

Clarisse Pétua Bosman Barros

Desenvolvimento de simuladores para a dinâmica veicular

Campina Grande - Paraíba

Maio de 2016

Clarisse Pétua Bosman Barros

Desenvolvimento de simuladores para a dinâmica veicular

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Campina Grande
Departamento de Engenharia Elétrica e Informática

Orientador: Péricles Rezende Barros

Campina Grande - Paraíba

Maio de 2016

Clarisse Pétua Bosman Barros

Desenvolvimento de simuladores para a dinâmica veicular

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Banca Examinadora. Campina Grande - Paraíba, 10 de junho de 2016:

Péricles Rezende Barros
Orientador

Professor
George Acioli Júnior

Campina Grande - Paraíba
Maio de 2016

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados aos meus pais, Péricles e Heliane, bem como aos meus irmãos, Fabrícia e Pedro, por todo o incentivo e apoio, seja profissional ou emocional, que sempre me deram. Não existem palavras que descrevam minha gratidão à vocês.

Agradeço ao meu querido namorado, Ítalo Dominique, por ter estado comigo nesta reta final do curso, sempre dando suporte e carinho. À você, minha gratidão e meu amor.

Agradeço aos mestres desta jornada, em especial: Péricles Barros, por ter estado comigo por tanto tempo e ter aceitado de imediato realizar este trabalho; George Acioli, por ter aceitado compor a banca de avaliação deste trabalho. Agradeço também a todos os outros professores, por toda a paciência que tiveram para passar, não apenas os conhecimentos dos livros, mas também suas experiências profissionais e de vida.

Agradeço também ao coordenador do curso de Engenharia Elétrica, Damásio Fernandes, e aos funcionários do departamento, Adail Ferreira e Tchaikowsky Oliveira, que auxiliaram imensamente em todas as questões burocráticas da faculdade.

Por fim, agradeço imensamente aos meus queridos amigos, por todos os momentos de conquistas, bem como pelos de derrotas, que, juntos, superamos. Sem vocês este curso não teria graça.

“Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.”
(Einstein)

Resumo

Este projeto é o resultado de um Trabalho de Conclusão de Curso realizado junto ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande e ao Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle (LIEC). Consiste no estudo e desenvolvimento de simuladores para a dinâmica veicular, utilizando modelos consagrados da literatura. Foram construídos dois simuladores, um para a dinâmica longitudinal e o outro para a lateral, que funcionam em tempo real e respondem à estímulos aplicados pelo usuário.

Palavras-chave: dinâmica veicular longitudinal. dinâmica veicular lateral. simuladores de dinâmicas veiculares.

Abstract

This project is a result of a Senior Design Project held at the Department of Electrical Engineering at the Federal University of Campina Grande and at the Electronic Instrumentation and Control Laboratory (LIEC). It is the study and development of vehicle motion simulators', using models established in the literature. Two simulators were constructed, one for the longitudinal motion and the other to the side motion, running in real time and responding to user-applied stimulus.

Keywords: vehicle longitudinal motion. vehicle lateral motion. vehicle motion simulators'.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistemas de coordenadas do veículo	15
Figura 2 – Forças que agem sobre o carro	17
Figura 3 – Geometria de veículos com baixa velocidade em curvas	20
Figura 4 – Deformação do pneu sob forças laterais	21
Figura 5 – Gráfico da força lateral desenvolvida versus o ângulo de deslizamento	22
Figura 6 – Esquemático do modelo da bicicleta	23
Figura 7 – Diagrama das forças no esquemático do modelo da bicicleta com a indicação da direção do centro de rotação instantâneo	26
Figura 8 – Esquemático do modelo com três graus de liberdade - visão tridimensional	29
Figura 9 – Esquemático do modelo com três graus de liberdade - vista lateral	30
Figura 10 – Esquemático do modelo com três graus de liberdade - vista superior	30
Figura 11 – Gráfico da força lateral desenvolvida versus o ângulo de curvatura	32
Figura 12 – Entradas e saídas do sistema	37
Figura 13 – Interface no GUIDE da dinâmica veicular Longitudinal	37
Figura 14 – Simulador da dinâmica veicular Longitudinal	38
Figura 15 – Entradas e saídas do sistema	39
Figura 16 – Interface no GUIDE da dinâmica veicular Lateral	41
Figura 17 – Simulador da dinâmica veicular Lateral	42
Figura 18 – Simulação da resposta ao degrau na força de tração	43
Figura 19 – Simulação da resposta ao degrau na inclinação da pista	44
Figura 20 – Simulação do procedimento usual de mudança de velocidade	44
Figura 21 – Simulação para a verificação do simulador	45
Figura 22 – Simulação 1 da dinâmica lateral	46
Figura 23 – Simulação 2 da dinâmica lateral	47
Figura 24 – Simulação 3 da dinâmica lateral	47

Lista de tabelas

Tabela 1 – Notação da SAE (Society of Automotibe Engineers) para os sistemas de coordenadas de veículos	15
---	----

Lista de abreviaturas e siglas

ANFAVEA	Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores
SAE	Society of Automotive Engineers
GUIDE	Graphical User Interface Development Environment
ODE	Ordinary Differential Equation
LIEC	Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle

Lista de símbolos

W	Força peso
F_x	Força de tração
F_z	Força normal no pneu ou força vertical
F_y	Força lateral
R_x	Força de resistência ao rolamento
R_h	Força na haste de engate
D_A	Força de arrasto aerodinâmico
m	Massa total do veículo
L	Distância entre o eixo das rodas dianteiras e o eixo das rodas traseiras
C_α	Rigidez dos pneus em curvas
u	Velocidade longitudinal
v	Velocidade lateral
w	Velocidade vertical
ϕ	Deslocamento angular em relação ao eixo x
θ	Deslocamento angular em relação ao eixo y
ψ	Deslocamento angular em relação ao eixo z
α	Ângulo de deslizamento
δ	Ângulo de orientação dos pneus ou ângulo de orientação do volante

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	13
1.2	Motivação	13
1.3	Metodologia	14
1.4	Estrutura do documento	14
2	MODELAGEM VEICULAR	15
2.1	Modelagem Veicular Longitudinal	17
2.2	Modelagem Veicular Lateral	19
2.2.1	Curvas em estado de equilíbrio	19
2.2.1.1	Veículo em baixa velocidade	19
2.2.1.2	Veículo em alta velocidade	20
2.2.2	Curvas em estado transitório	26
2.2.2.1	Modelo dinâmico lateral com dois graus de liberdade	27
2.2.2.2	Modelo dinâmico lateral com três graus de liberdade	28
3	DESENVOLVIMENTO	36
3.1	Simulador da dinâmica longitudinal	36
3.2	Simulador da dinâmica lateral	38
4	RESULTADOS	43
4.1	Simulações utilizando o simulador da dinâmica longitudinal	43
4.2	Simulações utilizando o simulador da dinâmica lateral	45
5	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS	49

1 Introdução

Melhorias na segurança operacional e no conforto, diminuição do consumo de energia e dos impactos ambientais relacionados, são apenas alguns dos principais objetivos do mercado automobilístico. Estas metas estão sendo alcançadas, com cada vez mais eficiência, principalmente devido aos avanços nos sistemas de controle eletromecânico.

Os modelos matemáticos que descrevem os sistemas automotivos são a base para o projeto dos controladores, de modo que o estudo dos mesmos é essencial para melhorias na performance dos sistemas eletromecânicos de automóveis.

Além disso, o desenvolvimento de simuladores faz com que seja possível a análise das prováveis respostas do sistema de acordo com as condições que o mesmo se encontra e os estímulos externos, sendo essenciais para o teste e comparação entre de diferentes controladores.

Os modelos apresentados neste documento dizem respeito às dinâmicas longitudinal e lateral veicular, que são as bases para a construção de, por exemplo, controladores de cruzeiro, de avanço e de estabilidade.

1.1 Objetivos

O trabalho de conclusão de curso proposto neste documento tem como objetivo o estudo de modelos dinâmicos de sistemas automotivos e a construção de simuladores para cada sistema estudado.

1.2 Motivação

Um dos setores que gera mais renda, emprego e investimentos na economia nacional, é o setor automobilístico. De suma importância estratégica, incide diretamente sobre níveis de empregos e de investimentos diretos e indiretos. A produção de máquinas, equipamentos e insumos, tecnologia, logística, varejo e prestação de serviços em geral, como financeiros de promoção e propaganda, são setores impactados pelo setor automobilístico, por ser um setor muito abrangente (Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores – ANFAVEA).

Para se manterem competitivas, empresas automobilísticas de todo o mundo visam sempre melhorias e inovações nos seus veículos, de forma que atendam às requisições de segurança, conforto, baixo custo, eficiência e ambientais. Conseqüentemente, o estudo do comportamento dos variados sistemas mecânicos e eletromecânicos presentes é essencial, e

a construção de simuladores auxilia na comparação e escolha das melhores tecnologias e técnicas de controle.

1.3 Metodologia

Para cada dinâmica analisada, foi feito um estudo sobre os princípios físicos relacionados, sendo obtidas, com a aplicação dos mesmos, as equações diferenciais que a caracterizam.

Em seguida, foram construídos os simuladores de cada dinâmica por meio da utilização das equações diferenciais obtidas, do algoritmo de integração Runge-Kutta de quarta ordem, do software MATLAB e da ferramenta de interface GUIDE (Graphical User Interface Development Environment) do MATLAB.

1.4 Estrutura do documento

No Capítulo 2 é feita uma fundamentação teórica procurando explicitar como são construídos os modelos matemáticos das dinâmicas veiculares lateral e longitudinal, mostrando os conceitos físicos aplicados. Posteriormente, no Capítulo 3, são apresentados os simuladores desenvolvidos e suas propriedades.

No Capítulo 4 são apresentadas algumas simulações feitas utilizando os simuladores desenvolvidos. O trabalho é finalizado no Capítulo 5, com o encaminhamento das conclusões e propostas de refinamentos para pesquisas similares posteriores.

2 Modelagem Veicular

Para este trabalho em específico, foi feito o estudo dos modelos, lateral e longitudinal, para o projeto de controladores de cruzeiro, de avanço e de estabilidade. Além disso, foi feita a construção de simuladores dos modelos e para a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos.

Notação

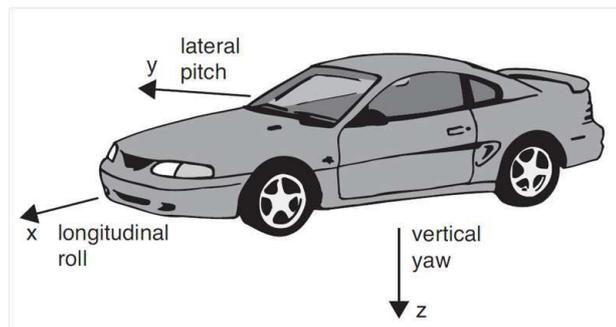
Este material utiliza o padrão de coordenadas e notações da SAE (Society of Automotive Engineers) para a descrição da dinâmica veicular, apresentado na [Tabela 1](#) e [Figura 1](#).

Tabela 1 – Notação da SAE (Society of Automotibe Engineers) para os sistemas de coordenadas de veículos

Eixo	Velocidade translacional	Deslocamento angular	Velocidade angular
x	u(longitudinal)	ϕ	p ou $\dot{\phi}$ (rolamento)
y	v(lateral)	θ	q ou $\dot{\theta}$ (arremesso)
z	w(vertical)	ψ	r ou $\dot{\psi}$ (guinada)

Fonte: [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014, p.55\)](#).

Figura 1 – Sistemas de coordenadas do veículo



Fonte: [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014, p.55\)](#)

Princípios Físicos

Para a modelagem dos sistemas longitudinal e lateral da dinâmica veicular, é necessária a utilização da segunda lei de Newton. A segunda lei de Newton aplicada ao movimento linear afirma que a força resultante em uma partícula (ou conjunto de partículas), $\vec{F}_{resultante}$, é igual à taxa temporal de variação do seu momento linear \vec{p} em um sistema de referência inercial:

$$\vec{F}_{resultante} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (2.1)$$

Esta lei tem validade geral, de modo que, para sistemas onde a massa é uma constante, a massa pode ser retirada da diferencial, resultando na conhecida expressão (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2005, p.98, p.224)

$$\vec{F}_{resultante} = m\vec{a}, \quad (2.2)$$

onde \vec{a} é a aceleração linear.

A segunda lei de Newton aplicada ao movimento rotacional afirma que o torque resultante em uma partícula(ou conjunto de partículas), $\vec{\tau}_{resultante}$, é igual à taxa temporal de variação do seu momento angular \vec{l} em um sistema de referência inercial (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2005, p.279, p.295):

$$\vec{\tau}_{resultante} = \frac{d\vec{l}}{dt}. \quad (2.3)$$

Esta lei também tem validade geral, de modo que, para sistemas onde a distribuição de massa é uma constante, o momento de inércia I também o será e pode ser retirado da diferencial, resultando na expressão

$$\vec{\tau}_{resultante} = I\vec{\alpha}, \quad (2.4)$$

onde α é a aceleração angular.

