

Felipe Gomes Pontes

Projeto de controladores PID com ação derivativa filtrada

Campina Grande, Paraíba

Outubro de 2016

Felipe Gomes Pontes

Projeto de controladores PID com ação derivativa filtrada

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Centro de Engenharia Elétrica e Informática - CEEI

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Orientador: Saulo Oliveira Dornellas Luiz

Campina Grande, Paraíba

Outubro de 2016

Felipe Gomes Pontes

Projeto de controladores PID com ação derivativa filtrada

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado. Campina Grande, Paraíba, 25 de outubro de 2016:

Saulo Oliveira Dornellas Luiz
Orientador

Antonio Marcus Nogueira Lima
Convidado

Campina Grande, Paraíba
Outubro de 2016

*Este trabalho é dedicado à minha família e a todos
que me apoiaram durante essa jornada.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a meus pais, Simone e Helder, que proporcionaram a oportunidade de realizar o sonho de estudar fora e obter uma formação em uma Universidade de qualidade.

Aos meus irmãos, Carlos Henrique e Heldelana, sempre presentes na minha vida, pacientes e dispostos a me ajudar no que eu precisasse.

Aos meus primos, Pedro Neto e Rodrigo, que tenho como irmãos e, através do apoio e momentos de descontração, traziam com eles um alívio para o estresse e tensão que a vida universitária podia trazer.

Aos amigos que formei durante a vida universitária, Víctor Lima, Oeslle Lucena, Érico Castro, Lucas Henriques, Mateus Lucena, Geraldo Landim, Artur Freitas, Lucas Moreira e Mateus Queiroga, que me apoiaram em momentos de necessidade e deram suporte quando podiam.

A minha namorada Karla, que, através de seu amor, companheirismo e dedicação, contribuiu como um exemplo a ser seguido.

Finalmente, aos meus professores, pois, sem eles, não haveria chegado onde cheguei. Em especial ao professor Saulo Oliveira Dornellas Luiz, que foi um orientador dedicado, atencioso e presente.

*"The road goes ever on and on
Down from the door where it began.
Now far ahead the road has gone
And I must follow, if I can,
Pursuing it with eager feet,
Until it joins some larger way
Where many paths and errands meet.
And whither then? I cannot say"*
(J.R.R. Tolkien, The Fellowship of the Ring)

Resumo

Controle é o processo responsável por manter uma variável do sistema em um valor particular, também chamado de referência. Para que isso seja alcançado, utiliza-se controladores, tais como Proporcional(P), Proporcional-Integral(PI) ou Proporcional-Integral-Derivativo(PID). No caso do controlador PID, a implementação pode ser realizada utilizando-se um filtro para ação derivativa. Neste trabalho de conclusão de curso faz-se uma comparação entre a utilização deste controlador com e sem filtro para 3 técnicas de projeto: Lugar das raízes, Resposta em frequência e Realimentação de estados.

Palavras-chave: PID, ação derivativa filtrada, espaço de estados, lugar das raízes, resposta em frequência.

Abstract

Control is the process responsible for maintaining a system variable at a particular value, also known as reference. For this goal, controllers are used, such as: Proportional(P), Proportional-Integral(PI) or Proportional-Integral-Derivative(PID). In the PID case, the implementation may be performed using a derivative filter. In this work, a comparison is performed considering this controller either with or without the filter for 3 design techniques: Root locus, Frequency response and State space.

Keywords: PID, derivative filter, state space, root locus, frequency response.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Controlador em série com a planta	26
Figura 2 – Fluxograma para o projeto de um controlador	27
Figura 3 – Fluxograma para a técnica Lugar das Raízes	30
Figura 4 – Fluxograma para a técnica Resposta em Frequência	33
Figura 5 – Fluxograma para a técnica de Realimentação de Estados	35
Figura 6 – Diagrama de blocos do sistema	36
Figura 7 – Diagrama de blocos do sistema	37
Figura 8 – Avião <i>Piper Dakota</i>	39
Figura 9 – Asa do avião	39
Figura 10 – Lugar das Raízes da planta	40
Figura 11 – Resposta ao degrau da planta	40
Figura 12 – Diagrama de blocos do sistema	42
Figura 13 – Resposta ao Degrau - Sistema com inserção de $p_d = 1000$	43
Figura 14 – Resposta ao Degrau - Sistema projetado com $p_d = 1000$	43
Figura 15 – Comparação das respostas dos sistemas em malha fechada	43
Figura 16 – Resposta quando há perturbação	44
Figura 17 – Diagrama de Bode	45
Figura 18 – Resposta ao Degrau - Sistema com inserção de $p_d = 1000$	47
Figura 19 – Resposta ao Degrau - Sistema projetado com $p_d = 1000$	47
Figura 20 – Comparação das respostas dos sistemas em malha fechada	48
Figura 21 – Resposta quando há perturbação	49
Figura 22 – Satélite de comunicações	49
Figura 23 – Modelo para o satélite	49
Figura 24 – Diagrama de blocos no <i>Simulink</i>	52
Figura 25 – Expansão correspondente ao subsistema de u_d , presenta na Figura 24 .	52
Figura 26 – Resposta ao Degrau	53
Figura 27 – Resposta ao Degrau com perturbação	53

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores dos ganhos para cada projeto	42
Tabela 2 – Resultado de $G(s_0)H(s_0)$ para cada situação	42
Tabela 3 – Especificações dos controladores	44
Tabela 4 – Dados do Diagrama de Bode	46
Tabela 5 – Valores dos ganhos para cada situação	46
Tabela 6 – Especificações dos controladores	47
Tabela 7 – Valores dos ganhos	51
Tabela 8 – Comparação entre de diferentes valores de p_d para $e_{ss} = 0.01$	55
Tabela 9 – Comparação entre de diferentes valores de p_d para $e_{ss} = 0.001$	56

Lista de abreviaturas e siglas

P	Proporcional
PI	Proporcional-Integral
PID	Proporcional-Integral-Derivativo

Lista de símbolos

s_0	Pólo em malha fechada desejado
ϕ	Ângulo do pólo desejado s_0
δ	Ângulo da planta no pólo s_0 ($H(s_0)$)
δ_e	Inclinação do ascensor do avião <i>Piper Dakota</i>
ψ	Inclinação do avião <i>Piper Dakota</i>
ζ	Coefficiente de amortecimento
ζ_0	Coefficiente de amortecimento utilizado
ω_n	Frequência Natural
ω_{n_0}	Frequência Natural utilizada
ω_{PM}	Frequência de Cruzamento de Ganho

Sumário

1	INTRODUÇÃO	25
2	PROJETO	29
2.1	Lugar das Raízes	29
2.1.1	Motivação	29
2.1.2	Projeto	29
2.2	Resposta em Frequência	33
2.2.1	Motivação	33
2.2.2	Projeto	34
2.3	Realimentação de Estados	35
2.3.1	Motivação	35
2.3.2	Projeto	36
3	ESTUDO DE CASO POR MEIO DE SIMULAÇÕES	39
3.1	Lugar das Raízes	39
3.1.1	Planta e especificações	39
3.1.2	Simulação	40
3.2	Resposta em Frequência	44
3.2.1	Simulação	44
3.3	Realimentação de Estados	48
3.3.1	Planta e especificações	48
3.3.2	Simulação	50
4	CONCLUSÃO	55
	REFERÊNCIAS	57
	ANEXOS	59
	ANEXO A – CÓDIGO PARA A TÉCNICA LUGAR DAS RAÍZES	61
	ANEXO B – CÓDIGO PARA A TÉCNICA RESPOSTA EM FREQUÊN- CIA	67
	ANEXO C – CÓDIGO PARA A TÉCNICA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	73

1 Introdução

A área de Controle está cada vez mais presente na sociedade, seja em produtos de alta tecnologia, cuja precisão é crucial, ou em simples mecanismos de automação. O sistema de controle é aquele responsável por fazer com que a saída de um processo, também chamado de planta, tenha um comportamento desejado. Por exemplo, um comportamento desejado típico é a saída seguir um valor de referência.

Três controladores típicos são: Proporcional(P), Proporcional-Integral(PI) e o Proporcional-Integral-Derivativo(PID). O controlador P utiliza o erro entre a saída e o referencial para conseguir minimizar essa diferença. Em plantas sem pólos na origem, só não haverá erro se o ganho proporcional tender ao infinito, o que não é realizável e nem desejável. Portanto, para assegurar que o erro em regime permanente do sistema em malha fechada chegue a zero, realiza-se a inclusão de um componente que realize uma integral do erro, ou seja, que possua um pólo na origem. O ganho derivativo refina o resultado, adicionando uma característica antecipativa, ou seja, melhora a velocidade de resposta do sistema, o que pode causar um aumento na sensibilidade a ruídos. Em (1.1) é apresentada a lei de controle com ações proporcional, integral e derivativa.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1.1)$$

A lei de controle apresentada em (1.1) está no domínio do tempo. Uma aplicação da Transformada de Laplace pode passá-la para o domínio do tempo, como apresenta (1.2).

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (1.2)$$

A função em (1.2), no entanto, é imprópria, ou seja, a ordem do numerador é maior do que a do denominador. Isso representa um sistema não causal, fato que torna tal controlador não implementável. Para sanar tal problema é possível realizar a inserção de um filtro com ação derivativa, resultando em (1.3).

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d p_d \frac{s}{s + p_d} \quad (1.3)$$

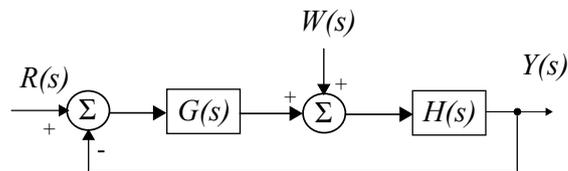
Este trabalho visa, com técnicas de projeto de controladores PID com ação derivativa filtrada, possibilitar uma análise comparativa com controladores que não foram projetados considerando-se a ação derivativa filtrada. Não é objetivo deste trabalho comparar diferentes técnicas de projeto, mas sim, para cada uma delas, comparar o desempenho de sistemas de controle quando, na fase de projeto, a ação derivativa filtrada é considerada e quando não é.

São analisadas 3 técnicas de projeto: Lugar das Raízes, Resposta em Frequência e Realimentação de Estados. São apresentadas os desempenhos de cada uma por meio de simulações de exemplos apresentados por Franklin et al. Técnicas de projeto de controladores seguem o fluxograma apresentado na [Figura 2](#). Este trabalho tem como foco as etapas de Análise, Projeto, Simulação e a verificação do cumprimento das especificações.

Para as técnicas Lugar das Raízes e Resposta em Frequência, três comparações foram utilizadas. Utilizando a mesma planta, realizou-se o projeto do controlador sem o filtro, com a inserção do mesmo após o projeto e considerando a ação derivativa filtrada desde o início, fato que ocasiona em uma maior complexidade no projeto.

Já para a técnica Realimentação de Estados, procurou-se apenas analisar o projeto com o filtro e como tal método pode ser afetado.

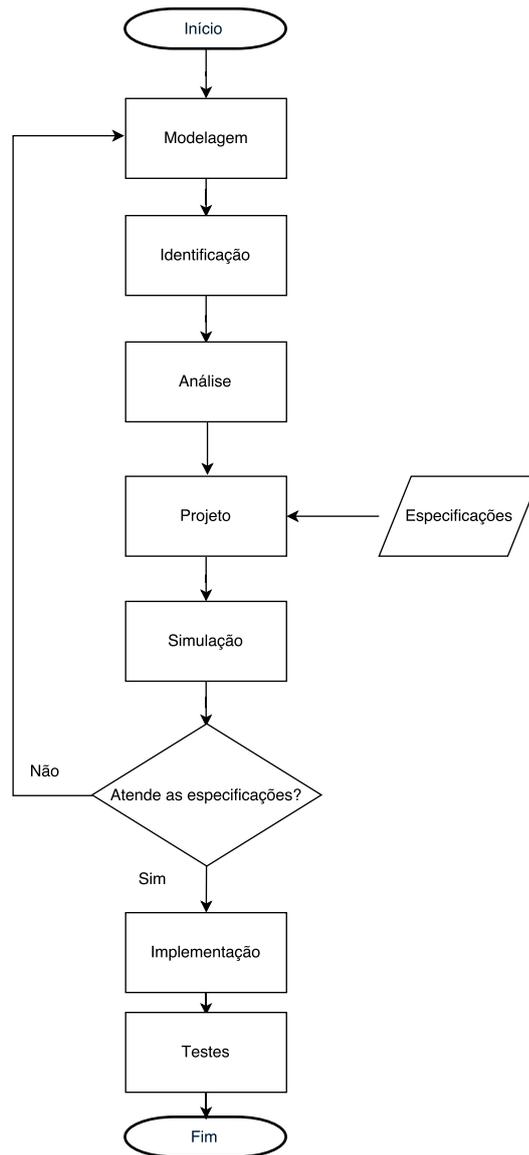
Figura 1 – Controlador em série com a planta



Fonte: Próprio autor

Finalmente, vale ressaltar que o estudo aqui realizado utiliza o controlador em série com a planta, como apresentado na [Figura 1](#). Será considerada também uma perturbação na entrada da planta.

