

Alequine Batista de Lima

# **Projeto de Controlador PID Robusto e Adaptativo Utilizando Otimização Linear**

Campina Grande, Brasil

21 de outubro de 2016

Alequine Batista de Lima

# **Projeto de Controlador PID Robusto e Adaptativo Utilizando Otimização Linear**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG  
Centro de Engenharia Elétrica e Informática - CEEI  
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Orientador: George Acióli Júnior

Campina Grande, Brasil

21 de outubro de 2016

---

Alequine Batista de Lima

Projeto de Controlador PID Robusto e Adaptativo Utilizando Otimização Linear/ Alequine Batista de Lima. – Campina Grande, Brasil, 21 de outubro de 2016-

49 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: George Acióli Júnior

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Centro de Engenharia Elétrica e Informática - CEEI

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE , 21 de outubro de 2016.

---

Alequine Batista de Lima

## **Projeto de Controlador PID Robusto e Adaptativo Utilizando Otimização Linear**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado. Campina Grande, Brasil, 21 de outubro de 2016:

---

**George Acióli Júnior**  
Orientador

---

**PhD. Péricles Rezende Barros**  
Convidado

Campina Grande, Brasil  
21 de outubro de 2016

*Dedico este trabalho a Romildo Cassiano de Lima, amado pai, e a Maria Jerusa Batista de Lima, amada mãe.*

# Agradecimentos

Primeiramente, aos mais importantes nesta jornada. Agradeço a meus pais, Romildo e Maria Jerusa, por terem sempre incentivado a procurar o conhecimento, pelas oportunidades oferecidas e pela manutenção do saber desde a minha infância.

Agradeço aos tios e tias que sempre me deram suporte e, em especial, a Luciene, que assim como meus pais sempre incentivou e ajudou, quando possível.

A minha namorada Laryssa, por todo amor, confiança, estímulo e companheirismo.

Aos amigos e colegas de curso, pelas ajudas nas dificuldades encontradas, compartilhamento de materiais de estudos e por ajudarem na manutenção da tranquilidade e paciência, no decorrer deste curso.

Aos meus professores os quais contribuíram para minha formação como aluno. Em especial ao professor Péricles Rezende Barros, pelas oportunidades oferecidas e por me permitir crescer dentro do curso e ao professor George Acíoli Júnior, por aceitar orientar-me neste trabalho de conclusão de curso.

*"It is not knowledge, but the act of learning, not the possession of but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment."*

*Carl Friedrich Gauss*

# Resumo

Controladores são necessários para que a indústria possa produzir em escala e atingir, não só a maximização da produção, mas também melhorar a qualidade da produção. Os controladores PID dominam o setor industrial pois conseguem, a uma baixa complexidade, produzir uma resposta aceitável do sistema. Os controladores ótimos surgiram como forma de obter o melhor conjunto de parâmetros de controlador para um determinado problema de controle, isto é, obtendo a resposta mais adequada do ponto de vista do projetista. Oscilações na rede elétrica ou ainda no carregamento de máquinas ocorrem usualmente na indústria, de modo que uma outra área de controle surge. Chamada de controle robusto, objetiva-se projetar controladores que tenham alta rejeição a ruídos e variações do sistema. Neste trabalho, será apresentada uma abordagem de projeto de controladores inovadora, misturando os conceitos de controle ótimo e de controle robusto, garantindo ao projetista transitar entre as definições de controlador modificando os coeficientes de uma função objetivo linear. Em seguida, para lidar com um sistema mutável a depender do ponto de operação, uma estratégia adaptativa baseada em agendamento de ganho é utilizada. Para tanto, apresenta-se de forma sucinta a teoria de programação linear e as definições das restrições aplicadas ao Diagrama de Nyquist de um sistema eletromecânico, no intuito de consolidar uma técnica de projeto de controladores alternativa.

**Palavras-chaves:** Controle Ótimo; Controle Adaptativo; Controle Robusto



# Abstract

Controllers are needed for the industry to produce scale and reach, not only maximizing production but also improving the quality of production. The PID controllers dominate the industry because they are able, with a low complexity, to produce an acceptable response of the system. The optimal controllers emerged as a way to get the best set of controller parameters for a particular control problem, that is, obtaining the most appropriate response from the viewpoint of the designer. Fluctuations in the power grid or in the load of the machines usually occur in the industry, so that another control area appears. Called robust control, the objective is to design controllers that have high noise and system variations rejection. In this work, an innovative controller design approach will be presented, mixing the concepts of optimal control and robust control, ensuring the designer to move between the controller settings by changing the coefficients of a linear objective function. Then, to cope with a changing system depending on the operating point, a gain scheduling based adaptive strategy is used. Therefore, it is presented in a brief way the linear programming theory and the definitions of restrictions on Nyquist diagram of an electro-mechanical system in order to consolidate an alternative controller design technique.

**Key-words:**Optimal Control; Adaptative Control; Robust Control

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de Nyquist genérico . . . . .	10
Figura 2 – Diagrama de Nyquist e vetor margem . . . . .	11
Figura 3 – Representação da nova margem $\ell$ . . . . .	12
Figura 4 – Representação dos parâmetros que compõem $\ell$ . . . . .	13
Figura 5 – Representação dos parâmetros que compõem $P_m$ . . . . .	14
Figura 6 – Representação dos parâmetros que compõe $M_m$ . . . . .	15
Figura 7 – Representação dos ângulos $\alpha$ e $\beta$ , bem como das retas $d_1$ e $d_2$ . . . . .	17
Figura 8 – Representação da restrição no plano complexo. . . . .	19
Figura 9 – Determinação de um ponto para parametrização da reta $d_2$ . . . . .	21
Figura 10 – Plataforma robótica construída com servos AX-12A . . . . .	24
Figura 11 – Indicação do ponto primeiro ponto de operação para o servo AX-12A . . . . .	25
Figura 12 – Diagrama de Nyquist para os 3 pontos de operação . . . . .	26
Figura 13 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 45^\circ$ , $\ell = 0.5$ . . . . .	27
Figura 14 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 60^\circ$ , $\ell = 0.5$ . . . . .	28
Figura 15 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 90^\circ$ , $\ell = 0.5$ . . . . .	29
Figura 16 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 45^\circ$ , $\ell = 0.707$ . . . . .	31
Figura 17 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 60^\circ$ , $\ell = 0.707$ . . . . .	32
Figura 18 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 90^\circ$ , $\ell = 0.707$ . . . . .	33
Figura 19 – Resposta ao degrau e ao impulso para $\alpha = 60^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$ . . . . .	34
Figura 20 – Resposta ao degrau e ao impulso para $\alpha = 60^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$ . . . . .	36
Figura 21 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 45^\circ$ , $\ell = 0.5$ e $\theta = 120^\circ$ . . . . .	37
Figura 22 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 45^\circ$ , $\ell = 0.5$ e $\theta = 90^\circ$ . . . . .	38
Figura 23 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 60^\circ$ , $\ell = 0.5$ e $\theta = 120^\circ$ . . . . .	39
Figura 24 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 60^\circ$ , $\ell = 0.5$ e $\theta = 90^\circ$ . . . . .	40
Figura 25 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 45^\circ$ , $\ell = 0.707$ e $\theta = 120^\circ$ . . . . .	41
Figura 26 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 45^\circ$ , $\ell = 0.707$ e $\theta = 90^\circ$ . . . . .	42
Figura 27 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 60^\circ$ , $\ell = 0.707$ e $\theta = 120^\circ$ . . . . .	43
Figura 28 – Curvas de Nyquist para $\alpha = 60^\circ$ , $\ell = 0.707$ e $\theta = 90^\circ$ . . . . .	44

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>OTIMIZAÇÃO LINEAR</b>	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>Problema de Programação Linear</b>	<b>3</b>
2.1.1	Soluções Básicas	4
<b>2.2</b>	<b>Método Simplex</b>	<b>6</b>
<b>2.3</b>	<b>Método do ponto interior</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>CONTROLE ROBUSTO E ADAPTATIVO</b>	<b>8</b>
<b>3.1</b>	<b>O controlador</b>	<b>8</b>
3.1.1	Especificações do Controlador Ótimo Robusto	8
<b>3.2</b>	<b>Restrições do problema de programação linear</b>	<b>9</b>
3.2.1	Margens de Estabilidade Clássicas	10
3.2.1.1	Margem de Ganho	10
3.2.1.2	Margem de Fase	11
3.2.1.3	Margem de Módulo	11
3.2.2	Margens de Robustez Linearizadas	12
3.2.2.1	Margem de ganho	13
3.2.2.2	Margem de fase	13
3.2.2.3	Margem de módulo	15
3.2.3	Valor mínimo para a frequência de cruzamento ( $\omega_c$ )	16
<b>3.3</b>	<b>Restrições para tolerância a distúrbios</b>	<b>16</b>
3.3.1	Determinação das inequações	18
3.3.2	Restrições para melhor desempenho	20
<b>3.4</b>	<b>Controlador Ótimo Robusto com Escalonamento de Ganho</b>	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES</b>	<b>24</b>
<b>4.1</b>	<b>O modelo da planta</b>	<b>24</b>
<b>4.2</b>	<b>Projeto do controlador Robusto</b>	<b>26</b>
4.2.1	Caso 1:	26
4.2.2	Caso 2:	28
4.2.3	Caso 3:	29
4.2.4	Caso 4:	30
4.2.5	Caso 5:	31
4.2.6	Caso 6:	32
4.2.7	Resposta no domínio do tempo	34

4.2.7.1	Respostas ao degrau e ao impulso para $\ell = 0.5$ e $\alpha = 60^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$ . . . . .	34
4.2.7.2	Respostas ao degrau e ao impulso para $\ell = 0.707$ e $\alpha = 60^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$ . . . . .	35
<b>4.3</b>	<b>Projeto do controlador ótimo com escalonamento de ganho</b> . . . . .	<b>36</b>
4.3.1	Caso 1: . . . . .	36
4.3.1.1	Ponto de operação $120^\circ$ . . . . .	37
4.3.1.2	Ponto de operação $90^\circ$ . . . . .	37
4.3.2	Caso 2: . . . . .	38
4.3.2.1	Ponto de operação $120^\circ$ . . . . .	38
4.3.2.2	Ponto de operação $90^\circ$ . . . . .	38
4.3.3	Caso 3: . . . . .	39
4.3.3.1	Ponto de operação $120^\circ$ . . . . .	40
4.3.3.2	Ponto de operação $90^\circ$ . . . . .	40
4.3.4	Caso 4: . . . . .	41
4.3.4.1	Ponto de operação $120^\circ$ . . . . .	41
4.3.4.2	Ponto de operação $90^\circ$ . . . . .	41
4.3.5	Controlador com Escalonamento de Ganho . . . . .	42
4.3.6	Controlador com $\ell = 0.5$ e $\alpha = 45^\circ$ . . . . .	43
4.3.7	Controlador com $\ell = 0.707$ e $\alpha = 60^\circ$ . . . . .	44
4.3.8	Controlador com $\ell = 0.5$ e $\alpha = 45^\circ$ limitado por $K_u = 10$ . . . . .	45
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>48</b>

# 1 Introdução

Ao longo dos anos, a teoria de controle tem evoluído, em conjunto com os avanços tecnológicos na área de eletrônica e sistemas embarcados, bem como com o desenvolvimento de novas ferramentas matemáticas das quais os engenheiros se valem na hora de projetar controladores para máquinas e processos. Dentre as diferentes técnicas, é possível realizar abordagens do problema de controle, algumas como o controle em malha aberta e em malha fechada. Uma vez que o primeiro pressupõe um conhecimento do sistema em sua totalidade - o que é irreal - o controle por realimentação tem sido aplicado durante muito tempo, e mostrando bons resultados.

Embora outros sistemas por realimentação tenham sido relatados durante a antiguidade ([MAYR, 1970](#)) - Ktesibios, Philon, Heron - apenas por volta de 1788, James Watt criou o primeiro dispositivo com realimentação que atraiu os olhos da comunidade científica, induzindo um acréscimo das unidades de controle que utilizavam-se do mesmo princípio ([FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013](#)). Define-se então em 1951 pelo IEEE controle por realimentação como sendo "o sistema de controle que tende a manter a relação prevista de uma variável do sistema para outra comparando funções destas variáveis e utilizando a diferença como ferramenta de controle".

Uma vez definida a primeira abordagem de controle como sendo a realimentação, é necessário também verificar que ao longo dos anos o projeto de controladores para realimentação também passou por mudanças. Num primeiro momento, mais precisamente durante o período de 1930 à 1960, vemos as estratégias de controle clássico, como: On/Off, auto-operado, PID (proporcional integral e derivativo), avanço e atraso de fase, que se baseiam nas técnicas de análise já bem consolidadas:

- Diagrama de Bode
- Critério de Nyquist
- Critério de Routh-Hurwitz
- Lugar das Raízes
- Margens de Ganho e Fase

O segundo grupo por sua vez, conhecido como Controle moderno, baseia-se no modelo de espaço de estados, na controlabilidade e na observabilidade dos processos, contendo os controladores, multivariáveis, adaptativos, ótimos, não-lineares, preditivos e robustos.

Dentre os diversos métodos de projeto de controladores e análise de sistemas, o diagrama de Nyquist (NYQUIST, 1932) fora particularmente escolhido para ser a ferramenta de análise dos dispositivos de interesse. Através da "Bell Laboratories" fora introduzido o diagrama de Nyquist e o critério da estabilidade de Nyquist.

O atuador selecionado para ter seu controlador projetado pertence a um manipulador robótico. Objetiva-se apresentar uma estratégia de controle que une os conceitos de controle robusto no que diz respeito as margens de fase e de ganho do processo, com características de controle ótimo (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2006), utilizando-se de métodos de otimização linear como o simplex (DANTZIG, 1951), a função objetivo proposta por Karimi e o diagrama de Nyquist do sistema de interesse.

Em seguida, devido à particularidades da execução do atuador em diferentes pontos de operação, sugere-se uma estratégia adaptativa, utilizando dos conceitos de controle ótimo outrora pressupostos e de novas interpretações sugeridas em artigos posteriores envolvendo a abordagem adaptativa (KUNZE; KARIMI; LONGCHAMP, 2007). Primeiramente, poderá ser observada a construção do problema de controle, de modo a construir uma forma de controlador que satisfaça o interesse proposto, seguindo para próxima parte, na que são definidas as características de robustez desejadas e é também proposta uma linearização para as variáveis não lineares, bem como a alternativa adaptativa utilizando-se da técnica de escalonamento de ganho (OLIVEIRA; KARIMI, 2012). Posteriormente, são sugeridas as funções objetivos compatíveis com as condições de robustez desejadas. Por fim, um modelo identificado do sistema servo-motor é utilizado para verificar e validar a metodologia proposta, do ponto de vista do diagrama de Nyquist.

## 2 Otimização Linear

### 2.1 Problema de Programação Linear

Em matemática, o termo otimização, ou programação matemática, refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto factível. Quando se consegue construir modelos matemáticos bastante representativos dos respectivos sistemas dinâmicos em estudo, é possível aplicar as técnicas matemáticas de otimização para maximizar ou minimizar uma função previamente definida, e assim encontrar uma *solução ótima* do problema, resultando no melhor desempenho possível do sistema, segundo critérios pré-definidos.

Segundo a literatura (LUENBERGER; YE, 2008), podemos dividir os problemas de otimização em três tipos:

- Programação Linear
- Problemas sem restrição
- Problemas com restrição

Considerado por muitos como o mais natural dos mecanismos de otimização, por resolver uma vasta quantidade de problemas, a programação linear é caracterizada por funções lineares de incógnitas, em que os contornos são equações e inequações lineares. Apresentam-se como vantagens dos problemas de programação linear a facilidade em representar e analisar sistemas lineares e as formas relativamente simples de computar resoluções.

Quando temos por objeto problemas com restrições bem definidas, não necessitamos tratar o conjunto de soluções em sua totalidade, bastando separar em diversos problemas menores - presos por restrições. De um modo geral, é comum encontrarmos problemas de programação matemática não linear e restritiva, representados de forma genérica por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{x}) \\ &\text{submetida a } h_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m \\ &\quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, r \\ &\quad \mathbf{x} \in S \end{aligned}$$

Nessa formulação, admite-se que  $\mathbf{x}$  é um vetor de dimensão  $n$  composto pelas incógnitas  $x_i$ , tal que:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

E que  $f, h_i, i = 1, 2, \dots, m$  e  $g_j, j = 1, 2, \dots, r$  sejam funções reais das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . O conjunto  $S$  é um subconjunto do espaço de dimensão  $n$ . A função  $f(\mathbf{x})$  é a *função objetivo* e as demais equações (e inequações) são as *restrições* do sistema.

Onde  $\mathbf{x}$  é um vetor coluna  $n$ -dimensional,  $\mathbf{c}^T$  é um vetor linha  $n$ -dimensional,  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $m \times n$  e  $\mathbf{b}$  é um vetor coluna de dimensão  $m$ .

É possível reescrever o problema de programação linear a partir de uma forma familiar ao que é utilizado na resolução de sistemas lineares simples (LUENBERGER; YE, 2008):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ &\text{submetida a } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

Este conjunto de restrições e função objetivo pode ainda ser representado de uma forma compacta, utilizando os conceitos de álgebra linear:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\text{submetida a } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Onde  $\mathbf{c}$  é o vetor de coeficientes da função objetivo,  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis,  $\mathbf{A}$  é a matriz dos coeficientes das restrições e  $\mathbf{b}$  é o vetor dos termos independentes das restrições impostas ao problema.