Além desta lei, posto que a dinâmica lateral ser representada por vários sistemas de coordenadas, foram utilizadas as equações de Lagrange, cujo método relacionado estabelece diretamente as equações de movimento em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas apropriadas, fazendo com que seja simplificada a obtenção das equações dinâmicas pertencentes ao modelo.

Um sistema de coordenadas generalizadas é aquele em que as posições das partículas podem ser especificadas. Para cada configuração do sistema, as coordenadas generalizadas devem ter um conjunto definido de valores e são funções das coordenadas do outro sistema em análise (sistema de coordenadas cartesianas, por exemplo) e, possivelmente, do tempo. Um requerimento essencial é que o sistema de coordenadas generalizadas e os outros sistemas de coordenadas envolvidos devem ter transformações bem definidas entre si e, conseqüentemente, o mesmo número de coordenadas.

A execução do método de Lagrange consiste em fazer a transformação das variáveis nos diferentes sistemas de coordenadas para um sistema de coordenadas generalizadas, de modo a se obter uma equação geral para a energia cinética do sistema, e em seguida

utilizar as equações de Lagrange para a obtenção das forças generalizadas. As equações de Lagrange são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (2.5)$$

onde t indica a variável tempo, T é a energia cinética generalizada, associada ao sistema de coordenadas generalizadas, \dot{q}_i são as velocidades generalizadas e Q_i são as forças generalizadas, todas associadas a cada coordenada generalizada q_i .

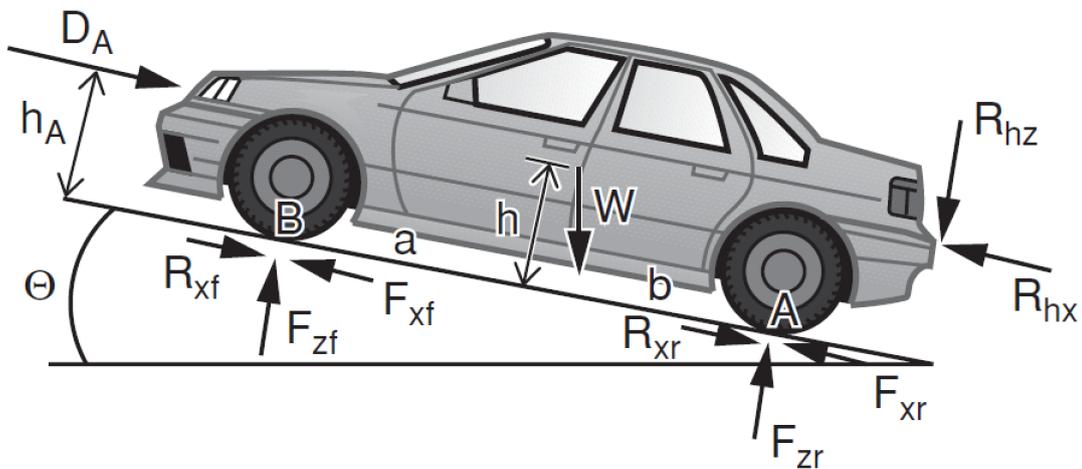
A demonstração e as definições foram omitidas neste documento, estando, contudo, formalmente explicitadas em [Symon \(1971, p.389-402\)](#).

2.1 Modelagem Veicular Longitudinal

Na modelagem da dinâmica longitudinal de um veículo, deseja-se determinar o comportamento longitudinal do mesmo de acordo com as forças aplicadas e a influência do meio. O diagrama de corpo livre de um veículo de massa m e ângulo de inclinação θ é apresentado na [Figura 2](#). As forças que agem sobre o carro são:

- a) W : Força peso
- b) F_x : Força de tração
- c) F_z : Força normal no pneu
- d) R_x : Força de resistência ao rolamento
- e) R_h : Força na haste de engate
- f) D_A : Força de arrasto aerodinâmico

Figura 2 – Forças que agem sobre o carro



Com a aplicação da segunda lei de Newton nos eixos x e z , obtêm-se:

$$ma_z = W \cos \theta - F_{zf} - F_{zt} + R_{hz} = 0 \quad (2.6)$$

e

$$ma_x = m \frac{du}{dt} = F_{xf} + F_{xt} + R_{hx} - W \sin \theta - R_{xf} - R_{xt} - D_A, \quad (2.7)$$

onde o subscrito f indica que a força é aplicada no pneu frontal e t indica que a força é aplicada no pneu traseiro; os subscritos x e z indicam que o valor é o da componente da força em relação ao eixo x e z , respectivamente; $W = mg$, sendo m a massa do veículo e g a constante gravitacional; θ é a inclinação da pista sob a qual o carro se encontra; u é a velocidade longitudinal do veículo.

A força de arrasto aerodinâmica pode ser modelada pela equação

$$D_a = 0.5\rho C_d A(u + u_w)^2, \quad (2.8)$$

em que ρ é a densidade do ar, C_d é o coeficiente de arrasto, A é a máxima área de seção lateral e u_w é a velocidade do ar ao redor do carro (Bosch (2009); Gillespie (1992)).

A resistência de rolamento aparece devido à deformação do pneu e da superfície do chão, podendo ser dada por

$$\vec{R}_x = \vec{R}_{xf} + \vec{R}_{xt} = f(\vec{F}_{zf} + \vec{F}_{zt}), \quad (2.9)$$

onde f é o coeficiente de resistência de rolamento.

Para o modelo apresentado neste relatório, considera-se que o carro não está acoplado a outras estruturas (como, por exemplo, um reboque), fazendo com que R_h seja igual a zero. Com as equações derivadas da segunda lei de Newton (Equação 2.7 e Equação 2.8), a relação entre a resistência de rolamento e a força normal do pneu e a relação da força de arrasto, obtêm-se o seguinte modelo para a dinâmica longitudinal veicular

$$m \frac{du}{dt} = F_x - mg \sin \theta - fmg \cos \theta - 0.5\rho C_d A(u + u_w)^2. \quad (2.10)$$

Observa-se que a equação diferencial obtida é simples, porém não linear. Na condução de equilíbrio, tem-se que a força de tração é

$$F_{x0} = mg \sin \theta_0 + fmg \cos \theta_0 + 0.5\rho C_d A(v_{x0} + u_w)^2. \quad (2.11)$$

Para o projeto de controladores utilizando técnicas clássicas, normalmente são utilizados os modelos linearizados da planta. Linearizando o modelo obtido em torno de um ponto de operação específico, dado por $u = u_{x0}$ e $\theta = \theta_0$, obtêm-se a seguinte equação diferencial linear

$$\tau \dot{u}' + u' = K(F' + d), \quad (2.12)$$

onde

$$u = u_{x0} + u' ;$$

$$F_x = F_{x0} + F', \text{ com } F_{x0} \text{ obtido aplicando-se } u_{x0} \text{ e } \theta_0 \text{ na Equação 2.11 ;}$$

$$\theta = \theta_0 + \theta' ;$$

$$d = mg(f \operatorname{sen}(\theta_0) - \cos(\theta_0))\theta' ;$$

$$\tau = m/(\rho C d A (u_{x0} + u_w)) ;$$

$$K = 1/(\rho C d A (u_{x0} + u_w)) .$$

2.2 Modelagem Veicular Lateral

A modelagem veicular lateral tem sentido prático quando aplicada à movimentação de veículos em curvas, posto que é este o momento em que afeta a direção de movimento do mesmo.

A análise do comportamento veicular em curvas é feita em etapas, alterando-se, para cada caso, as condições do veículo na curva. Inicialmente, serão analisados os casos em que a curva é feita com o veículo em estado de equilíbrio, para o modelo dinâmico lateral com dois graus de liberdade (do inglês, Two-Degree-of-Freedom lateral dynamic model, ou simplesmente two-DOF). Em seguida, é analisado o caso de modelos lineares transientes (no qual a curva não ocorre em estado estacionário) para dois e três graus de liberdade.

Embora a mecânica da movimentação de todas as rodas, por meio do volante, tenha sido implementada em alguns carros de passeio, são considerados neste documento apenas os casos em que o volante controla as rodas dianteiras.

Os principais materiais utilizados para a análise aqui apresentada foram Gillespie (1992), Ulsoy, Peng e Çakmakci (2014) e Wong (2001).

2.2.1 Curvas em estado de equilíbrio

Por um veículo realizando uma curva em estado de equilíbrio, assume-se que a velocidade de guinada, r , é constante ($\dot{r} = 0$, ou seja, não existe aceleração na rotação do veículo em torno do eixo z), bem como o raio R da curva.

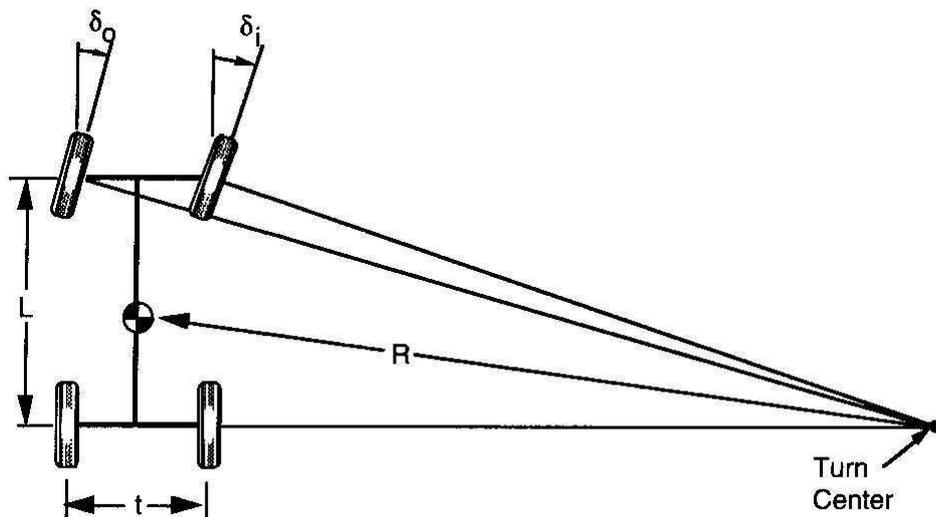
2.2.1.1 Veículo em baixa velocidade

Inicialmente, estuda-se o comportamento do veículo com baixas velocidade em curvas, em que não são desenvolvidas forças laterais pelos pneus. Para este caso, o centro

da curva deve ficar na projeção do ângulo traseiro, e a perpendicular de cada pneu dianteiro deve passar por este mesmo ponto (Figura 3).

Caso isto não ocorra, os pneus dianteiros disputam um com o outro na curva, fazendo com que ocorram fricções, surjam forças laterais nos pneus e ocorra derrapagem.

Figura 3 – Geometria de veículos com baixa velocidade em curvas



Fonte: Gillespie (1992, p. 197)

Para todas as análises apresentadas neste documento, considera-se que os pneus estão dispostos de modo a não causar derrapagem. Os ângulos ideais para a orientação de cada um dos pneus dianteiros em curvas de baixa velocidade são mostrados na Figura 3. Assumindo ângulos pequenos de orientação para os pneus dianteiros, os mesmos podem ser expressos por

$$\delta_o \cong \frac{L}{(R + \frac{t}{2})} \quad (2.13)$$

e

$$\delta_i \cong \frac{L}{(R - \frac{t}{2})}. \quad (2.14)$$

O ângulo médio de orientação para os pneus dianteiros é definido como ângulo de Ackerman e é dado por

$$\delta = L/R. \quad (2.15)$$

2.2.1.2 Veículo em alta velocidade

Para veículos com altas velocidades em curvas, a aceleração lateral está presente e, em contrapartida, os pneus desenvolvem forças laterais e ângulos de deslissamento.

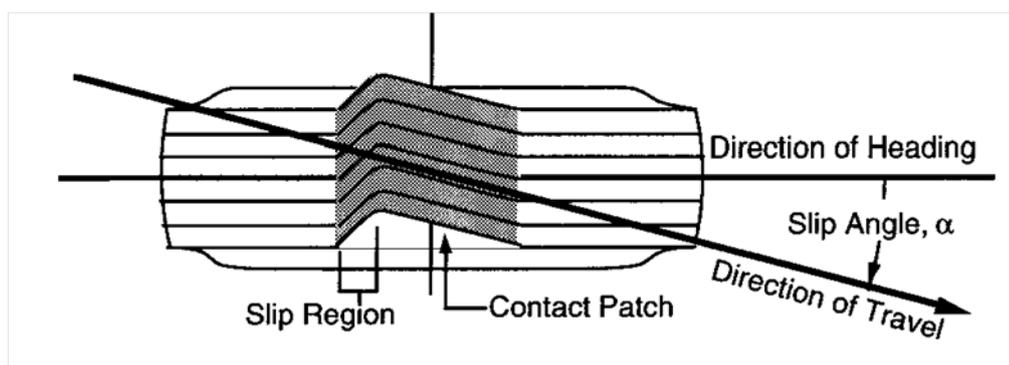
Inicialmente, é apresentado o significado físico do surgimento das forças que agem nos pneus e seus efeitos e, em seguida, é apresentado o modelo dinâmico lateral com dois graus de liberdade.