Figura 2 – Fluxograma para o projeto de um controlador



Fonte: Próprio autor

2 Projeto

2.1 Lugar das Raízes

2.1.1 Motivação

A técnica do lugar das raízes, desenvolvida por W. R. Evans ([NISE, 2011](#)), visa mostrar graficamente os pólos de malha fechada considerando-se variações dos ganhos em malha fechada. Isso possibilita uma descrição qualitativa do desempenho do sistema de controle.

A variação de ganho movimentam os pólos de malha fechada nos ramos do lugar das raízes. Isso restringe a resposta transitória do sistema. Se as especificações desejadas para a malha fechada requerem que os ramos passem em outra localização, é necessário a utilização de um controlador, fator responsável por uma mudança no lugar das raízes. No caso do PID, além de tal diferença permitir uma melhora na resposta transitória, também é possível reduzir o erro de regime permanente.

Quando se dispõe da função de transferência da planta, e essa é de ordem elevada, o projeto manual da alocação de pólos pode exigir um esforço elevado pelo projetista. Nesse caso, o projeto pela técnica de Lugar das Raízes pode ser mais vantajosa, pois exige um número finito e constante de cálculos, independente da ordem da função de transferência da planta.

2.1.2 Projeto

O fluxograma para este caso é mostrado na [Figura 3](#).

O cálculo dos ganhos K_p e K_d está descrito como segue. Inicia-se com o pólo especificado para a malha fechada s_0 :

$$s_0 = |s_0|e^{j\angle s_0} = a \cos(\phi) + ja \operatorname{sen}(\phi) \quad (2.1)$$

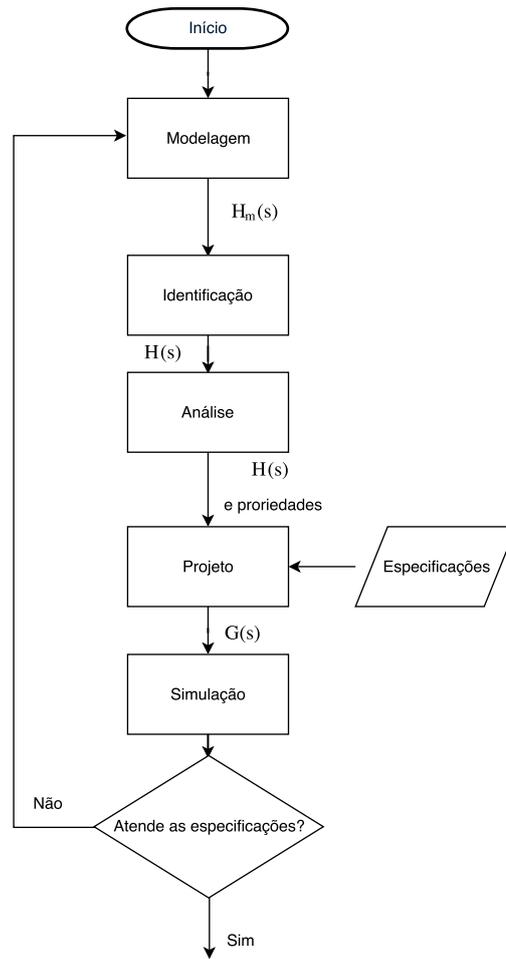
Substituindo-o na função de transferência da planta:

$$H(s_0) = |H(s_0)|e^{j\angle H(s_0)} = b \cos(\delta) + jb \operatorname{sen}(\delta) \quad (2.2)$$

Resta agora encontrar a função de transferência do controlador:

$$G(s_0) = K_p + \frac{K_i}{s_0} + K_d p_d \frac{s_0}{s_0 + p_d} = \frac{K_p(s_0^2 + s_0 p_d) + K_i(s_0 + p_d) + K_d p_d s_0^2}{s_0^2 + p_d s_0} \quad (2.3)$$

Figura 3 – Fluxograma para a técnica Lugar das Raízes



Fonte: Próprio autor

Para que s_0 seja pólo de malha fechada, tem-se:

$$G(s_0) \cdot H(s_0) = -1 \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) em (2.4):

$$[K_p(s_0^2 + s_0p_d) + K_i(s_0 + p_d) + K_dp_d s_0^2] \cdot H(s_0) = -s_0^2 - p_d s_0 \quad (2.5)$$

$$K_p(s_0^2 + s_0p_d)H(s_0) + K_i(s_0 + p_d)H(s_0) + K_dp_d s_0^2 H(s_0) = -s_0^2 - p_d s_0 \quad (2.6)$$

$$K_p(s_0^2 + s_0p_d)H(s_0) + K_dp_d s_0^2 H(s_0) = -K_i(s_0 + p_d)H(s_0) - (s_0^2 + p_d s_0) \quad (2.7)$$

Cada um dos termos da equação (2.7) é analisado individualmente.

$$K_p(s_0^2 + s_0p_d)H(s_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= K_p[a^2 \cos(2\phi) + ja^2 \sin(2\phi) + (a \cos(\phi) + ja \sin(\phi))p_d](b \cos(\delta) + jb \sin(\delta)) \\
&= K_p(a^2b \cos(2\phi) \cos(\delta) - a^2b \sin(2\phi) \sin(\delta) + p_dab \cos(\phi) \cos(\delta) - p_dab \sin(\phi) \sin(\delta) \\
&+ jp_dab \sin(\phi) \cos(\delta) + ja^2b \cos(2\phi) \sin(\delta) + jp_dab \cos(\phi) \sin(\delta) + ja^2b \sin(2\phi) \cos(\delta)) \\
&= K_p \left\{ a^2b \cos(2\phi + \delta) + p_dab \cos(\phi + \delta) + j[a^2b \sin(\delta + 2\phi) + p_dab \sin(\delta + \phi)] \right\}
\end{aligned}$$

Parte-se agora para o segundo termo:

$$\begin{aligned}
&K_dp_d s_0^2 H(s_0) = \\
&= K_dp_d(a^2 \cos(2\phi) + ja^2 \sin(2\phi))(b \cos(\delta) + jb \sin(\delta)) \\
&= K_dp_d[a^2b \cos(2\phi) \cos(\delta) + ja^2b \sin(2\phi) \cos(\delta) + ja^2b \cos(2\phi) \sin(\delta) - a^2b \sin(2\phi) \sin(\delta)] \\
&= K_dp_d[a^2b \cos(2\phi + \delta) + ja^2b \sin(2\phi + \delta)]
\end{aligned}$$

Para o caso do terceiro termo:

$$\begin{aligned}
&K_i(s_0 + p_d)H(s_0) = \\
&= K_i(a \cos(\phi) + ja \sin(\phi) + p_d)(b \cos(\delta) + jb \sin(\delta)) \\
&= K_i(ab \cos(\phi) \cos(\delta) + jab \sin(\phi) \cos(\delta) + p_db \cos(\delta) + \\
&\quad jab \cos(\phi) \sin(\delta) - ab \sin(\phi) \sin(\delta) + jp_db \sin(\delta)) \\
&= K_i \{ ab \cos(\phi + \delta) + p_db \cos(\delta) + j[ab \sin(\phi + \delta) + p_db \sin(\delta)] \}
\end{aligned}$$

Finalmente, para o último termo:

$$\begin{aligned}
&s_0^2 + s_0p_d = \\
&= a^2 \cos(2\phi) + ja^2 \sin(2\phi) + p_d(a \cos(\phi) + ja \sin(\phi)) \\
&= a^2 \cos(2\phi) + p_da \cos(\phi) + j(a^2 \sin(2\phi) + p_da \sin(\phi))
\end{aligned}$$

Para simplificação de cálculos, realiza-se substituições tanto nos ângulos, fazendo $2\phi + \delta = \theta$ e $\phi + \delta = \omega$, quanto nos termos reais e imaginários dos termos calculados. Como resultado, obtém-se as seguintes expressões:

$$K_p(\alpha_1 + j\beta_1) = \begin{cases} \alpha_1 = a^2b \cos(\theta) + p_dab \cos(\omega) \\ \beta_1 = a^2b \sin(\theta) + p_dab \sin(\omega) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$K_d(\alpha_2 + j\beta_2) = \begin{cases} \alpha_2 = p_da^2b \cos(\theta) \\ \beta_2 = p_da^2b \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$K_i(\alpha_3 + j\beta_3) = \begin{cases} \alpha_3 = ab \cos(\omega) + p_db \cos(\delta) \\ \beta_3 = ab \sin(\omega) + p_db \sin(\delta) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\alpha_4 + j\beta_4 = \begin{cases} \alpha_4 = a^2 \cos(2\phi) + p_d a \cos(\phi) \\ \beta_4 = a^2 \sin(2\phi) + p_d a \sin(\phi) \end{cases} \quad (2.11)$$

Realizando agora uma substituição das expressões encontradas de (2.8) à (2.11) em (2.7), obtém-se:

$$K_p(\alpha_1 + j\beta_1) + K_d(\alpha_2 + j\beta_2) = -K_i(\alpha_3 + j\beta_3) - (\alpha_4 + j\beta_4) \quad (2.12)$$

Transforma-se a equação (2.12) no sistema de equações lineares em (2.13) e, após, na equação matricial em (2.14). Na solução do sistema de equações, é omitido o cálculo da matriz inversa. A solução é apresentada em (2.15).

$$\begin{cases} K_p\alpha_1 + K_d\alpha_2 = -K_i\alpha_3 - \alpha_4 \\ K_p\beta_1 + K_d\beta_2 = -K_i\beta_3 - \beta_4 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_i\alpha_3 - \alpha_4 \\ -K_i\beta_3 - \beta_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} K_p \\ K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_i\alpha_3 - \alpha_4 \\ -K_i\beta_3 - \beta_4 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{onde } \begin{cases} a_{11} = \frac{\text{sen}(\theta)}{ab \text{sen}(\phi)} \\ a_{12} = \frac{-\cos(\theta)}{ab \text{sen}(\phi)} \\ a_{21} = \frac{-\text{sen}(\theta)}{p_d ab \text{sen}(\phi)} - \frac{\text{sen}(\omega)}{a^2 b \text{sen}(\phi)} \\ a_{22} = \frac{\cos(\theta)}{p_d ab \text{sen}(\phi)} + \frac{\cos(\omega)}{a^2 b \text{sen}(\phi)} \end{cases} \quad (2.16)$$

$$K_p = -a_{11}K_i\alpha_3 - a_{11}\alpha_4 - a_{12}K_i\beta_3 - a_{12}\beta_4 \quad (2.17)$$

$$K_p = \frac{-|s_0| \text{sen}(\delta)}{|H_{(s_0)}| p_d \text{sen}(\phi)} - \frac{\text{sen}(\phi + \delta)}{|H_{(s_0)}| \text{sen}(\phi)} - \frac{K_i}{p_d} - \frac{K_i \text{sen}(2\phi)}{|s_0| \text{sen}(\phi)} \quad (2.18)$$

$$K_d = -a_{21}K_i\alpha_3 - a_{21}\alpha_4 - a_{22}K_i\beta_3 - a_{22}\beta_4 \quad (2.19)$$

$$K_d = K_i \left(\frac{1}{p_d^2} + \frac{\text{sen}(2\phi)}{|s_0| p_d \text{sen}(\phi)} + \frac{1}{|s_0|^2} \right) + \frac{\text{sen}(\delta)}{|H_{(s_0)}| p_d \text{sen}(\phi)} \left(\frac{|s_0|}{p_d} + 2 \cos(\phi) + \frac{p_d}{|s_0|} \right) \quad (2.20)$$

Como mostrado pelas equações (2.18) e (2.20), é possível encontrar o valor de K_p e K_d sem dependência entre eles. Há, porém, a necessidade de se saber o valor de K_i , que pode ser determinado por meio da especificação para o regime permanente. Percebe-se que há condições limites para que esse projeto analítico seja factível: ambos p_d e módulo do pólo s_0 não pode ser zero e o ângulo de s_0 deve ser diferente de zero.