### 2.1.1 Soluções Básicas

Considere o sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde  $\mathbf{x}$  é um vetor  $n$  – dimensional,  $\mathbf{b}$  é um vetor  $m$  – dimensional e  $\mathbf{A}$  é uma matriz de dimensão  $m \times n$ . Suponha que das  $n$  colunas de  $\mathbf{A}$  selecionemos um conjunto de  $m$



colunas independentes linearmente. Seja esse conjunto de colunas uma matriz  $m \times m$ , chamamos esta de  $\mathbf{B}$ .

A matriz  $\mathbf{B}$  é não singular e produz a seguinte adequação:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_b = \mathbf{b} \quad (2.2)$$

O novo vetor solução, dito  $\mathbf{x}_b$  é construído a partir do vetor  $\mathbf{x}$  adicionado de colunas repletas de 0. Dado o conjunto de  $m$  equações lineares e de  $n$  incógnitas, seja  $\mathbf{B}$  uma submatriz  $m \times m$  não singular construída a partir de  $\mathbf{A}$ . Então, se todas as  $n - m$  componentes de  $\mathbf{x}$  não associadas com as colunas de  $\mathbf{B}$  são nulas, a solução resultante será conhecida como *solução básica* da equação  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  na base  $\mathbf{B}$ . As componentes de  $\mathbf{x}$  associadas com  $\mathbf{B}$  são ditas *variáveis básicas*.

A solução básica corresponde a uma expressão do vetor  $\mathbf{b}$  como uma combinação linear dos vetores básicos. Assume-se, como forma de evitar trivialidades e problemas não naturais que  $n > m$  e que as linhas de  $\mathbf{A}$  são linearmente independentes.

Sob estas condições, o sistema sempre possuirá solução (LUENBERGER; YE, 2008) e terá *pelo menos* uma solução básica. As variáveis básicas de uma solução básica não são necessariamente não nulas. Se uma ou mais variáveis básicas de uma solução básica tem valor zero, a solução é dita "solução básica degenerada".

Para sistemas restritivos, expandimos a definição, onde o vetor  $\mathbf{x}$ , agora dito "factível" está associado à *solução básica factível*. Se a solução é degenerada, dizemos que trata-se de uma *solução básica degenerada factível*.

O teorema fundamental da programação linear introduz conceitos que são o princípio do método simplex, a ser explorado a seguir. O teorema nos mostra que é necessário apenas considerar *soluções básicas viáveis* quando procuramos por soluções ótimas para um programa linear. Considerando o problema tal que:

minimizar  $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

submetida a  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Uma solução factível para as restrições que atinge o valor mínimo da função objetivo dependente dessas restrições é dita *solução ótima factível*. Se esta solução é básica, dizemos tratar-se de uma *solução básica ótima factível*.

Teorema: Dado um programa linear na forma padrão, onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $m \times n$  e de posto  $m$ ,

- I. Se existe uma solução factível, existe uma solução básica factível;

II. Se existe uma solução ótima factível, existe uma solução básica ótima factível;

Este teorema reduz a tarefa de resolver um programa linear, realizando a busca apenas sobre as soluções básicas viáveis. Para um problema contendo  $n$  variáveis e  $m$  restrições há pelo menos

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (2.3)$$

soluções básicas. O teorema fundamental nos traz o óbvio, mas de uma forma ineficiente de procura. Expandindo a técnica de prova, assim como o teorema em si, derivamos a eficiência do *método simplex*.

## 2.2 Método Simplex

O método simplex (DANTZIG, 1951) é uma técnica idealizada para realizar a procura de soluções ótimas de um problema de programação linear. Assim, como mencionado acima, é através do teorema da programação linear que reduzimos nosso espaço de busca apenas para as soluções básicas. O método simplex, então, é usado para fazer uma busca incluindo ou excluindo as variáveis do conjunto de variáveis básicas, varrendo as soluções básicas até que se encontre a solução ótima.

Quando ocorre a implementação do método simplex, é necessário assumir que todas as variáveis envolvidas serão não negativas, bem como todas as restrições devem ser do tipo "menor-que", nos permitindo a utilização da variáveis de folga.

A seguir, temos um passo a passo para a implementação do método simplex de forma manual e iterativa.

Passos a serem seguidos no Método Simplex (LUENBERGER; YE, 2008):

- Passo 0. Forma-se a tabela inicial correspondente à uma solução básica factível. Os coeficientes reduzidos podem ser encontrados por operações de escalonamento.
- Passo 1. Se todos os  $r_j \geq 0$ , encerra-se o método; a solução atual já é ótima.
- Passo 2. Seleciona-se  $q$  tal que  $r_q < 0$  para determinar qual variável não-básica deve se tornar básica.
- Passo 3. Calcula-se as razões  $y_{i0}/y_{iq}$  para  $y_{iq} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Se não há  $y_{iq} > 0$ , encerra-se o método; o problema é ilimitado. Caso contrário, seleciona-se  $p$  como o índice  $i$  que corresponde à menor razão.
- Passo 4. Realiza-se o pivoteamento com elemento  $y_{pq}$ , atualizando todas as linhas incluindo a última. Retorna-se ao passo 1.

## 2.3 Método do ponto interior

O Método do ponto interior (KARMARKAR, 1984) admitia uma filosofia diferente daquela adotada pelo método simplex (DANTZIG, 1951). O atrativo para o método do ponto interior era apresentar uma complexidade polinomial menor do que o método dos elipsóides Khachyan, que apesar de resolver problemas de programação linear, não era eficaz do ponto de vista computacional.

Enquanto o método simplex realiza a busca entre os pontos extremos de fronteira das regiões factíveis (ou nas soluções básicas factíveis), o método do ponto interior baseia-se em pontos pertencentes ao interior da região factível, permitindo encontrar-se uma solução básica ótima factível de forma mais rápida.

Assim, como métodos iterativos de procura como o método de Newton, o método do ponto interior baseia-se no cálculo da direção que mais rapidamente levará o sistema a condições ótimas.

## 3 Controle Robusto e Adaptativo

### 3.1 O controlador

Na indústria, é comum a utilização de controles da família PID, pois estão bem consolidados tanto matematicamente, no que diz respeito às técnicas de projeto e de análise, quanto comercialmente, uma vez que os CLP's e microcontroladores apresentam módulos específicos e bibliotecas respectivamente para lidar com este controlador. Como visto na seção de apresentação do problema de programação linear, a forma matricial é muitas vezes útil por apresentar-se compacta em relação à representação expandida. Utilizou-se uma parametrização para o controlador (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2006):

$$K(s) = \rho^T \phi(s) \quad (3.1)$$

Onde  $\rho^T = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n]$  e  $\phi^T(s) = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$  e  $n$  é o número de parâmetros que compõe o controlador. No caso de um controlador PID, tem-se:

$$\rho^T = [K_p, K_i, K_d] \quad (3.2)$$

$$\phi^T(s) = \left[ 1, \frac{1}{s}, \frac{s}{1 + T f_s} \right] \quad (3.3)$$

#### 3.1.1 Especificações do Controlador Ótimo Robusto

Já definida a forma do controlador como sendo um PID, resta saber quais serão as condições de regime que são desejadas para nosso sistema após aplicação do controlador. Para isto, e sabendo que se deseja um sistema que siga a referência imposta, é possível demonstrar que a minimização da integral do erro pode ser dada através da maximização do ganho  $K_i$  (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1988) :

$$IE = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (3.4)$$

Seja então o controlador da forma:

$$K(s) = \frac{\rho_0 + \rho_1 s + \dots + \rho_n s^n}{R(s)} \quad (3.5)$$

E considerando um  $R(s) = sR'(s)$  tal que:

$$R'(s) = 1 + r_1s + \dots + r_{n-1}s^{n-1} \quad (3.6)$$

Obtem-se então a lei de controle, tal que:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K(s) = \frac{\rho_0s^{-1} + \rho_1 + \dots + \rho_{n-1}s^{n-1}}{1 + r_1s + \dots + r_{n-1}s^{n-1}} \quad (3.7)$$

Resultando em:

$$U(s)(1 + d_1s + \dots + d_{n-1}s^{n-1}) = E(s)(\rho_0s^{-1} + \rho_1 + \dots + \rho_{n-1}s^{n-1}) \quad (3.8)$$

E portanto:

$$u(t) + r_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + r_{n-1} \frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} = \rho_0 \int_0^\infty e(t)dt + \rho_1 e(t) + \dots + \rho_n \frac{d^{n-1}e(t)}{dt^{n-1}} \quad (3.9)$$

Assumindo um erro inicial de  $e(0) = 0$ , um erro de regime tal que  $e(\infty) = 0$  e um distúrbio em degrau aplicado na entrada, temos:

$$u(\infty) - u(0) = \rho_0 \int_0^\infty e(t)dt \quad (3.10)$$

Seja  $u(\infty) - u(0) = 1$

Temos:

$$IE = \int_0^\infty e(t)dt = \frac{1}{\rho_0} \quad (3.11)$$

Provando assim que é possível minimizar a integral do erro simplesmente maximizando o termo  $\rho_0$ , que corresponde ao termo  $K_i$  do controlador PID.

## 3.2 Restrições do problema de programação linear

Neste momento, sabendo-se que se deseja a minimização do erro através da maximização de  $K_i$ , é o momento em que se define a função objetivo do problema de programação linear. Não obstante, nos resta ainda saber quais restrições irão reger o problema e limitar os valores possíveis a serem assumidos pelo controlador. Através do diagrama de Nyquist na figura (1), é possível visualizar um ponto em particular, que nos representa o limite de estabilidade para o sistema.

Este ponto é o par  $(-1, 0)$  e a interpretação é:

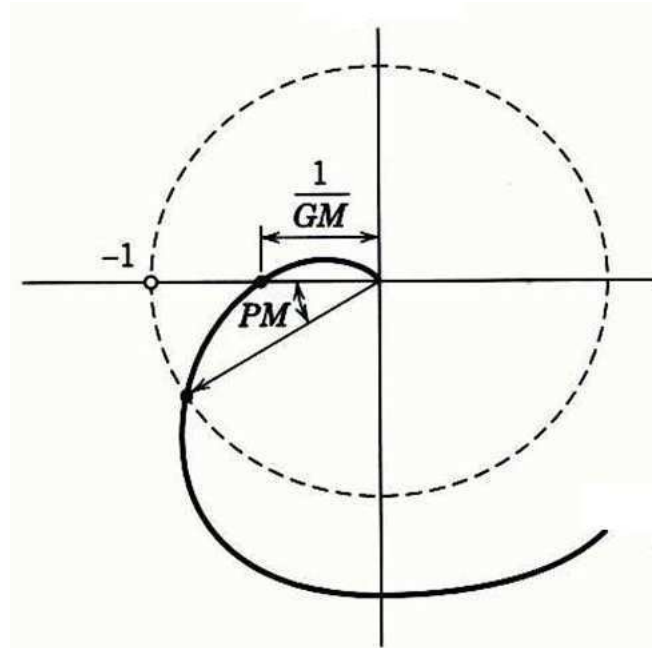


Figura 1 – Diagrama de Nyquist genérico

- Curva de Nyquist Abaixo - Sistema Estável
- Curva de Nyquist Contém o ponto  $(-1, 0)$  - Sistema Marginalmente estável
- Curva de Nyquist Acima - Sistema Instável

Consideremos um sistema estável. É fato que, quão mais distante do ponto de estabilidade marginal, mais garantida será sua condição de estabilidade durante a operação do sistema, isto é, um sistema que atua muito próximo do ponto de estabilidade marginal pode tornar-se instável ao passar por complicações corriqueiras de operação o que é indesejável. Partindo dessa premissa, as restrições de projeto do controlador PID deverão estar associadas às margens de estabilidade do sistema, como *margem de fase*, *margem de ganho* e *margem de módulo*.

### 3.2.1 Margens de Estabilidade Clássicas

#### 3.2.1.1 Margem de Ganho

Define-se a margem de ganho  $G_m$  como o fator para o qual o ganho pode ser aumentando para que se atinja o limiar de estabilidade  $(-1, 0)$ . É possível observar na figura (1) que para valores de  $G_m < 1$ , temos sistemas instáveis, pois a distância  $\frac{1}{G_m}$  assumirá valores maiores que 1, indicando que o diagrama de Nyquist envolve o ponto de crítico, atingindo a instabilidade. A obtenção de  $G_m$  também pode ser dada a partir de outras técnicas de análise, como o diagrama de Bode ou o lugar das raízes.

### 3.2.1.2 Margem de Fase

Outra medida que indica a estabilidade do sistema é a margem de fase ( $P_m$ ) que é a quantidade do valor da fase de  $H(j\omega)$  que ultrapassa  $-180^\circ$  para o ganho unitário do diagrama de Nyquist. Verifica-se que este ponto de ganho unitário ocorre quando o diagrama de Nyquist intercepta o círculo unitário centrado na origem. O valor da fase deste ponto com relação ao eixo imaginário nos fornecerá a margem de fase  $P_m$ , como pode ser observado na figura (1).

É importante ressaltar que valores positivos de  $P_m$  indicam estabilidade. Um outro termo, dito frequência de cruzamento ( $\omega_c$ ) é utilizado para referir-se à frequência em que ocorre o ganho unitário para o diagrama de Nyquist de um sistema.

### 3.2.1.3 Margem de Módulo

Uma vez que  $P_m$  e  $G_m$  podem apresentar-se como indicadores não úteis para projeto, pois existem casos em que os sistemas nunca cruzam o eixo real, de modo que  $G_m = \infty$  em todos os casos, ou que apresentam diversos pontos de cruzamento com o círculo unitário, necessitando de esclarecimentos quanto a que margem de fase deverá ser adotada. Tradicionalmente, assume-se que a margem de fase para casos com diversos cruzamentos é definida como sendo a relativa ao primeiro cruzamento.

Para lidar com estas ambiguidades temos o vetor de margem, que define a distância mais próxima entre o diagrama de Nyquist e o ponto  $(-1, 0)$ . O módulo deste vetor é a margem de módulo, representado na figura (2)

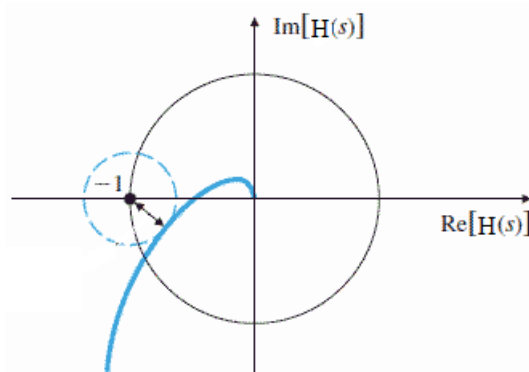


Figura 2 – Diagrama de Nyquist e vetor margem

Estas margens entretanto não são - a priori - lineares, e portanto temos uma incoerência, uma vez que a proposta aqui submetida é a de utilizar métodos de programação linear.

Para lidar com esta incoerência, há duas opções:

- Utilizar um método de otimização não linear

- Utilizar restrições de margem linearizadas

Optou-se então por criar margens linearizadas (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2007).

### 3.2.2 Margens de Robustez Linearizadas

Considera-se uma linha  $d_1$  no plano complexo, cruzando o eixo real negativo entre 0 e  $-1$  com um ângulo  $\alpha$ . A nova margem de estabilidade,  $\ell \in [0, 1[$ , é definida como a distância entre o ponto crítico  $-1$  e a linha  $d_1$ , quando esta cruza o eixo real negativo, assim como na figura (3).

$$G_m \geq \frac{1}{1 - \ell} \quad (3.12)$$

$$P_m \geq \Phi_\ell = \arccos \left( (1 - \ell) \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 - (1 - \ell)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \right) \quad (3.13)$$

$$M_m \geq M_l = \ell \operatorname{sen} \alpha \quad (3.14)$$

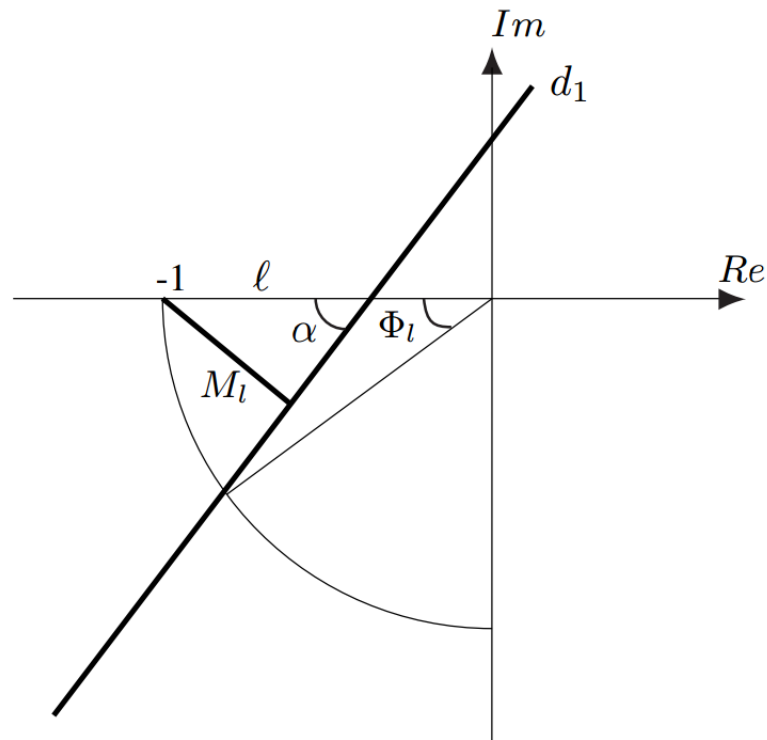


Figura 3 – Representação da nova margem  $\ell$ .