Forças nos pneus em curvas

Se um pneu não está sujeito a forças perpendiculares ao plano da roda, o mesmo irá mover-se ao longo deste plano (ou seja, a direção do pneu e de seu movimento é a mesma). Se, por outro lado, uma força lateral é aplicada ao pneu, este irá desenvolver uma outra força lateral, oposta, no contato com a superfície, e o pneu irá mover-se ao longo da direção α do plano da roda, como mostrado na [Figura 4](#). Ou seja, um ângulo α é criado entre a direção apontada pelo pneu e a sua direção de movimento.

O ângulo α é conhecido como ângulo de deslizamento (do inglês, slip angle), e o fenômeno do deslizamento lateral ocorre principalmente devido à elasticidade lateral do pneu.

Figura 4 – Deformação do pneu sob forças laterais



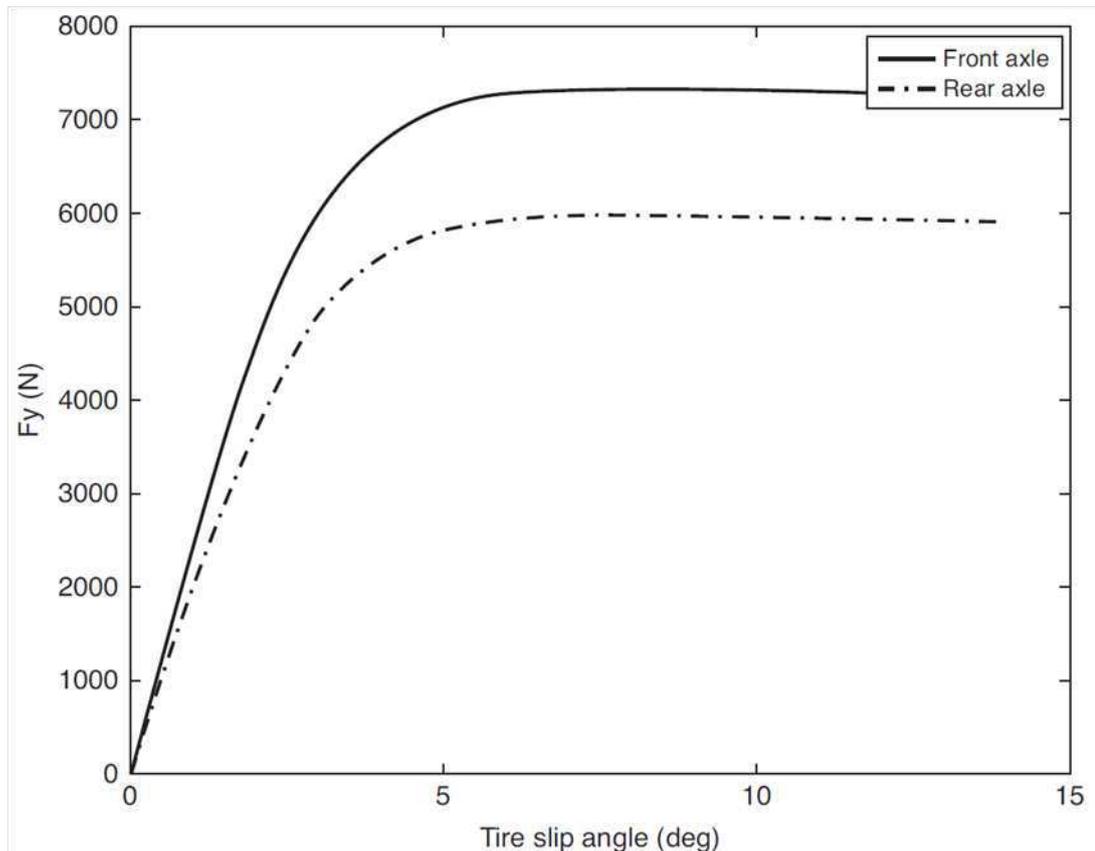
Fonte: Gillespie (1992, p. 348)

Em curvas nas quais os carros apresentam altas velocidades, os pneus desenvolvem forças laterais, surgindo então um deslizamento lateral dos pneus, a medida que eles rolam. Conseqüentemente, existe uma diferença entre as direções de apontamento e deslocamento dos pneus.

A força lateral desenvolvida no contato pneu-superfície, F_y , é chamada força de curva (do inglês, cornering force). A relação entre a força de curva e o ângulo de deslizamento é de fundamental importância para o controle de direção e a estabilidade de veículos em estradas, estando demonstrada na [Figura 5](#).

A curva da força lateral em função do ângulo de deslizamento pode variar de acordo com o material e a geometria do pneu e da pista, mas, em geral, a mesma apresenta o mesmo formato. Embora a relação seja não linear, para pequenos ângulos de deslizamento,

Figura 5 – Gráfico da força lateral desenvolvida versus o ângulo de deslizamento



Fonte: [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014, p. 259\)](#)

a força de curva pode ser considerada proporcional ao ângulo de deslizamento e obtida por

$$F_y = C_\alpha \alpha. \quad (2.16)$$

A constante de proporcionalidade C_α é conhecida como rigidez em curvas (do inglês, cornering stiffness), sendo definida como a inclinação da curva de F_y versus α em $\alpha = 0$.

A rigidez em curvas depende de várias propriedades do pneu, a exemplo do tamanho, da geometria, do material, do número de sulcos, da pressão e da carga sobre o mesmo. A velocidade, contudo, tem pouca influência sob as forças de curva produzidas por pneus.

Modelo dinâmico lateral com dois graus de liberdade: O modelo da bicicleta

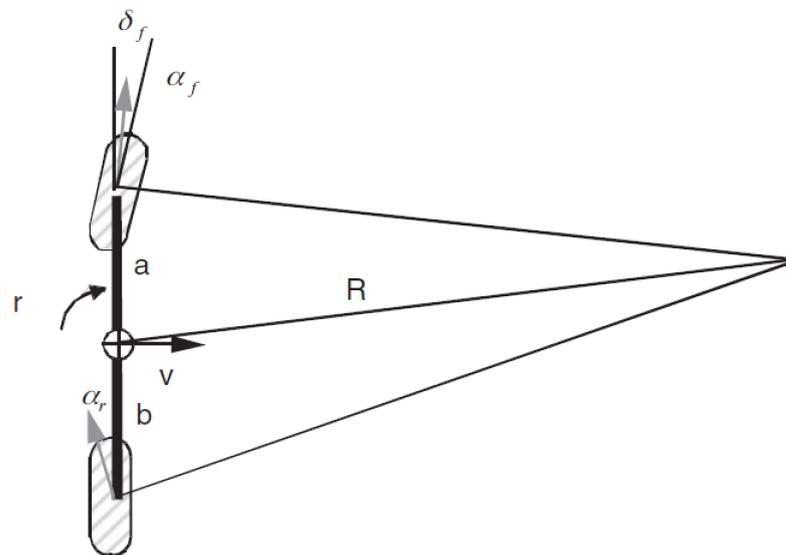
O modelo dinâmico lateral com dois graus de liberdade, mais conhecido como modelo da bicicleta, é utilizado para a modelagem do movimento veicular lateral e está representado na [Figura 6](#).

Para este modelo, considera-se que as rodas da direita e da esquerda do veículo têm o mesmo comportamento e podem ser consideradas como uma só. Esta consideração é

válida pois, para altas velocidades, o raio da curva, R , é muito maior que a base das rodas, t , do veículo (Figura 3) e, em consequência, a diferença entre os ângulos das duas rodas dianteiras é desprezível. A mesma consideração é feita para as rodas traseiras, obtendo-se a Figura 6.

A variável a representa a distância entre o centro de massa e os pneus dianteiros, ao longo do eixo x, a variável b representa a distância entre o centro de massa e os pneus traseiros, ao longo do eixo x e a variável r representa a velocidade de guinada (velocidade de rotação em relação ao eixo z).

Figura 6 – Esquemático do modelo da bicicleta



Fonte: Ulsoy, Peng e Çakmakci (2014, p. 63)

Assim, as duas rodas da frente são representadas por apenas uma roda com ângulo de orientação δ_f e ângulo de deslizamento α_f , enquanto que as duas rodas traseiras são representadas por apenas uma roda com ângulo de deslizamento α_t (representado na figura por α_r). As forças laterais também são consideradas as mesmas para as rodas da direita e da esquerda.

De modo mais formal, as seguintes considerações são feitas para o modelo dinâmico lateral com dois graus de liberdade:

1. o raio R da curva deve ser grande quando comparado a base das rodas do veículo, $L = a + b$, e a distância entre as rodas, t ;
2. o ângulo de orientação dos pneus dianteiros da esquerda e da direita deve ser aproximadamente o mesmo, δ_f ;
3. os ângulos de deslizamento dos pneus dianteiros (direita e esquerda) devem ser

iguais, α_f , assim como os ângulos de deslizamento dos pneus traseiros, α_t ;

4. o ângulo de deslizamento no centro de gravidade(CG) do veículo é $\beta = \arctan(v/u) \approx (v/u)$;

Para o caso de curvas em estado estacionário, é feita ainda a seguinte consideração:

5. o raio, R , e a velocidade de guinada, $r = \dot{\Psi}$, são constantes (curva em estado de equilíbrio), assim como o ângulo de deslizamento β .

As equações em curvas em estado de equilíbrio são derivadas da aplicação da segunda lei de Newton e da descrição da geometria dos pneus do carro em curvas. Antes da aplicação da segunda lei de Newton, serão analisadas as relações geométricas decorrentes do modelo lateral com dois graus de liberdade.

Assumindo um ângulo de orientação positivo, causando uma curva do veículo para a direita e resultando em ângulos de deslizamento nos pneus dianteiros e traseiros, tem-se que estes ângulos de deslizamento podem ser dados por:

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{v + ar}{u}, \quad (2.17)$$

$$\alpha_t = -\frac{v - br}{u}. \quad (2.18)$$

Conseqüentemente,

$$\delta_f = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_t. \quad (2.19)$$

Observa-se que o ângulo de orientação dos pneus consiste em duas partes: a parte estática, dada por L/R e conhecida como ângulo de Ackermann, e a parte dinâmica, dada pela diferença entre os ângulos de deslizamento dos pneus dianteiros e traseiros.

Para a aplicação da segunda lei de Newton, serão analisadas duas situações. Inicialmente, é analisado o caso em que não há força de tração nas rodas e a velocidade longitudinal (u) é mantida constante. Em seguida, a força de tração e seus efeitos sobre a dinâmica lateral do veículo são analisados.

Forças de tração ausentes

As equações do movimento são obtidas aplicando-se a segunda lei de Newton. Para a translação no eixo y :

$$m \frac{u^2}{R} = F_{yf} + F_{yt}, \quad (2.20)$$

onde a aceleração na direção y , $a_y = ur = \frac{u^2}{R}$, é decorrente apenas da aceleração centrípeta do veículo na curva em estado estacionário. Para a rotação, a soma dos momentos das forças em relação ao centro de massa deve ser nula e, conseqüentemente:

$$0 = F_{yf}a - F_{yt}b. \quad (2.21)$$

Assim, as forças de curva nos pneus dianteiros e traseiros são dadas por

$$F_{yf} = m \frac{b}{L} \frac{u^2}{R}, \quad (2.22)$$

$$F_{yt} = m \frac{a}{L} \frac{u^2}{R}. \quad (2.23)$$

Substituindo as equações [Equação 2.22](#) e [Equação 2.23](#) em [Equação 2.16](#) e isolando os ângulos de deslissamento, obtêm-se

$$\alpha_f = m \frac{u^2}{R} \frac{b}{L} \frac{1}{C_{\alpha f}}, \quad (2.24)$$

$$\alpha_t = m \frac{u^2}{R} \frac{a}{L} \frac{1}{C_{\alpha t}}. \quad (2.25)$$

Agora, pode-se substituir as expressões obtidas para os ângulos de deslissamento na [Equação 2.26](#), obtendo-se assim o ângulo de orientação dos pneus:

$$\delta_f = \frac{L}{R} + \left(\frac{mb}{LC_{\alpha f}} - \frac{ma}{LC_{\alpha t}} \right) \frac{u^2}{R}. \quad (2.26)$$

A segunda lei de Newton também pode ser aplicada ao eixo vertical nos pneus, de modo que F_{zf} e F_{zt} podem ser expressos por

$$F_{zf} = (mq) \frac{b}{L}, \quad (2.27)$$

$$F_{zt} = (mq) \frac{a}{L}. \quad (2.28)$$

A [Equação 2.26](#) pode ser então reescrita da seguinte forma

$$\delta_f = \frac{L}{R} + \left(\frac{F_{zf}}{C_{\alpha f}} - \frac{F_{zt}}{C_{\alpha t}} \right) \frac{u^2}{Rg}. \quad (2.29)$$

Como o valor do coeficiente de rigidez, C_{α} , é dependente do valor da força normal aplicada aos pneus, e F_z é justamente a carga vertical aplicada ao mesmo, esta forma de escrita para o ângulo de orientação dos pneus (δ_f) é mais utilizada na prática.

