



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E INFORMÁTICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GABRIEL CAVALCANTI LEANDRO DE LIMA

MODELAGEM E CONTROLE DE UM CONVERSOR BOOST

Campina Grande, Paraíba  
Outubro de 2017

GABRIEL CAVALCANTI LEANDRO DE LIMA

MODELAGEM E CONTROLE DE UM CONVERSOR BOOST

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Orientador:

Professor João Batista Morais do Santos, D. Sc.

Campina Grande, Paraíba  
Outubro de 2017

GABRIEL CAVALCANTI LEANDRO DE LIMA

MODELAGEM E CONTROLE DE UM CONVERSOR BOOST

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Aprovado em     /     /

---

**Professor Avaliador**  
Universidade Federal de Campina Grande  
Avaliador

---

**Professor João Batista Moraes do Santos, D. Sc.**  
Universidade Federal de Campina Grande  
Orientador, UFCG

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida que me foi dado e mantido até aqui. Agradeço também por Ele me sustentar e fortalecer, me capacitando e instruindo em tudo o que faço.

Agradeço ao meu orientador, João Batista, pela orientação, pelas dicas, e por toda instrução efetuada durante a realização desse trabalho.

Agradeço aos meus colegas de curso, por dividir momentos de angustia e também de extrema alegria, durante esses cinco anos, pelo companheirismo nos estudos, pela torcida sempre presente e pelo sucesso um do outro.

Agradeço à minha mãe e pai, Maria Gilvaneide Cavalcanti de Lima, por todo amor, cuidado, dedicação, instrução e dinheiro investidos em mim durante esses 24 anos.

Agradeço ao meu pai, infelizmente já não mais presente, pelo seu olhar do céu, e pelo o exemplo o qual decidi seguir, na vida, no caráter e também na paixão pela engenharia elétrica.

Agradeço à minha avó, por ser a personificação da palavra amor.

Agradeço à Ana Michelle, por ser minha companheira de todas as horas, sempre com o coração aberto cheio de ternura e compaixão.

Agradeço também a toda minha família, que, é o porto seguro, sempre cheios de carinho e amor, confiança de que eu vou atingir os objetivos.

Enfim, agradeço a cada pessoa que sempre esteve comigo, sempre me dedicou palavras de carinho e de força, cada um de vocês foi essencial para a minha trajetória até aqui.

*“O maior inimigo do conhecimento não é a ignorância,  
mas sim a ilusão do conhecimento”*  
Stephen Hawking.

## RESUMO

A modelagem matemática é uma importante ferramenta, pois permite a aquisição de um modelo que descreve e prever o comportamento de um sistema real, por meio da conversão da realidade em problemas matemáticos. Fazendo uso das técnicas de modelo chaveado e médio clássico, é construída a modelagem do conversor boost em modo contínuo de forma que se obtenha ao final, o modelo médio de pequenos sinais para a implementação do controle, utilizando a técnica de alocação de polos. Em conjunto com uma breve análise dos resultados obtidos visando a otimização do desempenho do conversor.

**Palavras-chave:** Modelagem, Modelo chaveado, Modelo médio, Modelo médio de pequenos sinais, Conversor boost, Controle, Alocação de polos.

## ABSTRACT

Mathematical modeling is an important tool because it allows an acquisition of a model that describes and predict the behavior of a real system by converting reality into mathematical problems. Using classical averaged model and switching model as modeling techniques, a modeling of the converter boost operating in continuous mode is constructed, obtaining the small-signal model for a control implementation, using the pole-allocation technique. In conjunction with a brief analysis of the results obtained aiming an optimization of the converter performance.

**Key words:** Modeling, Switching model, Averaged model, Classical averaged model, Small-signals averaged model, Boost converter, Control, Pole allocation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Modo de operação. ....	13
Figura 2: Circuito do Conversor Buck. ....	14
Figura 3: Circuito do Conversor Boost. ....	14
Figura 4: Circuito do Conversor Buck-Boost. ....	15
Figura 5: Configurações do conversor boost em modo de condução contínuo. ....	16
Figura 6: Evolução da corrente do indutor ao longo do tempo e a configuração referente ao estado descontínuo. ....	16
Figura 7: Diagrama de blocos da aplicação do controle incluindo o conversor. ....	22
Figura 8 - Conversor Boost. ....	23
Figura 9: Configuração quando a chave está no estado OFF. ....	24
Figura 10: Configuração quando a chave está no estado ON. ....	24
Figura 11: Circuito Exato do Conversor Boost. ....	25
Figura 12: Diagrama do circuito do modelo médio do conversor boost. ....	26
Figura 13: Circuito equivalente do modelo médio para pequenos sinais do conversor boost. ....	28
Figura 14: Mapa de polos e zeros do sistema original. ....	29
Figura 15: Modelo chaveado do conversor boost utilizado para simulação. ....	30
Figura 16: Modelo médio clássico do conversor boost utilizado para simulação. ....	30
Figura 17: Tensão de saída $v_c$ dos modelos chaveado e médio clássico. ....	31
Figura 18: Caracterização do regime permanente da tensão de saída das modelagens. ....	31
Figura 19: Mapa dos polos e zeros do sistema $H_0i(s)$ . ....	33
Figura 20: Conversor Boost utilizando compensador por realimentação de estados. ....	33
Figura 21: Tensão de saída do conversor controlado. ....	34
Figura 22: <i>Ripple</i> da tensão de saída do conversor controlado. ....	34



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Dados do Conversor Boost.....	23
---	----

# SUMÁRIO

Agradecimentos.....	iv
Resumo .....	vi
Abstract.....	vii
Lista de Ilustrações .....	viii
Lista de Tabelas.....	ix
Sumário.....	x
1 Introdução .....	11
1.1 Objetivos .....	12
2 Fundamentação Teórica .....	13
2.1 Conversores Elétricos .....	13
2.2 Modelagem do Conversor Boost.....	15
2.3 Modelo Chaveado.....	18
2.4 Modelo Médio Clássico .....	19
2.4.1 Modelo Médio para Pequenos Sinais .....	20
2.5 Teoria de Controle .....	21
2.5.1 Controle usando a compensação dinâmica por alocação de polos.....	22
3 Estudo de Caso .....	23
3.1.1 Modelo Chaveado .....	23
3.1.2 Modelo Médio.....	25
3.1.3 Modelo Médio para Pequenos Sinais .....	26
3.1.4 Controle por alocação de polos.....	28
4 Resultados .....	30
4.1 Simulação das modelagens .....	30
4.2 Análise do Controle .....	32
5 Conclusões .....	35
Referências.....	36
Apêndice A .....	39
Apêndice B.....	41

# 1 INTRODUÇÃO

Os conversores de eletrônica de potência têm imensa importância devido a sua vasta gama de aplicações, tanto em meio acadêmico quanto no industrial, e atualmente destacando-se na área de energias renováveis. Tema este que está em crescente discussão no cenário atual devido a grande necessidade da substituição de fontes energéticas não renováveis, a exemplo do petróleo.

Os conversores são dispositivos capazes de alterar o tipo/nível de uma forma de onda de tensão ou corrente, em outra, por meio da comutação das suas chaves semicondutoras.

Focando nos conversores para aplicações CC-CC, há várias topologias citadas na literatura, dentre elas, as três básicas e não menos importante são, Buck, Boost e Buck-Boost.

Se faz necessário um estudo aprofundado para o aprimoramento desses conversores, com o objetivo de aumentar seu rendimento, reduzir custos, tamanho e peso, afim de garantir uma maior versatilidade quanto as aplicações. Uma das linhas desse estudo é a execução das técnicas de modelagem.

A modelagem é a representação de um sistema real, ou parte dele, se apresentando de forma física ou simbólica. Descrevendo e prevendo detalhadamente o seu comportamento, seguindo um processo dinâmico de experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2004, p.24).

Serão utilizadas duas técnicas de modelagem neste trabalho, elas serão o ponto de partida para a construção de um modelo médio linearizado (Modelo médio de pequenos sinais) para fins de controle.

A primeira será a do modelo chaveado, a qual representará completamente o comportamento do conversor por meio dos estados, ON e OFF, em que as chaves do

circuito se encontrarão. A segunda técnica será a do modelo médio clássico que representará o sistema por meio do comportamento médio de seu estado.

Sendo interessante a comparação de uso entre as duas modelagens, para seu uso em futuros projetos, possuindo assim conhecimento prévio de qual das técnicas possui um melhor resultado no que diz respeito a desempenho e facilidade de utilização.

O trabalho está estruturado em cinco capítulos, incluindo este introdutório, conforme a seguir. Nas Seções seguintes serão feitas revisões teóricas sobre conversores, modelagem e a técnica de controle por alocação de polo. Na Seção três será feito um estudo de caso contendo todos os procedimentos para a modelagem e controle de um conversor boost operando em modo contínuo, e em seguida serão apresentados os resultados. Finalmente são feitas as conclusões.

## 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem o objetivo de demonstrar a importância do uso de técnicas para a modelagem de conversores de potência, já que através do seu desenvolvimento será possível a obtenção de uma representação, simples e de fácil compreensão, que contenha todas as características comportamentais do conversor boost, operando em seu modo contínuo.

