_2\dot{x}_2. \quad (3.25)$$

Substituindo-se as expressões de \dot{x}_1 e \dot{x}_2 dadas em (3.22), obtém-se:

$$\dot{V}(x) = \frac{x_1}{c_2}(-c_1x_1 - c_2x_2) + \frac{x_2}{c_3}(c_3x_1 - c_3 \cdot 4.367 \cdot 10^{-9}x_2^3); \quad (3.26)$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2}x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 - x_2(4.367 \cdot 10^{-9}x_2^3); \quad (3.27)$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2}x_1^2 - (4.367 \cdot 10^{-9})x_2^4. \quad (3.28)$$

Assim, como

$$x_1^2 \geq 0, x_2^4 \geq 0 \Rightarrow -\frac{c_1}{c_2}x_1^2 - (4.367 \cdot 10^{-9})x_2^4 = \dot{V}(x) \leq 0, \quad (3.29)$$

conclui-se que $\dot{V}(x)$ é negativa definida. Portanto, $V(x)$ é uma função de Lyapunov que satisfaz o teorema 2.4.3, o que permite afirmar que a origem do sistema (3.22) é globalmente assintoticamente estável. Logo, para qualquer condição inicial do sistema, o estado do sistema desenvolverá uma trajetória que tenderá a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Até o momento, foram apresentados conceitos fundamentais para o entendimento da teoria da análise de estabilidade de sistemas não lineares. Foi realizada a avaliação da estabilidade do modelo de Levinson e Philipp não forçado, ou seja, considerou-se o sistema com entrada nula. Embora essa análise não esteja completa, uma vez que o sistema real é submetido à entradas não nulas, os resultados obtidos são importantes tanto para o entendimento da teoria quanto para o desenvolvimento, posterior, de um resultado mais aprofundado. Assim, objetiva-se, na próxima seção, utilizar os conceitos e resultados até agora desenvolvidos para avaliar a estabilidade do sistema submetido à entradas não nulas.

3.3 Sistema Forçado

Na seção 3.2 avaliou-se a estabilidade do modelo de Levinson e Philipp quando a entrada do sistema é considerada nula. Além disso, obtêve-se uma função de Lyapunov (3.23) para o sistema, a qual será útil para a analisar a estabilidade do sistema forçado, ou seja, quando esse é submetido à entradas não nulas. Outro desenvolvimento, anteriormente apresentado, que será de grande valia, é o lema citado na seção 2.5.2, o qual será utilizado nos cálculos da análise da estabilidade do sistema forçado.

Partindo das equações (3.21) que descrevem o sistema não linear do modelo

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(R_x + R)i - \frac{1}{L}v_c + \frac{1}{L}v(t), \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i - \frac{1}{C}(4,367 \cdot 10^{-9})v_c^3, \\ v_M = -R_x i + v(t), \end{cases} \quad (3.30)$$

substitui-se as variáveis de (3.30) para facilitar-se as manipulações matemáticas. Assim,

tomando-se

$$y = v_M, \quad u = v(t), \quad (3.31)$$

$$x_1 = i, \quad x_2 = v_c, \quad (3.32)$$

$$c_1 = \frac{1}{L}(R_x + R), \quad c_2 = \frac{1}{L}, \quad (3.33)$$

$$c_3 = \frac{1}{C}, \quad c_4 = R_x, \quad (3.34)$$

$$d = 4,367 \cdot 10^{-9} \quad (3.35)$$

chega-se à uma clara representação em espaço de estados, na forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -c_1x_1 - c_2x_2 + c_2u, \\ \dot{x}_2 = c_3x_1 - c_3dx_2^3, \\ y = -c_4x_1 + u. \end{cases} \quad (3.36)$$

