



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Engenharia Elétrica e Informática
Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

Danilo Brito de Almeida

**Estimação da SNR sob Canal com Desvanecimento
Complexo pelos Métodos dos Momentos e da Curtose
Complexa.**

Campina Grande - Paraíba - Brasil

Agosto de 2016.

Danilo Brito de Almeida

**Estimação da SNR sob Canal com Desvanecimento
Complexo pelos Métodos dos Momentos e da Curtose
Complexa.**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Comunicações Móveis.

Prof. Wamberto José Lira de Queiroz, D.Sc.
Orientador

Campina Grande - Paraíba - Brasil
Agosto de 2016

Danilo Brito de Almeida

**Utilização da Função Cumulativa de Probabilidade
Empírica para Estimação da Relação Sinal Ruído em
Canais com Desvanecimento Complexo.**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado. Campina Grande, Brasil, 10 de Agosto de 2016

Wamberto José Lira de Queiroz

Orientador

Bruno Barbosa Albert

Convidado

Campina Grande - Paraíba - Brasil

Agosto de 2016.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus que me sustenta com Sua graça. Sem Ele não teria força para chegar até aqui.

Um agradecimento especial ao meu querido pai (Antonio de Almeida) que é um grande exemplo a seguir e à minha mãe (Rosângela Cosme Brito de Almeida) que sempre lutou ao meu lado.

À minha esposa Mirenia Kalina Teixeira de Brito que esteve ao meu lado, me apoiando, me incentivando e suportando minhas intempéries até aqui.

Agradeço aos meus amigos de graduação, especialmente ao grupo formado por Edvaldo Ângelo, Leonardo Jordão, Glauber Dantas, Márcio Herson, Rubem Aragão e Rodrigo César, pelas grandes amizades formadas, pelas noites de estudo e principalmente pelo apoio dado durante essa jornada.

A Damião Fernandes pelas inúmeras horas de debate, a Danilo Freire, cuja amizade não poderia ter vindo em hora melhor.

Ao professor Wamberto Queiroz, fundamental à minha formação. Excelência como orientador e professor.

Em fim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

Danilo Brito

Sumário

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	ix
Lista de Abreviaturas	x
Resumo	xi
Abstract	xii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.2 Organização do Trabalho	3
2 Fundamentação Teórica	4
2.1 Modelos de Desvanecimento em Canais Móveis	4
2.1.1 Desvanecimento Nakagami- m	5
2.1.2 Desvanecimento Rice	7
2.1.3 Desvanecimento $\eta - \mu$	9
2.1.4 Desvanecimento $\kappa - \mu$	13
2.2 Ruído Aditivo Gaussiano Branco	16
2.3 Esquemas de Modulação para Sistemas Digitais	17
2.3.1 Constelações R -QAM	17
2.3.2 Constelações θ -QAM	19
2.4 Modelo Matemático	22

3	Desenvolvimento Matemático	23
3.1	Estimador de SNR Baseado no Método da Curtose	23
3.2	Estimador de SNR Baseado no Método dos Momentos	26
3.3	Variância dos Estimadores de SNR	29
3.3.1	Variância do Estimador de SNR Baseado no Método da Curtose .	29
3.3.2	Variância do Estimador de SNR Baseado no Método dos Momentos	31
4	Resultados	34
4.1	Curtose e Relação entre os Momentos	34
4.2	Análise dos Estimadores de SNR	37
4.3	Valor Médio	39
4.4	Variância	41
5	Conclusão	46
	Referências Bibliográficas	48

Lista de Figuras

2.1	FDP da envoltória do sinal no modelo Nakagami- m para diferentes valores de σ_g^2 e $m = 1,5$	6
2.2	FDP da envoltória do sinal no modelo Nakagami- m para diferentes valores de m e $\sigma_g^2 = 1$	7
2.3	FDP da fase do sinal no modelo Nakagami- m para diferentes valores de m	7
2.4	FDP da envoltória do sinal no modelo Rice para diferentes valores de σ_g^2 e $a = 1,5$	8
2.5	FDP da envoltória do sinal no modelo Rice para diferentes valores de a e $\sigma_g^2 = 1$	9
2.6	FDP da envoltória do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores de μ , com $\eta = 0,25$ e $\sigma_g^2 = 1$	11
2.7	FDP da envoltória do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores de η , com $\mu = 0,5$ e $\sigma_g^2 = 1$	11
2.8	FDP da envoltória do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores σ_g^2 e $\eta = \mu = 0,5$	12
2.9	FDP da fase do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores η, μ e ϕ	12
2.10	FDP da envoltória do sinal no modelo $\kappa - \mu$ para diferentes valores de κ , com $\mu = 1,5$ e $\sigma_g^2 = 1$	14
2.11	FDP da envoltória do sinal no modelo $\kappa - \mu$ para diferentes valores de μ , com $\kappa = 0,5$ e $\sigma_g^2 = 1$	15
2.12	FDP da envoltória do sinal no modelo $\kappa - \mu$ para diferentes valores σ_g^2 e $\eta = \mu = 2,5$	15
2.13	FDP da fase do sinal no modelo $\kappa - \mu$ para diferentes valores κ, μ e ϕ	16

2.14	Exemplo de constelação R -QAM com dimensões 8×4	18
2.15	Exemplo de constelação θ -QAM com 16 símbolos.	20
4.1	Curtose de $r[n]$ em função da SNR (dB) para diferentes valores do parâmetro m e esquema de modulação 1024-QAM.	35
4.2	Curtose de $r[n]$ em função da SNR (dB) para diferentes valores dos parâmetros η e μ e esquema de modulação $64\pi/3$ -QAM.	35
4.3	Relação dos momentos (f_r) de $r[n]$ em função da SNR (dB) para diferentes valores do parâmetro m e esquema de modulação 1024-QAM.	36
4.4	Relação dos momentos (f_r) de $r[n]$ em função da SNR (dB) para diferentes valores dos parâmetros η e μ e esquema de modulação $64-\pi/3$ -QAM.	36
4.5	SNR (dB) em função da curtose para diferentes valores do parâmetro m e esquema de modulação 1024-QAM.	37
4.6	SNR (dB) em função da curtose para diferentes valores dos parâmetros η e μ e esquema de modulação $64-\pi/3$ -QAM.	38
4.7	SNR (dB) em função relação dos momentos (f_r) para diferentes valores do parâmetro m e esquema de modulação 1024-QAM.	38
4.8	SNR (dB) em função da relação dos momentos (f_r) para diferentes valores dos parâmetros η e μ e esquema de modulação $64-\pi/3$ -QAM.	39
4.9	Média do estimador de SNR em função da relação sinal ruído (dB) para um canal sob desvanecimento Nakagami- m , com $m = 1,5$, esquema de modulação 64-QAM e número de amostras $N = 5 \times 10^4$	40
4.10	Média do estimador de SNR em função da relação sinal ruído (dB) para uma canal sob desvanecimento $\eta - \mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,6$, esquema de modulação 64-QAM e número de amostras $N = 5 \times 10^4$	40
4.11	Variância do estimador de SNR baseado no método da curtose em função da relação sinal ruído para um canal afetado pelo desvanecimento Nakagami- m , com $m = 0,5$, utilizando um esquema de modulação 64-QAM e diferentes valores do número de amostras N	41

4.12	Variância do estimador de SNR baseado no método dos momentos em função da relação sinal ruído para um canal afetado pelo desvanecimento Nakagami- m , com $m = 0,5$, utilizando um esquema de modulação 64-QAM e diferentes valores do número de amostras N	42
4.13	Variância do estimador de SNR baseado no método da curtose em função do número da amostras N para um canal afetado pelo desvanecimento $\eta\mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,5$, utilizando um esquema de modulação 64-QAM e diferentes valores de SNR.	42
4.14	Variância do estimador de SNR baseado no método dos momentos em função do número de amostras N para um canal afetado pelo desvanecimento $\eta - \mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,5$, utilizando um esquema de modulação 64-QAM e diferentes valores de SNR.	43
4.15	Variância dos estimadores de SNR em função da relação sinal ruído (dB) para um canal sob desvanecimento Nakagami- m , com $m = 0,9$, esquema de modulação 64-QAM e número de amostras $N = 5 \times 10^4$	43
4.16	Variância dos estimadores de SNR em função do número de amostras para um canal sob desvanecimento Nakagami- m , com $m = 0,9$, esquema de modulação 64-QAM e SNR de 5 dB.	44
4.17	Variância dos estimadores de SNR em função da relação sinal ruído (dB) para um canal sob desvanecimento $\eta - \mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,6$, esquema de modulação 64-QAM e número de amostras $N = 5 \times 10^4$	44
4.18	Variância dos estimadores de SNR em função do número de amostras para um canal sob desvanecimento desvanecimento $\eta - \mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,6$, esquema de modulação 64-QAM e SNR de 5 dB.	45

Lista de Tabelas

3.1	Coeficientes do Estimador de SNR Baseado no Método da Curtose . . .	26
3.2	Coeficientes do Estimador de SNR Baseado no Método dos Momentos .	29

Lista de Abreviatura e Siglas

AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i>
BPSK	<i>Binary Phase Shift Keying</i>
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
LoS	<i>Line of Sight</i>
NCRLB	<i>Normalized Crammer Rao Lower Bound</i>
NDA	<i>Non-Data-Aided</i>
NMSE	<i>Normalized Mean Square Error</i>
OFDM	<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i>
QAM	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i>
QPSK	<i>Quaternary Phase Shift Keying</i>
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>

Resumo

A estimativa da relação sinal ruído (SNR) tem inúmeras aplicações nos sistemas de comunicação modernos, sendo aplicada a técnicas que adaptam o esquema de modulação às características do canal, bem como para diminuir o desperdício de energia no transmissor quando o mesmo opera em um canal com uma boa SNR. Neste trabalho são propostos dois estimadores de SNR, um utilizando o método dos momentos e outro que utiliza a definição de curtose de uma variável aleatória complexa, ambos para canais afetados pelos desvanecimentos complexos Nakagami- m e $\eta - \mu$. É derivada uma expressão aproximada para a variância dos estimadores de SNR e, por meio desta, é feita uma comparação entre ambos os estimadores.

Palavras-Chaves: Desvanecimento, SNR, Nakagami, Curtose.

Abstract

The estimator of the signal-to-noise ratio (SNR) has numerous applications in modern communication systems. Applied to techniques that adapt the modulation scheme to the characteristics of the channel, as well as to reduce energy consumption in the transmitter when it operates in a channel with a good SNR. This work proposes two SNR estimators, one using the method of moments and the other using the kurtosis definition of a complex random variable, both for channel affected by complex Nakagami- m and $\eta - \mu$ fading. It is derived an approximate expression for the variance of the SNR estimators, and using this parameter, a comparison is made between both estimators.

Keywords: Fading, SNR, Nakagami, Kurtosis.

Capítulo 1

Introdução

O crescimento acelerado dos sistemas de comunicação sem fio e a alta demanda espectral necessitam de sistemas eficazes e menos susceptíveis a erros. Entretanto, fenômenos como ruído térmico ou como o desvanecimento da potência do sinal recebido, causado pela propagação das ondas eletromagnéticas por múltiplos percursos, contribuem para a degradação do enlace de comunicações.

Nesse cenário, a relação sinal ruído (SNR - *Signal to Noise Ratio*) além de oferecer um excelente indicador da qualidade do canal de comunicações, pode ajudar na escolha de algoritmos adaptativos para melhorar o enlace. Técnicas como recepção com diversidade e modulação adaptativa conferem maior robustez aos sistemas de comunicações. A estimativa da SNR também possui aplicações na decodificação turbo (RAMESH; CHOCKALINGAM; MILSTEIN, 2001).

Informações sobre a SNR em um enlace de comunicações podem ser obtidas por meio de estimadores de SNR e, devido à sua importância, vários trabalhos têm sido publicados sobre tal problema. Em (GHODESWAR; POONACHA, 2015), é mostrada uma comparação entre diferentes estimadores de SNR baseados no método dos momentos, para canais AWGN (*Additive White Gaussian Noise*) e afetados pelo desvanecimento Rice.

Uma expressão analítica para estimadores de SNR polarizados utilizando símbolos de dados e símbolos piloto para esquemas de modulação BPSK (*Binary Phase Shift Keying*) e QPSK (*Quaternary Phase Shift Keying*) é mostrada em (PARK et al., 2014). Ainda neste trabalho é desenvolvida a variância do estimador de máxima verossimi-

lhança NDA (*Non-Data-Aided*). Via simulação, o autor compara o NMSE (*Normalized Mean Square Error*) do estimador proposto com o do estimador de máxima verossimilhança e o NCRLB (*Normalized Crammer Rao Lower Bound*), mostrando que o estimador polarizado apresenta um melhor desempenho em relação ao estimador de máxima verossimilhança para baixas e médias SNRs.

Em (HARRIS; DICK, 2012), o autor desenvolve um estimador de SNR utilizando a média e a variância das amostras recebida pelo método dos momentos e mostra que o mesmo apresenta um *offset* para baixas SNRs. Em seguida, apresenta uma correção ao estimador proposto, no qual utiliza o momento central de ordem três, normalizado pelo cubo do desvio padrão, para eliminar o *offset* do primeiro estimador. Ainda nesse trabalho é apresentado um estimador de SNR baseado em FFT (*Fast Fourier Transform*). Nos resultados é mostrado que o desempenho dos dois últimos estimadores de SNR, em especial o baseado em FFT, é melhor.

Um estimador cego de SNR para sinais OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) em canais com desvanecimento seletivo em frequência é apresentado em (LIU et al., 2014). Nesse trabalho é mostrado o efeito de um desvio em frequência entre o oscilador local e o sinal recebido na SNR, mostrando que a mesma diminui à medida que o desvio aumenta. Por fim, o autor mostra que o estimador proposto é pouco afetado pelo desvio em frequência.

Para que se possa calcular um estimador para a SNR em um enlace de comunicações, é necessário caracterizar estatisticamente alguns fenômenos do enlace. Um desses fenômenos é o desvanecimento da potência do sinal recebido. Algumas distribuições de probabilidade usadas para essa caracterização são as distribuições Rayleigh, Nakagami- m ou modelos mais generalizados, como $\eta - \mu$ (JUNIOR, 2006).

Neste trabalho utilizaremos o método dos momentos e a definição de curtose de uma variável aleatória complexa para estimarmos a SNR em canais com desvanecimento complexo. Apesar dos estimadores de SNR baseados no método dos momentos serem estimadores de SNR cegos, por não necessitarem de sequência de treinamento para encontrar a SNR estimada, o desempenho de tais estimadores decresce com o aumento da SNR, entretanto, atuam bem em canais com baixa SNR.

1.1 Objetivos

Os objetivos deste trabalho são apresentar um desenvolvimento matemático de estimadores de SNR baseados no método dos momentos ou utilizando o método da curtose para canais com desvanecimento complexo Nakagami- m ou $\eta - \mu$, bem como a avaliação numérica da variância e a simulação, com o auxílio do *software* MATLAB, de um canal de comunicações afetado por variações na amplitude e na fase das amostras transmitidas. Tais variações são representadas por um modelo de desvanecimento complexo, bem como pelo ruído aditivo gaussiano branco.

Diferentes estimadores apresentam comportamentos distintos dependendo das condições do enlace e da faixa da relação sinal ruído na qual os mesmos atuam. Dessa forma, é realizada uma comparação entre os estimadores de SNR propostos neste trabalho para diferentes valores da relação sinal ruído.