Dado este objetivo, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Utilizar as modelagens sendo capaz de identificar suas vantagens e desvantagens;
- Aplicar o modelo chaveado, observando as particularidades de cada configuração obtida mediante análise dos estados das chaves;
- Comparação gráfica entre os modelos chaveado e médio clássico;
- Aplicar o modelo de pequenos sinais para desenvolver uma estratégia de controle linear;
- Estudo da técnica de controle por alocação de polos e realizar o seu projeto;
- Análise dos resultados obtidos por meio da implementação do controle e do conversor em um ambiente de simulação.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O desenvolvimento deste trabalho teve como base, e guia principal, o livro *Power Electronics Converter Modeling and Control*, cuja a abordagem das técnicas de modelagem e controle auxiliaram de maneira significativa a execução das atividades.

### 2.1 CONVERSORES ELÉTRICOS

Um conversor é um circuito eletrônico de potência que tem como função converter a potência de entrada de tal forma que atenda as condições da carga, que segundo HART (2010) eles funcionam como uma “interface entre a fonte e a carga”.

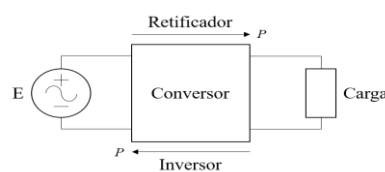
A classificação dos conversores se dá por meio da relação entre a entrada e saída, sendo elas:

- Entrada Contínua - Saída Contínua (CC - CC);
- Entrada Alternada - Saída Contínua (CA - CC);
- Entrada Contínua - Saída Alternada (CC - CA);
- Entrada Alternada - Saída Alternada (CA - CA).

O modo de operação destes circuitos pode ser de retificação ou inversão como pode ser visto na Figura 1, e esta escolha depende dos parâmetros do circuito e de controle.

- Retificador: O fluxo de potência tem sentido FONTE-CARGA;
- Inversor: O fluxo de potência é CARGA-FONTE.

Figura 1: Modo de operação.

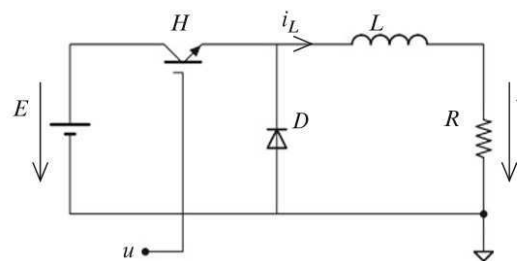


Fonte: Elaboração Própria.

Nos conversores CC-CC, há três tipos básicos:

- Buck (*step-down*):
  - Este circuito (Figura 2) é chamado também de conversor abaixador, pois a tensão na saída é menor que a da entrada;

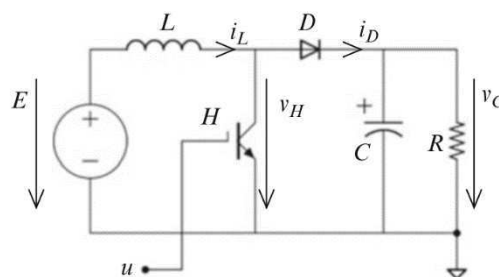
Figura 2: Circuito do Conversor Buck.



Fonte: (BACHA, 2014, p.13).

- Boost (*step-up*):
  - Segundo Ahmed (2000) no circuito *step-up* (Figura 3), a tensão de saída pode variar desde a fonte de tensão até diversas vezes o valor da fonte de tensão;

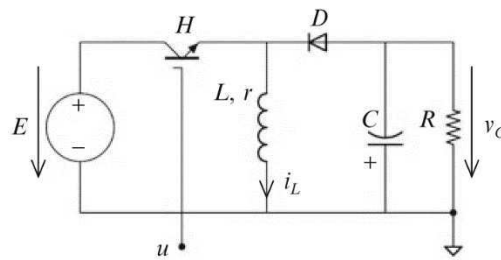
Figura 3: Circuito do Conversor Boost.



Fonte: (BACHA, 2014, p.36).

- Buck-Boost:
  - O Buck-Boost (Figura 4) fornece uma tensão de saída que pode ser menor ou maior que a tensão de entrada, a polaridade da tensão de saída é oposta à da tensão de entrada. Afirma Rashid (1999) que esse regulador é também conhecido como regulador inversor.

Figura 4: Circuito do Conversor Buck-Boost.



Fonte: (BACHA, 2014, p.52).

Nestes três tipos, o modo de condução pode ser categorizado em contínuo ou descontínuo, a grandeza que determinará essa classificação será a corrente que percorre o indutor de cada configuração. Caso em algum momento durante o funcionamento do conversor a corrente do indutor seja nula ele estará operando no modo de condução descontínuo.

## 2.2 MODELAGEM DO CONVERSOR BOOST

Modelar um fenômeno ou processo é um desenvolvimento cognitivo, que por meio da observação tenta-se extrair uma aproximação, de simples entendimento, que possua as características comportamentais mais marcantes observadas.

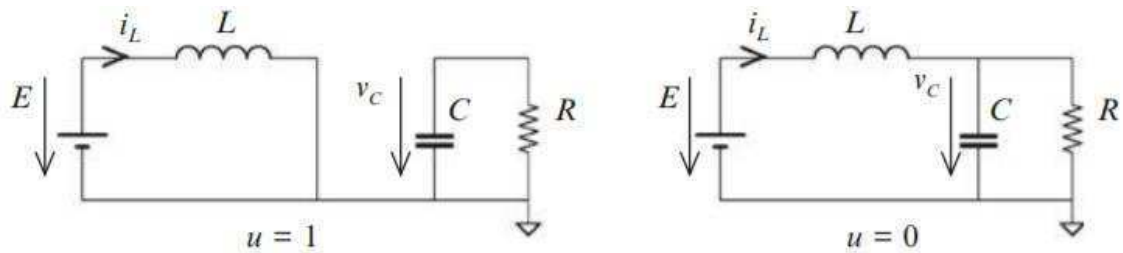
Um modelo é uma representação abstrata da realidade, que exclui muito dos infinitos detalhes do mundo. O objetivo de um modelo é reduzir a complexidade de compreensão ou interação com um fenômeno, eliminando os detalhes que são irrelevantes (CURTIS, 1992).

A perspectiva utilizada neste trabalho para a modelagem foi a informacional, isto quer dizer que será utilizado o conhecimento físico do conversor para formar um modelo matemático baseado nas leis de conservação de massa e energia.

No caso dos conversores de potência, a informação é incorporada pelas leis de *Kirchhoff* do circuito do conversor, leis de *Ohm* para várias cargas e nos estados de vários *switches* de estado sólido (BACHA, 2014).

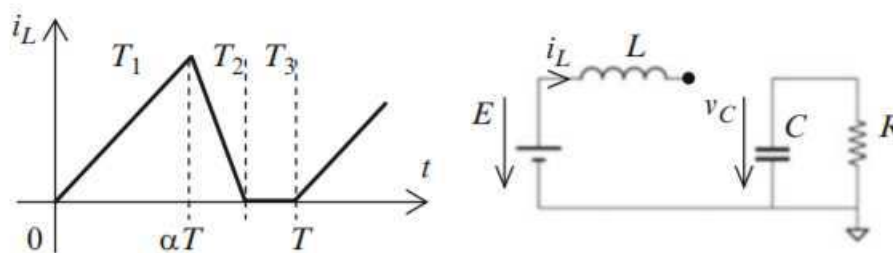
Como mencionado na seção 2.1, o conversor boost possui dois modos de condução, contínuo ou descontínuo, as operações destes modos são observadas nas Figuras 5 e 6.

Figura 5: Configurações do conversor boost em modo de condução contínuo.



Fonte: (BACHA, 2014, p.36).

Figura 6: Evolução da corrente do indutor ao longo do tempo e a configuração referente ao estado descontínuo.



Fonte: (BACHA, 2014, p.39).

O equacionamento do funcionamento de ambos modos de condução do conversor é exposto abaixo.

### Modo de Condução Contínuo:

- Nota-se que há duas configurações distintas ao observar a Figura 5. Elas são relacionadas ao estado em que a chave se encontra, aberta (Estado – *OFF*) ou fechada (Estado – *ON*);
- Denominando  $u$  a variável de chaveamento, o seu valor representará o estado da chave, aberta ( $u = 0$ ) ou fechada ( $u = 1$ );
- Ao utilizar as leis de *Kirchhoff* em ambas configurações e considerando  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$  para reduzir a poluição visual, obtêm-se:



$$u = 0 : \begin{cases} i_L = \frac{E}{L} - \frac{v_C}{L} \\ \dot{v}_C = \frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{RC} \end{cases} \text{ e } u = 1 : \begin{cases} i_L = \frac{E}{L} \\ \dot{v}_C = -\frac{v_C}{RC} \end{cases} \quad (2)$$

### Modo de Condução Descontínuo:

- A Figura 6 apresenta a evolução da corrente do indutor e a configuração onde ocorre a descontinuidade da corrente do indutor ( $i_L = 0$ );
- Os estados da chave, *ON* e *OFF*, são respectivamente,  $T_1$  e  $T_2$ , de forma análoga ao modo contínuo temos:

$$T_1 : \begin{cases} i_L = \frac{E}{L} \\ \dot{v}_C = -\frac{v_C}{RC} \end{cases} \text{ e } T_2 : \begin{cases} i_L = \frac{E}{L} - \frac{v_C}{L} \\ \dot{v}_C = \frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{RC} \end{cases} \quad (3)$$

- Estado adicional ( $i_L = 0$ ) é representado pelo intervalo  $T_3$ :

$$T_3 : \begin{cases} i_L = i_L = 0 \\ \dot{v}_C = -\frac{v_C}{RC} \end{cases} \quad (3)$$

Para as modelagens apresentadas neste trabalho algumas suposições devem ser seguidas:

- Chaves (*Switches*) são consideradas ideais, ou seja, quando estiverem conduzindo (Estado - *ON*) a tensão sobre ela é nula e enquanto desligada (Estado - *OFF*), a corrente que lhe percorre também é nula. A transição entre os estágios é instantânea;
- Elementos passivos são ideais, permitindo então, afirmar as seguintes características:
  - Linearidade, possuindo uma relação entre as grandezas elétricas, tensão e corrente, constante;
  - Invariante ao tempo;

- Ser concentrado e bilateral, dessa forma o seu valor não irá depender da distância entre seus terminais e do sentido da corrente que o percorre, e;
- O valor do elemento é numericamente preciso.
- Geradores são perfeitos;

Neste trabalho será realizada apenas a modelagem do conversor boost operando em modo de condução contínuo.

