

Francisco Revson Fernandes Pereira

Capacidade Clássica do Canal Bosônico sem Ruído

Campina Grande, Brasil

8 de agosto de 2014

Francisco Revson Fernandes Pereira

Capacidade Clássica do Canal Bosônico sem Ruído

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Univesidade Federal de Campina Grande - UFCG
Centro de Engenharia Elétrica e Informática - CEEI
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Orientador: Francisco Marcos de Assis

Campina Grande, Brasil

8 de agosto de 2014

Francisco Revson Fernandes Pereira

Capacidade Clássica do Canal Bosônico sem Ruído/ Francisco Revson Fernandes Pereira. – Campina Grande, Brasil, 8 de agosto de 2014-

75 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Francisco Marcos de Assis

Trabalho de Conclusão de Curso – Univesidade Federal de Campina Grande - UFCG

Centro de Engenharia Elétrica e Informática - CEEI

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE , 8 de agosto de 2014.

Francisco Revson Fernandes Pereira

Capacidade Clássica do Canal Bosônico sem Ruído

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado. Campina Grande, Brasil, 8 de agosto de 2014:

Francisco Marcos de Assis
Orientador

Edmar Candeia Gurjão
Convidado

Campina Grande, Brasil
8 de agosto de 2014

Este trabalho é dedicado à minha família.

Agradecimentos

Os agradecimentos deste trabalho são direcionados:

- A Deus, pela força e perseverança, pela capacidade e sabedoria;
- Ao professor Francisco Marcos, pelo exemplo de pessoa, orientação, confiança, e por estar sempre a disposição para qualquer problema que tiver;
- Ao professor Danievertton Moretti, por ter me ajudado a iniciar na grande área da Mecânica Quântica, área esta que me apaixonei desde o início;
- Ao professor Aécio Lima, pelo suporte a qualquer tipo de dúvida que me apareça sobre física;
- À professora Elloá, pelo exemplo que é, apoio e por nunca desacreditar em mim nesta esplêndida e difícil área de pesquisa;
- À minha família, pelo apoio, estímulo e por nunca desistirem de mim, não apenas durante esses cinco anos e meio, mas durante toda a minha vida;
- A todos os amigos e colegas conquistados nestes cinco anos de curso e durante a vida, por me mostrarem que, independente da situação e do momento, sempre é possível ser feliz;
- A todos os professores e a todas as pessoas anônimas que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

*"...the most fruitful areas for growth of sciences were those... between various established
elds... It is these boundary regions which offer the richest opportunities to the qualified
investigator."*

Norbert Wiener

Resumo

Neste trabalho é apresentado o cálculo da capacidade ótima dos canais bosônicos sem ruído, nos quais modelam sistemas físicos importantes, tais como as fibras ópticas e transmissões no espaço livre, quando a portadora de informação é uma onda eletromagnética. Para que o trabalho desenvolvido fosse acessível a alunos de graduação, foi apresentado em grandes detalhes os assuntos de Mecânica Quântica, Teoria da Informação Clássica e Quântica e Óptica Quântica. Também é apresentado o cálculo de três canais bosônicos particulares, que são o canal quântico de estado número, o de estados coerentes e o de estados comprimidos.

Key-words: Capacidade Ótima, Canais Quânticos Bosônicos sem Ruído, Estado Número, Estados Coerentes, Estados Comprimidos.

Abstract

In this paper is shown the calculation of the optimal capacity of lossless bosonic channels, in which model important physical systems, such as fiber optics and free space when the information carrier is displayed in an electromagnetic wave. For the work to be accessible to undergraduate students, was presented in great detail the issues of Quantum Mechanics, Classical and Quantum Information Theory and Quantum Optics. It was also shown the calculation of three particular lossless bosonic channel, the number state channel, the coherent state channel and the squeezed state channel.

Key-words: Optimal Capacity, Lossless Bosonic Channels, Number State, Coherent State, Squeezed State.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esfera de Bloch.	11
Figura 2 – Campo Elétrico de uma onda eletromagnética polarizada na direção x dentro de uma cavidade vazia de dimensão L . Figura retirada da Ref. (1)	21
Figura 3 – Níveis de energia do oscilador harmônico na frequência ω_k	26
Figura 4 – Ilustração da variação do nível de energia sobre ação dos operadores de criação e destruição	28

Lista de abreviaturas e siglas

MQ	Mecânica Quântica
SISO	Single-input and single-output
MIMO	Multiple-input and multiple-output

Lista de símbolos

$ \psi\rangle$	Vetor complexo do espaço de Hilbert
$\langle\psi $	Vetor complexo do espaço de Hilbert dual a $ \psi\rangle$
ρ	Matriz densidade
\mathcal{H}	Espaço de Hilbert
$\{M_m\}$	Conjunto de operadores de medida
\hbar	Constante de Plank dividida por 2π
σ_A	Desvio padrão do observável A
k_B	Constante de Boltzmann
c	Velocidade da luz no vácuo
ϵ_0	Permissividade dielétrica do vácuo
μ_0	Permeabilidade do vácuo
σ	Densidade de carga
ϕ	Potencial escalar
Ξ	Função de gauge
\vec{k}	Vetor de onda
\hat{a}	Operador de aniquilação
\hat{a}^\dagger	Operador de criação
$\hat{D}(\alpha)$	Operador de deslocamento
$\hat{S}(\xi)$	Operador de compressão (ou de <i>squeeze</i>)
ΔA	Desvio padrão de A
$ \alpha\rangle$	Estado coerente
$ \xi\rangle$	Estado comprimido
\mathcal{N}	Canal quântico

χ	Quantidade de Holevo
\mathcal{T}	Tempo de transmissão
C	Capacidade clássica do canal em <i>bits/s</i>
\mathcal{C}	Capacidade clássica do canal em <i>bits/uso</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	TEORIA CLÁSSICA DA INFORMAÇÃO	3
2.1	Quantidades Entrópicas Importantes	3
2.2	Transmissão de Informação Através de um Canal Clássico	5
3	RESUMO DE MECÂNICA QUÂNTICA	8
3.1	Os Postulados da Mecânica Quântica	8
3.2	Princípio de Incerteza	9
3.3	Bits e Qbtis	10
3.4	Vetores em Espaço Complexo Contínuo	11
3.5	Aplicações dos Postulados	12
3.6	Misturas Estatísticas e Matriz Densidade	14
4	INTRODUÇÃO À ÓPTICA QUÂNTICA	16
4.1	Descrição das Equações de Maxwell do Ponto de Vista da Teoria dos Potenciais	16
4.2	Campo Clássico no Espaço Livre	20
4.3	A Mecânica Quântica do Oscilador Harmônico	24
4.4	Quantização do Campo Eletromagnético	30
4.5	Estados Quânticos de Interesse	34
4.5.1	Estado Térmico	34
4.5.2	Estados Coerentes	37
4.5.3	Estados Comprimidos	41
5	TEORIA QUÂNTICA DA INFORMAÇÃO	48
5.1	Definição da Entropia de von Neumann	48
5.2	Outras Quantidades Entrópicas Relacionadas	49
5.3	Propriedades Básicas da Entropia de von Neumann	53
5.4	A entropia de uma mistura de estados quânticos	54
5.5	Subaditividade	55
5.6	Capacidade Clássica de Canais Quânticos	55
6	CAPACIDADE DE CANAIS BOSÔNICOS	57
6.1	Canais de Estados Número	57
6.1.1	Canal de Banda Estreita	57
6.1.2	Canal de Banda Larga	61

6.2	Capacidade de Canais Bosônicos através do Teorema de Holevo . . .	62
6.2.1	Canal com Energia Fixa	65
6.2.2	Canal com Energia Máxima Definida	66
6.2.3	Canal com Energia Média Constante	67
6.3	Canal de Estados Coerentes e Canal de Estado Comprimido	69
6.3.1	Canal de Banda Estreita	69
6.3.1.1	Canais de Estados Coerentes	69
6.3.1.2	Canais de Estados Comprimidos	70
6.3.2	Capacidade Máxima dos Canais	71
6.3.3	Capacidade Banda Larga para o Canal de Estados Coerentes e o Canal de Estados Comprimidos	72
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
	Referências	75

1 Introdução

A Mecânica Quântica (MQ) é um conjunto de regras matemáticas que servem para a construção de teorias físicas. Dado o Hamiltoniano¹, a MQ nos ensina como calcular os observáveis físicos em qualquer instante de tempo posterior, mas ela não diz como encontrar o hamiltoniano de um sistema (veja as Refs. (2, 3, 4)).

Pode-se seguramente afirmar que a MQ é a mais bem sucedida teoria em física. Desde a sua criação até os dias de hoje ela tem sido aplicada em diversos ramos, desde a física de partículas, física atômica e molecular, na astrofísica e na matéria condensada.

Contudo, até o início da década de 1970 os experimentos feitos para se testar os modelos e teorias construídas a partir da MQ estavam restritos a sistemas com um número imenso de constituintes, o que fazia com que os testes só pudessem ser feitos de forma indireta. Por exemplo, a explicação da MQ da supercondutividade, conhecida como teoria BCS (devido a John Bardeen, Leon Cooper e John Robert Schrieffer), foi desenvolvida em 1957, mas os experimentos com supercondutores envolvem sempre um número muito grande de transportadores de carga. Isso significa que as previsões para o comportamento de observáveis devem ser feitas em termos de médias estatísticas, perdendo-se as correlações mais fundamentais entre partículas individuais. A partir da década de 1970 avanços experimentais em diversas áreas permitiram que experimentos pudessem ser feitos em números cada vez menores de partículas, tornando “visíveis” os efeitos quânticos mais fundamentais.

Com o avanço das pesquisas e dos experimentos bem sucedidos, também veio à tona promessas surpreendentes, tal como a transmissão de grandes quantidades de informação em altas taxas. No entanto, aspectos de modelamento e cálculo de capacidade de canais reais ainda estão sendo desenvolvidos. Os canais ópticos, que são muito importantes, devido à maioria das transmissões com altas taxas serem feitas em fibras ópticas, porém a matemática desses canais é um tanto complicada, tanto para comunicações SISO (single-input and single-output) quanto MIMO (multiple-input and multiple-output), o que ainda está impossibilitando algumas das promessas que a MQ sugere.

Assim, a meta deste trabalho é mostrar os cálculos explícitos da capacidade do canal de grande interesse teórico e prático, porém de fácil modelamento e entendimento, devido à existência de equivalentes clássicos da Teoria da Informação, que é o canal bosônico sem ruído. Esses canais modelam sistemas físicos importantes, tais como fibras ópticas e transmissões no espaço livre quando a portadora de informação é um campo

¹ Em Mecânica Quântica, o Hamiltoniano é a quantidade física, ou observável, correspondente à energia total do sistema

eletromagnético e o ruído no canal pode ser desconsiderado. Assim, o trabalho estimula o aprendizado inicial sobre o assunto, ajudando a alunos e iniciantes pesquisadores.

Outra característica que foi levada em consideração no trabalho foi a clareza, pois o trabalho foi construído com o objetivo de público alvo alunos de engenharia e física. Portanto, foi feito um grande detalhamento nas partes que eram necessárias para se modelar o canal mas que não é de grande tradição nos cursos de graduação, tais como nas partes referentes à Mecânica Quântica, Teoria da Informação Quântica e Óptica Quântica.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2 é apresentado uma revisão das ferramentas da Teoria da Informação utilizadas no trabalho. Nos Capítulos 3 e 4 são mostrados uma breve descrição da Mecânica Quântica e da Óptica Quântica, respectivamente, o detalhamento destes capítulos é feita com o objetivo de uma maior compreensão por parte dos leitores que nunca tiveram contato com essas teorias. Por fim, é exposto no Capítulo 5 o cálculo da capacidade de canais bosônicos sem ruído. Além disso, o cálculo de três canais em particular, o canal de estados número, o canal de estados coerentes e o de estados comprimidos, é exposto.

2 Teoria Clássica da Informação

A principal quantidade matemática que a Teoria da Informação trabalha é a informação e seu valor médio, que é denominado de entropia. Este capítulo aborda brevemente o assunto.

2.1 Quantidades Entrópicas Importantes

É desejado construir uma quantidade que deve possuir algumas características e que será denominada de informação. Considere dois eventos E_1 e E_2 onde o evento E_1 é mais provável. A informação na ocorrência deste evento deve ser menor do que a do segundo, desde que este é mais improvável. Assim, deseja-se que

$$I(E_1 \cap E_2) \geq I(E_2) \geq I(E_1) \geq 0. \quad (2.1)$$

Caso os eventos E_1 e E_2 sejam independentes, deve-se ter

$$I(E_1 \cap E_2) = I(E_1) + I(E_2). \quad (2.2)$$

Pode-se demonstra (veja a Ref. (5)) que a única função que satisfaz esses critérios é dada por

$$I(E) = -k \log_a(Pr\{E = e\}), \quad (2.3)$$

onde k e a são constantes positivas e $Pr\{E = e\}$ é a probabilidade do evento $E = e$. Por conveniência, escolhe-se $k = 1$ e $a = 2$.

Seja X uma variável aleatória que pode assumir dois valores, 0 ou 1, com probabilidades $Pr\{X = 0\} = Pr\{X = 1\} = 1/2$, então

$$I(X = 0) = I(X = 1) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \quad (2.4)$$

Denotando uma unidade da medida de informação, que é o *bit*.

Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade $\vec{p}_X = \{p_X(x)\}$. Conseqüentemente, não se tem a ideia de quanta informação $I(X = x_i)$ será obtida após a ocorrência de X . Pode-se, portanto, considerar $I(X = x_i)$ como sendo também

uma variável aleatória, denotada por $I(X)$. Calculando sua média, denotada por $H(X)$, obtém-se

$$H(X) = - \sum_{i=x_1}^{x_n} p_X(i) \log_2(p_X(i)), \quad (2.5)$$

onde $H(X)$ é a entropia de Shannon associada com a variável aleatória X .

A entropia $H(X)$ pode ser interpretada como uma medida de incerteza sobre o valor de uma variável aleatória X . Dois fatos importantes sobre a entropia de uma variável aleatória são dados no teorema abaixo (veja a Ref. (5)).

Teorema 2.1.1. *Se X é uma variável aleatória com n valores possíveis, então*

1. $H(X) \geq 0$, com $H(X) = 0$ se, e somente se, X é uma variável aleatória;
2. $H(X) \leq \log_2 n$, com igualdade se, e somente se, X tem uma distribuição uniforme.

Quando se tem duas variáveis aleatórias, X e Y , assumindo os valores $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_m\}$, respectivamente, define-se a entropia conjunta $H(X, Y)$ como sendo

$$H(X, Y) = - \sum_{i=x_1}^{x_n} \sum_{j=y_1}^{y_m} p_{X,Y}(i, j) \log_2(p_{X,Y}(i, j)), \quad (2.6)$$

onde $p_{X,Y}(i, j) = Pr\{X = x_i, Y = y_j\}$. $H(X, Y)$ é a incerteza média associada com o par (X, Y) .

Outro conceito importante é a entropia condicional $H(X|Y)$, definida por

$$H(X|Y) = - \sum_{i=x_1}^{x_n} \sum_{j=y_1}^{y_m} p_{X,Y}(i, j) \log_2(p_{X|Y}(i, j)), \quad (2.7)$$

onde $p_{X|Y}(i, j) = Pr\{X = x_i | Y = y_j\}$. $H(X|Y)$ é a incerteza média de X depois do conhecimento de Y .

O próximo teorema apresenta algumas propriedades de $H(X, Y)$ e $H(X|Y)$ (veja a Ref. (5)).

Teorema 2.1.2. *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias.*

1. $H(X|Y) \leq H(X)$;
2. Se X e Y são independentes, então $H(X|Y) = H(X)$;
3. $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$;
4. $H(X, Y) \geq H(X) \geq H(X|Y) \geq 0$.

A informação que é obtida sobre X , quando se conhece Y , pode ser obtida subtraindo $H(X|Y)$ de $H(X)$. Esse valor, denotado por $I(X, Y)$, é chamado de informação mútua entre X e Y , isto é,

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (2.8)$$

Usando o teorema anterior, tem-se que

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (2.9)$$

Ou seja, pode-se interpretar $I(X, Y)$ como a informação que X e Y tem em comum. A seguir, algumas propriedades da informação mútua.

Teorema 2.1.3. *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade $\{p_1, \dots, p_n\}$ e $\{q_1, \dots, q_m\}$, respectivamente.*

1. $I(X, Y) = \sum_{i=x_1}^{x_n} \sum_{j=y_1}^{y_m} p_{X,Y}(i, j) \log_2 \left(\frac{p_{X,Y}(i, j)}{p_X(i)q_Y(j)} \right)$;
2. $I(X, Y) = I(Y, X)$;
3. Se X e Y são independentes, então $I(X, Y) = 0$.

2.2 Transmissão de Informação Através de um Canal Clássico

Os dois resultados fundamentais da teoria da informação clássica, estabelecidos por Shannon, estão relacionados aos seguintes problemas:

1. Qual a taxa máxima de compressão sem perdas que se obtém em uma dada mensagem?
2. Qual é a quantidade máxima de informação que pode ser transmitida de uma maneira confiável, através de um canal de comunicação?

O “Teorema de Shannon para a Codificação em Canais sem Ruído” responde à primeira pergunta e o “Teorema de Shannon para a Codificação em Canais com Ruído” responde à segunda.

Uma versão simplificada do “Teorema de Shannon para a Codificação em Canais sem Ruído” pode ser dada baseada na seguinte ideia. Considere uma fonte de informação dada por uma variável aleatória X , onde seus valores x_i definem o conjunto de símbolos que será usado para construir as mensagens (uma mensagem é uma sucessão de símbolos de X enviados um a um). A compressão de taxa R , de uma mensagem de tamanho n , é dada por uma função C^n que leva uma sequência $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de símbolos de X em

outra sequência de bits de tamanho $\lfloor nR \rfloor$, dada por $C^n(x)$. A descompressão é feita por outra função D^n que leva $C^n(x)$ em uma sequência de tamanho n , dada por $D^n(C^n(x))$. O par (C^n, D^n) é dito confiável se $\lim_{n \rightarrow \infty} Pr\{D^n(C^n(x)) = x\} = 1$. Assim, é possível enunciar o “Teorema de Shannon para a Codificação em Canais sem Ruído” da forma como é apresentado a seguir (veja a Ref. (5)).