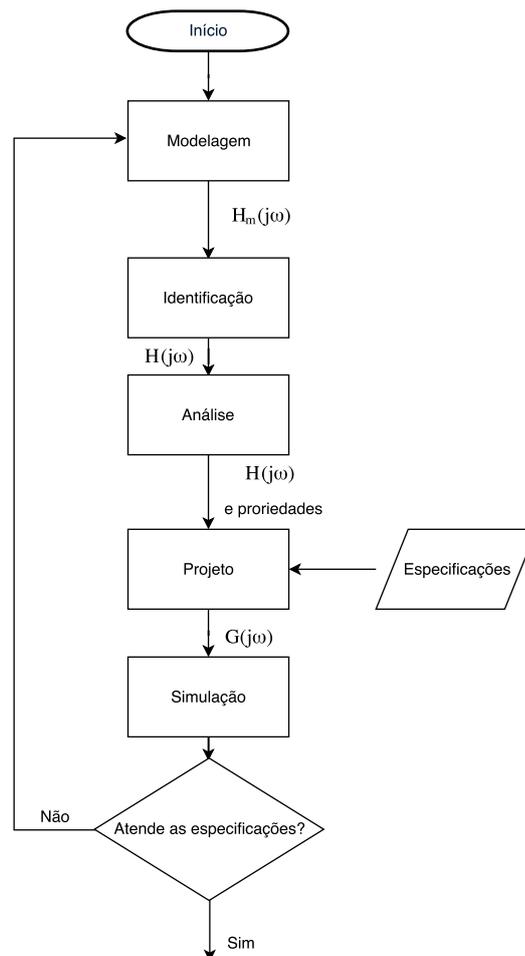
2.2 Resposta em Frequência

2.2.1 Motivação

O método da Resposta em Frequência foi desenvolvido por Nyquist e Bode anteriormente ao do Lugar das Raízes. Há casos em que não existe a disponibilidade da função de transferência do sistema, porém são acessíveis seus dados da resposta em frequência. A partir desses dados, é possível realizar o projeto do controlador PID.

Quando trabalhando com a técnica de Resposta em Frequência, três gráficos são essenciais: Diagramas de Bode, que consistem em dois diagramas, um de magnitude e outro de fase, e Diagrama de Nyquist. A partir deles é possível analisar o sistema e obter informações que ajudam a projetar o controlador. O fluxograma para este caso é apresentado na [Figura 4](#).

Figura 4 – Fluxograma para a técnica Resposta em Frequência



Fonte: Próprio autor

2.2.2 Projeto

O cálculo dos ganhos K_p e K_d está descrito a seguir. A função de transferência do controlador é dada por:

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d p_d \frac{s}{s + p_d} = \frac{K_p(s + p_d)s + K_i(s + p_d) + K_d p_d s^2}{s(s + p_d)} \quad (2.21)$$

$$G(s) = \frac{(K_p + K_d p_d)s^2 + (K_p p_d + K_i)s + K_i p_d}{s(s + p_d)} \quad (2.22)$$

Que pode ser desenvolvida para:

$$G(s) = \frac{K_p + K_d p_d}{s p_d} \cdot \frac{s^2 + \frac{K_p p_d + K_i}{K_p + K_d p_d} s + \frac{K_i p_d}{K_p + K_d p_d}}{\frac{s}{p_d} + 1} \quad (2.23)$$

Da função de transferência em (2.23) é possível retirar a frequência natural, ω_n^2 , e o coeficiente de amortecimento, ζ . Assim:

$$\omega_n^2 = \frac{K_i p_d}{K_p + K_d p_d} \quad (2.24)$$

$$\zeta = \frac{K_p p_d + K_i}{2\sqrt{(K_i p_d)(K_p + K_d p_d)}} \quad (2.25)$$

Prosseguindo com o desenvolvimento da resposta em frequência do controlador:

$$G(j\omega) = \frac{(K_p + K_d p_d)(j\omega)^2 + (K_p p_d + K_i)(j\omega) + K_i p_d}{(j\omega)^2 + j\omega p_d} \quad (2.26)$$

$$G(j\omega) = \frac{(K_p + K_d p_d)(-\omega^2) + (K_p p_d + K_i)(j\omega) + K_i p_d}{(-\omega^2) + j\omega p_d} \cdot \frac{(-\omega)^2 - j\omega p_d}{(-\omega^2) - j\omega p_d} \quad (2.27)$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega^4(K_p + K_d p_d) + \omega^2 p_d^2 K_p + j[\omega^3(K_d p_d^2 - K_i) - \omega K_i p_d^2]}{\omega^4 + \omega^2 p_d^2} \quad (2.28)$$

Separando a parte real e a imaginária:

$$|G(j\omega)|e^{j\theta} = \frac{(\omega^2 p_d^2 + \omega^4)K_p + \omega^4 K_d p_d}{\omega^4 + \omega^2 p_d^2} + j \frac{\omega^3 p_d^2 K_d + (-\omega^3 - \omega p_d^2)K_i}{\omega^4 + \omega^2 p_d^2} \quad (2.29)$$

K_i é definido a partir da especificação de regime permanente. Sabendo que $|G(j\omega_{PM})|e^{j\theta} = \frac{1}{|H(j\omega_{PM})|}(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$, pode-se isolar K_p e K_d como segue:

$$\frac{\omega_{PM}^3 p_d^2 K_d + (-\omega_{PM}^3 - \omega_{PM} p_d^2)K_i}{\omega_{PM}^4 + \omega_{PM}^2 p_d^2} = \frac{\sin(\theta)}{|H(j\omega_{PM})|} \quad (2.30)$$

$$K_d = \frac{\frac{(\omega_{PM}^4 + \omega_{PM}^2 p_d^2) \sin(\theta)}{|H(j\omega_{PM})|} + (\omega_{PM}^3 + \omega_{PM} p_d^2)K_i}{\omega_{PM}^3 p_d^2} \quad (2.31)$$

$$\frac{(\omega_{PM}^2 p_d^2 + \omega_{PM}^4) K_p + \omega_{PM}^4 K_d p_d}{\omega_{PM}^4 + \omega_{PM}^2 p_d^2} = \frac{\cos(\theta)}{|H(j\omega_{PM})|} \quad (2.32)$$

$$K_p = \frac{(\omega_{PM}^4 + \omega_{PM}^2 p_d^2) \cos(\theta) - \omega_{PM}^4 K_d p_d}{\omega_{PM}^2 p_d^2 + \omega_{PM}^4} \quad (2.33)$$

Percebe-se que, diferente da técnica do Lugar das Raízes, o K_p depende de K_d .

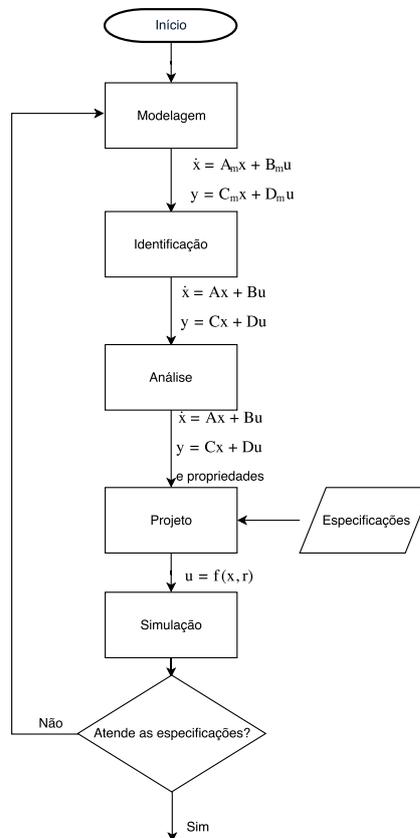
2.3 Realimentação de Estados

2.3.1 Motivação

Quando se dispõe da representação em espaço de estados de um sistema linear e invariante no tempo, é possível projetar um controlador usando o conceito de realimentação de estados.

O fluxograma para este caso é mostrado na [Figura 5](#).

Figura 5 – Fluxograma para a técnica de Realimentação de Estados

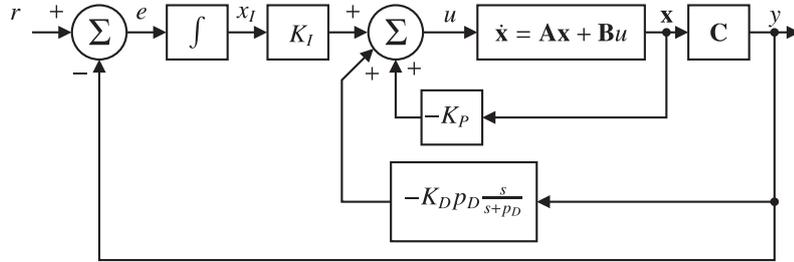


Fonte: Próprio autor

2.3.2 Projeto

A [Figura 6](#) mostra o diagrama de blocos para o controlador com realimentação de estados, ação integral e ação derivativa. A partir dele, pode-se encontrar a lei de controle.

Figura 6 – Diagrama de blocos do sistema



Fonte: Autoria do Prof. Saulo O. D. Luiz

$$u = -\mathbf{K}_p \mathbf{x} + K_i x_i + u_d \quad (2.34)$$

Necessita-se encontrar u_d e substituí-lo em (2.34). Para isso, utiliza-se a função de transferência apresentada em (2.35), que utiliza u_d como saída e y como entrada.

$$\frac{U_d(s)}{Y(s)} = -K_d p_d \frac{s}{s + p_d} \quad (2.35)$$

De (2.35) é possível extrair as equações de estado:

$$\dot{x}_d = -p_d x_d + y \quad (2.36)$$

$$u_d = K_d p_d^2 x_d - K_d p_d y \quad (2.37)$$

Das equações (2.36) e (2.37), tira-se $A = -p_d$, $B = 1$, $C = K_d p_d^2$ e $D = K_d p_d$. O diagrama de blocos é mostrado na [subseção 3.3.2](#).

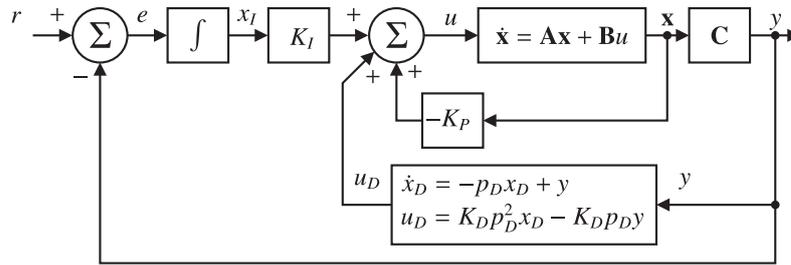
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_d & 0 & \mathbf{C} \\ 0 & 0 & -\mathbf{C} \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r \quad (2.38)$$

O diagrama de blocos da [Figura 6](#) é equivalente ao apresentado na [Figura 7](#).

$$u = K_i x_i + K_d p_d^2 x_d - K_d p_d y - \mathbf{K}_p \mathbf{x} \quad (2.39)$$

$$u = K_i x_i + K_d p_d^2 x_d - (K_d p_d \mathbf{C} + \mathbf{K}_p) \mathbf{x} \quad (2.40)$$

Figura 7 – Diagrama de blocos do sistema



Fonte: Autoria do Prof. Saulo O. D. Luiz

$$u = \begin{bmatrix} K_d p_d^2 & K_i & -(K_d p_d \mathbf{C} + \mathbf{K}_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$u = - \begin{bmatrix} -K_d p_d^2 & -K_i & (K_d p_d \mathbf{C} + \mathbf{K}_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} x_d \\ x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Aplicando o resultado encontrado na expressão (2.41) nas equações de estado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ e $y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$, chega-se à seguinte dinâmica de malha fechada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}[K_d p_d^2 x_d + K_i x_i - (K_d p_d \mathbf{C} + \mathbf{K}_p)\mathbf{x}] \quad (2.43)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}K_d p_d^2 x_d + \mathbf{B}K_i x_i + [\mathbf{A} - \mathbf{B}(K_d p_d \mathbf{C} + \mathbf{K}_p)]\mathbf{x} \quad (2.44)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_d & 0 & \mathbf{C} \\ 0 & 0 & -\mathbf{C} \\ \mathbf{B}K_d p_d^2 & \mathbf{B}K_i & [\mathbf{A} - \mathbf{B}(K_d p_d \mathbf{C} + \mathbf{K}_p)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r \quad (2.45)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_i \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

3 Estudo de caso por meio de simulações

Como apresentado na Introdução, o foco deste trabalho é analisar o desempenho do sistema por meio de uma comparação entre o projeto feito com a consideração do filtro de ação derivativa e sem. Portanto, utilizando exemplos apresentados inicialmente por (FRANKLIN et al., 2002), nos quais já se dispõe de modelos de sistemas na forma de funções de transferência ou equações diferenciais, a análise do Lugar das Raízes e da Resposta em Frequência é realizada com o exemplo 5.13; já a análise do Espaço de Estados utiliza o exemplo 7.14.

