

Arthur Silva Vasconcelos

**Estudo e Aplicação de Técnicas de
Identificação de Sistemas Multivariáveis a uma
Planta Térmica Didática**

Campina Grande, Brasil

14 de julho de 2019

Arthur Silva Vasconcelos

Estudo e Aplicação de Técnicas de Identificação de Sistemas Multivariáveis a uma Planta Térmica Didática

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Centro de Engenharia Elétrica e Informática - CEEI

Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Orientador: Rafael Bezerra Correia Lima, D.Sc.

Campina Grande, Brasil

14 de julho de 2019

Arthur Silva Vasconcelos

Estudo e Aplicação de Técnicas de Identificação de Sistemas Multivariáveis a uma Planta Térmica Didática

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Campina Grande, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado em: / /

Rafael Bezerra Correia Lima, D.Sc.
Orientador

George Acioli Júnior, D.Sc.
Convidado

Campina Grande, Brasil
14 de julho de 2019

Dedico este trabalho aos meus amados pais, Edilene Silva Vasconcelos e Ricardo Meira Vasconcelos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por me guiar em todos os momentos dela.

Aos meus pais, Edilene e Ricardo, minha eterna gratidão pelo apoio, amor e carinho diário e por serem a minha base para toda e qualquer conquista que já alcancei e alcançarei.

Agradeço aos meus irmãos, Amanda e Anderson, pelo companheirismo e ternura em todos os momentos que precisei.

Agradeço à minha namorada, Raianny, por ter estado comigo em todos os momentos, felizes e tristes, e por sempre acreditar em mim, até quando eu mesmo não acreditava. Obrigado por todo amor e compreensão durante esta etapa tão difícil da minha vida.

Aos colegas que o curso de Engenharia Elétrica me proporcionou conhecer: Antonio, Arthur, Breno, Caio, Camila, Carolina, Daniel, Egydio, Felipe, Gabriel, Hugo, Humberto, Ígor, João, Klynger, Marcus, Matheus, Pablo, Pedro, Rafael, Rubens, Saul, Thiago, Vinícius, Vitor, Wemerson, Yago, Yuri e tantos outros. A caminhada foi muito mais leve estando ao lado de vocês.

Agradeço ao meu orientador, Rafael Bezerra Correia Lima, pela atenção, compreensão e apoio me dado ao longo da realização deste trabalho, se mostrando sempre disposto a tirar qualquer dúvida e repassar conhecimentos. Agradeço também aos professores Péricles Rezende Barros e George Acioli Júnior por terem me dado a oportunidade de trabalhar com eles e pelos vários ensinamentos adquiridos ao longo de toda a minha jornada.

Aos meus colegas do Laboratório de Instrumentação Eletrônica, meu muito obrigado por toda a ajuda e por sempre se mostrarem bastante solícitos. Agradeço em especial aos meus colegas Egydio Tadeu e Breno Santos, sem os quais a realização deste trabalho não seria possível.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica, em especial Adail e Tchai, pela presteza sempre demonstrada diante de todo e qualquer problema. Agradeço também aos professores do departamento por todos os conhecimentos transmitidos.

Agradeço, enfim, a todos os amigos e familiares que contribuíram, diretamente e indiretamente, para que eu conseguisse chegar até aqui.

"Se você não nasceu sendo, treine até se tornar."

Autor desconhecido

Resumo

Problemas presentes em diversos domínios podem ser resolvidos utilizando-se abordagens orientadas a sistemas e, diante disto, o estudo do comportamento destes se mostra verdadeiramente necessário. A dinâmica de um sistema pode ser representada por um modelo, que é uma imagem da realidade focada em uma aplicação predeterminada. Os modelos mais aplicados dentro do contexto de engenharia e, mais especificamente, de controle são os modelos matemáticos e o processo de criação de um deles é chamado de modelagem. São duas as possibilidades de realização deste procedimento: a modelagem teórica e a modelagem experimental, também conhecida como identificação. Na identificação de sistemas, o modelo é obtido a partir de medições de uma série de dados de entrada e saída do mesmo, sendo um mecanismo largamente utilizado na prática em virtude da alta complexidade relacionada à modelagem teórica. Neste trabalho, são detalhadas duas técnicas de identificação de sistemas: a técnica dos mínimos quadrados e a do erro na saída. Estes dois métodos de identificação têm, posteriormente, a sua abordagem expandida para aplicação em casos de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Por fim, as duas técnicas são aplicadas na prática com o intuito de se obter um modelo para uma planta didática térmica.

Palavras-chaves: Erro na Saída, Identificação de Sistemas, Mínimos Quadrados; Sistemas MIMO.

Abstract

Problems in several domains can be solved by using oriented approaches to systems and, by that, the study of their behaviour are truly necessary. The dynamics of a system can be represented by a model, which is an image of a reality focused on a predetermined application. The most applied models in the context of engineering, and more specifically for control, are the mathematical models and the process of creation of a model is called modeling. There are two possibilities of realization to this process: the theoretical modeling and the experimental modeling, also known as identification. In the identification of systems, the model is obtained based on measurement of a series of input and output data of themselves, as it is extensively used in practice by virtue of the high complexity related to the theoretical modelling. In this study, it is detailed two techniques of system identification: the least squares and output error. These two identification methods have their approach expanded subsequently, for the application in the case of systems with multiple inputs and multiple outputs. Therefore, the two techniques are applied in practice with the intent of obtaining a model for a thermal didactic plant.

Key-words: Output Error; System Identification; Least Squares; MIMO Systems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Fluxograma do procedimento para identificação de sistemas.	3
Figura 2 – Comparação do espectro de frequência de sinais GBN com diferentes valores de p_{sw}	6
Figura 3 – Diagrama de blocos para a estimação do erro para um modelo ARX. . .	14
Figura 4 – Diagrama de blocos para a estimação do erro para a técnica do erro na saída.	18
Figura 5 – Planta didática utilizada.	21
Figura 6 – Dados que foram utilizados para a identificação experimental.	24
Figura 7 – Dados que foram utilizados para a validação dos modelos obtidos na identificação experimental.	24
Figura 8 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 1. Modelo identificado com a técnica dos mínimos quadrados.	26
Figura 9 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 2. Modelo identificado com a técnica dos mínimos quadrados.	27
Figura 10 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 1. Modelo identificado com a técnica do erro na saída.	28
Figura 11 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 2. Modelo identificado com a técnica do erro na saída.	28
Figura 12 – Teste preliminar realizado na planta didática.	29
Figura 13 – Teste de identificação realizado na planta didática. Dados empregados para a identificação dos modelos.	31
Figura 14 – Teste realizado na planta didática para obtenção dos dados que seriam empregados na etapa de validação cruzada dos modelos.	31
Figura 15 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 1. Modelo da planta identificado com a técnica dos mínimos quadrados.	33
Figura 16 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 2. Modelo da planta identificado com a técnica dos mínimos quadrados.	34
Figura 17 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 1. Modelo da planta identificado com a técnica do erro na saída.	35
Figura 18 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 2. Modelo da planta identificado com a técnica do erro na saída.	35
Figura 19 – Gráfico comparativo das estimações obtidas da saída temperatura 1 para cada um dos modelos.	36
Figura 20 – Gráfico comparativo das estimações obtidas da saída temperatura 2 para cada um dos modelos.	37

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores obtidos do MSE para cada uma das saídas. Resultado para o modelo identificado com a técnica dos mínimos quadrados.	26
Tabela 2 – Valores obtidos do MSE para cada uma das saídas. Resultado para o modelo identificado com a técnica do erro na saída.	27
Tabela 3 – Valores obtidos do MSE para cada uma das saídas. Resultado para o modelo da planta identificado com a técnica dos mínimos quadrados.	33
Tabela 4 – Valores obtidos do MSE para cada uma das saídas. Resultado para o modelo da planta identificado com a técnica do erro na saída.	34
Tabela 5 – Comparativo entre os valores encontrados do MSE para cada um dos modelos da planta.	37

Lista de abreviaturas e siglas

ARX	Autoregressive Exogenous
GBN	Generalized Binary Noise
MFD	Matrix Fraction Description
MSE	Mean Squared Error
MIMO	Multiple-Input and Multiple-Output
PRBS	Pseudo Random Binary Sequence
PWM	Pulse Width Modulation
SISO	Single-Input and Single-Output
TISO	Two-Input and Single-Output
TITO	Two-Input and Two-Output

Lista de símbolos

ET_{sw}	Tempo médio de comutação de um sinal GBN
p_{sw}	Probabilidade de comutação de um sinal GBN
q	Operador de deslocamento
q^{-1}	Operador unitário de atraso
t_a	Tempo de acomodação
T_{min}	Tempo mínimo de comutação de um sinal GBN

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS	3
2.1	Teste de Identificação	4
2.1.1	Testes Preliminares	4
2.1.2	Projeto do Teste de Identificação Final	4
2.1.2.1	Duração do Teste	4
2.1.2.2	Amplitude do Sinal	5
2.1.2.3	Forma de Onda do Sinal	5
2.1.2.3.1	Ruído Binário Generalizado - GBN	5
2.1.2.4	Número de Entradas Excitadas	7
2.1.3	Pré-Tratamento de Dados	7
2.2	Modelos e Estimação dos Parâmetros	8
2.3	Validação	8
3	TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO	10
3.1	Técnica dos Mínimos Quadrados	10
3.1.1	Modelo ARX	12
3.1.1.1	Caso MIMO	14
3.2	Técnica do Erro na Saída	17
3.2.1	Caso MIMO	19
4	PLANTA DIDÁTICA	21
5	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	23
5.1	Identificação Experimental	23
5.1.1	Estimação dos Parâmetros	25
5.1.1.1	Estimação Utilizando a Técnica dos Mínimos Quadrados	25
5.1.1.2	Estimação Utilizando a Técnica do Erro na Saída	25
5.1.2	Validação dos Modelos	25
5.1.2.1	Validação do Modelo Obtido a partir da Técnica dos Mínimos Quadrados	26
5.1.2.2	Validação do Modelo Obtido a partir da Técnica do Erro na Saída	27
5.2	Identificação da Planta Didática	29
5.2.1	Teste Preliminar	29
5.2.2	Teste de Identificação	30
5.2.3	Estimação dos Parâmetros	32

5.2.3.1	Estimação Utilizando a Técnica dos Mínimos Quadrados	32
5.2.3.2	Estimação Utilizando a Técnica do Erro na Saída	32
5.2.4	Validação dos Modelos	32
5.2.4.1	Validação do Modelo Obtido a partir da Técnica dos Mínimos Quadrados	33
5.2.4.2	Validação do Modelo Obtido a partir da Técnica do Erro na Saída	34
5.2.5	Comparativo dos Modelos Obtidos	36
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
	REFERÊNCIAS	39

1 Introdução

Sistemas podem ser definidos como objetos nos quais variáveis de diferentes tipos interagem entre si e produzem sinais observáveis. Evidentemente, o conceito de sistema é bastante amplo e desempenha um papel importante na ciência moderna, visto que muitos problemas em vários campos são resolvidos utilizando uma estrutura orientada a sistemas (LJUNG, 1987).

O comportamento temporal de sistemas, sejam eles sistemas técnicos de áreas como a da engenharia elétrica ou sistemas não técnicos de áreas como biologia ou economia, pode ser uniformemente descrito por modelos matemáticos (ISERMANN; MUNCHHOF, 2011). Um modelo é uma imagem da realidade (um sistema ou processo), focada em uma aplicação predeterminada. Esta imagem possui limitações, devido ao fato de geralmente ser baseada em um conhecimento incompleto do sistema e, assim, não representa a realidade completa. No entanto, mesmo com essa limitação, os modelos são frequentemente utilizados na ciência e tecnologia por fornecerem uma ferramenta para ajudar na resolução de algum problema que se beneficia de uma descrição do sistema. Os modelos podem ser utilizados para a otimização, previsão e controle de processos (ROFFEL; BETLEM, 2006).

Existem muitos tipos de modelos, como os modelos mentais e gráficos, mas para que seja possível a utilização de técnicas de controle, é necessário o uso de modelos matemáticos que descrevam as relações entre as variáveis do sistema em termos de equações de diferença ou equações diferenciais. Na verdade, o uso de modelos matemáticos não se limita apenas à área de controle. Uma parte importante do campo de toda a engenharia lida com o uso de modelos matemáticos objetivando o desenvolvimento de simulações, previsões e projetos (ZHU, 2001).

O processo de criação de um modelo adequado é chamado de modelagem. Existem duas abordagens gerais para a modelagem: a modelagem teórica e a modelagem experimental. Na modelagem teórica, o modelo é obtido a partir da combinação de equações, como equações de balanço de massa, de balanço de energia e fenomenológicas (ISERMANN; MUNCHHOF, 2011). No entanto, muitas vezes estas equações não são conhecidas ou levam a um modelo com nível muito alto de complexidade, impossibilitando o seu uso por consumir muito tempo de projeto e requerer um grande esforço computacional.

Já na modelagem experimental, também conhecida como identificação, um modelo matemático é obtido a partir de medições. Normalmente é preciso confiar em certas suposições feitas a priori e que podem ser derivadas de uma análise teórica ou de experimentos anteriores. As medições são realizadas e os sinais de entrada e saída são, então, submeti-

dos a algum método de identificação com o objetivo de encontrar um modelo matemático que descreva a relação entre a entrada e a saída (ISERMANN; MUNCHHOF, 2011). É possível então definir que a identificação de um sistema é a determinação, com base na entrada e saída, de um modelo dentro de uma classe de modelos específicos para o qual o sistema sob teste é equivalente (ZADEH, 1962).