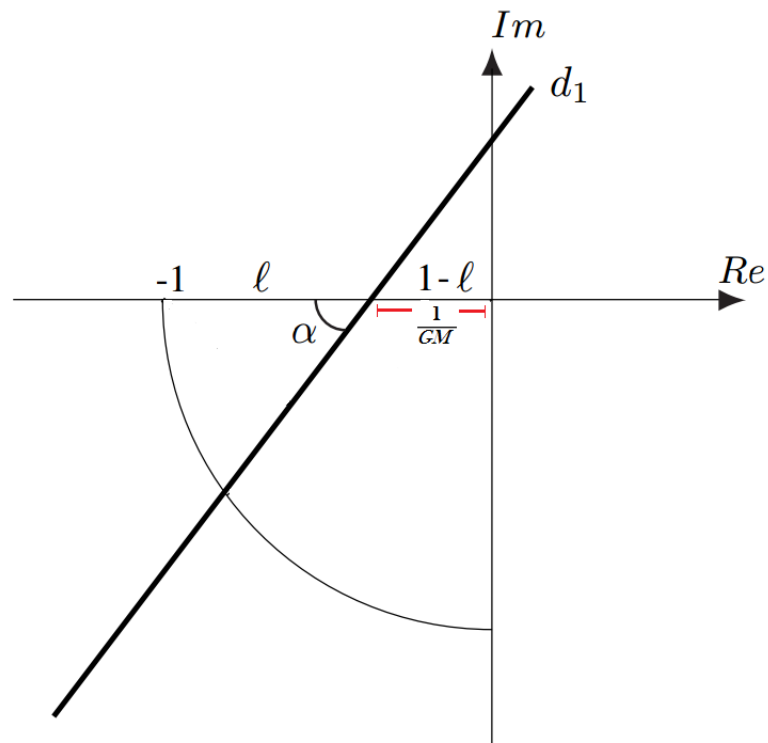


Figura 4 – Representação dos parâmetros que compõem  $\ell$

### 3.2.2.1 Margem de ganho

$$\frac{1}{G_m} \leq 1 - \ell \tag{3.15}$$

$$G_m \geq \frac{1}{1 - \ell} \tag{3.16}$$

### 3.2.2.2 Margem de fase

Primeiramente, deve-se observar o triângulo formado pelos segmentos  $C$ ,  $1 - \ell$  e  $1$ . A partir destes segmentos e dos ângulos  $\Phi_\ell$  e  $180^\circ - \alpha$ , têm-se:

Aplicando a lei dos cossenos:

$$C^2 = 1^2 + (1 - \ell)^2 - 2(1 - \ell)\cos\Phi_\ell \tag{3.17}$$

E aplicando a lei dos senos:

$$\frac{C}{\text{sen}\Phi_\ell} = \frac{C}{\sqrt{1 - \cos^2\Phi_\ell}} = \frac{1}{\text{sen}(180 - \alpha)} = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} \tag{3.18}$$

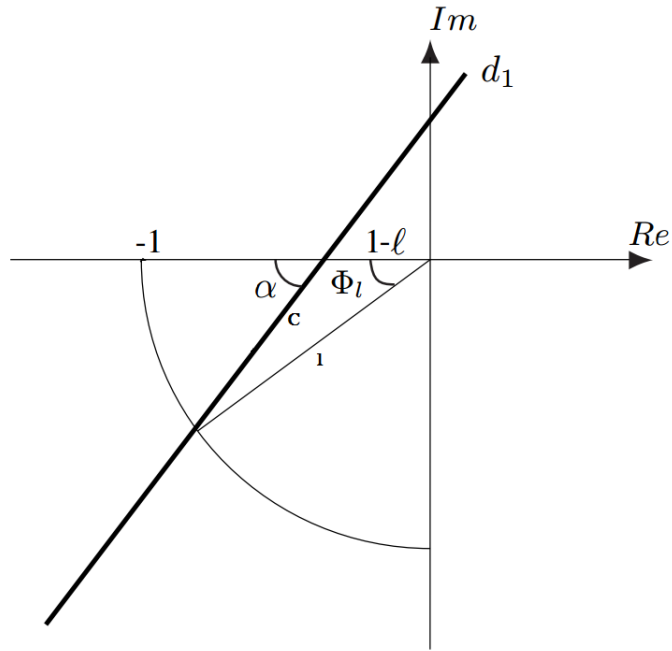


Figura 5 – Representação dos parâmetros que compõem  $P_m$

Isolando o termo  $C$  e utilizando a segunda potência em ambos os termos da equação:

$$C^2 = \frac{\text{sen}^2\alpha}{1 - \text{cos}^2\Phi_\ell} \quad (3.19)$$

Substituindo então a equação 3.19 em 3.17, obtém-se:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{1 - \text{cos}^2\Phi_\ell} = 1^2 + (1 - \ell)^2 - 2(1 - \ell)\text{cos}\Phi_\ell \quad (3.20)$$

Organizando os termos obtém-se então a equação de segundo grau em  $\text{cos}^2\Phi_\ell$ :

$$\text{cos}^2\Phi_\ell + [-2(1 - \ell)\text{sen}^2\alpha]\text{cos}\Phi_\ell + [\text{sen}^2\alpha(1 + (1 - \ell)^2) - 1] = 0 \quad (3.21)$$

Que possui como discriminante  $\Delta$ :

$$\Delta = 4(1 - \ell)^2(\text{sen}^4\alpha) - 4.[\text{sen}^2\alpha(1 + (1 - \ell)^2) - 1] \quad (3.22)$$

Mas, uma vez que

$$\text{cos}^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \text{cos}^2\alpha$$

Obtemos:

$$\Delta = 4(1 - \ell)^2(\text{sen}^2\alpha)(1 - \text{cos}^2\alpha) - 4.[\text{sen}^2\alpha(1 + (1 - \ell)^2 - \text{cos}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)] \quad (3.23)$$

De modo que:

$$\Delta = 4(1 - \ell)^2\text{sen}^2\alpha - 4(1 - \ell)^2\text{sen}^2\alpha\text{cos}^2\alpha + 4\text{cos}^2\alpha - 4\text{sen}^2\alpha(1 - \ell)^2 \quad (3.24)$$

$$\Delta = 4\text{cos}^2\alpha(1 - (1 - \ell)^2\text{sen}^2\alpha) \quad (3.25)$$

E portanto:

$$\text{cos}\Phi_\ell = \frac{2(1 - \ell)\text{sen}^2\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.26)$$

$$\text{cos}\Phi_\ell = (1 - \ell)\text{sen}^2\alpha + \text{cos}\alpha\sqrt{1 - (1 - \ell)^2\text{sen}^2\alpha} \quad (3.27)$$

$$P_m \geq \Phi_\ell = \text{arcos}((1 - \ell)\text{sen}^2\alpha + \text{cos}\alpha\sqrt{1 - (1 - \ell)^2\text{sen}^2\alpha}) \quad (3.28)$$

### 3.2.2.3 Margem de módulo

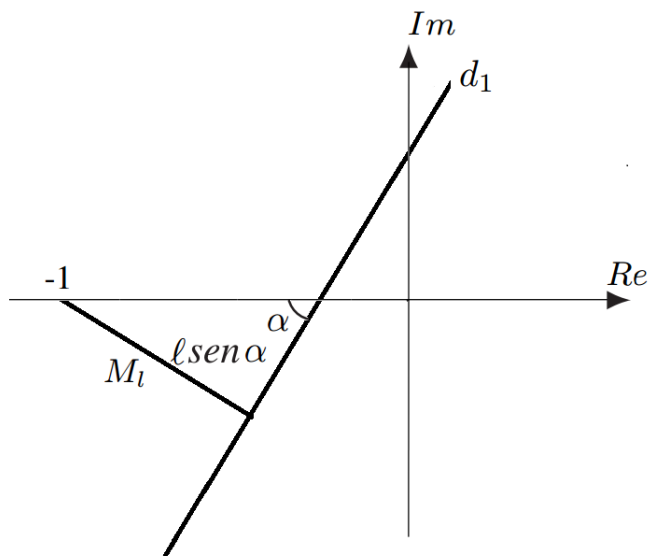


Figura 6 – Representação dos parâmetros que compõe  $M_m$

Para a determinação da margem de módulo, basta uma associação entre o ângulo  $\alpha$  e o segmento  $\ell$ :

$$\text{sen}\alpha = \frac{M_\ell}{\ell} \quad (3.29)$$

$$M_g > M_\ell = \ell \text{sen}\alpha \quad (3.30)$$

Para um valor fixo de  $\alpha$ , todos os menores valores são funções que acrescentam valor à  $\ell$ .

Desse modo,  $\ell$  pode ser utilizado como critério de robustez do sistema, sendo a sua maximização uma otimização do sistema.

Observa-se também que para um valor fixo de  $\ell$  as margens de fase e de ganho aumentam, conforme incrementa-se o valor de  $\alpha$ . Dessa forma, nota-se uma melhora no rastreamento do valor de referência, ao custo de uma redução na capacidade de rejeição a distúrbios.

Existe portanto, um conflito, que deve ser decidido pelo projetista utilizando-se a variável  $\alpha$  para tal.

### 3.2.3 Valor mínimo para a frequência de cruzamento ( $\omega_c$ )

Considera-se uma segunda linha,  $d_2$  no plano complexo, tangente ao círculo unitário, cruzando o eixo real negativo com ângulo  $\beta$ . A parte da reta  $d_2$  que se encontra entre  $d_1$  e o eixo imaginário, é tida como uma linearização do círculo unitário neste trecho. Se a curva de Nyquist do sistema intersecta a reta  $d_2$  na frequência  $\omega_x$ , podemos dizer que esta é uma aproximação menor de  $\omega_c$ , onde  $\omega_c$  é sempre maior ou igual à  $\omega_x$ . Dessa forma, pode-se empregar  $\omega_x$  como uma variável de medida da performance do sistema.

Maiores valores de  $\omega_x$  representam rapidez na rejeição de distúrbio e pequeno tempo de subida no domínio do tempo.

Escolhe-se  $\beta$  de modo que frequências menores que  $\omega_x$  não se aproximem muito do ponto crítico, e portanto:

$$\beta \leq \min \left\{ \arcsen \left( \frac{1}{\ell + 1} \right), \arcsen(1 - \ell \text{sen}\alpha) \right\} \quad (3.31)$$

## 3.3 Restrições para tolerância a distúrbios

Neste caso, supõe-se que existe uma frequência  $\omega_c$  desejada e que se objetiva encontrar o melhor controlador em termos de suas margens de robustez. Deste modo, as

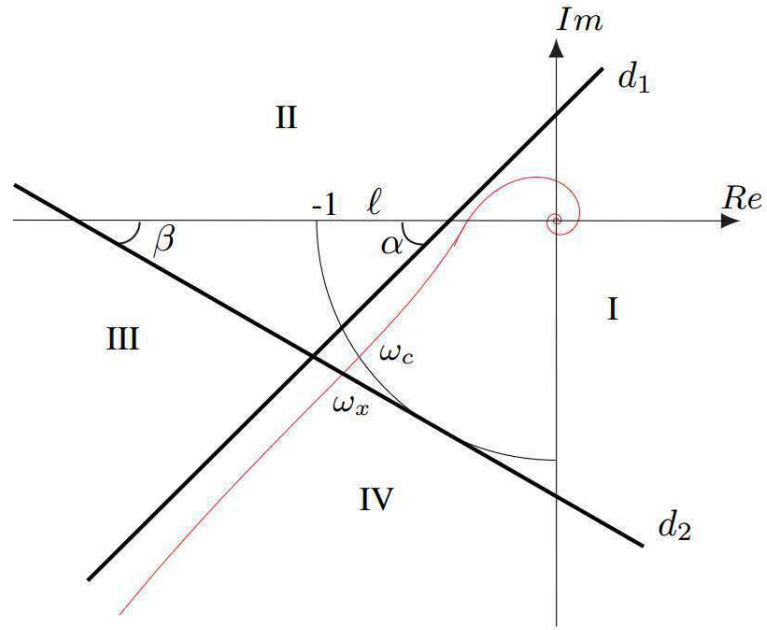


Figura 7 – Representação dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , bem como das retas  $d_1$  e  $d_2$ .

variáveis de otimização serão  $\omega_x$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Escolhe-se

$$\omega_x = \omega_c$$

$$\alpha \approx 45^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

Observa-se que o diagrama de Nyquist aparecerá entre as regiões IV e III para baixas frequências e na região I para altas frequências, que separam-se pela frequência  $\omega_x$ . É interessante que a curva de Nyquist não entre na região II, afim de manter distância do ponto crítico  $(-1 + j0)$ . A definição destas regiões pode ser observada na figura (7)

O problema de otimização linear será então:

maximizar  $\ell$

submetida a

$$\rho^T(\cot(\alpha)\Im\{(\omega_k)\} - \Re\{(\omega_k)\}) + \ell \leq 1, \omega_k > \omega_x$$

$$\rho^T(\cos(\beta)\Im\{(\omega_k)\} + \sen(\beta)\Re\{(\omega_k)\}) > -1, \omega_k > \omega_x$$

$$\rho^T(\cos(\beta)\Im\{(\omega_k)\} + \sen(\beta)\Re\{(\omega_k)\}) \leq -1, \omega_k \leq \omega_x$$

Este problema de otimização tende a cancelar a ação integral. É recomendado por artigos da literatura (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2007), utilizar uma restrição adicional, tal que  $K_i > K_{min}$ .

Onde

$$\Re\{\omega_k\} = \Re[\phi(e^{-j\omega_k h})G(e^{-j\omega_k h})] \quad (3.32)$$

$$\Im\{\omega_k\} = \Im[\phi(e^{-j\omega_k h})G(e^{-j\omega_k h})] \quad (3.33)$$

Aconselha-se ainda que sejam utilizadas restrições heurísticas adicionais, de modo a limitar os ganhos dos controladores ao final do projeto.

$$-K_u < K_p, K_i, K_d < K_u \quad (3.34)$$

### 3.3.1 Determinação das inequações

Observa-se que são pertencentes a função de transferencia de malha aberta os pontos:

$$(\ell - 1, 0)$$

$$(-\cos\Phi_\ell, -\text{sen}\Phi_\ell)$$

Seja  $(x, y)$  um par associado a um ponto no diagrama de nyquist, pode-se descrever a reta  $d_1$ :

$$y = ax + b \quad (3.35)$$

Aplicando-se os pontos conhecidos:

$$0 = (-1)a + b \quad (3.36)$$

$$-\text{sen}\Phi_\ell = (-\cos\Phi_\ell)a + b \quad (3.37)$$

Encontram-se os os parâmetros da reta  $a$  e  $b$ :

$$a = \frac{\text{sen}\Phi_\ell}{\cos\Phi_\ell + \ell - 1}$$

$$b = \frac{\text{sen}\Phi_\ell(1 - \ell)}{\cos\Phi_\ell + \ell - 1}$$

Dessa maneira, para que os pontos da função de transferência de malha aberta mantenham-se na região prevista, isto é, à direita da reta  $d_1$ , a equação de reta deve ser tomada como valor máximo para os pontos. Assim:

$$\rho^T \Im\{\omega_k\} \leq \frac{\text{sen}\Phi_\ell}{\text{cos}\Phi_\ell + \ell - 1} (\rho^T \Re\{\omega_k\} + 1 - \ell) \quad (3.38)$$

Vê-se ainda que o termo  $a$  é também conhecido como sendo  $\tan\alpha$ , por este ser o coeficiente angular da reta  $d_1$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\Phi_\ell}{\text{cos}\Phi_\ell + \ell - 1} \quad (3.39)$$

Nos levando a:

$$\rho^T \Im\{\omega_k\} \leq \frac{1}{\cot\alpha} (\rho^T \Re\{\omega_k\} + 1 - \ell) \quad (3.40)$$

E portanto:

$$\rho^T (\cot\alpha \Im\{\omega_k\} - \Re\{\omega_k\}) + \ell \leq 1, \omega_k > \omega_x \quad (3.41)$$

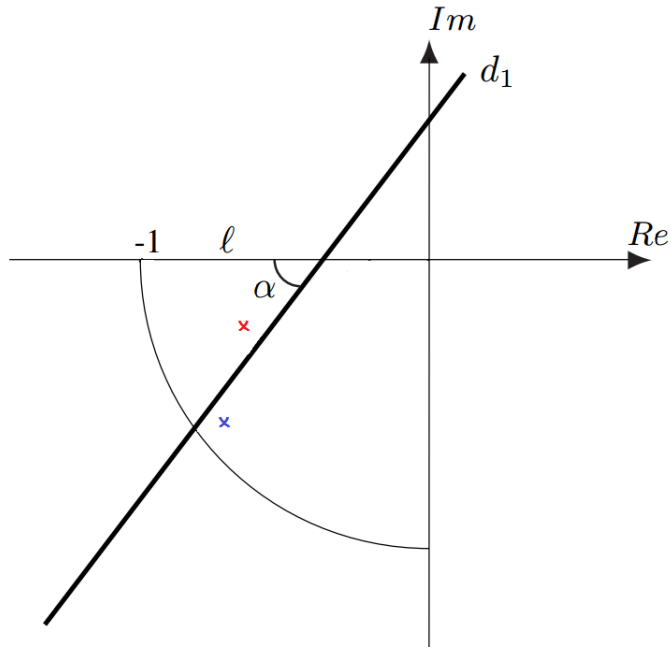


Figura 8 – Representação da restrição no plano complexo.

