UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Jarbas Dantas da Silva

CUITÉ - PB
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

JARBAS DANTAS DA SILVA

Cuité - PB

2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586e Silva, Jarbas Dantas da.

Equações diferenciais ordinárias e aplicações. / Jarbas Dantas da Silva – Cuité: CES, 2011.

70 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2011.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.
Co-orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Equações diferenciais. 2. Datação por Carbono-14. 3. Lei de Resfriamento de Newton. 4. Teorema de Picard I. Título.

CDU 514.745.8

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Jarbas Dantas da Silva

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 08 de dezembro de 2010.

Banca Examinadora

Maria Giselia Vasconcelos

Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)

Márcia Cristina Silva Brito

Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Co-Orientadora)

Severino Horácio da Silva

Prof. Severino Horácio da Silva

Agradecimentos

A Deus que proporcionou a minha existência, aos meus pais pela ajuda e afeto, às professoras Maria Gisélia Vasconcelos e Márcia Cristina Silva Brito por suas devidas orientações e ao professor Severino Horácio da Silva que mesmo diante de dificuldades deu sua importante contribuição como examinador do trabalho. Aos colegas José de Brito Silva e Jakcney Luan Azevedo de Sousa por compartilharem seus erros e acertos ao longo do curso. Por fim, a todos os amigos que me apoiaram, entre eles Fagner da Silva Lima e Vandeson dos Santos Silva pela confiança a mais decorrente de nossa amizade.

A Deus, meus pais e amigos que me ajudaram.

" A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isso fica sendo a minha última e mais elevada descoberta."

Isaac Newton

Resumo

As equações diferenciais consistem num campo de estudo matemático muito propício a novas descobertas. Nesse campo tanto a Matemática quanto a Física interagem sobretudo na história - o estudo do cálculo por Isaac Newton que abre as portas para novas pesquisas relacionadas assim como a dedicação às aplicações por Daniel Bernoulli foram de fundamental importância no desenvolvimento das Equações Diferenciais do século XVIII. Hoje em dia muitas modelagens de problemas práticos no campo científico resultam em equações diferenciais, entre elas destacamos a Lei do Resfriamento de Newton e a Datação do Carbono 14. Com relação à Existência e Unicidade de soluções para essas equações é destacada a importância do método das aproximações sucessivas de Picard que consiste na aproximação da solução de uma EDO a partir de uma sequência de funções. O estudo desse método numérico torna-se interessante quando percebe-se sua importância na própria demonstração do Teorema da Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem ou Teorema de Picard.

Palavras Chaves: Equações Diferenciais; Datação por Carbono-14; Lei de Resfriamento de Newton; Teorema de Picard.

Abstract

The differential equations are a mathematical field of study very conducive to new discoveries. In this field, both mathematics and physics interact mainly in the history - the study of calculus by Isaac Newton that opens doors for new researches related to the dedication as well as applications by Daniel Bernoulli were of fundamental importance in the development of Differential Equations of the eighteenth century. At present, many practical problems of modelling in science result in differential equations, among which we highlight the Newton's Law of Cooling and Carbon Dating 14. In relation to the Existence and Uniqueness of solutions to these equations it is highlighted the importance of the method of successive approximations of Picard consisting in the approximation of the solution of an ODE from a sequence of functions. The study of this numberic method becomes interesting when you realize your own importance in demonstration of the Existence and Uniqueness Theorem for Ordinary Differential Equations of First Order or theorem of Picard.

Keywords: Differential Equations; Dating carbon-14; Law of Cooling Newton; Picard's Theorem.

Sumário

Introdução

No presente trabalho será abordada a temática das **Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem** onde também será explorada a Existência e Unicidade de soluções para as mesmas. Sobre as equações diferenciais, de modo geral, o trabalho será desenvolvido com base na exploração de técnicas que tem por objetivo as soluções dessas EDs.

O objetivo principal será fazer o estudo do **Teorema de Picard**, ou Teorema da Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais de 1ª Ordem. Visa-se também a exploração do método das aproximações sucessivas de Picard, onde é possível criar uma sequência de funções que converge uniformemente para a solução de uma EDO de 1ª Ordem, método esse que foi considerado de fundamental importância na descoberta desse teorema.