1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos que dão suporte ao trabalho. São tratados alguns fenômenos que podem afetar o enlace de comunicações, como o desvanecimento e o ruído. São mostrados alguns esquemas de modulação utilizados em sistemas de comunicação digital, bem como é apresentado o modelo de canal utilizado. No Capítulo 3 são desenvolvidas as expressões dos estimadores de SNR. O primeiro estimador utiliza a conceito de curtose de uma variável aleatória complexa, já o segundo foi desenvolvido a partir da relação entre o segundo e o quarto momento. Também são desenvolvidas expressões aproximadas para a variância dos estimadores de SNR propostos. A avaliação é feita por meio da variância porque a estimativa obtida é uma função não linear dos momentos amostrais e isso impossibilita o cálculo do limitante de Crammer-Rao. No Capítulo 4 são mostrados alguns resultados obtidos utilizando os estimadores de SNR estudados. São apresentados os resultados teóricos com base nas expressões analíticas encontradas no Capiítulo 3, assim como resultados de algumas simulações realizadas com o auxílio do *software* Matlab. No Capítulo 5 são feitas as considerações finais sobre o trabalho.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos que dão suporte ao trabalho. São tratados alguns fenômenos que podem afetar o enlace de comunicações, como o desvanecimento e o ruído. São mostrados alguns esquemas de modulação utilizados em sistemas de transmissão digital, bem como é apresentado o modelo de canal utilizado.

2.1 Modelos de Desvanecimento em Canais Móveis

O desvanecimento é um efeito degradativo imposto pelo canal de comunicações, sendo usualmente classificado em desvanecimento lento e desvanecimento rápido. O desvanecimento lento é caracterizado pelo sombreamento provocado por edificações ou pelo relevo da região. Esse tipo de desvanecimento também é afetado por eventos naturais tais como chuva e neve. O desvanecimento lento determina a variação média global da potência do sinal recebido e pode ter duração de minutos a várias horas.

O desvanecimento rápido é decorrente de interações construtivas e destrutivas de versões do mesmo sinal que partem do transmissor e chegam ao receptor provenientes de múltiplos percursos, os quais são causados geralmente por reflexões, efeito Doppler e difrações. O desvanecimento rápido afeta a potência instatânea do sinal e ocorre em intervalos de frações de comprimento de onda.

O desvanecimento lento pode ser modelado pela distribuição log-normal. Para o desvanecimento rápido há distribuições clássicas como Nakagami-m e Rice, contudo, recentemente foram propostos modelos mais generalizados, como o $\kappa - \mu$ e $\eta - \mu$ (YACOUB, 2007). Tais modelos incluem modelos clássicos como casos particulares. O

desvanecimento rápido é de grande importância para este trabalho, cujo enfoque está voltado para as variações rápidas impostas pelo canal.

2.1.1 Desvanecimento Nakagami- m

A distribuição Nakagami- m é de fácil manipulação matemática e possui grande aplicação na caracterização de ambientes densamente urbanos, sendo utilizada para modelar tanto o desvanecimento de fraca intensidade quanto de forte intensidade. Inicialmente foi proposta de forma empírica para o ajuste de dados experimentais coletados em regiões urbanas e suburbanas do Japão (NAKAGAMI, 1960). Um modelo físico equivalente, no qual o sinal recebido é a composição de sinais provenientes de diversos agrupamentos de múltiplos percursos, foi proposto em (YACOUB; BAUTISTA; GUEDES, 1999).

De acordo com (NAKAGAMI, 1960), a envoltória do sinal recebido no modelo Nakagami- m é composta por m sinais Rayleigh independentes e sua Função Densidade de Probabilidade (FDP) pode ser escrita como

$$f_{|g[n]|}(|g[n]|) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\sigma_g^2}\right)^m |g[n]|^{2m-1} \exp\left(-|g[n]|^2 \frac{m}{\sigma_g^2}\right), \quad |g[n]| \geq 0, \quad (2.1)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma, $\sigma_g^2 = E\left[|g[n]|^2\right]$ é a potência média do sinal, sabendo que $|g[n]|$ é uma variável aleatória contínua definida em tempo discreto n , $f_x(x)$ denota a FDP de variável aleatória x e m é o fator de desvanecimento dado por

$$m = \frac{E\left[|g[n]|^2\right]}{\text{Var}\left[|g[n]|^2\right]}. \quad (2.2)$$

Como inicialmente não havia sido proposto uma distribuição para a fase no modelo Nakagami- m , tal parâmetro era considerado uniforme. A distribuição Nakagami- m , com $m = 1$ coincide com a distribuição Rayleigh que possui fase uniforme, tal fato também se observa com a distribuição Rice ($1 \leq m \leq \infty$), contudo, a fase da distribuição Rice é não uniforme. Em (FRAIDENRAICH, 2006), é proposto um modelo para a fase

do sinal com distribuição Nakagami- m , dada por

$$f_{\theta[n]}(\theta[n]) = \frac{\Gamma(m)}{2^m \Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)} |\text{sen}(2\theta[n])|^{m-1} \quad -\pi \leq \theta[n] \leq \pi. \quad (2.3)$$

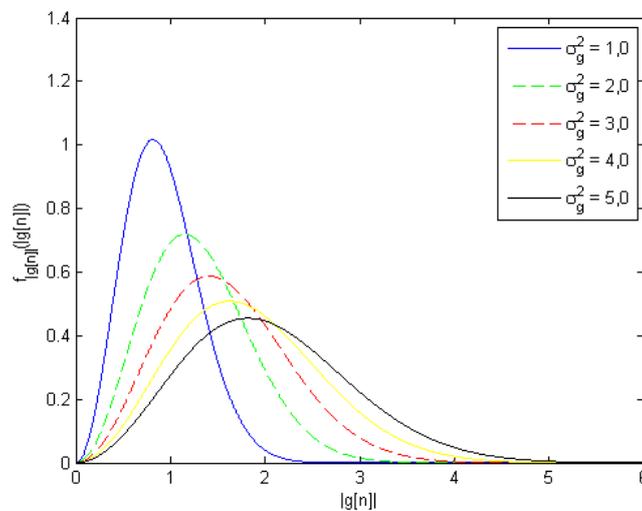
Dessa forma, a distribuição Nakagami- m é capaz de modelar as distribuições complexas Rayleigh, Rice e Hoyt.

O k -ésimo momento da envoltória do sinal para o desvanecimento Nakagami - m pode ser escrito como

$$E\left[|g[n]|^k\right] = \frac{\Gamma\left(m + \frac{k}{2}\right)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\sigma_g^2}{m}\right)^{\frac{k}{2}}. \quad (2.4)$$

A Figura 2.1 mostra o comportamento da FDP da envoltória do sinal no modelo Nakagami- m para diferentes valores de σ_g^2 .

Figura 2.1 – FDP da envoltória do sinal no modelo Nakagami- m para diferentes valores de σ_g^2 e $m = 1, 5$.

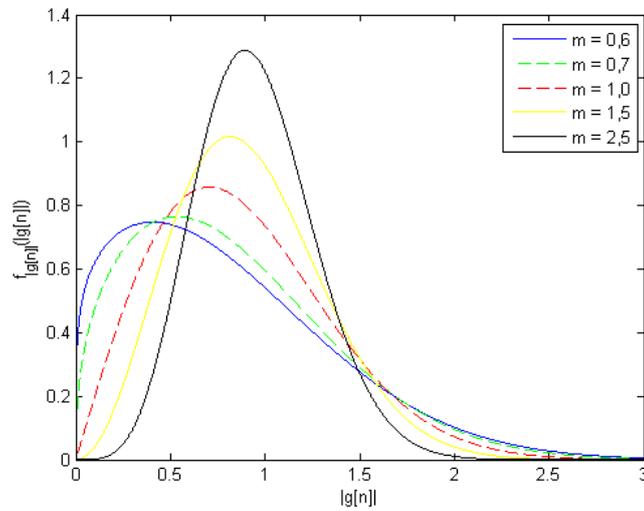


Fonte Autor

A Figura 2.2 mostra o comportamento da FDP da envoltória do sinal no modelo Nakagami- m para diferentes valores e m respectivamente.

A Figura 2.3 mostra o comportamento da FDP da fase do sinal no modelo Nakagami- m para diferentes valores de m . Nesta figura, é possível perceber que, para alguns valores do parâmetro m , a fase apresenta característica impulsiva, além disso, é mostrada a distribuição da fase para $m = 1$ (Distribuição Uniforme), o que corresponde à

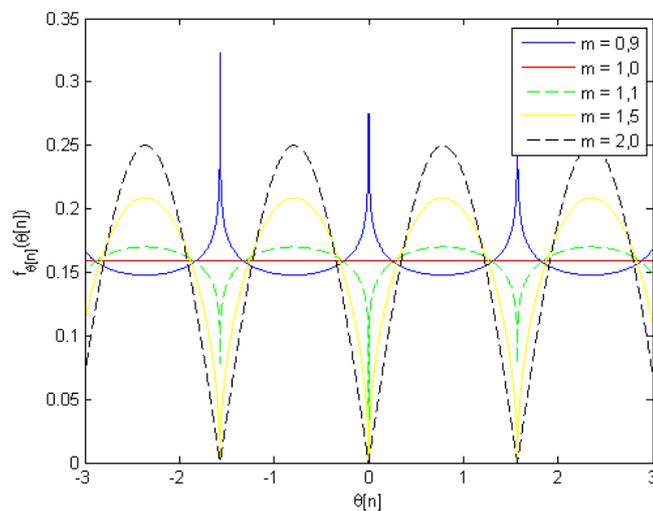
Figura 2.2 – FDP da envoltória do sinal no modelo Nakagami- m para diferentes valores de m e $\sigma_g^2 = 1$.



Fonte Autor

distribuição Rayleigh.

Figura 2.3 – FDP da fase do sinal no modelo Nakagami- m para diferentes valores de m .



Fonte Autor

2.1.2 Desvanecimento Rice

A distribuição Rice descreve as flutuações da envoltória do sinal recebido proveniente de um ambiente de propagação com múltiplos percursos com forte linha de

visada (LoS - *Line-of-Sight*) (YACOUB, 1993). Ambientes como pequenas cidades, ou regiões suburbanas são comumente modelados pela distribuição Rice. Tais regiões são caracterizadas pela baixa verticalização de suas construções e, neste cenário, as antenas transmissoras são mais altas que a maioria das edificações.

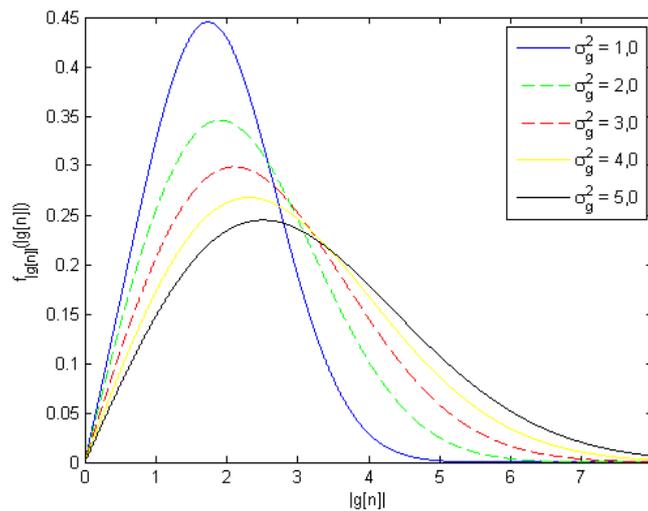
A FDP da envoltória do sinal recebido nesse modelo é escrita como (YACOUB, 1993)

$$f_{|g[n]|}(|g[n]|) = \frac{|g[n]|}{\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{|g[n]|^2 + a^2}{2\sigma_g^2}\right) I_0\left(\frac{a|g[n]|}{\sigma_g^2}\right), \quad |g[n]| \geq 0, \quad (2.5)$$

em que $I_0(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero, a representa o valor médio da componente com LoS e $\sigma_g^2 = E[|g[n]|^2]$ a potência média do sinal.

A Figura 2.4 mostra o comportamento da FDP da envoltória do sinal no modelo Rice para diferentes valores de σ_g^2 e $a = 1,5$. Por meio desta figura é possível perceber que o aumento da potência do desvanecimento (σ_g^2) é bastante degradativo ao enlace de comunicações.

Figura 2.4 – FDP da envoltória do sinal no modelo Rice para diferentes valores de σ_g^2 e $a = 1,5$.



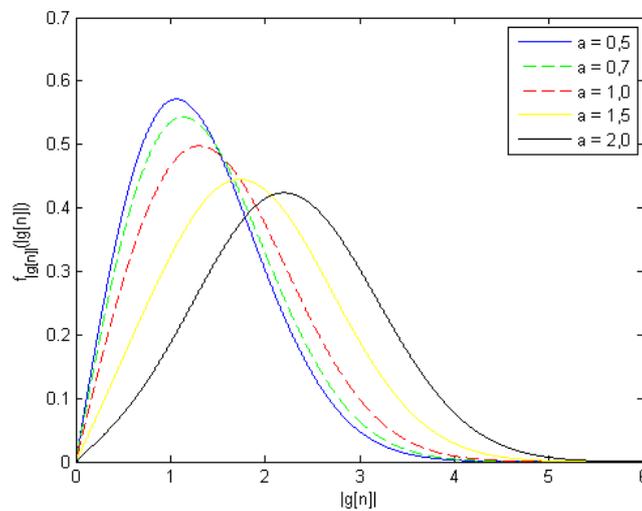
Fonte Autor

Para valores menores de σ_g^2 , os lóbulos da FDP são mais estreitos, indicando que a probabilidade da tomada de valores com amplitudes próximas é maior. O aumento de σ_g^2 promove o alargamento dos lóbulos da FDP, ou seja, amplitudes em um intervalo

maior surgem com probabilidades semelhantes. Em um sistema de comunicações digital, na qual a informação é representada por um conjunto de símbolos no espaço (constelação), menor σ_g^2 implica em uma contração ou dilatação da constelação de forma mais uniforme, por outro lado, maior σ_g^2 resulta em uma contração ou dilatação não uniforme, deformando as regiões de decisões da constelação.

A Figura 2.5 mostra o comportamento da FDP da envoltória do sinal no modelo Rice para diferentes valores de a e $\sigma_g^2 = 1$.

Figura 2.5 – FDP da envoltória do sinal no modelo Rice para diferentes valores de a e $\sigma_g^2 = 1$.



Fonte Autor

Como a distribuição Rice pode ser modelado por meio da distribuição Nakagami- m , é possível perceber uma forte semelhança entre as Figuras 2.1 e 2.4.

2.1.3 Desvanecimento $\eta - \mu$

A distribuição $\eta - \mu$ é um modelo de desvanecimento generalizado utilizado para representar situações nas quais modelos como o Nakagami- m não se aplicam. Pode ser utilizada para caracterizar desvanecimento em pequena escala, representado por variações na intensidade do sinal em curtos intervalos de tempo provenientes de propagação por múltiplos percursos, com ausência de LoS. O parâmetro $\mu \geq 0$ representa uma extensão aos números reais do parâmetro que caracteriza a quantidade de múltiplos percursos. Já o parâmetro η pode assumir duas características diferentes: razão entre as

potências dos componentes de fase e quadratura; e a correlação entre as componentes de fase e quadratura (YACOUB, 2007).