## 2.3 MODELO CHAVEADO

O modelo chaveado também conhecido como modelo exato, segundo Bacha (2014), descreve a dinâmica básica de baixa frequência, conforme as variações de acumulação de energia, e captura a dinâmica de chaveamento do conversor.

A dinâmica de chaveamento acarretará em um comportamento de repetição periódica das possíveis configurações do circuito do conversor. Em que, cada configuração poderá ser representada matematicamente por um conjunto de equações diferenciais.

Cada  $N$  configuração apresentará uma função de validação associada  $h$ , esta assume os valores de 1, se a configuração estiver ativada, ou 0 caso contrário. Pode-se condensar a informação das funções de validação em um único modelo, denominado função de comutação  $u$ . Este modelo é definido por  $p$  funções binárias, onde o valor de  $p$  é o menor inteiro que satisfaz a relação  $2^p \geq N$ .

Não existe uma única maneira de se obter o modelo chaveado, porém no presente trabalho será utilizado o algoritmo genérico desenvolvido por Bacha (2014). Este algoritmo dispõe de cinco etapas, sendo elas:

1. Coletar e estudar dados, como formas de ondas e os circuitos de configurações, pois a modelagem do processo e suas definições não poderão ser realizadas se não forem entendidas;
2. Escolher as variáveis de estado, usualmente são escolhidas as variáveis que refletem o comportamento da energia do sistema, no caso dos

conversores de potência, são a corrente do indutor, a tensão no capacitor ou alguma combinação dessas duas variáveis;

3. Escrever as equações diferenciais das variáveis de estado;
4. Identificar as condições de transição entre as configurações, fazendo com que as funções de comutação apareçam de forma explícita, e;
5. Escrever o modelo juntando as equações diferenciais com a função de comutação.

## 2.4 MODELO MÉDIO CLÁSSICO

O modelo médio clássico ou modelo médio para grandes sinais, segundo Bacha (2014), é focado em capturar o comportamento em baixa frequência do conversor, negligenciando as variações em alta frequência devidas a comutação das chaves.

Será necessário definir dois conceitos para a compreensão do modelo médio: a média móvel no tempo e o valor médio da chave.

A Equação 4 descreve uma função de média móvel no tempo, também conhecida como *sliding average* (BACHA, 2014) ou *local average* (MAKSIMOVIC et al. 2001), da função  $f(t)$  em um intervalo de tempo  $T$ .

$$\langle f(t) \rangle_0(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^t f(\tau) d\tau \quad (4)$$

Para Wester (1972), o operador de média é um filtro passa-baixa com frequência de corte  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ .

Uma propriedade importante da média móvel no tempo é que a média da derivada será igual a derivada da média, ou seja, a derivação temporal e operador de média são comutativos.

A função de chaveamento  $u(t)$  é o que caracteriza o sinal de saída  $S(t)$  da chave mediante uma entrada  $E(t)$ , conforme exposto na Equação 5.

$$S(t) = E(t) \cdot u(t) \quad (5)$$

Utilizando a média móvel,

$$\langle S(t) \rangle_0 = \langle E(t) \cdot u(t) \rangle_0. \quad (6)$$

Algumas considerações podem ser feitas em relação a Equação 6:

- Se  $E(t)$  é constante, a Equação 6 poderá ser simplificada resultando em:

$$\langle S(t) \rangle_0 = \langle E(t) \rangle_0 \cdot \langle u(t) \rangle_0 = E \cdot \langle u(t) \rangle_0 \quad (7)$$

- Caso  $E(t)$  for variável, a saída  $S(t)$  será dada por uma aproximação, conforme a Equação 8,

$$\langle S(t) \rangle_0 \approx \langle E(t) \rangle_0 \cdot \langle u(t) \rangle_0, \quad (8)$$

vale ressaltar que para garantir a validade dessa equação tem-se que assumir que  $E(t)$  ou  $u(t)$  estará próximo do seu valor médio. Como BACHA (2014) afirma, o produto de operadores de média é comutativo sobre certas circunstâncias.

A metodologia para adquirir o modelo médio clássico será a abordagem gráfica descrita por Bacha (2014), o qual é composto por quatro passos:

1. Estabelecer o circuito equivalente enfatizando os termos de acoplamento;
2. Preservar a estrutura do diagrama modificando as variáveis por suas médias;
3. Desenvolver os termos de acoplamento;
4. Deduzir as equações do modelo baseando-se no diagrama obtido.

#### 2.4.1 MODELO MÉDIO PARA PEQUENOS SINAIS

O modelo médio de grandes sinais de um conversor de eletrônica de potência é em geral um modelo não linear. Se uma análise modal ou projeto de controle linear for

considerada, uma representação linear do modelo do conversor é necessária (BACHA, 2014).

O modelo médio de pequenos sinais pode ser obtido a partir do modelo médio de grandes sinais, porém o uso das series de Taylor devem ser limitadas a primeira ordem e ao redor dos pontos de equilíbrio operacionais.

O *Steady-State* é um estado ou condição de um sistema que não muda com o tempo, pode-se dizer que é o estado estável do sistema. Dessa forma, os pontos de equilíbrio operacionais serão aqueles presentes nesse estado.

Neste modelo, as variáveis do sistema serão escritas da seguinte forma:  $x = x_e + \tilde{x}$ , onde a variável seguida de um “e” subscrito representará o ponto de equilíbrio e a que possui “~” como uma pequena perturbação ao redor do ponto de equilíbrio.

O procedimento para aquisição do modelo médio para pequenos sinais pode ser definido da seguinte maneira:

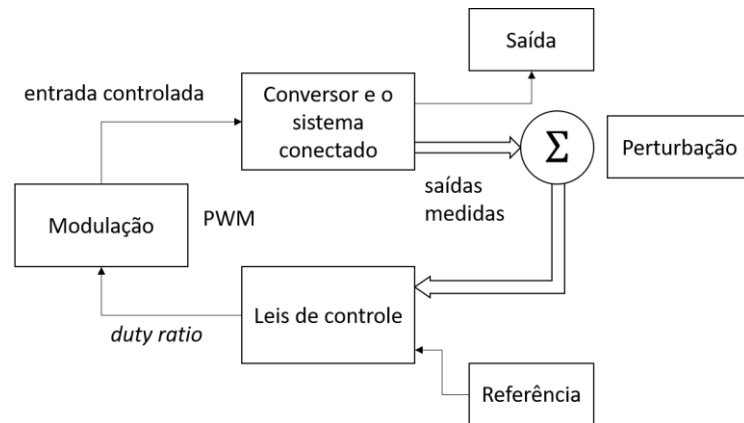
1. Construir o modelo médio clássico;
2. Calcular os pontos de equilíbrio;
3. Reescrever as variáveis do sistema para a forma,  $x = x_e + \tilde{x}$ ;
4. Resolver as equações do sistema.

## 2.5 TEORIA DE CONTROLE

“O objetivo geral do controle realimentado é a utilização do princípio de realimentação para que a variável de saída de um processo dinâmico siga uma variável de referência desejada com precisão” (FRANKLIN et al., 2013).

A Figura 7 mostra o diagrama de blocos genérico da aplicação do controle do conversor.

Figura 7: Diagrama de blocos da aplicação do controle incluindo o conversor



Fonte: Elaboração Própria.

### 2.5.1 CONTROLE USANDO A COMPENSAÇÃO DINÂMICA POR ALOCAÇÃO DE POLOS

A compensação dinâmica por alocação de polos é uma técnica de controle onde há imposição de uma dinâmica conveniente por meio dos polos do sistema desejado.

“Se o sistema for completamente controlável, é possível alocar-se todos os polos do sistema. Ou seja, pode-se dar ao sistema qualquer desempenho desejado” (LAGES, 2011).

Os polos desejados podem ser alocados por um *full-state-feedback gain*, denominado  $K$  (BACHA, 2014).