A inequação

$$\rho^T (\cos(\beta) \Im\{\omega_k\} + \text{sen}(\beta) \Re\{\omega_k\}) > -1, \omega_k > \omega_x$$

por sua vez é obtida a partir da característica particular desta, em ser tangente ao círculo unitário.

Para tal, define-se o ângulo complementar a  $\beta$ , dito  $\beta'$  e observa-se sua secante, de modo a determinar um ponto para a equação da reta  $d_2$

Seja a equação da reta

$$y = vx - w$$

E seja um dos pontos

$$(-csc\beta, 0),$$

bem como a inclinação de reta seja  $v = -tan\beta$

Obtemos:

$$y = -tan\beta x - w \quad (3.42)$$

$$0 = (-tan\beta)(-csc\beta) - w \quad (3.43)$$

Nos levando a  $w = sec\beta$  e portanto:

$$y = -tan\beta x - sec\beta \quad (3.44)$$

Uma vez que existe a intenção de manter o diagrama da função de transferência de malha aberta dentro da área determinada por  $d_2$ :

$$\rho^T \Im\{(\omega_k)\} > -tan\beta \rho^T \Re\{(\omega_k)\} - sec\beta \quad (3.45)$$

$$\rho^T \Im\{(\omega_k)\} \cos\beta > -sen\beta \rho^T \Re\{(\omega_k)\} - 1 \quad (3.46)$$

$$\rho^T (\cos(\beta) \Im\{(\omega_k)\} + sen(\beta) \Re\{(\omega_k)\}) > -1, \omega_k > \omega_x \quad (3.47)$$

O procedimento é análogo para a equação, entretanto para estas frequências intenciona-se manter o diagrama abaixo de  $d_2$

$$\rho^T (\cos(\beta) \Im\{(\omega_k)\} + sen(\beta) \Re\{(\omega_k)\}) \leq -1, \omega_k \leq \omega_x$$

### 3.3.2 Restrições para melhor desempenho

Outro objetivo no projeto de controladores é considerar certos limites para as margens de robustez e otimizar a performance do sistema por meio de minimização da integral do erro (IE). Para esta abordagem, as variáveis de projeto serão as margens de robustez  $\ell$  e  $\alpha$ .



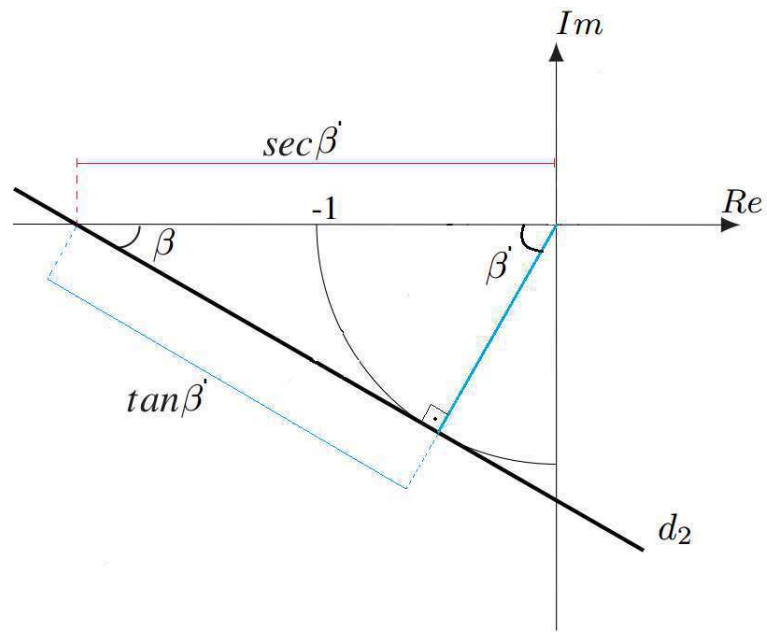


Figura 9 – Determinação de um ponto para parametrização da reta  $d_2$

Observa-se que para este caso:

$$0.5 \leq \ell \leq 0.8$$

$$\alpha \approx 90^\circ$$

Sabe-se que a minimização de IE implica na maximização de  $K_i$  e que a curva de Nyquist deve aparecer nas regiões I ou IV. Dessa forma, constrói-se o problema de programação linear:

minimizar  $IE$

submetida a

$$\rho^T (\cot(\alpha) \Im\{\omega_k\} - \Re\{\omega_k\}) + \ell \leq 1, \forall \omega_k$$

Se existem dois integradores para função de transferência de malha aberta, uma vez que a curva de Nyquist poderá aparecer na região III, modificam-se as restrições, de modo que o problema passa a ser:

minimizar  $IE$

submetida a

$$\rho^T (\cot(\alpha) \Im\{\omega_k\} - \Re\{\omega_k\}) + \ell \leq 1, \omega_k > \omega_x$$

$$\rho^T(\cos(\beta)\{\phi(\omega_k)\} + \text{sen}(\beta)\Re\{(\omega_k)\}) \leq -1, \omega_k \leq \omega_x$$

Neste caso,  $\omega_k$  não é uma aproximação mínima de  $\omega_x$ , mas sim um valor mínimo que esta poderá assumir. Uma boa escolha para  $\omega_x$  é a faixa de passagem da função de transferência em malha aberta.

Como forma de preservar um único modelo de otimização para ambos os casos (robustez e performace), adota-se um critério misto:

$$\text{maximizar } K_i + \lambda \ell$$

### 3.4 Controlador Ótimo Robusto com Escalonamento de Ganho

Enquanto uma larga classe de sistemas pode ser representada por um conjunto de valores para cada frequência de operação, em alguns casos é interessante que possamos representar-los por um conjunto de diferentes sistemas para cada ponto de operação. Especialmente dispositivos eletromecânicos apresentam uma tendência a ter seu comportamento dependente do posicionamento, ou condições de temperatura. Disto isto, espera-se que um controlador projetado por técnicas tradicionais não seja capaz de abarcar toda a faixa comportamental do sistema. Para tanto, alguns controladores foram idealizados, sendo denominados de "Escalonamento de ganho clássico" e "Variação linear de parâmetros".

No escalonamento de ganho clássico (RUGH; SHAMMA, 2000), primeiramente são escolhidos alguns pontos de operação e encontram-se modelos que satisfazem o comportamento do sistema naquele ponto. Em seguida são projetados controladores para cada ponto de operação escolhido e interpola-se entre eles, de modo a obter uma relação direta entre os parâmetros do controlador e a variável de interesse do ponto de operação (LEITH; LEITHEAD, 2000).

Para este caso define-se que :

$$K(s) = \rho^T(\theta)\phi(s) \quad (3.48)$$

Onde  $\rho^T(\theta) = [\rho_1(\theta), \rho_2(\theta), \dots, \rho_n(\theta)]$  e  $\phi^T(s) = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$  e  $n$  é o número de parâmetros que compõe o controlador, com  $\theta$  sendo a variável que indexa os parâmetros do controlador. No caso de um controlador PID, tem-se:

$$\rho^T = [K_p(\theta), K_i(\theta), K_d(\theta)] \quad (3.49)$$

$$\phi^T(s) = \left[ 1, \frac{1}{s}, \frac{s}{1 + Tf_s} \right] \quad (3.50)$$

É possível realizar a interpolação tanto quando se deseje detalhar o comportamento do controlador quanto à variável  $\theta$ . Sendo comum o uso de até polinômios de segunda ordem.

$$K_p(\theta) = K_{p,2}\theta^2 + K_{p,1}\theta + K_{p,0} \quad (3.51)$$

$$K_i(\theta) = K_{i,2}\theta^2 + K_{i,1}\theta + K_{i,0} \quad (3.52)$$

$$K_d(\theta) = K_{d,2}\theta^2 + K_{d,1}\theta + K_{d,0} \quad (3.53)$$

## 4 Simulações

### 4.1 O modelo da planta

O sistema escolhido para a aplicação da estratégia de controle aqui proposta, fora um servo-motor AX-12A ([www.robotis.com](http://www.robotis.com)). Um conjunto de servo-mecanismos instalados em uma plataforma robótica, tal qual como na figura (10). A junta escolhida foi a denominada ombro, devido ao comportamento mais problemático, apresentando maiores oscilações durante o desenvolvimento de uma trajetória no espaço e também um comportamento mutável a depender do ponto de operação escolhido.

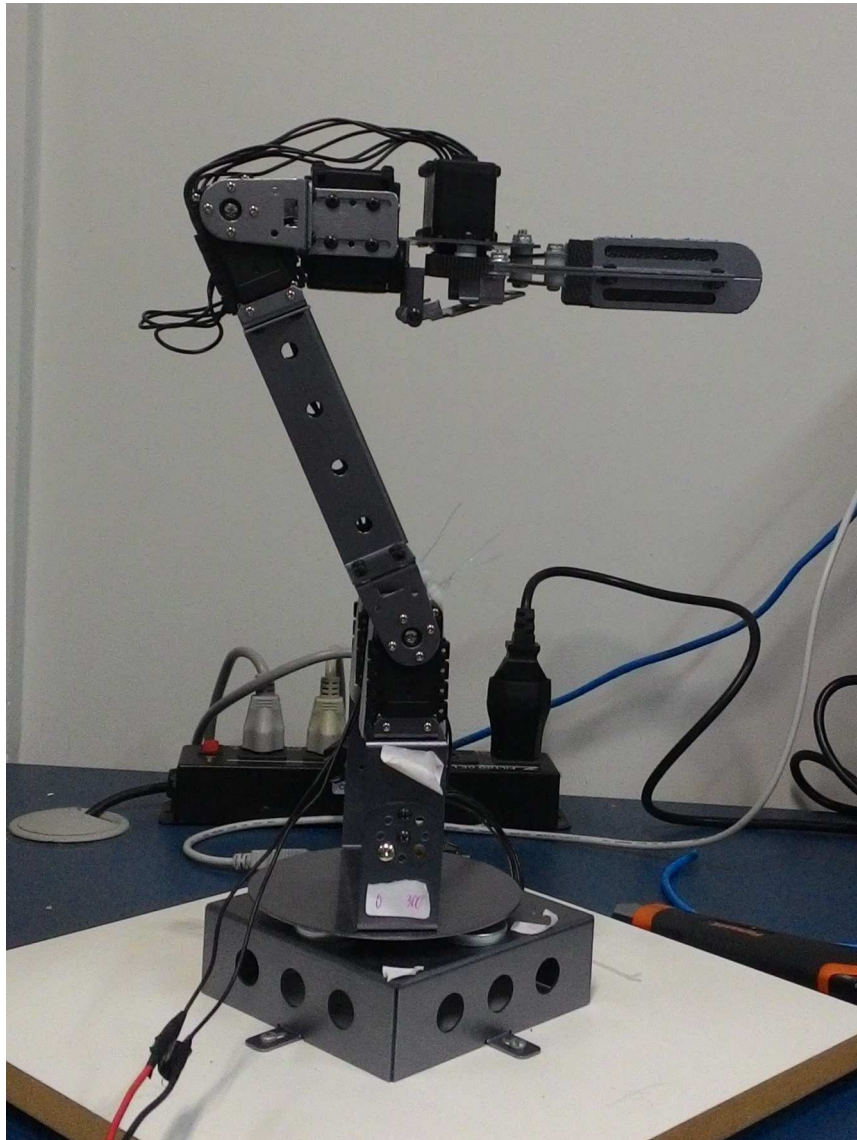


Figura 10 – Plataforma robótica construída com servos AX-12A

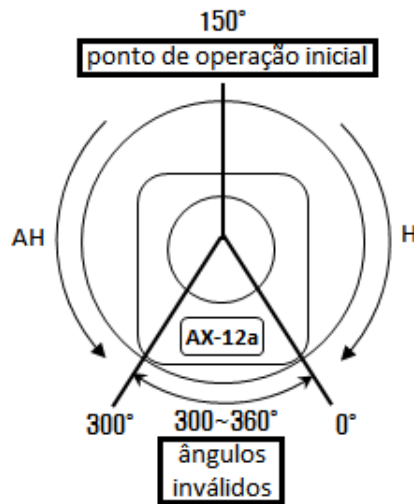


Figura 11 – Indicação do ponto primeiro ponto de operação para o servo AX-12A

Após ensaios desenvolvidos na plataforma robótica em torno do ponto de operação  $150^\circ$ , (ACIOLI; LIMA; BARROS, 2016), executados com indicado na figura (11), observou-se que a função de transferência do sistema para este ponto era tal que:

$$H_{150^\circ}(s) = \frac{31.95}{s^2 + 7.072s + 31.93} \quad (4.1)$$

Para estratégia envolvendo escalonamento de ganho, analisou-se outros dois pontos de operação  $120^\circ$  e  $90^\circ$ , bem como seus simétricos,  $180^\circ$  e  $210^\circ$  (LIMA; BARROS, 2016), nos levando às funções de transferência:

$$H_{120^\circ}(s) = H_{180^\circ}(s) = \frac{47.35}{s^2 + 8.99s + 46.84} \quad (4.2)$$

$$H_{90^\circ}(s) = H_{210^\circ}(s) = \frac{67.67}{s^2 + 11.089s + 66.84} \quad (4.3)$$

Como mencionado anteriormente, este estudo objetiva realizar o ajuste do diagrama de Nyquist associado ao sistema para atingir uma situação confortável quanto à estabilidade mesmo quando submetido a ganhos advindos do controlador. Para realizar a construção do digrama de Nyquist, avalia-se a função de transferência (4.1) para diversas frequências, de modo obter  $|H(j\omega)|$  e  $\angle H(j\omega)$ . Optou-se por realizar esta avaliação para valores de  $\omega$  entre  $\omega_{min} = 1$  rad/s e  $\omega_{max} = 500$  rad/s, com passos de  $\Delta\omega = 0.01$  rad/s. Observou-se que existia uma margem considerável, quanto a módulo e a fase. Pode-se ainda verificar que a função possui pólos complexos, localizados em  $-6.9300 + 11.5358i$  e  $-6.9300 - 11.5358i$ .

Observa-se na figura (12) que, apesar de tratarem do mesmo sistema, as funções de transferência (4.1), (4.2), (4.3) tem margens de robustez distintas, o que implicará num

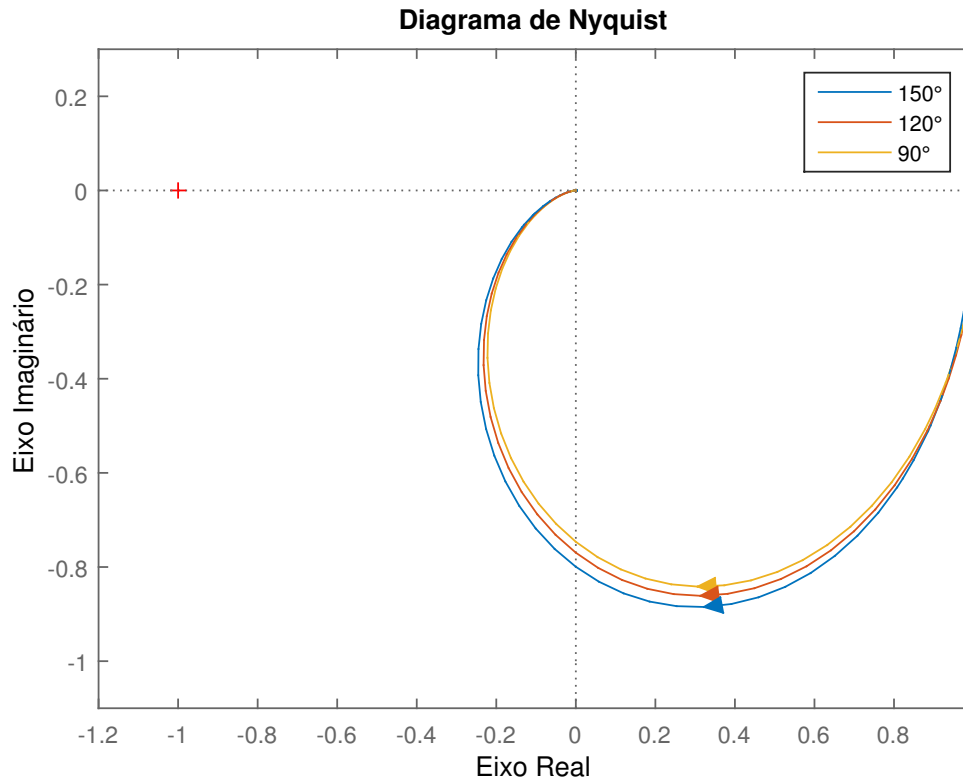


Figura 12 – Diagrama de Nyquist para os 3 pontos de operação

controlador particular para cada um dos pontos de operação. Num primeiro momento, adotou-se a função de transferência observada em (4.1), e em seguida, estendeu-se a análise para projeto de controlador com escalonamento de ganho.