Como apresentado na seção 3.2, a função de Lypunov escolhida para o sistema em questão foi:

$$V(x) = \frac{1}{2c_2}x_1^2 + \frac{1}{2c_3}x_2^2. \quad (3.37)$$

Note-se que se o lema 2.5.2 for satisfeito, de forma que a inequação

$$uy \geq \dot{V} + \delta y^2 \quad (3.38)$$

seja verdadeira para o sistema, então, prova-se que o sistema possui estabilidade \mathcal{L}_2 . Para chegar-se a esse resultado, faz-se necessário calcular $\dot{V}(x)$. Assim, da definição

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x), \quad (3.39)$$

tem-se que

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_2}x_1 & \frac{1}{c_3}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1x_1 - c_2x_2 + c_2u \\ c_3x_1 - c_3dx_2^3 \end{bmatrix}; \quad (3.40)$$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{c_2}x_1(-c_1x_1 - c_2x_2 + c_2u) + \frac{1}{c_3}x_2(c_3x_1 - c_3dx_2^3); \quad (3.41)$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2}x_1^2 - x_1x_2 + x_1u + x_1x_2 - dx_2^4; \quad (3.42)$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2}x_1^2 - dx_2^4 + x_1u. \quad (3.43)$$

Da expressão de y , apresentada em (3.36), pode-se chegar a:

$$y = -c_4x_1 + u, \quad (3.44)$$

$$x_1 = -\frac{y - u}{c_4}. \quad (3.45)$$

Substituindo-se (3.45) em (3.43):

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2}\left(-\frac{y - u}{c_4}\right)^2 - dx_2^4 + \left(-\frac{y - u}{c_4}\right)u, \quad (3.46)$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2c_4^2}(y - u)^2 - dx_2^4 + \left(-\frac{y - u}{c_4}\right)u, \quad (3.47)$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2c_4^2}(y^2 - 2yu + u^2) - dx_2^4 - \frac{1}{c_4}uy + \frac{1}{c_4}u^2, \quad (3.48)$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2c_4^2}y^2 + \frac{2c_1}{c_2c_4^2}uy - \frac{c_1}{c_2c_4^2}u^2 - dx_2^4 - \frac{1}{c_4}uy + \frac{1}{c_4}u^2, \quad (3.49)$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2c_4^2}y^2 + \frac{2c_1}{c_2c_4^2}uy - \frac{1}{c_4}uy + \frac{1}{c_4}u^2 - \frac{c_1}{c_2c_4^2}u^2 - dx_2^4, \quad (3.50)$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{c_1}{c_2c_4^2}y^2 + \left(\frac{2c_1}{c_2c_4^2} - \frac{1}{c_4}\right)uy + \left(\frac{1}{c_4} - \frac{c_1}{c_2c_4^2}\right)u^2 - dx_2^4. \quad (3.51)$$

Expressando a equação (3.51), novamente, em termos dos parâmetros do circuito (3.31 a (3.35), obtém-se:

$$\dot{V}(x) = -\frac{\frac{1}{L}(R_x + R)}{\frac{1}{L}R_x^2}y^2 + \left(\frac{2\frac{1}{L}(R_x + R)}{\frac{1}{L}R_x^2} - \frac{1}{R_x}\right)uy + \left(\frac{1}{R_x} - \frac{\frac{1}{L}(R_x + R)}{\frac{1}{L}R_x^2}\right)u^2 - dx_2^4, \quad (3.52)$$

$$\dot{V}(x) = -\left(\frac{R_x + R}{R_x^2}\right)y^2 + \left(\frac{2(R_x + R)}{R_x^2} - \frac{1}{R_x}\right)uy + \left(\frac{1}{R_x} - \frac{(R_x + R)}{R_x^2}\right)u^2 - dx_2^4, \quad (3.53)$$

$$\dot{V}(x) = -\left(\frac{R_x + R}{R_x^2}\right)y^2 + \left(\frac{2(R_x + R) - R_x}{R_x^2}\right)uy + \left(\frac{R_x - (R_x + R)}{R_x^2}\right)u^2 - dx_2^4, \quad (3.54)$$

$$\dot{V}(x) = -\left(\frac{R_x + R}{R_x^2}\right)y^2 + \left(\frac{R_x + 2R}{R_x^2}\right)uy - \left(\frac{R}{R_x^2}\right)u^2 - dx_2^4. \quad (3.55)$$