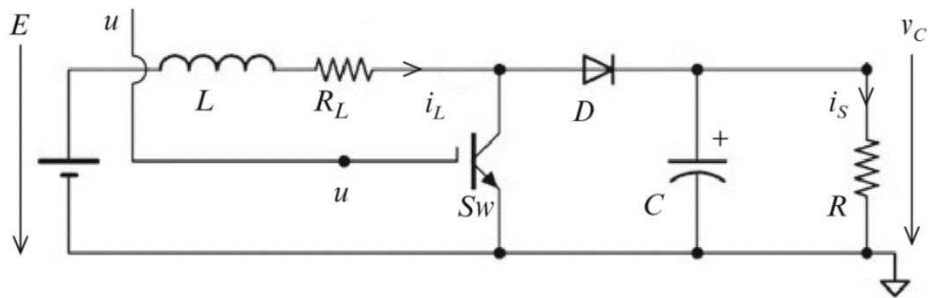
O algoritmo genérico para a implementação do controle é visto abaixo:

1. Escolher os pontos de operação nos quais o design do controle deve ser realizado;
2. Obter o modelo médio linearizado do conversor;
3. Encontrar um novo conjunto de polos;
4. Obter o vetor de ganho  $K$ ;
5. Desenhar o lugar das raízes da função de transferência de laço aberto;
6. Determinar um compensador integral  $K_i$ ;
7. Se não for encontrada uma solução, mudar o conjunto de polos voltando a etapa 3.

### 3 ESTUDO DE CASO

Nesta seção será realizada o estudo de caso de um exemplo do livro guia, no qual define-se o conversor boost da Figura 8, com os dados apresentados na Tabela 1.

Figura 8 - Conversor Boost.



Fonte: Elaboração Própria.

Tabela 1: Dados do Conversor Boost.

Potência Nominal	60 W
Tensão de Entrada ( $V_i$ )	15 V
Tensão de Saída ( $V_0$ )	25V
Indutor ( $L$ )	0.5 mH
Capacitor ( $C$ )	1000 $\mu$ F
$R_L$	0.1 $\Omega$
$R_e$	10 $\Omega$

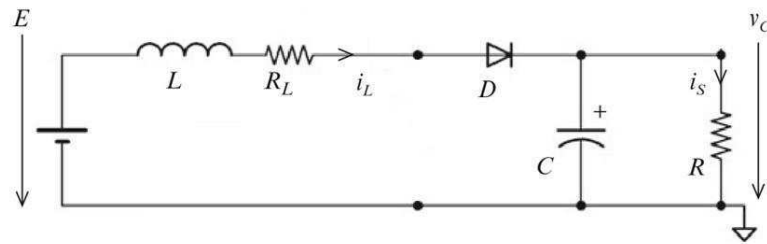
Fonte: Elaboração Própria.

Será realizada a construção dos modelos, chaveado e médio clássico, assim como a implementação da técnica de controle.

#### 3.1.1 MODELO CHAVEADO

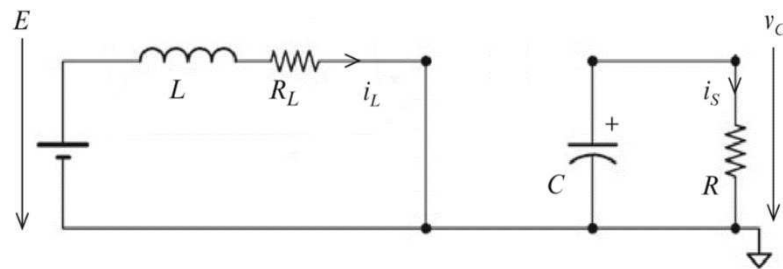
Analisando a Figura 7 quanto ao comportamento da chave  $S_w$ , identifica-se as duas configurações apresentadas nas Figuras 9 e 10.

Figura 9: Configuração quando a chave está no estado OFF.



Fonte: Elaboração Própria.

Figura 10: Configuração quando a chave está no estado ON.



Fonte: Elaboração Própria.

As equações referentes a cada estágio são:

- Chave OFF:

$$\begin{cases} L \cdot \dot{i}_L = E - v_c - R_L \cdot i_L \\ C \cdot \dot{v}_c = i_L - \frac{v_c}{R} \end{cases} \quad (9)$$

- Chave ON:

$$\begin{cases} L \cdot \dot{i}_L = E - R_L \cdot i_L \\ C \cdot \dot{v}_c = -\frac{v_c}{R} \end{cases} \quad (10)$$

Determinando a função de comutação:

$$\begin{cases} u = 0 \text{ Chave Aberta,} \\ u = 1 \text{ Chave Fechada.} \end{cases} \quad (21)$$

Então pode-se escrever as funções de validações das configurações  $h_1$  e  $h_2$  usando a função de comutação,



$$h_1 = u \text{ e } h_2 = 1 - u \quad (12)$$

Multiplicando os Sistemas (9) e (10) por suas respectivas funções de validação, agrupando-os obtêm-se:

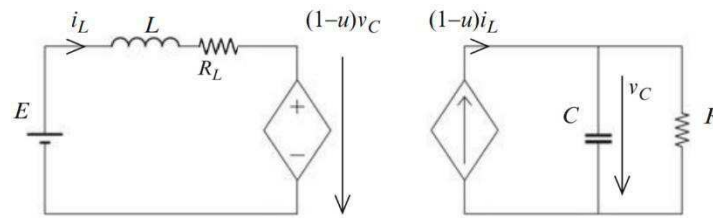
$$\begin{cases} \dot{i}_L = \frac{E}{L} - \frac{v_c}{L} \cdot (1 - u) - \frac{R_L \cdot i_L}{L} \\ \dot{v}_c = \frac{i_L}{C} \cdot (1 - u) - \frac{v_c}{R \cdot C} \end{cases} \quad (13)$$

Em Espaço de Estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R \cdot C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_c}{L} \\ -\frac{i_L}{L} \end{bmatrix} [u] + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [E] \quad (14)$$

O circuito equivalente ao modelo exato do conversor boost se encontra na Figura 11.

Figura 11: Circuito Exato do Conversor Boost.



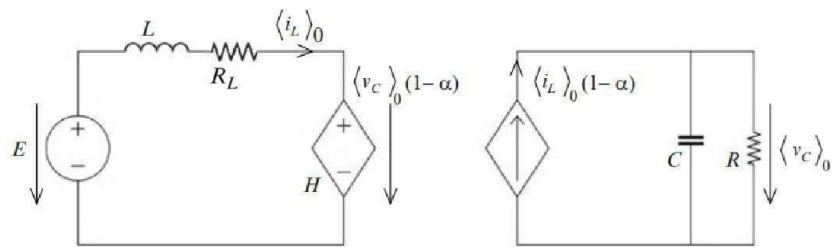
Fonte: Elaboração Própria.

### 3.1.2 MODELO MÉDIO

Realizando os passos do algoritmo fornecido na seção 2.4, têm-se que o circuito apresentado na Figura 11 é modificado e o resultado é exposto na Figura 12.

A variável  $\alpha$  é considerada o *duty ratio* correspondente a média do sinal de comutação  $u$ .

Figura 12: Diagrama do circuito do modelo médio do conversor boost.



Fonte: Elaboração Própria.

Utilizando as leis de *Kirchhoff* no diagrama da Figura 11, obtêm-se:

$$\begin{cases} \langle i_L \rangle_0 = \frac{E}{L} - \frac{\langle v_c \rangle_0}{L} \cdot (1 - \alpha) - \frac{R_L \cdot \langle i_L \rangle_0}{L} \\ \langle \dot{v}_c \rangle_0 = \frac{\langle i_L \rangle_0}{C} \cdot (1 - \alpha) - \frac{\langle v_c \rangle_0}{R \cdot C} \end{cases} \quad (15)$$

Representando em Espaço de Estados:

$$\begin{bmatrix} \langle i_L \rangle_0 \\ \langle \dot{v}_c \rangle_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R \cdot C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_L \rangle_0 \\ \langle v_c \rangle_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\langle v_c \rangle_0}{L} \\ -\frac{\langle i_L \rangle_0}{L} \end{bmatrix} [\alpha] + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [E] \quad (16)$$

### 3.1.3 MODELO MÉDIO PARA PEQUENOS SINAIS

Com o Modelo médio (15) feito, já se pode definir o ponto de equilíbrio:

- *Duty cycle*:

$$\alpha_e = 1 - \frac{V_i}{V_o} = 1 - \frac{15}{25} = 0.4 \text{ e } \alpha'_e = 1 - \alpha_e = 0.6 \quad (17)$$

- Corrente de saída e corrente do indutor:

$$i_{S_e} = \frac{V_{S_e}}{R_e} = 2.5 \text{ A e } i_{L_e} = \frac{i_{S_e}}{\alpha'_e} = 4.17 \text{ A} \quad (18)$$

- Tensão de entrada e tensão de saída:

$$E_e = 15 V \text{ e } V_{o_e} = 25 V \quad (19)$$

- Zerando ambas equações diferenciais de (15), para obter o *steady-state*:

$$\begin{cases} E_e - v_{c_e} \cdot \alpha'_e - R_L \cdot i_{L_e} = 0 \\ i_{L_e} \cdot \alpha'_e - \frac{v_{c_e}}{R_e} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

- Reescrevendo as variáveis do Sistema (15) em torno do seu ponto de equilíbrio:

$$\begin{cases} L \cdot (\dot{\tilde{i}}_L) = E_e + \tilde{E} - (v_{0e} + \tilde{v}_0) \cdot (1 - \alpha_e - \tilde{\alpha}) - R_L \cdot (i_{L_e} + \tilde{i}_L) \\ C \cdot (\dot{\tilde{v}}_c) = (i_{L_e} + \tilde{i}_L) \cdot (1 - \alpha_e - \tilde{\alpha}) - \frac{v_{0e}}{R_e} - \frac{\tilde{v}_0}{R_e} + \frac{v_{0e}}{R_e^2} \cdot \tilde{R} \end{cases}, \quad (21)$$

considerar que,

$$\tilde{i}_s = -\frac{v_{0e}}{R_e^2} \cdot \tilde{R} \quad (22)$$

é a variação da corrente de saída por causa da variação da carga  $R$  (BACHA, 2014).