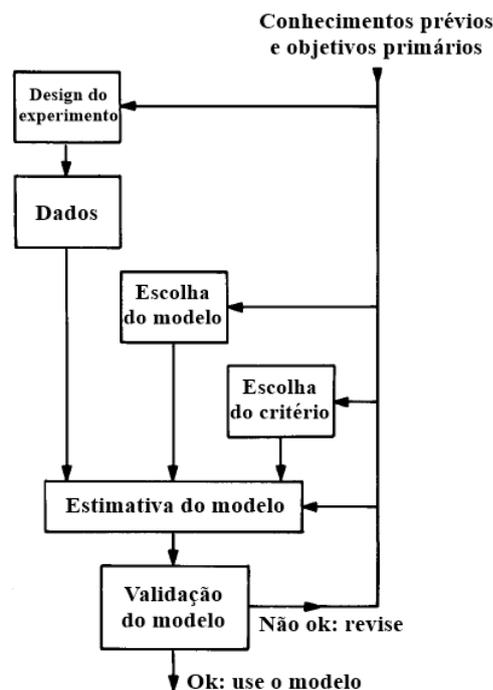
Com o intento de se beneficiar das vantagens de ambas as abordagens, raramente se usa apenas a modelagem teórica, que leva aos chamados modelos caixa branca, ou apenas a modelagem experimental, que produz os modelos intitulados de caixa preta, mas sim uma mistura de ambas fazendo com que sejam concebidos os modelos que são nomeados de caixa cinza. Essa é uma combinação bastante adequada das duas abordagens e é determinada pelo escopo de aplicação do modelo e do próprio sistema. Este escopo define a precisão necessária do modelo e, assim, o esforço que deve, então, ser empregado na análise (ISERMANN; MUNCHHOF, 2011).

Neste trabalho serão descritas e aplicadas as técnicas de identificação dos mínimos quadrados e do erro na saída (ZHU, 2001) com o objetivo de estimar o modelo de uma planta didática térmica.

2 Identificação de Sistemas

O procedimento de identificação de sistemas é dividido em 4 etapas: teste ou experimento de identificação, seleção da estrutura do modelo, estimação dos parâmetros e validação. Os dados de entrada e saída que serão utilizados para a identificação do processo devem possuir o máximo de informação sobre as propriedades relevantes do sistema. Dessa forma, o teste de identificação precisa ser corretamente projetado visando alcançar este objetivo. A seleção da estrutura do modelo é a parte mais importante e difícil do procedimento, de tal sorte que esta escolha deve ser feita tomando por base conhecimentos prévios do sistema e propriedades formais do modelo, além da intuição e discernimento do engenheiro. A estimação dos parâmetros também é vista como a determinação do melhor modelo dentro da classe de modelos escolhida anteriormente e é chamada de método ou técnica de identificação. Os parâmetros são estimados tendo o objetivo de minimizar um determinado critério de erro ou função de perda, que varia para cada método. Por fim, o modelo encontrado deve ser validado. Nesta etapa é verificado se o modelo é bom o suficiente para o uso desejado. Com isso, é possível estabelecer o fluxograma apresentado na Figura 1 como representação do procedimento para a identificação de um sistema (LJUNG, 1987) (ZHU, 2001).

Figura 1 – Fluxograma do procedimento para identificação de sistemas.



Fonte: adaptado de (LJUNG, 1987).

Pode ser visto no fluxograma apresentado na Figura 1 que os conhecimentos prévios sobre o sistema e os objetivos primários da identificação influenciam em todas as etapas do procedimento. Além disso, caso o modelo resultante não compactue com o esperado, isto é, não seja validado, faz-se necessária a revisão das etapas anteriores.

As seções seguintes abordam cada uma destas etapas, detalhando-as um pouco mais e trazendo à tona conceitos relacionados a cada uma delas.

2.1 Teste de Identificação

O objetivo dos testes de identificação é excitar e coletar dados informativos ao máximo em relação ao uso pretendido do modelo (GEVERS; LJUNG, 1986). Para que este propósito seja alcançado, faz-se necessário que o teste seja bem projetado. Pode ser feita uma analogia com uma entrevista, onde boas perguntas devem ser feitas para que informações interessantes sejam obtidas. Embora muitas vezes seja dado mais destaque aos algoritmos de estimação, o design de testes de identificação possui uma grande importância, uma vez que se o teste não for bem aplicado, nenhum algoritmo conseguirá obter um modelo que seja considerado satisfatório (ZHU, 2001).

2.1.1 Testes Preliminares

É comum que seja necessária a realização de diferentes testes, conhecidos como testes preliminares, para que informações específicas do processo sejam coletadas. A implementação de um teste preliminar se mostra essencial em casos em que o conhecimento prévio acerca do sistema é bastante limitado (ZHU, 2001).

O sinal do tipo degrau é o mais comumente utilizado em testes preliminares. A partir de um teste com este formato de onda, é possível a estimação de parâmetros como a constante de tempo e o tempo de acomodação do processo, informações que auxiliam na determinação dos parâmetros do teste final de identificação.

2.1.2 Projeto do Teste de Identificação Final

Partindo do pressuposto de que já foram obtidas informações relevantes do processo, torna-se possível o projeto de um bom teste de identificação final. Nas próximas seções serão tratados os conceitos e formas de determinação dos principais parâmetros de um teste de identificação, tendo como referência Zhu (2001).

2.1.2.1 Duração do Teste

Via de regra, a duração do teste deve ser de 6 a 18 vezes o tempo de acomodação do processo. Podem ser destacadas duas razões para isto: compensar os efeitos das per-

tubações não mensuráveis e tornar possível o uso dos resultados teóricos de identificação, uma vez que geralmente estes são assintóticos em relação ao número N de dados.

Em situações nas quais o número de entradas for pequeno e a razão sinal-ruído for alta, o teste pode ter uma duração menor, algo em torno de 5 a 8 vezes o tempo de acomodação. Já para os casos em que o número de variáveis manipuláveis for alto e a relação sinal-ruído for baixa, torna-se necessária a realização de um teste mais longo com duração de 14 a 18 vezes o tempo de acomodação. Em um cenário de processo linear e praticamente livre de ruído, um teste com duração igual a 1 ou 2 vezes o tempo de acomodação já é suficiente.

2.1.2.2 Amplitude do Sinal

A amplitude do sinal de entrada deve ser definida de forma que a razão entre o sinal e o ruído seja alta, mas ao mesmo tempo a operação do processo não seja perturbada e nem este último saia da sua zona de linearidade.

2.1.2.3 Forma de Onda do Sinal

São várias as possibilidades de forma de onda do sinal do teste de identificação. As mais conhecidas e empregadas são o degrau e os sinais binários, como a sequência binária pseudo-aleatória (PRBS - *Pseudo Random Binary Sequence*) e o ruído binário generalizado (GBN - *Generalized Binary Noise*).

Especialmente quando o uso almejado do modelo está relacionado ao controle do processo, um bom sinal de teste deve excitar em maior grau as baixas frequências do sistema, pois, assim, mais informações a respeito do estado estacionário do processo serão obtidas. Dentro desse contexto, os sinais binários apresentam uma vantagem em relação ao sinal do tipo degrau, pois possibilitam a manipulação da banda de frequência excitada.

Neste trabalho, o sinal selecionado para ser utilizado foi o GBN, que será descrito na seção seguinte.

2.1.2.3.1 Ruído Binário Generalizado - GBN

Este sinal foi proposto inicialmente por [Tulleken \(1990\)](#). Um sinal GBN $u(t)$ toma dois valores: $-a$ e a . A cada candidato de tempo t para troca, ela é realizada seguindo a regra

$$\begin{aligned} P[u(t) = -u(t-1)] &= p_{sw} \\ P[u(t) = u(t-1)] &= 1 - p_{sw}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde p_{sw} é a probabilidade de que a troca de valor ocorra ou probabilidade de comutação.

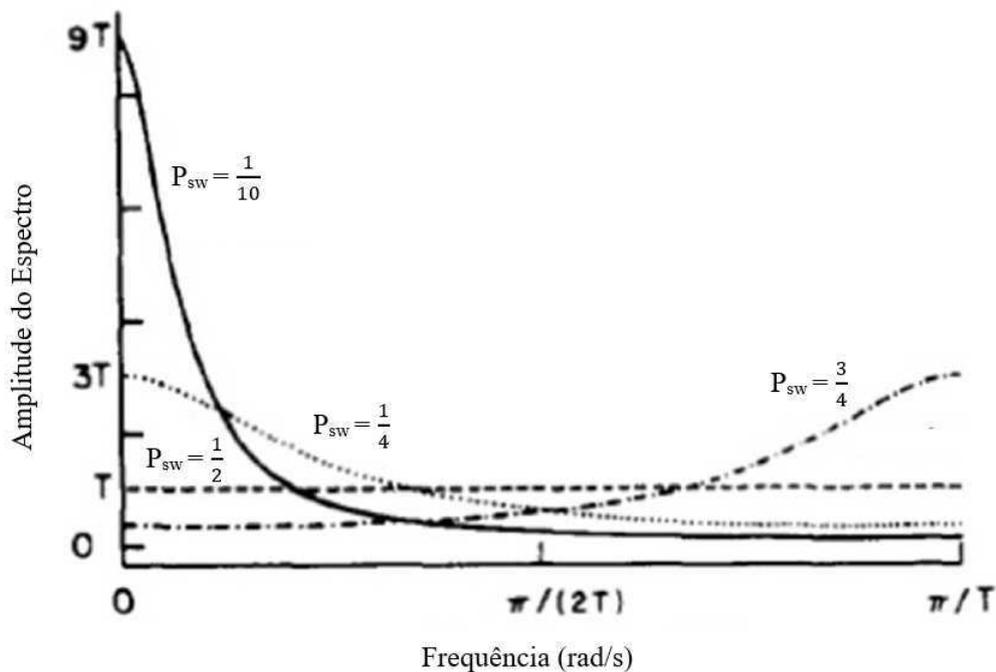
Um sinal GBN é caracterizado pela sua amplitude a e pela sua probabilidade de troca p_{sw} . Entretanto, ele também pode ser descrito pelo parâmetro tempo médio de comutação, representado por ET_{sw} , e calculado a partir da equação

$$ET_{sw} = \frac{T_{min}}{p_{sw}}, \quad (2.2)$$

onde T_{min} é o menor tempo de comutação em que o sinal se mantém constante, ou seja, é o tempo mínimo de comutação.

O ruído binário generalizado possui duas características interessantes. A primeira é que a sua média é nula, o que evita que o processo saia do seu ponto de operação. Já a segunda é que sinais GBN com característica passa baixa podem ser obtidos reduzindo o valor de p_{sw} ou aumentando ET_{sw} . É apresentada na Figura 2 uma comparação do espectro de frequência de sinais GBN com diferentes valores de p_{sw} . É possível perceber o fato de que sinais com uma probabilidade de comutação menor excitam em maior escala as baixas frequências. O limiar é o valor $\frac{1}{2}$, de forma que valores de p_{sw} acima de $\frac{1}{2}$ geram sinais GBN com característica passa alta e valores abaixo estão relacionados a sinais GBN com configuração passa baixa.

Figura 2 – Comparação do espectro de frequência de sinais GBN com diferentes valores de p_{sw} .



Fonte: adaptado de (TULLEKEN, 1990)

Uma regra proposta por Zhu (2001) para a determinação do valor de ET_{sw} é dada

por

$$ET_{sw} = \frac{0,98 \times t_a}{3} \quad (2.3)$$

onde t_a é o tempo de acomodação do processo.

Esta regra pode ser aproximada por

$$ET_{sw} = \frac{t_a}{3}, \quad (2.4)$$

de forma que o fator $\frac{1}{3}$ foi obtido a partir de exercícios de simulação e experiência com projetos.

2.1.2.4 Número de Entradas Excitadas

Para o caso de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO - *Multiple-Input and Multiple-Output*), surgem três possibilidades em relação a como o teste pode ser feito:

- Excitar uma entrada por vez e avaliar todas as saídas de forma simultânea;
- Excitar todas as entradas simultaneamente e avaliar uma saída por vez;
- Excitar todas as entradas simultaneamente e avaliar todas as saídas de forma simultânea.

Embora seja a mais difícil, a última configuração é a ideal por evitar a realização de vários ensaios. Nesse caso, é necessária a realização de apenas um ensaio para que o modelo completo do sistema MIMO seja obtido.

Uma condição importante quando da excitação de várias entradas simultaneamente é que os sinais utilizados sejam descorrelacionados.

2.1.3 Pré-Tratamento de Dados

Quando os dados do teste final são coletados, usualmente eles não são apropriados para que sejam utilizados de forma imediata nas técnicas de identificação. Normalmente é feito um pré-tratamento dos dados para que seja garantida uma melhor qualidade destes e, assim, uma melhor identificação.

Vários procedimentos podem ser utilizados para tratar um grupo de dados, mas o mais básico deles é a correção de *offset*. Os valores numéricos obtidos nos testes geralmente estão relacionados à quantidades físicas que, via de regra, não possuem a mesma dimensão.

Esta situação pode causar problemas quando da estimação dos parâmetros, uma vez que o sinal com o maior valor numérico acabará por possuir um peso maior nas funções quadráticas de perda. Para se evitar isto, deve ser realizada a correção de *offset*, ou seja, devem ser subtraídos os valores médios de cada um dos sinais de entrada e de saída. Esse tratamento permite a obtenção de um modelo sem *offset* que descreve o comportamento dinâmico do processo em torno do ponto de operação considerado.

2.2 Modelos e Estimação dos Parâmetros

Os modelos e técnicas de identificação, para a estimação dos parâmetros, utilizados no trabalho são detalhados no capítulo 3.

2.3 Validação

O objetivo básico da etapa de validação é verificar se o modelo obtido pode ser considerado satisfatório para a sua aplicação. Após ter sido identificado, o modelo pode ser avaliado sob dois aspectos: conhecimento prévio e dados experimentais (KEESMAN, 2011).

Em muitas situações já existe um conhecimento acerca do sistema antes da identificação do mesmo, como por exemplo um valor aproximado do ganho e da constante de tempo. Dessa forma, a análise do modelo em relação ao conhecimento prévio portado sobre ele gera uma indicação inicial da qualidade deste. Porém, esse estudo não é definitivo em relação à decisão de validar ou não o modelo.