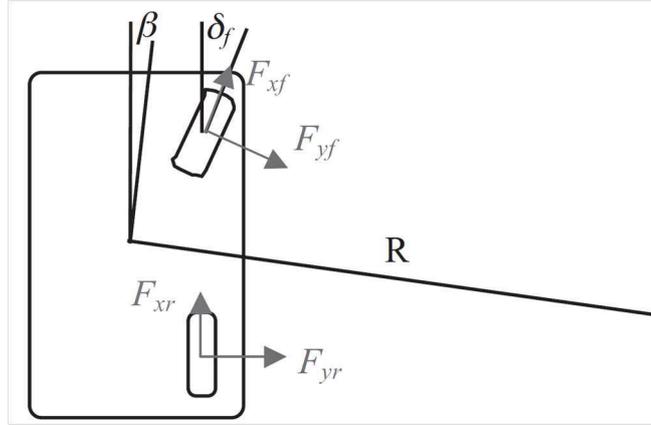
Em geral, as informações sobre a rigidez de pneus são dadas na forma F_z/C_{α} , também chamada de coeficiente de rigidez em curvas (do inglês, cornering-stiffness coefficient).

Forças de tração presentes

Considera-se agora o efeito das forças de tração, F_{xf} e F_{xt} . Para um veículo em uma curva em estado equilíbrio, a aplicação da segunda lei de Newton na direção lateral, considerando a aplicação de forças de tração, resulta nas seguintes equações para cada eixo:

$$F_{yf} \cos(\delta_f - \beta) + F_{xf} \sin(\delta_f - \beta) = F_{yf} \cos\left(\frac{a}{R} + \alpha_f\right) + F_{xf} \sin\left(\frac{a}{R} + \alpha_f\right) = m \frac{b}{L} \frac{u^2}{R}, \quad (2.30)$$

Figura 7 – Diagrama das forças no esquemático do modelo da bicicleta com a indicação da direção do centro de rotação instantâneo



Fonte: [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014, p. 69\)](#)

$$F_{yt} \cos(\beta) - F_{xt} \sin(\beta) = F_{yf} \cos\left(\frac{b}{R} - \alpha_t\right) + F_{xt} \sin\left(\frac{b}{R} - \alpha_t\right) = m \frac{a}{L} \frac{u^2}{R}. \quad (2.31)$$

Estas equações são obtidas pela projeção de todas as forças na direção instantânea do centro de rotação, R , como mostrado na [Figura 7](#).

Assumindo ângulos de deslismo pequenos de modo que $\sin(\alpha) = \alpha$ e $\cos(\alpha) = 1$ e assumindo que a relação linear $F_\alpha = C_\alpha \alpha$ seja válida, obtém-se

$$\alpha_f = \frac{m \frac{b}{L} \frac{u^2}{R} - F_{xf} \frac{a}{R}}{C_{\alpha_f} + F_{xf}} \quad (2.32)$$

$$\alpha_t = \frac{m \frac{a}{L} \frac{u^2}{R} - F_{xt} \frac{b}{R}}{C_{\alpha_t} + F_{xt}} \quad (2.33)$$

Uma forma mais geral para a [Equação 2.26](#), incluindo os efeitos de forças de tração, é dada por

$$\delta_f = \frac{L}{R} - \frac{F_{xf}}{C_{\alpha_f} + F_{xf}} \frac{a}{R} - \frac{F_{xt}}{C_{\alpha_t} + F_{xt}} \frac{b}{R} + \left[\frac{mb}{L(C_{\alpha_f} + F_{xf})} - \frac{ma}{L(C_{\alpha_t} + F_{xt})} \right] \frac{u^2}{R}. \quad (2.34)$$

Observa-se que, dependendo das propriedades dos pneus dianteiros e traseiros, bem como das forças que agem sob os mesmos, varia a inclinação das rodas (controlada pelo volante) necessária para a realização de uma curva de raio R .

2.2.2 Curvas em estado transitório

Os modelos dinâmicos do veículo em curvas feitas em estado não estacionário, chamados modelos transitórios lineares, consideram a existência de aceleração no eixo y , além da aceleração centrípeta, e a existência de aceleração angular, $\dot{r} \neq 0$. Não serão considerados os efeitos de forças de tração.

2.2.2.1 Modelo dinâmico lateral com dois graus de liberdade

A segunda lei de Newton aplicada ao modelo lateral com dois graus de liberdade, considerando a curva feita em estado transitório, fornece

$$F_{yf} + F_{yt} = ma_y = m\ddot{y} = m(ur + \dot{v}) = m(ur + u\dot{\beta}), \quad (2.35)$$

$$aF_{yf} - bF_{yt} = ma_y = I_z\dot{r}, \quad (2.36)$$

onde foi considerado $\tan(\beta) = \frac{v}{u} \approx \frac{v}{u}$.

Assumindo que os eixos dos pneus dianteiros e traseiros são lineares, tem-se

$$F_{yf} = C_{\alpha f}\alpha_f = C_{\alpha f}\left(\delta - \left(\frac{v + ar}{u}\right)\right) = C_{\alpha f}\left(\delta - \beta - \frac{ar}{u}\right), \quad (2.37)$$

$$F_{yt} = C_{\alpha t}\alpha_t = C_{\alpha t}\left(\frac{br - v}{u}\right) = C_{\alpha f}\left(\frac{br}{u} - \beta\right). \quad (2.38)$$

Combinando as equações [Equação 2.35](#), [Equação 2.36](#), [Equação 2.37](#) e [Equação 2.38](#), obtém-se o modelo linear com dois graus de liberdade para a dinâmica lateral:

$$mu\dot{\beta} + mur = -(C_{\alpha f} + C_{\alpha t})\beta + \left(\frac{C_{\alpha t}b - C_{\alpha f}a}{u}\right)r + C_{\alpha f}\delta, \quad (2.39)$$

$$I_z\dot{r} = (bC_{\alpha t} - aC_{\alpha f})\beta - \left(\frac{C_{\alpha f}a^2 - C_{\alpha t}b^2}{u}\right)r + aC_{\alpha f}\delta. \quad (2.40)$$

Na forma de espaço de estados $\dot{x} = Ax + Bu$, com $x = [\beta r]^T$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha t}}{mu}\right) & -\left(\frac{aC_{\alpha f} - bC_{\alpha t}}{mu^2}\right) - 1 \\ -\left(\frac{aC_{\alpha f} - bC_{\alpha t}}{I_z}\right) & -\left(\frac{C_{\alpha f}a^2 - C_{\alpha t}b^2}{I_z u}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha f}}{mu} \\ \frac{aC_{\alpha f}}{I_z} \end{bmatrix} \delta. \quad (2.41)$$

Quando o movimento relativo do automóvel (em relação à pista) é de interesse, deve-se definir mais duas variáveis de estado: o deslocamento lateral, y , e o ângulo de guinada, Ψ , do automóvel em relação à pista. Utilizando as considerações $v \approx \beta u$, $\dot{y} = v + u\Psi$, $\dot{\Psi} = r$, $\dot{y} = \dot{v} + ur$ e $x = [y \ v \ \Psi \ r]^T$, a equação de espaço de estados é

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ v \\ \Psi \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & -\left(\frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha t}}{mu}\right) & 0 & -\left(\frac{aC_{\alpha f} - bC_{\alpha t}}{mu}\right) - u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\left(\frac{aC_{\alpha f} - bC_{\alpha t}}{I_z u}\right) & 0 & -\left(\frac{C_{\alpha f}a^2 + C_{\alpha t}b^2}{I_z u}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \\ \Psi \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_{\alpha f}}{mu} \\ 0 \\ \frac{aC_{\alpha f}}{I_z} \end{bmatrix} \delta. \quad (2.42)$$

Quando a pista é curvada e sua orientação (ou seja, seu ângulo de guinada) é denotada por Ψ_d , com $r_d = \dot{\Psi}$, as equações dinâmicas do veículo tornam-se

$$F_{yf} + F_{yt} = m(\ddot{y} + yr_d), \quad (2.43)$$

$$aF_{yf} - bF_{yt} = I_z\dot{r}. \quad (2.44)$$

Assumindo que os eixos dos pneus dianteiros e traseiros são lineares, tem-se

$$F_{yf} = C_{\alpha f} \alpha_f = C_{\alpha f} \left(\delta - \left(\frac{v + ar}{u} \right) \right) = C_{\alpha f} \left(\delta - \frac{\dot{y}}{u} - \frac{ar}{u} + (\Psi - \Psi_d) \right), \quad (2.45)$$

$$F_{yt} = C_{\alpha t} \alpha_t = C_{\alpha t} \left(\frac{br - v}{u} \right) = C_{\alpha f} \left(-\frac{\dot{y}}{u} + \frac{br}{u} + (\Psi - \Psi_d) \right). \quad (2.46)$$

Combinando as equações [Equação 2.43](#), [Equação 2.44](#), [Equação 2.45](#) e [Equação 2.46](#), obtém-se

$$m(\ddot{y} + ur_d) = - \left(\frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha t}}{u} \right) \dot{y} + \left(\frac{C_{\alpha t}b - C_{\alpha f}a}{u} \right) r + C_{\alpha f} \delta + (C_{\alpha f} + C_{\alpha t})(\Psi - \Psi_d), \quad (2.47)$$

$$I_z \dot{r} = - \frac{(aC_{\alpha f} - bC_{\alpha t})}{u} \dot{y} - \left(\frac{C_{\alpha f}a^2 - C_{\alpha t}b^2}{u} \right) r + aC_{\alpha f} \delta + (aC_{\alpha f} - bC_{\alpha t})(\Psi - \Psi_d). \quad (2.48)$$

Na forma de espaço de estados, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \Psi - \Psi_d \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha t}}{mu}\right) & \frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha t}}{m} & -\left(\frac{aC_{\alpha f} - bC_{\alpha t}}{mu}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\left(\frac{aC_{\alpha f} - bC_{\alpha t}}{I_z u}\right) & \frac{aC_{\alpha f} - bC_{\alpha t}}{I_z} & -\left(\frac{C_{\alpha f}a^2 + C_{\alpha t}b^2}{I_z u}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \Psi - \Psi_d \\ r \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_{\alpha f}}{mu} \\ 0 \\ \frac{aC_{\alpha f}}{I_z} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ -u \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} r_d. \end{aligned} \quad (2.49)$$

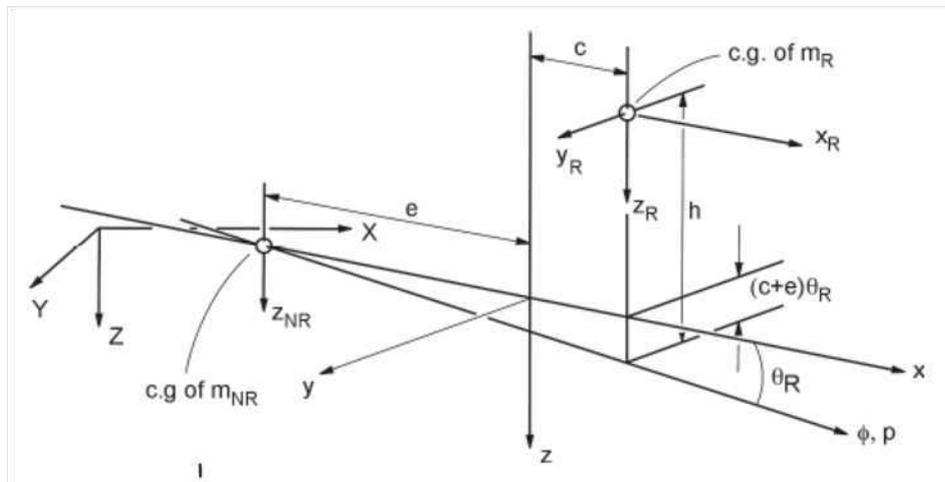
2.2.2.2 Modelo dinâmico lateral com três graus de liberdade

No modelo com três graus de liberdade são consideradas as liberdades de movimento lateral, de guinada e de rolamento. No desenvolvimento com dois graus de liberdade, foi assumido que o veículo consiste em um corpo rígido e, conseqüentemente, o grau de liberdade do rolamento foi desconsiderado. Esta suposição é válida apenas para os casos em que o veículo não apresenta um sistema de suspensão.