3.1 Lugar das Raízes

3.1.1 Planta e especificações

O problema trabalha com um avião do modelo *Piper Dakota*, que é apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Avião *Piper Dakota*



Fonte: <<http://www.airmart.com/aircraft-for-sale/155/piper/n2944v-1979-piper-dakota/n2944v>>

Figura 9 – Asa do avião



Fonte: <<http://www.airmart.com/aircraft-for-sale/155/piper/n2944v-1979-piper-dakota/n2944v>>

A Figura 9 exibe o compensador, cujo ângulo é dado por δ_t , e o ascensor, cujo ângulo é dado por δ_e . É desejável que o compensador seja ajustado de maneira tal que o esforço de controle de regime permanente realizado pelo ascensor seja nulo, ou seja, $\delta_e = 0$. Sabendo a função de transferência do sistema, mostrada em (3.1), deseja-se projetar um controlador para que as seguintes especificações sejam atendidas: resposta ao degrau tenha um tempo de acomodação menor ou igual a 5 segundos, um *overshoot* menor que 10% e,

considerando a entrada de referência uma rampa unitária, erro em regime permanente menor ou igual a 0.01. O ψ representa a inclinação do avião, em graus.

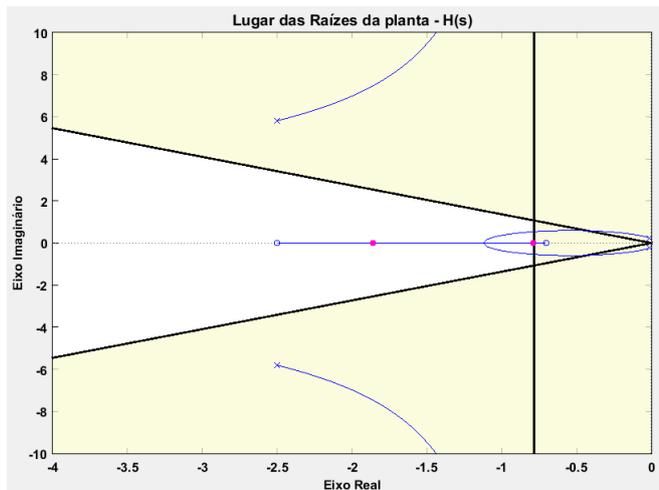
$$H(s) = \frac{\psi(s)}{\delta_e(s)} = \frac{160(s + 2.5)(s + 0.7)}{(s^2 + 5s + 40)(s^2 + 0.03s + 0.06)} \quad (3.1)$$

3.1.2 Simulação

O fluxograma apresentado na [Figura 2](#) é utilizado como base para a análise do sistema. Percebe-se que não há necessidade da modelagem ou da identificação, visto que a função de transferência do sistema é disponibilizada.

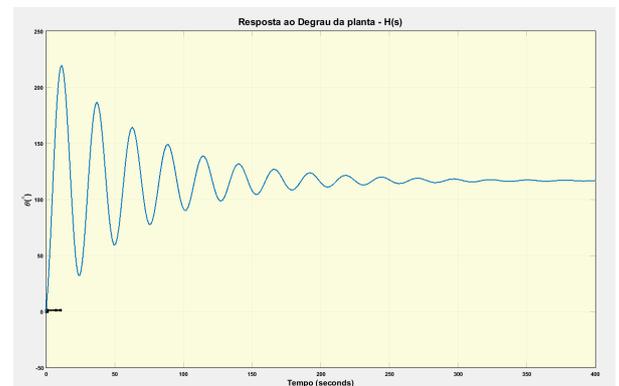
A planta é, então, analisada utilizando a resposta ao degrau para verificar se a mesma atende às especificações. A [Figura 10](#) apresenta a área que delimita onde o pólo deve estar localizado; já a [Figura 11](#) mostra a resposta ao degrau da planta. Em ambos os gráficos, a região amarela é aquela que não atende às especificações.

Figura 10 – Lugar das Raízes da planta



Fonte: Próprio autor

Figura 11 – Resposta ao degrau da planta



Fonte: Próprio autor

Percebido que as especificações não foram atendidas, defini-se o coeficiente de amortecimento, ζ , e a parte real do pólo desejado, σ , como apresentam (3.2) e (3.3) (NISE, 2011).

$$\zeta = -\frac{\ln(M/100)}{\sqrt{(\pi^2 + [\ln(M/100)]^2)}} \quad (3.2)$$

$$\sigma = \frac{4}{T_s} \quad (3.3)$$

Sabendo que parte real pode ser definida como $\sigma = \zeta\omega_n$, pode-se encontrar a frequência natural desejada, ω_n .

$$\omega_n = \frac{4}{T_s\zeta} \quad (3.4)$$

Em (3.2) e (3.4), M é o sobre-sinal, em porcentagem, e o T_s é o tempo de acomodação. Conhecendo o coeficiente de amortecimento e a frequência natural, realiza-se um acréscimo para deslocamento do pólo $\omega_o = \omega_n + 0.1$ e $\zeta_o = \zeta_n + 0.05$. Com estes novos valores, escolhe-se um ponto s_0 , como é apresentado em (3.5).

$$s_0 = -\zeta_o\omega_o + j\omega_o\sqrt{1 - \zeta_o^2} = -0.9318 + j1.1153 \quad (3.5)$$

Para o cálculo de todos os controladores, é utilizado um K_i calculado a partir da especificação de regime permanente.

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (3.6)$$

Considerando que a entrada é uma rampa unitária e sabendo que $e_{ss} = 0.01$:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_p s(s+p_d) + K_i(s+p_d) + K_d p_d s^2}{s(s+p_d)} H(s)} \frac{1}{s^2} \quad (3.7)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \frac{K_p s(s+p_d) + K_i(s+p_d) + K_d p_d s^2}{s+p_d}} H(s) = \frac{1}{\frac{K_i p_d}{p_d} \lim_{s \rightarrow 0} H(s)} \quad (3.8)$$

Com um erro de 0.01, tem-se:

$$K_i = \frac{1}{e_{ss} \lim_{s \rightarrow 0} H(s)} = 0.8571 \quad (3.9)$$

Assim, apenas realizando aplicação das fórmulas (2.18) e (2.20), obtém-se a Tabela 1, na qual $G_a(s)$ representa o controlador sem filtro de ação derivativa, $G_b(s)$, aquele cujo filtro é inserido após os cálculos dos ganhos e $G_c(s)$, o controlador cujos ganhos são calculados levando em conta o filtro. Os controladores são apresentados em (3.10), (3.11) e (3.12).

$$G_a(s) = K_{p1} + \frac{K_{i1}}{s} + K_{d1}s \quad (3.10)$$

$$G_b(s) = K_{p1} + \frac{K_{i1}}{s} + K_{d1}p_d \frac{s}{s + p_d} \quad (3.11)$$

$$G_c(s) = K_{p2} + \frac{K_{i2}}{s} + K_{d2}p_{d2} \frac{s}{s + p_{d2}} \quad (3.12)$$

Em (3.10) e (3.11), K_{p1} , K_{i1} e K_{d1} são calculados por meio de uma técnica de projeto em que a ação derivativa filtrada não foi considerada na fase de projeto¹, como apresentado em (3.13) e (3.14).

$$K_d = \frac{\text{sen}(\angle H(s_0))}{|s_0| |H(s_0)| \text{sen}(\angle s_0)} + \frac{K_i}{|s_0|^2} \quad (3.13)$$

¹ Curso de Controle Analógico oferecido pelo DEE da UFCG. Disponível em <<https://sites.google.com/a/ee.ufcg.edu.br/controle-analogico/>>

$$K_p = -\frac{\text{sen}(\angle s_0 + \angle H(s_0))}{|H(s_0)| \text{sen}(\angle s_0)} - \frac{2K_i \cos(\angle s_0)}{|s_0|} \quad (3.14)$$

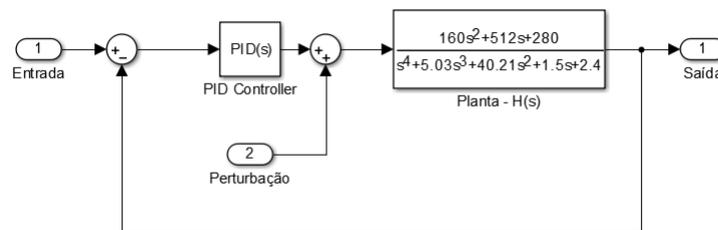
Já em (3.12), K_{p2} , K_{i2} e K_{d2} são calculados conforme apresentado na subseção 2.1.2. Atribuiu-se ao filtro com ação derivativa o valor $p_d = 1000$. Como apresentado na Figura 12, o controlador é colocado em série com a planta, cuja entrada possui uma perturbação.

Tabela 1 – Valores dos ganhos para cada projeto

Controlador	K_p	K_d	K_i	Função de Transferência
$G_a(s)$	0.7522	0.2611	0.8571	$\frac{0.4736s^2+0.886s+0.8571}{s}$
$G_b(s)$	0.7522	0.2611	0.8571	$\frac{474.4s^2+886.9s+857.1}{s^2+1000s}$
$G_c(s)$	0.7517	0.2606	0.8571	$\frac{473.6s^2+885.9s+857.1}{s^2+1000s}$

Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 12 – Diagrama de blocos do sistema



Fonte: Próprio autor

Utilizando as funções de transferência apresentadas na Tabela 1, calculou-se $G(s_0)H(s_0)$. Os resultados podem ser observados na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultado de $G(s_0)H(s_0)$ para cada situação

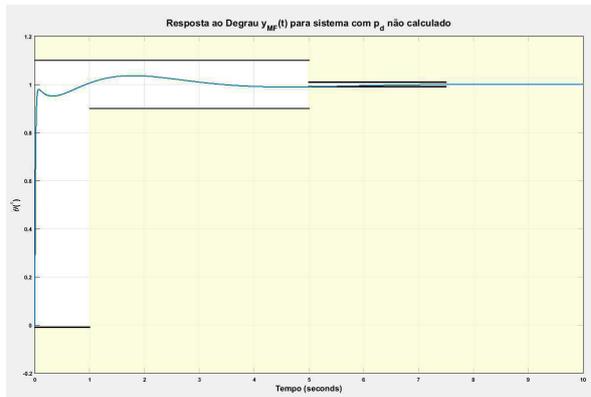
$G(s)$ sem filtro	$G(s)$ com p_d não calculado	$G(s)$ com p_d calculado
$G(s_0)H(s_0)$	-1	$-0.9983 - j0.0020$

Fonte: Produzido pelo autor.

O gráfico mostrados na Figura 13 representa a resposta ao degrau correspondente para o controlador no qual o filtro com ação derivativo é incluído apenas após o cálculo dos ganhos; já a Figura 14 apresenta a resposta do controlador que possui seus ganhos calculados levando em consideração p_d . Percebe-se que ambos os controladores atingem

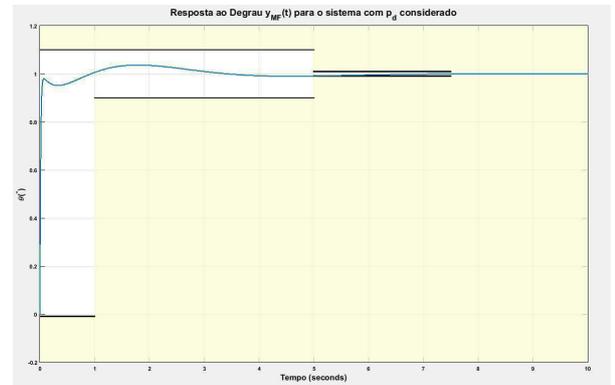
as especificações. Finalmente, sobrepondo essas 2 respostas ao degrau junto ao sistema projetado sem filtro, obtém-se a [Figura 15](#).