Teorema 2.2.1. *Considere uma fonte de informação dada por uma variável aleatória X . Se $R > H(X)$, então existe um método de compressão-descompressão confiável de taxa R para a fonte. Se $R < H(X)$, qualquer método de compressão-descompressão não será confiável.*

Esse teorema informa os valores possíveis de R para os quais existe um método de compressão-descompressão confiável e, ao mesmo tempo, fornece uma nova interpretação para $H(X)$: a entropia é a quantidade mínima de recursos físicos necessários e suficientes para armazenar, de maneira confiável, a saída de uma fonte de informação. Ou ainda, a entropia de Shannon $H(X)$ define quanta informação existe, em média, em um valor de X , e diz também quantos bits são necessários para codificar a informação de uma mensagem de tamanho n : $\lfloor nH(X) \rfloor$.

Em qualquer sistema de comunicação real, o canal por onde a mensagem é enviada está sujeito a um ruído aleatório que pode modificar a mensagem, fazendo com que haja perda de informação.

Como já dito, a entrada do canal é definida por uma variável aleatória X , com valores $\{x_1, \dots, x_n\}$ e distribuição de probabilidade $\{p_X(x_1), \dots, p_X(x_n)\}$. A saída do canal também é uma variável aleatória Y , com valores $\{y_1, \dots, y_m\}$ e distribuição de probabilidade $\{q_Y(y_1), \dots, q_Y(y_m)\}$ (tipicamente, $m = n$). O ruído do canal é definido por um conjunto de probabilidades condicionais $p_{X|Y}(i, j)$, dadas por

$$p_{X|Y}(i|j) = Pr\{X = x_i | Y = y_j\}, \quad (2.10)$$

onde $i = x_1, \dots, x_n$ e $j = y_1, \dots, y_m$.

Supondo que o canal seja conhecido (todas as probabilidades $p_{X|Y}(i|j)$, para $i = x_1, \dots, x_n$ e $j = y_1, \dots, y_m$ são conhecidas), se gostaria transmitir a quantidade máxima possível taxa de informação associada à mensagem enviada.

Shannon mostrou que qualquer canal pode ser usado para uma comunicação confiável, desde que exista alguma “relação” entre a entrada e a saída do canal. Além disso, ele encontrou uma expressão para calcular a quantidade máxima de informação por símbolo que pode ser transmitida (esse valor é chamado de capacidade do canal). Essencialmente, esse é o conteúdo do “Teorema de Shannon para a Codificação em Canais com Ruído”, descrito abaixo (veja a Ref. (5)).

Teorema 2.2.2. *Considere a entrada de um canal dada por uma variável aleatória X , com valores $\{x_1, \dots, x_n\}$ e distribuição de probabilidade $\{p_X(x_1), \dots, p_X(x_n)\}$, e a saída dada por uma variável aleatória Y , com valores $\{y_1, \dots, y_m\}$ e distribuição de probabilidade $\{q_Y(y_1), \dots, q_Y(y_m)\}$. A quantidade máxima de informação C , por cada símbolo x_i , que pode ser transmitida de uma maneira confiável é dada por*

$$C = \max_{\{p_X(x_1), \dots, p_X(x_n)\}} I(X, Y). \quad (2.11)$$

A informação mútua $I(X, Y)$ depende da distribuição de probabilidade de X , $\vec{p}_X = \{p_X(x)\}$, e das probabilidades condicionais $Pr\{X = x_i | Y = y_j\}$, $i = x_1, \dots, x_n$ e $j = y_1, \dots, y_m$. Entretanto, a capacidade de um canal depende apenas das probabilidades condicionais que o definem.

3 Resumo de Mecânica Quântica

Será apresentado um brevíssimo resumo de Mecânica Quântica necessário para que se tenha um *background* mínimo para o entendimento do restante do trabalho.

3.1 Os Postulados da Mecânica Quântica

A MQ é construída sobre quatro postulados (veja a Ref. (6)):

- **Postulado 1** - Todo sistema físico tem a ele associado um espaço vetorial complexo chamado de espaço de Hilbert. Os elementos do espaço de Hilbert são vetores complexos $|\psi\rangle$, chamados de kets, e representam o estado físico do sistema. O complexo conjugado de um ket é chamado de bra, representado por $\langle\psi|$.
- **Postulado 2** - A evolução temporal de um sistema quântico isolado, ou seja, que não interage com sua vizinhança, se dá através de transformações unitárias:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}|\psi(0)\rangle \quad (3.1)$$

onde $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}$, sendo $\mathbb{1}$ a matriz identidade. A relação do operador \hat{U} com o hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, em qualquer instante de tempo, do sistema é:

$$\hat{U}(t) = \exp -\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}t. \quad (3.2)$$

Fisicamente, transformações unitárias representam processos temporalmente reversíveis. De fato, aplicando-se U^\dagger nos dois lados da Eq. 3.1 obtém-se

$$|\psi(0)\rangle = \hat{U}(t)^\dagger|\psi(t)\rangle. \quad (3.3)$$

Uma outra propriedade importante das transformações unitárias é a conservação do produto escalar:

$$\langle\psi(0)|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle. \quad (3.4)$$

- **Postulado 3** - Medidas em MQ são representadas por um conjunto de operadores de medidas $\{\hat{M}_m\}$, onde o índice m refere-se aos possíveis resultados da medida. A probabilidade de que o resultado m seja encontrado em uma medida feita em um sistema quântico preparado no estado $|\psi\rangle$ é dada por

$$p_M(m) = \langle\psi|\hat{M}_m^\dagger\hat{M}_m|\psi\rangle. \quad (3.5)$$

e o estado do sistema após a medida com resultado m será:

$$|\psi_m\rangle = \frac{\hat{M}_m}{\sqrt{p_M(m)}}|\psi\rangle \quad (3.6)$$

A normalização das probabilidades, $\sum_m p_M(m) = 1$, a hipótese de que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ e a Eq. 4.6 implicam na relação de completitude:

$$\sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = I \quad (3.7)$$

- **Postulado 4** - Os elementos do espaço de Hilbert de um sistema quântico composto AB é formado pelo produto tensorial dos kets dos espaços de Hilbert dos sistemas individuais:

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad (3.8)$$

Esta regra pode ser estendida para N subsistemas.

3.2 Princípio de Incerteza

O princípio da incerteza de Heisenberg consiste num enunciado da Mecânica Quântica, formulado inicialmente em 1927 por Werner Heisenberg, impondo restrições à precisão com que se podem efetuar medidas simultâneas de uma classe de pares de observáveis em nível subatômico.

Em Mecânica Quântica, observáveis, tais como posição e momentum, são representados por operadores hermitianos. Quando se considera pares de observáveis, uma das quantidades mais importantes é o comutador. Para um par de observáveis A e B , se define seu comutador como sendo

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (3.9)$$

Neste caso, é mostrado que a relação de comutação entre a posição e o momentum é (veja a Ref. (2))

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad (3.10)$$

O significado físico é que operadores que não comutam não podem ser medidos com qualquer precisão simultaneamente, sempre ocorrendo um erro na medida dos observáveis.

A forma geral mais comum do princípio de incerteza é a relação de incerteza de Robertson. Para um operador Hermitiano arbitrário \hat{O} , associa-se o desvio padrão como sendo

$$\sigma_O = \sqrt{\langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2}, \quad (3.11)$$

onde $\langle \hat{O} \rangle$ denota o valor médio¹. Para um par de operadores \hat{A} e \hat{B} , a relação de incerteza de Robertson é dada por

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \quad (3.12)$$

Outra expressão para o princípio de incerteza é a relação de incerteza de Schrödinger, que é

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{2} \{ |\langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle|^2 + |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2 \}, \quad (3.13)$$

onde o anticomutador é definido da seguinte forma

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (3.14)$$

Desde que essas relações são para operadores em geral, então elas podem ser aplicadas para quaisquer dois observáveis encontrados na literatura. Por exemplo, como

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar, \quad (3.15)$$

então

$$\sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.16)$$

3.3 Bits e Qbits

A unidade de informação clássica é o bit. Um bit pode ter os valores lógicos “0” ou “1”. Nos computadores, bits são fisicamente representados pela presença ou não de correntes elétricas em componentes eletrônicos dentro dos chips: a presença da corrente indica o estado lógico 1 e a sua ausência o estado lógico 0. Obviamente que os dois valores lógicos de um bit clássico são mutuamente excludentes.

Analogamente, a unidade de informação quântica é o bit quântico, ou qbit. Um qbit pode ter os valores lógicos “0”, “1” ou qualquer superposição deles. Fisicamente, qbits são representados por quaisquer objetos quânticos que possuam dois autoestados bem distintos. Os exemplos mais comuns são: estados de polarização de um fóton (horizontal ou vertical), elétrons em átomos de dois níveis (o que é uma aproximação), elétrons em poços quânticos, e spins nucleares.

¹ Também é usado neste trabalho \bar{O} para denotar o valor médio do operador \hat{O}

Os estados de um qbit podem ser representados pelos seguintes kets

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

O conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ forma uma base no espaço de Hilbert de duas dimensões, chamada de base computacional. No caso de um spin $1/2$ representar o qbit, identificamos $|0\rangle \equiv |\uparrow\rangle$ e $|1\rangle \equiv |\downarrow\rangle$.

O estado genérico de um qbit é representado por

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (3.19)$$

onde $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Esse estado pode ser parametrizado por ângulos θ e ϕ fazendo-se $a \equiv \cos(\theta/2)$ e $b \equiv \exp(i\phi) \sin(\theta/2)$:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \exp(i\phi) \sin(\theta/2)|1\rangle \quad (3.20)$$

Esta representação permite que o estado de um qbit seja visualizado como um ponto sobre a superfície de uma esfera. Tal esfera é chamada de esfera de Bloch.

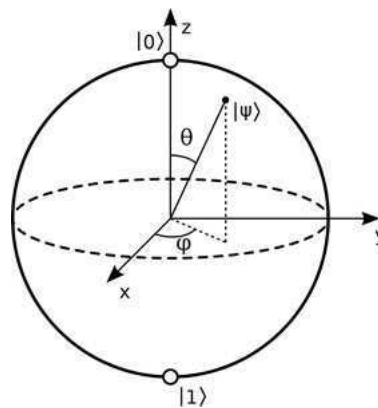


Figura 1 – Esfera de Bloch.

3.4 Vetores em Espaço Complexo Contínuo

O conjunto de vetores ortonormais e completos gerados por operadores lineares pode ser visto como um conjunto de vetores unitários ortogonais no espaço vetorial abstrato de Hilbert. A vantagem deste ponto de vista é que muitas propriedades matemáticas e manipulações envolvendo estas funções vem analogamente de propriedades e operações

que envolvem espaços vetoriais ordinários. Estes espaços são importantes quando o observável que se deseja medir tem espectro contínuo, tal como a posição e momentum de uma partícula.

Para ilustrar este ponto de vista, considere dois vetores $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, o seu produto interno é definido da seguinte forma

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int \langle\psi_1|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi_2\rangle d\alpha, \quad (3.21)$$

onde $\alpha = x + iy$.

Pode-se notar que isto é uma generalização do produto interno para espaços complexos discretos, tais como aqueles que os qbits estão inseridos. Para maiores detalhes, veja a Ref. (2).

3.5 Aplicações dos Postulados

As matrizes de Pauli são importantes exemplos de transformações unitárias sobre 1 qbit:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Note que em todos os casos, $\hat{U}\hat{U}^\dagger = I$, para $\hat{U} = \hat{X}, \hat{Y}$ ou \hat{Z} .

Uma outra operação unitária importante sobre 1 qbit é a transformação de Hadamard:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{X + Z}{\sqrt{2}}. \quad (3.25)$$

Considere agora o seguinte conjunto de operadores de medida de 1 qbit:

$$\hat{M}_0 \equiv |0\rangle\langle 0| \quad (3.26)$$

$$\hat{M}_1 \equiv |1\rangle\langle 1|. \quad (3.27)$$

Note que \hat{M}_0 e \hat{M}_1 são Hermitianos mas não são unitários. Isto quer dizer que o processo de medida representado por esses operadores é irreversível. Segundo o Postulado 3,

$$p_M(0) = \langle \psi | \hat{M}_0^\dagger \hat{M}_0 | \psi \rangle = |a|^2 \quad (3.28)$$

$$p_M(1) = \langle \psi | \hat{M}_1^\dagger \hat{M}_1 | \psi \rangle = |b|^2. \quad (3.29)$$

E após a medida,

$$|\psi_0\rangle = \frac{a}{|a|} |0\rangle |\psi_1\rangle = \frac{b}{|b|} |1\rangle. \quad (3.30)$$

Os fatores $a/|a|$ e $b/|b|$ são fases globais (não observáveis), e podem ser descartados. Estes operadores de medidas são exemplos de projetores.

Os qbits de um espaço de Hilbert com dois qbits é obtido pelo produto tensorial dos vetores do espaço de Hilbert com apenas um qbit:

$$\{|0\rangle, |1\rangle\} \otimes \{|0\rangle, |1\rangle\} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}. \quad (3.31)$$

A representação matricial de cada um desses vetores da base computacional de dois qbits é:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$|11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

A representação matricial das matrizes de Pauli e do operador de Hadamard nesta base pode ser obtida pelos produtos tensoriais correspondentes com a matriz identidade 2×2 :

$$\hat{O}_A = \hat{O} \otimes \hat{\mathbf{1}}, \quad (3.36)$$

$$\hat{O}_B = \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{O}, \quad (3.37)$$

onde $\hat{O} = \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \hat{H}$. Aqui, adota-se a convenção $|AB\rangle$ para os estados do sistema composto. Essas expressões podem ser facilmente generalizadas para um número arbitrário de qbits (veja a Ref. (6)).

3.6 Misturas Estatísticas e Matriz Densidade

Em Computação Quântica e Informação Quântica frequentemente é necessário lidar com situações em que o vetor de estado do sistema não é conhecido, mas apenas um conjunto possível de vetores $\{\psi_i\}$, que ocorrem com probabilidades $\{p_X(i)\}$. O conjunto $\{p_X(i), |\psi_i\rangle\}$ é chamado de ensemble estatístico. A ferramenta matemática adequada para tratar desses casos é a matriz densidade, ρ , definida como:

$$\rho \equiv \sum_i p_X(i) |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (3.38)$$

onde $p_X(i) > 0$ e $\sum_i p_X(i) = 1$. Notemos algumas propriedades importantes deste operador:

1. A matriz densidade é um operador positivo, ou seja, possui autovalores reais não-negativos. De fato, para qualquer $|\phi\rangle$,

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_X(i) \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle = \sum_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 > 0; \quad (3.39)$$

2. O traço de ρ é igual a 1:

$$\text{Tr}\{\rho\} = \sum_i p_X(i) \text{Tr}\{|\psi_i\rangle \langle \psi_i|\} = \sum_i p_X(i) = 1; \quad (3.40)$$

3. O estado será puro se e somente se $\text{Tr}(\rho^2) = 1$:

$$\rho^2 = \sum_i \sum_j p_X(i) p_X(j) |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j| \quad (3.41)$$

$$= \sum_i p_X^2(i) |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (3.42)$$

Consequentemente

$$\text{Tr}\{\rho^2\} = \sum_i p_X^2(i) \text{Tr}\{|\psi_i\rangle \langle \psi_i|\} = \sum_i p_X^2(i) \leq 1 \quad (3.43)$$

A igualdade será satisfeita se e somente se $p_X(i) = 0$, exceto para um índice i_0 tal que $p_X(i_0) = 1$.

Qualquer operador positivo com traço igual a 1 é um operador densidade válido.

Os postulados da MQ podem ser reformulados em termos do operador densidade.

Um exemplo de operador densidade de um ensemble canônico à temperatura de equilíbrio T é:

$$\rho = \frac{e^{-\hat{\mathcal{H}}_{eq}/k_B T}}{\text{Tr}\{e^{-\hat{\mathcal{H}}_{eq}/k_B T}\}} \quad (3.44)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}_{eq}$ é o hamiltoniano de equilíbrio do sistema e k_B é a constante de Boltzmann.

Quando se lida com sistemas compostos, dado o operador densidade do sistema total, os operadores densidade dos subsistemas podem ser obtidos através da operação de traço parcial. O traço parcial é uma soma sobre os estados de um dos subsistemas. Por exemplo, se ρ^{AB} for o operador densidade de um sistema composto AB , os operadores densidade de cada subsistema serão:

$$\rho^A \equiv \text{Tr}_B(\rho^{AB}) \quad (3.45)$$

$$\rho^B \equiv \text{Tr}_A(\rho^{AB}). \quad (3.46)$$

Estas relações são evidentes para sistemas não-emaranhados para os quais $\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$.

4 Introdução à Óptica Quântica

Será feita a quantização do campo eletromagnético. Isto permite que seja possível o entendimento das ferramentas matemáticas que serão utilizadas posteriormente, tais como os operadores de criação e destruição, e ajuda o leitor a entender como é possível chegar em uma teoria quântica do campo eletromagnético.

4.1 Descrição das Equações de Maxwell do Ponto de Vista da Teoria dos Potenciais

As equações de Maxwell na forma diferencial para o campo elétrico e magnético em um meio homogêneo sem perdas são

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\mu_0^{-1} \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (4.2)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \sigma, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.4)$$

onde σ e \vec{J} são a densidade de carga e de corrente, respectivamente. Não se deve esquecer que foi, omitido por motivo de comodidade, as dependências dos campos e densidades com relação ao tempo (t) e ao espaço ($\vec{r} = (x, y, z)$).

O objetivo agora é escrever as equações de campo por meio dos potenciais escalar e vetorial, ϕ e \vec{A} . Da Eq. 4.4 é obtido que o campo magnético pode ser visto como sendo igual a

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (4.5)$$

E a junção da informação da Eq. 4.1 com a expressão do campo magnético que foi obtido, é possível representar o campo elétrico como sendo

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.6)$$

As demonstrações formais desses resultados podem ser vistas nas Refs. (7, 8).