O movimento de rolamento, que corresponde a rotação ϕ em torno do eixo x, afeta consideravelmente as equações da dinâmica lateral veicular. O que ocorre é que o sistema de suspensão separa o veículo em massas rolantes e não rolantes. A massa rolante rotaciona em relação a massa não rolante, ocorrendo um deslocamento de pesos e uma mudança nas forças normais nos dois lados do veículo, alterando significativamente as forças laterais geradas em cada pneu.

Para o modelo discutido nesta seção, o veículo é dividido em massas rolante, m_R , e não rolante, m_{NR} , em que é considerado que a massa rolante é limitada a rotacionar em torno de um eixo fixo da massa não rolante. A [Figura 8](#) mostra o esquemático utilizado.

Figura 8 – Esquemático do modelo com três graus de liberdade - visão tridimensional



Fonte: [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014, p. 72\)](#)

O sistema de coordenadas xyz é fixo no veículo e tal que o eixo z é vertical e passa pelo centro de massa dos dois sistemas de massa e o eixo x é horizontal e passa pelo centro de massa da massa não rolante. O eixo de rotação da massa rolante passa por m_{NR} e aponta para baixo com um ângulo de inclinação θ_R .

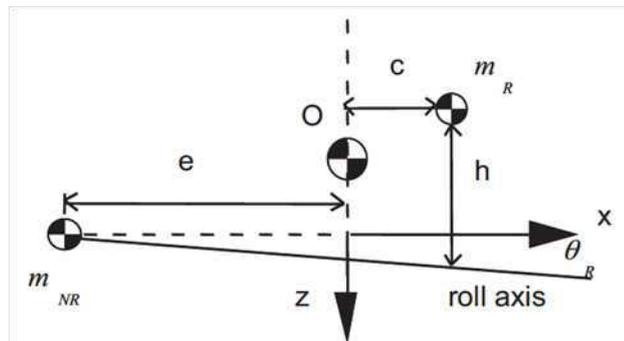
Notações:

- c : distância ao longo do eixo x entre o eixo z e o centro de massa da massa rolante;
- e : distância ao longo do eixo x entre o eixo z e o centro de massa da massa não rolante;
- θ_R : ângulo para baixo do eixo horizontal o qual o eixo de rotação forma com o eixo x ;
- h : distância vertical entre o centro de massa da massa rolante e o seu eixo de rotação;
- r : velocidade de guinada, $r = \dot{\psi}$;
- p : velocidade de rolamento, $p = \dot{\phi}$;
- u : velocidade na direção x ;
- v : velocidade na direção y .

Da definição de centro de massa do veículo, tem-se $m_{NR}e = m_Rc$.

A obtenção do modelo dinâmico lateral com três graus de liberdade é feita em duas etapas: na primeira, obtém-se as equações de movimento de cada grau de liberdade,

Figura 9 – Esquemático do modelo com três graus de liberdade - vista lateral



Fonte: [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014, p. 72\)](#)

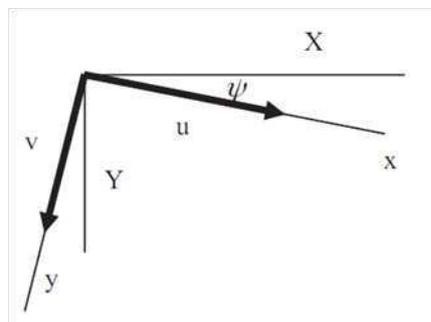
utilizando as equações de Lagrange; na segunda, obtém-se as forças e momentos externos agindo no veículo. As igualdades das expressões obtidas para cada grau de liberdade formam as equações que descrevem a dinâmica do modelo.

Primeira Etapa

Para esta etapa, inicialmente é obtida a expressão para a energia cinética generalizada, T , e, em seguida, utilizando a equação de Lagrange, é obtida a expressão da força generalizada para cada grau de liberdade do modelo.

Assume-se que o sistema inercial generalizado de coordenadas é o XY (com origem no ponto O) e o sistema de coordenadas local do veículo é xy, como mostrado na [Figura 10](#). Assim, tem-se $u = \dot{X}\cos\psi + \dot{Y}\sin\psi$ e $v = -\dot{X}\sin\psi + \dot{Y}\cos\psi$, onde ψ é o ângulo de guinada (ou seja, o ângulo de rotação em relação ao eixo z).

Figura 10 – Esquemático do modelo com três graus de liberdade - vista superior



Fonte: [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014, p. 72\)](#)

A energia cinética total T é dada pela soma da energia cinética armazenada na massa rolante, T_R , e na massa não rolante, T_{NR} , que são dadas por

$$T_{NR} = \frac{1}{2}m_{NR}\vec{V}_{NR} \cdot \vec{V}_{NR} + \frac{1}{2}(I_{zz})_{NR}r^2, \quad (2.50)$$

$$T_R = \frac{1}{2}m_R\vec{V}_R \cdot \vec{V}_R + \frac{1}{2}\vec{\omega}_R\vec{H}_R, \quad (2.51)$$

onde \vec{V}_{NR} é a velocidade da massa não rolante, \vec{V}_R é a velocidade linear da massa rolante e $\vec{\omega}_R$ é a sua velocidade angular, H_R é o momento angular da massa rolante, e I_{zz} é o produto de inércia do eixo z em relação a ele mesmo. Estas variáveis são obtidas pela análise do esquemático tridimensional do modelo e são dadas por:

$$\vec{V}_{NR} = u\vec{i} + (v - er)\vec{j}, \quad (2.52)$$

$$\vec{V}_R = (u - h\phi r)\vec{i} + (v + hp + cr)\vec{j}, \quad (2.53)$$

$$\vec{\omega}_R = p\vec{i} + (r + \theta_{RP})\vec{k}, \quad (2.54)$$

$$\begin{bmatrix} H_{Rx} \\ H_{Ry} \\ H_{Rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ r + \theta_{RP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{xx})_{RP} - (I_{xz})_R(r + \theta_{RP}) \\ 0 \\ -(I_{xz})_{RP} + (I_{zz})_R(r + \theta_{RP}) \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

onde I_{xx} é o produto de inércia do eixo x em relação a ele mesmo e I_{xz} é o produto de inércia do eixo x em relação ao eixo z.

Consequentemente,

$$T_{NR} = \frac{1}{2}m_{NR}[u^2 + (v - er)^2] + \frac{1}{2}(I_{zz})_{NR}r^2, \quad (2.56)$$

$$T_R = \frac{1}{2}m_R[(u - h\phi r)^2 + (v + hp + cr)^2] + \frac{1}{2}(I_{xx})_{RP}p^2 - (I_{xz})_R(r + \theta_{RP})p + \frac{1}{2}(I_{zz})_R(r + \theta_{RP})^2. \quad (2.57)$$

Aplicando a equação de Lagrange para Y e ψ utilizando T e para ϕ utilizando T_R (a massa não rolante não tem contribuição para a dinâmica de ϕ), obtém-se

$$\sum F_y = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Y} = m(\dot{v} + ur) + m_R h \dot{p}, \quad (2.58)$$

$$\sum M_z = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = I_z \dot{r} + I_{xz} \dot{p}, \quad (2.59)$$

$$\sum M_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_R}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = I_x \dot{p} + I_{xz} \dot{r} + h r m_R (u - h \phi r) = I_x \dot{p} + I_{xz} \dot{r} + m_R h (\dot{v} + ur). \quad (2.60)$$

A variável I_x representa o momento de inércia do veículo em relação ao eixo x e I_z representa o momento de inércia do veículo em relação ao eixo z. Foram negligenciados os termos angulares de segunda ordem ou ordens maiores. Mais detalhes sobre os cálculos no apêndice B do livro [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014, p. 385-390\)](#)

As equações dinâmicas obtidas para o modelo com três graus de liberdade são:

$$\sum F_y = m(\dot{v} + ur) + m_R h \dot{p} \quad (2.61)$$

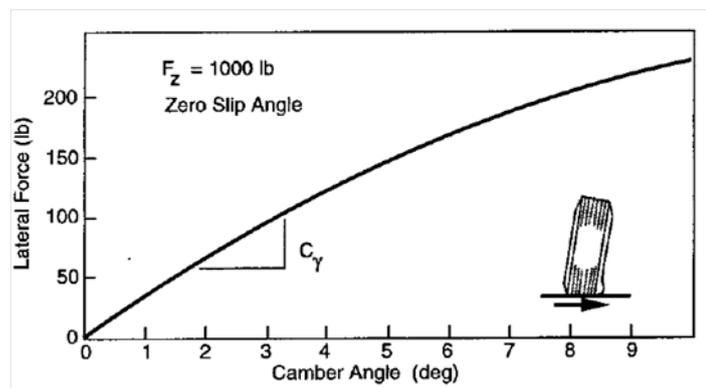
$$\sum M_z = I_z \dot{r} + I_{xz} \dot{p} \quad (2.62)$$

$$\sum M_x = I_x \dot{p} + I_{xz} \dot{r} + m_R h (\dot{v} + ur) \quad (2.63)$$

Segunda Etapa

A força lateral produzida pelo pneu também é dependente da inclinação do pneu, para fora, que deforma o mesmo, como mostrado na [Figura 11](#). O ângulo de inclinação do pneu em relação a roda é conhecido como ângulo de curvatura (do inglês, camber angle), γ . A curvatura em uma roda produz a força lateral conhecida como impulso de curvatura (do inglês, camber thrust) ([GILLESPIE, 1992, p.217-219](#)).

Figura 11 – Gráfico da força lateral desenvolvida versus o ângulo de curvatura



Fonte: [Gillespie \(1992, p. 217\)](#)

Embora a relação seja entre o ângulo de curvatura e a força lateral seja não linear, para pequenos ângulos, a força de curva pode ser considerada proporcional ao ângulo de deslizamento e obtida por

$$F_y = C_\gamma \gamma. \quad (2.64)$$

A constante de proporcionalidade C_γ é conhecida como rigidez da curvatura em curvas, sendo definida como a inclinação da curva de F_y versus γ em $\gamma = 0$.

A rigidez da curvatura em curvas depende de várias propriedades do pneu, sendo a pressão no mesmo a principal. A velocidade e a carga, contudo, tem pouca influência sob as forças de curvatura produzidas por pneus.

Sendo assim, a força lateral total é dada pela soma da força de curva e do impulso de curvatura:

$$F_y = C_\gamma \gamma + C_\alpha \alpha. \quad (2.65)$$

Como apenas a força de impulso no eixo y (lateral) é considerada e apenas os pneus frontais inclinam-se na curva, tem-se

$$F_{yf} = C_{\gamma f} \frac{\partial \gamma_f}{\partial \phi} \phi + C_{\alpha f} \alpha_f. \quad (2.66)$$

Tem-se então que as forças externas e momentos que agem no veículo são dadas por

$$\sum F_y = C_{\alpha f} \alpha_f + C_{\alpha t} \alpha_t + C_{\gamma f} \frac{\partial \gamma_f}{\partial \phi} \phi = C_{\alpha f} \left(\delta_f - \beta - \frac{ar}{u} \right) + C_{\alpha t} \left(\frac{\partial \delta_f}{\partial \phi} \phi - \beta + \frac{br}{u} \right) + C_{\gamma f} \frac{\partial \gamma_f}{\partial \phi} \phi, \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \sum M_z &= a \left[C_{\alpha f} \alpha_f + C_{\gamma f} \frac{\partial \gamma_f}{\partial \phi} \phi \right] - b C_{\alpha t} \alpha_t + \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_f} \alpha_f + \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_t} \alpha_t \approx \\ &a C_{\alpha f} \left(\delta_f - \beta - \frac{ar}{u} \right) + a C_{\gamma f} \frac{\partial \gamma_f}{\partial \phi} \phi - b C_{\alpha t} \left(\frac{\partial \delta_f}{\partial \phi} \phi - \beta + \frac{br}{u} \right), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\sum M_x = (m_R g h - K_R) \phi - c_R \dot{\phi}, \quad (2.69)$$

onde K_R é o coeficiente de rigidez da suspensão e c_R é o seu coeficiente amortecimento. As variáveis β_f , a , b , α_f , α_t são as mesmas do modelo com dois graus de liberdade, sendo β_f o ângulo de orientação dos pneus dianteiros (que é o mesmo ângulo de orientação do volante), a a distância do centro de massa aos pneus dianteiros, b a distância do centro de massa aos pneus traseiros, α_f o ângulo de deslizamento dos pneus dianteiros (devido às forças de curva), α_t o ângulo de deslizamento dos pneus traseiros (devido às forças de curva).

A aproximação feita na [Equação 2.68](#) é justificada pelo fato de que o momento M_z gerado tem aproximadamente duas ordens de magnitude menores do que o momento gerado pelas forças laterais.