Uma avaliação mais confiável do modelo pode ser feita a partir de dados experimentais. Um conceito importante relacionado a este tipo de verificação é o da validação cruzada. Na validação cruzada o modelo que foi identificado utilizando como base um conjunto de dados é empregado para estimar valores de saídas a partir de um outro conjunto de dados. Isso faz com que o modelo seja avaliado em uma situação mais prática, ou seja, a partir de dados diferentes daqueles usados para a sua identificação. Nesse caso, a série de valores de saída obtidos para o modelo e para o processo real podem ser plotados em um mesmo gráfico para que seja feita uma visualização do quanto o modelo consegue reproduzir o comportamento do sistema. Um parâmetro bastante utilizado para fornecer auxílio nessa avaliação é o erro quadrático médio (MSE - *Mean Squared Error*), dado por

$$MSE(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right], \quad (2.5)$$

onde $\hat{\theta}$ representa o valor estimado e θ o valor real de um determinado parâmetro. Caso o MSE obtido em uma validação cruzada seja considerado baixo dentro do contexto de

utilização do modelo, este pode ser validado.

3 Técnicas de Identificação

3.1 Técnica dos Mínimos Quadrados

Nesta seção é discutida a técnica dos mínimos quadrados tomando como referência [Zhu \(2001\)](#).

A técnica dos mínimos quadrados é um procedimento em que os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático são estimados de maneira que a soma dos quadrados de um erro escolhido seja minimizado. Suponha-se que um modelo matemático seja da forma:

$$y(t) = x_1(t)\theta_1 + x_2(t)\theta_2 + \dots + x_n(t)\theta_n, \quad (3.1)$$

onde $y(t)$ é a variável observável, $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ é um conjunto de parâmetros constantes e x_1, x_2, \dots, x_n são funções conhecidas que podem depender de outras variáveis conhecidas. A variável t denota tempo.

Assumindo que N amostras de $y(t)$ e x_1, x_2, \dots, x_n são feitas nos tempos $1, 2, \dots, N$, será obtido um conjunto de N equações lineares da mesma forma que (3.1). Este conjunto de equações, na forma matricial, será dado por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}, \quad (3.2)$$

onde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & \cdots & x_n(N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Uma condição necessária para que este conjunto de equações possua uma solução é que o número de amostras N seja maior ou igual que o número de termos n . Se $N = n$, teremos a solução única

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{y} \quad (3.4)$$

desde que a inversa da matriz $\mathbf{\Phi}$ exista. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ denota a estimativa de $\boldsymbol{\theta}$.

Porém, quando $N > n$, normalmente não é possível achar um vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que se enquadre nas amostras de dados perfeitamente, isto porque os dados podem estar contaminados por perturbações ou ruídos. Um modelo de ordem muito baixa ou uma estrutura de modelo errada são outras possíveis causas de desajuste. Um modo para determinar os parâmetros é estimando-os, então, com base no erro dos mínimos quadrados.

Para a estimativa dos parâmetros, primeiro é definido um erro de predição, $\varepsilon(t)$, como sendo

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\theta}. \quad (3.5)$$

Agora é possível escolher $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, de forma a minimizar o critério

$$V_{FC} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\theta}]^2 = \frac{1}{N} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.6)$$

Em (3.6), $\boldsymbol{\varepsilon}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Para dar continuidade à minimização, expressamos (3.6) como

$$V_{FC}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} [\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}]. \quad (3.8)$$

Tirando a primeira derivada de V_{FC} em relação a $\boldsymbol{\theta}$ e igualando o resultado a zero, temos

$$\frac{\partial V_{FC}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{1}{N} [-2\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} + 2\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}] = 0. \quad (3.9)$$

Logo, a solução será dada por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}]^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}. \quad (3.10)$$

Este resultado é bastante conhecido como o estimador de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\theta}$.

3.1.1 Modelo ARX

A técnica dos mínimos quadrados pode ser utilizada para estimar os parâmetros de um modelo de função de transferência ou de equação de diferença.

Seja um processo descrito pela equação de diferença de ordem n

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_ny(t-n) = b_1u(t-1) + \dots + b_nu(t-n). \quad (3.11)$$

Introduzindo o conceito do operador de deslocamento q , de forma que $qu(t) = u(t+1)$, e o operador unitário de atraso q^{-1} , de modo que $q^{-1}u(t) = u(t-1)$, podemos dizer que este modelo possui a função de transferência

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad (3.12)$$

onde:

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}, \\ B(q) &= b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dado que a sequência de dados de entrada-saída seja

$$y(1), u(1), \dots, y(N), u(N) \quad (3.14)$$

e assumindo que a ordem n seja conhecida, então é preciso estimar os parâmetros a_i e b_i . Para fazer isto, primeiramente é introduzido o erro, resultando na equação

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_ny(t-n) = b_1u(t-1) + \dots + b_nu(t-n) + \varepsilon(t) \quad (3.15)$$

ou

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + \varepsilon(t). \quad (3.16)$$

O termo $\varepsilon(t)$ é usado para representar o erro de estimação. Na literatura, $\varepsilon(t)$ é referido como sendo erro residual ou de equação.

A equação (3.16) é chamada de modelo auto-regressivo com entradas exógenas (ARX - *Autoregressive Exogenous*).

A equação (3.15) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= -a_1y(t-1) - \dots - a_ny(t-n) + b_1u(t-1) + \dots + b_nu(t-n) + \varepsilon(t) \\ &= \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\theta} + \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}(t)$ é o vetor de dados e $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros, sendo descritos por:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = [-y(t-1) \cdots -y(t-n) \quad u(t-1) \cdots u(t-n)], \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Usando a sequência de dados, é possível formar um sistema de N equações ($N \gg 2n$)

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.20)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon(n+1) \\ \varepsilon(n+2) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Phi} &= \begin{bmatrix} \varphi(n+1) \\ \varphi(n+2) \\ \vdots \\ \varphi(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & | & u(n) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & & \vdots & | & u(n+1) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ -y(N-1) & \cdots & -y(N-n) & | & u(N-1) & \cdots & u(N-n) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Então, de acordo com o princípio dos mínimos quadrados, a estimativa que minimiza a função de custo

$$V_{FC} = \sum_{t=n+1}^N \varepsilon(t)^2 = \sum_{t=n+1}^N [y(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\theta}]^2 \quad (3.22)$$

é

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \mathbf{y} = \left[\sum_{t=n+1}^N \varphi^T(t) \varphi(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=n+1}^N \varphi^T(t) y(t) \right]. \quad (3.23)$$

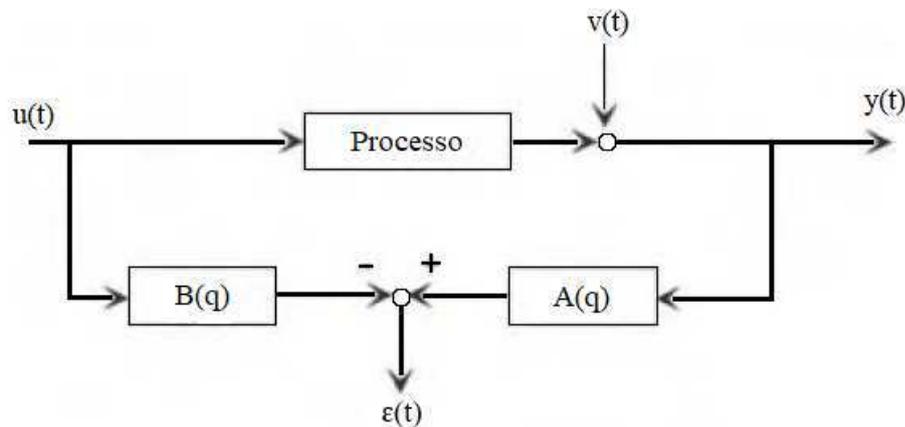
Esta solução existe se a matriz

$$\Phi^T \Phi = \sum_{t=n+1}^N \varphi^T(t) \varphi(t) \quad (3.24)$$

for não singular.

A estimação do erro para um modelo ARX é apresentada no diagrama de blocos da Figura 3.

Figura 3 – Diagrama de blocos para a estimação do erro para um modelo ARX.



Fonte: adaptado de (ZHU, 2001).

A técnica dos mínimos quadrados, além da sua simplicidade numérica, fornece uma solução fechada para o caso em questão. Isso se dá pelo fato de que o erro é linear nos parâmetros a_i e b_i e que a função de custo (3.22) é minimizada. Porém, em condições práticas, o estimador dos mínimos quadrados do modelo da função de transferência é polarizado se a ordem do modelo não for alta o suficiente. Ademais, em relação à resposta em frequência, o estimador pode vir a obter um modelo incorreto para as frequências baixas e médias.

3.1.1.1 Caso MIMO

O procedimento descrito anteriormente trata da estimação dos parâmetros de um modelo ARX para o caso de sistemas com uma entrada e uma saída (SISO - *Single-Input and Single-Output*). Entretanto, essa análise pode ser entendida para o caso de sistemas MIMO. Trataremos nesse trabalho da abordagem para sistemas com duas entradas e duas

saídas (TITO - *Two-Input and Two-Output*), mas que pode ser facilmente expandida para as demais situações com mais entradas e/ou saídas.

Para um processo TITO, a relação linear geral entre as entradas e saídas pode ser descrita por uma matriz função de transferência no formato

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(q) & G_{12}(q) \\ G_{21}(q) & G_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} y_1(t) &= G_{11}(q)u_1(t) + G_{12}(q)u_2(t), \\ y_2(t) &= G_{21}(q)u_1(t) + G_{22}(q)u_2(t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Seguindo uma parametrização do modelo na forma diagonal MFD (*Matrix Fraction Description*), obtém-se

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} A_1(q) & 0 \\ 0 & A_2(q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{11}(q) & B_{12}(q) \\ B_{21}(q) & B_{22}(q) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Considerando

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

pode ser obtida a representação

$$\begin{aligned} A_1(q)y_1(t) &= B_{11}(q)u_1(t) + B_{12}(q)u_2(t), \\ A_2(q)y_2(t) &= B_{21}(q)u_1(t) + B_{22}(q)u_2(t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

É possível notar que, nessa situação, o modelo é desacoplado em dois submodelos de duas entradas e uma saída (TISO - *Two-Input and Single-Output*), de forma que para cada submodelo observa-se um polinômio de denominador comum, seja $A_1(q)$ ou $A_2(q)$. Destarte, os dois submodelos podem ser estimados de forma separada.

O grau de todos os polinômios em um submodelo será considerado igual e essa será a ordem do submodelo, tendo então as ordens n_1 e n_2 . Dado que a sequência de dados de entrada-saída seja

$$y_1(1), y_2(1), u_1(1), u_2(1), \dots, y_1(N), y_2(N), u_1(N), u_2(N), \quad (3.30)$$

e tomando que $n = \max(n_1, n_2)$, então o estimador de mínimos quadrados dos parâmetros do primeiro submodelo que minimiza a função de custo

$$V_1 = \sum_{t=n+1}^N (A_1(q)y_1(t) - [B_{11}(q)u_1(t)B_{12}(q)u_2(t)])^2 \quad (3.31)$$

é

$$\hat{\theta}_1 = [\Phi_1^T \Phi_1]^{-1} \Phi_1^T \mathbf{y}_1, \quad (3.32)$$

onde:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_1(n+1) \\ y_1(n+2) \\ \vdots \\ y_1(N) \end{bmatrix}, \quad \theta_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n_1} \\ b_{11,1} \\ \vdots \\ b_{11,n_1} \\ b_{12,1} \\ \vdots \\ b_{12,n_1} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} -y_1(n_1) & \cdots & -y_1(1) & | & u_1(n_1) & \cdots & u_1(1) & | & u_2(n_1) & \cdots & u_2(1) \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ -y_1(N-1) & \cdots & -y_1(N-n_1) & | & u_1(N-1) & \cdots & u_1(N-n_1) & | & u_2(N-1) & \cdots & u_2(N-n_1) \end{bmatrix}.$$

Pode ser feito o mesmo para o segundo submodelo.

Podem ainda ser incluídos nessa abordagem atrasos no tempo. Seriam obtidos:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_1(n+1+a) \\ y_1(n+2+a) \\ \vdots \\ y_1(N+a) \end{bmatrix}, \quad \theta_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n_1} \\ b_{11,1} \\ \vdots \\ b_{11,n_1} \\ b_{12,1} \\ \vdots \\ b_{12,n_1} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} -y_1(n_1+a) & \cdots & -y_1(1+a) & u_1(n_1+(a-a_1)) & \cdots & u_1(1+(a-a_1)) & u_2(n_1+(a-a_2)) & \cdots & u_2(1+(a-a_2)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_1(N-1+a) & \cdots & -y_1(N-n_1+a) & u_1(N-1+(a-a_1)) & \cdots & u_1(N-n_1+(a-a_1)) & u_2(N-1+(a-a_2)) & \cdots & u_2(N-n_1+(a-a_2)) \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

onde a_1 representa o atraso da saída y_1 em relação à entrada u_1 , a_2 retrata o atraso da saída y_1 em relação à entrada u_2 e $a = \max(a_1, a_2)$.

3.2 Técnica do Erro na Saída

Nesta seção é discutida a técnica do erro na saída tomando como referência [Zhu \(2001\)](#). Esta técnica também pode ser tratada como técnica *output error*, nome original em inglês.

O critério do erro residual ou de equação, utilizado na técnica dos mínimos quadrados, não é oriundo de uma escolha natural. Foi assim escolhido devido ao fato de ser fácil de calcular e simples de compreender. Buscando um critério de erro mais próximo das aplicações do modelo, como no controle e simulação de processos, surge o erro na saída, base para a técnica que será tratada nesta seção.