- Expandindo as expressões do Sistema (21) utilizando os parâmetros definidos nas relações (20):

$$\begin{cases} L \cdot (\dot{\tilde{i}}_L) = \tilde{E} - \tilde{v}_0 \cdot (1 - \alpha_e) + v_{0e} \cdot \tilde{\alpha} - R_L \cdot \tilde{i}_L \\ C \cdot (\dot{\tilde{v}}_c) = \tilde{i}_L \cdot (1 - \alpha_e) - i_{L_e} \cdot \tilde{\alpha} - \frac{\tilde{v}_c}{R_e} - \tilde{i}_s \end{cases} \quad (23)$$

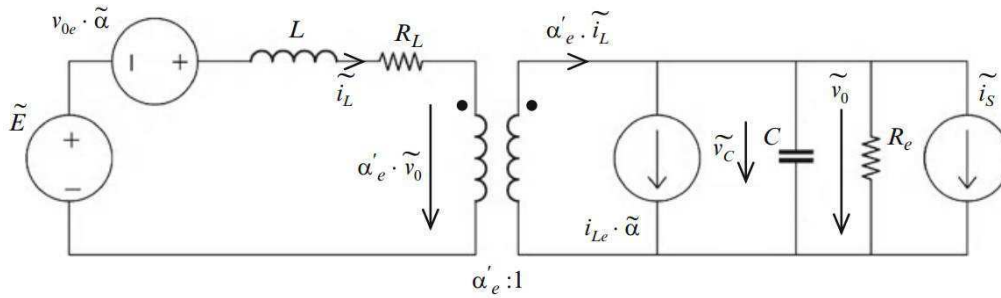
Lembrar que  $(1 - \alpha_e) = \alpha'_e$ .

A representação em espaço de estados do modelo médio para pequenos sinais é:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{i}}_L \\ \dot{\tilde{v}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{\alpha'_e}{L} \\ \frac{\alpha'_e}{C} & -\frac{1}{R_e \cdot C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{i}_L \\ \tilde{v}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_{c_e}}{L} & 0 \\ -\frac{i_{L_e}}{C} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{i}_s \end{bmatrix} \quad (24)$$

O modelo médio para pequenos sinais pode ser visto na Figura 13.

Figura 13: Circuito equivalente do modelo médio para pequenos sinais do conversor boost



Fonte: Elaboração Própria.

### 3.1.4 CONTROLE POR ALOCAÇÃO DE POLOS

Os polos do sistema descrito no espaço de estados (24), podem ser facilmente encontrados utilizando *softwares* como o MATLAB® (por meio de funções como eig, zpk ou roots).

Os polos do sistema  $P_0$  são observados na Figura 14:

$$P_0 = [-150 + j * 847.05 \quad -150 - j * 847.05] \quad (25)$$

Um novo comportamento deve ser imposto, para isto pode-se escolher novos polos de acordo com alguns parâmetros:

- Frequência Natural – Largura de Banda (*Bandwidth*):
  - A frequência natural do sistema é:  $\omega_{n_0} = 860 \text{ rad}$ ;
  - Uma maior frequência é desejada:  $\omega_n = 6000 \text{ rad}$ .
- Amortecimento (*Damping*):
  - O amortecido do circuito é:  $\zeta_{n_0} = 0.174$ ;
  - Maior amortecimento é desejado:  $\zeta_n = 0.7$ .

A justificativa para a escolha destes parâmetros está localizada no Apêndice A.

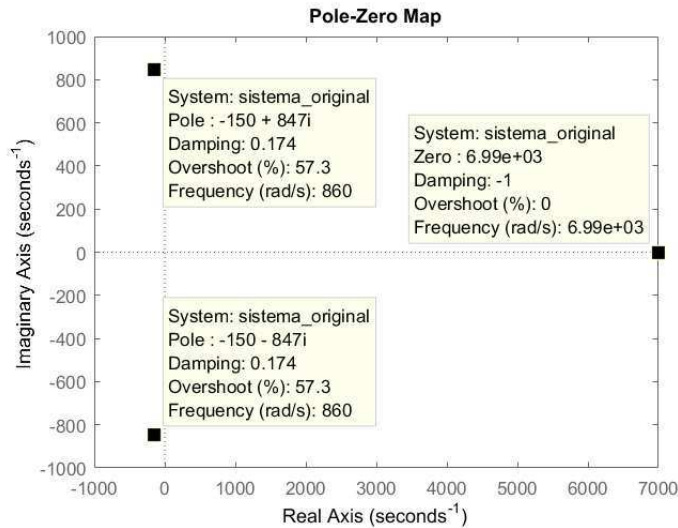
Os polos desejados podem ser definidos pela Expressão (26)

$$P_n = \left[ -\zeta_n \cdot \omega_n + j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad -\zeta_n \cdot \omega_n - j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta_n^2} \right] \quad (26)$$

Substituindo os valores de  $\zeta_n$  e  $\omega_n$  na Expressão (26), têm-se que:

$$P_n = [-4.2 \cdot 10^3 + j \cdot 4.28 \cdot 10^3 - 4.2 \cdot 10^3 - j \cdot 4.28 \cdot 10^3] \quad (27)$$

Figura 14: Mapa de polos e zeros do sistema original.



Fonte: Elaboração Própria.

O vetor de ganho  $\mathbf{K}$  pode ser calculado com a ajuda computacional, como por exemplo a execução da função `acker` no MATLAB®.

A demonstração para cálculo analítico do vetor  $\mathbf{K}$  está localizado no Apêndice B.

O novo par de polos fará parte da matriz interna  $\mathbf{A}_{0i} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}$ , de forma que possibilitará o cálculo da função de transferência da planta interna  $H_{0i}(s)$ .

$$H_{0i}(s) = \mathbf{C} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{0i})^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (28)$$

De tal sorte que a função de transferência para a malha aberta da planta externa,  $H_{c0}(s)$ , será:

$$H_{c0}(s) = \frac{K_i}{s} \cdot H_{0i}(s) \quad (29)$$

O valor do  $K_i$  é escolhido de forma que assegure a frequência e amortecimento desejados pela malha fechada, caso o comportamento não seja satisfatório é só impor novos polos e refazer todos os procedimentos.

## 4 RESULTADOS

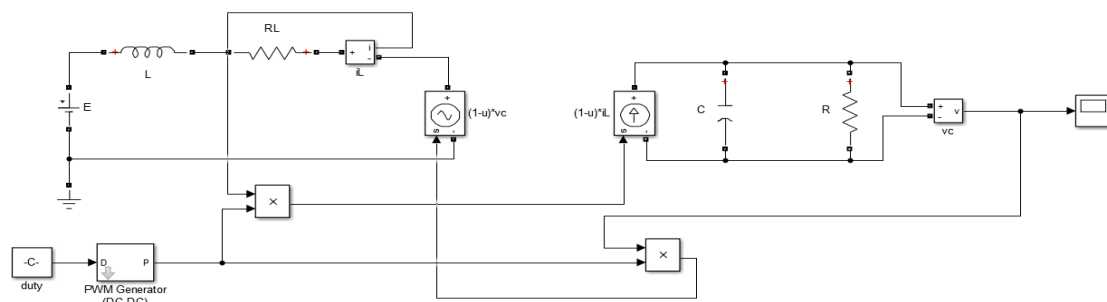
Está seção é destinada à apresentação dos resultados obtidos das modelagens e do controle realizados no capítulo 3.

### 4.1 SIMULAÇÃO DAS MODELAGENS

Os modelos apresentados nas Figuras 11 e 12 foram criados em um ambiente de simulação, seus circuitos neste ambiente são mostrados nas Figuras 15 e 16.

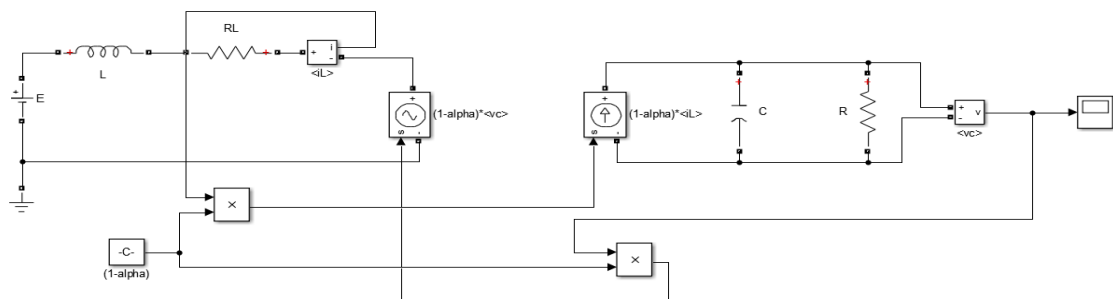
Os valores do *duty cycle* do modelo chaveado e do  $\alpha$  no modelo médio, foram calculados utilizando o ponto de equilíbrio determinado na seção 3.1.3. Isto foi feito para que se pudesse comparar os modelos de forma confiável, pois sabe-se do comportamento do conversor naquelas condições.