Figura 13 – Resposta ao Degrau - Sistema com inserção de $p_d = 1000$



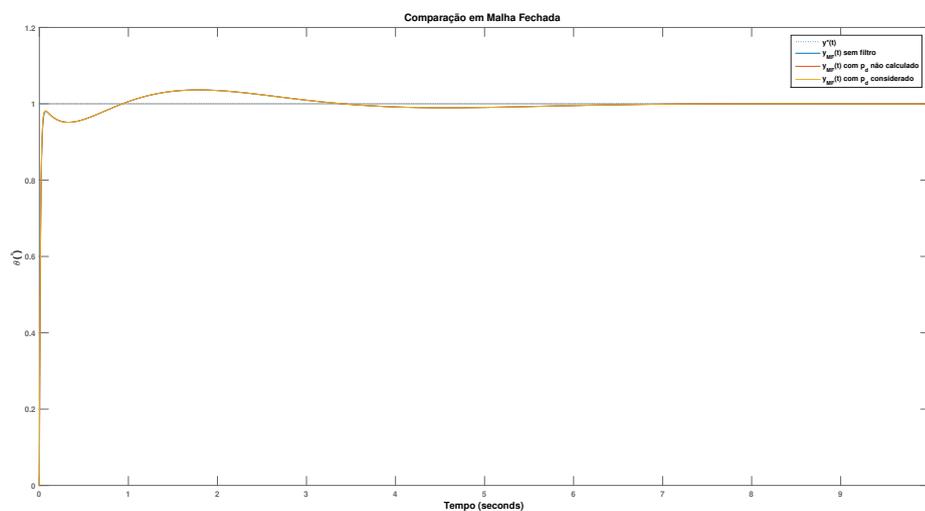
Fonte: Próprio autor

Figura 14 – Resposta ao Degrau - Sistema projetado com $p_d = 1000$



Fonte: Próprio autor

Figura 15 – Comparação das respostas dos sistemas em malha fechada



Fonte: Próprio autor

Para notar melhor a diferença entre os sistemas, as características de cada resposta ao degrau são apresentadas na [Tabela 3](#). A segunda coluna é referente ao tempo de subida, que foi representado como Tr devido à sua sigla em inglês (*Rise Time*), e quantifica o tempo necessário para o sinal ir até 90% (noventa por cento) do valor final. Logo em seguida há o tempo de acomodação, simbolizado por Ts (*Settling Time*), que exprime o tempo para as oscilações ficarem dentro de 1% (um por cento) do valor de regime permanente. Finalmente, sobre-sinal traduz quanto o sinal ultrapassou o valor final.

Tabela 3 – Especificações dos controladores

Controlador	Tr(segundos)	Ts(segundos)	Sobre-sinal (%)
$G_a(s)$	0.0515	4.5264	5.0256
$G_b(s)$	0.0490	4.5264	5.0187
$G_c(s)$	0.0491	4.5257	5.0242

Fonte: Produzido pelo autor.

Finalmente, a [Figura 16](#) mostra as respostas quando há uma perturbação, definida como um degrau com valor final de 0.1.

Figura 16 – Resposta quando há perturbação



Fonte: Próprio autor

3.2 Resposta em Frequência

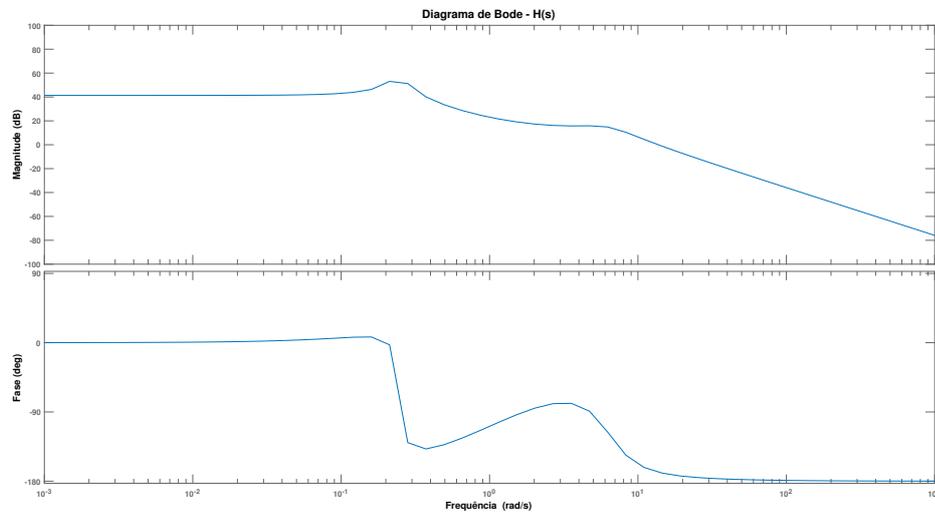
3.2.1 Simulação

Para análise usando a Resposta em Frequência, utiliza-se, inicialmente, os diagramas de Bode.

Utilizando o diagrama de Bode da [Figura 17](#) é possível encontrar a margem de fase 11.7352° na frequência de cruzamento de ganho 13.7039 rad/sec . A [Tabela 4](#) mostra os dados da [Figura 17](#). Necessita-se, então, encontrar uma nova margem de fase e o θ , que representa o ângulo do controlador.

Como explicitado em (NISE, 2011), considera-se um sistema cuja função de transferência em malha aberta é apresentado em (3.15), e a função de transferência em malha

Figura 17 – Diagrama de Bode



Fonte: Próprio autor

fechada é dada por (3.16).

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (3.15)$$

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.16)$$

Para o sistema apresentado em (3.16), é possível obter a relação entre o coeficiente de amortecimento, cujo valor pode ser obtido a partir da especificação de sobre-sinal, e a margem de fase, correspondente a uma especificação da resposta em frequência, como apresentado em (3.17).

$$PM = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}} \right) = 64.6822^\circ \quad (3.17)$$

$$\theta = -180^\circ + PM - \angle(H(j\omega_{PM})) = 52.9470^\circ \quad (3.18)$$

A frequência de cruzamento de ganho a ser utilizada permanece a mesma da planta $H(s)$. Como as especificações são as mesmas utilizadas na [subseção 3.1.2](#), o erro em regime permanente é de 0.01, o que ocasiona em um $K_i = 0.8571$. Então, apenas realizando aplicação das fórmulas (2.31) e (2.33), obtém-se a [Tabela 5](#).

Tabela 4 – Dados do Diagrama de Bode

ω (rad/s)	$20 \log H(j\omega) $ (dB)	$\angle H(j\omega)$ (°)	ω (rad/s)	$20 \log H(j\omega) $ (dB)	$\angle H(j\omega)$ (°)
0.1	43.0031	6.2707	10	6.5188	-158.0629
0.2	50.8816	2.3865	20	-7.2925	-173.5195
0.3	47.7931	-135.4118	30	-14.7047	-176.1491
0.4	38.2007	-137.1959	40	-19.8323	-177.2302
0.5	33.2979	-132.2372	50	-23.769	-177.8273
0.6	30.0331	-126.7973	60	-26.9691	-178.2088
0.7	27.6335	-121.6242	70	-29.6667	-178.4747
0.8	25.7737	-116.8746	80	-31.9992	-178.671
0.9	24.2826	-112.5647	90	-34.0541	-178.8221
1	23.0586	-108.6684	100	-35.8907	-178.9421
2	17.3523	-85.2819	200	-47.9521	-179.4746
3	15.9197	-78.1838	300	-54.9995	-179.6501
4	15.7834	-81.3059	400	-59.9983	-179.7377
5	15.8623	-93.2263	500	-63.8753	-179.7902
6	15.2318	-111.3927	600	-67.0429	-179.8252
7	13.4981	-129.5393	700	-69.721	-179.8502
8	11.1517	-143.1034	800	-72.0408	-179.8689
9	8.7487	-152.1174	900	-74.087	-179.8835

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 5 – Valores dos ganhos para cada situação

Controlador	K_p	K_d	K_i	Função de Transferência
$G_a(s)$	0.9001	0.0916	0.8571	$\frac{0.09156s^2+0.9001s+0.8571}{s}$
$G_b(s)$	0.9001	0.0916	0.8571	$\frac{92.46s^2+901s+857.1}{s^2+1000s}$
$G_c(s)$	0.8829	0.0916	0.8571	$\frac{92.46s^2+883.8s+857.1}{s^2+1000s}$

Fonte: Produzido pelo autor.

Os ganhos do controlador sem filtro foram encontrados através das equações presentes no material do professor².

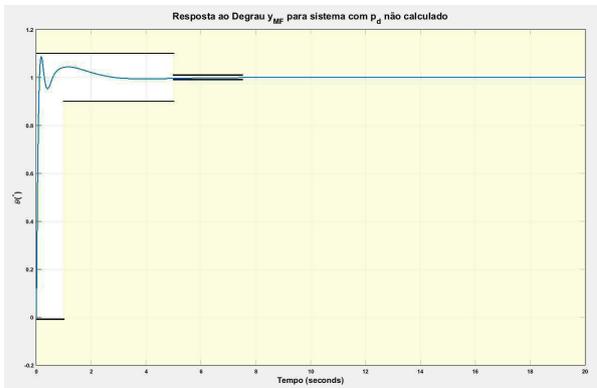
$$K_d = \frac{\text{sen}(\theta)}{\omega_{PM}|H(j\omega_{PM})|} + \frac{K_i}{\omega_{PM}^2} \quad (3.19)$$

² <<https://sites.google.com/a/ee.ufcg.edu.br/control-e-analogico/>>

$$K_p = \frac{\cos(\theta)}{|H(j\omega_{PM})|} \quad (3.20)$$

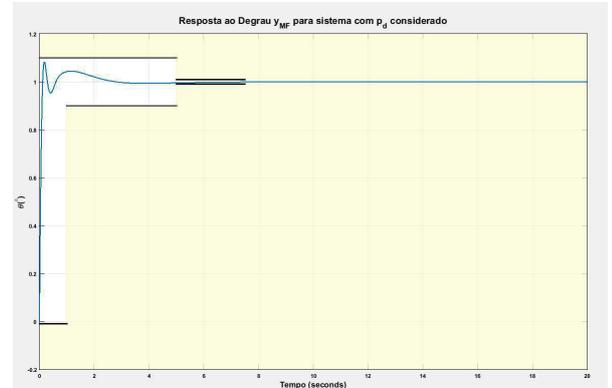
Os gráficos presentes nas Figuras 18 e 19 representam, respectivamente, as respostas ao degrau dos controladores que possuem o p_d inserido após o projeto e que utilizam o p_d desde o início.

Figura 18 – Resposta ao Degrau - Sistema com inserção de $p_d = 1000$



Fonte: Próprio autor

Figura 19 – Resposta ao Degrau - Sistema projetado com $p_d = 1000$



Fonte: Próprio autor

Ambas as respostas ao degrau apresentadas nas Figuras 18 e 19 atingem as especificações. Finalmente, essas duas respostas ao degrau junto à resposta para o sistema projetado sem filtro, são apresentadas na Figura 20. As características da resposta do degrau para cada sistema são apresentadas na Tabela 6.

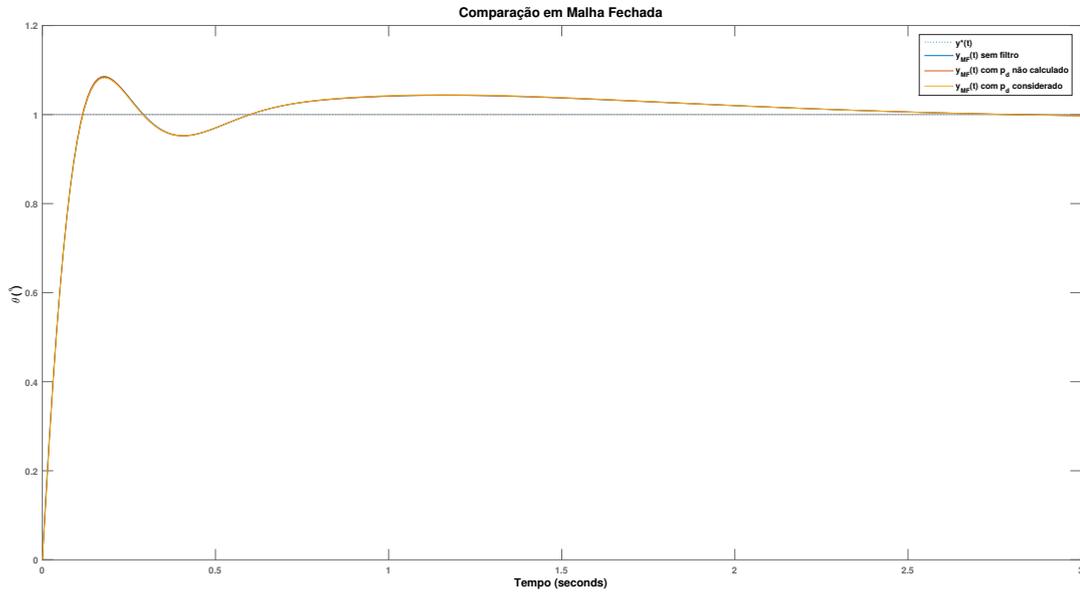
Tabela 6 – Especificações dos controladores

Controlador	Tr(segundos)	Ts(segundos)	Sobre-sinal (%)
$G_a(s)$	0.0854	2.3295	8.4140
$G_b(s)$	0.0839	2.3297	8.5784
$G_c(s)$	0.0847	2.3278	8.2390

Fonte: Produzido pelo autor.