O modelo $\eta - \mu$ inclui as distribuições de Hoyt, Nakagami- m , Rayleigh e Gauss unilateral. Sua FDP é dada por (YACOUB, 2007)

$$f_{|g[n]|}(|g[n]|) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu |g[n]|^{2\mu}}{\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}(\sigma_g^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} \exp\left(-2\mu h \frac{|g[n]|^2}{\sigma_g^2}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{|g[n]|^2}{\sigma_g^2}\right), \quad |g[n]| \geq 0, \quad (2.6)$$

em que $I_\nu(x)$ representa a função de Bessel modificada de primeira tipo e ordem ν , $\sigma_g^2 = E[|g[n]|^2]$ representa a potência média do sinal e $\Gamma(\mu)$ representa a função gama.

Os parâmetros h e H para um sinal composto por agrupamentos de sinais provenientes de múltiplos percursos em um meio com espalhamento não homogêneo e com componentes de fase e quadratura independentes com potências distintas são dados por (YACOUB, 2007)

$$h = \frac{2 + \eta^{-1} + \eta}{4} \quad e \quad H = \frac{\eta^{-1} - \eta}{4}. \quad (2.7)$$

A fase do sinal no modelo $\eta - \mu$ possui fdp dada por (TEJERINA; YACOUB, 2013)

$$f_{|\theta[n]|}(\theta[n]) = \frac{\Gamma(2\mu)(1-\eta)^{\mu(1-\phi)}(1+\eta)^{\mu(1+\phi)}}{2^{2\mu}\Gamma(\mu(1-\phi))\Gamma(\mu(1+\phi))} \times \frac{|\text{sen}(2\theta[n])|^{2\mu-1}}{|\tan(\theta[n])|^{2\mu\phi}(1+\eta\cos(2\theta[n]))^{2\mu}}, \quad -\pi \leq \theta[n] \leq \pi \quad (2.8)$$

em que ϕ é um parâmetro de fase que descreve a distribuição relativa dos agrupamentos múltiplos percursos nas componentes de fase e quadratura, $-1 \leq \phi \leq 1$.

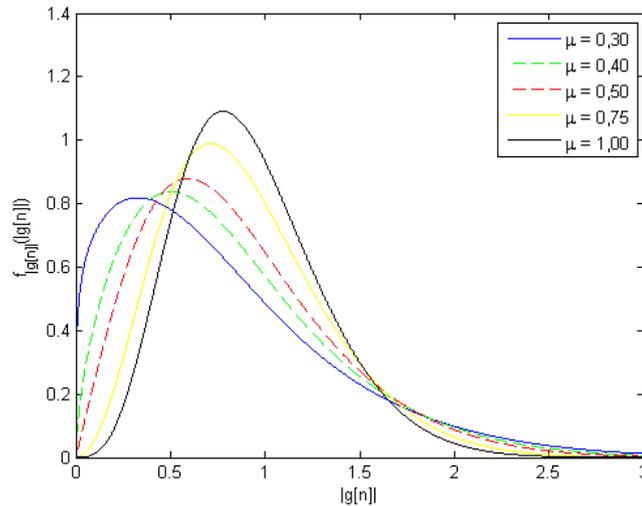
O k -ésimo momento da envoltória do sinal para o modelo $\eta - \mu$ pode ser escrito como (YACOUB, 2007)

$$E[|g[n]|^k] = \left(\sqrt{\sigma_g^2}\right)^k \frac{\Gamma\left(2\mu + \frac{k}{2}\right)}{h^{\mu+\frac{k}{2}}(2\mu)^{\frac{k}{2}}\Gamma(2\mu)} {}_2F_1\left[\mu + \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, \mu + \frac{k}{4}; \mu + \frac{1}{2}; \left(\frac{H}{h}\right)^2\right], \quad (2.9)$$

em que ${}_2F_1[a, b; c; z]$ são conhecidas como funções hipergeométricas de Gauss (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965).

A Figura 2.6 mostra o comportamento da FDP da envoltória do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores de μ com $\sigma_g^2 = 1$ e $\eta = 0,25$.

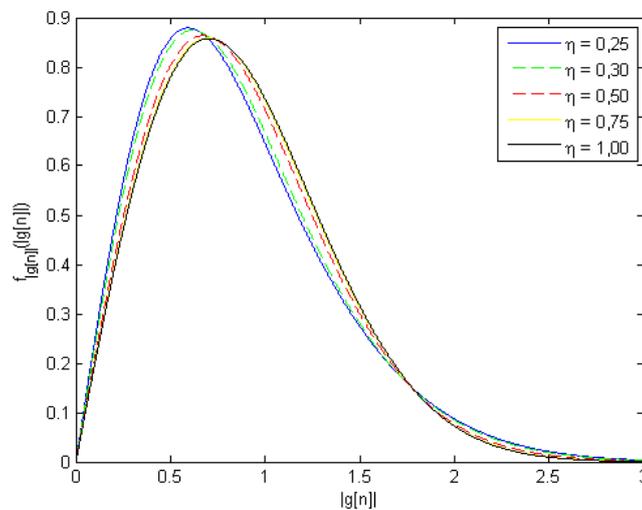
Figura 2.6 – FDP da envoltória do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores de μ , com $\eta = 0,25$ e $\sigma_g^2 = 1$.



Fonte Autor

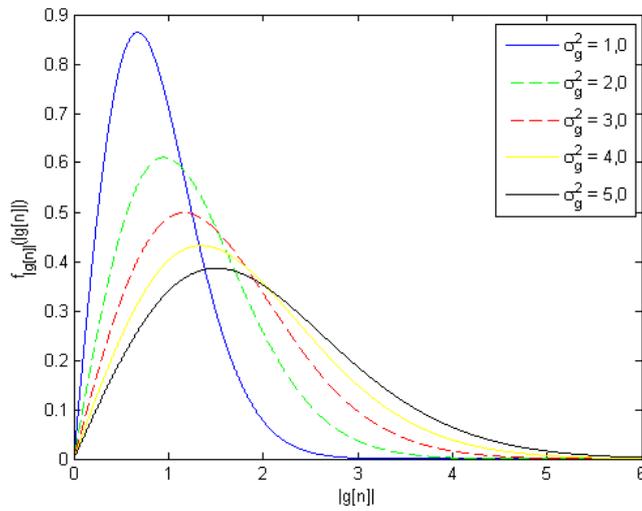
A Figura 2.7 mostra o comportamento da FDP da envoltória do sinal no mesmo modelo para diferentes valores de η com $\mu = 0,5$ e $\sigma_g^2 = 1$. Por outro lado, a Figura 2.8 mostra o efeito do aumento da potência média do desvanecimento para $\eta = \mu = 0,5$.

Figura 2.7 – FDP da envoltória do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores de η , com $\mu = 0,5$ e $\sigma_g^2 = 1$.



Fonte Autor

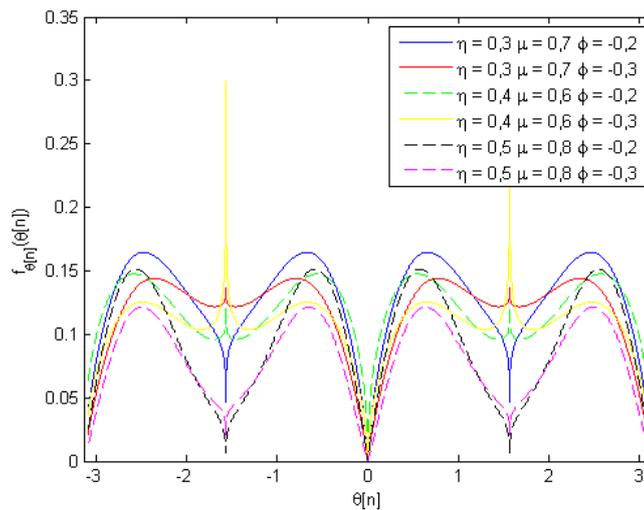
Figura 2.8 – FDP da envoltória do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores σ_g^2 e $\eta = \mu = 0,5$.



Fonte Autor

A Figura 2.9 mostra a distribuição da fase do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores de η , μ e ϕ . É possível perceber que para algumas configurações de parâmetros, as variáveis aleatórias, no modelo $\eta - \mu$, apresentam uma probabilidade elevada de serem puramente imaginárias ($\theta = \pm\pi/2$).

Figura 2.9 – FDP da fase do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores η , μ e ϕ .



Fonte Autor

2.1.4 Desvanecimento $\kappa - \mu$

O modelo $\kappa - \mu$ pode ser usado para representar desvanecimento rápido em um ambiente de propagação heterogêneo, com a presença de LoS. O sinal recebido é composto de agrupamentos de ondas de múltiplos percursos. As fases das ondas espalhadas são aleatórias e possuem atrasos temporais semelhantes, enquanto, entre os vários agrupamentos, os atrasos são relativamente grandes. As ondas dos múltiplos percursos dos vários agrupamentos têm potências iguais, mas dentro de cada agrupamento há uma componente dominante de potência arbitrária (YACOUB, 2007).

Esse modelo é representado por dois parâmetros físicos. O parâmetro μ é uma extensão real para o número de agrupamentos de múltiplos percursos, enquanto o κ representa a razão entre a potência total das componentes dominantes e a potência das ondas espalhadas.

A FDP do sinal recebido através de um canal com desvanecimento $\kappa - \mu$ é dada por (YACOUB, 2007)

$$f_{|g[n]|}(|g[n]|) = \frac{2\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}} |g[n]|^\mu}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\kappa\mu) (\sigma_g^2)^{\frac{\mu+1}{2}}} \times \exp\left[-\mu(1+\kappa) \frac{|g[n]|^2}{\sigma_g^2}\right] I_{\mu-1}\left[2\mu \sqrt{\kappa(1+\kappa) \frac{|g[n]|^2}{\sigma_g^2}}\right], \quad |g[n]| \geq 0 \quad (2.10)$$

em que $I_v(x)$ representa a função de Bessel modificada de primeira tipo e ordem v e $\sigma_g^2 = E[|g[n]|^2]$ representa a potência média do sinal.

Até o momento da escrita deste trabalho não havia uma expressão analítica para a distribuição da fase do sinal recebido no modelo $\kappa - \mu$, contudo, em (PORTO; YACOUB, 2012) é apresentada uma expressão aproximada para a FDP da fase do sinal neste modelo, dada por

$$f_{|\theta[n]|}(\theta[n]) = S(\kappa, \mu, \phi) u(\theta[n]), \quad -\pi \leq \theta[n] \leq \pi, \quad (2.11)$$

em que

$$\begin{aligned}
 u(\theta) = & |\operatorname{sen}2\theta|^{\frac{\mu}{2}} \exp\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\cos(\theta-\phi)\right) \\
 & \times I_{\frac{\mu}{2}-1}\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}|\cos\theta\cos\phi|\right) \\
 & \times I_{\frac{\mu}{2}-1}\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}|\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi|\right) \\
 & \times \operatorname{sech}\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\cos\theta\cos\phi\right) \\
 & \times \operatorname{sech}\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\right).
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

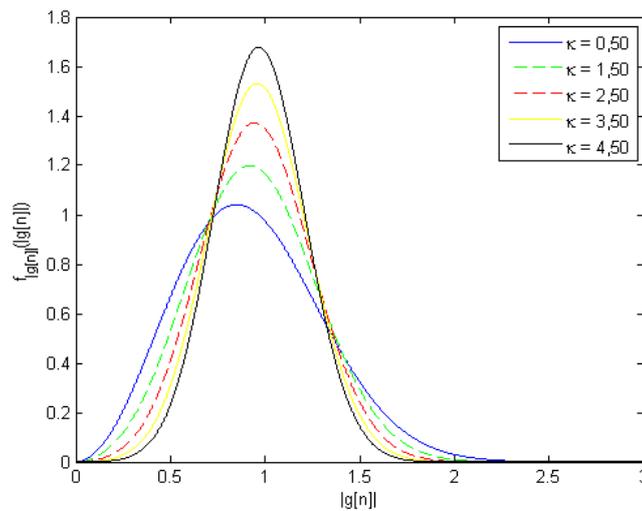
O fator de normalização $S(\kappa, \mu, \phi)$ é dado por

$$S(\kappa, \mu, \phi) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \kappa^{1-\frac{\mu}{2}} u(\theta) d\theta \right)^{-1} \tag{2.13}$$

e ϕ representa o deslocamento de fase entre as componentes de fase e quadratura.

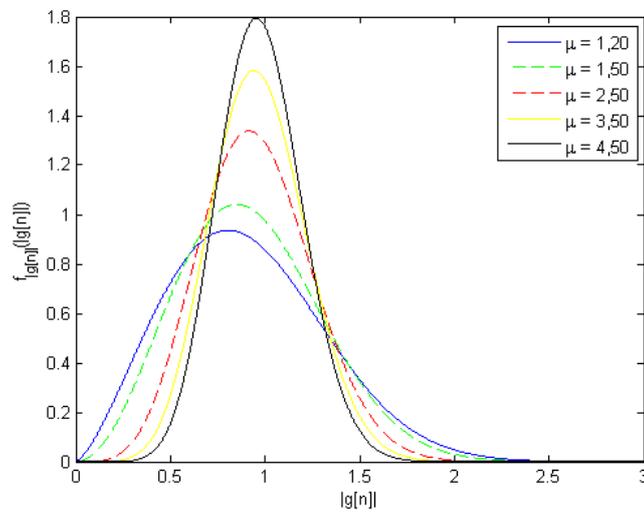
A Figura 2.10 mostra o comportamento da FDP da envoltória do sinal no modelo $\kappa - \mu$ para diferentes valores de κ com $\sigma_g^2 = 1$ e $\mu = 1,5$, enquanto a Figura 2.11 mostra a FDP da envoltória do sinal no mesmo modelo para diferentes valores de μ com $\kappa = 0,5$ e $\sigma_g^2 = 1$.

Figura 2.10 – FDP da envoltória do sinal no modelo $\kappa - \mu$ para diferentes valores de κ , com $\mu = 1,5$ e $\sigma_g^2 = 1$.



Fonte Autor

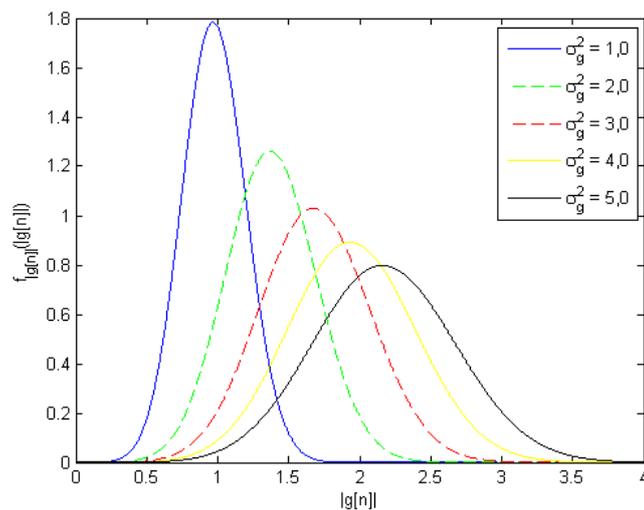
Figura 2.11 – FDP da envoltória do sinal no modelo $\kappa - \mu$ para diferentes valores de μ , com $\kappa = 0,5$ e $\sigma_g^2 = 1$.