## 4.2 Projeto do controlador Robusto

Uma vez definidas as abordagens do problema, seja objetivando um controlador com alta rejeição a distúrbios ou uma rápida resposta a variações, a seguir é possível visualizar as diferentes reações da curva de Nyquist do sistema em malha aberta para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , e para uma margem mínima de  $\ell_{min} = 0.5\ell_{min} = 0.707$ . É necessário dizer que o sistema escolhido fora uma escolha fortuita, uma vez que mesmo para ganhos de controlador elevados, o mesmo ainda permaneceu estável, mantendo uma boa margem em relação ao ponto de estabilidade marginal.

### 4.2.1 Caso 1:

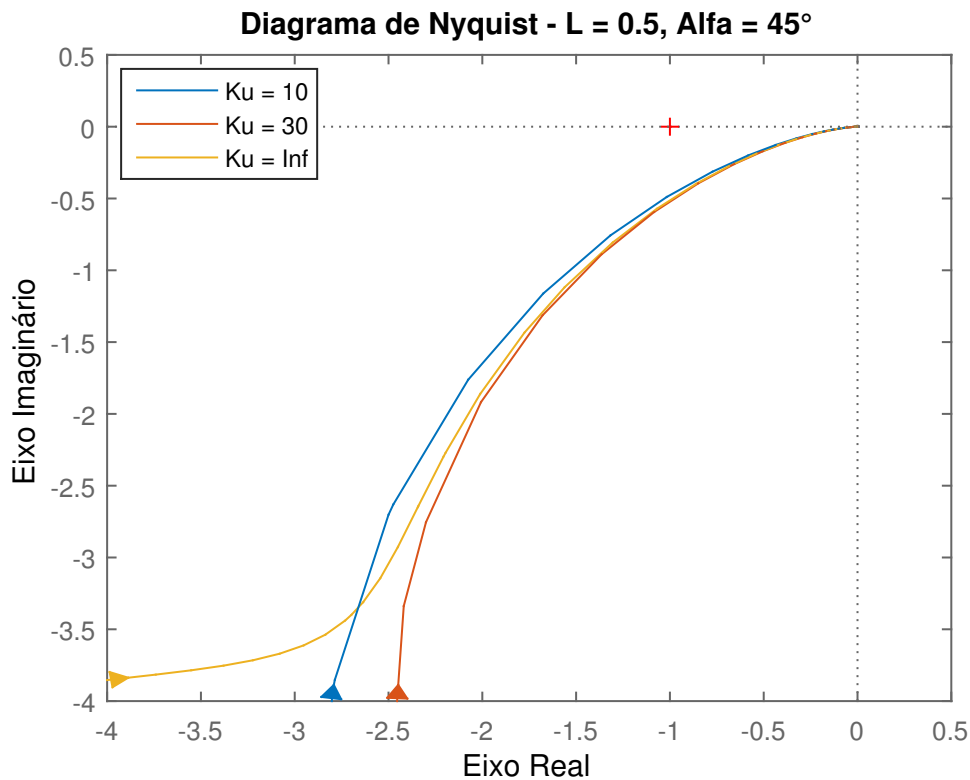
Para o caso 1, foram considerados, primeiramente, que se desejava uma margem mínima de  $\ell = 0.5$ . Assumiu-se que o ângulo da reta  $d_1$  seria  $\alpha = 45^\circ$ . Após aplicar o

Tabela 1 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 45^\circ$ 

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	2.6509	10	4.4617	$\infty$	24.1727
30	0.7169	30	4.0385	$\infty$	25.7808
$\infty$	0	114.9547	2.5290	$\infty$	25.4798

problema de programação linear no software MATLAB®, fora possível obter 3 controladores. Cada um destes controladores tinha respectivos limitantes superiores, para evitar que o ganho do parâmetro  $K_i$  crescesse indefinidamente e que o ganho do parâmetro  $K_p$  atingisse o valor zero (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2007).

Sendo assim, podemos observar na figura (13), o comportamento do sistema quando submetido aos controladores obtidos.

Figura 13 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\ell = 0.5$ 

Percebemos na tabela (1), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

Para um  $\alpha = 45^\circ$ , obtém-se a partir da equação de cálculo do  $\Phi_\ell$  que  $\Phi_\ell(\alpha = 45^\circ, \ell = 0.5) = 24.2952^\circ$ . Observa-se que ao limitar o ganho superiormente, com  $K_u = 10$ , o método falha em obedecer a margem de fase proposta pela inserção da reta  $d_1$ . No entanto, para valores de  $K_u = \infty$  e  $K_u = 30$ , existe uma melhor aceitação do método,

uma vez que o valor das margens de fase obtidos são maiores que o limitante inferior sugerido pelo método. Para a margem de ganho, temos uma aceitação para todos os valores de  $K_u$

#### 4.2.2 Caso 2:

Para o caso 2, permaneceu-se com a consideração de  $\ell = 0.5$ , mas assumiu-se que o ângulo da reta  $d_1$  seria  $\alpha = 60^\circ$ . Após aplicar o problema de programação linear no software MATLAB®, fora possível obter 3 controladores. Cada um destes controladores tinha respectivos limitantes superiores, para evitar que o ganho do parâmetro  $K_i$  crescesse indefinidamente e que o ganho do parâmetro  $K_p$  atingisse o valor zero (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2007).

Sendo assim, vê-se na figura (14) o comportamento do sistema quando submetido aos controladores obtidos.

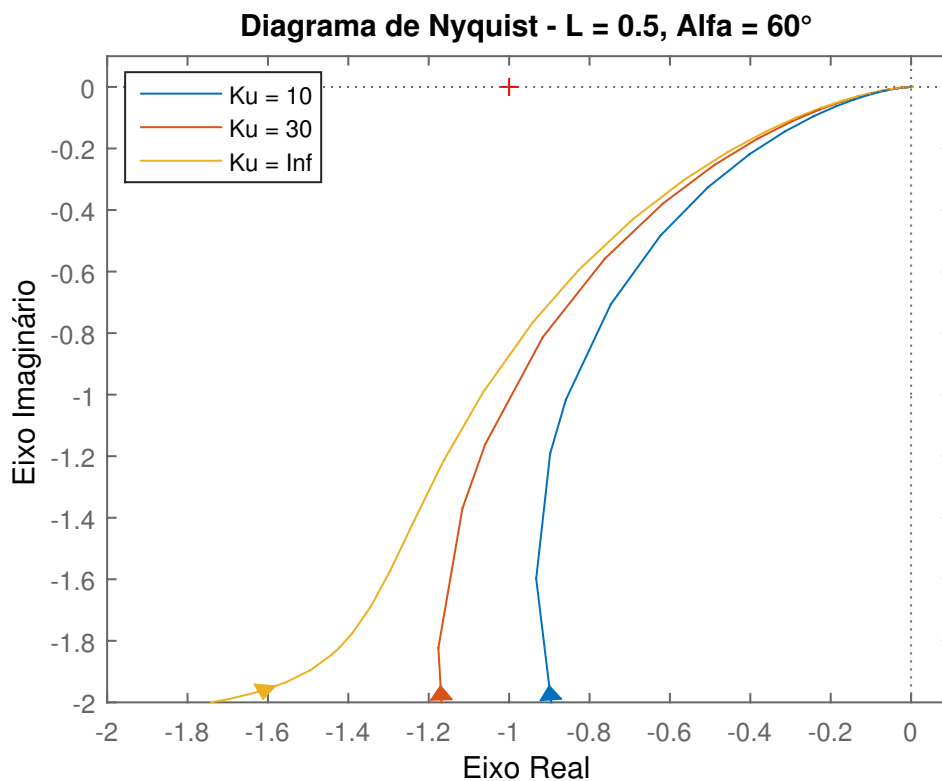


Figura 14 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\ell = 0.5$

Podemos notar na tabela (2), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

Neste caso, observamos que ao limitar o ganho superiormente, o método consegue lidar com as restrições adicionais e consegue obedecer as margens de fase e ganho propostas



Tabela 2 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 60^\circ$ 

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	0.7936	10	1.4029	$\infty$	42.7711
30	0.1844	30	1.7988	$\infty$	37.3401
$\infty$	0	60.5121	1.3418	$\infty$	35.3903

$\Phi_\ell$  e  $\ell$  pela inserção da reta  $d_1$ . Em todos os casos, a margem de ganho  $G_m$  fora maior que  $\frac{1}{1-\ell} = 2$  e a margem de fase  $P_m$  fora maior que  $\Phi_\ell(\alpha = 60^\circ, \ell = 0.5) = 34.3411^\circ$ .

### 4.2.3 Caso 3:

Para o caso 3, repetiram-se os condicionamentos quanto as restrições dos ganhos mas desta vez, considerou-se um  $\alpha = 90^\circ$ . Utilizando as restrições sugeridas na literatura, (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2007) que consideram também a existência de uma reta com inclinação  $\beta = 10^\circ$ , que atua como limitante da frequência de corte desejada.

Mais uma vez, a ação integral não fora totalmente priorizada devido as restrições adicionais de ganho.

Assim, podemos visualizar na figura (15) o comportamento do sistema quando submetido aos controladores obtidos.

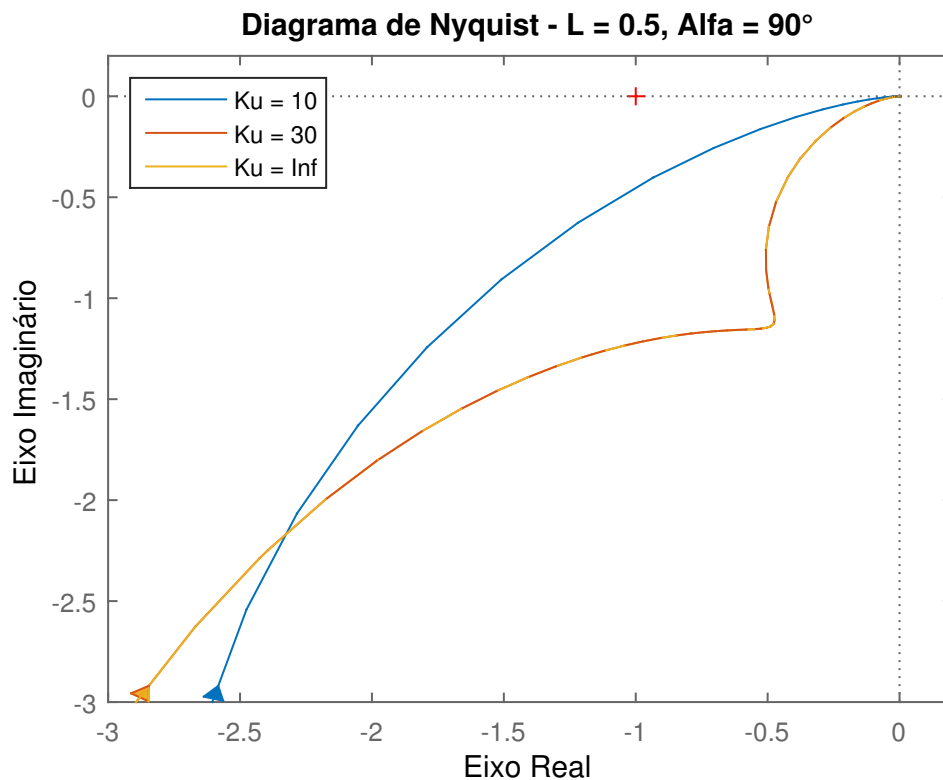
Figura 15 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\ell = 0.5$

Tabela 3 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 90^\circ$ 

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	9.9836	10	0.1905	$\infty$	23.1317
30	0	22.3878	0.6319	$\infty$	59.6217
$\infty$	0	22.3878	0.6319	$\infty$	59.6217

Podemos observar na tabela (3), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

Observa-se que para o ângulo de reta  $d_1$   $\alpha = 90^\circ$ , o método falha em obedecer a margem de fase proposta pela inserção da reta  $d_1$ ,  $\Phi_\ell(\alpha = 90^\circ, \ell = 0.5) = 60.0000^\circ$ . Entretanto, existe uma boa aproximação da margem de fase mínima proposta para valores de  $K_u$  elevados. Verifica-se que existe um erro percentual de apenas 0.63%, na equação (4.4), para os valores de  $K_u = 30$  e  $K_u = \infty$ .

$$e\% = \frac{60.0000 - 59.6217}{60.0000} 100\% = 0.63\% \quad (4.4)$$

Do caso 4 ao caso 6, ocorrerá o projeto de controladores para uma margem de ganho linearizada de  $\ell = 0.707$ , e verificou-se para os valores de  $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$  e  $90^\circ$ .

#### 4.2.4 Caso 4:

Para o caso 4, repetiram-se os condicionamentos quanto as restrições dos ganhos mas desta vez, considerou-se um  $\alpha = 45^\circ$  e um  $\ell = 0.707$ . Utilizando as restrições sugeridas, (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2007) que consideram também a existência de uma reta com inclinação  $\beta = 10^\circ$ , que atua como limitante da frequência de corte desejada. Mais uma vez, a ação integral não fora totalmente priorizada devido as restrições adicionais de ganho.

Dessa forma, podemos ver na figura (16) o comportamento do sistema quando submetido aos controladores obtidos.

Percebemos na tabela (4), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

Tabela 4 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 45^\circ$ 

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	0.2509	10	2.7736	$\infty$	32.2216
30	0.14	30	2.4856	$\infty$	32.5954
$\infty$	0	66.7924	2.2634	$\infty$	30.6784

Registra-se assim que o método falha em obedecer a margem de fase proposta pela inserção da reta  $d_1$ , um vez que  $\Phi_\ell(\alpha = 45^\circ, \ell = 0.707) = 33.0427^\circ$ . Mais uma vez,

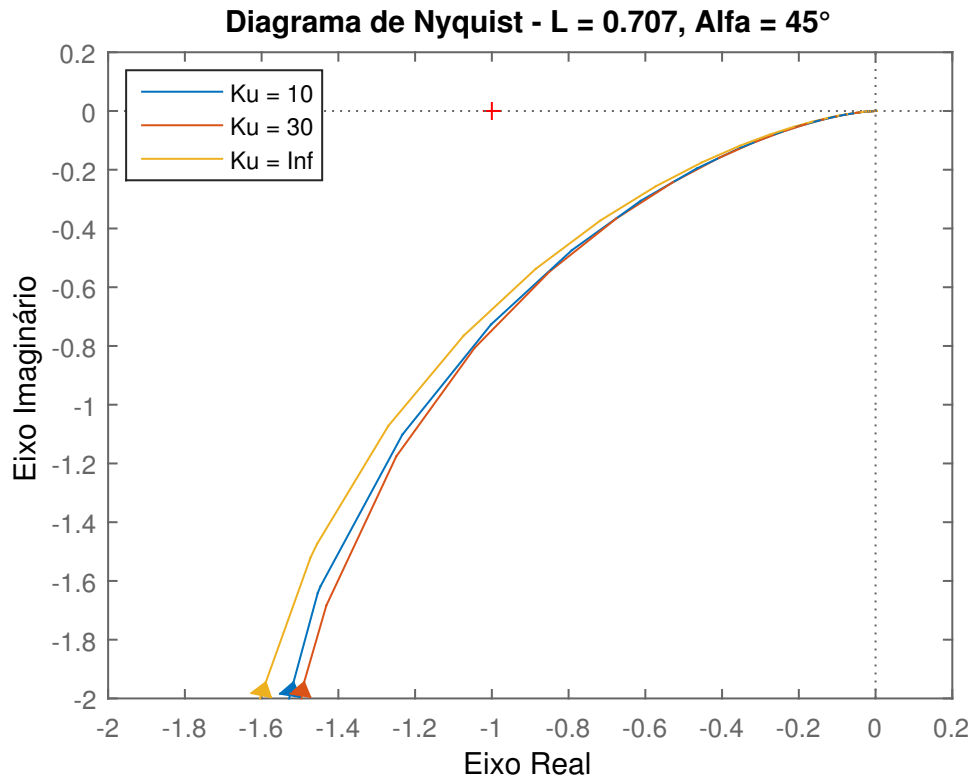


Figura 16 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\ell = 0.707$

o erro percentual verificado entre a margem proposta fora pequeno, de 1.25% como pode ser visto em (4.5).

$$e\% = \frac{33.0427 - 32.5954}{33.0427} 100\% = 1.35\% \quad (4.5)$$

#### 4.2.5 Caso 5:

Para o caso 5, repetiram-se os condicionamentos quanto as restrições dos ganhos mas desta vez, modificando-se o valor do ângulo da reta  $d_1$  para  $\alpha = 60^\circ$  e admitindo um  $\ell = 0.707$ . Utilizando as restrições sugeridas, (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2007) que consideram também a existência de uma reta com inclinação  $\beta = 10^\circ$ , que atua como limitante da frequência de corte desejada.

Mais uma vez, a ação integral não fora totalmente priorizada devido as restrições adicionais de ganho.