Como $-\left(\frac{R}{R_x^2}\right)u^2 - dx_2^4 \leq 0$, tem-se de (3.55) a seguinte inequação:

$$\dot{V}(x) \leq -\left(\frac{R_x + R}{R_x^2}\right)y^2 + \left(\frac{R_x + 2R}{R_x^2}\right)uy, \quad (3.56)$$

$$\dot{V}(x) + \left(\frac{R_x + R}{R_x^2}\right)y^2 \leq \left(\frac{R_x + 2R}{R_x^2}\right)uy, \quad (3.57)$$

$$\left(\frac{R_x + 2R}{R_x^2}\right)uy \geq \dot{V}(x) + \left(\frac{R_x + R}{R_x^2}\right)y^2. \quad (3.58)$$

Considerando que R_x é da ordem de $10^6 \Omega$ e R da ordem de 10Ω , então $R_x \gg R$. Assim:

$$0 < \frac{R_x + 2R}{R_x^2} < 1, \quad (3.59)$$

logo, como $uy \geq 0$, tem-se de (3.58) que:

$$uy > uy \frac{R_x + 2R}{R_x^2} \geq \dot{V}(x) + \left(\frac{R_x + R}{R_x^2}\right)y^2, \quad (3.60)$$

$$uy > \dot{V}(x) + \left(\frac{R_x + R}{R_x^2}\right)y^2. \quad (3.61)$$

Finalmente, de (3.61), prova-se que o sistema é *estritamente passivo quanto à saída* com

$$\rho(y) = \frac{R_x + R}{R_x^2}y \approx \frac{1}{R_x}y. \quad (3.62)$$

Do lema, chega-se ao resultado de que o sistema possui estabilidade \mathcal{L}_2 *de ganho finito*, e o ganho \mathcal{L}_2 é menor ou igual a

$$\frac{1}{\frac{R_x + R}{R_x^2}} = \frac{1}{\delta} \approx R_x. \quad (3.63)$$

Isso quer dizer que a norma do sinal de saída será sempre menor ou igual à norma do sinal de entrada multiplicado pelo ganho e somado com uma constante não negativa (conforme Equação 2.68). Como o lema se remete à estabilidade \mathcal{L}_2 , então, pode-se concluir que:

$$\sqrt{E_y} \leq \frac{1}{\frac{R_x + R}{R_x^2}} \cdot \sqrt{E_u} + \beta, \quad (3.64)$$

onde E_y é a energia do sinal de saída e E_u é a energia do sinal de entrada. Considerando-se que R_x é muito maior que R ($R_x \gg R$), pode-se aproximar a inequação 3.64 por

$$\sqrt{E_y} \leq R_x \cdot \sqrt{E_u} + \beta, \quad (3.65)$$

A expressão 3.65 deixa explícito que, dado um sinal de entrada com energia finita, a energia do sinal de saída será sempre majorada por um ganho R_x e uma constante β . Assim, fica notório que o sistema possui estabilidade entrada-saída.

Observe-se que quanto menor for a resistência R_x , a energia do sinal de saída tenderá a ser menor. Caso contrário, quanto maior for R_x , a energia do sinal de saída tenderá a ser maior. Note-se que esse resultado está em conformidade com o circuito, uma vez que pequenos valores de R_x farão com que boa parte da corrente passe pelo ramo no qual R_x foi inserida (Figura 3.2b) e, assim, pouca energia será transferida ao circuito do para-raios, fazendo com que a energia do sinal de saída assuma menores valores. Por outro lado, elevados valores de R_x farão com que, praticamente, toda a corrente da fonte passe pelo ramo que está o circuito do para-raios e, portanto, a energia do sinal de saída seja maior. Como mencionado anteriormente, a resistência R_x pode ser compreendida como a resistência do ar, entre os terminais do para-raios, a qual, está em paralelo com o mesmo.