Fonte Autor

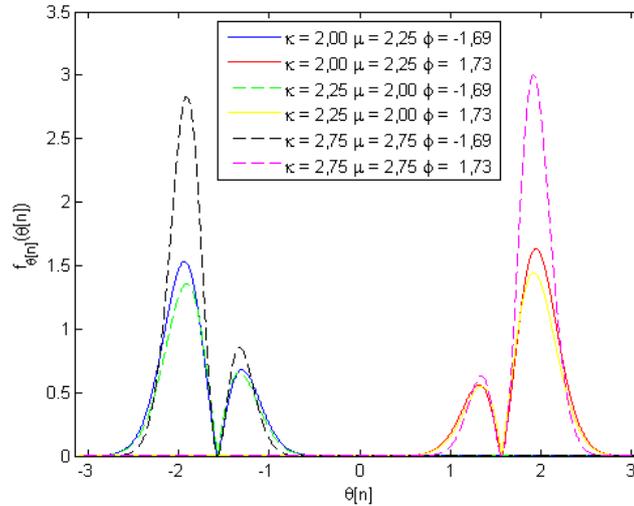
A Figura 2.12 mostra o efeito do aumento da potência média do desvanecimento para $\kappa = \mu = 2,5$.

Figura 2.12 – FDP da envoltória do sinal no modelo $\kappa - \mu$ para diferentes valores σ_g^2 e $\eta = \mu = 2,5$.



Fonte Autor

A Figura 2.13 mostra a distribuição da fase do sinal no modelo $\eta - \mu$ para diferentes valores de κ , μ e ϕ . É possível perceber que a fase do sinal, no modelo $\kappa - \mu$, não é simétrica para todos quaisquer valores de κ , μ e ϕ .

Figura 2.13 – FDP da fase do sinal no modelo $\kappa - \mu$ para diferentes valores κ , μ e ϕ .

Fonte Autor

2.2 Ruído Aditivo Gaussiano Branco

O termo ruído refere-se a qualquer sinal indesejado presente em um sistema de comunicação que limite a habilidade do receptor em distinguir qual sinal foi transmitido.

O ruído pode surgir de diversas fontes, sejam elas produzidas pelo homem, ou de caráter natural. As fontes produzidas pelo homem incluem ruídos impulsivos, provenientes de ignições automotivas, circuitos capazes de produzir radiação eletromagnética e ruído térmico gerado pelos dispositivos eletrônicos. O ruído natural é proveniente de fontes galácticas e atmosféricas (SKLAR, 2001).

Alguns tipos de ruídos podem ser eliminados ou ter seu efeito minimizado por meio do processo de filtragem. Entre esses fenômenos está o ruído térmico, causado pelo movimento dos elétrons nos dispositivos dissipativos, comumente presente no sistema de comunicações. Nesses sistemas o ruído é de natureza local, pois o meio de transmissão geralmente não impõe perturbações aos sinais transmitidos.

Por meio do estudo dos sinais ruidosos, percebe-se que as variações de intensidade que afetam sinal podem ser caracterizadas pelo ruído aditivo gaussiano branco com média nula e variância σ_w^2 , cuja FDP é dada por

$$f_{w[n]}(w[n]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{w[n]^2}{2\sigma_w^2}\right), \quad (2.14)$$

em que σ_w^2 representa a variância do ruído, ou a potência média do mesmo.

Desta forma, para uma variável aleatória contínua, definida em tempo discreto n , o ruído aditivo gaussiano branco $w[n]$ é representado por uma variável complexa $w[n] = u[n] + jv[n]$, com $u[n]$ e $v[n]$ independentes e idênticamente distribuídos, com média nula e variância $\sigma_u^2 = \sigma_v^2 = \frac{\sigma_w^2}{2}$, de modo que $\sigma_w^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$.

2.3 Esquemas de Modulação para Sistemas Digitais

Em um sistema de transmissão digital, a informação é codificada em um conjunto finito de símbolos em um espaço bidimensional, comumente chamado de constelação. As componentes em fase e em quadratura a_i e b_i de cada símbolo da constelação representam as amplitudes das formas de onda transmitidas, as quais consistem em duas portadoras moduladas em amplitude e quadratura de forma independente, expressas por (ALENCAR, 2007)

$$s(t) = a_i \cos(2\pi f_c t) - b_j \sin(2\pi f_c t), \quad (2.15)$$

em que t varia no intervalo $(0, T)$, T é o intervalo de símbolo e f_c é a frequência da portadora.

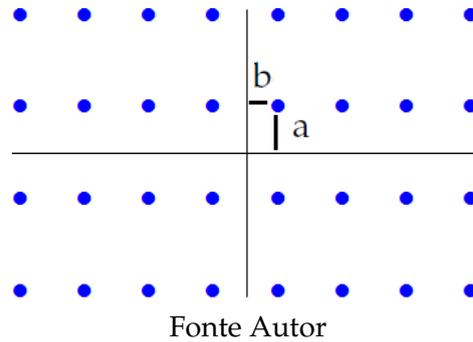
2.3.1 Constelações R-QAM

No esquema R-QAM (*Rectangular Quadrature Amplitude Modulation*), de dimensão $I \times J$ arbitrário, as coordenadas dos símbolos da constelação (a_i, b_j) , são dadas por

$$\begin{aligned} a_i &= [2i - 1 - I], \\ b_j &= [2j - 1 - J]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na Figura 2.14 é ilustrado um exemplo de constelação de um esquema de modulação R-QAM de dimensão 8×4 .

Os momentos de ordem 2, 4, 6 e 8 da constelação normalizada, necessários ao cálculo da variância do estimador de SNR, são calculados a partir do desenvolvimento a seguir.

Figura 2.14 – Exemplo de constelação R-QAM com dimensões 8×4 .

Em uma constelação R-QAM com $I \times J$ símbolos $s[n]$, a energia total é dada por

$$\begin{aligned}
 E_t &= \sum_{n=0}^{R-1} |s[n]|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[(2i-1-I)^2 + (2j-1-J)^2 \right] \\
 &= \frac{IJ^3 - 2IJ + I^3J}{3}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Considerando símbolos equiprováveis, a energia média é então obtida dividindo-se a energia total pelo número de símbolos da constelação.

$$E_{av} = \frac{E_t}{IJ} = \frac{I^2 - 2 + J^2}{3}. \tag{2.18}$$

A constante de normalização da constelação pode então ser definida como

$$C_R = \frac{1}{\sqrt{E_{av}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{I^2 - 2 + J^2}{3}}}.$$

Dividindo todos os símbolos da constelação por essa constante, o k -ésimo momento da constelação R-QAM normalizada com dimensão $I \times J$ arbitrária,

$$E \left[|s[n]|^k \right] = \sum_{n=1}^R p_i |s[n]|^k = \frac{1}{IJ} \sum_{n=1}^I \sum_{j=1}^J |s[n]|^k \tag{2.19}$$

com $I \times J$ símbolos equiprováveis, permite escrever, após algumas simplificações

$$\begin{aligned}
 E[|s[n]|^2] &= 1, \\
 E[|s[n]|^4] &= \frac{1}{5} \frac{(9I^4 - 40I^2 + 9J^4 - 40J^2 + 10I^2J^2 + 52)}{(I^2 - 2 + J^2)^2}, \\
 E[|s[n]|^6] &= \frac{9}{35} \frac{P_1(I) + P_1(J) + G_1(I, J)}{(I^2 - 2 + J^2)^3}, \\
 E[|s[n]|^8] &= \frac{9}{175} \frac{P_2(I) + P_2(J) + G_2(I, J)}{(I^2 - 2 + J^2)^4},
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

em que os polinômios P_1 , P_2 , G_1 e G_2 são definidos como

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= 15x^6 - 126x^4 + 364x^2, \\
 G_1(x, y) &= 21x^4y^2 + 21x^2y^4 - 140x^2y^2 - 408, \\
 P_2(x) &= 175x^8 - 2400x^6 + 13272x^4 - 32640x^2, \\
 G_2(x, y) &= 300x^6y^2 + 300x^2y^6 - 3360x^4y^2 \\
 &\quad - 3360x^2y^4 + 378x^4y^4 + 14000x^2y^2 + 34928.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.3.2 Constelações θ -QAM

Os símbolos da constelação do esquema θ -QAM são representados matematicamente por uma componente de fase e uma componente em quadratura, as quais são associadas à fase e à amplitude do sinal transmitido.

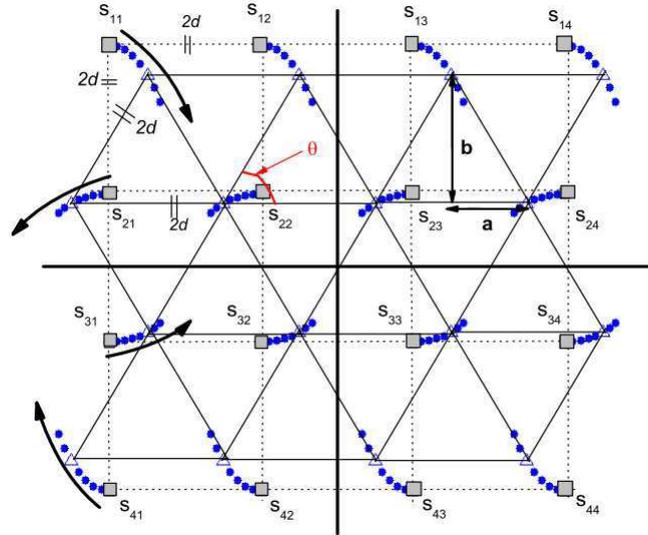
Na Figura 2.15 é ilustrado um exemplo de constelação de um esquema de modulação θ -QAM 16-ário.

Para o esquema de modulação M -ário θ -QAM, as coordenadas dos símbolos da constelação $s_{n,m} = (a_n, b_m)$, são dadas por (PAPPI; LIOUMPAS; KARAGIANNIDIS, 2010)

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left[2(m-1) + 1 - \sqrt{M} \right] d + [2 \bmod(m, 2) - 1] \frac{a}{2}, \\
 b_m &= - \left[2(n-1) + 1 - \sqrt{M} \right] \frac{b}{2},
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

em que $n = 1, \dots, \sqrt{M}$, $m = 1, \dots, \sqrt{M}$, $a = 2d \cos \theta$, $b = 2d \sin \theta$ e $\bmod(z, w)$ representa o resto da divisão de z por w . O ângulo θ pode tomar valores no intervalo $(0, \pi)$, mas devido a simetria apenas os ângulos menores ou iguais a $\frac{\pi}{2}$ são considerados.

Figura 2.15 – Exemplo de constelação θ -QAM com 16 símbolos.



Fonte (PAPPI; LIOUMPAS; KARAGIANNIDIS, 2010)

Além disso, d representa a metade da distância euclidiana entre os símbolos e pode ser expresso como

$$d = \frac{\sqrt{6E_{av}}}{\sqrt{3M + (4 - M) \cos 2\theta}}. \quad (2.23)$$

Em uma constelação θ -QAM com M símbolos $s[n]$, a energia total é dada por

$$\begin{aligned} E_t &= \sum_{n=0}^{M-1} |s[n]|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}} \left[\left[(2j - 1 - \sqrt{M}) + (2 \bmod(n, 2) - 1) \cos(\theta) \right]^2 + \left[-(2j - 1 - \sqrt{M}) \sin(\theta) \right]^2 \right] \\ &= \frac{M}{3} \left[2M - 2 + (4 - M) \cos^2(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Considerando símbolos equiprováveis, a energia média é então obtida dividindo-se a energia total pelo número de símbolos da constelação.

$$E_{av} = \frac{1}{3} \left[2M - 2 + (4 - M) \cos^2(\theta) \right]. \quad (2.25)$$

Definindo a constante de normalização

$$C_\theta = \frac{1}{\sqrt{E_{av}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} [2M - 2 + (4 - M) \cos^2(\theta)]}}$$

e dividindo todos os símbolos da constelação por essa constante, o k -ésimo momento da constelação θ -QAM normalizada com dimensão M arbitrária pode ser expressa como

$$E \left[(|s[n]|^2)^k \right] = \sum_{n=1}^M p_i |s[n]|^{2k} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}} |s[n]|^{2k} \quad (2.26)$$

com M símbolos equiprováveis.

Após algumas simplificações chega-se a

$$\begin{aligned} E \left[|s[n]|^2 \right] &= 1, \\ E \left[|s[n]|^4 \right] &= \frac{1}{5} \frac{a_{00}M^2 + a_{01}M + a_{02}}{[2M - 2 + (4 - M) \cos^2(\theta)]^2}, \\ E \left[|s[n]|^6 \right] &= \frac{9}{35} \frac{a_{04}M^3 + a_{05}M^2 + a_{06}M + a_{07}}{[2M - 2 + (4 - M) \cos^2(\theta)]^3}, \\ E \left[|s[n]|^8 \right] &= \frac{1}{5} \frac{a_{08}M^4 + a_{09}M^3 + a_{10}M^2 + a_{11}M + a_{12}}{[2M - 2 + (4 - M) \cos^2(\theta)]^4}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

em que

$$\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \cos^4(\theta) - 28 \cos^2(\theta) + 28 \\ -60 \cos^4(\theta) + 200 \cos^2(\theta) - 80 \\ 96 \cos^4(\theta) - 172 \cos^2(\theta) + 52 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\begin{bmatrix} a_{03} \\ a_{04} \\ a_{05} \\ a_{06} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \cos^6(\theta) + 66 \cos^4(\theta) - 108 \cos^2(\theta) + 72 \\ 168 \cos^6(\theta) - 742 \cos^4(\theta) + 1176 \cos^2(\theta) - 392 \\ -560 \cos^6(\theta) + 2324 \cos^4(\theta) - 2772 \cos^2(\theta) + 728 \\ 512 \cos^6(\theta) - 1648 \cos^4(\theta) + 1704 \cos^2(\theta) - 408 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

e

$$\begin{bmatrix} a_{07} \\ a_{08} \\ a_{09} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175 \cos^8(\theta) - 1000 \cos^6(\theta) + 2328 \cos^4(\theta) - 2656 \cos^2(\theta) + 1328 \\ -3000 \cos^8(\theta) + 17280 \cos^6(\theta) - 38880 \cos^4(\theta) + 40320 \cos^2(\theta) - 11520 \\ 18480 \cos^8(\theta) - 97720 \cos^6(\theta) + 202104 \cos^4(\theta) - 175168 \cos^2(\theta) + 40544 \\ -44800 \cos^8(\theta) + 210720 \cos^6(\theta) - 383520 \cos^4(\theta) + 305280 \cos^2(\theta) - 65280 \\ 30720 \cos^8(\theta) - 129280 \cos^6(\theta) + 217968 \cos^4(\theta) - 167776 \cos^2(\theta) + 34928 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

As constelações M -QAM são casos particulares das constelações R -QAM e θ -QAM. Para uma constelação R -QAM com dimensões $I \times J$, para $I = J$ chegamos à constelação M -QAM, o mesmo resultado é obtido fazendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ na constelação θ -QAM.