O Modelo

Igualando-se as expressões obtidas em cada etapa anterior, obtém-se as as equações de movimento para o modelo dinâmico lateral com três graus de liberdade:

$$Y_\beta \beta + Y_r r + Y_\phi \phi + Y_{\delta_f} \delta = m(u\dot{\beta} + ur) + m_R h \dot{p}, \quad (2.70)$$

$$N_\beta \beta + N_r r + N_\phi \phi + N_{\delta_f} \delta = I_z \dot{r} + I_{xz} \dot{p}, \quad (2.71)$$

$$L_\phi \phi + L_p p = I_x \dot{p} + I_{xz} \dot{r} + m_R h (\dot{v} + ur), \quad (2.72)$$

onde

$$m = m_{NR} + m_R ;$$

$$I_x = I_{xx|R} + m_R h^2 - 2\theta_R I_{xz|R} + \theta_R^2 I_{zz|R} ;$$

$$I_{xz} = m_R h c - I_{xz|R} + \theta_R I_{zz|R} ;$$

$$I_z = I_{zz|R} + I_{zz|NR} + m_R c^2 + m_{NR} e^2 ;$$

$$Y_\beta = -(C_{\alpha_f} + C_{\alpha_t}) ;$$

$$Y_r = \frac{-aC_{\alpha_f} + bC_{\alpha_t}}{u} ;$$

$$Y_\phi = C_{\alpha_f} \frac{\partial \delta_t}{\partial \phi} + C_{\alpha_t} \frac{\partial \gamma_f}{\partial \phi} ;$$

$$Y_\delta = C_{\alpha_f} ;$$

$$N_\beta = -aC_{\alpha_f} + bC_{\alpha_t} ;$$

$$N_r = - \left(\frac{-a^2 C_{\alpha_f} + b^2 C_{\alpha_t}}{u} \right) ;$$

$$N_\phi = aC_{\gamma_f} \frac{\partial \gamma_f}{\partial \phi} - bC_{\alpha_t} \frac{\partial \delta_f}{\partial \phi} ;$$

$$N_\delta = aC_{\alpha_f} ;$$

$$L_p = -c_R ;$$

$$L_\phi = m_R g h - k_R .$$

Na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} mu & 0 & m_R h & 0 \\ 0 & I_z & I_{xz} & 0 \\ m_R h u & I_{xz} & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_\beta & mu - Y_r & 0 & -Y_\phi \\ -N_\beta & -N_r & 0 & -N_\phi \\ 0 & m_R h u & -L_p & -L_\phi \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\delta \\ N_\delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_f. \quad (2.73)$$

Observa-se que a [Equação 2.73](#) não se encontra na forma padrão de espaço de estados, $\dot{x} = Ax + B\delta_f$, mas sim na forma $E\dot{x} + Fx = G\delta_f$, com $x = [\beta \ r \ p \ \phi]^T$. Isto ocorre devido ao fato de o momento de inércia I_z ser dependente de estados (pois depende dos

valores de c e e , que são funções de ϕ) e, conseqüentemente, a equação [Equação 2.73](#) é não linear.

Ignorando-se a influência do ângulo de rolamento em I_z , que é justificável pelo fato da dependência ser de segunda ordem, pode-se então transformar a equação para a formatação de espaço de estados tradicional, com $A = -E^{-1}F$ e $B = E^{-1}G$.

O modelo com três graus de liberdade para o caso de curvas em equilíbrio pode ser obtido utilizando a equação [Equação 2.73](#), fazendo $d/dt = 0$.

Neste capítulo foram apresentados os estudos realizados com relação às dinâmicas veiculares longitudinal e lateral. Pode-se concluir que as mesmas são complexas, necessitando a utilização de simuladores, por exemplo, para a verificação e análise de suas respostas aos diferentes estímulos e condições iniciais de funcionamento.

3 Desenvolvimento

Além do estudo e compreensão dos modelos matemáticos que descrevem as dinâmicas longitudinal e lateral de veículos, explicitados no [Capítulo 2](#), foram construídos simuladores para cada dinâmica.

Para o desenvolvimento dos simuladores foram utilizados o software e a linguagem de programação MATLAB, juntamente com o ambiente de desenvolvimento da interface gráfica do usuário GUIDE (Graphical User Interface Development Environment), também do MATLAB.

O algoritmo de integração numérica utilizado foi o Runge-Kutta de quarta-ordem, cuja implementação foi feita pelo aluno para que o programa seja facilmente traduzido da linguagem MATLAB para outras linguagens de programação, como por exemplo C Sharp. O material utilizado como base foi o [Bequette \(1998\)](#).

O algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem é uma ferramenta de integração de somente um passo, muito popular, sendo geralmente a primeira escolha na resolução de ODEs (Equações Diferenciais Ordinárias). A função ODE 45, por exemplo, é um método de resolução de equações diferenciais baseado no algoritmo de Runge-Kutta (4,5).

Os valores para as propriedades e características dos veículos foram retirados do livro [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014\)](#).

3.1 Simulador da dinâmica longitudinal

O simulador da dinâmica longitudinal desenvolvido toma como base a equação diferencial ordinária, não linear, obtida dos estudos de modelagem ([Equação 2.10](#)):

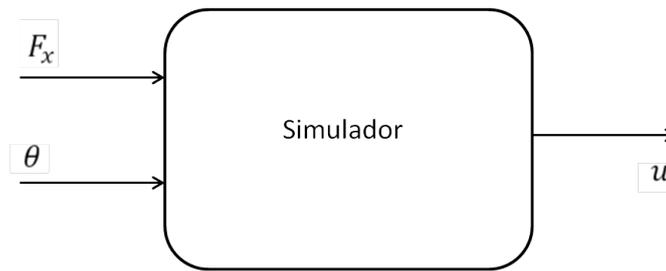
$$m \frac{du}{dt} = F_x - mg \sin \theta - fmg \cos \theta - 0.5\rho C_d A (u + u_w)^2.$$

O modelo obtido apresenta como entradas a força de tração, F_x , aplicada pelo motorista, e a inclinação, θ , da pista sob a qual o veículo se encontra. Como saída, é obtida a velocidade longitudinal do veículo, u .

Dados do veículo:

- Massa(m): 1000 kg
- Densidade do ar(ρ): 1.202 kg/m³
- Coeficiente de resistência ao rolamento(f): 0.015

Figura 12 – Entradas e saídas do sistema



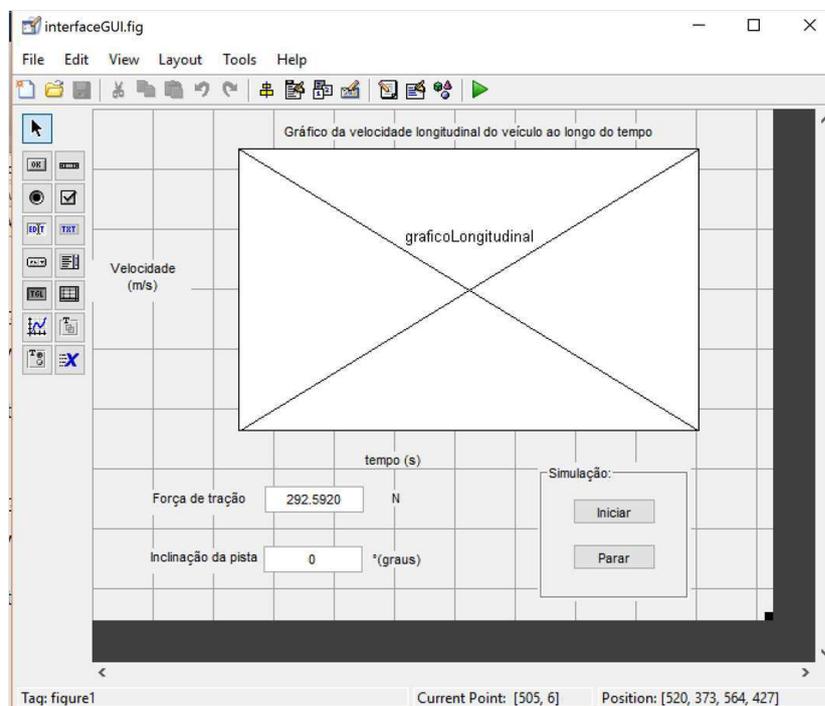
Fonte: Autor

- Área máxima de seção lateral(A): $1m^2$
- Coeficiente de arrasto(C_d): 0.5
- Velocidade do vento(u_w): $2 m/s$

Interface gráfica:

A interface gráfica construída para o simulador é apresentada na [Figura 13](#).

Figura 13 – Interface no GUIDE da dinâmica veicular Longitudinal



Fonte: Autor

Programa:

O arquivo `interfaceGUI.m` consiste o programa principal, o qual contém as ações a serem executadas na inicialização do simulador e em cada ato feito pelo usuário.

Ao se clicar no botão *iniciar*, para que a simulação comece, o timer é inicializado. A função `integrODE45.m` é chamada a cada interrupção do timer; esta função contém o algoritmo do método de Runge-Kutta e realiza a integração numérica da função que está em `funcao.m`.

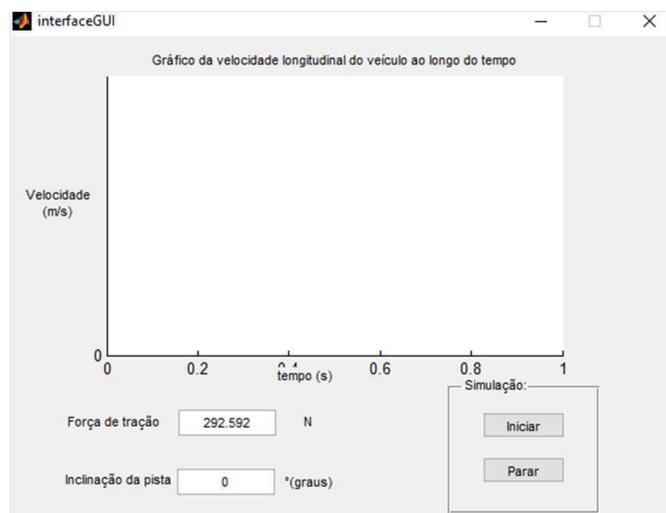
Simulador:

Ao abrir o simulador, a janela inicial do mesmo que aparece para o usuário está exibida na [Figura 3.1](#).

Clicando no botão *Iniciar*, a simulação em tempo real é iniciada com o carro a uma velocidade de 20m/s e com a aplicação da força F_x necessária para a permanência desta velocidade ($F_{x0} = 292.582$).

O usuário pode observar os efeitos da inclinação da pista ou da aceleração feita pelo motorista ao alterar os valores referentes aos mesmos na janela de simulação. O gráfico presente no simulador mostra o comportamento da velocidade longitudinal ao longo do tempo. Ao se clicar no botão *Parar*, a simulação é encerrada.

Figura 14 – Simulador da dinâmica veicular Longitudinal



Fonte: Autor

3.2 Simulador da dinâmica lateral

O simulador da dinâmica lateral desenvolvido toma como base as equações diferenciais ordinárias, na forma matricial, obtidas dos estudos de modelagem ([Equação 2.73](#)):

$$\begin{bmatrix} mu & 0 & m_R h & 0 \\ 0 & I_z & I_{xz} & 0 \\ m_R h u & I_{xz} & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_\beta & mu - Y_r & 0 & -Y_\phi \\ -N_\beta & -N_r & 0 & -N_\phi \\ 0 & m_R h u & -L_p & -L_\phi \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\delta \\ N_\delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_f.$$

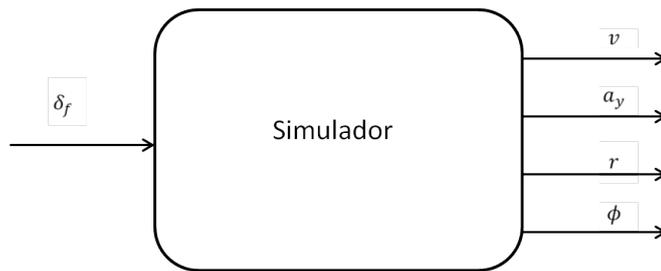
O modelo obtido apresenta como entrada a inclinação, δ_f , aplicada pelo motorista ao volante. Ignorando a influência do ângulo de rolamento em I_z , pode-se transformar a equação na forma $E\dot{x} + Fx = G\delta_f$ em uma equação na forma de espaço de estados $\dot{x} = Ax + Bu$, com $A = E^{-1}F$ e $B = E^{-1}G$. A obtenção das matrizes A e B é feita utilizando os recursos de inversão de matrizes do MATLAB.