Representando o modelo do processo como

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n}}{1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}}, \quad (3.35)$$

o erro na saída é definido como

$$\varepsilon_{oe}(t) = y(t) - \frac{B(q)}{A(q)}u(t) = y(t) - \hat{y}(t). \quad (3.36)$$

Sendo os dados de entrada-saída

$$Z^N = y(1)u(1)\dots y(N)u(N), \quad (3.37)$$

e assumindo que a ordem n do processo é conhecida, o método do erro na saída estima os parâmetros do modelo ao minimizar a função custo

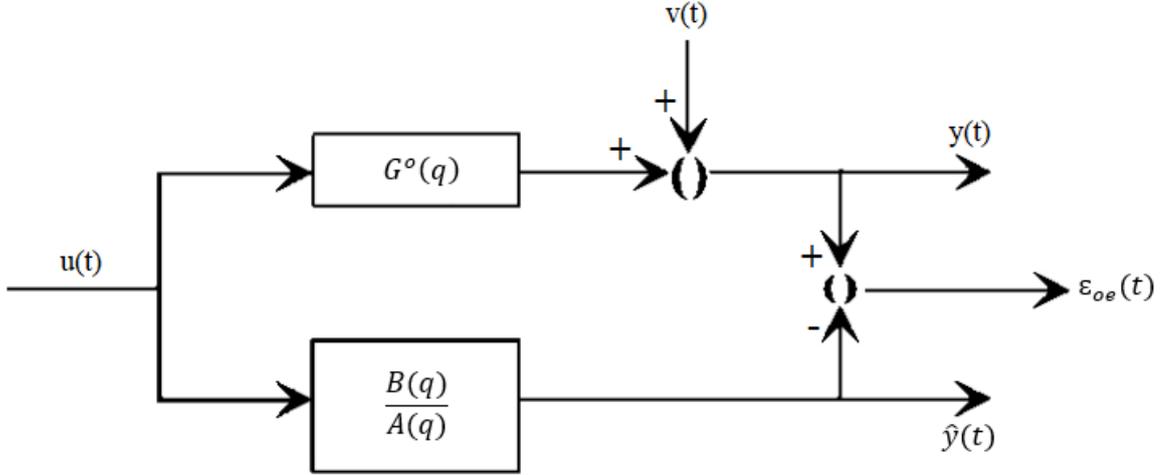
$$V_{oe}^N = \frac{1}{N-n} \sum_{t=n+1}^N \varepsilon_{oe}(t)^2. \quad (3.38)$$

A estimação do erro para a técnica do erro na saída é ilustrada no diagrama de blocos da Figura 4.

É possível notar que o erro na saída $\varepsilon_{oe}(t)$ é não-linear em relação aos parâmetros do polinômio $A(q)$. A consequência desta não linearidade é a não existência de uma solução analítica para este problema de minimização. Dessa forma, torna-se necessário um algoritmo numérico de busca para se encontrar o mínimo da função custo V_{oe}^N . Neste trabalho será utilizado o método de Gauss-Newton, por se tratar de um algoritmo adequado para o critério da soma dos quadrados.

A estimativa após a k -ésima iteração será denotada como $\hat{\theta}^k$ e será assumido que $\hat{\theta}^k$ está próximo a um mínimo local.

Figura 4 – Diagrama de blocos para a estimação do erro para a técnica do erro na saída.



Fonte: adaptado de (ZHU, 2001).

Para vetores de parâmetros $(\boldsymbol{\theta})$ perto de $\hat{\boldsymbol{\theta}}^k$, é possível expandir em série de Taylor o erro residual na saída em torno de $\hat{\boldsymbol{\theta}}^k$, chegando a:

$$\epsilon_{oe}(t, \boldsymbol{\theta}) \approx \epsilon_{oe}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}^k) + \frac{\partial \epsilon_{oe}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^k} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^k) + \dots \quad (3.39)$$

Desprezando os termos de ordem quadrada e superior, se obtém

$$\begin{aligned} \epsilon_{oe}(t, \boldsymbol{\theta}) &\approx \epsilon_{oe}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}^k) + \frac{\partial \epsilon_{oe}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^k} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^k) \\ &= \epsilon_{oe}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}^k) + \boldsymbol{\varphi}^k(t) (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^k) \\ &= -[\boldsymbol{\varphi}^k(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}^k - \epsilon(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}^k)] + \boldsymbol{\varphi}^k(t) \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}^k(t)$ é o gradiente do erro residual na saída, dado por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^k(t) &= \frac{\partial \epsilon_{oe}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^k} \\ &= \left[\frac{\partial \epsilon_{oe}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial a_1} \Big|_{a_1=\hat{a}_1^k} \cdots \frac{\partial \epsilon_{oe}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial a_n} \Big|_{a_n=\hat{a}_n^k} \frac{\partial \epsilon_{oe}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial b_1} \Big|_{b_1=\hat{b}_1^k} \cdots \frac{\partial \epsilon_{oe}(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial b_n} \Big|_{b_n=\hat{b}_n^k} \right] \\ &= \left[\frac{\hat{B}^k(q)}{\hat{A}^k(q)^2} u(t-1) \cdots \frac{\hat{B}^k(q)}{\hat{A}^k(q)^2} u(t-n) \frac{-1}{\hat{A}^k(q)} u(t-1) \cdots \frac{-1}{\hat{A}^k(q)} u(t-n) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Com isso, o erro passa a ser linear com relação aos parâmetros e, assim, a técnica dos mínimos quadrados pode ser utilizada para achar uma estimativa.

Comparando (3.40) com a equação de regressão linear (3.17), verifica-se que agora $[\boldsymbol{\varphi}^k(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}^k - \epsilon(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}^k)]$ toma a posição de $y(t)$ e $\boldsymbol{\varphi}^k(t)$ toma a posição de $\boldsymbol{\varphi}(t)$.

Dessa forma, tomando por base a equação do estimador de mínimos quadrados (3.23), e substituindo os novos valores de $y(t)$ e $\varphi(t)$, é obtido o novo resultado para o estimador, sendo dado por:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^{k+1} &= \left[\sum_{t=1}^N [\varphi^k(t)]^T \varphi^k(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N [\varphi^k(t)]^T [\varphi^k(t) \hat{\theta}^k - \epsilon(t, \hat{\theta}^k)] \\ &= \hat{\theta}^k - \left[\sum_{t=1}^N [\varphi^k(t)]^T \varphi^k(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N [\varphi^k(t)]^T \epsilon(t, \hat{\theta}^k).\end{aligned}\tag{3.42}$$

O estimador dos mínimos quadrados pode ser utilizado para começar a iteração.

Ao final, embora seja mais complexa e requira muito mais tempo e esforço computacional do que o método dos mínimos quadrados, a técnica do erro na saída oferece vantagens, dentre as quais podem ser citadas:

- Com testes de malha aberta, o método do erro na saída é consistente caso a ordem do modelo $G(q)$ esteja correta. Com isso, a identificação será precisa;
- Se a ordem do modelo for menor do que a verdadeira, o erro da função de transferência estimada é ponderado pela espectro do sinal de entrada e, assim, pode ser afetado pelo sinal de entrada.

Todavia, vale ressaltar que uma condição para isto é a convergência global do algoritmo numérico de busca. No caso do algoritmo de Gauss-Newton, as condições que devem ser satisfeitas para que o algoritmo funcione não são consideradas muito restritivas para aplicações práticas. São elas:

- Os modelos de cada iteração devem ser estáveis. Caso seja obtido um modelo intermediário instável, deve-se aproximá-lo por um modelo estável;
- A matriz

$$\sum_{t=1}^N [\varphi^k(t)]^T \varphi^k(t)\tag{3.43}$$

deve ser não singular.

3.2.1 Caso MIMO

A extensão da abordagem da técnica do erro na saída para o caso MIMO segue a mesma lógica utilizada na expansão para a técnica dos mínimos quadrados com modelo ARX. Tomando mais uma vez como base o caso TITO, a identificação é desacoplada em

duas identificações de processos TISO. Nesse caso, teríamos o erro na saída sendo dado por:

$$\varepsilon_{oe_1}(t) = y_1(t) - \frac{B_{11}(q)}{A_1(q)}u_1(t) - \frac{B_{12}(q)}{A_1(q)}u_2(t) = y_1(t) - \frac{B_{11}(q)u_1(t) + B_{12}(q)u_2(t)}{A_1(q)}. \quad (3.44)$$

Com

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n_1} \\ b_{11,1} \\ \vdots \\ b_{11,n_1} \\ b_{12,1} \\ \vdots \\ b_{12,n_1} \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

obtemos como gradiente do erro residual na saída:

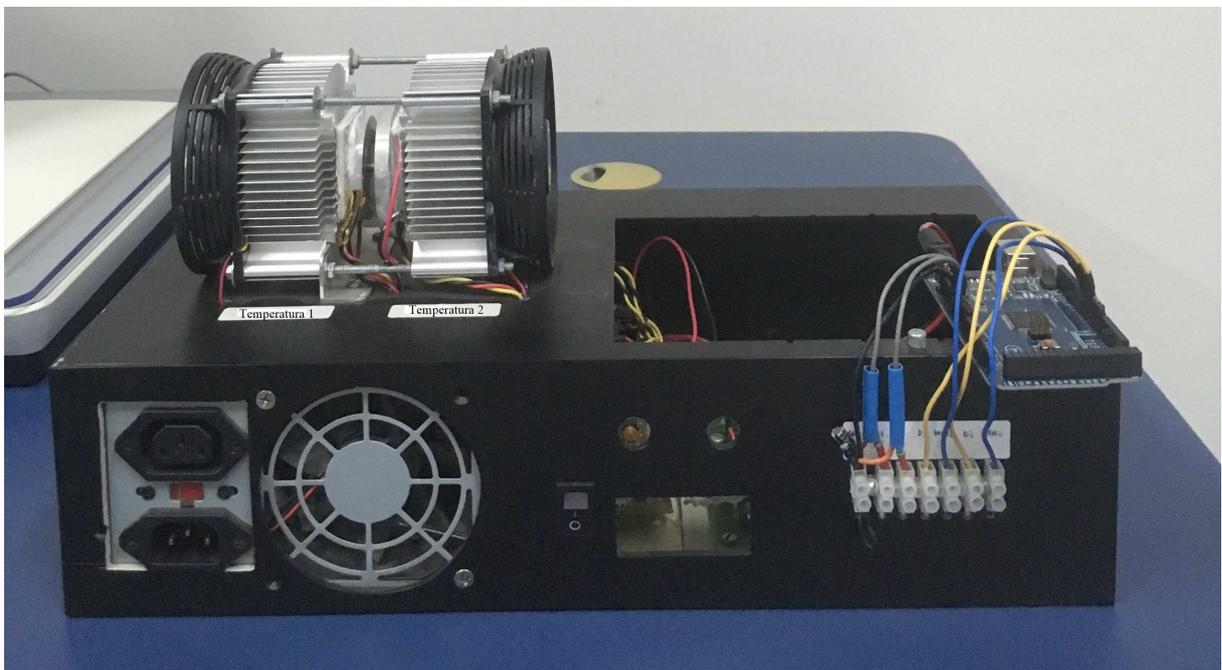
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_1^k(t) &= \frac{\partial \varepsilon_{oe_1}(t, \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^k} \\ &= \left[\frac{\partial \varepsilon_{oe_1}(t, \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial a_{1,1}} \Big|_{a_{1,1} = \hat{a}_{1,1}^k} \cdots \frac{\partial \varepsilon_{oe_1}(t, \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial a_{1,n_1}} \Big|_{a_{1,n_1} = \hat{a}_{1,n_1}^k} \frac{\partial \varepsilon_{oe_1}(t, \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial b_{11,1}} \Big|_{b_{11,1} = \hat{b}_{11,1}^k} \cdots \frac{\partial \varepsilon_{oe_1}(t, \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial b_{11,n_1}} \Big|_{b_{11,n_1} = \hat{b}_{11,n_1}^k} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \varepsilon_{oe_1}(t, \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial b_{12,1}} \Big|_{b_{12,1} = \hat{b}_{12,1}^k} \cdots \frac{\partial \varepsilon_{oe_1}(t, \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial b_{12,n_1}} \Big|_{b_{12,n_1} = \hat{b}_{12,n_1}^k} \right] \\ &= \left[\frac{\hat{B}_{11}^k(q)u_1(t-1) + \hat{B}_{12}^k(q)u_2(t-1)}{\hat{A}_1^k(q)^2} \cdots \frac{\hat{B}_{11}^k(q)u_1(t-n_1) + \hat{B}_{12}^k(q)u_2(t-n_1)}{\hat{A}_1^k(q)^2} \right. \\ &\quad \left. \frac{-1}{\hat{A}_1^k(q)}u_1(t-1) \cdots \frac{-1}{\hat{A}_1^k(q)}u_1(t-n_1) \frac{-1}{\hat{A}_1^k(q)}u_2(t-1) \cdots \frac{-1}{\hat{A}_1^k(q)}u_2(t-n_1) \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

O estimador (3.42) segue sem alterações em sua estrutura. Pode ser realizado o mesmo para o segundo submodelo.

4 Planta Didática

A planta didática utilizada neste trabalho é apresentada na Figura 5. Trata-se de uma planta térmica que tem o seu funcionamento baseado no uso de módulos ou pastilhas Peltier. São empregadas duas pastilhas Peltier que funcionam de acordo com o efeito que as nomeiam, de forma que quando aplicada uma tensão elétrica, é gerada uma diferença de temperatura entre as superfícies da pastilha. O controle da potência cedida a cada um dos módulos é feito por um sinal de modulação por largura de pulso (PWM - *Pulse Width Modulation*).

Figura 5 – Planta didática utilizada.



Fonte: o próprio autor.

Uma das superfícies de cada um dos módulos é ligada a um dissipador de calor de um cooler ao mesmo tempo em que a outra face é acoplada a uma massa metálica de diâmetro diferente para cada uma das pastilhas. Durante os experimentos, o cooler é ativado e faz com que seja facilitada a dissipação do calor com o ambiente. Além disso, as duas massas metálicas são conectadas por meio de um cilindro também metálico, mas que possui um diâmetro reduzido em comparação ao das massas. Essa conexão permite a transferência de calor de uma peça metálica para a outra.

Em cada uma das massas metálicas é instalado um sensor de temperatura, permitindo assim a leitura de dois valores desta grandeza: temperatura 1 e temperatura 2. É

apresentada na Figura 5 a disposição desses dois parâmetros, de forma que a temperatura 1 está relacionada à massa metálica mais a esquerda e a temperatura 2 à peça metálica a direita.