2.4 Modelo Matemático

Neste trabalho é considerado um modelo de sinal recebido em um canal com desvanecimento plano em cada tempo de símbolo T . Dessa forma, o sinal que chega ao receptor pode ser representado, após o filtro casado, por

$$r[n] = s[n] |g[n]| e^{j\theta[n]} + w[n], \quad (2.31)$$

em que o sinal gerado pela fonte e modulado por meio de um esquema de modulação QAM, representado por $s[n]$, é multiplicado por uma variável aleatória complexa $|g[n]| e^{j\theta[n]}$, que caracteriza o módulo ($|g[n]|$) e a fase ($\theta[n]$) do desvanecimento sofrido pelo sinal modulado em sua transmissão e somado a uma amostra de ruído aditivo gaussiano branco $w[n]$.

Sabendo que $s[n]$, $|g[n]|$ e $w[n]$ são independentes entre si, a relação sinal ruído pode ser escrita como

$$\gamma = \frac{P_{\text{sinal}}}{P_{\text{ruído}}} = \frac{E[|s[n]|] E[|g[n]|]}{E[w[n]]} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2} \sum_{i=1}^M p_i |s_i|^2. \quad (2.32)$$

Note que a cada instante discreto n , $s[n]$ toma um símbolo s_i de forma aleatória entre os símbolos possíveis da constelação QAM.

Capítulo 3

Desenvolvimento Matemático

Neste capítulo são apresentadas as expressões para dois diferentes estimadores de SNR cego. Esses estimadores são cegos pois não utilizam símbolos de treinamento para encontrar a estimativa de SNR, $\hat{\gamma}$. O primeiro estimador utiliza o conceito de curtose de uma variável aleatória complexa apresentada por Javidi e Mandic (2010), já o segundo foi desenvolvido a partir da relação entre o segundo e o quarto momento. Também são desenvolvidas expressões aproximadas para a variância dos estimadores de SNR propostos.

3.1 Estimador de SNR Baseado no Método da Curtose

Devido às variações impostas pelo canal de comunicações, ou até mesmo pelo caráter da informação transmitida, o sinal recebido $r[n]$ é modelado por uma variável aleatória complexa e segundo (JAVIDI; MANDIC, 2010), sua curtose pode ser escrita como

$$K_r = \frac{E[|r[n]|^4]}{(E[|r[n]|^2])^2} - \frac{|E[r^2[n]]|^2}{(E[|r[n]|^2])^2} - 2. \quad (3.1)$$

Sabendo que as distribuições de fase para os modelos Nakagami- m e $\eta - \mu$ são simétricas, temos

$$E[e^{j\theta[n]}] = \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\theta[n]) + j\sin(\theta[n])] f_{\theta[n]}(\theta[n]) d\theta[n] = 0. \quad (3.2)$$

A partir das Equações 3.1 e 3.2, pode-se afirmar que a curtose do sinal recebido

independe da distribuição de fase para os modelos de desvanecimento Nakagami- m e $\eta - \mu$. Sabendo que $s[n]$, $|g[n]|$ e $w[n]$ são independentes entre si, pode-se escrever

$$\begin{aligned} M_2 &= E[|s[n]|^2] E[|g[n]|^2] + E[|w[n]|^2] \\ &= B_1 \sigma_g^2 + \sigma_w^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} M_4 &= E[|s[n]|^4] E[|g[n]|^4] + E[|w[n]|^4] \\ &\quad + 4E[|s[n]|^2] E[|g[n]|^2] E[|w[n]|^2] \\ &= B_2 \sigma_g^4 + 2\sigma_w^4 + 4B_1 \sigma_g^2 \sigma_w^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} M_6 &= E[|s[n]|^6] E[|g[n]|^6] + E[|w[n]|^6] \\ &\quad + 9E[|s[n]|^4] E[|g[n]|^4] E[|w[n]|^2] \\ &\quad + 9E[|s[n]|^2] E[|g[n]|^2] E[|w[n]|^4] \\ &= B_3 \sigma_g^6 + 6\sigma_w^6 + 9B_2 \sigma_g^4 \sigma_w^2 + 18B_1 \sigma_g^2 \sigma_w^4 \end{aligned} \quad (3.5)$$

e

$$\begin{aligned} M_8 &= E[|s[n]|^8] E[|g[n]|^8] + E[|w[n]|^8] \\ &\quad + 16E[|s[n]|^6] E[|g[n]|^6] E[|w[n]|^2] \\ &\quad + 16E[|s[n]|^2] E[|g[n]|^2] E[|w[n]|^6] \\ &\quad + 36E[|s[n]|^4] E[|g[n]|^4] E[|w[n]|^4] \\ &= B_4 \sigma_g^8 + 24\sigma_w^8 + 16B_3 \sigma_g^6 \sigma_w^2 \\ &\quad + 72B_2 \sigma_g^4 \sigma_w^4 + 96B_1 \sigma_g^2 \sigma_w^6, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que

$$B_k = \beta_k f_{M_k} \quad \text{com } k = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (3.7)$$

para o modelo Nakagami- m ,

$$B_k = \Omega_k f_{M_k} \quad \text{com } k = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (3.8)$$

para o modelo $\eta - \mu$, $f_{M_k} = E[|s[n]|^{2k}]$ representa o $2k$ -ésimo momento da constelação

com símbolos normalizados e β_k e Ω_k são os momentos normalizados da envoltória do sinal nos modelos Nakagami- m e $\eta - \mu$ respectivamente, os quais, por meio das Equações 2.4 e 2.9, podem ser escritos como

$$\beta_k = \Omega_k = \frac{E \left[|g[n]|^{2k} \right]}{\sigma_g^{2k}} \quad \text{com } k = 1, 2, 3 \text{ e } 4. \quad (3.9)$$

Os momentos de ordem 2 e 4 são necessários ao cálculo da curtose de $r[n]$, enquanto os momentos de ordem 2, 4, 6 e 8 são utilizados no cálculo da variância do estimador de SNR. Além disso, é possível notar que

$$\begin{aligned} E \left[r^2[n] \right] &= E \left[s^2[n] \right] E \left[|g[n]|^2 \right] E \left[e^{j2\theta[n]} \right] + E \left[s^2[n] \right] E \left[|g[n]| \right] E \left[e^{j\theta[n]} \right] E \left[w^2[n] \right] + E \left[w^2[n] \right] \\ &= E \left[w^2[n] \right] \\ &= E \left[v^2[n] \right] - E \left[u^2[n] \right] + 2jE \left[v[n] \right] E \left[u[n] \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A partir das Equações 3.3, 3.4 e 3.10, podemos reescrever a curtose de $r[n]$ como

$$K_r = \frac{E \left[|r[n]|^4 \right]}{\left(E \left[|r[n]|^2 \right] \right)^2} - 2. \quad (3.11)$$

Escrevendo-se a Expressão 3.11 em função dos parâmetros do canal obtém-se

$$K_r = \frac{\psi \gamma^2}{\zeta^2 \gamma^2 + 2\zeta \gamma + 1}. \quad (3.12)$$

A partir da Expressão 3.12, a expressão da estimativa de SNR, $\hat{\gamma}$, pode ser escrita como

$$\hat{\gamma} = f^{-1}(\hat{K}_r) = \frac{\hat{K}_r \zeta + \sqrt{\hat{K}_r \psi}}{\psi - \hat{K}_r \zeta^2}, \quad (3.13)$$

em que \hat{K}_r representa a curtose amostral e os parâmetros ψ e ζ dependem do esquema de modulação empregado e das características estatísticas do canal, as quais dependem do modelo de desvanecimento.

Os parâmetros do estimador de SNR baseado no método da curtose estão dispostos

na Tabela 3.1, para os desvanecimento Nakagami- m e $\eta - \mu$.

Tabela 3.1 – Coeficientes do Estimador de SNR Baseado no Método da Curtose

Parâmetros do Estimador	
Desvanecimento	Coeficientes
Nakagami- m	$\psi = \beta_2 f_{M_2} - 2\beta_1$ $\zeta = \beta_1$
$\eta - \mu$	$\psi = \Omega_2 f_{M_2} - 2\Omega_1^2$ $\zeta = \Omega_1$

3.2 Estimador de SNR Baseado no Método dos Momentos

Este estimador de SNR é baseado na relação entre o quadrado do segundo e o quarto momento de $|r[n]|$

$$f_r(\gamma) = \frac{\left(E[|r[n]|^2]\right)^2}{E[|r[n]|^4]}. \quad (3.14)$$

Note que, para o modelo de canal expresso pela Equação 2.14, como o ruído $w[n]$ é uma variável aleatória gaussiana de média nula e variância σ_w^2 , a FDP de $|w[n]|$ tem distribuição Rayleigh. A FDP de $|r[n]|$ pode ser calculada vendo-se $r[n]$ como uma variável gaussiana complexa $w[n]$ acrescida a um termo $s[n]|g[n]|e^{j\theta[n]}$. Dessa forma, dado $|g[n]|$ e $|s[n]|$, o módulo das variáveis aleatórias do canal $|r[n]|$ tem distribuição Rice (PROAKIS, 2001). Portanto, a FDP de $|r[n]|$ condicionada a $|g[n]|$ e $|s[n]|$ pode ser escrita como

$$f_{|r[n]|}(|r[n]| | |g[n]|, |s[n]|) = \frac{|r[n]|}{\sigma_w^2} \exp\left[-\left(\frac{|r[n]|^2 + |g[n]|^2 |s[n]|^2}{2\sigma_w^2}\right)\right] I_0\left(|r[n]| \frac{|g[n]| |s[n]|}{\sigma_w^2}\right), \quad (3.15)$$

em que $I_0(x)$ representa a função modificada de Bessel de ordem zero.

Para calcular $f_{|r[n]|}(|r[n]| | |g[n]|)$ é necessário tomar a média de $f_{|r[n]|}(|r[n]| | |g[n]|, |s[n]|)$

em relação a $|s[n]|$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
 f_{|r[n]|}(|r[n]| | g[n]) &= \sum_{i=1}^M f_{|r[n]|}(|r[n]| | |g[n]|, |s_i[n]|) p_i \\
 &= \sum_{i=1}^M p_i \frac{|r[n]|}{\sigma_w^2} \exp \left[- \left(\frac{|r[n]|^2 + |g[n]|^2 |s_i[n]|^2}{2\sigma_w^2} \right) \right] \\
 &\quad \times I_0 \left(|r[n]| \frac{|g[n]| |s_i[n]|}{\sigma_w^2} \right),
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

A partir da Equação 3.16 pode-se então calcular o k -ésimo momento de $|r[n]|$ condicionado a $|g[n]|$, o qual é expresso por meio da integral

$$E[|r[n]|^k | |g[n]|] = \int_0^\infty |r[n]|^k f_{|r[n]|}(|r[n]| | |g[n]|) d|r[n]|. \tag{3.17}$$

O k -ésimo momento de $|r[n]|$, $E[|r[n]|^k]$, é encontrado tomando-se a média de $E[|r[n]|^k | |g[n]|]$ pela fdp de $|g[n]|$, ou seja

$$E[|r[n]|^k] = \int_0^\infty E[|r[n]|^k | |g[n]|] f_{|g[n]|}(|g[n]|) d|g[n]|. \tag{3.18}$$

Os momentos necessários ao cálculo do estimador de SNR e da variância podem ser encontrados por meios das Equações 2.1, 2.6 e 3.18. Portanto, para canais sob desvanecimento Nakagami- m e $\eta - \mu$, temos

$$M_2 = A_1 \sigma_g^2 + 2\sigma_w^2, \tag{3.19}$$

$$M_4 = A_2 f_{M_2} \sigma_g^4 + 8\sigma_g^2 \sigma_w^2 + 8\sigma_w^4, \tag{3.20}$$

$$M_6 = A_3 f_{M_3} \sigma_g^6 + 18A_2 f_{M_2} \sigma_g^4 \sigma_w^2 + 72\sigma_g^2 \sigma_w^4 + 48\sigma_w^6 \tag{3.21}$$

e

$$\begin{aligned}
 M_8 &= A_4 f_{M_4} \sigma_g^8 + 32A_3 f_{M_3} \sigma_g^6 \sigma_w^2 \\
 &\quad + 288A_2 f_{M_2} \sigma_g^4 \sigma_w^4 + 768\sigma_g^2 \sigma_w^6 + 384\sigma_w^8
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

em que, A_i depende do modelo de desvanecimento envolvido, sendo

$$A_i = \beta_i \quad (3.23)$$

para o modelo Nakagami- m , e

$$A_1 = 1, \quad (3.24)$$

$$A_2 = \frac{1}{2\mu} \left[2\mu + 1 + \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right], \quad (3.25)$$

$$A_3 = \frac{\mu + 1}{2\mu^2} \left[2\mu + 1 + 3 \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right] \quad (3.26)$$

e

$$A_4 = \frac{\mu + 1}{4\mu^3} \left[(2\mu + 1)(2\mu + 3) + 6(2\mu + 3) \left(\frac{H}{h} \right)^2 + 3 \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right]. \quad (3.27)$$

para o modelo $\eta - \mu$.

Dessa forma obtém-se a seguinte expressão

$$f_r(\gamma) = \frac{\gamma^2 + 2\gamma + 4}{2\xi f_{M_4} \gamma^2 + 8\gamma + 8}. \quad (3.28)$$

O processo de desenvolver as expressões para os estimadores de SNR a partir de tal relação consiste em encontrar $f^{-1}(\cdot)$ tal que

$$\hat{\gamma} = f^{-1}(\hat{f}_r), \quad (3.29)$$

em que \hat{f}_r é a razão entre os momentos amostrais de $|r[n]|$.

Assim, seja a relação dos momentos amostrais denotada por f_r , a partir da Equação 3.28, a expressão do estimador de SNR baseado no método dos momentos pode ser escrita como

$$\hat{\gamma} = \frac{2(1 - 2\hat{f}_r) + 2\sqrt{2\hat{f}_r(1 - 2\hat{f}_r)(\xi - 1)}}{2\xi\hat{f}_r - 1}, \quad (3.30)$$

em que o parâmetro ξ depende do esquema de modulação empregado e das características estatísticas do canal, as quais dependem do modelo de desvanecimento. Sendo $f_{M_4} = E[|s[n]|^4]$, os demais parâmetros estão dispostos na Tabela 3.2, para os desvanecimento *Nakagami* - m e $\eta - \mu$.

Tabela 3.2 – Coeficientes do Estimador de SNR Baseado no Método dos Momentos

Parâmetros do Estimador	
Desvanecimento	Coeficientes
<i>Nakagami</i> – <i>m</i>	$\xi = \frac{\beta}{2} f_{M_2}$ $\beta = \frac{(m+1)}{m}$
$\eta - \mu$	$\xi = 2\chi f_{M_2}$ $\chi = \frac{\mu(1+\eta)^2 + (1+\eta^2)}{4\mu(1+\eta)^2}$

3.3 Variância dos Estimadores de SNR

Para os estimadores de SNR tanto utilizando o método dos momentos quanto a curtose, há necessidade de encontrar algum parâmetro que mensure o desempenho dos mesmos. Devido a não linearidade da estimativa $\hat{\gamma}$, torna-se praticamente impossível encontrar o limitante de Cammer-Rao para essa estimativa. Desta forma, foram desenvolvidas expressões para a variância dos estimadores estudados.