Capítulo 4

Conclusões

Este trabalho apresentou uma revisão bibliográfica de vários modelos de para-raios propostos na literatura, dos quais o modelo de Levinson e Philipp foi escolhido para ser objeto de um estudo de estabilidade entrada-saída. Tal escolha deu-se pelo fato do modelo ser simples e promissor para posteriores aprimoramentos. Dessa forma, buscou-se, através da avaliação de estabilidade, investigar se o modelo proposto por Levinson e Philipp seria uma opção viável e segura tanto para utilização em simulações de sistemas de potência, quanto para ser um modelo base para futuros aprimoramentos.

A análise da estabilidade foi fundamentada nos conceitos de função de Lyapunov e passividade, voltados para sistemas não lineares. Em especial, um lema da teoria de estabilidade de sistemas não lineares foi utilizado como principal base para os cálculos e desenvolvimentos da avaliação da estabilidade. Após os cálculos realizados, chegou-se à conclusão de que o circuito elétrico do modelo de Levinson e Philipp possui estabilidade entrada-saída do tipo \mathcal{L}_2 . Ou seja, se forem aplicados sinais de corrente com energia limitada ao circuito, a energia do sinal de tensão será limitada. Portanto, a utilização do modelo de Levinson e Philipp é amparada quanto à estabilidade. Logo, fica sugerido que simulações utilizando o modelo de para-raios proposto por Levinson e Philipp não devem apresentar instabilidade provenientes do circuito de para-raios avaliado neste trabalho.

Referências Bibliográficas

ABB. *Product Guide/High Voltage Surge Arresters*. [S.l.], 1995.

ABB. *Surge Arresters - Buyer's Guide*. 8. ed. Ludvika, Sweden, 2009.

BARBOSA, F. *Técnicas de Diagnósticos e Correlação com Fenômenos de Degradação em Varistores de ZnO*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, 2007.

BAYADI, A. et al. Simulation of metal oxide surge arrester dynamic behavior under fast transients. In: *The international Conference on Power Systems Transients (IPST'03) in New Orleans, USA*. [S.l.: s.n.], 2003.

CHUA, L. O.; DESOER, C. A.; KUH, E. S. *Linear and nonlinear circuits*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1987.

FERNANDEZ, F.; DIAZ, R. Metal oxide surge arrester model for fast transient simulations. In: *The Int. Conf. on Power System Transients IPAT*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1.

GARDNER, F. M. et al. Phaselock techniques, 1979. *Chapter*, v. 10, p. 208–209.

GONTIJO, G. M.; ROCHA, A. C. O.; FRANCO, E. M. Falha com pára-raios de zno de abb no sistema cemig, 2003. In: *XVII SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*. [S.l.: s.n.], 2003.

HADDAD, A. et al. Characterisation of zno surge arrester elements with direct and power frequency voltages. *IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education)*, IET, v. 137, n. 5, p. 269–279, 1990.

HILEMAN, A.; ROGUIN, J.; WECK, K. Metal oxide surge arresters in ac systems-part v: Pro-tectio performance of metal oxide surge arresters. *Electra*, v. 133, p. 132–143, 1990.

HINRICHSEN, V. Metal-oxide surge arresters in high-voltage power systems. *Siemens AG*, 2011.

HORIUCHI, S. et al. Power dissipation characteristics of zinc-oxide arresters for hvdc systems. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 3, n. 4, p. 1666–1671, 1988.

IEC. *IEC 60099-4 Surge arresters—Part 4: Metal-oxide Surge Arresters Without Gaps for A.C. Systems*. [S.l.], 2001.

IEEE. *Metal-Oxide Surge Arresters for AC Power Circuits (≥ 1 kV)*. [S.l.], 2005.