Sendo assim, podemos observar na figura (17) o comportamento do sistema quando submetido aos controladores obtidos.

Podemos observar na tabela (5), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

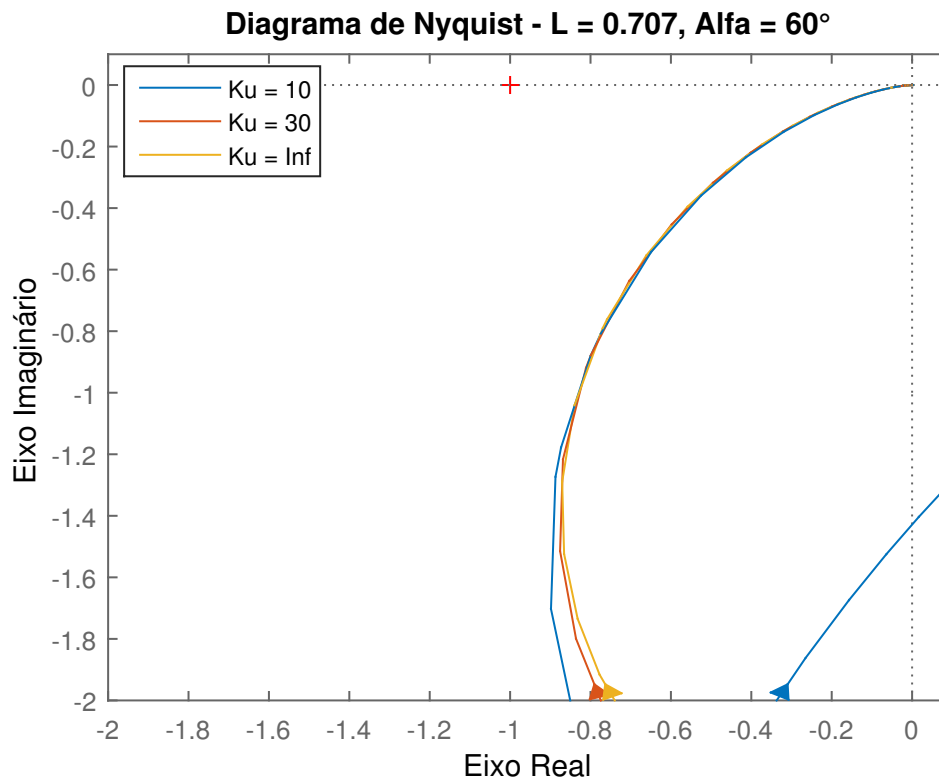


Figura 17 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\ell = 0.707$

Tabela 5 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 60^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	0	9.3983	1.5417	$\infty$	43.5449
30	0	29.7730	1.2872	$\infty$	43.3637
$\infty$	0	35.3037	1.1806	$\infty$	43.3183

Nota-se que ao limitar o ganho superiormente, o método falha em obedecer a margem de fase proposta novamente pela inserção da reta  $d_1$ . Entretanto, assim como em casos anteriores, este resultado é aceitável, dentro de uma tolerância de até 5%. Para este caso  $\Phi_\ell(\alpha = 60^\circ, \ell = 0.707) = 45.3007^\circ$ . Abaixo, para o melhor caso, temos o erro percentual, na equação (4.6)

$$e\% = \frac{45.3007 - 43.5449}{45.3007} 100\% = 3.88\% \quad (4.6)$$

#### 4.2.6 Caso 6:

Para este caso definiu-se  $\alpha = 90^\circ$  e admitiu-se um  $\ell = 0.707$ . Utilizando as restrições sugeridas, (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2007) que consideram também a existência de uma reta com inclinação  $\beta = 10^\circ$ , que atua como limitante da frequência de

corde desejada.

Sendo assim, podemos acompanhar na figura (18) o comportamento do sistema quando submetido aos controladores obtidos.

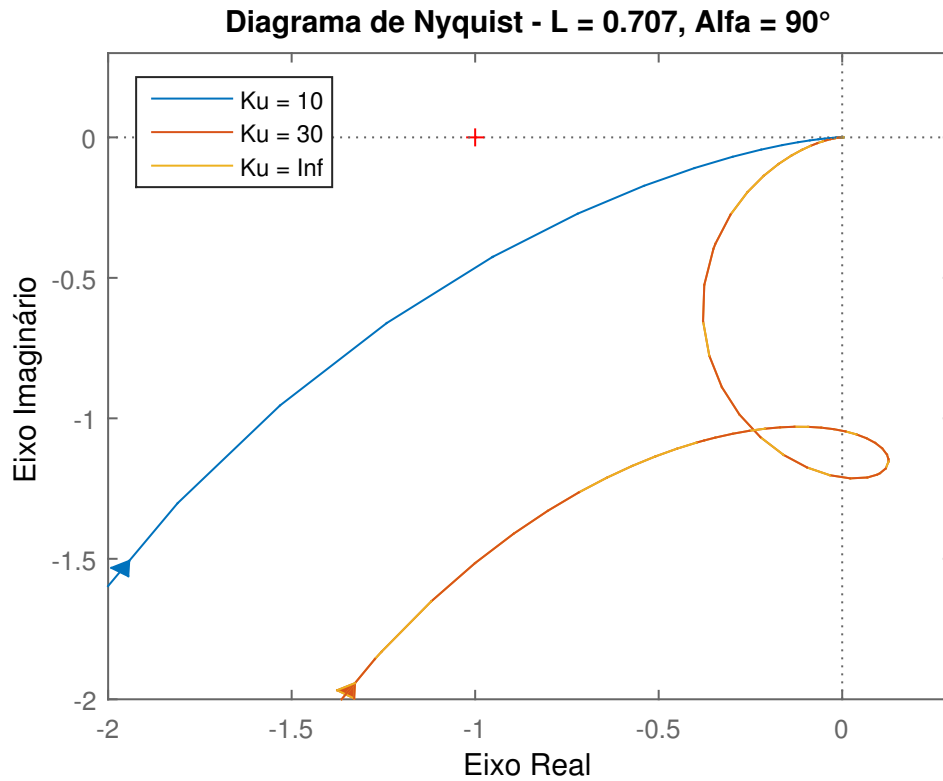


Figura 18 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\ell = 0.707$

Podemos observar na tabela (6), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

Tabela 6 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 90^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	9.9836	10	0.2306	$\infty$	23.5599
30	0	12.9327	0.5564	$\infty$	72.7019
$\infty$	0	12.9327	0.5564	$\infty$	72.7019

Nota-se que ao limitar o ganho superiormente, o método falha em obedecer a margem de fase proposta novamente pela inserção da reta  $d_1$ . Entretanto, assim como em casos anteriores, este resultado é aceitável, para valores de  $K_u$  de 30 e de  $\infty$ , dentro de uma tolerância de até 5%. Para este caso  $\Phi_\ell(\alpha = 90^\circ, \ell = 0.707) = 72.9624^\circ$ . Abaixo, para o melhor caso, temos o erro percentual, na equação (4.7)

$$e\% = \frac{72.9624 - 72.7019}{72.9624} 100\% = 0.36\% \quad (4.7)$$

## 4.2.7 Resposta no domínio do tempo

### 4.2.7.1 Respostas ao degrau e ao impulso para $\ell = 0.5$ e $\alpha = 60^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$

Uma vez obtidos os controladores, e realizadas as devidas análises no domínio da frequência, convém também uma análise no domínio do tempo. Utilizando-se dos ganhos calculados de  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  para um  $K_u = \infty$ , construiu-se os gráficos de resposta ao degrau e resposta ao impulso, para os casos com  $\ell = 0.5$ , verificados para  $\alpha = 60^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$ .

Na figura(19), podemos observar os controladores obtidos para os casos  $\ell = 0.5$  e  $\alpha = 60^\circ$ , seguido de  $\alpha = 90^\circ$ :

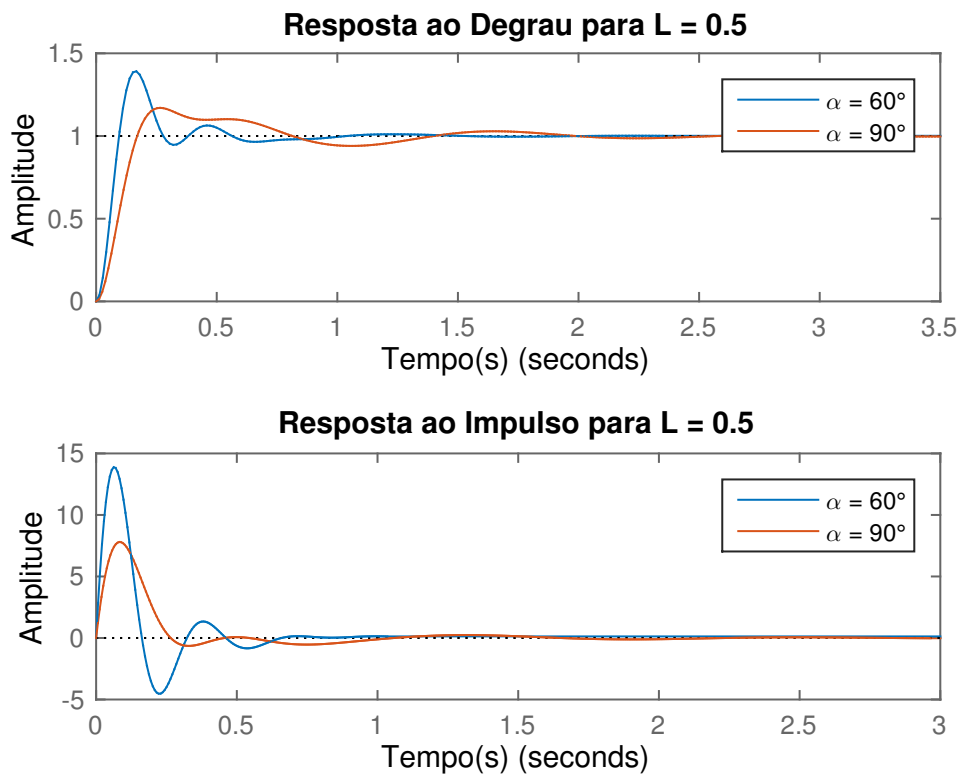


Figura 19 – Resposta ao degrau e ao impulso para  $\alpha = 60^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$

Assim como para as análises na frequência, verificamos as condições das margens de fase e de ganho, na análise no domínio do tempo convém a verificação do tempo de acomodação ( $t_s$ ), tempo de subida ( $t_r$ ), tempo de pico ( $t_p$ ) e valor de sobressinal ( $M_p$ ), tais como na tabela (7):

Da mesma forma, para a resposta ao impulso, podemos realizar uma análise de parâmetros pertinentes, para verificação quanto a reação do sistema a um distúrbio impulsivo, como pode ser visto na tabela (8).

Tabela 7 – Parâmetros para análise no tempo (resposta ao degrau)

$\alpha$	$t_r$	$M_p$	$M_p\%$ (%)	$t_p$	$t_s(s)$
$60^\circ$	0.0649	1.39	39.1	0.167	1.81
$90^\circ$	0.115	1.17	17	0.266	0.821

Tabela 8 – Parâmetros para análise no tempo (resposta ao impulso)

$\alpha$	$M_p$	$t_p$	$t_s(s)$
$60^\circ$	13.9	0.0625	0.712
$90^\circ$	7.8	0.0822	0.537

Podemos verificar que apesar de o controlador calculado para  $\alpha = 60^\circ$  ser mais rápido no ponto de vista de atingir o sinal de referência, e de possuir menor tempo de acomodação, é com o controlador calculado para  $\alpha = 90^\circ$  que observamos um rejeição a distúrbio mais acentuada, uma vez que o sobressinal é menor, e a acomodação do sinal de volta ao 0 também é mais rápida, confirmando a proposta de um controlador robusto.

#### 4.2.7.2 Respostas ao degrau e ao impulso para $\ell = 0.707$ e $\alpha = 60^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$

De modo análogo, iremos construir os gráficos de resposta ao degrau e resposta ao impulso, para os casos com  $\ell = 0.707$ , verificados para  $\alpha = 60^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$ . Na figura(20), podemos observar os controladores obtidos para os casos  $\ell = 0.707$  e  $\alpha = 60^\circ$ , seguido de  $\alpha = 90^\circ$ .

Analisando o tempo de acomodação ( $t_s$ ), tempo de subida ( $t_r$ ), tempo de pico ( $t_p$ ) e valor de sobressinal ( $M_p$ ), obtemos a tabela (9):

Tabela 9 – Parâmetros para análise no tempo (resposta ao degrau)

$\alpha$	$t_r$	$M_p$	$M_p\%$ (%)	$t_p$	$t_s(s)$
$60^\circ$	0.0745	1.24	23.6	0.165	1.28
$90^\circ$	0.154	1.12	12.1	0.758	2.47

Da mesma forma, para a resposta ao impulso, podemos realizar uma análise de parâmetros pertinentes, para verificação quanto a reação do sistema a um distúrbio impulsivo, como pode ser visto na tabela (10).

Tabela 10 – Parâmetros para análise no tempo (resposta ao impulso)

$\alpha$	$M_p$	$t_p$	$t_s(s)$
$60^\circ$	11.9	0.063	0.321
$90^\circ$	6.56	0.0794	0.276

Podemos verificar que apesar de o controlador calculado para  $\alpha = 60^\circ$  ser mais rápido no ponto de vista de atingir o sinal de referência, e de possuir menor tempo de acomodação, é com o controlador calculado para  $\alpha = 90^\circ$  que observamos um rejeição a

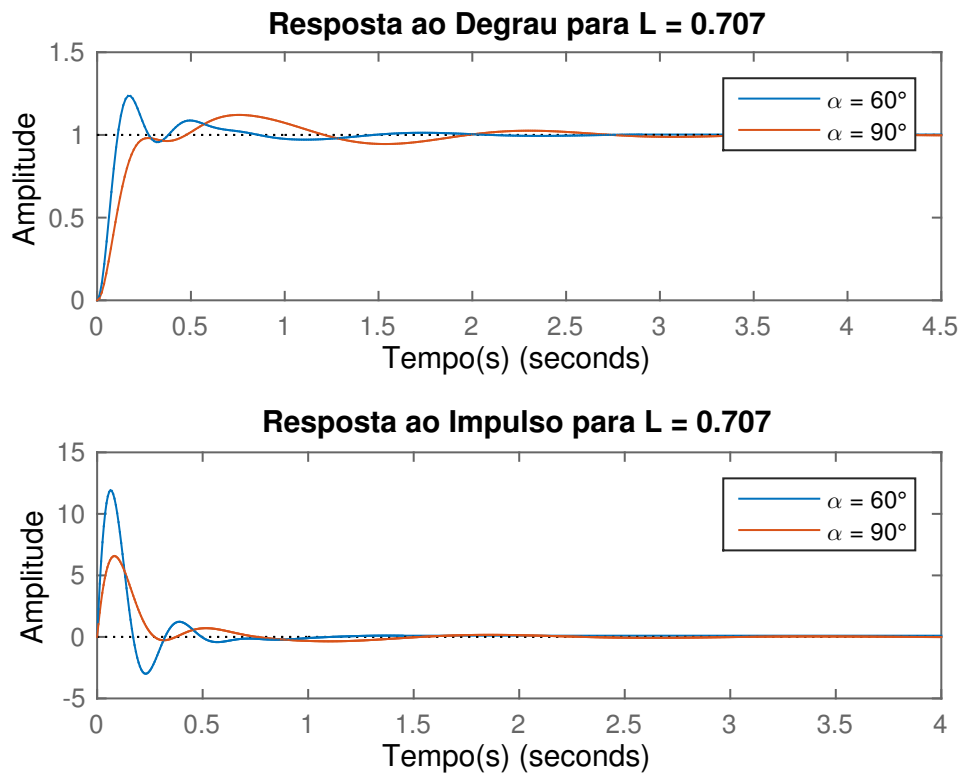


Figura 20 – Resposta ao degrau e ao impulso para  $\alpha = 60^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$

distúrbio mais acentuada, uma vez que o sobressinal é menor, e a acomodação do sinal de volta ao 0 também é mais rápida, confirmando a proposta de um controlador robusto.

### 4.3 Projeto do controlador ótimo com escalonamento de ganho

Para o projeto do controlador com escalonamento de ganho, empregou-se das funções de transferência (4.1), (4.2), (4.3), de modo a obter ganhos específicos para o controlador associados a cada ponto de operação. Optou-se, neste caso, por realizar a análise apenas para  $Ku = 10$  e  $Ku = \infty$ , bem como analisar apenas  $\alpha = 45^\circ$  e  $\alpha = 60^\circ$  e para  $\ell = 0.5$  e  $\ell = 0.707$ .

#### 4.3.1 Caso 1:

Neste caso considerou-se  $\ell = 0.5$  e  $\alpha = 45^\circ$ , nos levando a obtenção de controladores, tanto para a função de transferência (4.2) como para (4.3).



#### 4.3.1.1 Ponto de operação $120^\circ$

Para este ponto de operação, obtivemos um controlador tal qual os parâmetros da tabela (11), que nos levou ao diagrama de Nyquist da figura (21).