Seja a estimativa de SNR, $\hat{\gamma}$, escrita em função do vetor de dados observados

$$\hat{\gamma} = q(\mathbf{x}). \quad (3.31)$$

Uma abordagem bastante prática apresentada em (KAY, 2013), permite atestar o desempenho do estimador pela determinação de uma expressão aproximada para a variância do mesmo. Dessa forma, a variância $Var[\hat{\gamma}]$ do estimador de SNR pode ser escrita como (KAY, 2013)

$$Var[\hat{\gamma}] = \left. \frac{\partial q}{\partial \mathbf{T}} \right|_{\mathbf{T}=\boldsymbol{\mu}}^T C_T \left. \frac{\partial q}{\partial \mathbf{T}} \right|_{\mathbf{T}=\boldsymbol{\mu}}, \quad (3.32)$$

em que $\mathbf{T} = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_r]$, $\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{T}]$ e C_T é a matriz de covariância do vetor \mathbf{T} .

3.3.1 Variância do Estimador de SNR Baseado no Método da Curtose

De posse da Expressão 3.13 pode-se prosseguir com o cálculo da variância do estimador de SNR baseado no método da curtose. Seja a curtose amostral definida

como $\hat{K}_r = g(T_1, T_2) = \frac{T_2}{T_1^2} - 2$, com $\mathbf{T} = [T_1 \ T_2]$, tais que

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E [|r[n]|^2] = M_2 \\ T_2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E [|r[n]|^4] = M_4. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Percebe-se, por meio da Expressão 3.32, que há necessidade do cálculo de $\frac{\partial q}{\partial T_1}$ e $\frac{\partial q}{\partial T_2}$. Utilizando-se a regra da cadeia pode-se escrever tais derivadas como

$$\frac{\partial q}{\partial T_1} = \frac{\partial q}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial T_1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial q}{\partial T_2} = \frac{\partial q}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial T_2}. \quad (3.34)$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial g} &= \zeta [\psi - g(T_1, T_2) \zeta^2]^{-1} \\ &+ g(T_1, T_2) \zeta^3 [\psi - g(T_1, T_2) \zeta^2]^{-2} \\ &+ \zeta^2 [\psi g(T_1, T_2)]^{\frac{1}{2}} [\psi - g(T_1, T_2) \zeta^2]^{-2} \\ &+ \frac{1}{2} \psi [\psi g(T_1, T_2)]^{-\frac{1}{2}} [\psi - g(T_1, T_2) \zeta^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pode-se ainda escrever

$$\frac{\partial q}{\partial g} = h(g(T_1, T_2)), \quad (3.36)$$

sendo

$$\begin{aligned} h(x) &= \zeta (\psi - x \zeta^2)^{-1} + \frac{1}{2} \psi (\psi x)^{-\frac{1}{2}} (\psi - x \zeta^2)^{-1} \\ &+ x \zeta^3 (\psi - x \zeta^2)^{-2} + (\psi x)^{\frac{1}{2}} \zeta^2 (\psi - x \zeta^2)^{-2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Os próximos termos necessários à variância do estimador, presentes nas Expressões 3.34, são

$$\frac{\partial}{\partial T_1} g(T_1, T_2) = -2 \frac{T_2}{T_1^3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial T_2} g(T_1, T_2) = \frac{1}{T_1^2}, \quad (3.38)$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial q}{\partial T_1} \right|_{\substack{T_1=M_4 \\ T_2=M_2}} &= -2 \frac{M_4}{M_2^3} h(g(M_2, M_4)) \\ \left. \frac{\partial q}{\partial T_2} \right|_{\substack{T_1=M_4 \\ T_2=M_2}} &= \frac{1}{M_2^2} h(g(M_2, M_4)).\end{aligned}\quad (3.39)$$

A matriz de covariância C_T pode ser escrita como

$$C_T = \begin{bmatrix} M_4 - M_2^2 & M_6 - M_2 M_4 \\ M_6 - M_2 M_4 & M_8 - M_4^2 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

De posse dos elementos já calculados da Expressão 3.32, pode-se escrever

$$Var[\hat{\gamma}] = \frac{h^2(g(M_2, M_4))}{N} \begin{bmatrix} -2 \frac{M_4}{M_2^3} \\ \frac{1}{M_2^2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_4 - M_2^2 & M_6 - M_2 M_4 \\ M_6 - M_2 M_4 & M_8 - M_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \frac{M_4}{M_2^3} \\ \frac{1}{M_2^2} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

que após algumas simplificações pode ser escrito como

$$Var[\hat{\gamma}] = \frac{1}{N} h^2(g(M_2, M_4)) \left[\frac{4M_4^3}{M_2^6} - \frac{4M_4 M_6}{M_2^5} + \frac{1}{M_2^4} (M_8 - M_4^2) \right]. \quad (3.42)$$

3.3.2 Variância do Estimador de SNR Baseado no Método dos Momentos

A expressão para a variância do estimador de SNR baseado no método dos momentos pode ser obtida de modo semelhante a expressão da variância do estimador de SNR baseado no método da curtose com apenas alguns ajustes. Assim, de posse da Expressão 3.30 pode-se prosseguir com o cálculo da variância do estimador de SNR. Seja a relação entre o segundo e o quarto momento definida como $f_r = g(T_1, T_2) = \frac{T_1^2}{T_2}$, com $\mathbf{T} = [T_1 \quad T_2]$, tais que

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E[|r[n]|^2] = M_2 \\ T_2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E[|r[n]|^4] = M_4.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Para o Estimador baseado no método dos momentos pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial g} = & -4\alpha(1 - 2g(T_1, T_2))(2\xi g(T_1, T_2) - 1)^{-2} - 4(2\xi g(T_1, T_2) - 1)^{-1} \\ & - 4\xi(2\xi g(T_1, T_2) - 1)^{-2} \sqrt{2(\xi - 1)g(T_1, T_2)(1 - 2g(T_1, T_2))} \\ & + (2\xi g(T_1, T_2) - 1)^{-1}(2(\xi - 1)g(T_1, T_2)(1 - 2g(T_1, T_2)))^{-1/2} \\ & \times 2(\xi - 1)(1 - 4g(T_1, T_2)), \end{aligned} \quad (3.44)$$

Pode-se ainda escrever

$$\frac{\partial q}{\partial g} = h(g(T_1, T_2)), \quad (3.45)$$

sendo

$$\begin{aligned} h(x) = & -4\xi(1 - 2x)(2\xi x - 1)^{-2} - 4(2\xi x - 1)^{-1} \\ & - 4\xi(2(\xi - 1))^{1/2}(2\xi x - 1)^{-2}x^{1/2}(1 - 2x)^{1/2} \\ & + 2(\xi - 1)(2(\xi - 1))^{-1/2}(1 - 4x)x^{-1/2}(1 - 2x)^{-1/2}(2\xi x - 1)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Os próximos termos necessários à variância do estimador, presentes nas Expressões 3.34, são

$$\frac{\partial}{\partial T_1} g(T_1, T_2) = 2\frac{T_1}{T_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial T_2} g(T_1, T_2) = -\frac{T_1^2}{T_2^2}, \quad (3.47)$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial q}{\partial T_1} \right|_{\substack{T_1=M_2 \\ T_2=M_4}} &= 2\frac{M_2}{M_4} h(g(M_2, M_4)) \\ \left. \frac{\partial q}{\partial T_2} \right|_{\substack{T_1=M_2 \\ T_2=M_4}} &= -\frac{M_2^2}{M_4^2} h(g(M_2, M_4)). \end{aligned} \quad (3.48)$$

A matriz de covariância C_T , para o Estimador II, é igual à do Estimador I. Assim, a variância para esse estimador de SNR pode ser escrita como

$$\text{Var}[\hat{\gamma}] = \frac{h^2(g(M_2, M_4))}{N} \begin{bmatrix} 2\frac{M_2}{M_4} \\ -\frac{M_2^2}{M_4^2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_4 - M_2^2 & M_6 - M_2M_4 \\ M_6 - M_2M_4 & M_4 - M_8 - M_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{M_2}{M_4} \\ -\frac{M_2^2}{M_4^2} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

que após algumas simplificações pode ser escrita como

$$\text{Var} [\hat{\gamma}] = \frac{1}{N} h^2 (g(M_2, M_4)) \left[4 \frac{M_2^2}{M_4} - \frac{M_2^4}{M_4^2} - 4 \frac{M_6 M_2^3}{M_4^3} + \frac{M_8 M_2^4}{M_4^4} \right]. \quad (3.50)$$

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo são analisados os resultados obtidos utilizando os estimadores de SNR estudados. São apresentados os resultados teóricos com base nas expressões analíticas encontradas no Capítulo 3, assim como resultados de algumas simulações realizadas com o auxílio do *software* Matlab.

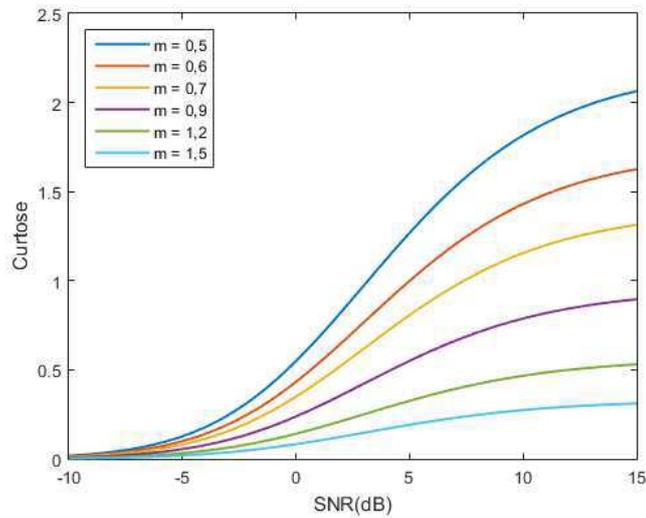
4.1 Curtose e Relação entre os Momentos

A análise do comportamento da curtose e da relação entre os momentos utilizados para a estimação da relação sinal ruído é de relevante importância pois o procedimento para o desenvolvimento dos estimadores de SNR parte de uma função inversa tanto da curtose quanto da relação dos momentos amostrais.

Como foi mostrado no Capítulo 3, a curtose e a relação entre os momentos são funções polinomiais racionais e dessa forma apresentam algumas características semelhantes. A principal semelhança é devido ao surgimento de assíntotas horizontais para valores elevados e para valores extremamente baixos da SNR.

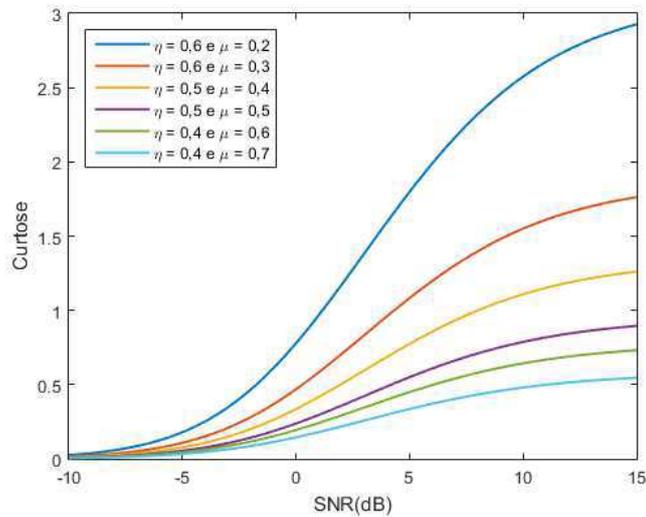
A Figura 4.1 mostra o comportamento da curtose do sinal recebido em função da SNR (dB) para um canal afetado pelo desvanecimento Nakagami- m em um esquema de modulação 1024-QAM. De forma semelhante, a Figura 4.2 mostra o comportamento da curtose do sinal para um canal sob desvanecimento $\eta - \mu$, utilizando um esquema de modulação 64- $\pi/3$ -QAM. Por meio destas figuras, é possível perceber que a curtose é limitada inferiormente pelo eixo das abscissas e superiormente tende a uma assíntota horizontal que depende dos parâmetros do desvanecimento.

Figura 4.1 – Curtose de $r[n]$ em função da SNR (dB) para diferentes valores do parâmetro m e esquema de modulação 1024-QAM.



Fonte Autor

Figura 4.2 – Curtose de $r[n]$ em função da SNR (dB) para diferentes valores dos parâmetros η e μ e esquema de modulação $64\pi/3$ -QAM.



Fonte Autor

A Figura 4.3 mostra o comportamento da relação dos momentos em função da SNR (dB) para um canal afetado pelo desvanecimento Nakagami- m e um esquema de modulação 1024-QAM. De forma semelhante, a Figura 4.4 mostra o comportamento da relação dos momentos para um canal sob desvanecimento $\eta - \mu$, utilizando um esquema de modulação $64-\pi/3$ -QAM. Por meio destas figuras, é possível perceber que a relação dos momentos é limitada superiormente pela reta $f_r = 0,5$ e inferiormente

por outra assíntota horizontal que depende dos parâmetros do desvanecimento.

Figura 4.3 – Relação dos momentos (f_r) de $r[n]$ em função da SNR (dB) para diferentes valores do parâmetro m e esquema de modulação 1024-QAM.

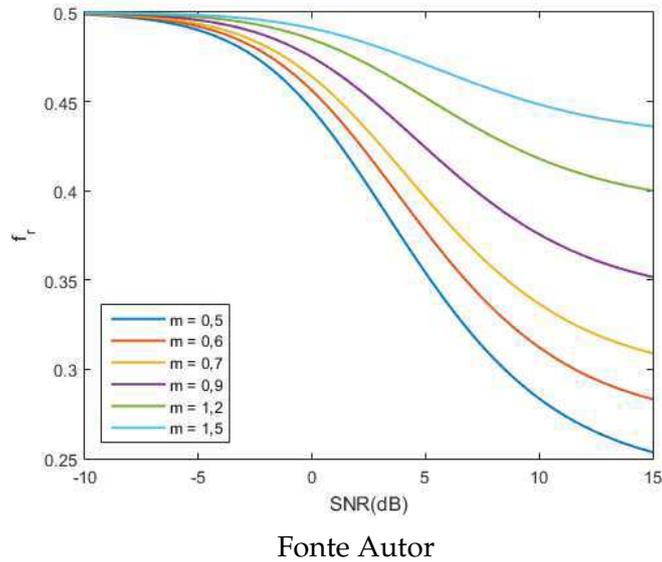
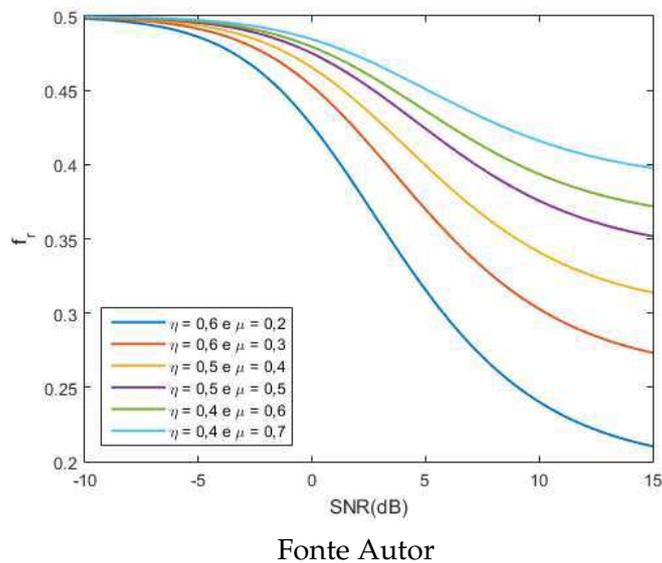


Figura 4.4 – Relação dos momentos (f_r) de $r[n]$ em função da SNR (dB) para diferentes valores dos parâmetros η e μ e esquema de modulação $64-\pi/3$ -QAM.