Figura 15: Modelo chaveado do conversor boost utilizado para simulação.



Fonte: Elaboração Própria.

Figura 16: Modelo médio clássico do conversor boost utilizado para simulação.

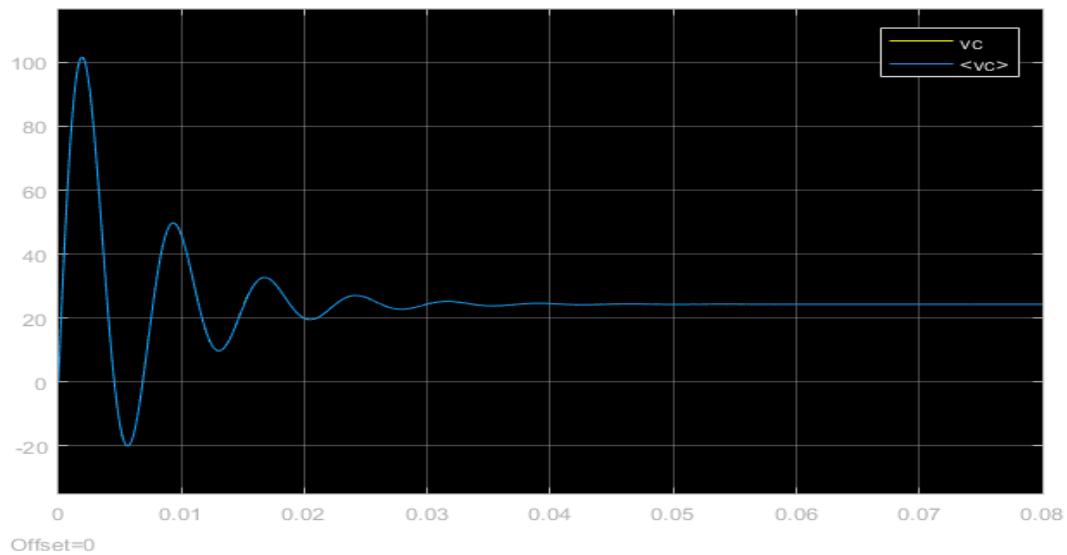


Fonte: Elaboração Própria.

A comparação entre os modelos, em relação a tensão de saída, pode ser verificada nas Figuras 17 e 18, vale salientar que ao observar tais figuras, percebe-se que o conversor operando no ponto de equilíbrio não conseguiu alcançar a referência de tensão de saída (25 V).

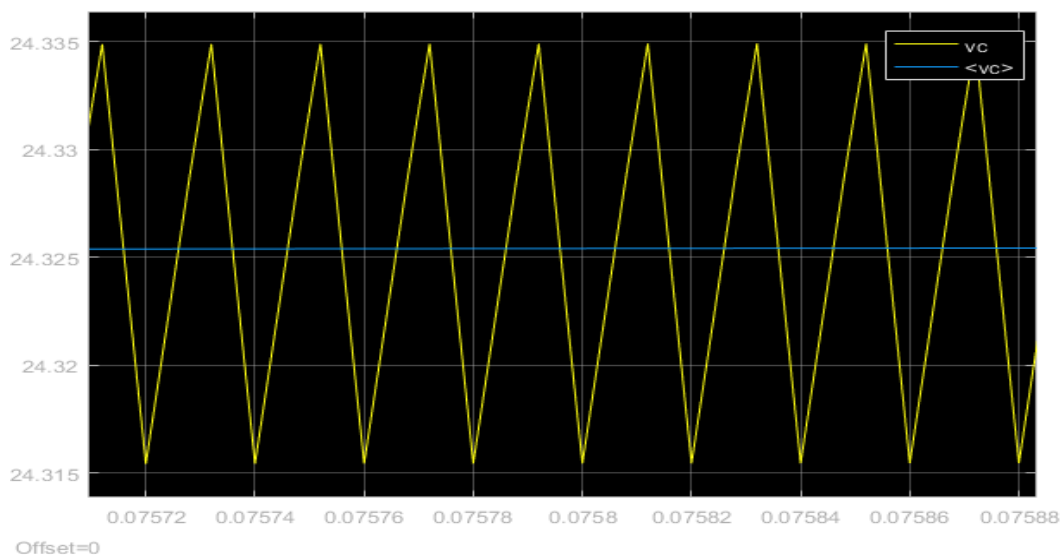
A justificativa para o conversor não ter alcançado a referência deve-se ao fato que ele não é ideal, pois em sua modelagem foi considerado a resistência do indutor  $R_L$ .

Figura 17: Tensão de saída  $v_c$  dos modelos chaveado e médio clássico.



Fonte: Elaboração Própria.

Figura 18: Caracterização do regime permanente da tensão de saída das modelagens.



Fonte: Elaboração Própria.

## 4.2 ANÁLISE DO CONTROLE

Como definido os polos desejados  $P_n$  na seção 3.1.4, calcula-se então o vetor de ganho  $K$ .

$$K = [0.2555 \quad 1.1213] \quad (30)$$

Feito isto, o cálculo de  $A_{0i}$  pode ser realizado, permitindo encontrar a função de transferência da planta interna  $H_{0i}$ .

$$H_{0i}(s) = \frac{-4170s + 2.917e07}{s^2 + 8400s + 3.6e07} \quad (31)$$

Ao comparar os mapas de polos e zeros de  $H_{0i}(s)$  (Figura 19) com o do sistema original (Figura 14), percebe-se que o zero situado no semi-plano direito do sistema original não foi alterado.

A presença deste zero serve como parâmetro de projeto de um controlador, um simples integrador  $\left(\frac{K_i}{s}\right)$  adicionado na malha externa pode solucionar este problema.

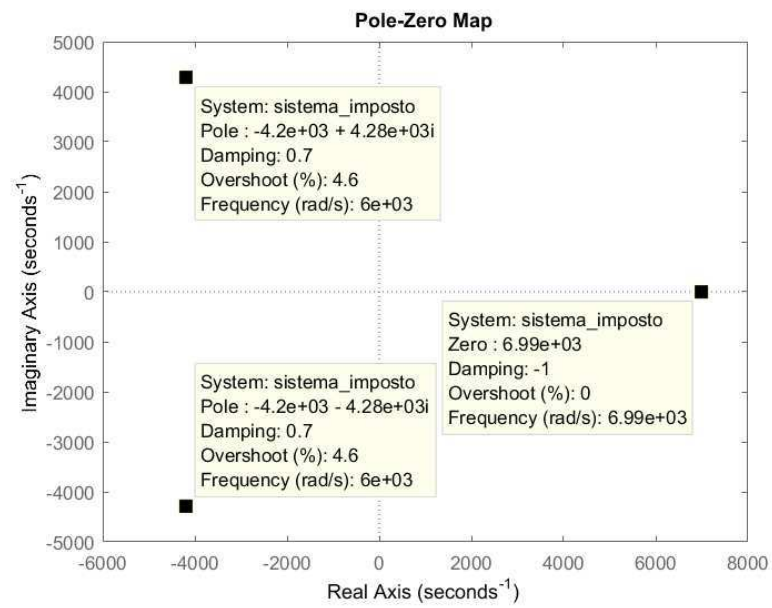
Assumindo que o valor de  $K_i = 100$  e que se possa utilizar um ambiente de simulação, para implementação do modelo com conversor em conjunto com o compensador e controle, conforme visto na Figura 20, obtêm-se os resultados expostos nas Figuras 21 e 22.

O *ripple* da tensão de saída (Figura 22), é de aproximadamente de 20 mV o que representa em uma oscilação de 0.08% que em termos práticos está excelente, ou seja, a escolha do valor de  $K_i$  foi suficiente.

Uma maneira de escolher o valor de  $K_i$  é analisando a posição dos polos no lugar das raízes do sistema em malha fechada e em malha aberta.

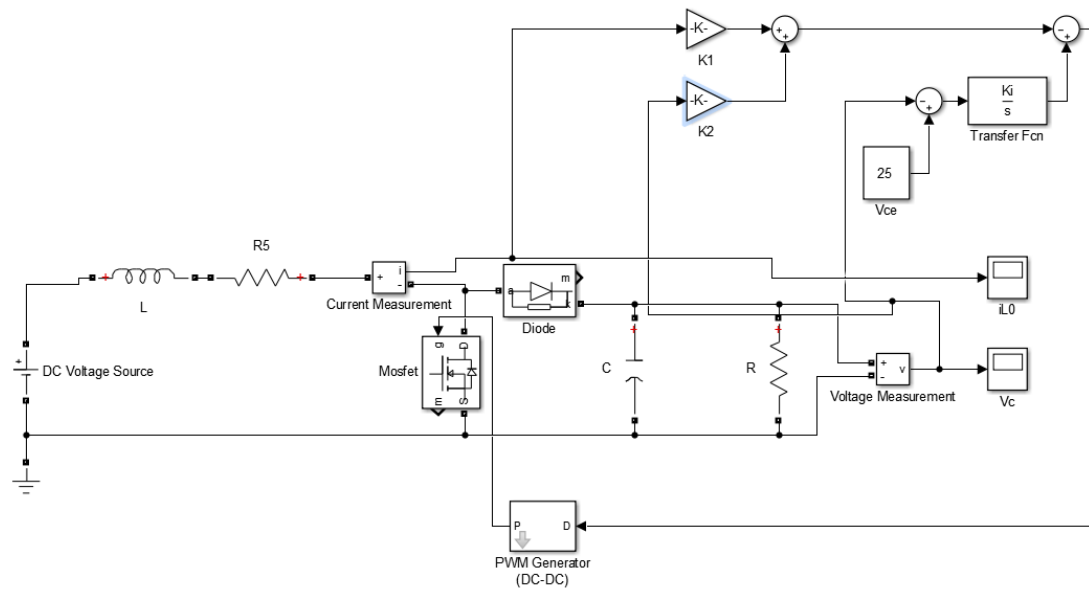


Figura 19: Mapa dos polos e zeros do sistema  $H_{0i}(s)$ .