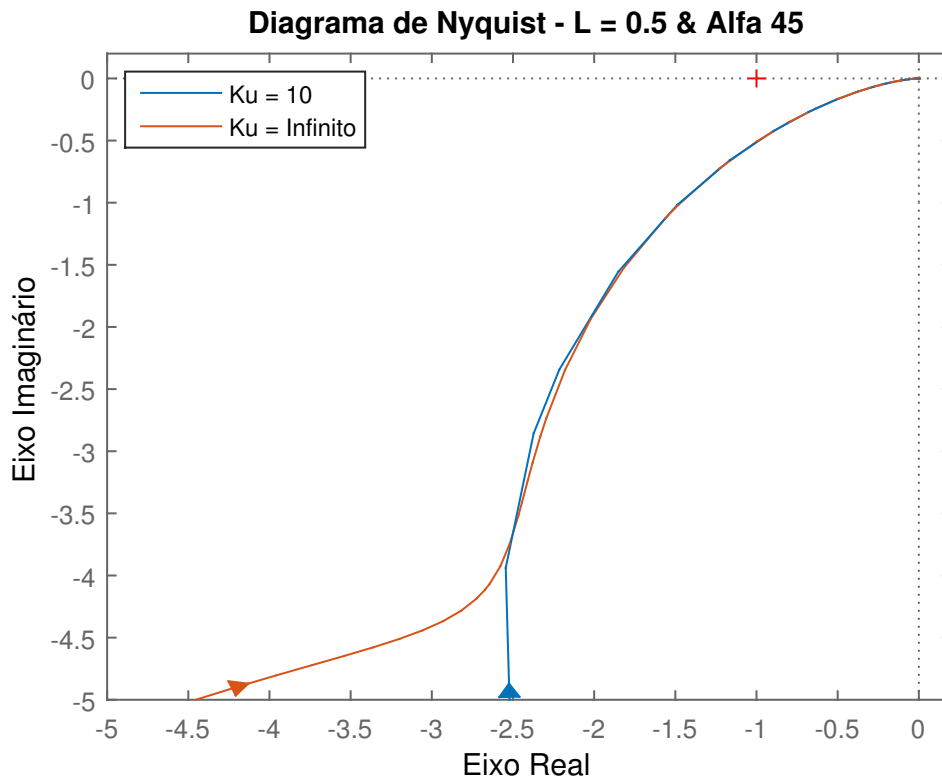


Figura 21 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\ell = 0.5$  e  $\theta = 120^\circ$

Podemos olhar na tabela (11), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

Tabela 11 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 45^\circ$  e  $\theta = 120^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	1.0053	10	3.6183	$\infty$	25.4100
$\infty$	0	109.5150	2.0968	$\infty$	25.3970

#### 4.3.1.2 Ponto de operação $90^\circ$

Para este ponto de operação, obtivemos um controlador tal qual os parâmetros da tabela (12), que nos levou ao diagrama de Nyquist da figura (22).

É possível observar na tabela (12), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

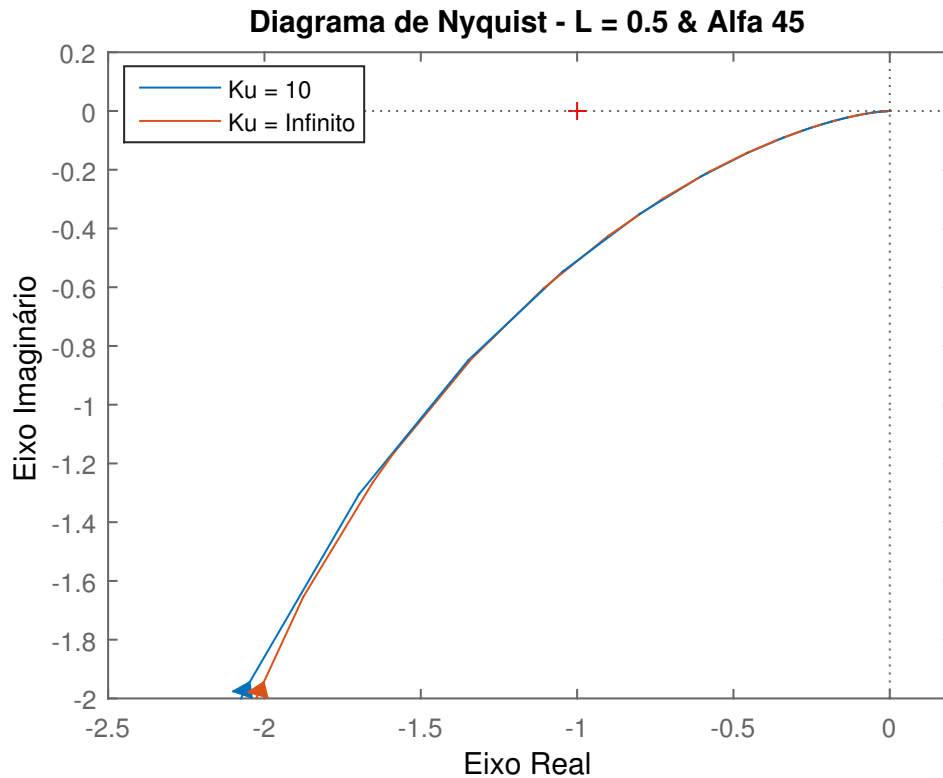


Figura 22 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\ell = 0.5$  e  $\theta = 90^\circ$

Tabela 12 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 45^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	1.0514	10	3.1189	$\infty$	25.3439
$\infty$	0	106.8964	1.8071	$\infty$	25.3324

### 4.3.2 Caso 2:

Neste caso considerou-se  $\ell = 0.5$  e  $\alpha = 60^\circ$ , nos levando a obtenção de controladores, tanto para a função de transferência (4.2) como para (4.3).

#### 4.3.2.1 Ponto de operação 120°

Para este ponto de operação, obtivemos um controlador tal qual os parâmetros da tabela (13), que nos levou ao diagrama de Nyquist da figura (23).

Podemos observar na tabela (13), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

#### 4.3.2.2 Ponto de operação 90°

Para este ponto de operação, conseguimos um controlador tal qual os parâmetros da tabela (14), que nos levou ao diagrama de Nyquist da figura (24).

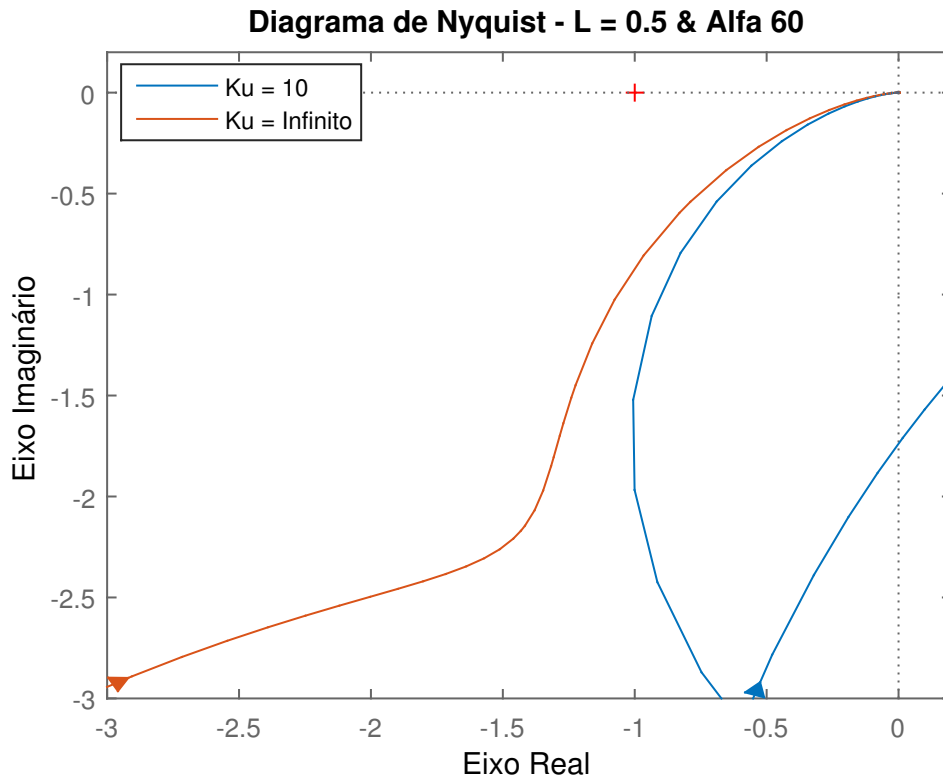


Figura 23 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\ell = 0.5$  e  $\theta = 120^\circ$

Tabela 13 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 60^\circ$  e  $\theta = 120^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	0.0570	10	1.4587	$\infty$	40.7958
$\infty$	0	58.5462	1.1138	$\infty$	35.2370

Podemos observar na tabela (14), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

Tabela 14 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 60^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	0	9.4406	1.7095	$\infty$	35.3229
$\infty$	0	57.8285	0.9586	$\infty$	35.1222

### 4.3.3 Caso 3:

Neste caso considerou-se  $\ell = 0.7$  e  $\alpha = 45^\circ$ , nos levando a obtenção de controladores, tanto para a função de transferência (4.2) como para (4.3).

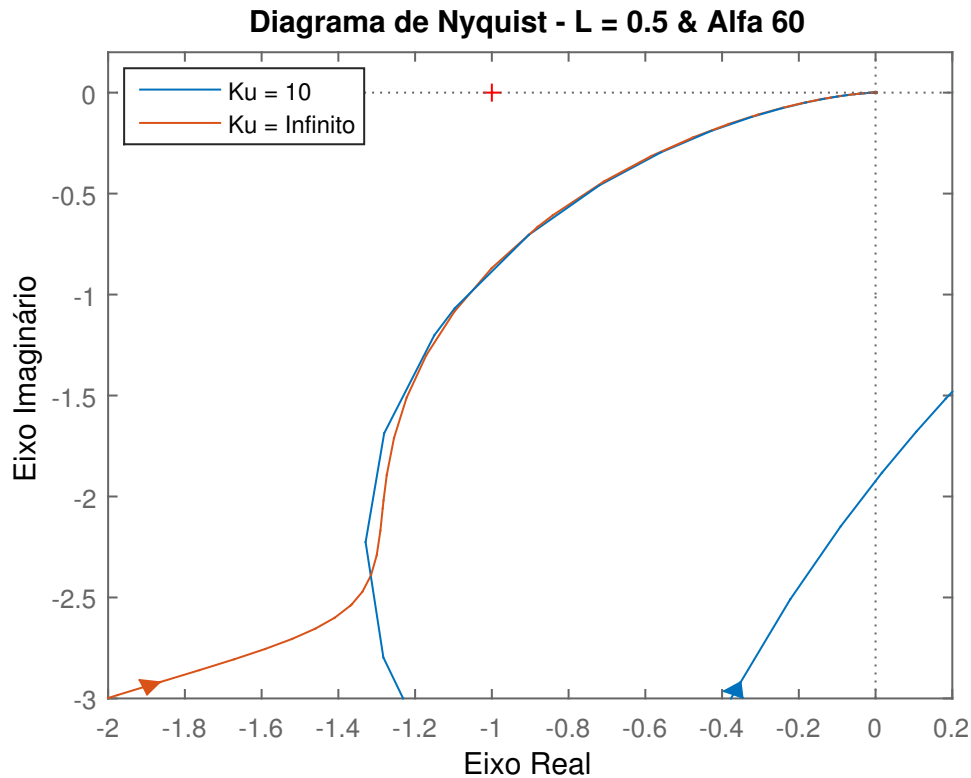


Figura 24 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\ell = 0.5$  e  $\theta = 90^\circ$

#### 4.3.3.1 Ponto de operação $120^\circ$

Para este ponto de operação, adquirimos um controlador tal qual os parâmetros da tabela (15), que nos levou ao diagrama de Nyquist da figura (25).

Podemos observar na tabela (15), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

Tabela 15 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 45^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	0	9.2205	2.6072	$\infty$	30.7855
$\infty$	0	64.1384	1.8843	$\infty$	43.2459

#### 4.3.3.2 Ponto de operação $90^\circ$

Para este ponto de operação, obtivemos um controlador tal qual os parâmetros da tabela (16), que nos levou ao diagrama de Nyquist da figura (26).

Podemos observar na tabela (16), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

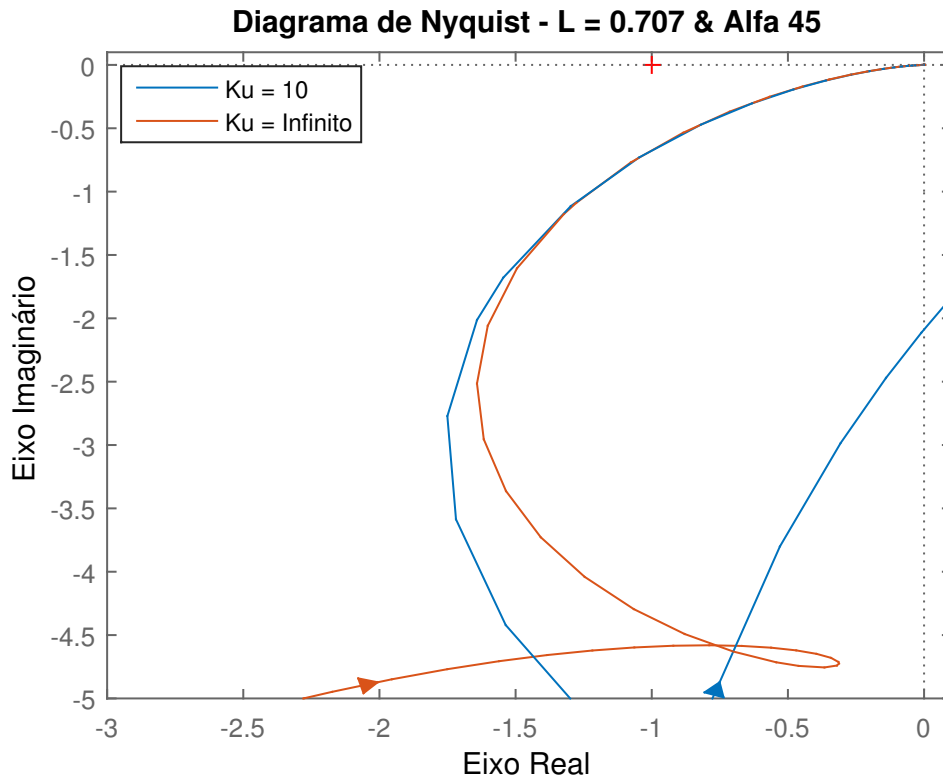


Figura 25 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\ell = 0.707$  e  $\theta = 120^\circ$

Tabela 16 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 45^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	0	0.0231	2.0731	$\infty$	32.7257
$\infty$	0	62.6038	1.6297	$\infty$	30.5833

#### 4.3.4 Caso 4:

Neste caso considerou-se  $\ell = 0.707$  e  $\alpha = 60^\circ$ , nos levando a obtenção de controladores, tanto para a função de transferência (4.2) como para (4.3).

##### 4.3.4.1 Ponto de operação $120^\circ$

Para este ponto de operação, obtivemos um controlador tal qual os parâmetros da tabela (17), que nos levou ao diagrama de Nyquist da figura (27).

Podemos observar na tabela (17), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

##### 4.3.4.2 Ponto de operação $90^\circ$

Para este ponto de operação, obtivemos um controlador tal qual os parâmetros da tabela (18), que nos levou ao diagrama de Nyquist da figura (28).