Com relação às aplicações será feito o estudo da datação do carbono 14, que diz que a proporção de carbono 14 (radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante, quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando em carbono 12 a uma taxa que é proporcional a quantidade presente. As outras modelagens são referentes à Dinâmica Populacional e à Lei do Resfriamento de Newton onde vemos que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo $T(t)$ e a temperatura constante do meio ambiente T_m.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 Equações Diferenciais de 1ª Ordem

Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números, enquanto uma **equação diferencial** é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função $y(t)$, t é a variável independente e y é a variável dependente.

O movimento de um pêndulo simples de massa m e comprimento l é descrito pela função $\theta(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

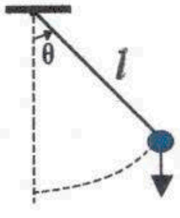

Figura 1.1: Pendulo de massa m e comprimento l

Nesta equação a incógnita é a função $\theta(t)$. Assim θ é a variável dependente e t é a variável independente.

As equações são classificadas quanto ao **tipo**, à **ordem** e à **linearidade**.

a) Quanto ao **tipo** uma equação diferencial pode ser **ordinária** ou **parcial**. Ela é ordinária se as funções incógnitas forem funções de somente uma variável. Caso contrário ela é parcial. Portanto as derivadas que aparecem na equação são derivadas totais. Por exemplo, as equações que podem ser escritas na forma

$$F(t, y', y'', ...) = 0,$$

em que y é função apenas de t, são equações diferenciais ordinárias.

Exemplo 1.1.0.1 *A equação*

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1$$

é um exemplo de equação diferencial ordinária.

Exemplo 1.1.0.2 *A equação*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial y}{\partial y} = u$$

é um exemplo de equação diferencial parcial.

b) Quanto à **ordem**, uma equação diferencial pode ser de de 1ª, 2ª,..., de n-ésima ordem dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação que pode ser escrita na forma

$$F(t,\ y',\ y'', ...,\ y^{(n)}) = 0.$$

Exemplo 1.1.0.3 *A equação*

$$y'' - y = 0,$$

é uma equação diferencial de 2^a ordem.

c) Quanto à **linearidade** uma equação diferencial pode ser **linear** ou **não linear**. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação.

Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n é uma equação que pode ser escrita como

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + ... + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} = f(t).$$

Exemplo 1.1.0.4 *A equação*

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+2y=\sin t$$

é um exemplo de equação linear.

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser colocadas nessa forma são não-lineares.

Exemplo 1.1.0.5 *A equação*

$$\frac{dy}{dt}+ty^2=0$$

não é linear.

Uma **solução (particular)** de uma equação diferencial ordinária de ordem n em um intervalo I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que as suas derivadas de ordem até n estão definidas no intervalo I e satisfazem a equação neste intervalo.

Exemplo 1.1.0.6 *Considere a equação*

$$ay''+by'+cy=0\ ,\ com\ a,\ b,\ c\ \in\mathbb{R}\ ,\ a\neq 0$$

tais que $b^2-4ac=0$.

A função $y(t)=e^{-\frac{b}{2a}t}$ *é solução desta equação para* $t\in\mathbb{R}$.

De fato,

$$y'(t)=\frac{-b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}$$

e

$$y''(t)=\left(\frac{-b}{2a}\right)\left(\frac{-b}{2a}\right)e^{\frac{-b}{2a}t}\Rightarrow y''(t)=\frac{b^2}{4a^2}e^{\frac{-b}{2a}t}.$$

Substituindo $y(t)$, $y'(t)$ *e* $y''(t)$ *no primeiro membro da equação obtemos*

$$\begin{aligned}ay''+by'+cy &= a\frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t}+b\left(\frac{-b}{2a}e^{\frac{-b}{2a}t}\right)+ce^{-\frac{b}{2a}t}\\ &= \left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)e^{-\frac{b}{2a}t}\\ &= \frac{-b^2+4ac}{4a}e^{-\frac{b}{2a}t}=0,\end{aligned}$$

pois, por hipótese $b^2-4ac=0$. *Assim* $y(t)=e^{-\frac{b}{2a}t}$, *é solução da equação.*

Note que a função constante $y = 0$ também satisfaz a equação diferencial dada para todo t real.

Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula em um intervalo I é em geral referida como **solução trivial** neste intervalo.