Finalmente, na Figura 21 são apresentadas as repostas quando há uma perturbação, definida como um degrau com valor final de 0.1.

Figura 20 – Comparação das respostas dos sistemas em malha fechada



Fonte: Próprio autor

3.3 Realimentação de Estados

3.3.1 Planta e especificações

Para este estudo de caso, realiza-se a modelagem do satélite de comunicações presente nas Figuras 22 e 23. As equações do modelo são dadas por (3.21) e (3.24).

$$I\ddot{\theta} = u \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{u}{I} \quad (3.21)$$

$$y = \theta \quad (3.22)$$

Os espaços de estados podem ser definidos como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \cdot u \quad (3.23)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Considerando $I = 1$, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (3.25)$$

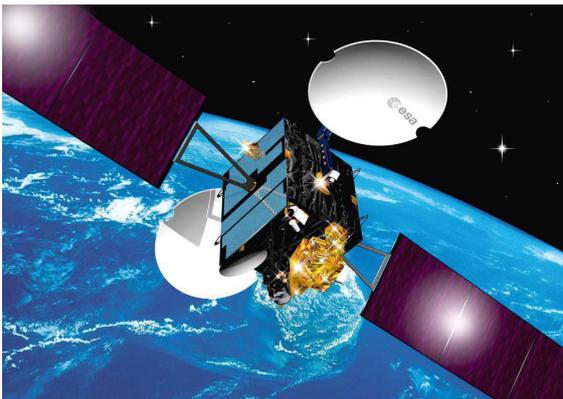
Figura 21 – Resposta quando há perturbação



Fonte: Próprio autor

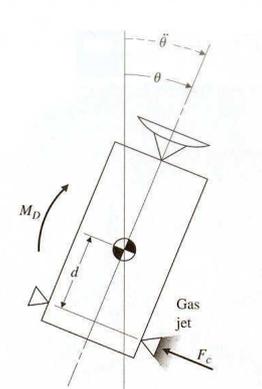
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.26)$$

Figura 22 – Satélite de comunicações



Fonte: <http://blogs.esa.int/orion/2012/08/02/atv-4-passes-critical-live-connection-test/>
>

Figura 23 – Modelo para o satélite



Fonte: Fornecida pelo Prof. Saulo O. D. Luiz

Devido ao fato de não existir especificações para este exemplo, as mesmas utilizadas para as outras técnicas são utilizadas, excetuando-se o tempo de subida (*overshoot* menor que 10%, tempo de acomodação menor ou igual a 5 segundos e erro em regime permanente menor ou igual a 0.01).

3.3.2 Simulação

Utilizando o método demonstrado, cria-se as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} aumentadas, cujos resultados são mostrados em (3.27) e (3.28).

$$\mathbf{A}_{aumentada} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{B}_{aumentada} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Utilizando as matrizes aumentadas, encontra-se um polinômio característico de quarta ordem, definido por $P_{característico} = s^3(s + 1000)$. A matriz de controlabilidade, \mathbf{M}_c , também deve ser de quarta ordem. Conhecendo essa matriz, é possível encontrar sua inversa, que é utilizada para calcular a matriz de transformação \mathbf{T} .

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1000 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -0.001 & -0.001 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1000 & 0 & 1 & 0 \\ 1000000 & 0 & -1000 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Agora, com o valor de \mathbf{T} , pode-se calcular a forma canônica para a matriz \mathbf{A} .

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_{aumentada} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

De (3.31), obtém-se o vetor $\mathbf{a} = [0 \ 0 \ 0 \ 1000]$, que corresponde aos coeficientes do polinômio característico. É necessário realizar uma subtração entre o vetor de coeficientes do polinômio desejado e \mathbf{a} . Foram escolhidos, como pólos de malha fechada, dois pólos que satisfazem as especificações e que serão dominantes.

$$P_{desejado}(s) = (s + 0.8 + j1.0915)(s + 0.8 - j1.0915) = s^2 + 1.6s + 1.8314 \quad (3.32)$$

Realizou-se o acréscimo de dois pólos cujas localizações no eixo real estavam pelo menos 5 vezes mais à esquerda do que os pólos apresentados em (3.32). Obtém-se, então, o polinômio apresentado em (3.34).

$$P_{desejado}(s) = (s + 0.8 + j1.0915)(s + 0.8 - j1.0915)(s + 10)(s + 10) \quad (3.33)$$

$$P_{desejado}(s) = s^4 + 21.6s^3 + 133.8314s^2 + 196.6275s + 183.1375 \quad (3.34)$$

$$\mathbf{a}^* = [183.1375 \quad 196.6275 \quad 133.8314 \quad 21.6] \quad (3.35)$$

Agora é possível encontrar o vetor \mathbf{K} .

$$\mathbf{K} = (\mathbf{a}^* - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{T} = [-9.783 \cdot 10^8 \quad 0.1831 \quad 9.7853 \cdot 10^5 \quad -978.4] \quad (3.36)$$

O vetor \mathbf{K} fornece valores para K_i , K_d e \mathbf{K}_p como apresentado na Tabela 7.

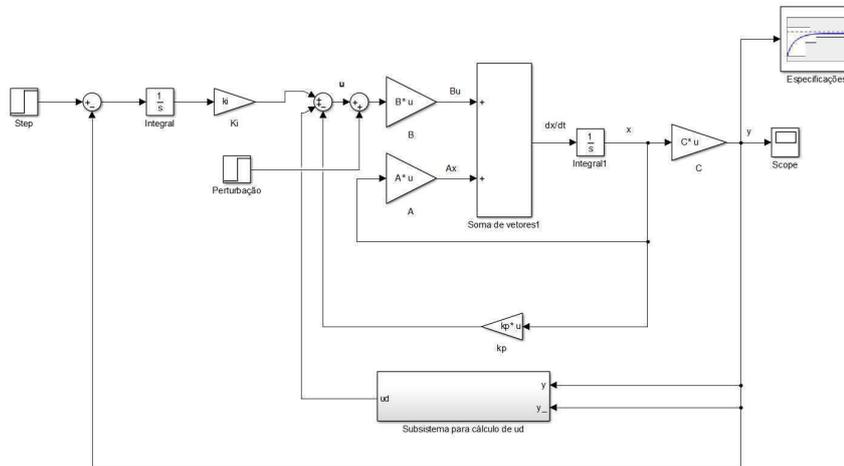
Tabela 7 – Valores dos ganhos

	\mathbf{K}_p	K_d	K_i
Ganho	$[0.1964 \quad -978.4]$	978.5336	0.1831

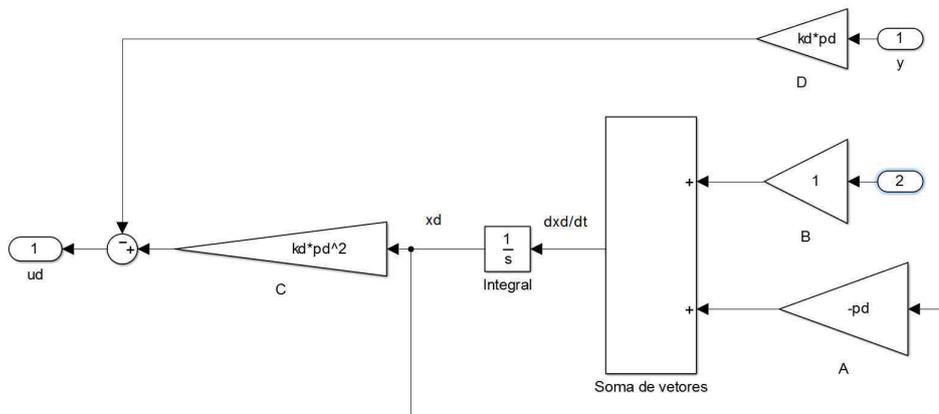
Fonte: Produzido pelo autor.

Com os valores dos ganhos, simulou-se a realimentação de estados no *Simulink*, apresentado na Figura 24. A resposta do sistema ao degrau, como pode ser visualizado na Figura 26, satisfaz as especificações.

Na Figura 27 é apresentada a resposta do sistema quando uma perturbação é inserida. O *overshoot* aparece com um valor relativamente alto, passando de 20%.

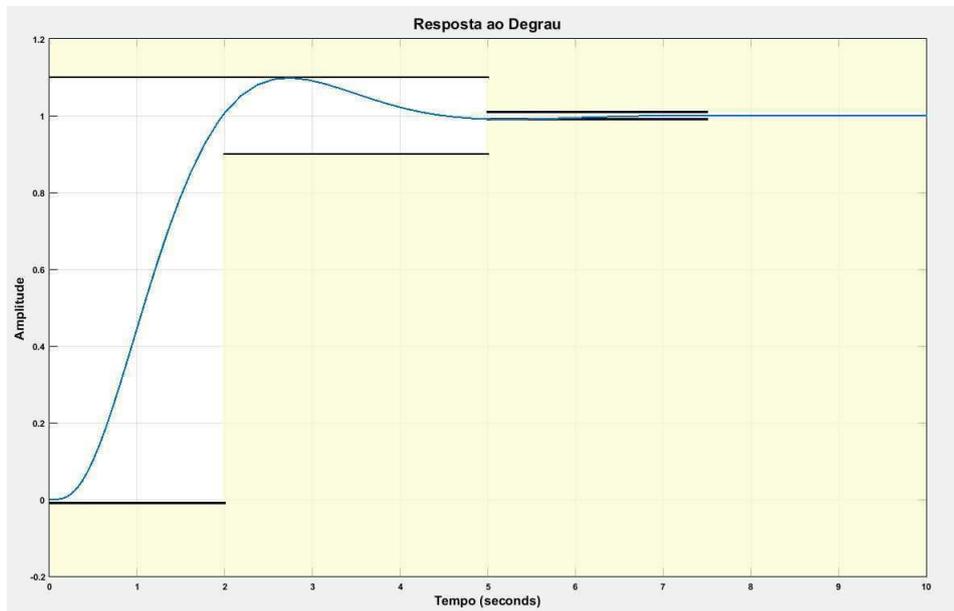
Figura 24 – Diagrama de blocos no *Simulink*

Fonte: Próprio autor

Figura 25 – Expansão correspondente ao subsistema de u_d , presente na [Figura 24](#)

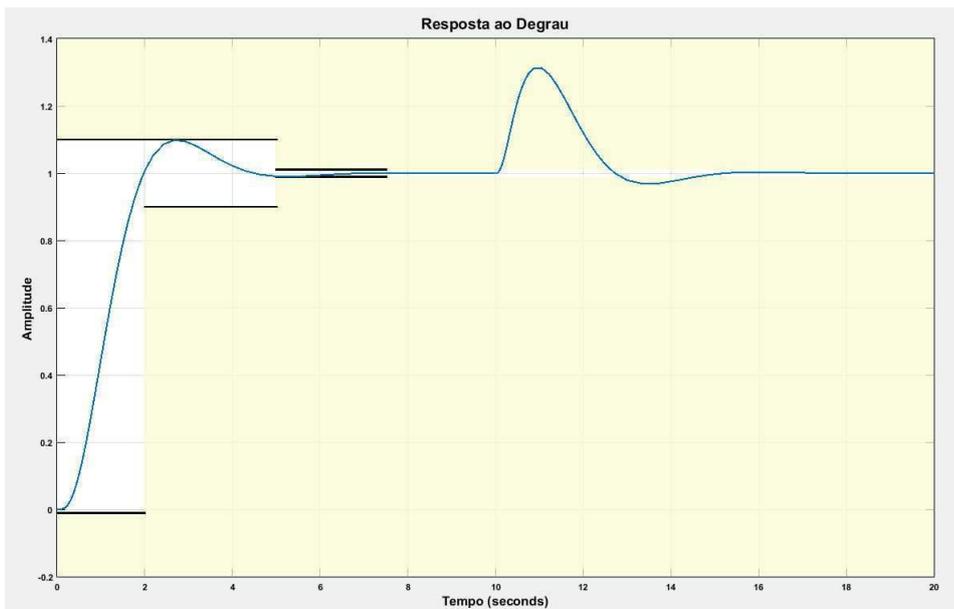
Fonte: Próprio autor

Figura 26 – Resposta ao Degrau



Fonte: Próprio autor

Figura 27 – Resposta ao Degrau com perturbação



Fonte: Próprio autor

4 Conclusão

Nos dois primeiros casos estudados, Lugar das Raízes e Resposta em Frequência, comparações foram feitas entre três formas de projeto do controlador PID, como mencionado na introdução. É possível perceber que o filtro derivativo altera a resposta transitória levemente, melhorando-a em alguns aspectos.