Com isso, a planta pode ser vista como um sistema TITO, onde as duas entradas são os valores do ciclo de trabalho (*duty cycle*) do sinal PWM que controla a potência transferida à cada um dos módulos Peltier e as saídas são as temperaturas. Em resumo:

- Entradas:
 - *Duty Cycle* 1: ciclo de trabalho do sinal PWM relacionado ao módulo Peltier 1;
 - *Duty Cycle* 2: ciclo de trabalho do sinal PWM relacionado ao módulo Peltier 2.
- Saídas:
 - Temperatura 1: temperatura da massa metálica conectada ao módulo Peltier 1;
 - Temperatura 2: temperatura da massa metálica conectada ao módulo Peltier 2.

Ademais, a relação existente entre as entradas e saídas do processo pode ser descrita por uma matriz função de transferência no formato

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde Y_1 é a temperatura 1, Y_2 é a temperatura 2, U_1 é a entrada *duty cycle* 1 e U_2 é a entrada *duty cycle* 2. Já os elementos G_{ab} da matriz de transferência correspondem à função de transferência entre a saída a e a entrada b . Dessa forma, os elementos G_{11} e G_{22} representam as dinâmicas diretas do processo, enquanto os termos G_{12} e G_{21} retratam as dinâmicas cruzadas do mesmo.

Diante da configuração da planta, é esperado que seja visualizado um atraso de tempo considerável na dinâmica cruzada, uma vez que a conexão metálica existente entre as duas peças possui um diâmetro bastante reduzido, o que retarda a propagação do calor de uma massa metálica para a outra.

5 Resultados Experimentais

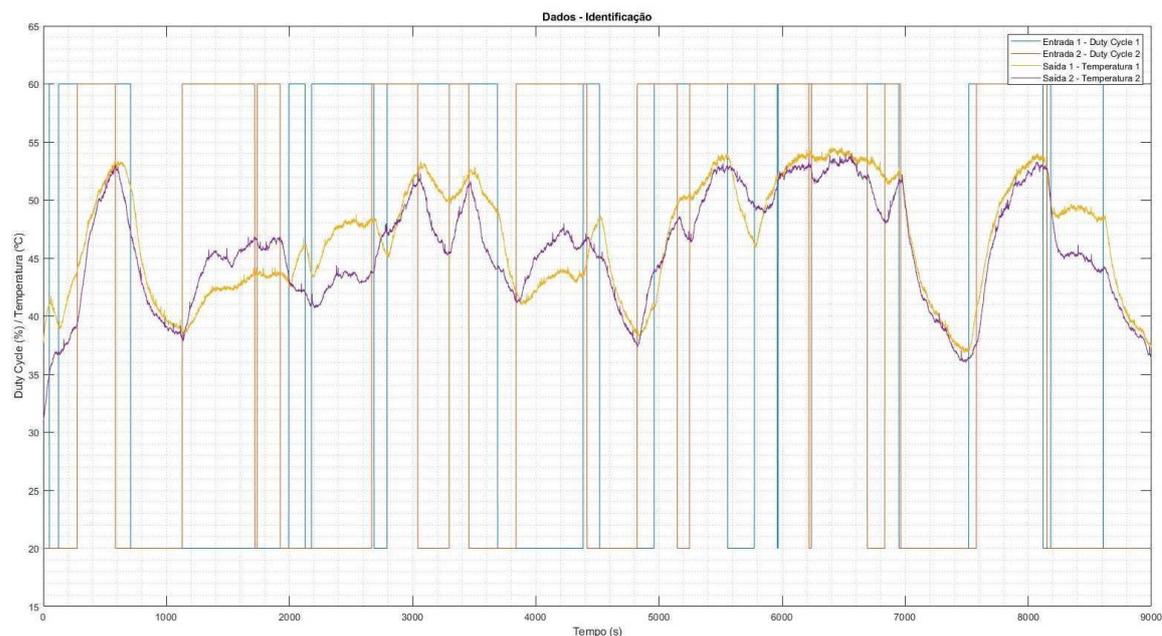
5.1 Identificação Experimental

Antes da realização do procedimento de identificação da planta didática, foi efetuada uma identificação preliminar com o objetivo de avaliar o funcionamento dos algoritmos desenvolvidos para as técnicas dos mínimos quadrados e do erro na saída. Essa identificação será tratada como experimental e foi feita a partir de dados que foram disponibilizados ao aluno.

Os dados utilizados se referem a um processo com configuração um pouco semelhante à planta didática discutida na seção 4. Trata-se de uma planta térmica que se baseia na dissipação de calor provocada por dispositivos semicondutores e que forma um sistema TITO. As entradas são os valores do ciclo de trabalho do sinal PWM que controla a potência fornecida a cada um dos dispositivos e as saídas são valores de temperatura mensurados a partir de sensores desta grandeza instalados em dois diferentes pontos da planta. Os dados foram obtidos a partir de um teste de identificação em que foram excitadas todas as entradas simultaneamente e todas as saídas também foram avaliadas de forma simultânea. Foi utilizado um sinal GBN com $ET_{sw} = 500$ s e que comuta entre os valores de ciclo de trabalho 60% e 20%, sendo o ponto de operação considerado como 40%. O tempo de amostragem utilizado foi de 1 s.

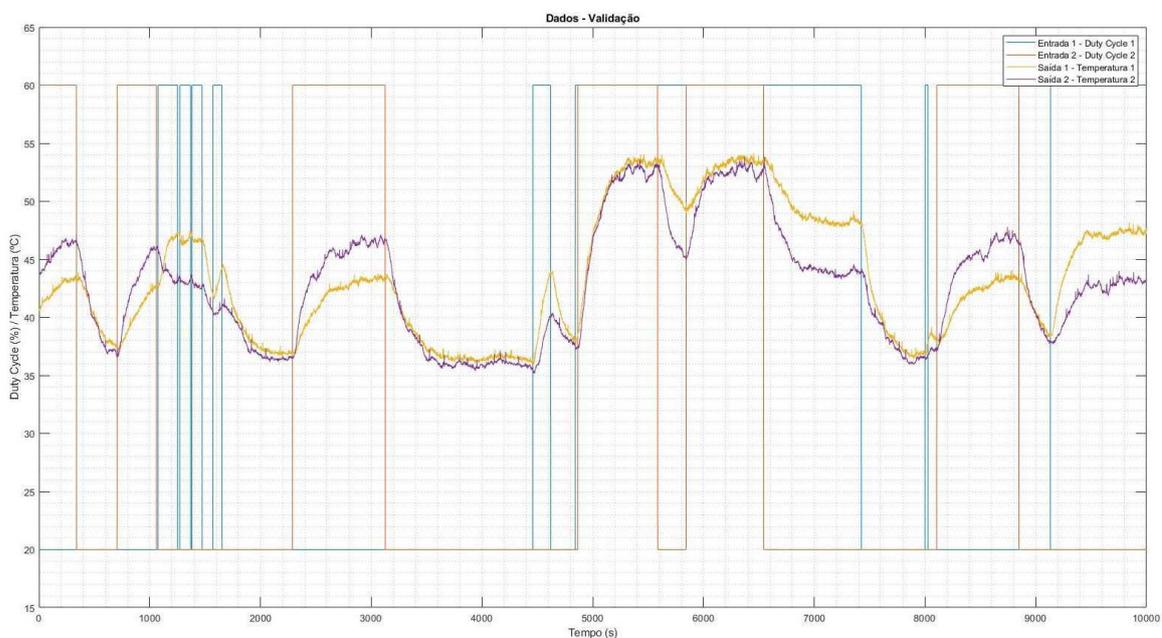
Além disso, os dados foram divididos em dois grupos, sendo um para identificação do modelo e outro para a validação. Dessa forma, foi considerada a validação cruzada, uma vez que os dados utilizados para a validação são diferentes dos empregados na estimação do modelo. O conjunto de dados utilizados para a identificação são apresentados no gráfico da Figura 6, enquanto o que foi utilizado para a validação são exibidos no gráfico da Figura 7.

Figura 6 – Dados que foram utilizados para a identificação experimental.



Fonte: o próprio autor.

Figura 7 – Dados que foram utilizados para a validação dos modelos obtidos na identificação experimental.



Fonte: o próprio autor.

5.1.1 Estimação dos Parâmetros

Para a estimação dos parâmetros, foi realizada previamente a correção de *offset* dos dados de entrada e de saída, sendo subtraídos os valores médios de cada um deles.

Tratando-se de um sistema TITO, a estimação foi feita de forma separada para dois submodelos TISO. Os dois submodelos foram considerados como de primeira ordem e não foram levados em consideração atrasos.

5.1.1.1 Estimação Utilizando a Técnica dos Mínimos Quadrados

A estimação utilizando a técnica dos mínimos quadrados foi feita de acordo com a abordagem trazida na seção 3.1.1.1, de modo que é utilizado um modelo ARX.

Foram obtidas as quatro funções de transferência, sendo, assim, montada a matriz de transferência do sistema, dada por:

$$\mathbf{G}_{expMQ-ARX}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{0,1644q^{-1}}{1 - 0,9941q^{-1}} & \frac{0,0771q^{-1}}{1 - 0,9941q^{-1}} \\ \frac{0,0796q^{-1}}{1 - 0,9946q^{-1}} & \frac{0,1434q^{-1}}{1 - 0,9946q^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

5.1.1.2 Estimação Utilizando a Técnica do Erro na Saída

A identificação utilizando a técnica do erro na saída foi feita de acordo com a abordagem trazida nas seções 3.2 e 3.2.1. O estimador dos mínimos quadrados obtido quando da estimação feita anteriormente foi utilizado como primeira iteração. Foram realizadas 10 iterações.

Foram encontradas as quatro funções de transferência, sendo, assim, formada a matriz transferência do sistema. O resultado alcançado foi:

$$\mathbf{G}_{expOE}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{0,1559q^{-1}}{1 - 0,9945q^{-1}} & \frac{0,0921q^{-1}}{1 - 0,9945q^{-1}} \\ \frac{0,0901q^{-1}}{1 - 0,9946q^{-1}} & \frac{0,1461q^{-1}}{1 - 0,9946q^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

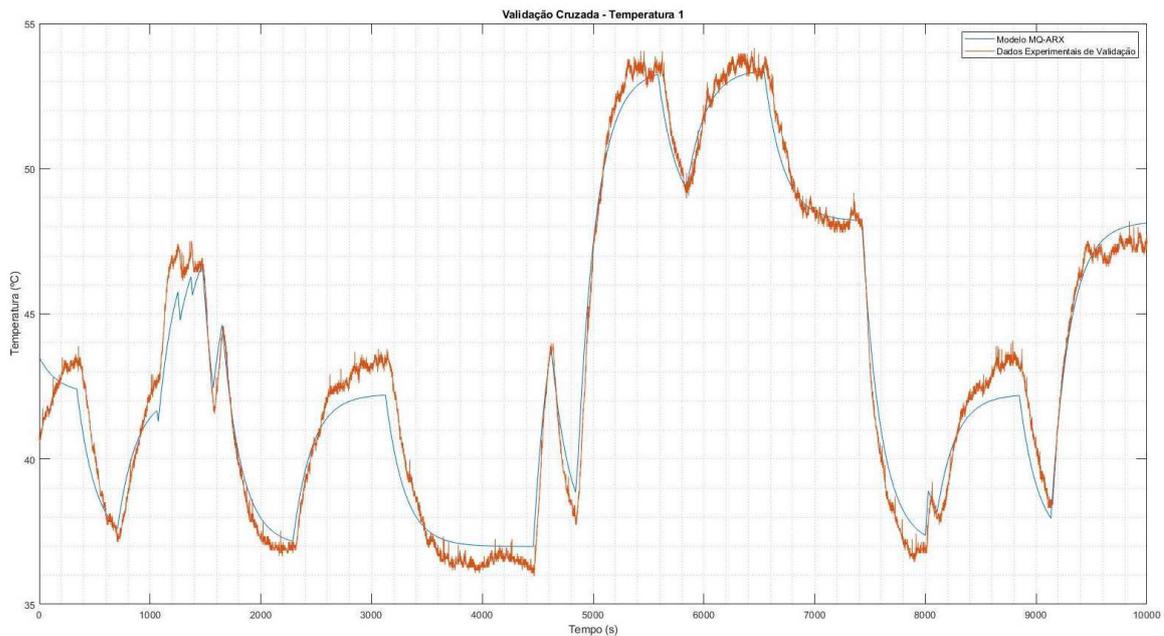
5.1.2 Validação dos Modelos

Conforme já comentado, foi utilizada a abordagem da validação cruzada. Foram adicionados os valores médios dos dados experimentais de validação de saída aos dados de saída obtidos a partir dos modelos estimados. Isto foi feito para que fosse possível a comparação entre ambos.

5.1.2.1 Validação do Modelo Obtido a partir da Técnica dos Mínimos Quadrados

São apresentados nas Figuras 8 e 9 os resultados para as temperaturas 1 e 2, respectivamente, da etapa de validação do modelo obtido a partir da técnica dos mínimos quadrados.

Figura 8 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 1. Modelo identificado com a técnica dos mínimos quadrados.



Fonte: o próprio autor.