Obs: Nem toda equação diferencial que escrevemos possui necessariamente uma solução.

Exemplo 1.1.0.7 *A equação diferencial de primeira ordem*

$$(y')^2 + y^2 + 4 = 0$$

não possui soluções.

De fato, se a escrevemos na forma

$$(y')^2 + y^2 = -4$$

notamos que não existe função que, quando substituída na equação diferencial, faça com que a mesma reduza-se a uma identidade.

Uma solução para uma equação diferencial ordinária que pode ser escrita na forma $y = y(t)$ é chamada de **solução explícita**.

Exemplo 1.1.0.8 *Note que $y = t^4/16$ é uma solução para a equação não-linear*

$$\frac{dy}{dt} = ty^{1/2}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

*Portanto $y(t) = t^4/16$ é uma **solução explícita** para a equação diferencial dada.*

Dizemos que uma relação $G(t, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial ordinária em um intervalo I, se ela define uma ou mais soluções explícitas.

Exemplo 1.1.0.9 *Para $-2 < x < 2$, a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

De fato, queremos saber se $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial dada.

Derivando implicitamente com relação a x temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(-4) &= 0 \\ 2x + \frac{d}{dx}(y^2) &= 0 \\ 2x + \frac{d}{dx}(yy) &= 0. \end{aligned}$$

Efetuando a regra do produto teremos

$$\begin{aligned} 2x + y\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(y) &= 0 \\ 2x + 2y\frac{d}{dx}(y) &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Logo, $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial dada.

Além disso, as funções $y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ e $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$ são **soluções explícitas** da equação diferencial dada definidas no intervalo $(-2, 2)$.

Quando resolvemos uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem obtemos uma família de soluções que dependem de uma constante arbitrária.

Se toda solução particular puder ser obtida da família de soluções que encontramos por uma escolha apropriada da constante dizemos que a família de soluções é a **solução geral** da equação.

Exemplo 1.1.0.10 *A função $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação de primeira ordem $y' = y$.*

Para $c = 0$, -2 e 5, obtemos as soluções particulares $y = 0$, $y = -2e^x$ e $y = 5e^x$, respectivamente.

Definição 1.1.1 *Uma função diferenciável $y(t) = k$, onde k é uma constante tal que $f(t, k) = 0$ para todo t, é chamada de* ***solução singular*** *da equação.*

Exemplo 1.1.0.11 *A equação*

$$y' = 2t^2$$

tem a função $y(t) = 0$, como uma solução singular.

De fato, y é constante e $f(t) = 2t^2$ é nulo para $t = 0$, isto é, $f(0) = 0$.

Exemplo 1.1.0.12 *Uma família a um parâmetro de soluções para* $y' = ty^{1/2}$ *é dada por* $y = (t^2/4 + c)^2$.

Quando $c = 0$, a solução particular resultante é $y = t^4/16$. A solução trivial $y = 0$ é uma solução singular para a equação, pois ela não pode ser obtida da família através de uma escolha do parâmetro c.

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

As equações diferenciais de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(t, y, y') = 0.$$

Vamos estudar equações de equações de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1.1}$$

Uma solução (particular) da uma equação diferencial 1.1 em um intervalo I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que a sua derivada $y'(t)$ está definida no intervalo I e satisfaz a equação 1.1 neste intervalo.

O problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

é chamado problema de valor inicial (PVI).

Uma **solução do problema de valor inicial 1.2** em um intervalo I é uma função $y(t)$ que está definida neste intervalo, tal que a sua derivada também está definida neste intervalo e satisfaz 1.2.

Em termos geométricos, estamos procurando uma solução para a equação diferencial, definida em um intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (t_0, y_0) determinado a priori.

Exemplo 1.1.0.13 $y = ce^t$ *é uma família a um parâmetro de soluções para* $y' = y$ *no intervalo* $(-\infty, \infty)$. *Seja* $y(0) = 3$, *então substituindo* $t = 0$ *e* $y = 3$ *na família, obteremos* $3 = ce^0 = c$.