Com as duas equações de Maxwell que ainda não foram usadas, será construído as equações de onda com a utilização dos potenciais. Substituindo as Eqs. 4.5 e 4.6 nas Eqs. 4.2 e 4.3, respectivamente, tem-se

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}^1 \quad (4.7)$$

e

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \phi - \epsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \sigma, \quad (4.8)$$

onde

$$c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \quad (4.9)$$

é a velocidade da luz no vácuo.

As Eqs. 4.7 e 4.8 são as equações de campo, elas determinam o campo resultante das distribuições de carga σ e corrente \vec{J} .

Infelizmente as Eqs. 4.7 e 4.8 ainda se encontram em uma forma de difícil resolução assim, deve ser feita alguma manipulação matemática para se ter duas equações, uma com apenas \vec{A} e outra com ϕ . Isso pode ser obtido por meio das transformações de gauge (veja a Ref. (8)) (ou de calibre, como as vezes é chamado), elas são transformações que o vetor potencial e o potencial escalar podem sofrer mas que não alteram as equações de Maxwell.

Os campos obtidos das Eqs. 4.5 e 4.6 são os mesmos para os pares potenciais \vec{A} , ϕ e \vec{A}' , ϕ' relacionados pela transformação de gauge definida por

$$\vec{A} = \vec{A}' - \nabla \Xi \quad (4.10)$$

e

$$\phi = \phi' + \frac{\partial \Xi}{\partial t} \quad (4.11)$$

onde a função de gauge Ξ é uma função arbitrária da posição \vec{r} e do tempo t . Um gauge para o campo eletromagnético é especificado por algumas condições sobre \vec{A} e ϕ que σ e \vec{J} os impõe.

O gauge que será usado aqui, e que ficará mais claro o motivo posteriormente, será o gauge de Coulomb, ele implica que o potencial vetor seja

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (4.12)$$

¹ Foi usado a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

A forma de se obter o gauge de Coulomb é fazendo com que a função de gauge satisfaça

$$\nabla^2 \Xi = \nabla \cdot \vec{A}'. \quad (4.13)$$

Essa transformação leva as equações de campo a forma

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J} \quad (4.14)$$

e

$$-\nabla^2 \phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4.15)$$

É possível notar que a Eq. 4.15 é a equação de Poisson da eletrostática, que possui solução bem conhecida na literatura.

O passo agora é eliminar a dependência do vetor escalar na Eq. 4.14, isto é obtido com o teorema de Helmholtz. De acordo com o teorema de Helmholtz, qualquer campo vetorial pode ser escrito como uma soma de duas componentes, uma na qual tem o divergente nulo e a outra que tem o rotacional nulo. Para a densidade de corrente, é pode-se escrevê-lo como sendo

$$\vec{J} = \vec{J}_T + \vec{J}_L, \quad (4.16)$$

onde

$$\nabla \cdot \vec{J}_T = 0 \quad (4.17)$$

e

$$\nabla \times \vec{J}_L = 0; \quad (4.18)$$

\vec{J}_T é chamado de componente transversal ou solenoidal e \vec{J}_L é chamado de componente longitudinal ou irrotacional.

Algumas informações importantes podem ser tiradas do teorema de Helmholtz. A primeira é que o campo magnético \vec{B} é definido puramente pela parte transversal do potencial vetor \vec{A}_T , visto que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Segundo, tem-se que o vetor escalar é longitudinal, pois $\nabla \times \nabla \phi = 0$. Posteriormente, a transformação de gauge de Coulomb resulta em um potencial vetor \vec{A} puramente transversal, tanto quanto o campo magnético. Assim, o potencial vetor \vec{A} é transversal e o potencial escalar ϕ é longitudinal.

Aplicando o que foi mencionado na Eq. 4.14 é possível obter duas equações independentes

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}_T \quad (4.19)$$

e

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = \mu_0 \vec{J}_L. \quad (4.20)$$

A Eq. 4.19 mostra que o potencial vetor é determinado pela parte transversa da densidade de corrente e essa equação tem solução conhecida na literatura, veja a Ref. (8). Com as duas equações que o potencial escalar satisfaz, Eqs 4.15 e 4.20, é possível obter as equações de conservação de carga

$$\nabla \cdot \vec{J}_L = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (4.21)$$

Dividindo o campo elétrico também em parte transversal e longitudinal, que são dadas por

$$\vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.22)$$

e

$$\vec{E}_L = -\nabla \phi. \quad (4.23)$$

Como foi mencionado, o campo magnético é inteiramente transverso devido as Eqs. de Maxwell.

Os resultados que foram obtidos leva às Equações de Maxwell a serem escritas pelo seguinte conjunto de equações

$$\nabla \times \vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.24)$$

$$\mu_0^{-1} \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_T, \quad (4.25)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_T = 0, \quad (4.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.27)$$

para a parte transversa das ondas eletromagnéticas. As equações longitudinais, que são associadas com o potencial escalar ϕ , são apenas uma e ela é

$$\nabla \cdot \vec{E}_L = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4.28)$$

E com as Eqs. 4.23 e 4.20 tem-se que a parte longitudinal da densidade de corrente é

$$\vec{J}_L = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t}. \quad (4.29)$$

As equações longitudinais implicam que o campo elétrico advém da densidade de carga, como acontece nas equações da eletrostática.

4.2 Campo Clássico no Espaço Livre

A partir de agora, será considerado que o campo eletromagnético se encontra em uma região do espaço onde

$$\vec{J}_T = 0 \quad (4.30)$$

e assim, a Eq. 4.19 se torna

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.31)$$

Essa aproximação auxilia a conseguir uma resolução mais fácil da equação do vetor de onda e dela também se obtêm resultados bastantes realistas para a aplicação de óptica quântica para comunicações ópticas. O campo encontrado por esta equação é dito estar no espaço livre.

A ideia para a quantização do campo eletromagnético é encontrar uma expressão matemática que liga a energia do campo eletromagnético com a energia do oscilador harmônico e, posteriormente, fazer a mudança do potencial vetor clássico \vec{A} para o operador advindo da mecânica quântica \hat{A} .

Para isso, considere que o campo eletromagnético está em uma região do espaço que é descrito por cubos de lado L e sem contornos, conhecido como quantização da cavidade. Veja a Fig. 2.

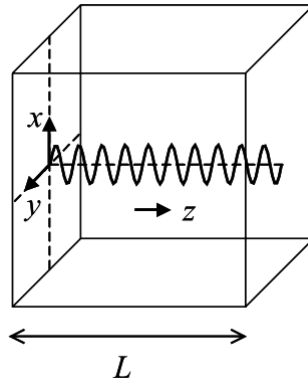


Figura 2 – Campo Elétrico de uma onda eletromagnética polarizada na direção x dentro de uma cavidade vazia de dimensão L . Figura retirada da Ref. (1)

A solução deste problema é feito por meio de se considerar a onda viajante, e não estacionária, e fazer com que ela seja sujeita a condições de contornos periódicos.

O potencial vetor é expandido como uma soma de contribuições de modos da cavidade,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{e}_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t), \quad (4.32)$$

onde

$$A_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t) = A_{\vec{k}\lambda}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + A_{\vec{k}\lambda}^*(t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (4.33)$$

Aqui as componentes do vetor de onda \vec{k} assumem os seguintes valores,

$$k_x = 2\pi\nu_x/L, \quad (4.34)$$

$$k_y = 2\pi\nu_y/L, \quad (4.35)$$

$$k_z = 2\pi\nu_z/L, \quad (4.36)$$

com

$$\nu_x, \nu_y, \nu_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.37)$$

É essa quantização do número de onda que representa a condição de contorno periódica que foi mencionada anteriormente.

Os $\vec{e}_{\vec{k}\lambda}$ da Eq. 4.32 são vetores unitários de polarização e a condição do gauge de Coulomb da Eq. 4.12 é satisfeita se

$$\vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{k} = 0. \quad (4.38)$$

As polarizações são escolhidas para serem perpendiculares entre si

$$\vec{e}_{\vec{k}1} \cdot \vec{e}_{\vec{k}2} = 0. \quad (4.39)$$

A normalização e ortogonalidade dos dois vetores de polarização para cada \vec{k} é expresso em uma única condição

$$\vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{e}_{\vec{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (4.40)$$

onde $\delta_{\lambda\lambda'}$ é o delta de Kronecker.

As componentes modais do potencial vetor são independentes e, aplicando a condição da Eq. 4.31 na Eq. 4.32, obedecem a equação de campo

$$k^2 A_{\vec{k}\lambda}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{\vec{k}\lambda}(t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.41)$$

Os coeficientes modais, e seus complexos conjugados, satisfazem a equação harmônica do movimento,

$$\frac{\partial^2 A_{\vec{k}\lambda}(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 A_{\vec{k}\lambda}(t) = 0, \quad (4.42)$$

onde é conveniente escrever

$$\omega_k = ck. \quad (4.43)$$

O campo eletromagnético é quantizado pela conversão do oscilador harmônico clássico para uma contrapartida quântica. A natureza da conversão é sugestiva pela forma da energia resultante dos campos, fato que será calculado agora.

A solução da Eq. 4.42 tem a forma

$$A_{\vec{k}\lambda}(t) = A_{\vec{k}\lambda} \exp(-i\omega_k t), \quad (4.44)$$

e a contribuição modal do potencial vetor da Eq. 4.32 se torna

$$A_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t) = A_{\vec{k}\lambda} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + A_{\vec{k}\lambda}^* \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (4.45)$$

O vetor potencial completo é obtido substituindo esse resultado na Eq. 4.32.

O correspondente campo elétrico transversal completo é obtido da Eq. 4.22 como sendo igual a

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{e}_{\vec{k}\lambda} E_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t), \quad (4.46)$$

onde

$$E_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t) = i\omega_k \{A_{\vec{k},\lambda} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - A_{\vec{k},\lambda}^* \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r})\} \quad (4.47)$$

e o campo magnético é obtido da Eq. 4.5 como sendo

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1,2} \frac{\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}\lambda}}{k} B_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t), \quad (4.48)$$

onde

$$B_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t) = ik \{A_{\vec{k},\lambda} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - A_{\vec{k},\lambda}^* \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r})\} \quad (4.49)$$

A razão entre as amplitudes dos campos elétrico e magnético é igual a velocidade da luz, como é de se esperar para ondas eletromagnéticas no espaço livre.

A energia total do campo eletromagnético em uma cavidade é

$$Energia = \frac{1}{2} \int_{cavidade} dV \left[\epsilon_0 \vec{E}_T(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_T(\vec{r}, t) + \mu_0^{-1} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \right], \quad (4.50)$$

e esta integral é calculada substituindo os resultados das Eqs. 4.46 e 4.48. Uma propriedade importante que é usada no cálculo dessa integral é que

$$\int_{cavidade} dV \exp \left[\pm i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} \right] = V \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (4.51)$$

e

$$\int_{cavidade} dV \exp \left[\pm i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r} \right] = V \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}, \quad (4.52)$$

onde $V = L^3$. Assim, a integral da Eq. 4.50 resulta em

$$Energia = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda, \lambda'} V \{ (A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^* + A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda}) \times (\epsilon_0 \omega_k^2 \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{e}_{\vec{k}\lambda'} + \mu_0^{-1} \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \cdot \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}\lambda'}) \\ - (A_{\vec{k}\lambda} A_{-\vec{k}\lambda'} e^{-2i\omega_k t} + A_{\vec{k}\lambda}^* A_{-\vec{k}\lambda'}^*) \times (\epsilon_0 \omega_k^2 \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{e}_{-\vec{k}\lambda'} - \mu_0^{-1} \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \cdot \vec{k} \times \vec{e}_{-\vec{k}\lambda'}) \}, \quad (4.53)$$

como os modos $\vec{k}\lambda$ e $-\vec{k}\lambda$ tem a mesma frequência ω_k . O fator que inclui o vetor polarização dos modos é simplificado de forma considerável, isso é feito observando que

$$\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{k} \times \vec{e}_{\pm\vec{k}\lambda'} = k^2 \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{e}_{\pm\vec{k}\lambda'}. \quad (4.54)$$

Então, usando as Eqs. 4.12, 4.40 e 4.43, é encontrado que o termo dependente do tempo da Eq. 4.53 desaparece. A energia total radiada é então reduzida à soma da contribuição que não depende do tempo dos modos individuais,

$$Energia = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} Energia_{\vec{k}\lambda} \quad (4.55)$$

onde

$$Energia_{\vec{k}\lambda} = \epsilon_0 V \omega_k^2 (A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^* + A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda}). \quad (4.56)$$

Os coeficientes modais $A_{\vec{k}\lambda}$ e $A_{\vec{k}\lambda}^*$, são deixados dessa forma na equação por causa da fácil comparação da energia do oscilador harmônico que será discutida posteriormente, mesmo sendo possível associá-los em um termo só, visto que eles comutam.

4.3 A Mecânica Quântica do Oscilador Harmônico

Para o oscilador harmônico, o Hamiltoniano, no qual é a energia total do sistema, é dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = \text{Energia Cinética} + \text{Energia Potencial} = E_c + V \quad (4.57)$$

$$= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2 \quad (4.58)$$

onde o operador posição \hat{q} e o operador momentum \hat{p} obedecem a relação de comutação usual,

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (4.59)$$

É conveniente trocar \hat{q} e \hat{p} por um par de operadores sem dimensão definidos como sendo

$$\hat{a} = (2m\hbar\omega)^{-1/2} (m\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (4.60)$$

e

$$\hat{a}^\dagger = (2m\hbar\omega)^{-1/2} (m\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (4.61)$$

o que resulta na relação conversada dada por

$$\hat{q} = (\hbar/2m\omega)^{1/2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (4.62)$$

e

$$\hat{p} = i(m\hbar\omega/2)^{1/2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (4.63)$$

Os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger são chamados, respectivamente, de operador destruição e criação. Eles possuem propriedades simples e são de extremo uso em cálculos, mesmo não representando nenhum observável do oscilador harmônico.

Segue das Eqs. 4.60 e 4.61 que

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = (2m\hbar\omega)^{-1}(\hat{p}^2 - im\omega\hat{q}\hat{p} + im\omega\hat{p}\hat{q}) \quad (4.64)$$

$$= (\hbar\omega)^{-1}(\hat{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\hbar\omega) \quad (4.65)$$

e

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = (\hbar\omega)^{-1}(\hat{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\hbar\omega) \quad (4.66)$$

onde foi usado a relação de comutação de \hat{q} e \hat{p} . A diferença entre essas expressões resulta no comutador entre os operadores de destruição e criação

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \mathbf{1}, \quad (4.67)$$

onde $\mathbf{1}$ é o operador unitário no espaço de Fock.

Com a relação dos operadores \hat{q} e \hat{p} e com os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger , é possível encontrar a expressão do Hamiltoniano dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}). \quad (4.68)$$

Os autovalores de energia são facilmente determinados da teoria dos operadores de criação e destruição. Seja $|n\rangle$ o autoestado da energia com autovalor E_n . A equação do autovalor é

$$\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (4.69)$$

Multiplicando os dois lados da igualdade pelo lado esquerdo por \hat{a}^\dagger

$$\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger)|n\rangle = E_n\hat{a}^\dagger|n\rangle. \quad (4.70)$$

Usando a relação de comutação da Eq. 4.67 no primeiro termo do lado esquerdo

$$\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger)|n\rangle = E_n\hat{a}^\dagger|n\rangle. \quad (4.71)$$

no qual é rearranjado como sendo

$$\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{\mathcal{H}}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\hat{a}^\dagger|n\rangle. \quad (4.72)$$

Esta última equação tem a forma de uma equação de autovalor da energia. Ela mostra que o estado $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ é um autoestado do oscilador harmônico com autovalores $E_n + \hbar\omega$. Denota-se o novo autoestado e autovalor como

$$|n+1\rangle = \hat{a}^\dagger|n\rangle \quad (4.73)$$

e

$$E_{n+1} = E_n + \hbar\omega, \quad (4.74)$$

o que leva a Eq. 4.72 a ser escrita como

$$\hat{\mathcal{H}}|n+1\rangle = E_{n+1}|n+1\rangle. \quad (4.75)$$

Este resultado mostra que, dado um oscilador harmônico com nível de energia E_n , existe outro nível de energia maior que o primeiro por uma quantidade $\hbar\omega$. Os níveis de energia formam uma “escada” igualmente espaçada, no qual é ilustrado na Fig. 3. Como em Mecânica Clássica, não existe restrição sobre o valor máximo da energia do oscilador, e a escada estende superiormente a infinito.

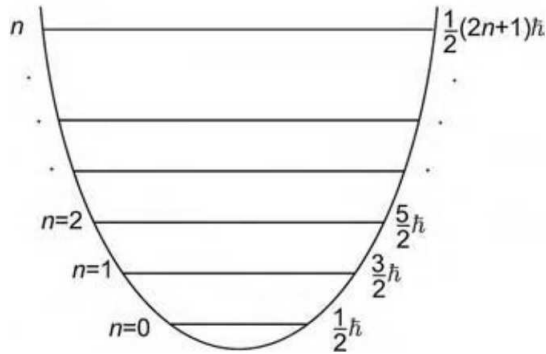


Figura 3 – Níveis de energia do oscilador harmônico na frequência ω_k .