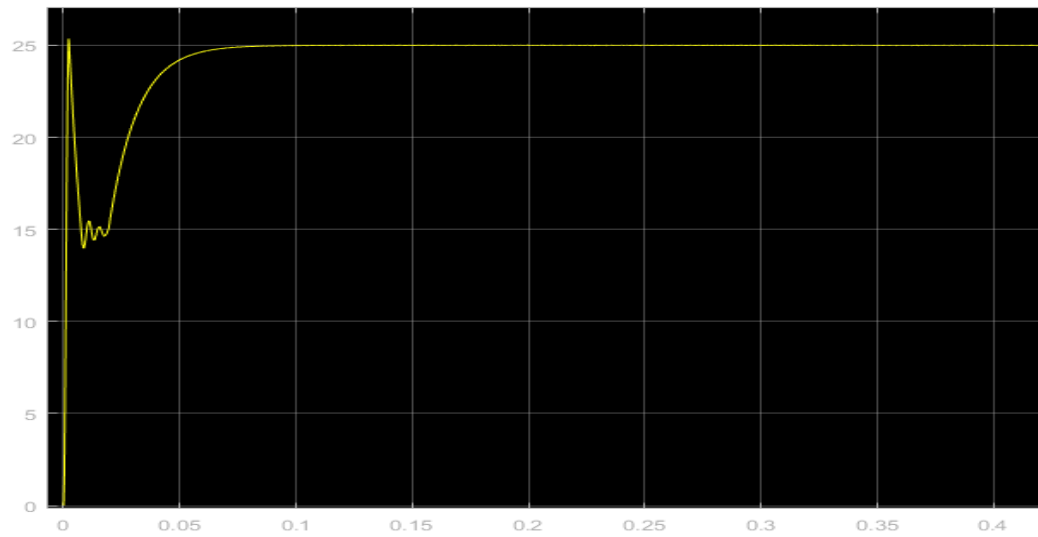
Fonte: Elaboração Própria.

Figura 20: Conversor Boost utilizando compensador por realimentação de estados.

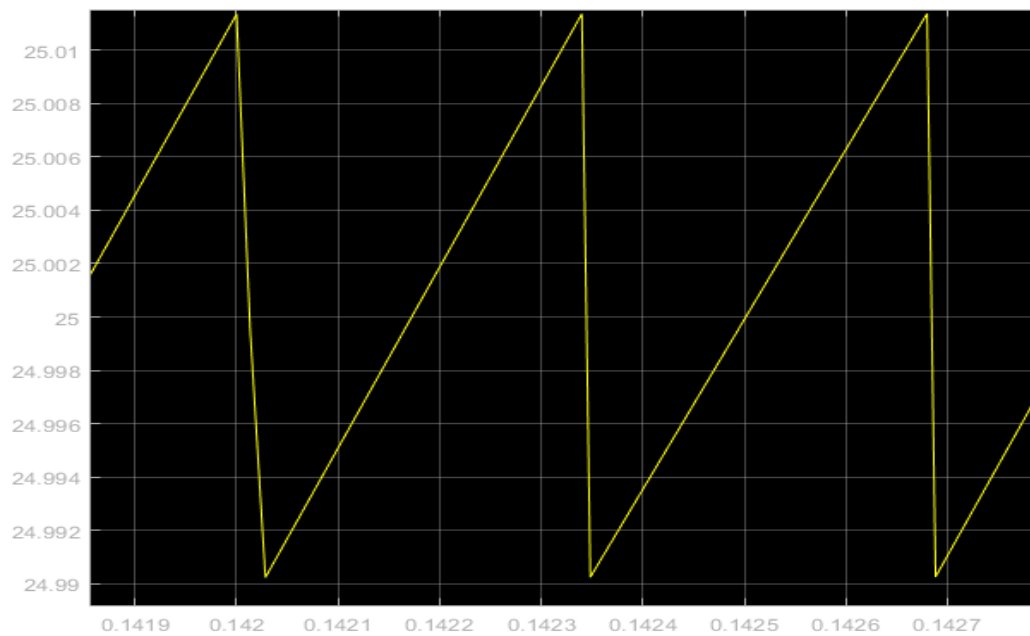


Fonte: Elaboração Própria.

Figura 21: Tensão de saída do conversor controlado.



Fonte: Elaboração Própria.

Figura 22: *Ripple* da tensão de saída do conversor controlado

Fonte: Elaboração Própria.

## 5 CONCLUSÕES

Com a conclusão deste trabalho, ficou evidente a importância do aprendizado e aplicação das técnicas de modelagem, uma vez que, a eficácia e otimização geradas pela mesma, acarretará diversos benefícios a nível de automação, custo e gerenciamento, sendo um retorno de forte impacto na construção de um projeto bem-sucedido.

Quanto as técnicas apresentadas neste trabalho, há algumas observações a serem feitas quanto a suas vantagens e desvantagens. O modelo chaveado representa fielmente o comportamento do sistema real analisado, servindo também como ponto de partida para a obtenção de outros modelos. Porém à medida que se tem um maior número de chaves, mais complexo a abstração e o entendimento ficam, requisitando também um maior esforço computacional.

O modelo médio clássico pode ser o primeiro passo para a obtenção de um modelo normalizado. Porém, possui certas limitações como a falta de precisão se o sistema a ser modelado apresentar um *ripple* elevado na sua saída, como também ao lidar com sistemas operando no modo descontínuo, podendo não acompanhar a redução da ordem do sistema, gerando incertezas nos valores obtidos.

Em relação a técnica de controle aplicada, percebeu-se resultados positivos quanto ao rastreamento da referência e a sua simplicidade de implementação. Esta técnica oferece ótimos recursos ao projetista, visto que se pode definir a dinâmica desejada por meio de um processo recorrente, subsequente da análise do lugar das raízes, tornando possível a determinação da melhor opção de controle.

Como proposta para trabalhos futuros, sugere-se aumentar a complexidade da modelagem, incluindo, por exemplo a resistência do capacitor e a operação em modo descontínuo, além da utilização de outras técnicas de controle, como controle adaptativo.

Utilizando as ferramentas citadas para aplicação em um sistema fotovoltaico, tendo consciência da intensa demanda pelo avanço nos estudos na área de energias renováveis.

## REFERÊNCIAS

RASHID, M. H. **Eletrônica de Potência: circuitos, dispositivos e aplicações**. [S.l.]: Makron, 1999.

BACHA, Seddik. MUNTEANU, Iulian. BRACU, A. Iuliana. **Power Electronic Converters Modeling and Control: with Case Studies, Advanced Textbooks and Signal Processing**. Springer-Verlag, London, 2014.

WANG, Faqiang. LI, Jing. MA, Xikui. **Average and Small Signal Modeling of Negative-Output KY Boost Converter in CCM Operation**. Mathematical Problems in Engineering. China, v. 2014, n. 810956, Abril de 2014. Disponível em <<https://www.hindawi.com/journals/mpe/2014/810956/>> Acessado em 20 de maio de 2017.

KAZIMIERCZUK, Marian K. GEISE, Robert S. REATTI, Alberto. **SMALL-SIGNAL ANALYSIS OF A PWM BOOST DC-DC CONVERTER WITH A NON-SYMMETRIC PHASE INTEGRAL-LEAD CONTROLLER**. IEEE, n. 17, p. 608 a 615. Out./nov. 1995. Disponível em <<https://flore.unifi.it/retrieve/handle/2158/645178/20041/00499019.pdf>>. Acessado em 20 de maio de 2017.

REDDY, M. Sai Krshna; KALYANI, Ch. ELANGO VAN, M Uthra. **A Small Signal Analysis of DC-DC Boost Converter**. **Indian Journal of Science and Technology**. v. 8 (S2), p. 1-6, Jan. 2015. Disponível em <<http://www.indjst.org/index.php/indjst/article/viewFile/57787/45108>>. Acessado em 20 de maio de 2017.

CURTIS B., KELLNER M. **Process Modeling**. Communications of the Acm. v. 35, n.9, p. 75 a 88. Set. 1992. Disponível em <<https://issuu.com/adiha/docs/process-modeling>>. Acessado em 20 de maio de 2017.

LAGES, Prof Walter Fetter. **Alocação de Polos**. UFRGS - Sistemas de Controle Digitais. Nov. 2011. Disponível em <<http://www.ece.ufrgs.br/~fetter/eng04037/pp.pdf>>. Acessado em: 11 de Junho de 2017.

AHMED, Ashfaq. **Eletrônica de Potência**. Prentice Hall, SP, 2001.