Logo, a função $y = 3e^t$ é uma solução para o problema de valor inicial (Veja a figura 1.2)

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 3. \end{cases}$$

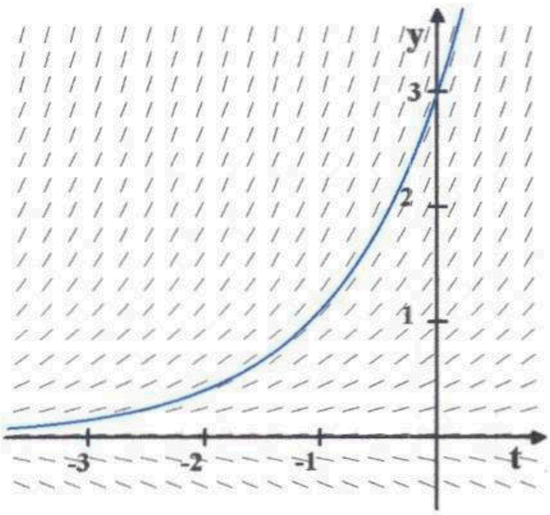

Figura 1.2: Solução de $y' = y$ correspondente à condição inicial $y(0) = 3$.

Exemplo 1.1.0.14 *A equação*

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$

pode ser resolvida por integração direta obtendo

$$y(t) = \int e^{3t} dt = \frac{e^{3t}}{3} + C$$

que é a solução geral da equação diferencial dada.

Para encontrarmos a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} &= e^{3t} \\ y(1/3) &= e/3 \end{cases}$$

substituímos $t = 1/3$ e $y = e/3$ na solução geral encontrada obtendo $C = 0$. Assim a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{3},$$

válida para $-\infty < t < \infty$, que é o maior intervalo em que a solução e sua derivada estão definidas.

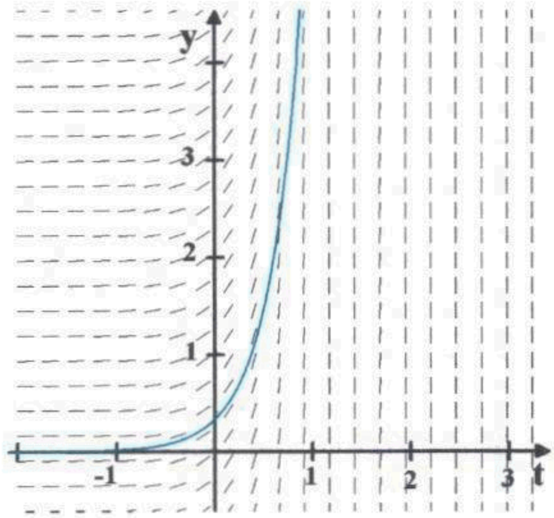

Figura 1.3: Solução do problema de valor inicial.

1.2 Equações Lineares de 1ª Ordem

As equações (diferenciais) lineares de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{1.3}$$

Se a função $p(t) = 0$ a equação 1.3 torna-se

$$\frac{dy}{dt} = q(t), \tag{1.4}$$

que é facilmente resolvida integrando-se ambos os lados. Assim a solução geral desta equação é dada por

$$y(t) = \int q(t)dt + C.$$

Exemplo 1.2.0.15 *A equação*

$$\frac{dy}{dt} = \sin(2t)$$

pode ser resolvida por integração direta obtendo-se a solução geral

$$y(t) = \int \sin 2t dt = -\frac{\cos(2t)}{2} + C.$$

Considere equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{1.5}$$

Vamos definir uma função auxiliar, $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$, de forma que ao multiplicarmos a equação 1.5 por esta função a equação obtida é uma equação linear com $p(t) = 0$, ou seja, do tipo 1.4, que já resolvemos anteriormente. Uma função com esta propriedade é chamada **fator integrante da equação linear.**

A solução geral de 1.5 é dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)q(t)dt + C\right).$$

Exemplo 1.2.0.16 *Considere a equação*

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t.$$

Temos que

$$p(t) = \frac{2}{t},$$

então o fator integrante é dado por

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln(t)} \Rightarrow \mu(t) = t^2.$$

Multiplicando-se a equação dada por $\mu(t)$, obtemos:

$$t^2\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}t^2y = t^2t \Rightarrow \frac{d}{dt}(t^2y) = t^3.$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$t^2y(t) = \frac{t^4}{4} + C,$$

daí,

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{C}{t^2},$$

onde C é uma constante arbitrária (veja a figura 1.4).