Para que as variáveis de saídas do sistema sejam a velocidade lateral (v), a aceleração lateral (a_y), a taxa de guinada (r) e o ângulo de rolamento (ϕ), do veículo, deve-se ter $y = [v \ a_y \ r \ \phi]^T$. Assim, $y = Cx + D\delta_f$, com:

$$C = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ u * A(1, :) + [0100] & + (m_R * h/m) * A(3, :) & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ u * B(1) + (m_R * h/m) * B(3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Figura 15 – Entradas e saídas do sistema



Fonte: Autor

Dados do veículo:

- Massa rolante(m_R): 1363.64 kg
- Massa não rolante(m_{NR}): 136.36 kg
- Massa total(m): 1500 kg
- Distância entre o centro de massa e o eixo das rodas dianteiras (a): 1.14 m

- Distância entre o centro de massa e o eixo das rodas traseiras (b): 1.4 m
- Distância entre o eixo das rodas dianteiras e o eixo das rodas traseiras (L): 1.54 m
- Distância ao longo do eixo x entre o centro de massa e o centro de massas rolante (c): 0.14 m
- Distância ao longo do eixo x entre o centro de massa e o centro de massas não rolante (e): 1.4 m
- Distância vertical entre o centro de massas rolante e o eixo de rotação (h): 0.35 m
- Ângulo do eixo de rotação (θ_R): 5 graus
- Rigidez da curvatura em curvas dos pneus dianteiros($C_{\gamma f}$): 2000*2 N/rad
- Rigidez em curvas dos pneus dianteiros($C_{\alpha f}$): 44000*2 N/rad
- Rigidez em curvas dos pneus traseiros($C_{\alpha t}$): 47000*2 N/rad
- Coeficiente de rigidez da suspensão (K_R): 700*180/ π Nm por radiano
- Coeficiente amortecimento da suspensão (c_R): 21.0*180/ π Nm por rad/seg
- Velocidade longitudinal (u): 33.7256 m/s

Momentos de inércia:

- $I_{zzNR} = 220.0Kgm^2$
- $I_{zzR} = 2200.0Kgm^2$
- $I_{xxR} = 400.0Kgm^2$
- $I_{xzR} = 75.0Kgm^2$

Interface gráfica:

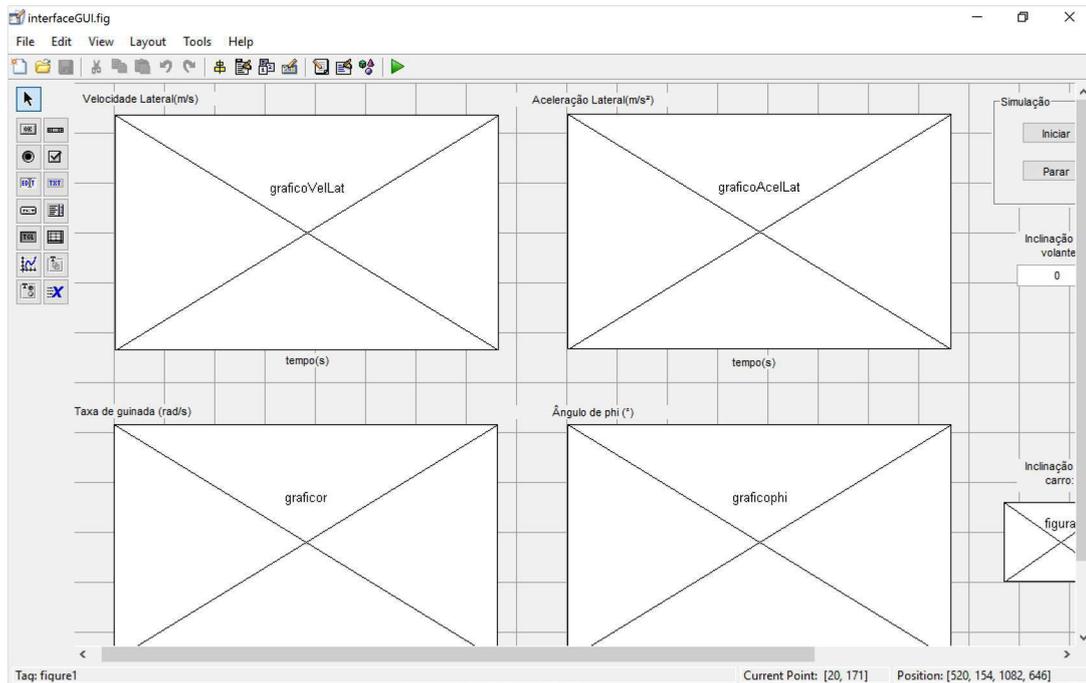
A interface gráfica construída para o simulador é apresentada na [Figura 16](#). Além das entradas e saídas do modelo, foi colocado uma figura na lateral direita da tela para que o usuário veja a inclinação frontal, em tempo real, do veículo em relação à pista.

Programa:

O arquivo interfaceGUI.m consiste no programa principal, o qual contém as ações a serem executadas na inicialização do simulador e em cada ato feito pelo usuário.

Ao se clicar no botão *iniciar*, para que a simulação comece, o timer é inicializado. A função integrODE45.m é chamada a cada interrupção do timer; esta função contém o

Figura 16 – Interface no GUIDE da dinâmica veicular Lateral



Fonte: Autor

algoritmo do método de Runge-Kutta e realiza a integração numérica da função que está em `funcao.m`.

Simulador:

Ao abrir o simulador, a janela inicial do mesmo que aparece para o usuário está exibida na [Figura 17](#).

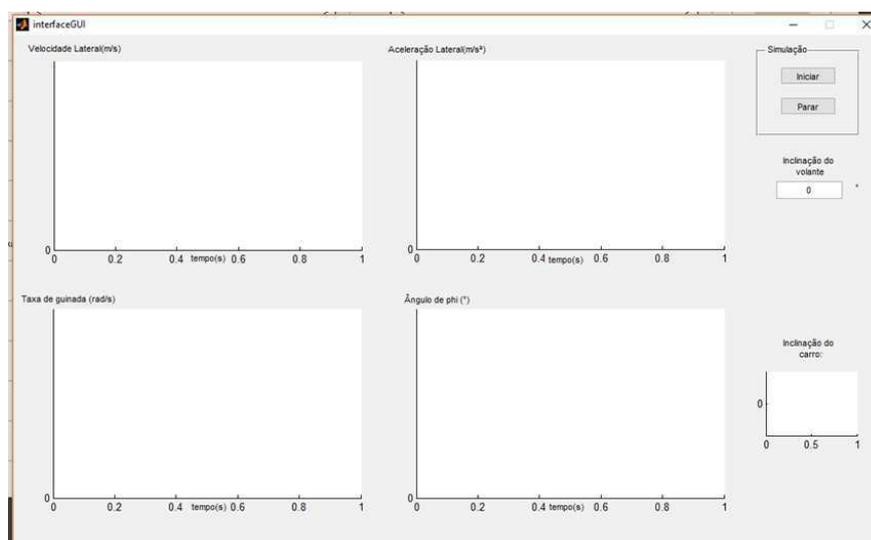
Ao se clicar no botão *Iniciar*, a simulação em tempo real é iniciada com o carro a uma velocidade longitudinal constante de 33.7256 m/s e inclinação do volante nula.

O usuário pode observar os efeitos da inclinação do volante feita pelo motorista ao alterar o valores do mesmo na janela de simulação. Nos gráficos presentes no simulador são mostrados os comportamentos das saídas do sistema ao longo do tempo.

Ao se clicar no botão *Parar*, a simulação é encerrada.

Neste capítulo foram apresentados os simuladores desenvolvidos no projeto, um para cada dinâmica estudada. Os mesmos apresentam fácil manipulação, apesar das formulações matemáticas envolvidas para a obtenção das variáveis de saída serem complexas.

Figura 17 – Simulador da dinâmica veicular Lateral



Fonte: Autor

4 Resultados

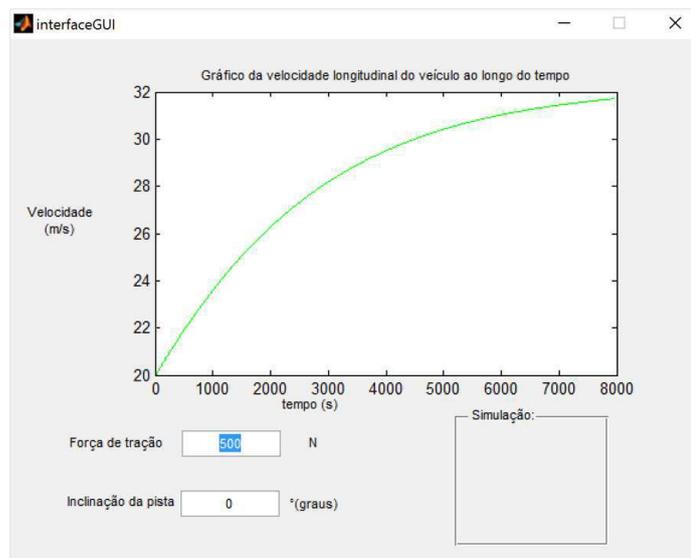
O trabalho apresentado neste documento resultou no desenvolvimento de dois simuladores, um para a dinâmica veicular longitudinal e outro para a lateral, que funcionam em tempo real. São apresentadas a seguir algumas simulações feitas utilizando os mesmos.

4.1 Simulações utilizando o simulador da dinâmica longitudinal

Nesta seção são apresentadas as simulações para a resposta ao degrau de cada uma das entradas do simulador da dinâmica longitudinal, separadamente.

Para a simulação da [Figura 18](#), foi aplicado um degrau na força de tração com o valor de $500N$ logo após o início da simulação.

Figura 18 – Simulação da resposta ao degrau na força de tração

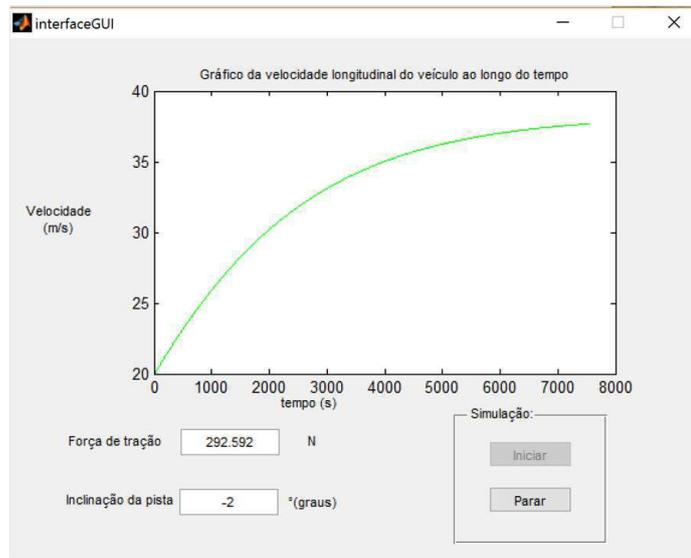


Fonte: Simulador da dinâmica longitudinal

Para a simulação da [Figura 19](#), foi aplicado um degrau na inclinação da pista com o valor de -2 graus logo após o início da simulação.

Em ambos os casos, observa-se que a dinâmica longitudinal é bastante lenta, levando aproximadamente 8000 segundos para o veículo atingir a nova velocidade de equilíbrio. Em geral, para a mudança de velocidades, forças bem mais altas do que as de equilíbrio são aplicadas até que o veículo atinja velocidades próximas da desejada, e depois é que a força de equilíbrio para a velocidade desejada é mantida. Este comportamento esta

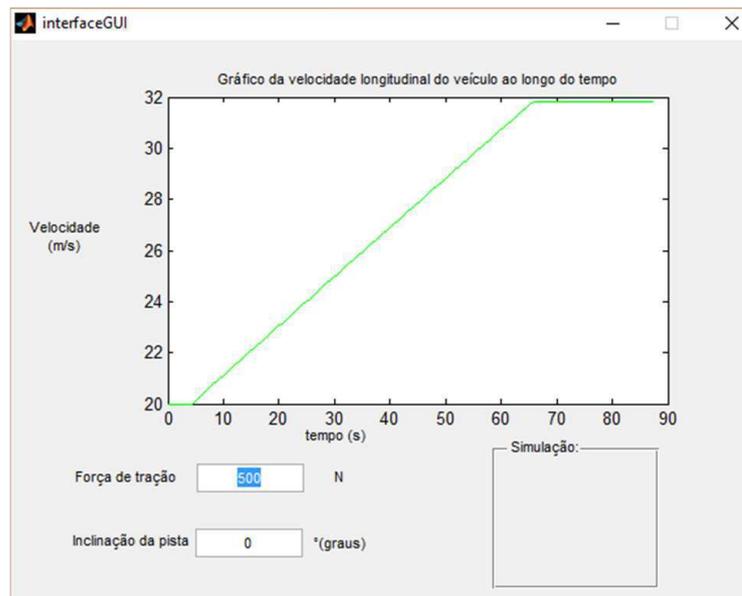
Figura 19 – Simulação da resposta ao degrau na inclinação da pista



Fonte: Simulador da dinâmica longitudinal

apresentado na simulação da Figura 20, na qual foi aplicada uma força de $10000N$ até que fosse atingida a velocidade de $32m/s$ e em seguida foi aplicada uma força de $500N$.