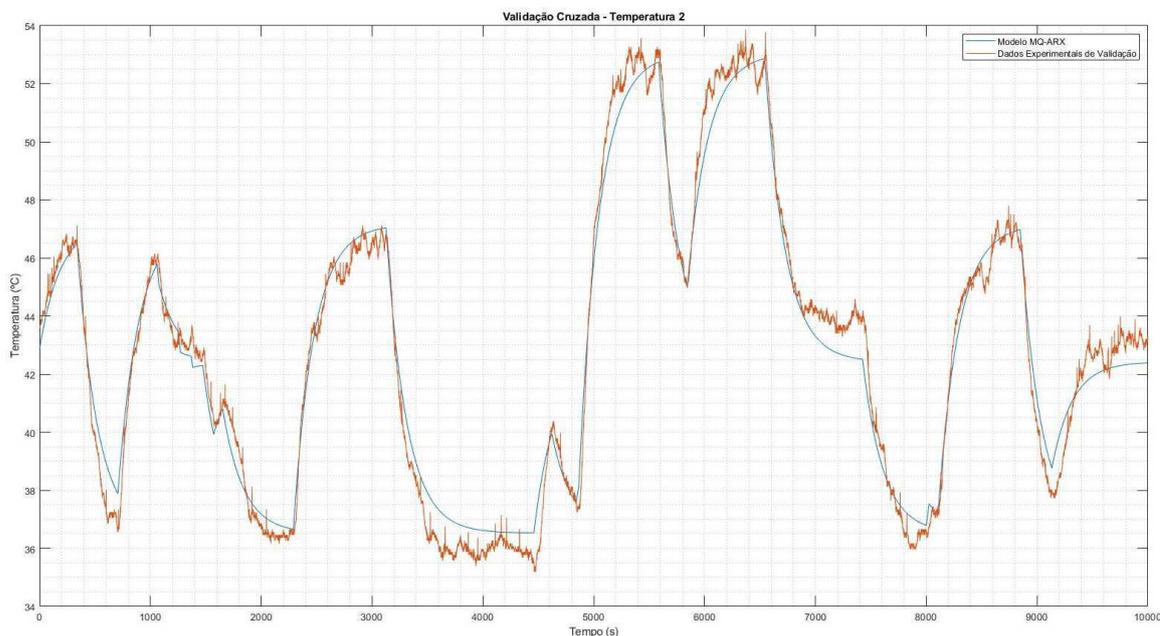
Também foi calculado o MSE para cada uma das saídas. Os valores obtidos são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores obtidos do MSE para cada uma das saídas. Resultado para o modelo identificado com a técnica dos mínimos quadrados.

Saída	Temperatura 1	Temperatura 2
MSE	0,6675	0,5532

Fonte: o próprio autor.

Figura 9 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 2. Modelo identificado com a técnica dos mínimos quadrados.



Fonte: o próprio autor.

Tendo como base estas duas análises, pode ser considerado que o modelo estimado a partir da técnica dos mínimos quadrados foi capaz de capturar a dinâmica do processo.

5.1.2.2 Validação do Modelo Obtido a partir da Técnica do Erro na Saída

São apresentados nas Figuras 10 e 11 os resultados da etapa de validação para as temperaturas 1 e 2, respectivamente, do modelo obtido a partir da técnica do erro na saída.

Novamente foi calculado o MSE para cada uma das saídas. Os valores obtidos são apresentados na Tabela 2.

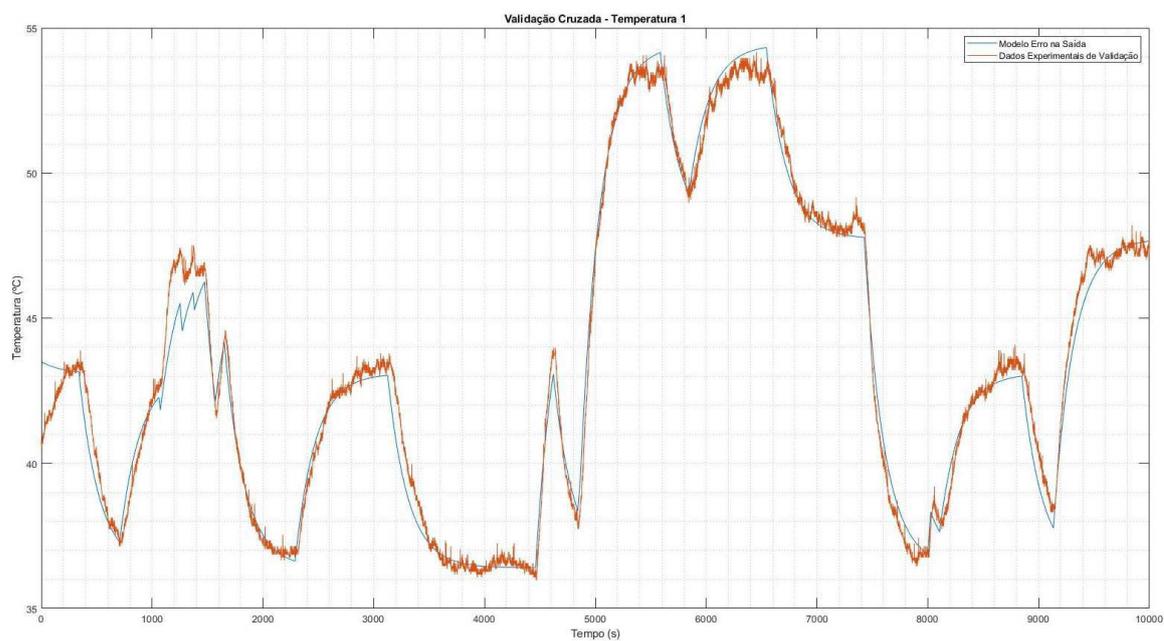
Tabela 2 – Valores obtidos do MSE para cada uma das saídas. Resultado para o modelo identificado com a técnica do erro na saída.

Saída	Temperatura 1	Temperatura 2
MSE	0,4394	0,3425

Fonte: o próprio autor.

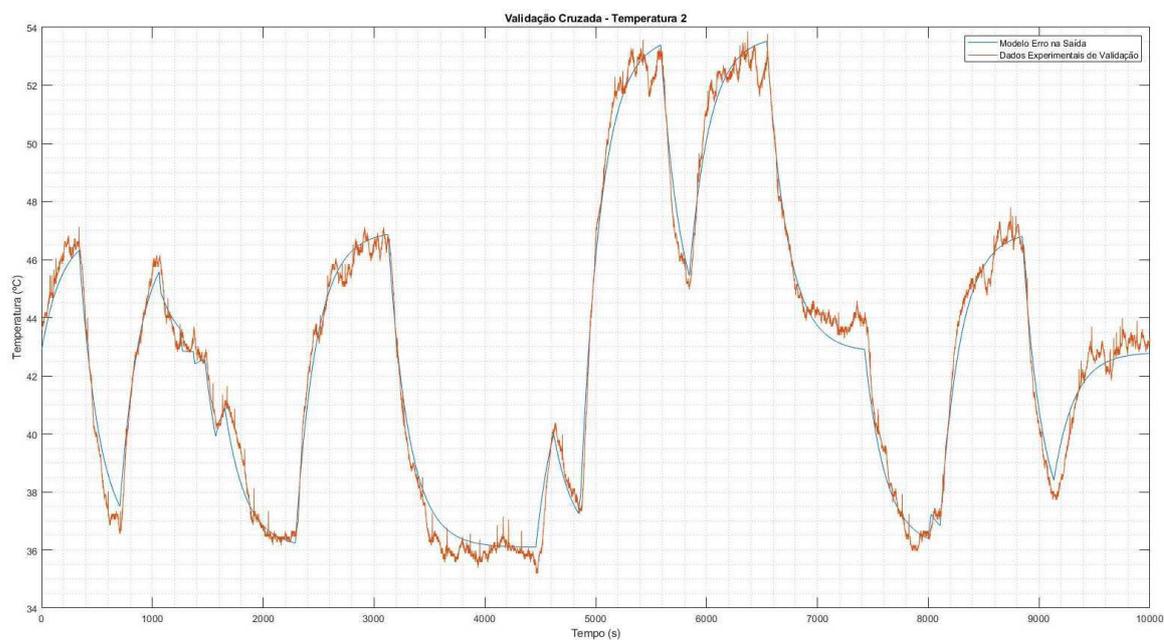
Tendo como base estas duas avaliações, pode ser considerado que o modelo estimado a partir da técnica do erro na saída também foi capaz de representar a dinâmica do processo.

Figura 10 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 1. Modelo identificado com a técnica do erro na saída.



Fonte: o próprio autor.

Figura 11 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 2. Modelo identificado com a técnica do erro na saída.



Fonte: o próprio autor.

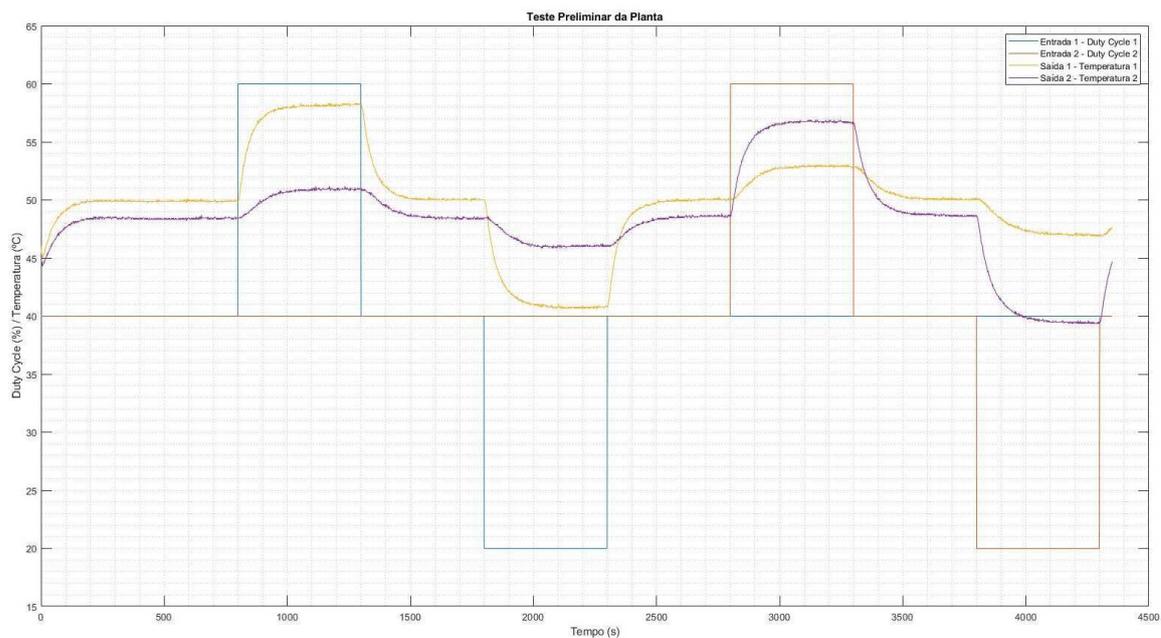
5.2 Identificação da Planta Didática

5.2.1 Teste Preliminar

Com o objetivo de extrair informações iniciais acerca do processo, foi realizado um teste preliminar. Partindo do ponto de operação, foi aplicado um degrau positivo em seguida de um negativo na entrada *duty cycle* 1 enquanto a entrada *duty cycle* 2 era mantida constante. Posteriormente, o processo foi repetido com os degraus sendo aplicados na entrada *duty cycle* 2. O ponto de operação foi definido como tendo valores de ciclo de trabalho iguais a 40% e os degraus aplicados tiveram amplitude 20 e -20, levando, assim, a valores de *duty cycle* iguais a 60% e 20%. O teste foi realizado tendo um tempo de amostragem igual a 1 s.

O resultado obtido com o teste é apresentado no gráfico da Figura 12.

Figura 12 – Teste preliminar realizado na planta didática.



Fonte: o próprio autor.

A partir da análise do teste preliminar, foi possível estimar o tempo de acomodação para cada uma das saídas, obtendo-se:

- Saída 1: $t_{a_1} = 240$ s;
- Saída 2: $t_{a_2} = 180$ s.

Também foi visualizado que a razão sinal-ruído é alta e, conforme esperado, existe um atraso de tempo considerável na dinâmica cruzada da planta. Foi estimado um atraso

de 15 s da saída 1 em relação à entrada 2 e também um atraso de 15 s da saída 2 em relação à entrada 1. Já em relação à dinâmica direta do processo, não foi visualizado nenhum atraso de tempo considerável, de forma que os atrasos da saída 1 em relação à entrada 1 e da saída 2 em relação à entrada 2 foram tratados como nulos.

5.2.2 Teste de Identificação

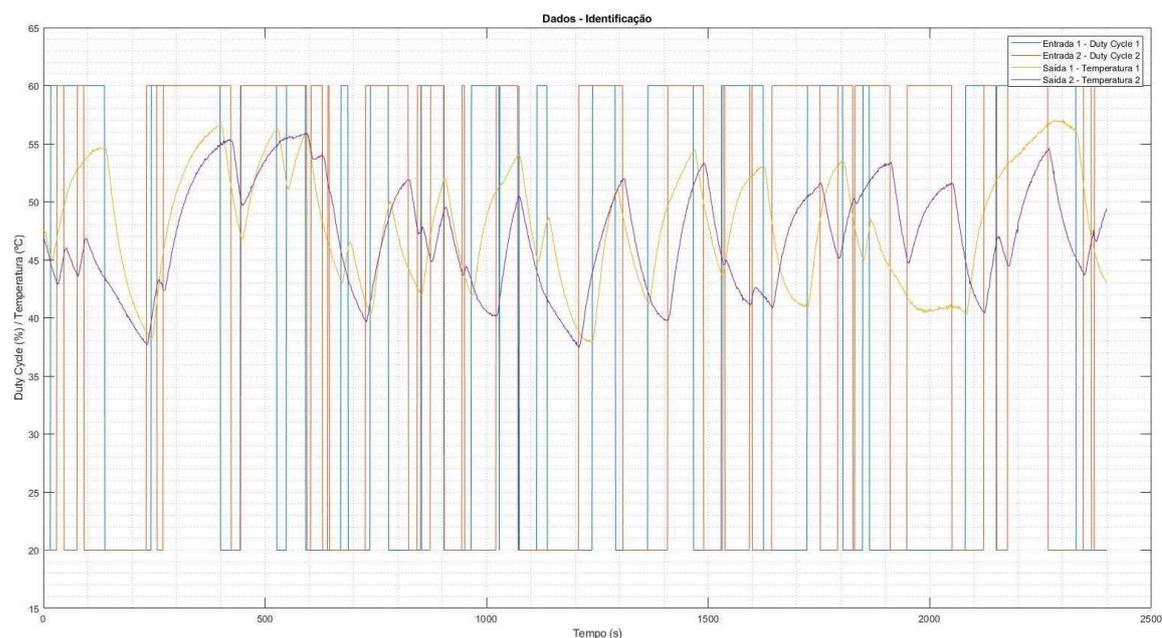
O teste de identificação foi projetado seguindo os critérios apresentado na seção 2.1.2. Os parâmetros do teste são apresentados a seguir.