Exemplo 1.2.0.17 *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

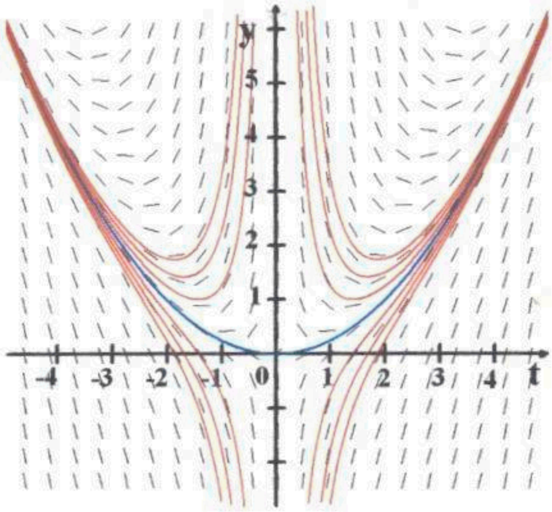

Figura 1.4: Soluções da equação correspondente à constante $C = 0$ (azul) e $C \neq 0$ (vermelho).

A equação é a mesma do exemplo anterior, dessa vez com a condição inicial $y(2) = 3$, *utilizamos, então, a mesma solução e calculamos* C *através da condição inicial dada, daí temos*

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t^4 + 4C}{4t^2} \\ \Rightarrow 3 &= \frac{(2)^4 + 4C}{4(2)^2} \Rightarrow C = 8. \end{aligned}$$

Logo, teremos

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{8}{t^2},$$

que é a solução do problema de valor inicial.

Note que a solução é válida no intervalo $(0, +\infty)$, *que é o maior intervalo contendo* $t = 2$ *em que a solução e sua derivada estão definidas. A solução teria a mesma expressão se a condição inicial fosse* $y(-2) = 3$, *mas o intervalo de validae da solução seria* $(-\infty, 0)$.

- Equações Separáveis

As equações separáveis são equações que podem ser escritas na forma

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.6}$$

A solução geral de 1.6 é dada implicitamente por

$$h(y(x)) = \int f(x)dx + C.$$

Podemos obter a solução da maneira mostrada a seguir.

Integrando-se em relação a x ambos os membros de 1.6 obtemos

$$\int g(y)\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C,$$

que pode ser reescrita como

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx + C.$$

Fazendo a substituição $y'dx = dy$ obtemos

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

As curvas que são soluções de uma equação separável podem ser vistas como curvas de nível da função

$$z = F(x, y) = h(y(x)) - \int f(x)dx.$$

Exemplo 1.2.0.18 *A equação diferencial* $y' = 1 + y^2$ *é separável, pois podemos escrever*

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = 1,$$

por integração, $\arctan(y) = x + c$ *ou* $y = \tan(x + c)$.

Exemplo 1.2.0.19 *Encontre a solução geral da equação diferencial*

$$2y\frac{dy}{dx} = -4x \text{ ou } 2yy' = -4x.$$

Integrando ambos os lados em relação a x *teremos*

$$\int 2yy'dx = \int -4xdx.$$

Substituindo $y'dx = dy$ temos

$$\begin{aligned}\int 2ydy &= \int -4xdx \\ \Rightarrow y^2 &= -2x^2 + C\end{aligned}$$

ou ainda

$$y^2 + 2x^2 = C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

As soluções são elipses(figura 1.5) que são as curvas de nível da função

$$z = F(x, y) = y^2 + 2x^2.$$

O gráfico da função $F(x, y) = y^2 + 2x^2$ é um paraboloide elíptico, como vemos na figura 1.6 .

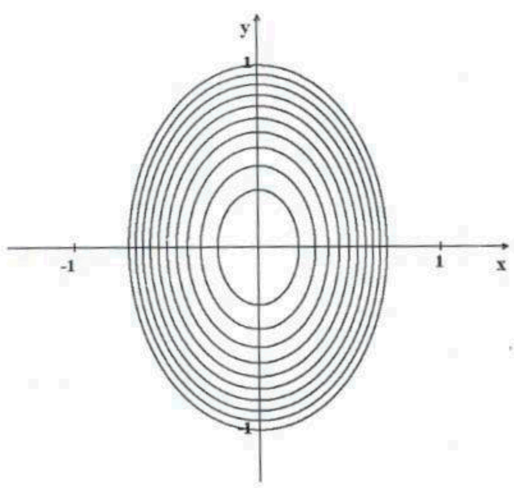

Figura 1.5: Soluções da equação diferencial.