Figura 20 – Simulação do procedimento usual de mudança de velocidade

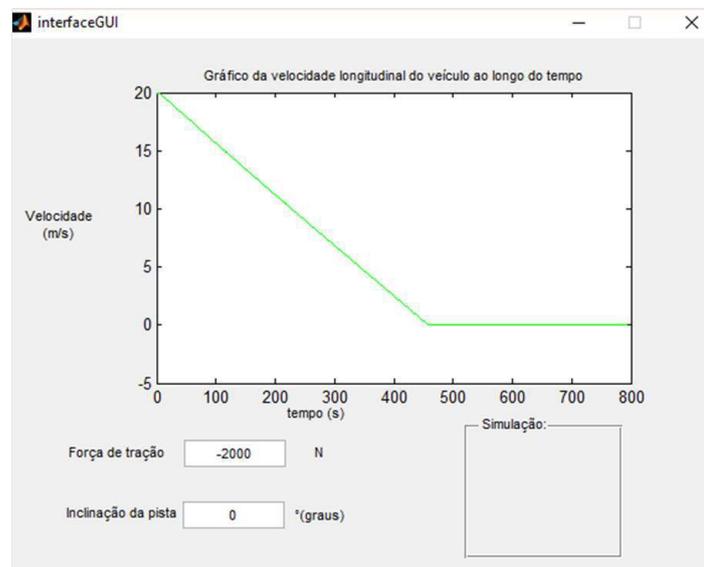


Fonte: Simulador da dinâmica longitudinal

Para finalizar, foi feita uma simulação semelhante à do programa *Ex4_3.m* de [Ulsoy, Peng e Çakmakci \(2014, p.61\)](#), para a verificação dos resultados dados pelo simulador. As

curvas obtidas têm o mesmo formato, com diferenças apenas numéricas (relacionadas aos tipos dos carros utilizados).

Figura 21 – Simulação para a verificação do simulador



Fonte: Simulador da dinâmica longitudinal

4.2 Simulações utilizando o simulador da dinâmica lateral

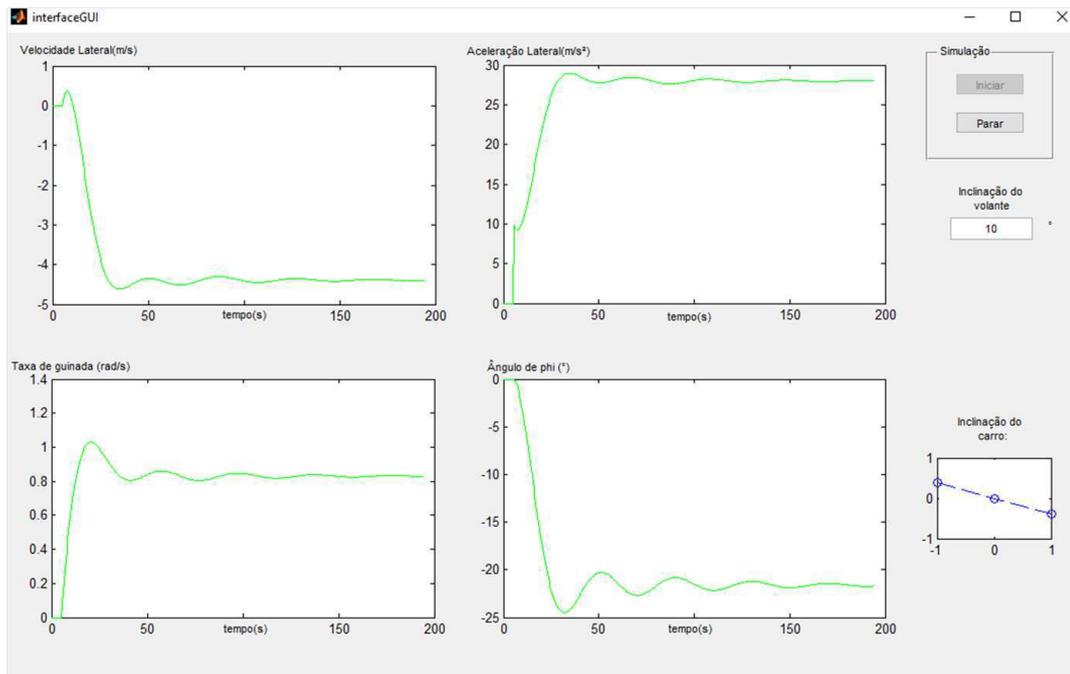
Para o teste do simulador da dinâmica lateral, foram feitos três experimentos. No primeiro, cujo resultado encontra-se na [Figura 22](#), foi aplicada uma inclinação de 10 graus ao volante. No segundo, [Figura 23](#), que é uma continuação do primeiro, o volante voltou à inclinação de 0 graus, após o veículo ter atingido a estabilidade na curva.

Na terceira simulação, [Figura 24](#), foi colocada uma inclinação do volante de 10 graus aos 5 segundos, de -10 aos 60s e de 0 graus em 100s.

Em ambos os casos, observa-se que a dinâmica lateral é relativamente rápida, levando aproximadamente 180 segundos para o veículo atingir novos valores de equilíbrio, a depender das condições iniciais e do novo valor de inclinação do volante.

Observa-se, com estas simulações, a complexidade do modelo da dinâmica veicular lateral. Ainda assim, algumas conclusões podem ser feitas. A aceleração lateral, por exemplo, não é dada apenas pela derivada da velocidade lateral e tem dependência direta da inclinação do volante (observam-se degraus na aceleração com a aplicação de degraus na inclinação do volante). Conclui-se também, com os resultados do gráfico do ângulo ϕ , que a inclinação do volante influencia bastante no grau de liberdade do rolamento, sendo

Figura 22 – Simulação 1 da dinâmica lateral

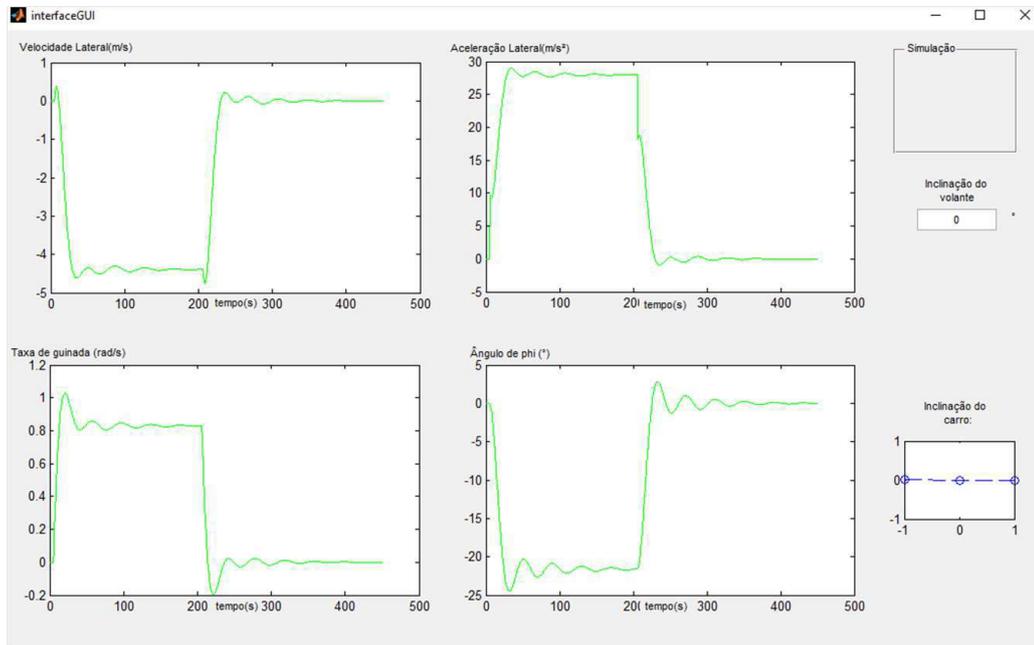


Fonte: Simulador da dinâmica lateral

o modelo com três graus de liberdade importante para automóveis com características similares as do veículo utilizado.

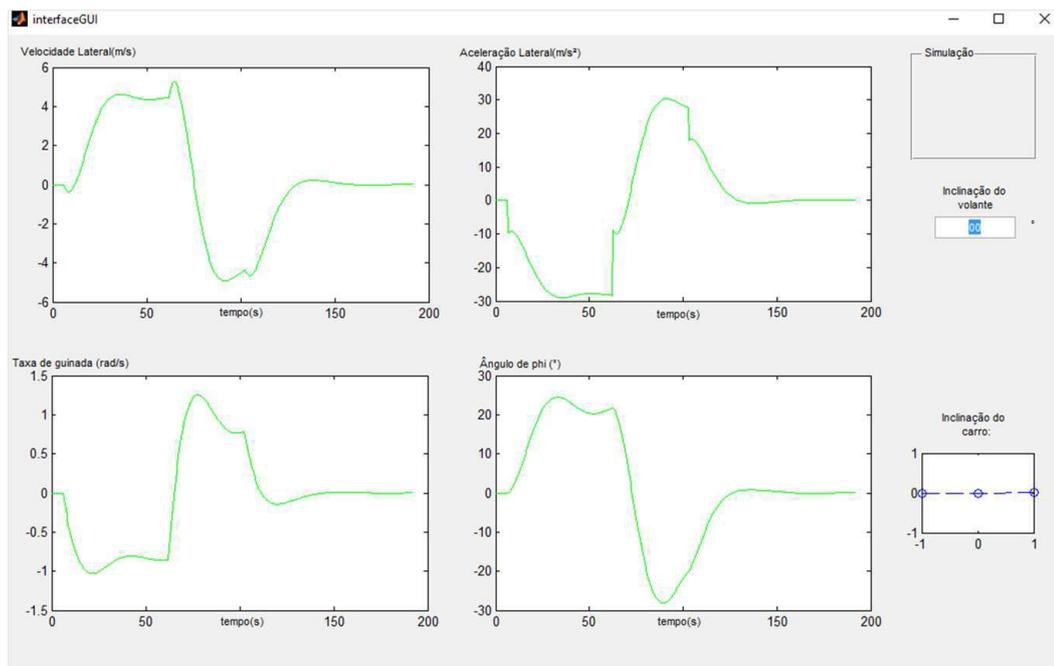
Neste capítulo foram apresentados os alguns experimentos realizados com os simuladores desenvolvidos no projeto. Com as simulações, observa-se que a dinâmica lateral é muito mais rápida do que a lateral. Este fato pode ser utilizado para uma futura integração entre as dinâmicas, de modo que a velocidade longitudinal, u , obtida pela dinâmica longitudinal, tem apenas seus valores atualizados no modelo da dinâmica lateral.

Figura 23 – Simulação 2 da dinâmica lateral



Fonte: Simulador da dinâmica lateral

Figura 24 – Simulação 3 da dinâmica lateral



Fonte: Simulador da dinâmica lateral

5 Conclusão

Obteve-se com sucesso a construção de simuladores para as dinâmicas longitudinal e lateral de veículos, funcionando em tempo real e apresentando uma interface simples e prática com o usuário.

Os simuladores desenvolvidos utilizam as equações diferenciais obtidas para cada dinâmica e, para a integração, é utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Ademais, a qualquer momento o usuário pode modificar os valores das entradas, sendo imediata a resposta do sistema às novas condições.

Como proposta de refinamentos para pesquisas similares posteriores, tem-se a adição de outros tipos de carros, a mudança das velocidades de simulação, a construção do modelo vertical e a integração dos modelos das diferentes dinâmicas.

Além disso, podem ser construídos novos simuladores com os controladores relacionados a cada dinâmica, a exemplo de controladores de cruzeiro e de avanço, para a dinâmica longitudinal, e de controladores de estabilidade, para a dinâmica lateral.

Referências

- BEQUETTE, B. W. *Process dynamics: modeling, analysis, and simulation*. Upper Saddle River, New Jersey 07458 - USA: Prentice Hall PTR, 1998. Citado na página 36.
- BOSCH, R. *Automotive Handbook*. New York - USA: John Wiley and Sons, Inc, 2009. Citado na página 18.
- GILLESPIE, T. D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Warrendale - PA 15096-001: Society of Automotive Engineers, Inc., 1992. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 20, 21 e 32.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentals of Physics Extended*. 10. ed. Rio de Janeiro - BR: John Wiley and Sons, Inc., 2005. Citado na página 16.
- SYMON, K. R. *Mechanics*. 3. ed. Massachusetts - USA: Addison-Wesley, Inc. Reading, 1971. Citado na página 17.
- ULSOY, A.; PENG, H.; ÇAKMAKCI, M. *Automotive Control Systems*. 1. ed. Rio de Janeiro - BR: Cambridge University Press, 2014. Citado 11 vezes nas páginas 15, 17, 19, 22, 23, 26, 29, 30, 32, 36 e 44.
- WONG, J. Y. *Theory of Ground Vehicles*. 3. ed. New York - USA: John Wiley and Sons, Inc, 2001. Citado na página 19.