- Duração: foi determinada uma duração de 10 vezes o maior tempo de acomodação verificado. Como a razão sinal-ruído é alta, foi escolhido um valor de certa forma médio entre 6 e 18 vezes o tempo de acomodação. Assim, a duração foi de 2400 (10×240) s;
- Forma do sinal:
 - Entrada 1: GBN com $ET_{sw} = \frac{t_{a1}}{3} = 80$ s;
 - Entrada 2: GBN com $ET_{sw} = \frac{t_{a2}}{3} = 60$ s.
- Amplitude do sinal: para as duas entradas foi determinado que o sinal comutaria entre os valores de ciclo de trabalho de 20% e 60%, com o ponto de operação sendo mais uma vez considerado como 40%;
- Número de entradas excitadas: foi definido que as duas entradas seriam excitadas simultaneamente e as duas saídas monitoradas também de forma simultânea para que fosse necessária a realização de apenas um teste de identificação. Os sinais para cada entrada foram garantidos como descorrelacionados a partir do uso de diferentes sementes quando da geração de cada um dos sinais GBN;
- Tempo de amostragem: 1 s.

É apresentado na Figura 13 o resultado do teste de identificação empregado. Estes foram os dados utilizados para a estimação dos parâmetros dos modelos.

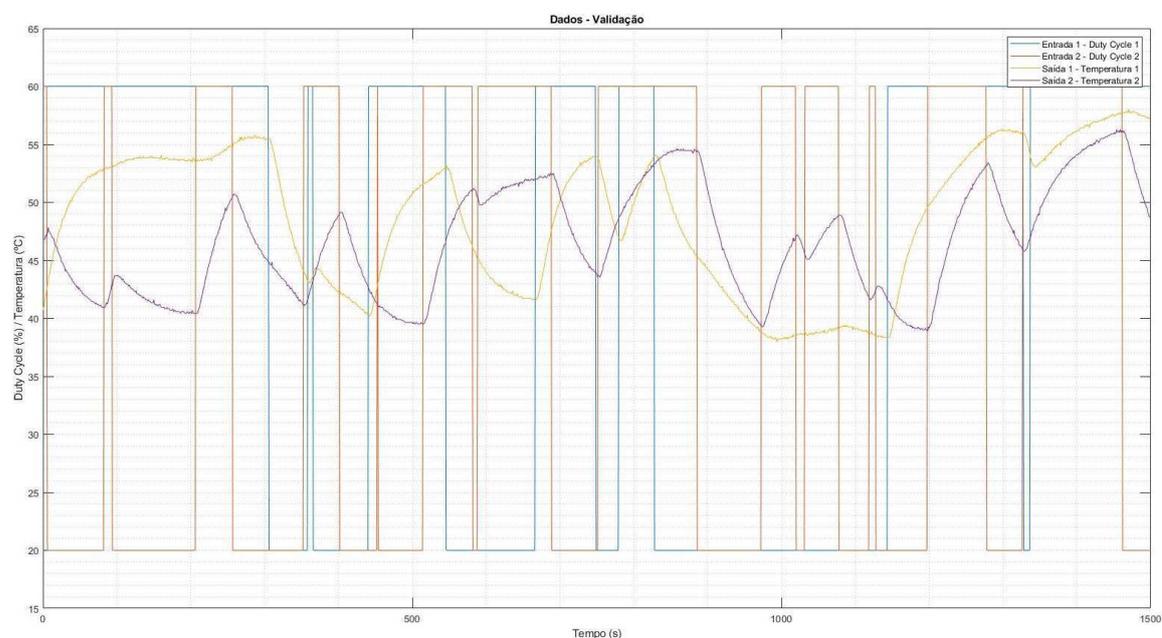
Também foi realizado outro teste, este com duração de 1500 s, para obtenção dos dados que seriam utilizados na etapa de validação cruzada dos modelos. Os demais parâmetros deste teste são iguais ao do teste de identificação. O resultado obtido é mostrado na Figura 14.

Figura 13 – Teste de identificação realizado na planta didática. Dados empregados para a identificação dos modelos.



Fonte: o próprio autor.

Figura 14 – Teste realizado na planta didática para obtenção dos dados que seriam empregados na etapa de validação cruzada dos modelos.



Fonte: o próprio autor.

5.2.3 Estimação dos Parâmetros

Para a estimação dos parâmetros, foi realizada previamente a correção de *offset* dos dados de entrada e de saída, sendo subtraídos os valores médios de cada um deles.

Tratando-se de um sistema TITO, a estimação foi feita de forma separada para dois submodelos TISO. A partir da visualização do comportamento do processo no teste preliminar, os dois submodelos foram considerados como de primeira ordem e foram levados em consideração atrasos de tempo de 15 s na dinâmica cruzada do sistema.

5.2.3.1 Estimação Utilizando a Técnica dos Mínimos Quadrados

A estimação utilizando a técnica dos mínimos quadrados foi feita, novamente, de acordo com a abordagem trazida na seção 3.1.1.1, de modo que foi utilizado um modelo ARX.

Foram obtidas as quatro funções de transferência, sendo, assim, montada a matriz de transferência da planta didática, dada por:

$$\mathbf{G}_{planta_{MQ-ARX}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{0,0080q^{-1}}{1 - 0,9842q^{-1}} & \frac{0,0012q^{-1}}{1 - 0,9842q^{-1}}q^{-15} \\ \frac{0,0012q^{-1}}{1 - 0,9872q^{-1}}q^{-15} & \frac{0,0065q^{-1}}{1 - 0,9872q^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

5.2.3.2 Estimação Utilizando a Técnica do Erro na Saída

A identificação utilizando a técnica do erro na saída foi feita, mais uma vez, de acordo com a abordagem trazida nas seções 3.2 e 3.2.1. O estimador dos mínimos quadrados obtido anteriormente foi utilizado como ponto de partida para as iterações. Foram realizadas 10 iterações.

As quatro funções de transferência obtidas formaram a matriz de transferência da planta didática. O resultado alcançado foi:

$$\mathbf{G}_{planta_{OE}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{0,0081q^{-1}}{1 - 0,9824q^{-1}} & \frac{0,0017q^{-1}}{1 - 0,9824q^{-1}}q^{-15} \\ \frac{0,0014q^{-1}}{1 - 0,9848q^{-1}}q^{-15} & \frac{0,0070q^{-1}}{1 - 0,9848q^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

5.2.4 Validação dos Modelos

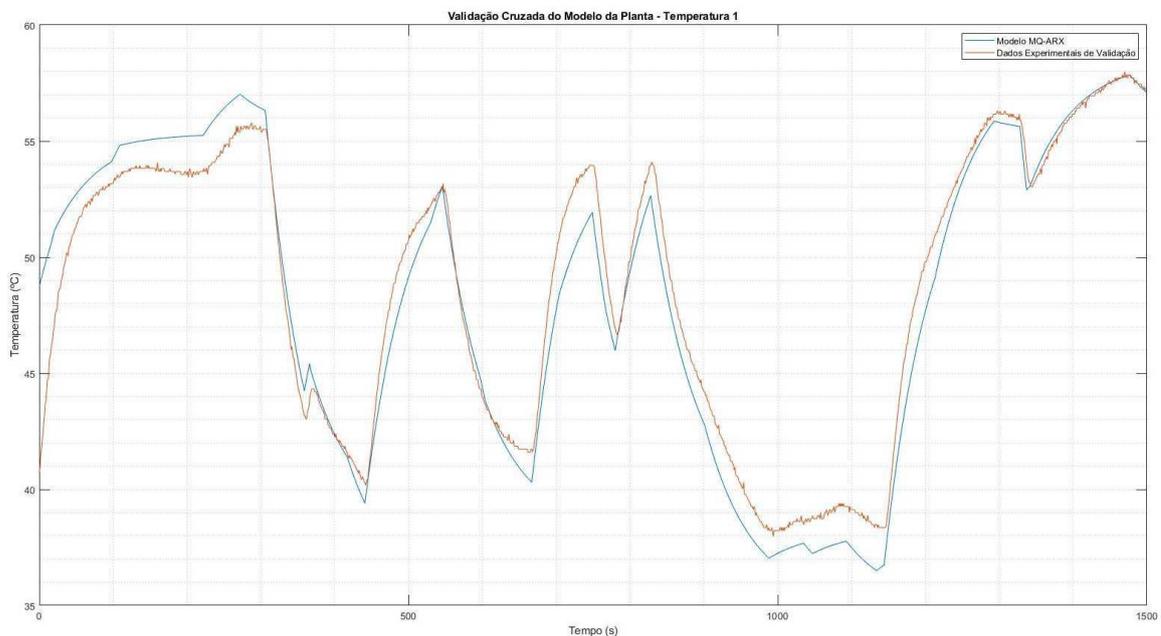
Conforme já comentado, foi utilizada a abordagem da validação cruzada, uma vez que foi realizado um teste a mais para a obtenção de dados para a validação diferentes

dos empregados na identificação. Para a etapa de validação, foram adicionados os valores médios dos dados experimentais de validação de saída aos dados de saída obtidos a partir dos modelos estimados. Isso foi feito para que fosse possível a comparação entre ambos.

5.2.4.1 Validação do Modelo Obtido a partir da Técnica dos Mínimos Quadrados

São apresentados nas Figuras 15 e 16 os resultados para as temperaturas 1 e 2, respectivamente, da etapa de validação cruzada do modelo da planta didática obtido a partir da técnica dos mínimos quadrados.

Figura 15 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 1. Modelo da planta identificado com a técnica dos mínimos quadrados.



Fonte: o próprio autor.

Também foi calculado o MSE para cada uma das saídas. Os valores obtidos são apresentados na Tabela 3.

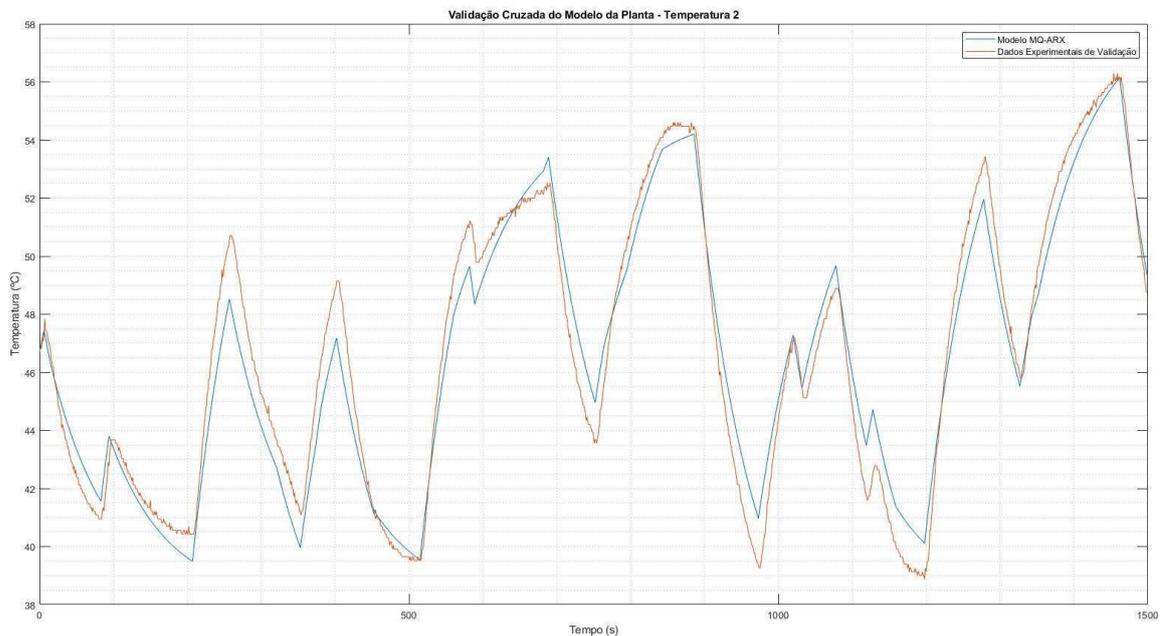
Tabela 3 – Valores obtidos do MSE para cada uma das saídas. Resultado para o modelo da planta identificado com a técnica dos mínimos quadrados.

Saída	Temperatura 1	Temperatura 2
MSE	2,2107	1,1256

Fonte: o próprio autor.

Baseado nestas duas análises, pode ser considerado que o modelo identificado a partir da técnica dos mínimos quadrados para a planta didática foi capaz de capturar a dinâmica desta.

Figura 16 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 2. Modelo da planta identificado com a técnica dos mínimos quadrados.



Fonte: o próprio autor.

5.2.4.2 Validação do Modelo Obtido a partir da Técnica do Erro na Saída

São exibidos nas Figuras 17 e 18 os resultados para as temperaturas 1 e 2, respectivamente, da etapa de validação do modelo da planta didática obtido a partir da técnica do erro na saída.

Também foi calculado o MSE para cada uma das saídas. Os valores obtidos são apresentados na Tabela 3.