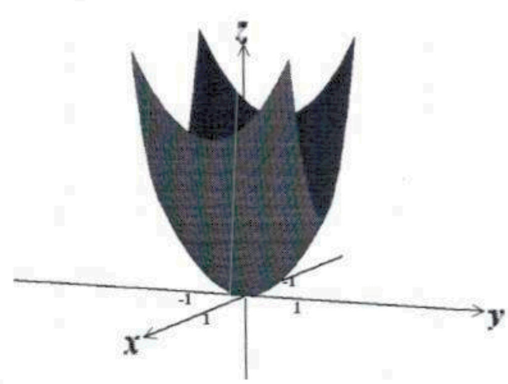

Figura 1.6: Parabolóide elíptico.

- Equações Exatas

  As **equações exatas** são equações que podem ser escritas na forma

  $$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.7}$$

  em que as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ satisfazem

  $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{1.8}$$

em um retângulo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < x < \beta, \gamma < y < \theta\}$, onde $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ são contínuas.

Nestas condições existe uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ e } N(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{1.9}$$

Exemplo 1.2.0.20 *Considere a equação diferencial*

$$\frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}y' - \frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} = 1.$$

Note que a equação pode ser escrita na forma 1.7, temos então

$$-\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 + \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}y' = 0.$$

Além disso, a equação acima satisfaz 1.8.

De fato,

$$M(x,y) = -\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \text{ e } N(x,y) = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2},$$

temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{4xy}{(1+2x^2)^2} \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{4xy}{(1+2x^2)^2}.$$

por outro lado

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}$, então a equação é exata.

Vamos encontrar uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y).$$

Integrando a primeira equação em relação a x obtemos

$$\psi(x,y) = \int \left(-\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1\right) dx = \int -\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} dx - x.$$

Por substituição

$$u = (1+2x^2) \Longrightarrow dx = \frac{du}{4x},$$

daí

$$-\frac{y^2}{2}\int \frac{1}{u^2} du \Longrightarrow -\frac{y^2}{2}\left(-u^{-1}\right) = \frac{y^2}{2(1+2x^2)},$$

logo

$$\psi(x,y) = \int \left(-\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \right) dx = \frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + h(y).$$

Substituindo-se a função $\psi(x,y)$ encontrada na equação

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}$$

obtemos

$$\frac{y}{1+2x^2} + \frac{dh}{dy} = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}.$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{dh}{dy} = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2} - \frac{y}{1+2x^2} = \frac{y+2x^2y}{1+2x^2} = y$$

que tem solução geral

$$h(y) = \frac{y^2}{2} + c_1.$$

Assim, a solução geral da equação é dada implicitamente por

$$\psi(x,y) = \frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + \frac{y^2}{2} + C.$$

Quando multiplicamos uma equação da forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1.10}$$

que não é exata por uma função $\mu(x,y)$ de forma que a nova equação seja exata, chamamos a função $\mu(x,y)$ de **fator integrante para equação exata.**

Exemplo 1.2.0.21 *Considere a equação*

$$2y(1+x^2)y' - \frac{2xy^2}{1+2x^2} = 1 + 2x^2. \tag{1.11}$$

Para esta equação

$$M(x,y) = -\frac{2xy^2}{1+2x^2} - 1 - 2x^2 \quad e \quad N(x,y) = 2y(1+x^2).$$

Assim,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{4xy}{(1+2x^2} \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy,$$

e portanto a equação não é exata. Multiplicando a equação diferencial dada por

$$\mu(x) = \frac{1}{1+2x^2},$$

obtemos

$$\frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}y' - \frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} = 1.$$

Que como já mostramos no exemplo 1.2.0.20, é exata.