O fim inferior da escada é investigada pela multiplicação da equação dos autovalores da energia, Eq. 4.69, pelo lado esquerdo por \hat{a} . Manipulação similar a feita anteriormente resulta a se ter

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle. \quad (4.76)$$

O estado $\hat{a}|n\rangle$ é o autoestado da energia com autovalor $E_n - \hbar\omega$, denotada por

$$|n-1\rangle = \hat{a}|n\rangle \quad (4.77)$$

e

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega, \quad (4.78)$$

tal que a Eq. 4.76 se torna

$$\hat{\mathcal{H}}|n-1\rangle = E_{n-1}|n-1\rangle. \quad (4.79)$$

A escada dos níveis de energia se estende para baixa com passos de $\hbar\omega$. Entretanto, a escada deve ter um limite inferior e, por causa que os níveis de energia cinética e potencial devem ser quantidades positivas, os autovalores de energia não permitem valores negativos. Seja $|0\rangle$ o estado fundamental com energia E_0 , para o qual a Eq. 4.76 dá

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{a}|0\rangle = (E_0 - \hbar\omega)\hat{a}|0\rangle. \quad (4.80)$$

Como, por hipótese, não existe autovetor de energia menor do que do estado fundamental, a única solução da Eq. 4.80 consistente com essa interpretação física é

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (4.81)$$

Esta condição do estado fundamental ou estado do vácuo é usado para determinar E_0 , como o estado fundamental obedece a seguinte equação de autovalor

$$\hat{\mathcal{H}}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle = E_0|0\rangle, \quad (4.82)$$

então

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (4.83)$$

e segue da Eq. 4.73 que

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (4.84)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$, este resultado é bastante conhecido para o oscilador harmônico quântico.

A Fig. 4 mostra o esquema de níveis de energia e indica a regra de \hat{a} e \hat{a}^\dagger em, respectivamente, destruir e criar um quantum $\hbar\omega$ no excitação de energia do oscilador e assim, causar um passo para baixo e para cima na escada. O estado $|n\rangle$ é simultaneamente autoestado do Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ e do operador número \hat{n} definido como sendo

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (4.85)$$

onde é evidente das Eqs. 4.69 e 4.84 que

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (4.86)$$

Os estados $|n\rangle$ são chamados de estados número do oscilador harmônico.

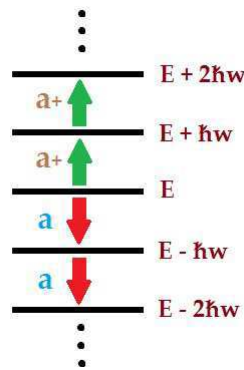


Figura 4 – Ilustração da variação do nível de energia sobre ação dos operadores de criação e destruição

Até o momento, não se teve atenção para o critério de normalização dos autoestados, expressa pela condição

$$\langle n-1|n-1\rangle = \langle n|n\rangle = \langle n+1|n+1\rangle = 1. \quad (4.87)$$

Um fator adicional aparece na relação entre diferentes autoestados quando o estado é normalizado e, por exemplo, a Eq. 4.77 é generalizada para

$$C_n|n-1\rangle = \hat{a}|n\rangle. \quad (4.88)$$

Assim, com o uso da Eq. 4.87, a constante C_n é determinada fazendo o produto dos dois lados da Eq. 4.88 pelo seu conjugado Hermitiano, levando a

$$|C_n|^2 = n. \quad (4.89)$$

A fase da constante de normalização é convenientemente adotada como sendo zero, e a Eq. 4.88 se torna

$$\hat{a}|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle. \quad (4.90)$$

Uma análise similar na Eq. 4.73 produz o resultado

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle. \quad (4.91)$$

As Eqs. 4.90 e 4.91 são sempre usadas ao invés das Eqs. 4.73 e 4.77 por causa da vantagem de se trabalhar com autoestado normalizados. Note a condição do estado fundamental da Eq. 4.81 é incluída como um caso especial do resultado geral da Eq. 4.90. Os diferentes autoestados de energia do oscilador harmônico são ortogonais e segue que os únicos elementos da representação matricial dos operados \hat{a} e \hat{a}^\dagger que são diferentes de zero são aqueles da forma

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = n^{1/2} \quad (4.92)$$

$$\langle n+1|\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)^{1/2}. \quad (4.93)$$

Todo operador Hermitiano \hat{O} tem seus elementos da sua representação matricial satisfazendo a condição

$$\langle i|\hat{O}|j\rangle = \langle j|\hat{O}|i\rangle^*. \quad (4.94)$$

É claro que \hat{a} e \hat{a}^\dagger não são operadores Hermitianos e, de acordo com os princípios da Mecânica Quântica, eles não podem representar quantidades observáveis. Sua propriedade de destruição e criação de quantum de energia é, entretanto, facilmente apreciada no sentido físico. Porém, algumas vezes é mais conveniente trabalhar com formas sem dimensão mas com expressões parecidas com os operadores posição e momento. Para isso, define-se os operadores de quadratura como sendo

$$\hat{X} = (m\omega/2\hbar)^{1/2}\hat{q} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (4.95)$$

e

$$\hat{Y} = (2m\omega\hbar)^{-1/2}\hat{p} = \frac{1}{2}i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (4.96)$$

com a relação inversa

$$\hat{a} = \hat{X} + i\hat{Y} \quad (4.97)$$

$$\hat{a}^\dagger = \hat{X} - i\hat{Y}. \quad (4.98)$$

Os operadores \hat{X} e \hat{Y} satisfazem a condição de Hermiticidade. É fácil mostrar que o Hamiltoniano pode ser escrito como

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega(\hat{X}^2 + \hat{Y}^2) \quad (4.99)$$

e que a relação de comutação desses operadores de quadratura é

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = \frac{i}{2}. \quad (4.100)$$

Essa relação de comutação leva a relação de incerteza de Heisenberg a ser dada por

$$\sigma_X^2 \sigma_Y^2 \geq 1/16. \quad (4.101)$$

No decorrer do trabalho, algumas vezes será usado os operadores de criação e destruição, por motivo de conveniência.

4.4 Quantização do Campo Eletromagnético

O campo eletromagnético é quantizado pela associação de um oscilador harmônico advindo da mecânica quântica com cada um dos modos $\vec{k}\lambda$ do campo radiado na cavidade de quantização definida anteriormente. Assim, os operadores de destruição e criações de cada um dos modos $\vec{k}\lambda$ possuem a forma

$$\hat{a}_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle = n_{\vec{k}\lambda}^{1/2} |n_{\vec{k}\lambda} - 1\rangle \quad (4.102)$$

e

$$\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger |n_{\vec{k}\lambda}\rangle = (n_{\vec{k}\lambda} + 1)^{1/2} |n_{\vec{k}\lambda} + 1\rangle \quad (4.103)$$

com a interpretação física que os respectivos operadores destroem e criam um fóton de energia $\hbar\omega_k$ no modo $\vec{k}\lambda$. Note que a frequência angular do fóton depende apenas da magnitude de seu vetor de onda e é independente da polarização do modo, especificada pelo índice $\lambda = 1, 2$. O número $n_{\vec{k}\lambda}$ dos fótons excitados na cavidade é dado pelo autovalor do operador número de fótons apropriado

$$\hat{n}_{\vec{k}\lambda} = \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda}, \quad (4.104)$$

com a relação de autovalores

$$\hat{n}_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle = \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle = n_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle, \quad (4.105)$$

para $n_{\vec{k}\lambda} = 0, 1, 2, \dots$. Os autoestados ortonormais $|n_{\vec{k}\lambda}\rangle$ são conhecidos como estados número de fótons ou estados de Fock do campo eletromagnético.

O número de estados do campo eletromagnético na cavidade é especificado pelo *string* de número de fótons, um para cada modo associado, e.g.

$$|n_{\vec{k}_1 1}, n_{\vec{k}_1 2}, n_{\vec{k}_2 1}, n_{\vec{k}_2 2}, \dots\rangle = |n_{\vec{k}_1 1}\rangle |n_{\vec{k}_1 2}\rangle |n_{\vec{k}_2 1}\rangle |n_{\vec{k}_2 2}\rangle \cdots = |\{n_{\vec{k}\lambda}\}\rangle. \quad (4.106)$$

Os diferentes modos são independentes e obedecem a seguinte relação de comutação

$$[\hat{a}_{\vec{k}\lambda}, \hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (4.107)$$

Os estados números multimodos definidos na Eq. 4.106 formam uma base completa de estados para o campo eletromagnético dentro da cavidade quando todo número do conjunto $|\{n_{\vec{k}\lambda}\}\rangle$ varia sobre todo número inteiro maior ou igual a zero.

O Hamiltoniano do campo radiado é obtido pela soma da contribuição de cada oscilador harmônico

$$\hat{\mathcal{H}}_R = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}\lambda}, \quad (4.108)$$

onde

$$\hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}\lambda} = \frac{1}{2} \hbar\omega_k (\hat{a}_{\vec{k}\lambda} \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda}). \quad (4.109)$$

A comparação da Eq. 4.109 com a Eq. 4.56, sugere que a conversão da amplitude do vetor potencial clássico para os operadores modais da mecânica quântica é

$$A_{\vec{k}\lambda} \rightarrow (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \quad (4.110)$$

e

$$A_{\vec{k}\lambda}^* \rightarrow (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger. \quad (4.111)$$

Com esta substituição, a equação do vetor potencial na forma de operadores se torna

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \hat{A}_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t), \quad (4.112)$$

onde

$$\hat{A}_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t) = (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \{ \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r}) \}. \quad (4.113)$$

é a contribuição da magnitude do operador do vetor potencial da cavidade com modo $\vec{k}\lambda$.

O resultado correspondente aos operadores do campo elétrico e magnético são obtidos substituição de $\hat{A}(\vec{r}, t)$ nas Eqs. 4.46 e 4.48. As expressões dos operadores são simplificadas pela definição de um ângulo de fase para os modos das formas de onda dado por

$$\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{\pi}{2}. \quad (4.114)$$

O operador referente ao campo elétrico é conveniente separado em

$$\hat{E}_T(\vec{r}, t) = \hat{E}_T^+(\vec{r}, t) + \hat{E}_T^-(\vec{r}, t), \quad (4.115)$$

onde

$$\hat{E}_T^+(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \exp(-i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)) \quad (4.116)$$

e

$$\hat{E}_T^-(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \exp(i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)) \quad (4.117)$$

são conhecidos como as partes de frequência positiva e negativa do operador do campo elétrico.

O operador referente ao campo magnético é escrito de forma análoga

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \hat{B}^+(\vec{r}, t) + \hat{B}^-(\vec{r}, t), \quad (4.118)$$

onde

$$\hat{B}^+(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} (\hbar/2\epsilon_0\omega_k V)^{1/2} \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \exp(-i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)) \quad (4.119)$$

e

$$\hat{B}^-(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} (\hbar/2\epsilon_0\omega_k V)^{1/2} \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \exp(i\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)) \quad (4.120)$$

Uma forma alternativa dos operadores dos campos elétrico e magnético é obtido pelo uso dos operadores de quadratura. Assim, com a inserção dos subíndices dos modos, a relação de comutação dos operadores de quadratura é generalizada a

$$[\hat{X}_{\vec{k}\lambda}, \hat{Y}_{\vec{k}'\lambda'}] = (i/2)\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (4.121)$$

Com o uso destes operadores de quadratura, operador do campo elétrico se torna

$$\hat{E}_T(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \vec{e}_{\vec{k}\lambda} (2\hbar\omega_k/\epsilon_0 V)^{1/2} \{\hat{X}_{\vec{k}\lambda} \cos[\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)] + \hat{Y}_{\vec{k}\lambda} \sin[\chi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)]\} \quad (4.122)$$

e o operador do campo magnético pode ser obtido de forma similar. A forma da Eq. 4.122 mostra que os operadores $\hat{X}_{\vec{k}\lambda}$ e $\hat{Y}_{\vec{k}\lambda}$ são associados com as quadraturas cosseno e seno do ângulo de fase do modo, o que faz jus ao nome.

O Hamiltoniano do campo eletromagnético radiado é escrito em uma forma análoga à clássica, como sendo

$$\hat{\mathcal{H}}_R = \frac{1}{2} \int_{cavidade} dV \left[\epsilon_0 \hat{E}_T(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}_T(\vec{r}, t) + \mu_0^{-1} \hat{B}(\vec{r}, t) \cdot \hat{B}(\vec{r}, t) \right], \quad (4.123)$$

onde a integral é calculada da mesma forma feita anteriormente, para o caso clássico. O resultado final pode ser escrito na forma

$$\hat{\mathcal{H}}_R = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hbar\omega_k (\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} + 1/2) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hbar\omega_k (\hat{X}_{\vec{k}\lambda}^2 + \hat{Y}_{\vec{k}\lambda}^2). \quad (4.124)$$

A relação dos autovalores de energia para o estado número multimodo é

$$\hat{\mathcal{H}}_R |\{n_{\vec{k}\lambda}\}\rangle = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hbar\omega_k (n_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2}) |\{n_{\vec{k}\lambda}\}\rangle. \quad (4.125)$$

O estado fundamental do campo eletromagnético no qual nenhum fóton é excitado em qualquer modo do campo é aquele que

$$n_{\vec{k}\lambda} = 0, \quad (4.126)$$

para todo \vec{k} e λ e é chamado de estado do vácuo do campo. O estado do vácuo é denotado por $|\{0\}\rangle$, e satisfaz a condição de estado fundamental para todos os modos,

$$\hat{a}_{\vec{k}\lambda}|\{0\}\rangle = 0, \quad (4.127)$$

para todo \vec{k} e λ . A equação de autovalor do estado do vácuo é

$$\hat{\mathcal{H}}_R|\{0\}\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hbar\omega_k|\{0\}\rangle \equiv E_0|\{0\}\rangle, \quad (4.128)$$

onde

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hbar\omega_k = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_k, \quad (4.129)$$

é conhecido como energia de ponto-zero ou energia do vácuo. Esta contribuição não tem análogo na teoria clássica. A relação de autovalores geral para qualquer estado é

$$\hat{\mathcal{H}}_R|\{n_{\vec{k}\lambda}\}\rangle = (E_R + E_0)|\{n_{\vec{k}\lambda}\}\rangle, \quad (4.130)$$

onde

$$E_R = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hbar\omega_k n_{\vec{k}\lambda} \quad (4.131)$$

é a energia de excitação do campo eletromagnético acima de seu valor de ponto-zero.

4.5 Estados Quânticos de Interesse

Neste tópico será feita uma simplificação da teoria da óptica quântica desenvolvida anteriormente. Será adotado que o campo eletromagnético é monomodo e que só há uma polarização disponível. O motivo para isso é a simplicidade dos resultados obtidos.

4.5.1 Estado Térmico

Considere um campo eletromagnético monomodo em equilíbrio térmico dentro de uma cavidade de temperatura T . De acordo com a Mecânica Estatística, a probabilidade P_n de que o modo seja termicamente excitado para o n -ésimo nível de energia é

$$P_n = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_n \exp(-E_n/k_B T)} \quad (4.132)$$

onde E_n é a energia no n -ésimo nível e k_B é a constante de Boltzmann. O operador densidade para o campo térmico é dado por

$$\rho_{Th} = \frac{\exp(-\hat{\mathcal{H}}/k_B T)}{\text{Tr}\{\exp(-\hat{\mathcal{H}}/k_B T)\}} \quad (4.133)$$

onde $\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ e

$$\text{Tr}\{\exp(-\hat{\mathcal{H}}/k_B T)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp(-\hat{\mathcal{H}}/k_B T) | n \rangle \quad (4.134)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T) \equiv Z \quad (4.135)$$

é denominado função de partição. Com $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$

$$Z = \exp(-\hbar\omega/2k_B T) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega n/k_B T). \quad (4.136)$$

Desde que $\exp(-\hbar\omega/k_B T) < 1$, então a soma é uma série geométrica e assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega n/k_B T) = \frac{1}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)} \quad (4.137)$$

de tal forma que

$$Z = \frac{\exp(-\hbar\omega/2k_B T)}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)}. \quad (4.138)$$

Evidentemente

$$P_n = \langle n | \hat{\rho}_{Th} | n \rangle = \frac{1}{Z} \exp(-E_n/k_B T). \quad (4.139)$$

Também é possível notar que o operador densidade pode ser escrito como

$$\rho_{Th} = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |n'\rangle \langle n' | \rho_{Th} | n \rangle \langle n | \quad (4.140)$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T) |n\rangle \langle n| \quad (4.141)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle \langle n|. \quad (4.142)$$

O número médio de fótons do campo térmico é calculado da seguinte forma

$$\bar{n} = \langle \hat{n} \rangle = Tr\{\hat{n}\hat{\rho}_{Th}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\hat{n}\rho_{Th}|n\rangle \quad (4.143)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \exp(-\hbar\omega/2k_B T) \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\hbar\omega n/k_B T) \quad (4.144)$$

$$= \frac{\exp(-\hbar\omega/k_B T)}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)} \quad (4.145)$$

$$= \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \quad (4.146)$$

Da Eq. 4.146 segue que

$$\exp(-\hbar\omega/k_B T) = \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \quad (4.147)$$

e das Eqs. 4.139 e 4.142 segue que a matriz densidade ρ_{Th} pode ser escrita em termos de \bar{n} como

$$\hat{\rho}_{Th} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n |n\rangle\langle n|. \quad (4.148)$$

A probabilidade de encontrar n fótons em um campo térmico em termos de \bar{n} é

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}. \quad (4.149)$$

A variância do número de fótons é dada por

$$\sigma_n^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2. \quad (4.150)$$

Como

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = Tr(\bar{n}^2 \hat{\rho}_{Th}) \quad (4.151)$$

$$= \bar{n} + 2\bar{n}^2, \quad (4.152)$$

então

$$\sigma_n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2, \quad (4.153)$$

o que mostra que a variância é consideravelmente maior do que sua média.

Como é mostrado na Ref. (9), a energia média por unidade de volume para o estado térmico é obtido como sendo

$$\bar{U} = \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{15c^3 \hbar^3}, \quad (4.154)$$

onde T é a temperatura e c é a velocidade da luz. Esta expressão da Eq. 4.154 é conhecida como lei de Stefan-Boltzmann.

4.5.2 Estados Coerentes

Para os estados número $|n\rangle$, tem-se que o valor do campo elétrico é zero, $\langle n|\hat{E}|n\rangle = 0$, o que não condiz com a maioria das realizações físicas de experimentos. Os estados que mais se aproximam dos estados clássicos e que não possuem essa característica de campo elétrico nulo são os estados coerentes.

Estes estados são denotados por $|\alpha\rangle$ e são os autoestados do operador \hat{a} ,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (4.155)$$

onde α é um número complexo.