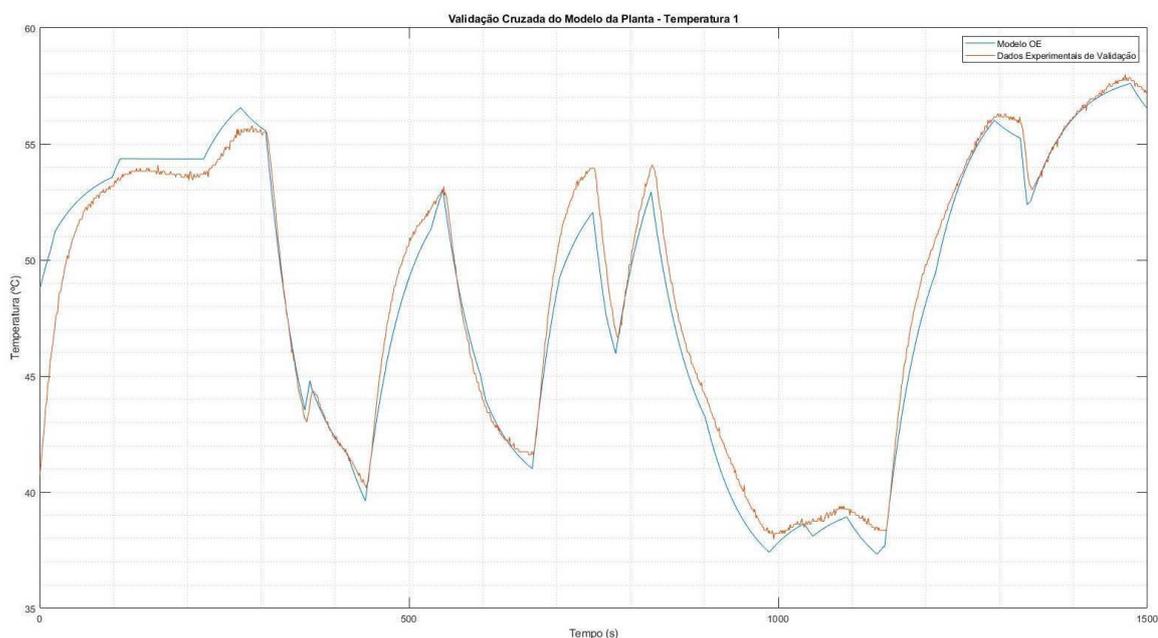
Tabela 4 – Valores obtidos do MSE para cada uma das saídas. Resultado para o modelo da planta identificado com a técnica do erro na saída.

Saída	Temperatura 1	Temperatura 2
MSE	1,4328	0,6843

Fonte: o próprio autor.

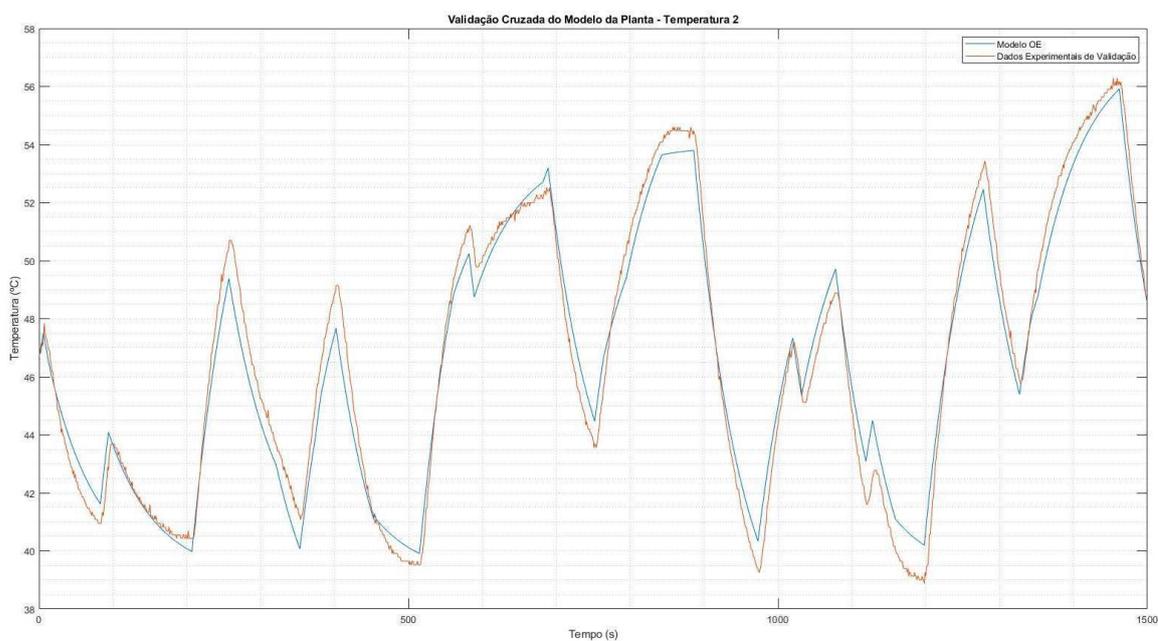
Baseado nestas duas avaliações, pode ser considerado que o modelo identificado a partir da técnica do erro na saída para a planta didática foi capaz de representar a dinâmica desta.

Figura 17 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 1. Modelo da planta identificado com a técnica do erro na saída.



Fonte: o próprio autor.

Figura 18 – Resultado da validação cruzada para a temperatura 2. Modelo da planta identificado com a técnica do erro na saída.

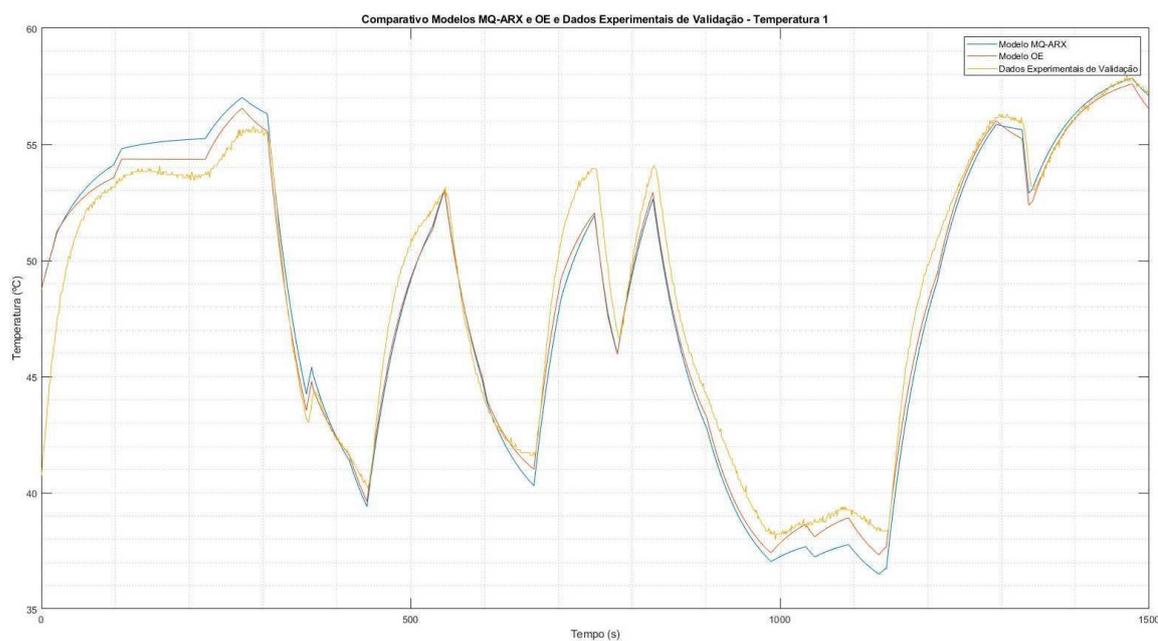


Fonte: o próprio autor.

5.2.5 Comparativo dos Modelos Obtidos

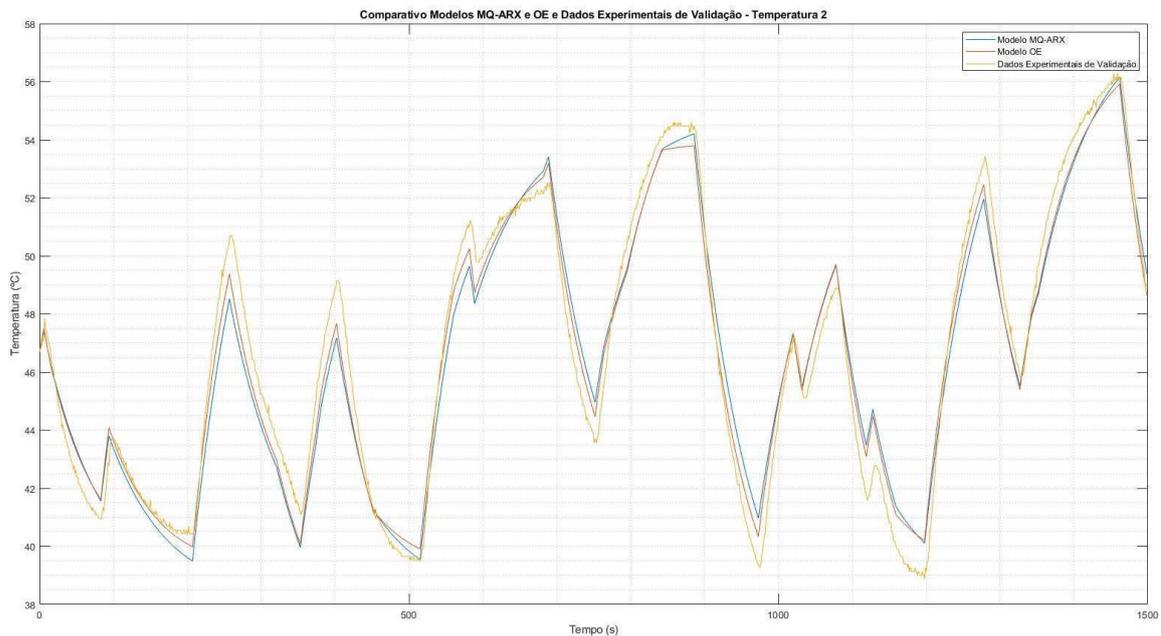
Para possibilitar a comparação entre os dois modelos, são apresentados nas Figuras 19 e 20 gráficos comparativos em relação à estimação das temperaturas 1 e 2, respectivamente, para cada um dos modelos obtidos. Além disso, a Tabela 5 traz um comparativo dos valores calculados do MSE para cada um dos modelos identificados para a planta.

Figura 19 – Gráfico comparativo das estimações obtidas da saída temperatura 1 para cada um dos modelos.



Fonte: o próprio autor.

Figura 20 – Gráfico comparativo das estimações obtidas da saída temperatura 2 para cada um dos modelos.



Fonte: o próprio autor.

Tabela 5 – Comparativo entre os valores encontrados do MSE para cada um dos modelos da planta.

Modelo	MSE para a Temperatura 1	MSE para a Temperatura 2
Mínimos Quadrados	2,2107	1,1256
Erro na Saída	1,4328	0,6843

Fonte: o próprio autor.

A partir da análise dos gráficos, apresentados nas Figuras 19 e 20, da estimação de ambas as saídas e também do comparativo, exposto na Tabela 5, entre os valores encontrados do MSE, conclui-se que o modelo identificado a partir do uso da técnica do erro na saída apresentou resultados mais satisfatórios.

O resultado obtido ratifica o que já era esperado, uma vez que o método do erro na saída minimiza o erro diretamente ligado à comparação entre os valores estimados pelo modelo e os reais. O critério de erro utilizado nesta técnica é mais intuitivo e está fortemente relacionado a aplicações práticas do modelo. Dessa forma, embora requira um maior esforço computacional e exista limitações relacionadas à sua implementação, a técnica do erro na saída ofereceu resultados melhores em relação à técnica dos mínimos quadrados.

6 Considerações Finais

Neste trabalho, foi apresentado o estudo e a aplicação de duas técnicas diferentes de identificação de sistemas. Foi tratado todo o procedimento relacionado à estimação de um modelo para um processo, desde a concepção dos testes que devem ser empregados até formas de validação do modelo identificado.

Foram detalhadas as técnicas de identificação dos mínimos quadrados e do erro na saída, trazendo à tona uma abordagem relacionada a sistemas MIMO, apresentando, assim, a estratégia que pode ser empregada para a utilização destas técnicas em sistemas com esta configuração de entradas e saídas.

Baseado nos conceitos apresentados, foi feita a aplicação das duas técnicas de identificação em uma planta didática, obtendo-se modelos que representam a dinâmica desta. Isto permitiu uma exemplificação prática do uso dos conhecimentos apresentados durante o trabalho, provando a relevância dos mesmos dentro do contexto de atuação de um engenheiro.

O trabalho em questão proporcionou ao aluno um contato mais direto com elementos práticos relacionados a conhecimentos adquiridos em diferentes disciplinas ao longo da graduação, como Controle Digital, e também em atividades extra curriculares, o que demonstra a importância de um trabalho desta natureza dentro do processo de formação de um engenheiro.

Diante disso, é possível concluir que foram atingidos os objetivos do trabalho e é esperado, com isso, que este deixe algum legado relacionado ao entendimento do domínio da identificação de sistemas, servindo, também, de motivação para que mais atividades sejam desenvolvidas na área.

Com relação a trabalhos futuros, podem ser implementadas outras técnicas de identificação, como as de subespaço de estados. Outra possibilidade é a utilização dos modelos estimados para o desenvolvimento de diferentes estratégias de controle para a planta didática.

Referências

- GEVERS, M.; LJUNG, L. *Optimal Experiment Designs with Respect to the Intended Model Application. Automatica*, International Federation of Automatic Control, v. 22, n. 5, p. 543–554, 1986. Citado na página 4.
- ISERMANN, R.; MUNCHHOF, M. *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Germany: Springer, 2011. 705 p. ISBN 978-3-540-78878-2. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.
- KEESMAN, K. J. *System Identification - An Introduction*. [S.l.]: Springer, 2011. 323 p. ISBN 978-0-85729-522-4. Citado na página 8.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1987. 519 p. ISBN 0-13-881640-9. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 3.
- ROFFEL, B.; BETLEM, B. *Process Dynamics and Control: Modeling for Control and Prediction*. England: John Wiley Sons Ltd, 2006. 560 p. ISBN 978-0-470-01663-3. Citado na página 1.
- TULLEKEN, H. J. A. F. *Generalized Binary Noise Test-signal Concept for Improved Identification-experiment Design. Automatica*, International Federation of Automatic Control, v. 26, n. 1, p. 37–49, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 6.
- ZADEH, L. A. *From Circuit Theory to System Theory. Proceedings of the IRE, IEEE*, v. 50, p. 856 – 865, 1962. Citado na página 2.
- ZHU, Y. *Multivariable System Identification for Process Control*. [S.l.]: Elsevier, 2001. 372 p. ISBN 978-0-08-043985-3. Citado 9 vezes nas páginas 1, 2, 3, 4, 6, 10, 14, 17 e 18.