1.3 Substituições em Equações de 1ª Ordem

As equações homogêneas de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como

$$\frac{dy}{dx} = F(y/x). \tag{1.12}$$

Ou seja, o lado direito da equação 1.12 apesar de depender de x e de y, depende apenas do quociente y/x. Seja

$$v = y/x.$$

Então

$$y = vx,$$

e derivando o produto vx em relação a x obtemos pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v.$$

Substituindo-se este valor de $\frac{dy}{dx}$ e $y/x = v$ na equação 1.12 obtemos a equação

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v)$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - y.$$

Multiplicando-se por

$$\frac{1}{x(F(v) - v)}$$

esta equação se torna

$$\frac{1}{F(v) - v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}, \tag{1.13}$$

que é uma equação separável. Podemos encontrar a solução geral desta equação usando a técnica apresentada na seção 1.2.

Depois de encontrada a solução geral da equação 1.13 devemos substituir

$$v = y/x$$

para encontrar a solução geral de 1.12.

- Equações de Bernoulli

  As **equações de Bernoulli** são equações da forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \tag{1.14}$$

  em que n é um número real qualquer. Para $n = 0$ e $n = 1$ esta equação é linear. Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$, fazemos a mudança de variáveis $v = y^{1-n}$.

  Multiplicando-se a equação de Bernoulli 1.14 por y^{-n} obtemos

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x). \tag{1.15}$$

  Derivando $v = y^{n-1}$ em relação a x obtemos, pela regra da cadeia

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

  de onde obtemos que

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}.$$

  Fazendo as substituições $y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}$ e $y^{1-n} = v$ em 1.15 obtemos

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

  que é uma equação linear. Depois de encontrada a solução geral desta equação, devemos substituir $v = y^{1-n}$ para encontrar a solução geral de 1.14.

- Equações de Ricatti

  As **Equações de Ricatti** são equações da forma

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2. \tag{1.16}$$

  Sendo conhecida uma solução particular da equação $y_1(x)$, a equação de Ricatti pode ser resolvida fazendo a substituição

$$y(x) = y_1(x) + v(x). \tag{1.17}$$

  Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx}. \tag{1.18}$$

Substituindo 1.17 e 1.18 em 1.12 obtemos

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx} = p(x) + q(x)(y_1 + v) + r(x)(y_1 + v)^2.$$

Usando o fato de que $y_1(x)$ é solução da equação obtemos

$$\frac{dv}{dx} - (q(x) + 2y_1(x)r(x))v = r(x)v^2.$$

que é uma equação de Bernoulli com $n = 2$.

Exemplo 1.3.0.22 *Considere a equação*

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2,$$

verifiquemos que $y_1 = -e^x$ é uma solução desta equação.

De fato, fazendo a substituição

$$y(x) = -e^x + v(x)$$

obtemos a equação

$$\frac{dv}{dx} - v = v^2,$$

ou ainda,

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + v \Rightarrow \frac{1}{v^2 + v}\frac{dv}{dx} = 1. \tag{1.19}$$

Decompondo $\frac{1}{v^2 - v}$ em frações parciais temos

$$\frac{1}{v^2 + v} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1} \Rightarrow 1 = A(v+1) + Bv.$$

Substituindo $v = 0,\ -1$ obtemos $A = 1$ e $B = -1$. Assim a equação 1.19 pode ser

$$\frac{d}{dx}(\ln|v| + ln|v+1|) = 1,$$

integrando obtemos

$$\ln\left|\frac{v}{v+1}\right| = x + C_1.$$

Aplicando-se a exponencial obtemos

$$\frac{v}{v+1} = \pm e^{C_1}e^x = Ce^x,$$

substituindo-se $v = y + e^x$ obtemos que a solução da equação é dada implicitamente por

$$\frac{y + e^x}{y + 1 + e^x} = Ce^x.$$

- Outras substituições

Exemplo 1.3.0.23 *Considere a equação*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y-x-1}.$$