Desde que os estados números $|n\rangle$ formam um conjunto completo, então pode-se expandir $|\alpha\rangle$ de acordo com

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (4.156)$$

Aplicando a ação de \hat{a} na Eq. 4.155 e lembrando que o resultado é novamente $|\alpha\rangle$, pela Eq. 4.155, tem-se que

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (4.157)$$

Igualando os coeficientes de $|n\rangle$

$$C_n \sqrt{n} = \alpha C_{n-1} \quad (4.158)$$

ou

$$C_n = \frac{2}{\sqrt{n}} C_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} C_{n-2} = \dots \quad (4.159)$$

$$= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0 \quad (4.160)$$

e assim,

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.161)$$

Pelo critério de normalização se determina C_0

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = |C_0|^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{\alpha^{*n} \alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'}} \langle n|n'\rangle \quad (4.162)$$

$$= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0|^2 e^{|\alpha|^2} \quad (4.163)$$

no qual implica que $C_0 = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)$. Assim, o estado coerente normalizado é igual a

$$|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.164)$$

Será feita uma análise do valor médio do operador campo elétrico

$$\hat{E}_x(\vec{r}, t) = i\left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} [\hat{a}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}]. \quad (4.165)$$

Para ele é obtido que

$$\langle\alpha|\hat{E}_x|\alpha\rangle = i\left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} [\alpha e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \alpha^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}] \quad (4.166)$$

$$= 2|\alpha| \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \theta), \quad (4.167)$$

onde $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ e no qual tem as características do campo elétrico clássico. Para o cálculo da variância do campo, é necessário que se tenha o segundo momento do campo

$$\langle\alpha|\hat{E}_x^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} [1 + 4|\alpha|^2 \sin^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \theta)]. \quad (4.168)$$

Assim, a flutuação ou variância de \hat{E}_x é

$$\Delta E_x \equiv \langle(\Delta\hat{E}_x)^2\rangle^{1/2} = \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2}, \quad (4.169)$$

o que é idêntico a variância do estado do vácuo. O estado coerente é o mais clássico por que não apenas tem a forma correta para o valor médio do campo elétrico, mas também contém o ruído caracterizado como apenas o ruído do vácuo.

A análise feita agora é para o entendimento do α na expressão do estado coerente. O valor esperado do operador número de fótons para o estado coerente é

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (4.170)$$

assim, $|\alpha|^2$ é apenas o número médio de fótons no campo. O segundo momento do número de fótons é dado por

$$\langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \quad (4.171)$$

$$= \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}) | \alpha \rangle \quad (4.172)$$

$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n} \quad (4.173)$$

e assim

$$\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = \bar{n}^{1/2} \quad (4.174)$$

no qual tem característica de processo de Poisson. De fato, para uma medida do número de fótons no campo, a probabilidade de detectar n fótons é

$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (4.175)$$

$$= e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \quad (4.176)$$

no qual é uma distribuição de Poisson com média \bar{n} . Note que a incerteza com relação ao valor médio de fótons é

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (4.177)$$

no qual diminui com o aumento de \bar{n} .

Os estados coerentes $|\alpha\rangle$ são os estados quânticos mais próximos dos estados clássicos por causa que: (i) o valor esperado do campo elétrico tem a forma da expressão clássica; (ii) a flutuação no campo elétrico é a mesma para o vácuo; (iii) a flutuação do número médio de fótons com relação ao valor médio decresce com o aumento do número médio de fótons.

Será discutido uma forma de se obter os estados coerentes por meio da aplicação do operador de deslocamento no estado do vácuo.

O operador de deslocamento é definido como sendo

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \quad (4.178)$$

e os estados coerentes são dados por

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (4.179)$$

Para ver isso, considere a identidade

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \quad (4.180)$$

$$= e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{\frac{1}{2}[\hat{B},\hat{A}]} \quad (4.181)$$

no qual é válido se $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ e $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$. Com $\hat{A} = \alpha\hat{a}^\dagger$ e $\hat{B} = -\alpha^*\hat{a}$, $[\hat{A}, \hat{B}] = |\alpha|^2$, tem-se que a Eq. 4.178 resulta em

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}. \quad (4.182)$$

Expandindo $\exp(-\alpha^*\hat{a})$ em séries de Taylor, tem-se que

$$e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^*\hat{a})^l}{l!}|0\rangle = |0\rangle. \quad (4.183)$$

Mas como

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \quad (4.184)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad (4.185)$$

então

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (4.186)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \quad (4.187)$$

o que está de acordo com a definição de estados coerentes.

O operador deslocamento é um operador unitário. Por isso,

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) \quad (4.188)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha\hat{a}^\dagger} e^{\alpha^*\hat{a}}. \quad (4.189)$$

É evidente que $\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = \mathbf{1}$.

O operador deslocamento obedece a relação de semigrupo: o produto de dois operadores deslocamento, por exemplo $\hat{D}(\alpha)$ e $\hat{D}(\beta)$, é, a menos de um fator de fase global, o operador deslocamento $\hat{D}(\alpha + \beta)$. Para ver isso, tem-se que notar que se for feita a consideração que se $\hat{A} = \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}$ e $\hat{B} = \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}$, então

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \alpha\beta^* - \alpha^*\beta = 2i\Im(\alpha\beta^*). \quad (4.190)$$

Assim, usando a Eq. 4.181 é possível obter que

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} \quad (4.191)$$

$$= \exp[i\Im(\alpha\beta^*)] e^{(\alpha+\beta)\hat{a}^\dagger - (\alpha^*+\beta^*)\hat{a}} \quad (4.192)$$

$$= \exp[i\Im(\alpha\beta^*)] \hat{D}(\alpha + \beta). \quad (4.193)$$

Isto resulta que a aplicação deste produto de operadores deslocamento sobre o estado do vácuo resulta em

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)|0\rangle = \hat{D}(\alpha)|\beta\rangle \quad (4.194)$$

$$= \exp[i\Im(\alpha\beta^*)] |\alpha + \beta\rangle. \quad (4.195)$$

Onde a fase global $\exp[i\Im(\alpha\beta^*)]$ não tem interesse físico relevante.

4.5.3 Estados Comprimidos

Será apresentado o exemplo mais importante de estados da luz não-clássicos. Os estados comprimidos serão caracterizados pelos mesmos aspectos que foram relevantes para os estados coerentes, estatística de fóton, produção dos mesmos pelo estado do vácuo, entre outros.

Primeiramente, considere dois operadores \hat{A} e \hat{B} satisfazendo a relação de comutação $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, o que resulta que

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle\hat{C}\rangle|^2. \quad (4.196)$$

Um estado do sistema é tido ser comprimido se ou

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle < \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle| \quad (4.197)$$

ou

$$\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle < \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle|. \quad (4.198)$$

No caso de estados comprimidos que serão mostrados aqui, tem-se que $\hat{A} = \hat{X}_1$ e $\hat{B} = \hat{X}_2$, com \hat{X}_1 e \hat{X}_2 sendo os operadores de quadratura do campo.

Estes estados para os quais uma das componentes obedecem a condição de compressão tem a característica que esta componente terá ruído, ou variância, menor do que a do estado coerente ou do vácuo. Porém, a outra componente terá uma flutuação maior, com relação à do vácuo, para que a relação de incerteza seja satisfeita.

Uma maneira de se obter os estados comprimidos é por meio do operador de *squeeze*, que será chamado de operador de compressão, que é definido como sendo

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^*\hat{a}^2 - \xi\hat{a}^{\dagger 2})\right], \quad (4.199)$$

onde $\xi = re^{i\theta}$, para $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. O parâmetro r é conhecido como parâmetro de compressão.

Este operador $\hat{S}(\xi)$ é tipo uma generalização do operador de deslocamento para dois fótons. Assim, a ação de $\hat{S}(\xi)$ sobre o vácuo criará algum tipo de estado coerente de dois fótons.

Para entender o que acontece quando se aplica este operador, considere

$$|\psi_s\rangle = \hat{S}(\xi)|\psi\rangle \quad (4.200)$$

onde $|\phi\rangle$ é por enquanto arbitrário e $|\phi_s\rangle$ denota o estado gerado pela ação de $\hat{S}(\xi)$ sobre $|\psi\rangle$. Para obter as variâncias de \hat{X}_1 e \hat{X}_2 é necessário os valores esperados de \hat{a} , \hat{a}^2 , etc. Para isto, é usado o seguinte resultado obtido da aplicação do lema de Baker-Hausdorf (veja a Ref. (9))

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r \quad (4.201)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r \quad (4.202)$$

onde $\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}(-xi)$. Assim,

$$\langle \psi_s | \hat{a} | \psi_s \rangle = \langle \psi | \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) | \psi \rangle \quad (4.203)$$

e

$$\langle \psi_s | \hat{a}^2 | \psi_s \rangle = \langle \psi | \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) | \psi \rangle, \quad (4.204)$$

etc. Para o caso especial onde $|\psi\rangle$ é o estado do vácuo $|0\rangle$, $|\psi_s\rangle$ é o estado comprimido do vácuo, no qual é denotado por $|\xi\rangle$

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle. \quad (4.205)$$

Usando as Eqs. 4.202-4.205 é obtido que

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sinh r \cosh r \cos \theta], \quad (4.206)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2 \sinh r \cosh r \cos \theta]. \quad (4.207)$$

Para $\theta = 0$

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r}, \quad (4.208)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r}. \quad (4.209)$$

e evidente que existe uma compressão na quadratura \hat{X}_1 dependentes de r . Para $\theta = \pi$, a compressão ocorrerá na quadratura \hat{X}_2 .

Um estado comprimido mais geral pode ser obtido com o auxílio do operador deslocamento

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\xi) |0\rangle. \quad (4.210)$$

Obviamente que para $\xi = 0$ se obtêm um estado coerente. Desde que se tem

$$\hat{D}^\dagger \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad (4.211)$$

$$\hat{D}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*, \quad (4.212)$$

então a ação do produto dos operadores deslocamento e compressão sobre \hat{a} e \hat{a}^\dagger podem ser obtidos das Eqs. 4.202 e 4.212. Com o uso do que foi dito, é possível mostrar que

$$\langle \hat{a} \rangle = \alpha, \quad (4.213)$$

no qual é independente do parâmetro de compressão r , e

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = \alpha^2 - e^{i\theta} \sinh r \cosh r, \quad (4.214)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r. \quad (4.215)$$

É facilmente notado que se obtêm as propriedades do estado coerente fazendo $r = 0$ e o estado do vácuo comprimido para $\alpha = 0$.

Para se ter uma ideia melhor dos estados comprimidos e a expressão deles em termo dos estados número, deve-se primeiramente observar que

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (4.216)$$

Multiplicando o lado esquerdo por $\hat{S}(\xi)$ e adicionando o operador unitário é possível ver que

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{S}(\xi)|0\rangle = 0 \quad (4.217)$$

ou

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi)|\xi\rangle = 0 \quad (4.218)$$

Desde que

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{a} \cosh r + e^{i\theta} \hat{a}^\dagger \sinh r, \quad (4.219)$$

então se pode escrever a Eq. 4.218 como

$$(\hat{a}\mu + \hat{a}^\dagger\nu)|\xi\rangle = 0 \quad (4.220)$$

onde $\mu = \cosh r$ e $\nu = e^{i\theta} \sinh r$. Assim, o estado do vácuo comprimido é um autoestado do operador $\hat{a}\mu + \hat{a}^\dagger\nu$ com autovalor zero. Para o caso mais geral, considere o estado da Eq. 4.210, no qual é possível escrever que

$$\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle = 0, \quad (4.221)$$

usando a relação

$$\hat{D}(\alpha)\hat{a}\hat{D}^\dagger(\alpha)(\alpha) = \hat{a} - \alpha \quad (4.222)$$

assim, a Eq. 4.220 pode ser reescrita como

$$(\hat{a}\mu + \hat{a}^\dagger\nu)|\alpha, \xi\rangle = \gamma|\alpha, \xi\rangle, \quad (4.223)$$

onde $\gamma = \alpha \cosh r + \alpha^* e^{i\theta} \sinh r$. Obviamente, para $r = 0$ se tem o problema de autovalor do estado coerente e $\alpha = 0$ como sendo o problema de autovalor do estado do vácuo comprimido.

Se for feito a decomposição dos estados comprimidos nos estados número, tem-se que

$$|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (4.224)$$

fazendo a substituição da Eq. 4.224 na Eq. 4.220 se obtêm

$$C_{n+1} = -\frac{\nu}{\mu} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/2} C_{n-1}. \quad (4.225)$$

Note que esta solução envolve duas partes, uma para os estados número ímpares e outra para os pares. Obviamente, apenas a solução par contém o estado do vácuo. Para esta solução par, tem-se que

$$C_{2m} = (-1)^m (e^{i\theta} \tanh r)^m \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^{1/2} C_0. \quad (4.226)$$

Onde C_0 é determinado pela condição de normalização

$$\sum_{m=0}^{\infty} |C_{2m}|^2 = 1 \quad (4.227)$$

no qual leva a

$$|C_0|^2 \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^{2m} (2m-1)!!}{(2m)!!} \right) = 1. \quad (4.228)$$

Como existe uma identidade que diz que

$$1 + \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = (1-z)^{-1/2}, \quad (4.229)$$

então é obtido $C_0 = \sqrt{\cosh r}$. Finalmente, pela identidade

$$(2m)!! = 2^m m! \quad (4.230)$$

$$(2m-1)!! = \frac{1}{2^m} \frac{(2m)!}{m!}, \quad (4.231)$$

então

$$C_{2m} = (-1)^m \frac{\sqrt{(2m)!} (e^{i\theta} \tanh r)^m}{2^m m! \sqrt{\cosh r}}. \quad (4.232)$$

Assim, o estado do vácuo comprimido é

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} e^{im\theta} (\tanh r)^m |2m\rangle. \quad (4.233)$$

A probabilidade de se detectar $2m$ fótons no campo é

$$P_{2m} = |\langle 2m | \xi \rangle|^2 = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \frac{(\tanh r)^{2m}}{\cosh r} \quad (4.234)$$

enquanto que a probabilidade de detectar $2m+1$ é

$$P_{2m+1} = |\langle 2m+1 | \xi \rangle|^2 = 0. \quad (4.235)$$

Assim, a distribuição de probabilidade do estado comprimido do vácuo é oscilatória, desaparecendo para os números de fótons ímpares.

É mostrado na Ref. (9) que a solução para a Eq. 4.223 é

$$|\alpha, \epsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} \alpha^{*2} e^{i\theta} \tanh r \right] \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh r]^{n/2}}{\sqrt{n!}} H_n \left[\gamma (e^{i\theta} \sinh(2r))^{-1/2} \right] |n\rangle, \quad (4.236)$$

onde H_n são os polinômios de Hermite. A probabilidade de se encontrar n fótons no campo é dado por

$$P_n = |\langle n | \alpha, \xi \rangle|^2 \quad (4.237)$$

$$= \frac{(\frac{1}{2} \tanh r)^n}{n! \cosh r} \exp \left[-|\alpha|^2 - \frac{1}{2} (\alpha^{*2} e^{i\theta} + \alpha^2 e^{-i\theta}) \tanh r \right] \times |H_n \left[\gamma (e^{i\theta} \sinh(2r))^{-1/2} \right]|^2. \quad (4.238)$$

Se $|\alpha|^2 \gg \sinh^2 r$, é dito que a parte “coerente” do estado domina a parte comprimida. Da Eq. 4.238 é evidente que a distribuição depende da fase α .

5 Teoria Quântica da Informação

5.1 Definição da Entropia de von Neumann

Tal como a entropia de Shannon, a entropia de von Neumann mede a incerteza de um sistema. O sistema que esta entropia está relacionado é o que é regido pela Mecânica Quântica. Esta entropia pode ser vista como um caso geral da entropia de Shannon, pois a sua definição é bem parecida com a de Shannon, algumas propriedades são similares e é igual a entropia de Shannon para alguns casos particulares. Logo a seguir será dada uma definição da entropia de von Neumann.

Definição 5.1.1. *Seja ρ uma matriz densidade que descreve um sistema quântico. A entropia de von Neumann deste sistema é dada por*

$$S(\rho) \equiv -Tr\{\rho \log \rho\}. \quad (5.1)$$

Esta definição pode ser generalizada para um sistema composto. Por exemplo, se for considerado um sistema composto por duas partes A e B e a matriz densidade que descreve este sistema como sendo ρ^{AB} , então a entropia será

$$S(A, B) = -Tr\{\rho^{AB} \log \rho^{AB}\}. \quad (5.2)$$

Para que seja mostrado que a entropia de Shannon é um caso particular da entropia de von Neumann é necessário que se considere que ρ está representado em uma base que o diagonalize, ou seja, $\rho = \sum_x p_X(x) |x\rangle\langle x|$. Para esta matriz densidade tem-se que a sua entropia de von Neumann é

$$S(\rho) = -Tr\{\rho \log \rho\} = -Tr\left(\sum_x p_X(x) |x\rangle\langle x|\right) \left(\sum_x \log p_X(x) |x\rangle\langle x|\right) \quad (5.3)$$

$$= -\sum_x p_X(x) \log p_X(x) = H(X), \quad (5.4)$$

onde X é a variável aleatória relacionada a distribuição $\{p_X(x)\}$.

Para fins práticos, se λ_x for os autovalores de ρ , então a entropia de von Neumann pode ser reescrita como sendo

$$S(\rho) = -\sum_x \lambda_x \log \lambda_x \quad (5.5)$$

em que se define $0 \log 0 \equiv 0$.

Exemplo 5.1.2. *Se a matriz densidade que descreve o sistema quântico é dada por*

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

então a sua entropia será

$$S(\rho) = -\text{Tr}\{\rho \log \rho\} \quad (5.7)$$

$$= -\frac{9}{10} \log \frac{9}{10} - \frac{1}{10} \log \frac{1}{10} \quad (5.8)$$

$$= 0,47 \quad (5.9)$$

Exemplo 5.1.3. *Se a matriz densidade que representa um estado misturado é*

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Pode-se ver que este operador é de um estado misto, pois $\text{Tr}\{\rho^2\} = \frac{5}{8} \neq 1$. O cálculo da entropia de von Neumann também pode ser feito de forma simples. Como os autovalores desse operador são $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, então

$$S(\rho) = -\text{Tr}\{\rho \log \rho\} \quad (5.11)$$

$$= -\frac{3}{4} \log \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \quad (5.12)$$

$$= 0,81 \quad (5.13)$$

A seguir irá ser feita a apresentação de outras quantidades relacionadas à entropia de von Neumann.