Para todos os valores de m e parâmetros η e μ a função $f_r(\gamma)$ é inversível. Só no comportamento assintótico não é possível realizar a inversão e obter a estimativa.

A presença de assíntotas tanto no comportamento da curtose quanto da relação dos momentos tornou-se um fator limitante na obtenção de uma estimativa de SNR

confiável para SNRs altas e extremamente baixas.

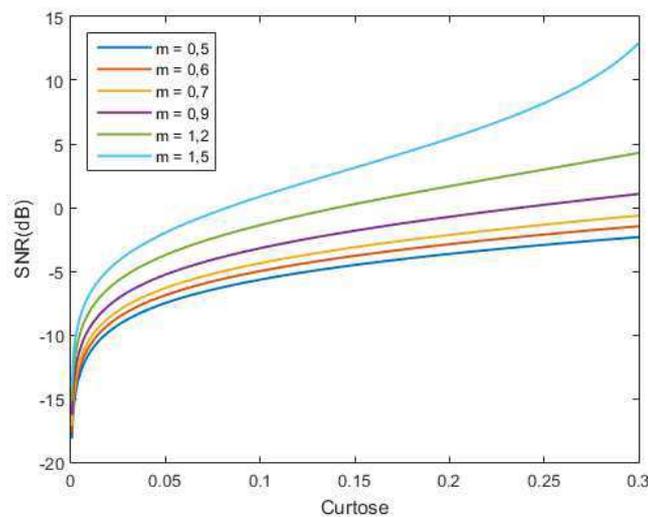
4.2 Análise dos Estimadores de SNR

Os estimadores de SNR estudados neste trabalho foram encontrados por meio de uma função inversa da relação dos momentos e da curtose do sinal recebido. Desse modo, uma análise do comportamento de tais parâmetros é de relevante importância.

Como pôde ser observado na Seção 4.1, as curvas da curtose e da relação dos momentos apresentam assíntotas horizontais para altas e baixíssimas SNRs. A presença de regiões com coeficientes angulares nulos faz surgir na inversa da função assíntotas verticais, as quais contribuem para o baixo desempenho dos estimadores para estas faixas de SNR.

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram o comportamento da SNR (dB) estimada em função da curtose do sinal para canais com desvanecimento Nakagami- m e $\eta-\mu$ respectivamente. É possível perceber que os parâmetros do desvanecimento presente no canal têm pouca influência no erro da estimativa da relação sinal ruído para baixas SNRs, contudo, torna-se um fator determinante à medida que a SNR aumenta.

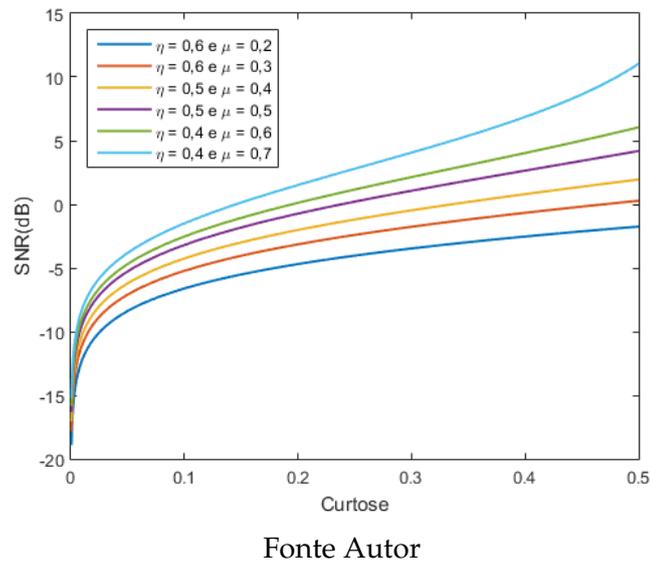
Figura 4.5 – SNR (dB) em função da curtose para diferentes valores do parâmetro m e esquema de modulação 1024-QAM.



Fonte Autor

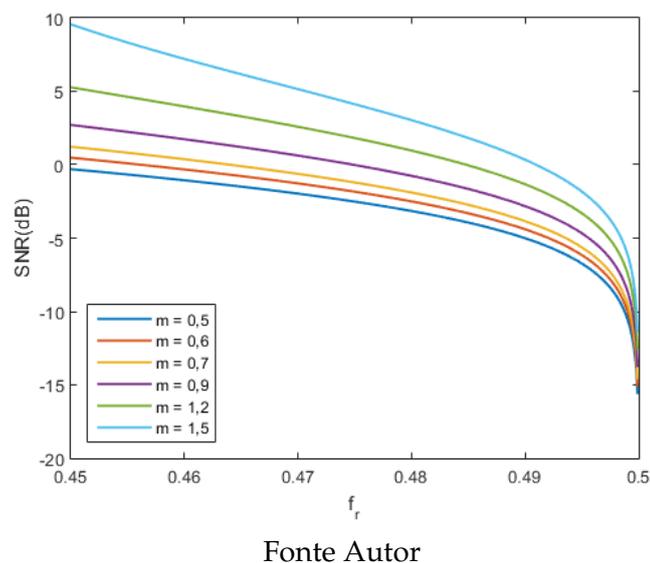
As Figuras 4.7 e 4.8 mostram o comportamento da SNR (dB) estimada em função

Figura 4.6 – SNR (dB) em função da curtose para diferentes valores dos parâmetros η e μ e esquema de modulação 64- $\pi/3$ -QAM.



da relação dos momentos (f_r) para canais com desvanecimento Nakagami- m e $\eta - \mu$ respectivamente.

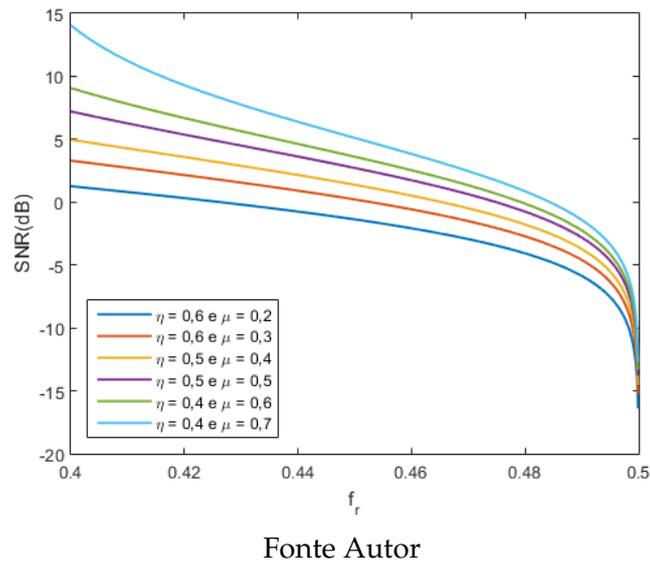
Figura 4.7 – SNR (dB) em função relação dos momentos (f_r) para diferentes valores do parâmetro m e esquema de modulação 1024-QAM.



A semelhança entre as Figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 é devida ao fato de que $K_r \approx (f_r)^{-1}$.

Como a obtenção dos valores amostrais da curtose do sinal ou da relação dos momentos é oriunda de um processo aleatório, os mesmos estão sujeitos a flutuações.

Figura 4.8 – SNR (dB) em função da relação dos momentos (f_r) para diferentes valores dos parâmetros η e μ e esquema de modulação 64- $\pi/3$ -QAM.



Quando esses valores estão próximos de regiões de altas ou extremamente baixas SNRs, tais flutuações podem gerar erros elevados na estimativa da SNR o que diminuiria o desempenho do estimador.

4.3 Valor Médio

A variância isoladamente não fornece uma visão global do desempenho do estimador pois a mesma quantifica apenas o afastamento médio das estimativas de SNR, mas não leva em conta o erro associado ao valor médio da estimativa, ou seja; situações em que o valor médio esteja distante do valor real e as estimativas estiverem próximas deste valor implicarão em uma baixa variância, contudo o erro associado ao valor médio será elevado.

As Figuras 4.9 e 4.10 mostram a média dos estimadores de SNR em canais com desvanecimento Nakagami- m e $\eta - \mu$ respectivamente.

Em um canal linear e puramente determinístico, o valor esperado da SNR no receptor é igual à relação sinal ruído no enlace de comunicações. Devido ao desvanecimento e ao caráter aleatório das fontes de ruído, a média obtida pelos estimadores de SNR está sujeita a oscilações, além disso, os estimadores de SNR baseados nos métodos da

Figura 4.9 – Média do estimador de SNR em função da relação sinal ruído (dB) para um canal sob desvanecimento Nakagami- m , com $m = 1,5$, esquema de modulação 64-QAM e número de amostras $N = 5 \times 10^4$

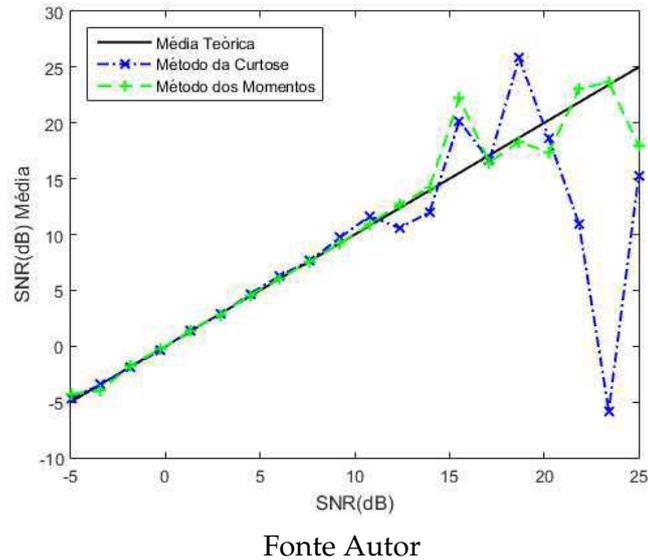
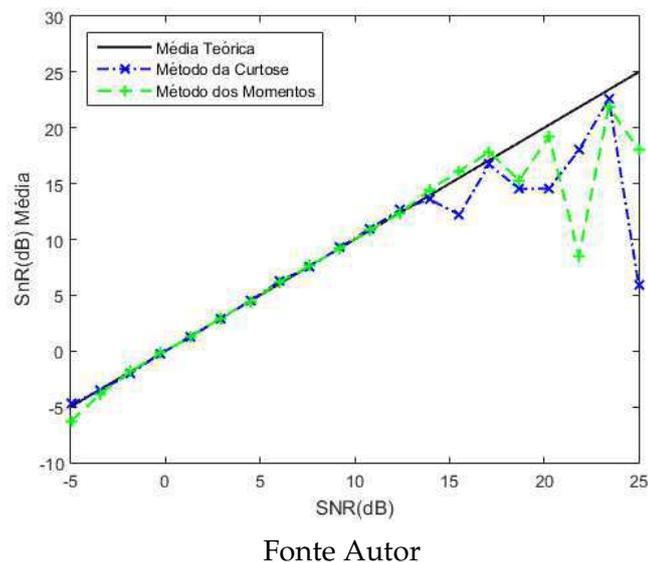


Figura 4.10 – Média do estimador de SNR em função da relação sinal ruído (dB) para uma canal sob desvanecimento $\eta - \mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,6$, esquema de modulação 64-QAM e número de amostras $N = 5 \times 10^4$.



curtose e dos momentos apresentam um mau desempenho para elevados valores de SNR o que contribui para erros na média da SNR estimada nessa faixa da relação sinal ruído.

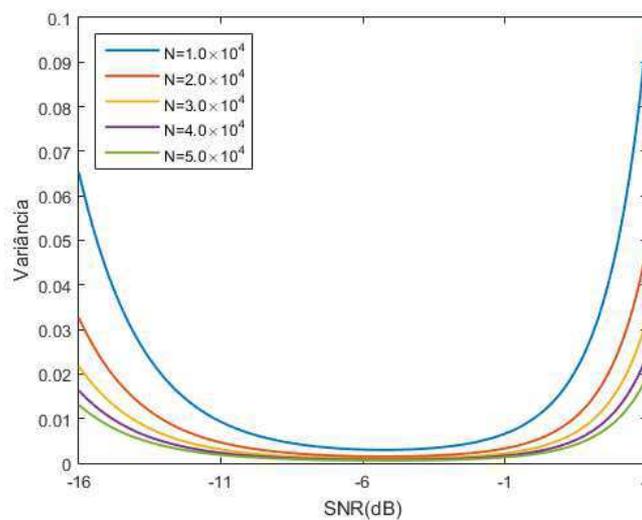
4.4 Variância

A variância é um parâmetro de grande importância na análise do desempenho dos estimadores de SNR. Ela quantifica o afastamento médio das amostras da média das estimativas.

Baixos valores da variância não implicam em um bom desempenho, pois uma baixa variância não fornece informações sobre a acurácia do estimador de SNR. Contudo, um sistema acurado com variância elevada também não seria aplicável em situações reais. Desta forma, esta seção é voltada à análise da variância dos estimadores de SNR baseados nos métodos da curtose e do momento.

Os estimadores de SNR apresentados neste trabalho pertencem à classe de estimadores de variância mínima e tal fato pode ser visto nas Figuras 4.11 e 4.12. É possível perceber que a variância do estimador de SNR baseado no método da curtose apresenta valores mínimos mais próximos da faixa de -6 dB enquanto o estimador de SNR baseado no método dos momentos apresenta valores mínimos mais próximos da faixa de -1 dB.

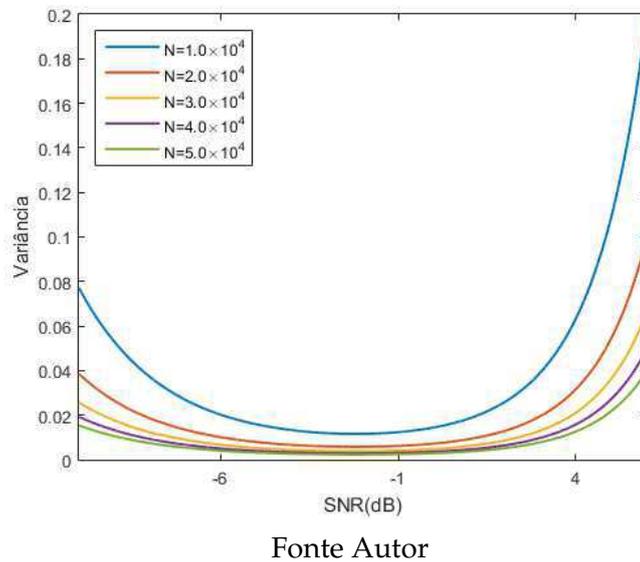
Figura 4.11 – Variância do estimador de SNR baseado no método da curtose em função da relação sinal ruído para um canal afetado pelo desvanecimento Nakagami- m , com $m = 0,5$, utilizando um esquema de modulação 64-QAM e diferentes valores do número de amostras N .



Fonte Autor

As Figuras 4.13 e 4.14 mostram o comportamento da variância dos estimadores

Figura 4.12 – Variância do estimador de SNR baseado no método dos momentos em função da relação sinal ruído para um canal afetado pelo desvanecimento Nakagami- m , com $m = 0,5$, utilizando um esquema de modulação 64-QAM e diferentes valores do número de amostras N .



baseados nos métodos da curtose e dos momentos respectivamente. Estas figuras ilustram o rápido decaimento da variância à medida que o número de amostras aumenta. Tal fato é facilmente explicado pelo fato de que a variância é proporcional ao inverso do número de amostras ($1/N$).