Para a técnica do Lugar das Raízes, como apresentado na [Tabela 3](#), o filtro com ação derivativa diminui o tempo de subida e o tempo de acomodação quando comparados com o controlador sem filtro, $G_a(s)$. O mesmo não acontece para o *overshoot*, que aumenta. Nas [Tabelas 8 e 9](#) é possível comparar o desempenho do sistema para diversos valores de erro de regime permanente e diferentes valores de p_d .

Tabela 8 – Comparação entre de diferentes valores de p_d para $e_{ss} = 0.01$

Controlador	Tr(segundos)	Ts(segundos)	Overshoot (%)
$p_d = 10$			
$G_b(s)$	0.0531	4.4794	44.6910
$G_c(s)$	0.0579	4.4615	43.1391
$p_d = 100$			
$G_b(s)$	0.0349	4.5262	4.9574
$G_c(s)$	0.0356	4.5196	5.0122
$p_d = 1000$			
$G_b(s)$	0.0490	4.5264	5.0187
$G_c(s)$	0.0491	4.5257	5.0242

Fonte: Produzido pelo autor.

É perceptível a relação que há entre o valor do filtro e o erro de regime permanente permitido. Para que a especificação de *overshoot* seja atendida, é necessário que haja um aumento no p_d quanto menor for e_{ss} .

A mesma análise pode ser feita para a Resposta em Frequência, cujas especificações estão presentes na [Tabela 6](#). Neste caso, comparando com o controlador sem filtro, $G_a(s)$, o p_d melhora o tempo de subida. O tempo de acomodação é menor apenas para $G_c(s)$. Já no caso do *overshoot*, $G_c(s)$ teve a melhor resposta entre os três controladores.

A relação entre o valor do filtro e o erro em regime permanente percebida para o Lugar das Raízes também é válida para a Resposta em Frequência: quanto menor e_{ss} , maior deve ser p_d .

Tabela 9 – Comparação entre de diferentes valores de p_d para $e_{ss} = 0.001$

Controlador	Tr(segundos)	Ts(segundos)	Overshoot (%)
$p_d = 10$			
$G_b(s)$	0.0126	0.9149	82.5584
$G_c(s)$	0.0138	0.9912	81.3222
$p_d = 100$			
$G_b(s)$	0.0048	0.1015	52.9046
$G_c(s)$	0.0048	0.0824	52.6571
$p_d = 1000$			
$G_b(s)$	0.0025	0.0081	7.7273
$G_c(s)$	0.0025	0.0081	7.6923

Fonte: Produzido pelo autor.

Para o caso da Realimentação de Estados, acontece algo diferente: o aumento do valor do p_d , a partir de um ponto no qual as especificações são atendidas, ocasiona exclusivamente em uma mudança no tempo de subida. Os outros parâmetros permanecem constantes.

Referências

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A.; POWELL, J. D. *Feedback control of dynamic systems*. 4. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. Citado na página 39.

NISE, N. S. *Control systems engineering*. 6. ed. Estados Unidos: John Wiley and Sons, Inc, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 29, 40 e 44.

Anexos

ANEXO A – Código para a técnica Lugar das Raízes

```

%Projeto de controlador PID
%Técnica: Lugar das Raízes
%Aluno: Felipe Gomes Pontes
%Orientador: Saulo Dornellas

%Neste programa é realizado o projeto de um controlador PID por meio da
%técnica do Lugar das Raízes. O projeto pode ser feito sem a
%consideração do filtro, sendo este colocado apenas após o término do
%projeto, ou considerando-o desde o início.
%Assim, analisa-se o efeito ocasionado por sua inserção e por sua
%consideração desde o início.

%OBS: Utiliza-se o formato polinomial das equações, ou seja, os vetores
%contém os coeficientes das funções.

close all;
clear all;
clc;

%Aqui é realizado o Exemplo 5.13 do livro Feedback Control of Dynamic
%Systems, ed 4 - Franklin

%-----
%Especificações

ess = 0.001;
pd = 10; %Filtro derivativo
%Tr < 1; %Tempo para ir de 0.1 do valor final até 0.9 do valor final
pos = 10; %Overshoot menor que 10%. Quanto menor o overshoot, maior zeta
Ts = 5; %Ts = 4/(zeta*wn)
zeta_desejado = -log(pos/100)/sqrt(pi^2+[log(pos/100)]^2);
wn_desejado = 4/(zeta_desejado*Ts);

%-----
%Seleção de So
real = -(wn_desejado + 0.1)*(zeta_desejado+0.05);
imag = (wn_desejado + 0.1)*sqrt(1-(zeta_desejado+0.05)^2);
s0 = real + i*imag;

```

```

%%
%-----
%Planta

numH = 160*conv([1 2.5],[1 0.7]);
denH = conv([1 5 40],[1 0.03 0.06]);
H = tf(numH,denH);

H_em_s0 = (numH(1)*s0^2 + numH(2)*s0 + numH(3))/(denH(1)*s0^4...
+ denH(2)*s0^3 + denH(3)*s0^2 + denH(4)*s0 + denH(5) );

%-----
%Controlador

ki = 1/(ess*evalfr(H,0));
kd = sin( angle(H_em_s0) )/( abs(s0)*abs(H_em_s0)*sin( angle(s0) ) ) ...
+ki/( abs(s0)^2 )
kp = -sin( angle(s0)+angle(H_em_s0) )/...
( abs(H_em_s0)*sin(angle(s0)) ) - 2*ki*cos(angle(s0))/abs(s0)

numG = [kd kp ki];
denG = [0 1 0];
G = tf(numG,denG);

G_em_s0 = ( numG(1)*s0^2 + numG(2)*s0 + numG(3) )/(denG(1)*s0^2 + ...
denG(2)*s0 + denG(3) );

G_em_s0*H_em_s0
%-----
%Malha Aberta

numMA = conv(numG,numH);
denMA = conv(denG,denH);
HMA = tf(numMA,denMA);

%Malha Fechada
HMF = feedback(G*H,1,-1);

%-----
%Inserção do filtro derivativo - pd

numG_pd = [(kp+kd*pd) (kp*pd+ki) (ki*pd)];%Numerador do controlador com pd
denG_pd = [1 pd 0]; %Denominador do controlador com pd
G_pd = tf(numG_pd,denG_pd); %Função de Transferência do controlador

```

```

G_pd_em_s0 = ( numG_pd(1)*s0^2 + numG_pd(2)*s0 + numG_pd(3) )/...
(denG_pd(1)*s0^2 + denG_pd(2)*s0 + denG_pd(3) );

G_pd_em_s0*H_em_s0
%-----
%Malha Aberta

numMA_pd=conv(numG_pd,numH);
denMA_pd=conv(denG_pd, denH);
HMA_pd = tf(numMA_pd,denMA_pd); %Função de Transferência de Malha Aberta

%Malha Fechada
HMF_pd = feedback(G_pd*H,1,-1); %Função de Transferência de Malha Fechada

%-----
%FIM DO PROJETO SEM FILTRO
%-----

%%
%-----
%INICIO DO PROJETO COM PD
%-----

kd = ki*( 1/(pd^2) + sin(2*angle(s0))/( pd*abs(s0)*sin(angle(s0)) ) + ...
1/(abs(s0)^2) )+( sin(angle(H_em_s0))/( pd*abs(H_em_s0)*sin(angle(s0)) ) )...
*(abs(s0)/pd + 2*cos(angle(s0)) + pd/abs(s0) )
kp = abs(s0)*(-sin(angle(H_em_s0)))/(pd*abs(H_em_s0)*sin(angle(s0))) ...
- (sin(angle(H_em_s0)+angle(s0)))/(abs(H_em_s0)*sin(angle(s0))) - ki/pd ...
- (ki*sin(2*angle(s0)))/(abs(s0)*sin(angle(s0)))
numGpd = [(kp+kd*pd) (kp*pd+ki) (ki*pd)];
%Numerador do controlador = (kp+kd*pd)*s^2+(kp*pd+ki)*s+ki*pd
denGpd = [1 pd 0];
%Denominador do controlador = s^2 + pd*s
Gpd = tf(numGpd,denGpd); %Função de Transferência do controlador

Gpd_em_s0 = ( numGpd(1)*s0^2 + numGpd(2)*s0 + numGpd(3) )/...
(denGpd(1)*s0^2 + denGpd(2)*s0 + denGpd(3) );

Gpd_em_s0*H_em_s0
%-----
%Malha Aberta

numMApd=conv(numGpd,numH); %Mutliplicação de polinômios - numG * numH
denMApd=conv(denGpd,denH); %Mutliplicação de polinômios - denG * denH
HMApd = tf(numMApd,denMApd); %Função de Transferência de Malha Aberta

```

```

%Malha Fechada
HMFpd = feedback(Gpd*H,1,-1); %Função de Transferência de Malha Fechada
%%
%-----
%Figuras

%Lugar das Raízes de H(s)
figure(1)
rlocus(H)
sgrid(zeta_desejado,0)
title('Lugar das Raízes - H(s)')

%Comparação da Resposta em Malha Fechada sem filtro, ...
%com inserção de filtro e com
%filtro (Step)
figure(2)
tF=100;
t=0:0.001:tF;
yr=ones(1,size(t,2)); %Cria um vetor de 1's do tamanho do tempo.
hold on
plot(t,yr,':')
lsim(HMF,yr,t)
lsim(HMF_pd,yr,t)
lsim(HMFpd,yr,t)
legend('y*(t)', 'y_{MF}(t) sem filtro',...
'y_{MF}(t) com p_d não calculado', 'y_{MF}(t) com p_d considerado')
hold off
title('Comparação MF com filtro, sem filtro e filtro inserido')

%Comparação da Resposta em Malha Fechada sem filtro, ...
%com inserção de filtro e com
%filtro (Rampa)
figure(3)
tF=10;
t=0:0.01:tF;
yr=t;
hold on
plot(t,yr,':')
lsim(HMF,yr,t)
lsim(HMF_pd,yr,t)
lsim(HMFpd,yr,t)
legend('y*(t)', 'y_{MF}(t) sem filtro',...
'y_{MF}(t) com p_d não calculado', 'y_{MF}(t) com p_d considerado')
hold off
title('Comparação MF com filtro, sem filtro e filtro inserido')

%Comparação Diagrama de Bode sem filtro, com inserção de filtro e com

```

```
%filtro
figure(4)
rlocus(G*H, G_pd*H, Gpd*H)
sgrid(zeta_desejado,0)
title('Lugar das Raízes G(s)*H(s)')

%-----
%Verificação das especificações

[a1,b1]=step(HMF,20);
[a2,b2]=step(HMF_pd,20);
[a3,b3]=step(HMFpd,20);
C = stepinfo(a1,b1,'SettlingTimeThreshold',0.01);
C1 = stepinfo(a2,b2,'SettlingTimeThreshold',0.01);
C2 = stepinfo(a3,b3,'SettlingTimeThreshold',0.01);
```