5.2 Outras Quantidades Entrópicas Relacionadas

De forma similar ao que é feito com a entropia de Shannon, foi criado diversas quantidades entrópicas relacionadas com a entropia de von Neumann. Essas quantidades auxiliam na demonstração de algumas propriedades e no entendimento físico de tais quantidades matemáticas.

Primordialmente será dada a definição da entropia relativa quântica e, posteriormente, será mostrado uma propriedade muito importante relacionada a ela.

Definição 5.2.1. *Sejam ρ e σ dois operadores densidades. A entropia relativa de ρ para σ é dada por*

$$S(\rho \parallel \sigma) \equiv \text{Tr}\{\rho \log \rho\} - \text{Tr}\{\rho \log \sigma\}. \quad (5.14)$$

Observações importantes a serem feitas sobre esta entropia é que, tal como a entropia relativa clássica (veja Ref. (5)), a ordem entre as matrizes densidade é importante, visto que esta entropia não é comutativa. A entropia relativa quântica será definida como sendo igual a $+\infty$ se o kernel de σ tiver uma intersecção não-trivial com o suporte de ρ .

Uma propriedade muito importante e que será aplicada posteriormente é que, tal como a entropia relativa clássica, a entropia relativa quântica é não-negativa, este fato é conhecido como *Desigualdade de Klein*. O teorema será apresentado e provado a seguir.

Teorema 5.2.2. *Sejam dois operadores densidades ρ e σ . A entropia relativa quântica relacionada a estes operadores é não-negativa, ou seja,*

$$S(\rho \parallel \sigma) \geq 0 \quad (5.15)$$

com a igualdade sendo satisfeita se e somente se $\rho = \sigma$.

Demonstração. Considere, sem perda de generalidade, que $\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$ e $\sigma = \sum_j q_j |j\rangle\langle j|$, decomposições ortonormais de ρ e σ nas bases $\{i\}$ e $\{j\}$. Da definição de entropia relativa tem-se que

$$S(\rho \parallel \sigma) = \sum_i p_X(i) \log p_X(i) - \sum_i \langle i | \rho \log \sigma | i \rangle \quad (5.16)$$

Como tem-se que $\langle i | \rho = p_X(i) \langle i |$ e

$$\langle i | \log \sigma | i \rangle = \langle i | \left(\sum_j \log q_j |j\rangle\langle j| \right) | i \rangle = \sum_j \log q_j P_{ij} \quad (5.17)$$

em que $P_{ij} \equiv \langle i | j \rangle \langle j | i \rangle \geq 0$.

Substituindo esses resultados na Eq. 5.16 se obtêm

$$S(\rho \parallel \sigma) = \sum_i p_i \left(\log p_i - \sum_j P_{ij} \log q_j \right) \quad (5.18)$$

Note que P_{ij} satisfaz as equações $P_{ij} \geq 0$ e $\sum_i P_{ij} = \sum_j P_{ij} = 1$, ou seja, P_{ij} é uma matriz duplamente estocástica. Da desigualdade de Jensen pode-se mostrar que

$\sum_j P_{ij} \log q_j \leq \log r_i$, em que $r_i \equiv \sum_j P_{ij} q_j$, com a igualdade sendo satisfeita se e somente se existir um valor de j para o qual $P_{ij} = 1$. Portanto,

$$S(\rho \parallel \sigma) \geq \sum_i p_i \log \frac{p_i}{r_i} \quad (5.19)$$

com a igualdade sendo satisfeita se e somente P_{ij} for uma matriz de permutação.

A expressão do lado direito da Eq. 5.19 é similar a entropia relativa clássica. Como a entropia relativa clássica é não-negativa, então

$$S(\rho \parallel \sigma) \geq 0, \quad (5.20)$$

com a igualdade sendo satisfeita se e somente se $p_i = r_i$ para todo i , e se P_{ij} for uma matriz de permutação. Estas duas condições são equivalentes a se ter como condições suficiente e necessária $\rho = \sigma$. \square

Outras quantidades entrópicas relacionadas são a entropia condicional, que é dada por

$$S(A|B) = S(A, B) - S(B), \quad (5.21)$$

e a informação mútua, que é

$$I(A : B) = S(A) + S(B) - S(A, B). \quad (5.22)$$

Todas estas quantidades tiveram como ponto de partida para a sua definição a Teoria da Informação de Shannon.

Para entender como é feita a utilização de tais quantidades, será feita a apresentação de dois exemplos ilustrativos.

Exemplo 5.2.3. *Se tivermos duas matrizes densidade*

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

e

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

então a entropia quântica relativa será

$$S(\rho \parallel \sigma) = -S(\rho \log \rho) - Tr\{\rho \log \sigma\} \quad (5.25)$$

$$= -\frac{3}{4} \log \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \log \frac{9}{10} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{10} \quad (5.26)$$

$$= 1,75 \quad (5.27)$$

mostrando que a distância entrópica entre essas duas matrizes densidade são consideráveis.

Exemplo 5.2.4. Agora, considere a matriz densidade da forma

$$\rho_{AB} = |\beta_{10}\rangle\langle\beta_{10}| = \left(\frac{|0_A\rangle|0_B\rangle - |1_A\rangle|1_B\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle 0_A|\langle 0_B| - \langle 1_A|\langle 1_B|}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.28)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Como a matriz densidade do sistema AB é advinda de um estado puro, então $S(A, B) = 0$.

Encontrando as matrizes densidade reduzidas de cada sistema se obtêm

$$\rho_A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

e

$$\rho_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Com isso, tem-se que

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = -Tr\{\rho_A \log \rho_A\} \quad (5.32)$$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \quad (5.33)$$

$$= 1 \quad (5.34)$$

Desses valores é possível notar que

$$I(A : B) = S(A) + S(B) - S(A, B) = 2 \quad (5.35)$$

e que

$$S(A, B) = 0 \leq S(A) + S(B) = 2. \quad (5.36)$$

5.3 Propriedades Básicas da Entropia de von Neumann

A entropia de von Neumann possui uma grande quantidade de propriedades, isso é um dos motivos da grande atração de pesquisadores no estudo e aplicação dessa quantidade entrópica.

Teorema 5.3.1. *Algumas propriedades básicas da entropia de von Neumann são*

1. *A entropia é não-negativa. A entropia é igual a zero se e somente se o estado for puro.*
2. *Em um espaço de Hilbert com dimensão d , a entropia será no máximo igual a $\log d$. A entropia será igual a $\log d$ se e somente se o sistema estiver em um estado de mistura máxima $\rho = I/d$.*
3. *Se um sistema composto AB estiver em um estado puro, então $S(A) = S(B)$.*
4. *Seja $\{p_X\}$ uma distribuição de probabilidade e ρ_i estados com suporte em subespaços ortonormais. Resulta que*

$$S\left(\sum_i p_X(i)\rho_i\right) = H(p_X(i)) + \sum_i p_X(i)S(\rho_i) \quad (5.37)$$

5. *Seja $\{p_X(x)\}$ uma distribuição de probabilidade, $|i\rangle$ estados ortonormais de um sistema A e ρ_i qualquer conjunto de operadores densidade de um sistema B . Resulta que*

$$S\left(\sum_i p_X(i)|i\rangle\langle i| \otimes \rho_i\right) = H(p_X(i)) + \sum_i p_X(i)S(\rho_i) \quad (5.38)$$

6. *Seja P_i um conjunto completo de projetores ortogonais e ρ uma matriz densidade. Logo, a entropia do estado $\rho' \equiv \sum_i P_i \rho P_i$ do sistema após a medida é pelo menos tão grande quanto a entropia original:*

$$S(\rho') \geq S(\rho) \quad (5.39)$$

com a igualdade sendo satisfeita se e somente se $\rho' = \rho$.

7. A entropia é uma função côncava, ou seja, se $\{p_X(i)\}$ é uma distribuição de probabilidade e $\{\rho_i\}$ é um conjunto de matrizes densidade, então a entropia de von Neumann satisfaz a desigualdade

$$S\left(\sum_i p_X(i)\rho_i\right) \geq \sum p_X(i)S(\rho_i) \quad (5.40)$$

A demonstração dessas propriedades podem ser vistas nos livros de Wilde (Ref. (10)) e Nielsen, et al.(Ref. (6)).

5.4 A entropia de uma mistura de estados quânticos

Mesmo as propriedades anteriormente mencionadas abrangerem uma grande gama de aplicações, existe uma propriedade que necessita uma observação especial.

Como é mostrado por Nielsen, et al.(6), tem-se que a entropia de von Neumann é uma função côncava e isto estabelece um limite superior para a entropia de uma mistura de estados quânticos. Além disso, a mistura de operadores densidade obedece a desigualdade mostrada no Teorema 5.4.1.

Teorema 5.4.1. *Seja $\{p_X(x)\}$ uma distribuição de probabilidade e $\{\rho_i\}$ é um conjunto de matrizes densidade. Uma mistura do tipo $\rho = \sum_i p_X(i)\rho_i$ de estados quânticos tem a propriedade de que*

$$\sum_i p_X(i)S(\rho_i) \leq S\left(\sum_i p_X(i)\rho_i\right) \leq \sum_i p_X(i)S(\rho_i) + H(p_X(i)) \quad (5.41)$$

Pode-se ver que a desigualdade do lado esquerdo é o caso geral da quarta propriedade anteriormente citada. Será apresentado agora a prova.

Demonstração. Considere que o estado misto é $\rho = \sum_i p_i\rho_i = \sum_i p_i \sum_j p_j^i |e_j^i\rangle\langle e_j^i|$, então podemos observar que

$$S(\rho) = -Tr\{\rho \log \rho\} \quad (5.42)$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} -\sum_{ij} p_i p_j^i \log(p_i p_j^i) \quad (5.43)$$

$$\stackrel{(2)}{=} -\sum_i p_i \log p_i - \sum_i p_i \sum_j p_j^i \log p_j^i \quad (5.44)$$

$$= H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i) \quad (5.45)$$

O item (1) advém de que as bases nas quais cada matriz densidade é decomposta podem não ser ortonormais entre si. A igualdade em (2) é por causa que $\sum_j p_j^i = 1$. A condição para que o item (1) seja assumida como igualdade ocorre se e somente se os estados ρ_i tenham a mesma base que os diagonaliza, ou seja, possuam suporte em subespaços ortogonais iguais para todos os ρ_i . \square

5.5 Subaditividade

Por fim, a última propriedade que será apresentada da entropia de von Neumann é a subaditividade. Suponha que se tenha dois sistemas quânticos distintos A e B com um estado quântico conjunto que o caracteriza dado por ρ^{AB} . Para tal sistema, tem-se que a sua entropia satisfaz a seguinte propriedade

$$S(A, B) \leq S(A) + S(B). \quad (5.46)$$

A prova deste fato pode ser feita por meio da utilização da desigualdade de Klein. Por esta desigualdade tem-se que $S(\rho) \leq -Tr\{\rho \log \sigma\}$, se chamarmos $\rho = \rho^{AB}$ e $\sigma = \rho^A \otimes \rho^B$, então pode-se notar que

$$-Tr\{\rho \log \sigma\} = -Tr\{\rho^{AB}(\log \rho^A + \log \rho^B)\} \quad (5.47)$$

$$= -Tr\{\rho^A \log \rho^A\} + Tr\{\rho^B \log \rho^B\} \quad (5.48)$$

$$= S(A) + S(B) \quad (5.49)$$

Da desigualdade de Klein que foi apresentada pode-se ver que $S(A, B) \leq S(A) + S(B)$. A condição de igualdade na expressão anterior é se $\rho = \sigma$, ou seja, $\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$.

Essa propriedade pode ser generalizada para um sistema composto de três subsistemas, em tal caso a desigualdade é denominada de *subaditividade forte* e é dada por

$$S(A, B, C) + S(B) \leq S(A, B) + S(B, C). \quad (5.50)$$

A demonstração destas desigualdades não será dada neste trabalho, mas caso o leitor deseje saber da sua demonstração e algumas consequências que advém desta desigualdade pode consultar Nielsen, et al.(6).

5.6 Capacidade Clássica de Canais Quânticos

A evolução ruidosa de uma sistema quântico pode ser descrito como uma interação unitária entre o sistema de interesse e o ambiente. Mais formalmente, qualquer evolução

unitária tem a forma

$$\mathcal{N}(\rho_A) = \text{Tr}_E\{U\rho_A \otimes |0\rangle\langle 0|_E U^\dagger\}, \quad (5.51)$$

onde $|0\rangle$ é algum estado puro do ambiente E e U é a evolução unitária do sistema AE para o sistema BE . É denotado por A o sistema do transmissor, ou de Alice, e por B o sistema do receptor, ou de Bob.

A premissa matemática que esse mapa, denotado por canal quântico, deve satisfazer é que sejam positivos completos e que preservem o traço do sistema completo. Existe uma representação alternativa para os canais quânticos em termos dos operadores de Kraus, no qual permite que se escreva a ação do canal como sendo

$$\mathcal{N}(\rho) = \sum_k A_k \rho A_k^\dagger, \quad (5.52)$$

com $\sum_k A_k^\dagger A_k = I$, o que é conhecido como condição de completeza dos operadores de Kraus.

Agora, suponha que se deseje transmitir informação clássica por meio de um canal quântico. A taxa máxima que é possível, medida em bits por uso do canal e com probabilidade de erro caindo para zero quando o número de usos do canais aumenta, é definida pela capacidade clássica de um canal quântico, no qual será denotada por $C(\mathcal{N})$.

Holevo (Ref. (11)) e Schumacher e Westmoreland (Ref. (12)) encontraram um limitante inferior para a capacidade $C(\mathcal{N})$

$$C(\mathcal{N}) \geq \chi(\mathcal{N}), \quad (5.53)$$

onde $\chi(\mathcal{N})$ é a informação de Holevo (Ref. (10)) é definida como $\chi(\mathcal{N}) = \max_{\{p_X(x), \rho_x\}} I(X : B)_\sigma$, onde $\sigma = \sum_x p_X(x) |x\rangle\langle x|_X \otimes \mathcal{N}(\rho_x)$. A informação mútua neste caso é $I(X : B) = S(X) + S(B) - S(X, B)$, com a entropia de von Neumann dada por $S(\rho) = -\text{Tr}\{\rho \log \rho\}$. Será essa capacidade que será usada no decorrer deste trabalho.

6 Capacidade de Canais Bosônicos

Será utilizado agora as ferramentas matemáticas e físicas desenvolvidas até o momento para o cálculo da capacidade de canais bosônicos sem ruído. Vale salientar a importância desses canais para as aplicações em engenharia, física e matemática, por causa da sua beleza matemática e equivalentes físicos.

6.1 Canais de Estados Número

O primeiro canal a ser analisado é o de estados número. Considere um único canal bosônico linear, tal como uma fibra óptica. Define-se um canal de estados número como sendo um canal no qual é transmitido informação por meio da variação da quantidade de fótons nos modos de propagação da onda eletromagnética.

Uma vez definido o que é o canal de interesse, será feita uma abordagem para o canal com banda estreita, quando a largura de banda é muito menor do que a frequência da portadora, e outra para o canal com banda larga.

6.1.1 Canal de Banda Estreita

Considere um canal de estados número de banda estreita, no qual é considerado que a largura de banda B é muito menor do que a frequência da portadora f , ou seja, $B \ll f$. É conveniente na análise de banda estreita pensar no canal como sendo excitado por pulsos de duração $\simeq B^{-1}$. Os pulsos, emitidos a uma taxa B , formam um conjunto ortogonal de modos longitudinais, nos quais são chamados de pacotes de onda. Se for considerado que o canal está sendo usado a um tempo \mathcal{T} , então se tem $B\mathcal{T}$ modos longitudinais ortogonais dentro desse tempo de transmissão \mathcal{T} .

A entrada do canal são os autoestados fótons número $|n\rangle$ de modos de pacotes de onda assim, o alfabeto de entrada é o conjunto de números inteiros não negativos, e a mensagem transmitida é uma sequência de inteiros. A entrada é descrita estatisticamente pela probabilidade $p_N(n)$, que é a probabilidade de se transmitir n fótons. Assim,

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_N(n) \quad (6.1)$$

denota o número médio de sinais fótons transmitidos por uso do canal. A taxa médio de fótons transmitidos é $B\bar{n}$ e a potência de entrada média do canal é dada por

$$P = Bhf\bar{n}, \quad (6.2)$$

onde h é a constante de Boltzmann. A expressão do número médio de fótons pode ser reescrito como sendo $\bar{n} = P/hfB$. Para um canal de banda estreita com frequência e largura de banda fixa, é possível implementar a restrição de potência como uma restrição na distribuição de probabilidade $p_N(n)$ de modo a ter o número médio \bar{n} bem definido.

A descrição da saída é o segundo ingrediente. Na saída do canal, os fótons são contados por um fotodetector ideal. Assim, o alfabeto de saída é também um conjunto de inteiros não negativos, e a mensagem recebida é uma sequência de inteiros. O ruído do canal é caracterizado por uma distribuição de probabilidade $p_{M|N}(m|n)$, no qual é a probabilidade de se ter m fótons na saída quando é inserido n fótons na entrada do canal.

A capacidade por uso do canal, \mathcal{C} , é o máximo da informação mútua, onde o máximo é calculado sobre a distribuição de entrada, sujeita a restrição sobre o número de fótons e a normalização da probabilidade, ou seja,

$$\mathcal{C} \equiv \max_{\{p_N(n)\}} I(M; N), \quad (6.3)$$

onde o máximo está sujeito a restrição de normalização

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) = 1 \quad (6.4)$$

e a restrição do número médio de fótons, $\bar{n} = P/hfB$.