- IEEE Working Group 3.4.11. Modeling of metal oxide surge arresters. *IEEE Transactions on Power Delivery*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 302–309, 1992.
- KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, 2002.
- KIM, I. et al. Study of zno arrester model for steep front wave. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 11, n. 2, p. 834–841, 1996.
- KUH, E. S.; ROHRER, R. A. The state-variable approach to network analysis. In: . [S.l.]: IEEE, 1965. v. 53, n. 7, p. 672–686.
- Leuven EMTP Center. Atp-alternative transients program: Rule book. *Heverlee, Belgium, July*, 1987.
- LEVINSON, L. M.; PHILIPP, H. The physics of metal oxide varistors. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing, v. 46, n. 3, p. 1332–1341, 1975.
- LEVINSON, L. M.; PHILIPP, H. High-frequency and high-current studies of metal oxide varistors. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing, v. 47, n. 7, p. 3116–3121, 1976.
- LIRA, G. R. et al. Avaliação do desempenho de modelos de para-raios a zno frente a descargas atmosféricas. *IV Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos - SBSE*, 2012.
- LIRA, G. R. S. et al. Análise de desempenho de modelos de pára-raios a Óxido de zinco frente a surtos rápidos. *SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Rio de Janeiro - Brasil*, 2007.
- LIRA, G. R. S. et al. Behavior of metal oxide surge arresters for fast surges. *Cigre A3 Technical Colloquium. Rio de Janeiro - Brazil*, 2007.
- MAGRO, M. C.; GIANNETTONI, M.; PINCETI, P. Validation of zno surge arresters model for overvoltage studies. *IEEE Transactions on Power Delivery*, IEEE, v. 19, n. 4, p. 1692–1695, 2004.
- MAMIŞ, M. Computation of electromagnetic transients on transmission lines with nonlinear components. *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, IET, v. 150, n. 2, p. 200–204, 2003.
- MAMIS, M. S. State-space transient analysis of single-phase transmission lines with corona. In: CITESEER. *Proc International Conference on Power Systems Transients-IPST*. [S.l.], 2003. v. 3.
- MAMIŞ, M. S.; MERAL, M. E. State-space modeling and analysis of fault arcs. *Electric power systems research*, Elsevier, v. 76, n. 1, p. 46–51, 2005.
- NELMS, R. et al. Simulation of transmission line transients using a personal computer. In: IEEE. *Power Modulator Symposium, 1988. IEEE Conference Record of the 1988 Eighteenth*. [S.l.], 1988. p. 229–232.
- NELMS, R. et al. Using a personal computer to teach power system transients. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 4, n. 3, p. 1293–1294, 1989.

- NEWTON, S. et al. A modular state variable approach to the electromagnetic transients problem. In: IEEE. *System Theory, 1989. Proceedings., Twenty-First Southeastern Symposium on*. [S.l.], 1989. p. 118–122.
- PAI, M. *Power system stability: analysis by the direct method of Lyapunov*. [S.l.]: North-Holland Amsterdam, 1981.
- PINCETI, P.; GIANNETTONI, M. A simplified model for zinc oxide surge arresters. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 14, n. 2, p. 393–398, 1999.
- POPOV, M.; SLUIS, L. V. D.; PAAP, G. Investigation of the circuit breaker reignition overvoltages caused by no-load transformer switching surges. *European Transactions on Electrical Power*, Wiley Online Library, v. 11, n. 6, p. 413–422, 2001.
- SCHMIDT, W. et al. Behaviour of mo-surge-arrester blocks to fast transients. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 4, n. 1, p. 292–300, 1989.
- SILVA, G. V. M. da. *Controlo Não Linear*. [S.l.: s.n.], 2006.
- TOMINAGA, S. et al. Protective performance of metal oxide surge arrester based on the dynamic vi characteristics. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, n. 6, p. 1860–1871, 1979.
- UFCG. *Relatório Técnico (Ano 2): Projeto de p & d ctni-92.2011.3500.00*. Campina Grande, PB, 2014. 272 p.
- XIN, L.; JING, W.; JIANYUAN, X. High frequency model of metal-oxide surge arrester for researching on vfto. In: IEEE. *Electric Power Equipment-Switching Technology (ICEPE-ST) – 2011 1st International Conference on*. [S.l.], 2011. p. 577–581.
- YONEYAMA, T. *Método de lyapunov*. 2003.