Figura 4.13 – Variância do estimador de SNR baseado no método da curtose em função do número da amostras N para um canal afetado pelo desvanecimento $\eta\mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,5$, utilizando um esquema de modulação 64-QAM e diferentes valores de SNR.

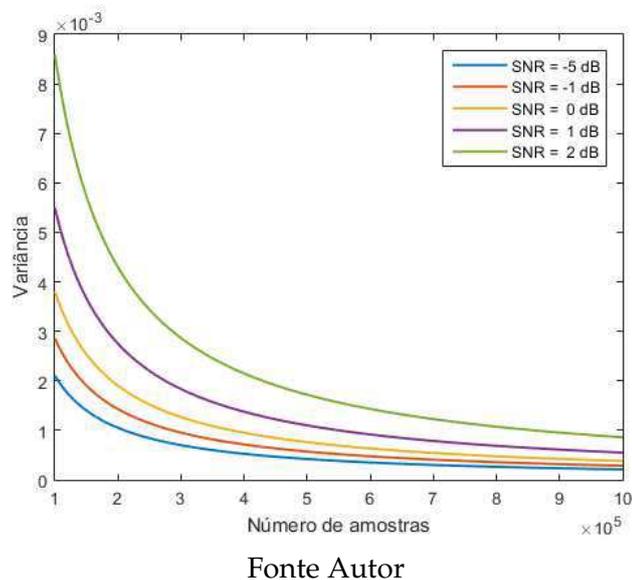
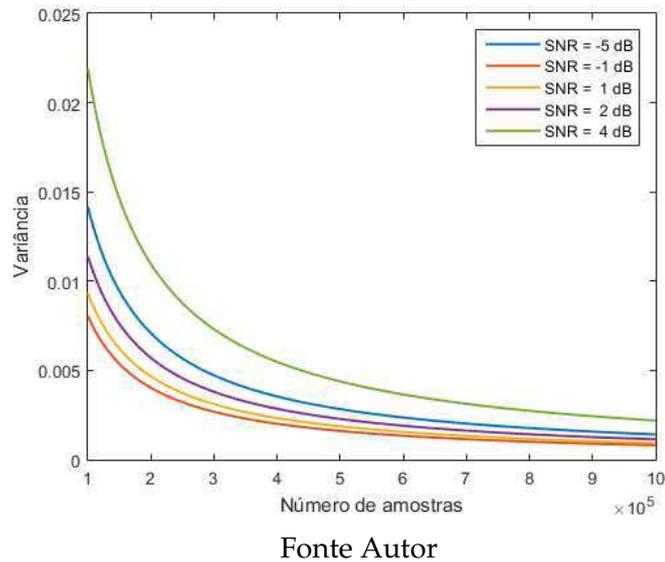
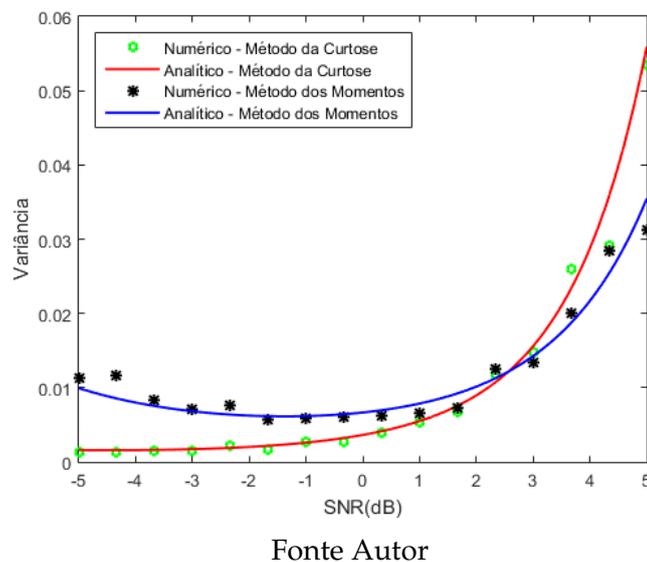


Figura 4.14 – Variância do estimador de SNR baseado no método dos momentos em função do número de amostras N para um canal afetado pelo desvanecimento $\eta - \mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,5$, utilizando um esquema de modulação 64-QAM e diferentes valores de SNR.



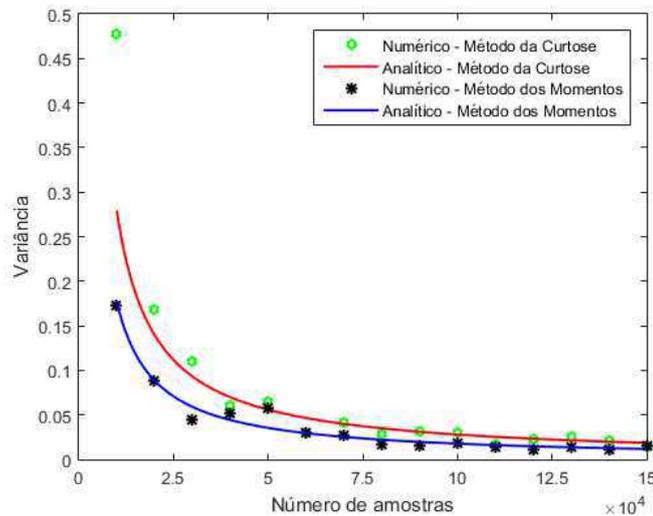
Nas Figuras 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18 é feita uma comparação entre os dois estimadores de SNR apresentados neste trabalho. Nesta figuras, além das curvas teóricas, também são mostrados os resultados numéricos obtidos por meio de simulação utilizando o *software* Matlab.

Figura 4.15 – Variância dos estimadores de SNR em função da relação sinal ruído (dB) para um canal sob desvanecimento Nakagami- m , com $m = 0,9$, esquema de modulação 64-QAM e número de amostras $N = 5 \times 10^4$



As Figuras 4.15 e 4.16 mostram os resultados da simulação para um canal sob desvanecimento Nakagami- m .

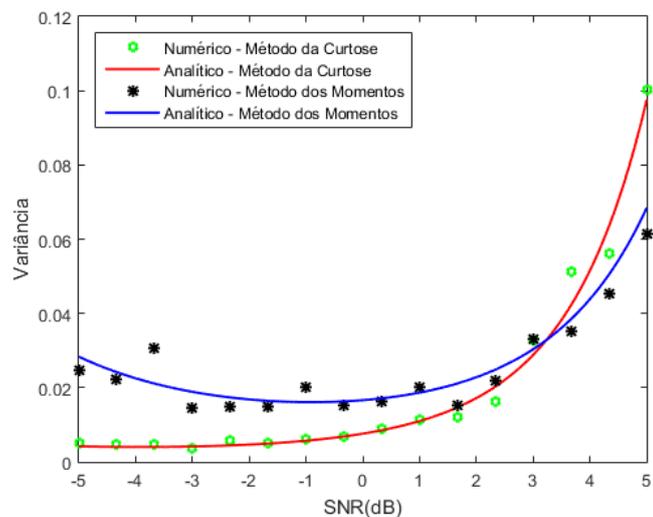
Figura 4.16 – Variância dos estimadores de SNR em função do número de amostras para um canal sob desvanecimento Nakagami- m , com $m = 0,9$, esquema de modulação 64-QAM e SNR de 5 dB.



Fonte Autor

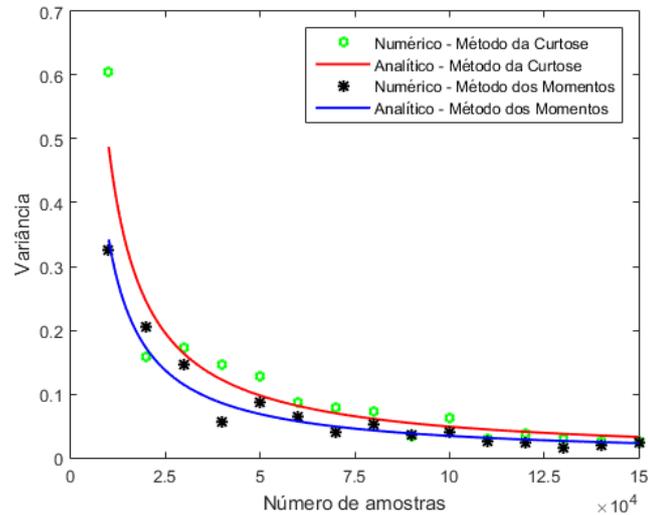
As Figuras 4.17 e 4.18 mostram os resultados da simulação para um canal sob desvanecimento $\eta - \mu$.

Figura 4.17 – Variância dos estimadores de SNR em função da relação sinal ruído (dB) para um canal sob desvanecimento $\eta - \mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,6$, esquema de modulação 64-QAM e número de amostras $N = 5 \times 10^4$



Fonte Autor

Figura 4.18 – Variância dos estimadores de SNR em função do número de amostras para um canal sob desvanecimento desvanecimento $\eta - \mu$, com $\eta = 0,9$ e $\mu = 0,6$, esquema de modulação 64-QAM e SNR de 5 dB.



Fonte Autor

Por meio das Figuras 4.15 e 4.17, é possível notar que o estimador de SNR pelo método da curtose apresenta desempenho melhor para valores de SNR mais baixos do que o estimador pelo método dos momentos, contudo, à medida que a SNR aumenta, o segundo estimador apresenta melhor desempenho. Em torno de 3 dB ambos os estimadores apresentam um desempenho semelhante para a configuração de parâmetros utilizada nas simulações.

Capítulo 5

Conclusão

Foram desenvolvidas expressões analíticas para estimadores de SNR baseado nos métodos da curtose e dos momentos e expressões analíticas aproximadas para a variância de tais estimadores. Utilizando tais expressões, foi possível avaliar numericamente ambos os estimadores de SNR.

Os resultados mostram que, para os estimadores de SNR baseado nos método da curtose e dos momentos para canais sob desvanecimento Nakagami- m e $\eta - \mu$, as curvas numéricas ficaram bem próximas das analíticas. Contudo, para uma SNR elevada, os valores numéricos da variância e da média começaram a apresentar uma certa instabilidade, sendo necessário o aumento no número de amostra para contornar esse problema. Tal fato mostrou que esse estimador se comporta melhor para baixas SNRs (-5 dB à 10 dB), ou seja, em situações onde o canal de comunicações é mais fortemente atacado pelo ruído.

Apesar de ser necessário o aumento no número de amostras para diminuição das oscilações em torno das curvas teóricas, o que poderia não ser atrativo à sistemas de comunicações reais, a variância cai rapidamente com o aumento desse parâmetro, o que torna ambos os métodos aplicáveis.

Na obtenção dos resultados simulados foi utilizado o método da aceitação-rejeição com limitante superior fixo para a geração das variáveis aleatórias do ruído e do desvanecimento. A simulação de um canal de comunicações realístico necessita de um número elevado de amostras, de modo que a obtenção dos resultados via simulação exigiu um grande esforço computacional. Utilizando-se o software Matlab, obteve-

se um tempo média para obtenção dos resultados simulados de 7 dias para o modelo Nakagami- m e 13 dias para o modelo $\eta - \mu$. A diferença no tempo médio das simulações é principalmente devido à fase do modelo de desvanecimento $\eta - \mu$.

Embora não tenham sido estudados estimadores de SNR para canais afetados pelos desvanecimento $\kappa - \mu$ e $\alpha - \mu$, principalmente pela inexistência de uma expressão exata para a fase de tais modelos, trabalhos futuros poderão utilizar métodos numéricos para contornar tal problema, possibilitando assim o desenvolvimento de estimadores de SNR para canais afetados por esses tipos de desvanecimento.

Referências Bibliográficas

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions*. : Dover Publications, 1965.

ALENCAR, M. S. *Telefonia Celular Digital*. São Paulo: Érica, 2007.

FRAIDENRAICH, G. *Distribuições e Estatísticas de Ordem para o Canal Sem Fio*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Campinas, Fevereiro 2006.

GHODESWAR, S.; POONACHA, P. Tenth Order Envelope Moment Based SNR Estimation Technique Using Newton-Raphson Method for AWGN and Rician Channels. In: IEEE. *Communication, Information & Computing Technology (ICCICT), 2015 International Conference on.* , 2015. p. 1–6.

HARRIS, F.; DICK, C. SNR Estimation Techniques for Low SNR Signals. In: IEEE. *Wireless Personal Multimedia Communications (WPMC), 2012 15th International Symposium on.* , 2012. p. 276–280.

JAVIDI, S.; MANDIC, D. P. Kurtosis Based Blind Source Extraction of Complex Noncircular Signals with Application in EEG Artifact Removal. 2010.

JUNIOR, J. S. *Análise de Estimadores para Canais com Desvanecimento Rápido e não Seletivo em Frequência Modelados de Acordo com as Distribuições $\kappa - \mu$ e $\eta - \mu$* . Dissertação (Mestrado) — Departamento de Telecomunicações, Instituto Nacional de Telecomunicações, Santa Rita do Sapucaí, Brasil, 2006.

KAY, S. M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing vol I: Estimation Theory*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2013.

LIU, Y. et al. SNR Estimation for OFDM Signals in Frequency Selective Fading Channels. In: IEEE. *Image and Signal Processing (CISP), 2014 7th International Congress on.* , 2014. p. 1068–1072.

NAKAGAMI, M. The m-Distribution - A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading. *Statistical Method of Radio Propagation*, Pergamon Press, 1960.

PAPPI, K. N.; LIOUMPAS, A. S.; KARAGIANNIDIS, G. K. θ -QAM: A parametric quadrature amplitude modulation family and its performance in AWGN and fading channels. *Communications, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 58, n. 4, p. 1014–1019, 2010.

PARK, C.-H. et al. Biased SNR Estimation Using Pilot and Data Symbols in BPSK and QPSK Systems. In: . : [s.n.], 2014. v. 16, n. 6, p. 583.

PORTO, I. B. G.; YACOUB, M. D. A Simple Approximation to the $\kappa - \mu$ Phase Probability Density Function. *XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações-SBRT*, Brasília, DF, Brasil, 2012.

PROAKIS, J. G. *Digital Communications*. McGraw-Hill, New York, 2001.

RAMESH, A.; CHOCKALINGAM, A.; MILSTEIN, L. B. SNR Estimation in Generalized Fading Channels and its Application to Turbo Decoding. In: *ICC*. : IEEE, 2001. p. 1094–1098.

SKLAR, B. *Digital communications*. : Prentice Hall, 2001.

TEJERINA, G.; YACOUB, M. Distribuição Conjunta de Fase-Envoltória $\eta - \mu$: Uma Nova Abordagem. *XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações-SBRT*, Fortaleza, CE, Brasil, 2013.

YACOUB, M. D. *Foundations of mobile radio engineering*. : CRC press, 1993.

YACOUB, M. D. The $\kappa - \mu$ Distribution and the $\eta - \mu$ Distribution. In: . : IEEE, 2007. v. 49, n. 1, p. 68–81.

YACOUB, M. D.; BAUTISTA, J. V.; GUEDES, L. G. de R. On Higher Order Statistics of the Nakagami-m Distribution. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, IEEE, v. 48, n. 3, p. 790–794, 1999.