JOHNSON, Taylor T. NGUYEN, Luan Viet. **Benchmark: DC-to-DC Switched-Mode Power Converters (Buck Converters, Boost Converters, and Buck-Boost Converters)**. Computer Science and Engineering, University of Texas at Arlington — Arlington, TX. v11, mar. 2014. Disponível em

<<http://www.taylortjohnson.com/research/nguyen2014arch.pdf>>. Acessado em: 11 de Junho de 2017.

YE, Hong. LUO, Fang Lin. **Advanced DC/DC Converters**. CRC PREES. University of West Florida, 2004. Disponível em <<http://s1.downloadmienphi.net/file/downloadfile6/192/1383124.pdf>>. Acessado em: 11 de Junho de 2017.

HASSANZADEH, Amir et al. **Small Signal Averaged Model of DC Choppers for Control Studies**. International Conference on Electrical Engineering and Informatics (IEEE). Bandung, Indonesia, 2011. Disponível em <<https://profdoc.um.ac.ir/articles/a/1023779.pdf>>. Acessado em: 11 de Junho de 2017.

WESTER, Gene Ward. **Low-frequency characterization of switched dc-dc converters**. 1972. 200f. (Tese de doutorado em Filosofia) - Institute of Technology. Califórnia. Disponível em <<https://profdoc.um.ac.ir/articles/a/1023779.pdf>>. Acessado em: 13 de Junho de 2017.

VERGHESE, George C. SANDERS, Seth R. **Transactions on circuit and systems**. International Conference on Electrical Engineering and Informatics (IEEE). v. 38, n.8, Agos. 1991. <[http://power.eecs.berkeley.edu/publications/sanders\\_verghese\\_synthesis.pdf](http://power.eecs.berkeley.edu/publications/sanders_verghese_synthesis.pdf)>. Acessado em: 13 de Junho de 2017.

BASS, Richard M. LEHMAN, Brad. **Switching Frequency Dependent Averaged Models for PWM DC-DC Converters**. International Conference on Electrical Engineering and Informatics (IEEE). v. 11, n. 1, Jan./1996. Disponível em : <<http://www.ece.neu.edu/groups/power/lehman/Publications/pub15.pdf>> Acessado em : 20 de Junho de 2017.

JANKE, Wlodzimierz. **Averaged models of pulse-modulated DC-DC power converters. Part I. Discussion of standard methods**. Archiver of Electrical Engineering. v.61, p.23, Abr./2012. Disponível em <<https://www.degruyter.com/downloadpdf/j/aee.2012.61.issue-4/v10171-012-0045-8/v10171-012-0045-8.pdf>> Acessado em: 23 de Junho de 2017.

HUYNH, Phuong. CHO, Bo H. **Empirical Small-Signal Modeling of Switching Converters Using Pspice**. International Conference on Electrical Engineering and Informatics (IEEE). EUA, 1995. Disponível em : <<http://ieeexplore.ieee.org/document/474910/>>. Acessado em 7 de Julho de 2017.

PEREIRA, Raquel Teixeira. **Técnicas recentes para a modelagem de processos: Recomendações Gerais**. XXIX ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO. Salvador, BA. Out./2009. Disponível em : <[http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2009\\_TN\\_STP\\_091\\_621\\_12741.pdf](http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2009_TN_STP_091_621_12741.pdf)> Acessado em 9 de julho de 2017.

MAKSIMOVIC, Dragan. ERICKSON, Robert W. **Fundamentals of Power Electronics**. 2004, p. 889. Tese (Doutorado em Eng. Eletrica) Universidade do Colorado, Boulder - Colorado. Disponível em:

<[https://eleccompengineering.files.wordpress.com/2015/01/fundamentals-of-power-electronics\\_2nd\\_erickson\\_full.pdf](https://eleccompengineering.files.wordpress.com/2015/01/fundamentals-of-power-electronics_2nd_erickson_full.pdf)>. Acessado em, 17 de Julho de 2017.

HART, Daniel W. **Eletrônica de Potência – Análise e projetos de circuitos**. AMGH – Editora – 2012.

FRANKLIN, Gene F. POWELL, David J. EMAMI-NAEINI, Abbas. **Sistemas de Controle para Engenharia**. Ed. Bookman, 6° edição. 2013.

MIDDLEBROOK, R. D. **Small-Signal Modeling of Pulse-Width Modulated Switched-Mode Power Converters**. International Conference on Electrical Engineering and Informatics (IEEE). v. 76, n. 4. Abr/1988. Disponível em <<http://ieeexplore.ieee.org/document/4421/>>. Acessado em: 29 de Setembro de 2017.

WESTWE, G. W. MIDDLEBROOK, R. D. **Low-Frequency Characterization of Switched dc-dc Converters**. *California Institute of Technology*. Pasadena - Califórnia. v. ae-9, n. 3. Mai./1973. Disponível em <<https://authors.library.caltech.edu/65985/1/04103140.pdf>>. Acessado em: 29 de setembro de 2017.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed. Contexto, 2004. 389 páginas.

## APÊNDICE A

O  $\zeta$  (coeficiente de amortecimento) define o tipo de resposta do sistema:

- $\zeta = 0$ , sistema não amortecido;
- $0 < \zeta < 1$ , sistema subamortecido;
- $\zeta = 1$ , sistema criticamente amortecido, e;
- $\zeta > 1$ , sistema sobreamortecido.

O  $\omega_n$  (frequência natural não amortecida), medida em (*rad/s*), é uma grandeza intrínseca ao sistema.

$$\text{Sistema} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.1})$$

Em relação ao Sistema (A.1) de segunda ordem subamortecido, o  $\zeta$  e o  $\omega_n$  especificam o desempenho do sistema quanto, principalmente, aos seguintes parâmetros:

- Tempo de subida (*Rise time*) –  $t_R$  :

$$t_r \approx \frac{1,8}{\omega_n}; \quad (\text{A.2})$$

- Sobre-sinal (*Overshoot*) –  $M$ :

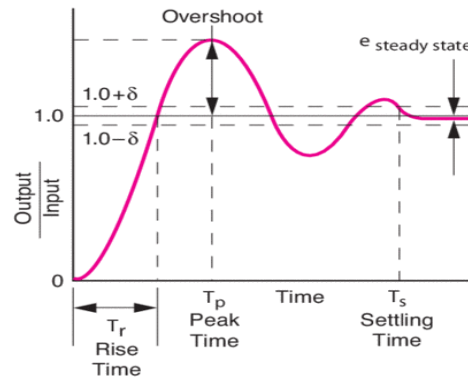
$$M = \exp\left\{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right\}; \quad (\text{A.3})$$

- Tempo de acomodação (*Settling time*) –  $t_s$ :

$$t_s = \frac{4,6}{(\zeta \cdot \omega_n)}. \quad (\text{A.4})$$

Na Figura A.1 observa-se os parâmetros apresentados acima.

Figura A.1: Resposta para um sistema utilizando somente um controle proporcional acarretando um *overshoot* e um erro de regime permanente diferente de zero.



Fonte: (<https://www.newport.com/n/control-theory-terminology>).

Observações:

- Se o sobre-sinal for alto: aumentar o  $\zeta$ ;
- Quanto ao tempo de subida, se ele for alto: aumentar o  $\omega_n$ ;
- Caso o tempo de acomodação for alto: aumentar o  $\sigma$  ( $\sigma = \zeta \cdot \omega_n$ );
- Para sistemas de ordem superior as expressões (A.2), (A.3) e (A.4) não serão precisas para o projeto, servindo apenas como guia inicial.



## APÊNDICE B

Assumindo que a função de transferência apresentada em (B.1):

$$H_{0i} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{0i})^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{B.1})$$

onde,

$$\mathbf{A}_{0i} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \quad (\text{B.2})$$

tenha os polos impostos com o ganho  $\mathbf{K}$ , iguais ao vetor  $\mathbf{P}$ , garantido que:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{0i}) \equiv (s - p_1)(s - p_2), \quad (\text{B.3})$$

ou seja,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) \equiv (s - p_1)(s - p_2). \quad (\text{B.4})$$

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

E o ganho  $\mathbf{K}$  e vetor de polos  $\mathbf{P}$ , são:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Desenvolvendo a primeira parte de (B.4), têm-se que:

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) &= s^2 + (b_1k_1 + b_2k_2 - a_{11} - a_{22})s \\ &+ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{12}b_2k_1 - a_{22}b_1k_1 \\ &+ a_{21}b_1k_2 - a_{11}b_2k_2. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Da segunda parte de (B.4), obtêm-se:

$$(s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + (p_1p_2). \quad (\text{B.8})$$

Igualando os termos com mesmo grau e coeficiente polinomial, de (B.7) e (B.8), consegue-se:

$$\begin{cases} (b_1k_1 + b_2k_2 - a_{11} - a_{22}) = -(p_1 + p_2) \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{12}b_2k_1 - a_{22}b_1k_1 + a_{21}b_1k_2 - a_{11}b_2k_2 = (p_1p_2) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Resolvendo o Sistema (B.9) para  $k_1$  e  $k_2$  e adotando as representações matriciais abaixo.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ (a_{12}b_2 - a_{22}b_1) & (a_{21}b_1 - a_{11}b_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{22}) & -(p_1 + p_2) \\ (p_1p_2) & -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

O ganho  $\mathbf{K}$  pode ser determinado como:

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N} \quad (\text{B.12})$$

Um observação importante é que o Sistema (B.9) terá uma única solução se a matriz  $\mathbf{M}$  admitir inversa.