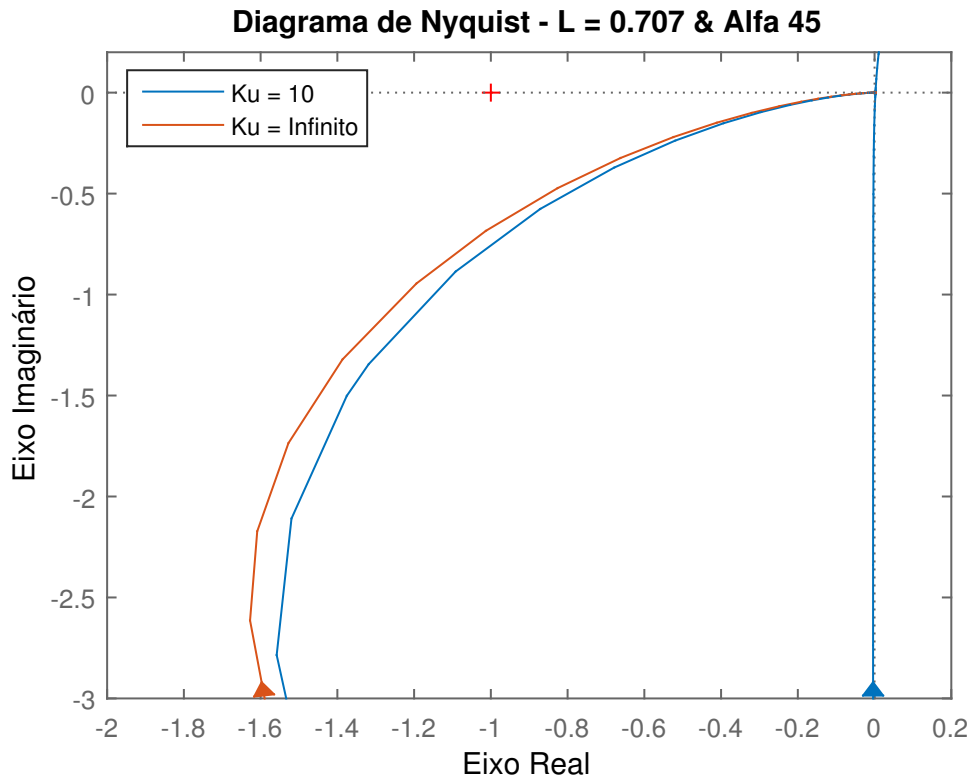


Figura 26 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\ell = 0.707$  e  $\theta = 90^\circ$

Tabela 17 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 60^\circ$  e  $\theta = 120^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	0	9.8216	1.2946	$\infty$	40.4925
$\infty$	0	34.2886	0.9876	$\infty$	43.2450

Observa-se na tabela (18), os ganhos dos controladores com as respectivas margens clássicas obtidas:

Tabela 18 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 60^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$

$K_u$	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$G_m$	$P_m$
10	0	0	1.1152	$\infty$	45.2881
$\infty$	0	33.8029	0.8555	$\infty$	43.1961

### 4.3.5 Controlador com Escalonamento de Ganho

Para o projeto do controlador por escalonamento de ganho, fazendo uso dos resultados obtidos dos casos com análise de robustez até então, adotam-se os parâmetros obtidos para os sistemas (4.1), (4.2) (4.3), de modo a obter um controlador com parâmetros ajustáveis de acordo com o ponto de operação do sistema, que obedeçam as seguintes premissas:

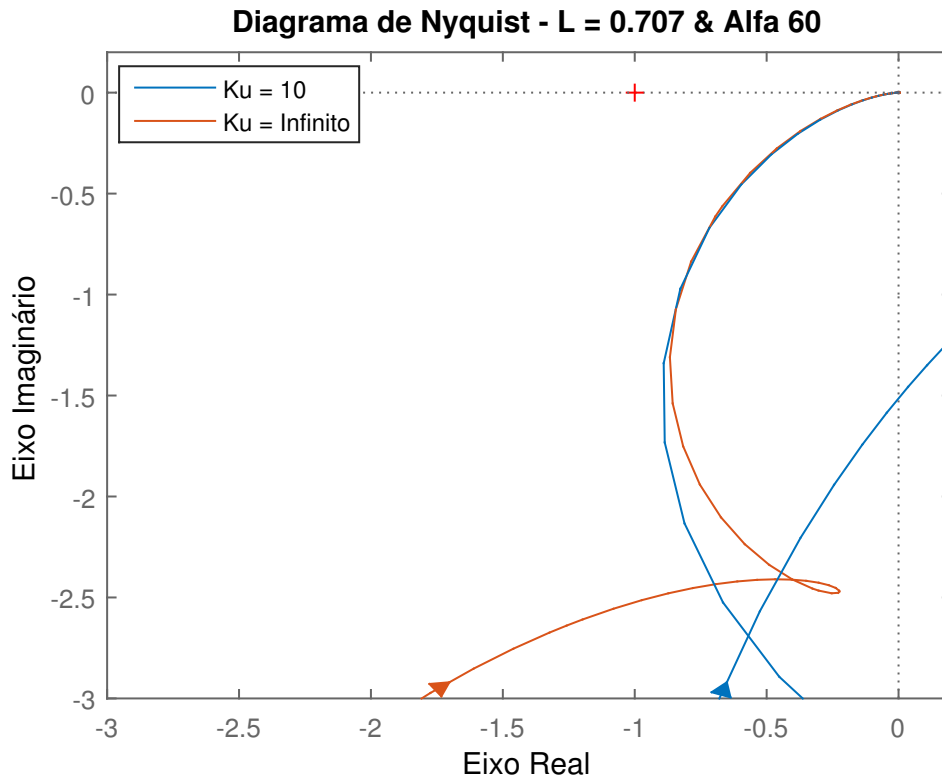


Figura 27 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\ell = 0.707$  e  $\theta = 120^\circ$

- Sistema com margem de ganho  $\ell = 0.5$  e  $\alpha = 45^\circ$ ;
- Sistema com margem de ganho  $\ell = 0.707$  e  $\alpha = 60^\circ$ ;
- Os Controladores projetados serão tais que  $K_u = \infty$  e apenas um terá restrição de ganho  $K_u = 10$ ;

Desse modo, temos o projeto de dois controladores com escalonamento de ganho:

#### 4.3.6 Controlador com $\ell = 0.5$ e $\alpha = 45^\circ$

Para este caso, verifica-se a existência de pontos que permitem a escrita de  $K_p(\theta)$ ,  $K_i(\theta)$  e  $K_d(\theta)$ , descritos na tabela(19)

Tabela 19 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 45^\circ$  em função de  $\theta$

	$K_p$	$K_i$	$K_d$
$\theta = 90^\circ$	0	106.8964	1.8071
$\theta = 120^\circ$	0	109.5150	2.0968
$\theta = 150^\circ$	0	114.9547	2.5290

Verifica-se então que, para todo  $\theta$ , temos  $K_p(\theta) = 0$  nos restando o ajuste de  $K_d(\theta)$  e de  $K_i(\theta)$ .

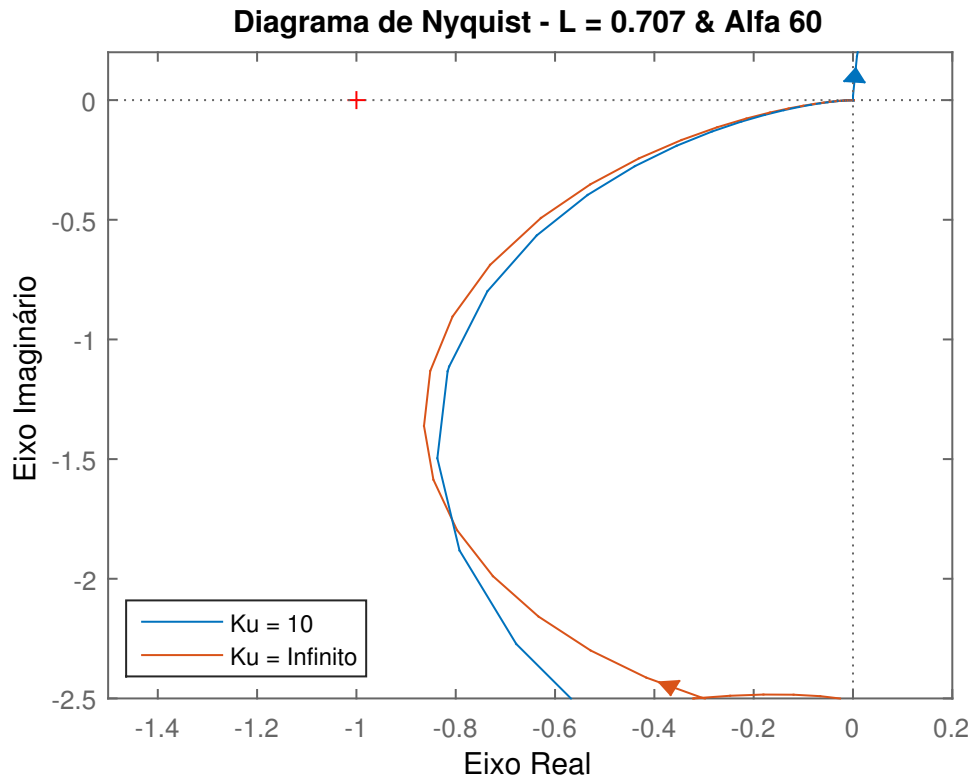


Figura 28 – Curvas de Nyquist para  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\ell = 0.707$  e  $\theta = 90^\circ$

Utilizando-se do software MATLAB®, obtemos a função de segundo grau que relaciona os ganhos do controlador  $K_i$  e  $K_d$  ao ponto de operação  $\theta$ :

$$K_i(\theta) = 0.001567\theta^2 - 0.2418\theta + 116 \quad (4.8)$$

$$K_d(\theta) = 7.917 * 10^{-5}\theta^2 - 0.006968\theta + 1.793 \quad (4.9)$$

#### 4.3.7 Controlador com $\ell = 0.707$ e $\alpha = 60^\circ$

Para este caso, verifica-se a existência de pontos que permitem a escrita de  $K_p(\theta)$ ,  $K_i(\theta)$  e  $K_d(\theta)$ , descritos na tabela (21)

Tabela 20 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 60^\circ$  em função de  $\theta$

	$K_p$	$K_i$	$K_d$
$\theta = 90^\circ$	0	33.8029	0.8555
$\theta = 120^\circ$	0	34.2886	0.9876
$\theta = 150^\circ$	0	35.3037	1.1806



Vê-se então que, para todo  $\theta$ , temos  $K_p(\theta) = 0$  nos restando o ajuste de  $K_d(\theta)$  e de  $K_i(\theta)$ .

Empregando-se do software MATLAB®, obtemos a função de segundo grau que relaciona os ganhos do controlador  $K_i$  e  $K_d$  ao ponto de operação  $\theta$ :

$$K_i(\theta) = 0.0002941\theta^2 - 0.04557\theta + 35.52 \quad (4.10)$$

$$K_d(\theta) = 0.0001338\theta^2 - 0.00267\theta + 2.175 \quad (4.11)$$

#### 4.3.8 Controlador com $\ell = 0.5$ e $\alpha = 45^\circ$ limitado por $K_u = 10$

Para este caso, verifica-se a existência de pontos que permitem a escrita de  $K_p(\theta)$ ,  $K_i(\theta)$  e  $K_d(\theta)$ , descritos na tabela (21)

Tabela 21 – Parâmetros de controladores para  $\alpha = 45^\circ$  em função de  $\theta$

	$K_p$	$K_i$	$K_d$
$\theta = 90^\circ$	1.0514	10	3.1189
$\theta = 120^\circ$	1.0053	10	3.6183
$\theta = 150^\circ$	2.6509	10	4.4617

Verifica-se então que, para todo  $\theta$ , temos  $K_i(\theta) = 10$  nos restando o ajuste de  $K_d(\theta)$  e de  $K_p(\theta)$ .

Utilizando-se do software MATLAB®, obtemos a função de segundo grau que relaciona os ganhos do controlador  $K_p$  e  $K_d$  ao ponto de operação  $\theta$ :

$$K_p(\theta) = 0.0009399\theta^2 - 0.1989\theta + 11.34 \quad (4.12)$$

$$K_d(\theta) = 0.0001911\theta^2 - 0.02349\theta + 3.685 \quad (4.13)$$

## 5 Considerações Finais

Neste trabalho, foi possível observar uma técnica de projeto de controladores capaz de garantir as condições de operação do sistema, no que diz respeito à frequência, de modo que, situações em que o sistema entra em uma zona de instabilidade possam ser evitadas, utilizando-se desta técnica de projeto. Através de uma técnica utilizando-se das margens de robustez e da programação linear (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2006), as restrições mostraram-se satisfatórias no que se refere a proporcionar regiões de soluções factíveis para o conjunto de soluções da forma  $(K_p, K_i, K_d, \ell)$ . As restrições adicionais quanto aos ganhos, mesmo que arbitradas, também foram capazes de contribuir positivamente para o projeto eficiente dos controladores, embora tenha sido verificado também, que estas restrições adicionais podem ser retiradas do projeto sem grandes prejuízos para robustez do controlador projetado.

Uma falha importante de ser citada fora a de não obediência da margem de fase proposta, evidenciada principalmente ao limitar-se os ganhos do controlador superiormente. Apesar disso, a desobediência das restrições fora de pequeno valor percentual, não superando 5% para valores de  $K_u = \infty$ , demonstrando a eficácia do método. Estas desobediências ocorrem principalmente quando existe uma tentativa de conseguir margens de ganho e fase elevadas, especialmente para valores de  $\alpha = 90^\circ$ , o que pode ser entendido como uma restrição forte, e valores de  $\ell$  próximos de 1.

Para os demais casos, diferentes situações para valores de  $\alpha$  e de restrições superiores foram testados, de modo a tentar obter a melhor resposta para o sistema. Diferentemente dos trabalhos prévios na literatura (KARIMI; KUNZE; LONGCHAMP, 2007) (EUZEBIO, 2010), aqui preferiu-se uma varredura a diversas frequências, de modo a garantir a margem de ganho para diversos pontos do diagrama de Nyquist, e não apenas da frequência de cruzamento. Embora essa frequência de cruzamento já ofereça um valor razoável, por tratar-se da implementação de um método numérico, a análise de frequências próximas pareceu conveniente.

O método simplex apresentou alguns problemas em determinadas situações, devido a lentidão para convergir para uma solução, de modo que o método do ponto-interior (KARMARKAR, 1984) fora útil em alguns dos casos aplicados na busca pela resposta ótima do problema de programação linear.

Pode-se verificar também que após a utilização dos controladores, estes não cruzavam o eixo real (característica esta decorrente do próprio sistema sem controlador), sendo isto um bom indicador da estabilidade do sistema quanto à margem de ganho, calculada como sendo infinita para todos os casos, em contra ponto ao que ocorreria com a margem

de fase.

Outro critério de análise que demonstrou a robustez do sistema fora a verificação do comportamento destes quando submetidos ao sinal degrau e ao impulso. Para o degrau, visualizou-se que o sistema controlador de fato, segue a trajetória. Além disso, verificamos a resposta ao impulso, pudemos comparar a atuação dos controladores diferentes projetados na ação contra o distúrbio sofrido pelo sistema.

Quanto ao caso adaptativo, utilizando-se da técnica de escalonamento de ganho, foi constatado que houve facilidade no projeto dos controladores com parâmetros variáveis, uma vez que já existiam controladores para cada ponto de operação outrora observados. Dessa forma, apenas com uma simples interpolação, pudemos obter funções do segundo grau associando estes pontos de operação à valores de ganho.

Pode-se dizer, portanto, que o problema de programação linear é útil para a obtenção de controladores ótimos submetidos a restrições associadas às margens de robustez do sistema, contanto que certos cuidados sejam tomados quanto aos ganhos dos controladores que devem ter um limitante superior que até certo ponto fora imposto de forma eurística. Existe ainda a possibilidade de futuramente expandir o método a sistemas não lineares.

## Referências

- ACIOLI, G.; LIMA, A. B. de; BARROS, P. R. Identificação e modelagem de plataforma robótica didática. *Congresso Brasileiro de Automática*, 2016. ISSN 1474-6670. Citado na página 25.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Automatic tuning of pid controllers. Instrument Society of America (ISA), 1988. Citado na página 8.
- DANTZIG, G. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. *Activity Analysis of Production and Allocation*, p. 339–347, 1951. Citado 3 vezes nas páginas 2, 6 e 7.
- EUZEBIO, T. *Estudo e Implementação de um Algoritmo de Avaliação de Desempenho de Malhas de Controle sob uma Referência DMC*. [S.l.]: Universidade Federal de Campina Grande, 2010. Citado na página 46.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Sistemas de controle para engenharia 6a edição*. [S.l.]: Bookman, 2013. Citado na página 1.
- KARIMI, A.; KUNZE, M.; LONGCHAMP, R. Robust pid controller design by linear programming. In: *2006 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 6 pp.–. ISSN 0743-1619. Citado 3 vezes nas páginas 2, 8 e 46.
- KARIMI, A.; KUNZE, M.; LONGCHAMP, R. Robust controller design by linear programming with application to a double-axis positioning system. *Control Engineering Practice*, v. 15, n. 2, p. 197 – 208, 2007. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066106001195>>. Citado 9 vezes nas páginas 12, 18, 27, 28, 29, 30, 31, 32 e 46.
- KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In: *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. New York, NY, USA: ACM, 1984. (STOC '84), p. 302–311. ISBN 0-89791-133-4. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/800057.808695>>. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 46.
- KUNZE, M.; KARIMI, A.; LONGCHAMP, R. Gain-scheduled controller design by linear programming. In: *Control Conference (ECC), 2007 European*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 5432–5438. Citado na página 2.
- LEITH, D. J.; LEITHEAD, W. E. Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, v. 73, n. 11, p. 1001–1025, 2000. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/002071700411304>>. Citado na página 22.
- LIMA, A. B. de; BARROS, P. R. Aplicação de otimização linear em projeto de controlador pid. *XIII CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE*, 2016. Citado na página 25.
- LUENBERGER, D.; YE, Y. *Linear and Nonlinear Programming*. Springer US, 2008. (International Series in Operations Research & Management Science). ISBN 9780387745022. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=-pD62uvi9lgC>>. Citado 4 vezes nas páginas 3, 4, 5 e 6.

MAYR, O. *The Origins of Feedback Control*. M.I.T. Press, 1970. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PJYIAAAAMAAJ>>. Citado na página 1.

NYQUIST, H. Regeneration theory. *Bell System Technical Journal*, Blackwell Publishing Ltd, v. 11, n. 1, p. 126–147, 1932. ISSN 1538-7305. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/j.1538-7305.1932.tb02344.x>>. Citado na página 2.

OLIVEIRA, V. de; KARIMI, A. Robust and gain-scheduled pid controller design for condensing boilers by linear programming. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 3, p. 335 – 340, 2012. ISSN 1474-6670. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016310473>>. Citado na página 2.

RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. *Automatica*, v. 36, n. 10, p. 1401 – 1425, 2000. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109800000583>>. Citado na página 22.