Uma conversão que normalmente é adotada para a capacidade é trocar a capacidade por uso do canal pela capacidade dada em *bits/s*, que é expressa como sendo

$$C = B\mathcal{C}. \quad (6.5)$$

Suponha agora que o canal é contaminado por um ruído térmico da seguinte forma: antes dos fótons referentes ao sinal serem inseridos no meio, o canal já está excitado por um ruído advindo da sua temperatura T . Para cada uso do canal, a distribuição do número de fótons do ruído térmico é

$$q(k) = \frac{1}{1 + \bar{n}_T} \left(\frac{\bar{n}_T}{1 + \bar{n}_T} \right)^k \quad (6.6)$$

e

$$\bar{n}_T = \frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} \quad (6.7)$$

é o número médio de fótons do ruído térmico e k_B é a constante de Boltzmann. A adição de n fótons do sinal simplesmente desloca a distribuição de tal forma que quando $k = 0$

se tem n fótons. Assim,

$$p_{M|N}(m|n) = \begin{cases} 0, & m < n, \\ q(m-n) & m \geq n, \end{cases} \quad (6.8)$$

é a probabilidade de ter m fótons na saída dado que foi transmitido n fótons referentes ao sinal.

Assim, a entropia condicional é reduzida a

$$H(M|N) = - \sum_{n=0}^{\infty} q(n) \log q(n) \quad (6.9)$$

$$= \bar{n}_T \log(1 + \bar{n}_T^{-1}) + \log(1 + \bar{n}_T), \quad (6.10)$$

o que mostra que esta quantidade entrópica é independente da saída. Com esta Eq. 6.10, percebe-se que a maximização da informação mútua $I(M; N)$ é feita pela maximização da entrada. Neste caso, a maximização é feita sobre a distribuição $p_N(n)$ sujeita a restrição de normalização e que o valor médio de fótons na saída é $\bar{n} + \bar{n}_T$. A solução deste caso é dado por

$$p_M(m) = \frac{1}{1 + \bar{n} + \bar{n}_T} \left(\frac{\bar{n} + \bar{n}_T}{1 + \bar{n} + \bar{n}_T} \right)^m, \quad (6.11)$$

no qual leva ao máximo da entropia de saída sendo dado por

$$H(M) = (\bar{n} + \bar{n}_T) \log\left(1 + \frac{1}{\bar{n} + \bar{n}_T}\right) + \log(1 + \bar{n} + \bar{n}_T). \quad (6.12)$$

Combinando as Eqs. 6.10 e 6.12, tem-se que a capacidade do canal é

$$\mathcal{C}_T = (\bar{n} + \bar{n}_T) \log\left(1 + \frac{1}{\bar{n} + \bar{n}_T}\right) + \log\left(1 + \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}_T}\right) - \bar{n}_T \log\left(1 + \frac{1}{\bar{n}_T}\right). \quad (6.13)$$

Foi apresentado a capacidade para o caso em que a temperatura em que será inserido o sinal é diferente de zero. Porém, como o interesse deste trabalho é apresentar a capacidade do canal e também uma capacidade ótima, na qual está relacionada com a maximização da capacidade por meio da variação de todos os parâmetros possíveis, então será feita a consideração agora para o caso com $T = 0$. Para este caso, tem-se que

$$\mathcal{C}_0 = \bar{n} \log(1 + \bar{n}^{-1}) + \log(1 + \bar{n}). \quad (6.14)$$

Convertendo este valor para *bits/s* fica-se com

$$C_0 = BC_0 = B \left[\bar{n} \log(1 + \bar{n}^{-1}) + \log(1 + \bar{n}) \right]. \quad (6.15)$$

Será mostrado que esta capacidade, que é para o canal de estado número, é a capacidade de qualquer canal de banda estreita bosônico.

Note que com $T = 0$, a capacidade é alcançada quando a distribuição de fótons é a distribuição do ruído térmico

$$p_N(n) = p_M(n) = \frac{1}{1 + \bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n. \quad (6.16)$$

A quantidade de informação que deve ser distribuída para cada fótons, em média, para se alcançar a capacidade apresentada é

$$\frac{C_0}{\bar{n}} = \frac{C_0}{B\bar{n}} = \log(1 + \bar{n}^{-1}) + \bar{n}^{-1} \log(1 + \bar{n}) \equiv F_1(\bar{n}). \quad (6.17)$$

Note que é possível escrever $C_0 = F_1(\bar{n}^{-1})$.

Suponha agora que se tenha uma liberdade adicional na variação da frequência e largura de banda do canal em ordem a aumentar a sua capacidade. Para meios de transmissões reais há um limite de quanto a frequência f e a largura de banda B podem variar. De uma forma grosseira, a largura de banda pode aumentar a medida que a frequência também aumenta. Para modelar esta relação entre largura de banda e frequência, é assumido que o canal tem um fração de largura de banda $\eta = B/f \ll 1$, e a maximização da capacidade C_0 é feita pela variação da frequência f , sujeita a η fixo e a restrição de potência na entrada

$$P = Bhf\bar{n} = \eta hf^2\bar{n}. \quad (6.18)$$

Notando que

$$\sqrt{\frac{\eta P}{h}} = \eta f \bar{n}^{1/2} = B \bar{n}^{1/2} \quad (6.19)$$

é fixo, pois η , P e h são fixos, é introduzido uma capacidade sem dimensão

$$\frac{C_0}{\sqrt{\eta P/h}} = \frac{C_0}{\bar{n}^{1/2}} = \bar{n}^{1/2} \log(1 + \bar{n}^{-1}) + \bar{n}^{-1/2} \log(1 + \bar{n}) \equiv F_2(\bar{n}), \quad (6.20)$$

no qual pode ser facilmente maximizado. O máximo de $F_2(\bar{n})$ é atingido para $\bar{n} = 1$, o que corresponde a frequência

$$f = \sqrt{\frac{P}{\eta h}} \quad (6.21)$$

e capacidade máxima de

$$C_{max} = 2B = 2\eta f = 2\sqrt{\frac{\eta P}{h}} \text{ bits/s}. \quad (6.22)$$

O máximo da informação por fótons para se alcançar a capacidade é $C_{max}/B\bar{n} = F_1(1) = 2$ bits.

6.1.2 Canal de Banda Larga

Considere o caso no qual $T = 0$, e que cada fatia de frequência é um canal número de banda estreita como o descrito anteriormente. Seja b a largura de banda de cada fatia, f_i é a frequência da portadora da i -ésima fatia e $b\bar{n}_i$ a taxa média de fótons transmitidos na i -ésima fatia. A potência de entrada é dada por

$$P = b \sum_i h f_i \bar{n}_i \quad (6.23)$$

e a capacidade total

$$C = \frac{b}{\ln 2} \sum_i \left[\bar{n}_i \ln(1 + \bar{n}_i^{-1}) + \ln(1 + \bar{n}_i) \right], \quad (6.24)$$

visto que cada fatia de frequência é um canal de banda estreita.

A ideia usada para o cálculo da capacidade do canal de banda larga é maximizar o canal completo, através da variação dos números de fótons \bar{n}_i , porém com a restrição de potência P . O resultado obtido na maximização é

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta h f_i} - 1}, \quad (6.25)$$

onde β é um multiplicador de Lagrange.

Trocando as somas nas Eqs. 6.23 e 6.24 por integrais, encontra-se

$$P = \frac{1}{h\beta^2} \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6h\beta^2} \quad (6.26)$$

e

$$C = \frac{1}{h\beta \ln 2} \int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x - 1} - \ln(1 - e^{-x}) \right) dx \quad (6.27)$$

$$= \frac{2\beta P}{\ln 2} = \frac{\pi^2}{3h\beta \ln 2}. \quad (6.28)$$

Eliminando β por meio dessas duas relações, resulta em uma capacidade do canal de banda larga igual a

$$C_{WB} = \frac{\pi}{\ln 2} \sqrt{\frac{2P}{3h}} \text{ bits/s} \quad (6.29)$$

(WB significa *wideband*).

6.2 Capacidade de Canais Bosônicos através do Teorema de Holevo

Primeiramente, deve ser feita algumas considerações para que haja uma simplificação no modelo do canal e que leve ao cálculo da capacidade destes canais bosônicos. É assumido que o tempo de transmissão \mathcal{T} é finito. O motivo para isso é para se ter um espaço de Hilbert finito.

Se o canal é sem dispersão, então a consideração de tempo de transmissão finito permite o uso de procedimentos de quantização em termos das frequências discretas dos modos longitudinais definidos pela condição de contorno periódica sobre o comprimento $\mathcal{L} = c\mathcal{T}$ do canal, onde c é a velocidade de propagação no canal. Este procedimento permite que as frequências dos modos longitudinais sejam dadas por

$$f_j = j/\mathcal{T}, \quad (6.30)$$

com $j = 1, 2, \dots$.

O espaço de Hilbert para o canal é uma expansão dos autoestados do operador de número de fótons referentes às frequências dos modos longitudinais,

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = |\{n_j\}\rangle, \quad (6.31)$$

onde n_j é o número de fótons no modo j . A energia total do sistema descrito por $|\{n_j\}\rangle$ é

$$E_N = \sum_j h f_j n_j = \frac{h}{\mathcal{T}} \sum_j j n_j = \frac{Nh}{\mathcal{T}}. \quad (6.32)$$

Todos os autovalores de energia E_N são múltiplos do quantum h/\mathcal{T} , com o termo de proporcionalidade dado por

$$N = \sum_j j n_j. \quad (6.33)$$

Para N grande, os autoestados de energia são altamente degenerados, ou seja, existe mais de um estado com a mesma energia. Se \mathcal{N}_N denota o número de estados com energia E_N , então \mathcal{N}_N é o número de formas de escrever o inteiro positivo N como a soma

dada na Eq. 6.33. Para se ter uma ideia de como \mathcal{N}_N cresce quando N aumenta, tem-se que $\mathcal{N}_1 = 1$, $\mathcal{N}_2 = 2$, $\mathcal{N}_3 = 3$, $\mathcal{N}_4 = 5$, $\mathcal{N}_5 = 7$ e $\mathcal{N}_6 = 11$.

A entrada do canal é um dos estados ρ_a , onde é codificado a letra a do alfabeto \mathcal{A} no estado. Esta entrada é descrita estatisticamente por uma distribuição de probabilidade $\{p_A(a)\}$ de se transmitir o estado ρ_a . Assim, o operador densidade da entrada é estatisticamente dado por

$$\rho = \sum_a p_A(a) \rho_a. \quad (6.34)$$

Na saída deve-se ter algum tipo de esquema de detecção, ou seja, algum sistema de medida. Para provar o limite superior geral da capacidade, é necessário que, de alguma forma, seja considerado todos os possíveis métodos de medida permitidos pela mecânica quântica. Este método de medida geral pode ser descrito em termos de um conjunto de operadores Hermitianos não-negativos \hat{F}_b , onde $b = 1, \dots, \mathcal{B}$. Eles devem satisfazer a condição de completude, isto é,

$$\sum_b \hat{F}_b = \mathbf{1}, \quad (6.35)$$

onde $\mathbf{1}$ é o operador unitário do espaço referente aos operadores de medida.

Tais medidas generalizadas podem ser consideradas como medidas de uma quantidade física B , no qual tem possíveis valores de saída dados por $b = 1, \dots, \mathcal{B}$. Para a descrição estatística destas saídas, considere a probabilidade condicional de se obter b dado que foi transmitido o estado ρ_a , ela é descrita matematicamente por

$$p_{B|A}(b|a) = \text{Tr}\{\rho_a \hat{F}_b\}. \quad (6.36)$$

Estas probabilidade são reais e não-negativas, por causa da Hermiticidade e não-negatividade dos operadores \hat{F}_b . Se por acaso, for necessário a probabilidade de se obter b na saída, tem-se que

$$p_B(b) = \sum_a p_{B|A}(b|a) p_A(a) = \text{Tr}\{\rho \hat{F}_b\}. \quad (6.37)$$

Uma medida generalizada se reduz aos operadores de medida convencionais se o $\{\hat{F}_b\}$ for trocado pelo conjunto completo de operadores de projeção ortogonais $\hat{\Pi}_b$. Assim,

$$p_{B|A}(b|a) = \text{Tr}\{\rho_a \hat{\Pi}_b\}. \quad (6.38)$$

Se estes operadores tiverem apenas uma dimensão, então

$$\hat{\Pi}_b = \hat{\Pi}_b^{(1)} = |b\rangle\langle b|, \quad (6.39)$$

onde os vetores $|b\rangle$ formam uma base ortonormal e completa. Isto implica que a probabilidade condicional da Eq. 6.38 pode ser apresentada da seguinte forma

$$p_{B|A}(b|a) = \text{Tr}\{\rho_a \hat{\Pi}_b^{(1)}\} = \langle b|\rho_a|b\rangle. \quad (6.40)$$

Mesmo sendo importantes, estes operadores de medida convencionais não são muito gerais. O operadores \hat{F}_b podem ser múltiplos de operadores de projeção não ortogonais, nos quais formam um conjunto completo. Este caso acontece para estados de entrada dados pelos estados coerentes ou estados comprimidos.

O ruído do canal é caracterizado pela probabilidade $p_{B|A}(b|a)$ que descreve a medida, ou seja, o ruído que aparece na saída está relacionado com a medida do estado na saída do canal e não com o canal propriamente dito, visto que se está procurando a capacidade máxima e este ruído de medida é inerente a qualquer sistema quântico.

Para um dado estado de entrada e um dado esquema de detecção de saída, a capacidade do canal pode ser obtida pela maximização da informação mútua sobre a probabilidade de entrada $p_A(a)$, sujeita a qualquer restrição sobre o canal pela seguinte fórmula

$$C \equiv \frac{1}{\mathcal{T}} \max_{\{p_A(a)\}} \chi(\mathcal{N}). \quad (6.41)$$

Uma maximização sobre as medidas generalizadas na saída e sobre os estados de entrada permite que se tenha a capacidade ótima do canal dada por

$$\text{Capacidade ótima} \equiv \max_{\{\rho_a\}} \max_{\{\hat{F}_a\}} C = \frac{1}{\mathcal{T}} \max_{\{\rho_a\}} \max_{\{p_A(a)\}} \max_{\{\hat{F}_a\}} \chi(\mathcal{N}) \quad (6.42)$$

$$\leq \frac{1}{\mathcal{T}} \max_{\{\rho_a\}} \max_{\{p_A(a)\}} S(\rho) \quad (6.43)$$

$$= \max_{\rho} S(\rho) \quad (6.44)$$

$$= \frac{S_{max}}{\mathcal{T}}, \quad (6.45)$$

onde a desigualdade é advinda do teorema de Holevo e o último máximo é calculado sobre todos os operadores densidade, sujeitos a qualquer restrição. Será calculado a capacidade do canal para diversos tipos de restrição sobre a energia.

6.2.1 Canal com Energia Fixa

Uma forma de se capturar a restrição de potência é dizer que sobre um longo tempo de transmissão \mathcal{T} , a energia transmitida é identicamente igual a

$$P\mathcal{T} = E_N = \frac{Nh}{\mathcal{T}}, \quad (6.46)$$

onde o inteiro

$$N = \frac{P\mathcal{T}^2}{h} \quad (6.47)$$

é o número de fótons. A consideração de que o tempo de transmissão seja longo, significa que $N \gg 1$. É salientado que a consideração de energia fixa significa que todos os estados devem ter os autovalores de energia igual a E_N .

Com a consideração de energia fixa, existe uma frequência máxima que os fótons pode adquirir

$$f_{max} = \frac{P\mathcal{T}}{h} = \frac{N}{\mathcal{T}}, \quad (6.48)$$

correspondendo ao transporte de um único fótons com toda a energia disponível $P\mathcal{T}$. A razão entre a frequência máxima e mínima denota outra forma de escrever N ,

$$\frac{f_{max}}{1/\mathcal{T}} = N. \quad (6.49)$$

A média geométrica entre estas frequências,

$$\sqrt{f_{max}/\mathcal{T}} = \sqrt{P/h}, \quad (6.50)$$

é a frequência característica na qual quase toda a energia é transportada. A capacidade ótima será uma expansão assintótica em termos da quantidade

$$\frac{\sqrt{P/h}}{f_{max}} = \frac{1}{\sqrt{P/h\mathcal{T}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \ll 1. \quad (6.51)$$

Quando o tempo \mathcal{T} assume grandes valores, a consideração de energia fixa permite grande flutuações na potência instantânea, mas impõe que a potência média seja igual a P . De fato, a pico instantâneo de potência permitido pela consideração de energia fixa é hf_{max}^2 , correspondendo ao envio de um único fóton na frequência máxima. A razão entre esse pico de potência e a potência média P é

$$\frac{hf_{max}^2}{P} = f_{max}\mathcal{T} = N \gg 1, \quad (6.52)$$

demonstrando a grande flutuação na potência instantânea que é permitida para essa restrição de energia.

A consideração de energia fixa restringe o espaço de Hilbert relacionado com o canal a ser de dimensão finita. A capacidade ótima para este canal de energia fixa é dada por

$$C_1 = \frac{S_{\max}}{\mathcal{T}}, \quad (6.53)$$

onde S_{\max} é o máximo de entropia conseguido com a restrição de energia fixa. O operador densidade que maximiza a entropia é um múltiplo do operador unitário $\mathbb{1}$,

$$\rho_1 = \frac{1}{\mathcal{N}_N} \mathbb{1}_N, \quad (6.54)$$

o que leva a ter a entropia máxima igual a

$$S_{\max} = \log \mathcal{N}_N. \quad (6.55)$$

É interessante grande valores de \mathcal{N}_N , tanto para o aspecto prático quanto a se ter uma ideia do limite de S_{\max} . Para \mathcal{N}_N grande, pode-se expandi-lo em (veja a Ref. (13))

$$\mathcal{N}_N = \frac{1}{4\sqrt{3}N} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2N}{2}}\right) + O\left[\exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2N}{3}}\right)\right]. \quad (6.56)$$

Desconsiderando-se o último termo e aplicando o resultado da Eq. 6.55 na Eq. 6.53, tem-se

$$C_1 = \frac{\pi}{\ln 2} \sqrt{\frac{2P}{3h}} - \frac{1}{\mathcal{T}} \log\left(\frac{4\sqrt{3}P\mathcal{T}^2}{h}\right). \quad (6.57)$$

No limite de $\mathcal{T} \rightarrow \infty$, C_1 vai para a capacidade ótima C_{WB} da Eq. 6.29. Já para um tempo finito \mathcal{T} , C_1 é menor por um pequeno fator de correção logarítmico que expressa a redução no número de estados distinguíveis disponíveis na entrada do canal.