ANEXO B – Código para a técnica Resposta em Frequência

```

%Projeto de controlador PID
%Técnica: Resposta em Frequência
%Aluno: Felipe Gomes Pontes
%Orientador: Saulo Dornellas

%Neste programa é realizado o projeto de um controlador PID por meio da
%técnica da Resposta em Frequência. O projeto pode ser feito sem a
%consideração do filtro, sendo este colocado apenas após o término do
%projeto, ou considerando-o desde o início.
%Assim, analisa-se o efeito ocasionado por sua inserção e por sua
%consideração desde o início.

%OBS: Utiliza-se o formato polinomial das equações, ou seja, os vetores
%contém os coeficientes das funções

close all;
clear all;
clc;

%Aqui é realizado o Exemplo 5.13 do livro Feedback Control of Dynamic
%Systems, ed 4 - Franklin

%-----

ess = 0.01;
pd = 1000; %Filtro derivativo
%Tr < 1; %Tempo para ir de 0.1 do valor final até 0.9 do valor final
pos = 10; %Overshoot menor que 10%. Quanto menor overshoot, maior zeta
Ts = 5; %Ts = 4/(zeta*wn)
zeta_desejado = -log(pos/100)/sqrt(pi^2+[log(pos/100)]^2)+0.1;
wn_desejado = 4/(zeta_desejado*Ts);
PM = (180/pi)*atan(2*zeta_desejado ...
/sqrt(-2*zeta_desejado^2+sqrt(1+4*zeta_desejado^4)));
%

%-----

%Planta

numH = 160*conv([1 2.5],[1 0.7]);

```

```

denH = conv([1 5 40],[1 0.03 0.06]);
H = tf(numH,denH);
[Gm,Pm,Wgm,Wpm] = margin(H);
[absH,argH] = bode(H,Wpm); %
theta = -180+PM-argH %
%%
%-----
%INICIO DO PROJETO DO CONTROLADOR SEM PD
%-----
%Controlador

absH=evalfr(H,Wpm);
kp = cos(theta*pi/180)/absH %DEMONSTRADO %
ki = (1/ess)*1/evalfr(H,0) %Ki = 1/(ess*limit(H(s)), s->0)
kd = sin(theta*pi/180)/(Wpm*absH) + ki/Wpm^2 %DEMONSTRADO
numG = [kd kp ki]; %Numerador do controlador = kd*s^2+kp*s+ki
denG = [0 1 0]; %Denominador do controlador = s
G = tf(numG,denG); %Função de Transferência do controlador

%-----
%Malha Aberta

numMA=conv(numG,numH); %Multiplicação de polinômios - numG * numH
denMA=conv(denG,denH); %Multiplicação de polinômios - denG * denH
HMA = tf(numMA,denMA); %Função de Transferência de Malha Aberta
[absHMA,argHMA] = bode(HMA,Wpm); %Magnitude e fase de HMA para frequência wPM

%Malha Fechada
HMF = feedback(G*H,1,-1); %Função de Transferência de Malha Fechada

%-----
%Inserção do filtro derivativo - pd

numG_pd = [(kp+kd*pd) (kp*pd+ki) (ki*pd)]; %Numerador do controlador com pd
denG_pd = [1 pd 0]; %Denominador do controlador com pd
G_pd = tf(numG_pd,denG_pd); %Função de Transferência do controlador

%-----
%Malha Aberta

numMA_pd=conv(numG_pd,numH);
denMA_pd=conv(denG_pd, denH);
HMA_pd = tf(numMA_pd,denMA_pd); %Função de Transferência de Malha Aberta
[absHMA_pd,argHMA_pd] = bode(HMA_pd,Wpm); %Magnitude e fase de HMA para frequência wPM

%Malha Fechada
HMF_pd = feedback(G_pd*H,1,-1); %Função de Transferência de Malha Fechada

```

```

%-----
%FIM DO PROJETO SEM FILTRO
%-----

%%

%-----
%INICIO DO PROJETO COM PD
%-----

%pd=100*Wpm

%ki=100*(wn^2)/k
kd=((Wpm^4 + Wpm^2*pd^2)*sin(theta*pi/180)/absH + ...
(Wpm^3 + Wpm*pd^2)*ki) / (Wpm^3*pd^2)
kp=((Wpm^4 + Wpm^2*pd^2)*cos(theta*pi/180)/absH - ...
(Wpm^4*kd*pd)) / (Wpm^2*pd^2 + Wpm^4)
numGpd = [(kp+kd*pd) (kp*pd+ki) (ki*pd)];
%Numerador do controlador = (kp+kd*pd)*s^2+(kp*pd+ki)*s+ki*pd
denGpd = [1 pd 0];
%Denominador do controlador = s^2 + pd*s
Gpd = tf(numGpd,denGpd); %Função de Transferência do controlador

%-----
%Malha Aberta

numMApd=conv(numGpd,numH); %Mutliplicação de polinômios - numG * numH
denMApd=conv(denGpd,denH); %Mutliplicação de polinômios - denG * denH
HMApd = tf(numMApd,denMApd); %Função de Transferência de Malha Aberta
[absHMApd,argHMApd] = bode(HMApd,Wpm);
%Magnitude e fase de HMA para frequência Wpm

%Malha Fechada
HMFpd = feedback(Gpd*H,1,-1); %Função de Transferência de Malha Fechada

%-----
%FIM DO PROJETO COM FILTRO
%-----

%%

%-----
%Figuras

%Diagrama de Bode de H(s)

```

```

figure(1)
bode(H, [logspace(-3,3)])
title('Diagrama de Bode - H(s)')

%Comparação da Resposta em Malha Fechada sem filtro, com inserção de filtro e com
%filtro (Step)
figure(2)
tF=10;
t=0:0.01:tF;
yr=ones(1,size(t,2)); %Cria um vetor de 1's do tamanho do tempo.
hold on
plot(t,yr,':')
lsim(HMF,yr,t)
lsim(HMF_pd,yr,t)
lsim(HMFpd,yr,t)
legend('y*(t)', 'y_{MF}(t) sem filtro',...
'y_{MF}(t) com inserção do filtro', 'y_{MF}(t) com filtro')
hold off
title('Comparação MF com filtro, sem filtro e filtro inserido')

%Comparação da Resposta em Malha Fechada sem filtro, com inserção de filtro e com
%filtro (Rampa)
figure(3)
tF=10;
t=0:0.01:tF;
yr=0:0.01:tF;
hold on
plot(t,yr,':')
lsim(HMF,yr,t)
lsim(HMF_pd,yr,t)
lsim(HMFpd,yr,t)
legend('y*(t)', 'y_{MF}(t) sem filtro',...
'y_{MF}(t) com inserção do filtro', 'y_{MF}(t) com filtro')
hold off
title('Comparação MF com filtro, sem filtro e filtro inserido')

%Comparação Diagrama de Bode sem filtro, com inserção de filtro e com
%filtro (Rampa)
figure(4)
bode(G,G_pd,Gpd, [logspace(-1,5)])
legend('G(s) sem filtro', 'G(s) com inserção de filtro', 'G(s) com filtro');
title('Diagrama de Bode para G(s) com filtro, sem filtro e filtro inserido')

figure(5)
nyquist(H);
title('Diagrama de Nyquist para a planta - H(s)');

```

```
%%
```

```
%-----
```

```
% %Verificação das especificações
```

```
[a1,b1]=step(HMF,20);
```

```
[a2,b2]=step(HMF_pd,20);
```

```
[a3,b3]=step(HMFpd,20);
```

```
C = stepinfo(a1,b1,'SettlingTimeThreshold',0.01);
```

```
C1 = stepinfo(a2,b2,'SettlingTimeThreshold',0.01);
```

```
C2 = stepinfo(a3,b3,'SettlingTimeThreshold',0.01);
```


ANEXO C – Código para a técnica Realimentação de Estados

```

%Projeto de controlador PID
%Técnica: Realimentação de Estados
%Aluno: Felipe Gomes Pontes
%Orientador: Saulo Dornellas

%Neste programa é realizado o projeto de um controlador PID por meio da
%técnica do Realimentação de Estados

%OBS: Utiliza-se o formato polinomial das equações, ou seja, os vetores
%contém os coeficientes das funções

close all;
clear all;
clc;

%Aqui é realizado o Exemplo 7.14 do livro Feedback Control of Dynamic
%Systems, ed 4 - Franklin

%-----

syms s;
pd = 1000; %Filtro derivativo
pos = 10; %Overshoot menor que 10%. Quanto menor overshoot, maior zeta
Ts = 5; %Ts = 4/(zeta*wn)
zeta_desejado = -log(pos/100)/sqrt(pi^2+[log(pos/100)]^2);
wn_desejado = 4/(zeta_desejado*Ts); %

s0 = -(wn_desejado)*(zeta_desejado) +i*(wn_desejado)*sqrt(1-(zeta_desejado)^2);

%-----
%Planta

%Planta do exemplo do Franklin
A = [0 1; 0 0];
B = [0; 1];
C = [1 0];

%Planta de um exemplo do Nise
% A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -36 -15];

```

```

% B = [0; 0; 1];
% C = [1000 100 0];

%Planta do slide do professor
% A = [-7.963 43.4815 12.4444 46.3704;
1.2206 1.6071 -7.3527 -5.8808;
-0.039452 7.0958 -4.9734 0.97504;
-1.2214 1.252 5.843 6.3293];
% B =[23;-1;2;2];
% C = [-0.033 0.223 0.1039 0.3873];

D = 0;
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D);
H = tf(num,den);

%Polinômio Característico do sistema
% sI = [s 0; 0 s]; %Segunda Ordem
% sI = [s 0 0; 0 s 0; 0 0 s]; % Terceira Ordem
sI = [s 0 0 0; 0 s 0 0; 0 0 s 0; 0 0 0 s]; %Quarta Ordem
% sI = [s 0 0 0 0;
% 0 s 0 0 0;
% 0 0 s 0 0;
% 0 0 0 s 0;
% 0 0 0 0 s]; %Quinta Ordem
% sI = [s 0 0 0 0 0;
% 0 s 0 0 0 0;
% 0 0 s 0 0 0;
% 0 0 0 s 0 0;
% 0 0 0 0 s 0;
% 0 0 0 0 0 s]; %Sexta Ordem

A1 = [-pd 0 C; 0 0 -C; [0;0] [0;0] A]; % Para A de Segunda Ordem
% A1 = [-pd 0 C; 0 0 -C; [0;0;0] [0;0;0] A]; % Para A de Terceira Ordem
% A1 = [-pd 0 C; 0 0 -C; [0;0;0;0] [0;0;0;0] A]; % Para A de Quarta Ordem
B1 = [0;0;B];
C1 = [0 0 C];

poly_carac = det(sI-A1);

%Planta do professor
% poly_carac = [1 1005 5005 4994.7 -5001.2 5997.3];

%-----
%INICIO DO PROJETO DO CONTROLADOR
%-----
%Matriz de Controlabilidade

```

```

% Mc = [B1 A1*B1] %Segunda Ordem
% Mc = [B1 A1*B1 A1*A1*B1]; %Terceira Ordem
Mc = [B1 A1*B1 A1*A1*B1 A1*A1*A1*B1]; %Quarta Ordem
% Mc = [B1 A1*B1 A1*A1*B1 A1*A1*A1*B1 A1*A1*A1*A1*B1]; %Quinta Ordem
% Mc = [B1 A1*B1 A1*A1*B1 A1*A1*A1*B1 A1*A1*A1*A1*B1 A1^6*B1]; %Sexta Ordem
Mc_inv = inv(Mc);

%Matriz de Transformação
% t1 = [0 0 1]*Mc_inv; %Terceira Ordem
t1 = [0 0 0 1]*Mc_inv; %Quarta Ordem
% t1 = [0 0 0 0 1]*Mc_inv; %Quinta Ordem
% t1 = [0 0 0 0 0 1]*Mc_inv; %Sexta Ordem
t2 = t1*A1;
t3 = t2*A1;
t4 = t3*A1;
% t5 = t4*A1;
% t6 = t5*A1;

T = [t1;t2;t3;t4];

F = T*A1*inv(T);

%-----
%Lei de controle

a = -F(4,1:4);

%Polinômio Característico desejado
poly_desejado = poly([s0 conj(s0)]);

% Acréscimo de pólos pelo menos 5 vezes mais rápido do que o pólo dominante
poly_desejado = conv(poly_desejado, [1 10]);
poly_desejado = conv(poly_desejado, [1 10]);
% poly_desejado = conv(poly_desejado, [1 10]);
% poly_desejado = conv(poly_desejado, [1 10]);

poly_desejado(1)=[]; %Retira o primeiro termo do vetor poly_desejado
a1 = fliplr(poly_desejado); %Reverte a ordem do polinomio desejado

Kc = a1 - a; %Subtração entre o polinomio desejado e o característico

K = Kc*T;

kd = -K(1)/(pd^2); %-kd*pd^2 é igual ao primeiro termo do vetor K
ki = -K(2); %-ki é igual ao segundo termo do vetor K
kp = K(3:4)-kd*pd*C; %O vetor (kdpdC+kp) é igual ao vetor que resta no vetor K

```