6.2.2 Canal com Energia Máxima Definida

Pode ser mais razoável implementar a restrição para se ter uma energia máxima dada por $E_N = P\mathcal{T} = Nh/\mathcal{T}$. Esta restrição de energia máxima é mais restrita do que a anterior, no qual permitia que se tivesse uma grande variação na potência.

A restrição de energia máxima limita o espaço de Hilber ao subespaço de dimensão finita com energia limitada expandida pelos estados com autovalores de energia $E_n \leq E_N$, para $n = 0, 1, \dots, N$. Será aplicado o teorema de Holevo para este subespaço. Assim,

$$C_2 = \frac{S_{\max}}{\mathcal{T}} \quad (6.58)$$

denota a capacidade ótima deste canal com energia máxima limitada. A entropia, com os estados de entrada pertencentes ao subespaço descrito, é maximizada pelo operador densidade

$$\rho_2 = \left(\sum_{n=0}^N \mathcal{N}_n \right)^{-1} \sum_{n=0}^N \mathbf{1}_n, \quad (6.59)$$

no qual leva a entropia máxima ser dada por

$$S_{max} = \log \left(\sum_{n=0}^N \mathcal{N}_n \right). \quad (6.60)$$

Efetuando uma aproximação similar a feita para o canal com energia fixa, obtem-se

$$\sum_{n=0}^N \mathcal{N}_n = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 N}} \exp \left(\pi \sqrt{\frac{2N}{3}} \right) \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right]. \quad (6.61)$$

Este resultado leva a Eq. 6.58 a ser expressa por

$$C_2 = \frac{\pi}{\ln 2} \sqrt{\frac{2P}{3h}} - \frac{1}{2\mathcal{T}} \log \left(\frac{8\pi^2 P \mathcal{T}^2}{h} \right) + \frac{1}{\mathcal{T}} O\left(\frac{1}{\sqrt{P/h\mathcal{T}}}\right). \quad (6.62)$$

Novamente, o limite $\mathcal{T} \rightarrow \infty$ leva a capacidade ótima a ser igual a capacidade da Eq. 6.29.

6.2.3 Canal com Energia Média Constante

Para este caso, a implementação da restrição de potência é feita pela imposição à restrição sobre a energia média \bar{E} transmitida sobre um tempo \mathcal{T} , ou seja,

$$\bar{E} = P\mathcal{T}. \quad (6.63)$$

É assumido que existe uma energia máxima

$$E_{max} = hf_{max} = \frac{N_{max}h}{\mathcal{T}}, \quad (6.64)$$

no qual é muito maior do que a energia média,

$$E_{max} \gg \bar{E} = P\mathcal{T}, \quad (6.65)$$

para que se tenha um espaço de Hilbert de dimensão finita.

A capacidade ótima para esse canal é

$$C_3 = \frac{S_{max}}{\mathcal{T}}, \quad (6.66)$$

onde S_{\max} é a entropia máxima dentro do subespaço de dimensão finita. Este problema é canônico da mecânica estatística e pode ser mostrado que o estado que maximiza a entropia é(14, 15)

$$\rho_3 = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{N_{\max}} e^{-\beta E_n} \mathbb{1}_n, \quad (6.67)$$

onde β é um multiplicador de Lagrange e Z é a função de partição que é dado por

$$Z = \text{Tr} \left\{ \sum_{n=0}^{N_{\max}} e^{-\beta E_n} \mathbb{1}_n \right\} = \sum_{n=0}^{N_{\max}} \mathcal{N}_n e^{-\beta E_n}. \quad (6.68)$$

Estes estados são conhecidos como *ensembles* canônicos.

O máximo da entropia é, assim, igual a

$$S_{\max} = \frac{1}{\ln 2} (\ln Z + \beta \bar{E}) = \frac{1}{\ln 2} (\ln Z + \alpha \frac{P\mathcal{T}^2}{h}), \quad (6.69)$$

onde

$$\alpha = \frac{\beta h}{\mathcal{T}} \ll 1 \quad (6.70)$$

e

$$\bar{E} \frac{\mathcal{T}}{h} = -\frac{\partial \ln Z \mathcal{T}}{\partial \beta} \frac{1}{h} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \alpha} = \frac{P\mathcal{T}^2}{h}. \quad (6.71)$$

Caves, et al.(15) resolveram o problema de encontrar a função de partição da Eq. 6.69 e mostraram que

$$S_{\max} = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{\pi^2}{3\alpha} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right) - \frac{1}{2} + O(\alpha) \right]. \quad (6.72)$$

O que leva a capacidade ótima do canal a

$$C_3 = \frac{\pi}{\ln 2} \sqrt{\frac{2P}{3h}} - \frac{1}{4\mathcal{T}} \log \left(\frac{24P\mathcal{T}^2}{h} \right) + \frac{1}{\mathcal{T}} O \left(\frac{1}{\sqrt{P/h\mathcal{T}}} \right). \quad (6.73)$$

Novamente, o limite $\mathcal{T} \rightarrow \infty$ leva C_3 a capacidade C_{WB} da Eq. 6.29.

A correção logarítmica leva C_3 a ser, grosseiramente falando, maior do que a capacidade do canal de energia máxima limitada, refletindo a disponibilidade de mais estados.

Agora, será mostrados o cálculo da capacidade de dois canais particulares, o canal de estados coerentes e o canal de estados comprimidos.

6.3 Canal de Estados Coerentes e Canal de Estado Comprimido

6.3.1 Canal de Banda Estreita

Da mesma forma que foi obtido os resultados anteriores, é primeiro considerado o canal de banda estreita. A descrição do canal será feita para os casos do canal de estados coerentes e do canal de estados comprimidos.

6.3.1.1 Canais de Estados Coerentes

O canal denotado desta forma quando se transmite um estado coerente pelo canal, no qual a leitura na saída é obtida por meio de uma detecção heteródina(15), isto é, pela detecção das duas quadraturas do canal. Em outras palavras, a informação é transmitida nas duas componentes de quadratura dos modos e a sua leitura é feita pela medida dessas duas componentes de quadratura.

A entrada é descrita estatisticamente pelas probabilidades $p_A(\alpha)d^2\alpha$ em cada transmissão do estado coerente

$$\rho_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (6.74)$$

A densidade de probabilidade bidimensional $p_A(\alpha)$ é a função de Glauber-Sudarshan $P(9, 15)$. O estado completo do sistema é dado por

$$\rho = \int d^2\alpha p_A(\alpha)\rho_\alpha. \quad (6.75)$$

A restrição de potência se torna uma restrição sobre o número médio de fótons por uso

$$\bar{n} = Tr\{\rho\hat{a}^\dagger\hat{a}\} = \int d^2\alpha |\alpha|^2 p_A(\alpha). \quad (6.76)$$

A detecção heteródina ideal é descrita por operadores de medida iguais a

$$\hat{F}_\beta = \frac{1}{\pi}|\beta\rangle\langle\beta|. \quad (6.77)$$

Os operadores \hat{F}_β são múltiplos dos operadores projeção de estados coerentes. O traço entre os operadores de medida e o estado dá a densidade de probabilidade condicional, ou seja,

$$p_{B|A}(\beta|\alpha) = Tr\{\rho_\alpha\hat{F}_\beta\} = \frac{1}{\pi}|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \frac{1}{\pi}\exp(-|\beta - \alpha|^2). \quad (6.78)$$

Desde que o ruído devido a medida na saída é aditivo e Gaussiano, então é possível utilizar a teoria criada por Shannon(16, 5) e assumir que a distribuição de probabilidade do estado de entrada que maximiza a entropia de saída é

$$p_A(\alpha) = \frac{1}{\pi\bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}\right), \quad (6.79)$$

no qual torna o estado completo do sistema dado pela Eq. 6.75 igual ao estado térmico, e no qual, junto com a distribuição condicional da Eq. 6.78, leva a densidade de probabilidade de saída ser

$$p_B(\beta) = \int d^2\alpha p_{B|A}(\beta|\alpha)p_A(\alpha) = \frac{1}{\pi(1+\bar{n})} \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{1+\bar{n}}\right). \quad (6.80)$$

Com essas distribuições, as entropias de saída e a condicional podem ser calculadas facilmente e esse resultado é dado por

$$H(B) = - \int d^2\beta p_B(\beta) \log p_B(\beta) = \log[e\pi(1+\bar{n})], \quad (6.81)$$

$$H(B|A) = \int d^2\alpha p_A(\alpha) \left(- \int d^2\beta p_{B|A}(\beta|\alpha) \log p_{B|A}(\beta|\alpha)\right) = \log(e\pi), \quad (6.82)$$

e conseqüentemente,

$$\mathcal{C} = I(A; B) = H(B) - H(B|A) = \log(1+\bar{n}). \quad (6.83)$$

6.3.1.2 Canais de Estados Comprimidos

Para o canal em questão, os estados de entrada são estados coerentes $|\xi_1\rangle_{(r,0)}$, no qual a sua leitura na saída é feita por detecção heteródina na quadratura x_1 . O parâmetro de compressão é escolhido a ser o mesmo para todos os estados de entrada, e o valor esperado do parâmetro de quadratura amplificado \hat{x}_2 a ser igual a zero.

O estado de entrada é denotado por

$$\rho_{\xi_1} = |\xi_1\rangle\langle\xi_1|_{(r,0)} \quad (6.84)$$

e a descrição da estatística de entrada do canal é dado pela densidade de probabilidade $p_{A_1}(\xi_1)$. O operador completo do estado de entrada é

$$\rho = \int d\xi_1 p_{A_1}(\xi_1) \rho_{\xi_1}, \quad (6.85)$$

e a restrição de potência se torna

$$\bar{n} = \text{Tr}\{\rho \hat{a}^\dagger \hat{a}\} = \sigma^2 + \sinh^2 r, \quad (6.86)$$

onde

$$\sigma^2 = \int d\xi_1 \xi_1^2 p_{A_1}(\xi_1) \quad (6.87)$$

é o segundo momento de ξ_1 com respeito a densidade de probabilidade $p_{A_1}(\xi_1)$. O termo $\sinh^2 r$ contribui para \bar{n} representar a inevitável excitação da amplificação da quadratura, no qual é limitada pela restrição de potência.

A detecção que é feita e que descreve a melhor medida sobre estes estados é a detecção heteródina sobre a componente que está sendo transmitido a informação. Os operadores de medida que descrevem essa detecção são dado por

$$\hat{F}_{x_1} = |x_1\rangle\langle x_1|. \quad (6.88)$$

Esses operadores impõem a probabilidade condicional da saída do canal a ser

$$p_{X_1|A_1}(x_1|\xi_1) = \text{Tr}\{\rho_{\xi_1}\hat{F}_{x_1}\} = |\langle x_1|\xi_1\rangle_{(r,0)}|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{1}{4}e^{-2r})}} \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi_1)^2}{2(\frac{1}{4}e^{-2r})}\right). \quad (6.89)$$

Usando o mesmo argumento daquele dado para o canal de estados coerentes, tem-se que o estado de entrada que maximiza a entropia é Gaussiano e sua distribuição de probabilidade dada por

$$p_{A_1}(\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6.90)$$

e a capacidade por uso do canal

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma^2}{\frac{1}{4}e^{-2r}}\right) = \frac{1}{2} \log\left[1 + 4e^{2r}(\bar{n} - \sinh^2 r)\right]. \quad (6.91)$$

Fazendo $e^{2r} = 2\bar{n} + 1$, obtém-se

$$\mathcal{C} = \log(1 + 2\bar{n}). \quad (6.92)$$

6.3.2 Capacidade Máxima dos Canais

As capacidades, dadas em *bits/s*, para os canais apresentados, podem ser resumido em

$$C = BC = B \log(1 + \gamma\bar{n}), \quad (6.93)$$

quando $\gamma = 1$ corresponde ao canal de estados coerentes e $\gamma = 2$ corresponde ao de estados comprimidos. A quantidade de informação por fótons para se ter um envio de informação igual a capacidade é

$$\frac{C}{\bar{n}} = \frac{C}{B\bar{n}} = \bar{n}^{-1} \log(1 + \gamma\bar{n}) \equiv \gamma G_1(\gamma\bar{n}). \quad (6.94)$$

Se for feita a consideração de mais um grau de liberdade, dado pela possibilidade de se variar a frequência e a largura de banda, porém mantendo a relação $\eta = B/f \gg 1$ fixa, pode-se escrever

$$\frac{C}{\sqrt{\eta P/h}} = \frac{C}{\bar{n}^{1/2}} = \bar{n}^{-1/2} \log(1 + \gamma\bar{n}) \equiv \gamma^{1/2} G_2(\gamma\bar{n}). \quad (6.95)$$

O máximo da capacidade adimensional $G_2(\gamma\bar{n})$ é alcançada para $\gamma\bar{n} = 3.9216$, o que corresponde a frequência

$$f = \sqrt{\frac{P}{\eta h \bar{n}}} = 0.50498 \sqrt{\frac{\gamma P}{\eta h}}, \quad (6.96)$$

o que leva a ter a capacidade máxima igual a

$$C_{\max} = 2.2991B = 1.1610 \sqrt{\frac{\gamma \eta P}{h}} \text{ bits/s}. \quad (6.97)$$

e $C_{\max}/B\bar{n} = 0.58628\gamma$ bits por fótons.

6.3.3 Capacidade Banda Larga para o Canal de Estados Coerentes e o Canal de Estados Comprimidos

Considere então um canal multiplexado em frequência com $T = 0$, no qual cada fatia da frequência é um canal de banda estreita ou de estados coerentes ou de estados comprimidos, como foi apresentado anteriormente. A capacidade total do canal é

$$C = \frac{b}{\ln 2} \sum_i \ln(1 + \gamma\bar{n}_i), \quad (6.98)$$

onde a restrição de potência é feita sobre todos os \bar{n}_i .

A capacidade máxima é obtida variando \bar{n}_i como uma função da frequência e mantendo P constante. Com essas considerações e substituindo somas por integrais, é possível a frequência de corte

$$f_c = \sqrt{\frac{2\gamma P}{h}}, \quad (6.99)$$

na qual a comunicação é muito ineficiente em termos de usabilidade. A distribuição ótima de fótons é

$$\gamma\bar{n} = \begin{cases} \frac{f_c}{f} - 1 & 0 \leq f \leq f_c, \\ 0, & f > f_c, \end{cases} \quad (6.100)$$

assim, a capacidade do canal de banda larga para os casos de estados coerentes e estados comprimidos é dada por

$$C_{CQ} = \frac{f_c}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sqrt{\frac{2\gamma P}{h}} \text{ bits/s}. \quad (6.101)$$

onde o subscrito CQ referencia os termos coerentes e comprimidos (*coherent* e *quadrature-squeezed*) relacionados ao canal.

7 Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentado a capacidade de canais bosônicos sem ruído. Esses canais são de grande interesse tanto para físicos e engenheiros quanto para pesquisadores, pois eles modelam canais de comunicação nos quais se usa ondas eletromagnéticas para o transporte da informação.

Para que fosse possível o cálculo dessa capacidade, foi preciso o conhecimento de diversas ferramentas. Por causa disso, foi apresentado inicialmente a Teoria da Informação desenvolvida por Shannon. Posteriormente, um resumo da Mecânica Quântica, juntamente com uma ampliação da teoria de Shannon, atualmente denominada de Teoria Quântica da Informação, foram feitas para que se tivesse uma base mínima de conhecimento para se prosseguir ao restante do trabalho.

Mostrou-se a teoria da Óptica Quântica, que descreve o campo eletromagnético com as estruturas matemáticas que a Mecânica Quântica fornece. E por fim, utilizou-se a base desenvolvida no cálculo da capacidade ótima de canais bosônicos sem ruído, tanto quanto para mostrar a capacidade de três casos particulares desse canal; o canal de estados número, o de estados coerentes e o de estados comprimidos.

Sugestões para Trabalhos Futuros

Como trabalho futuro, será feito o estudo de canais que modelam canais mais realistas, tal como o canal quântico Gaussiano com perdas, por meio de suas características físicas e descrições matriciais. Com isso estabelecido, pretende-se realizar um estudo de formas de modulação para variáveis contínuas por meio de analogias com os métodos de modulação clássicas.

Referências

- 1 FOX, M. *Quantum Optics: An Introduction*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 21.
- 2 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley; 2 edition, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 1, 9 e 12.
- 3 COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics*. [S.l.]: Wiley-VCH. Citado na página 1.
- 4 PERES, A. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. [S.l.]: Springer, 1993. Citado na página 1.
- 5 COVER, T. M.; THOMAS, J. A. *Elements of Information Theory*. [S.l.]: Wiley-Interscience; 2 edition, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 3, 4, 6, 50 e 70.
- 6 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 8, 14, 54 e 55.
- 7 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2012. Citado na página 16.
- 8 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.]: Wiley, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 19.
- 9 GERRY, C.; KNIGHT, P. *Introductory Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 36, 42, 46 e 69.
- 10 WILDE, M. M. *Quantum Information Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press; 1 edition, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 56.
- 11 HOLEVO, A. S. The capacity of the quantum channel with general signal states. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 44, p. 269–273, 1998. Citado na página 56.
- 12 SCHUMACHER, B.; WESTMORELAND, M. D. Sending classical information via noisy quantum channels. *Phys. Rev. A*, v. 56, p. 131, 1997. Citado na página 56.
- 13 HARDY, G. H.; RAMANUJAN, S. *Proc. London Math. Soc., Ser. 2*, v. 17, p. 75, 1918. Citado na página 66.
- 14 JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, v. 106, p. 620, 1957. Citado na página 68.
- 15 CAVES, C. M.; DRUMMOND, P. D. Quantum limits on bosonic communication rates. *Rev. Mod. Phys.*, v. 66, p. 481, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.
- 16 SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, v. 27, p. 379–423, 1948. Citado na página 70.