Vamos resolvê-la fazendo a substituição $v = y - x$. O que implica que

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} + 1.$$

Substituindo-se $v = y - x$ e $y' = v' + 1$ na equação obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + 1 &= \frac{v}{v-1} \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{v-1} \\ (v-1)\frac{dv}{dx} &= 1 \end{aligned}$$

que é uma equação separável cuja solução é

$$\frac{v^2}{2} - v = x + c.$$

Substituindo-se de volta $v = y - x$ obtemos que a solução da equação é dada implicitamente por

$$\frac{(y-x)^2}{2} - y = c.$$

1.4 Notas Históricas - Equações Diferenciais (Século XIX - XX)

As aplicações físicas das equações diferenciais estimulam o estudo aprofundado desse conteúdo, começa então no século XIX a exploração de métodos mais "complexos" para a obtenção de soluções para esse tipo de equação: "No século XIX, iniciou-se a investigação de questões teóricas de existência e unicidade, assim como o desenvolvimento de métodos menos elementares, como os baseados em expansão em séries de potências. Esses métodos encontram seu ambiente natural no plano complexo. Por causa disso, eles foram estimulados pelo desenvolvimento mais ou menos simultâneo, que, de certa forma, estimularam, da teoria de funções analíticas complexas. As equações diferenciais parciais começaram, também, a ser estudadas intensamente, à medida que se tornava claro seu papel crucial em física matemática. Com isso, muitas funções, soluções de certas equações diferenciais ordinárias, começaram a aparecer em muitas situações e foram estudadas exaustivamente. Conhecidas, coletivamente, como funções transcendentais, muitas delas estão associadas a nomes de matemáticos, incluindo Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev e Hankel, entre outros." (BOYCE, p. 16).

Os métodos de aproximações começam a surgir, porém a tecnologia do início do século XX era pouco desenvolvida fazendo com que cálculos extensos fossem realizados de forma manual ou com a ajuda de equipamentos simples. "As inúmeras equações diferenciais que resistiram a métodos analíticos levaram à investigação de métodos de aproximação numérica. Por volta de 1900 já haviam sido desenvolvidos métodos efetivos de integração numérica, mas sua implementação estava severamente prejudicada pela necessidade de se executar os cálculos a mão ou com equipamentos computacionais muito primitivos. Nos últimos 50 anos, o desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos e versáteis aumentou muito a gama de problemas que podem ser investigados, de maneira efetiva, por métodos numéricos. Durante esse mesmo período, foram desenvolvidos integradores numéricos extremamente refinados e robustos, facilmente disponíveis." (BOYCE, p. 16).

O estudo de comportamentos de soluções torna-se possível e acessível nos últimos anos. As equações não-lineares passam a ganhar mais atenção em métodos geométricos que visam a manipulação gráfica. "Uma outra característica das equações diferenciais no século XX foi a criação de métodos geométricos ou topológicos, especialmente para equações não-lineares. O objetivo é compreender, pelo menos qualitativamente, o comportamento de soluções de um ponto de vista geométrico, assim como analítico. Se há necessidade de maiores detalhes, isso pode ser obtido, em geral, usando-se aproximações numéricas [...]. Nos últimos anos, essas duas tendências se juntaram. Computadores e, especialmente, computação gráfica, trouxeram um novo ímpeto ao estudo de sistemas de equações diferenciais não-lineares." (BOYCE, p. 16).

Capítulo 2

O Teorema de Picard

2.1 Existência e Unicidade de Soluções

Charles Émile Picard(1856-1941) Picard foi um dos proeminentes matemáticos franceses do final do século passado e começo desse século. Fez significativas contribuições nas áreas de equações diferenciais e variáveis complexas. Em 1889, Picard lecionou na Universidade Clarck em Worcester, estado de Massachusetts, Estados Unidos.

1. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} |y'| + |y| &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

   não tem solução, pois $y = 0$ (isto é, $y(x) = 0$, $\forall x$) é a única solução da equação diferencial ordinária.

2. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= 2x \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

   tem precisamente uma solução, isto é, $y = t^2 + 1$.

3. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} ty' &= y - 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

tem infinitas soluções, isto é, $y = 1 + cx$, onde c é uma constante arbitrária, pois $y(0) = 1$ para todo c.

Destes exemplos vemos que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}$$

pode **não ter solução**, **precisamente um solução**, ou **mais que uma solução**. Estes fatos sugerem as seguintes duas questões fundamentais.

Existência

1. Sob que condição um problema de valor inicial tem pelo menos uma solução (ou mais que uma solução)?

Unicidade

1. Quando podemos estar certos de que existe precisamente uma única solução?

Dada uma aplicação $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, definida em cada ponto (t, y) de um aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que

$$y' = f(t, y)$$

é a **equação diferencial ordinária em** $\mathbb{R}^n$ definida por f.

Definição 2.1.1 *Uma função diferenciável* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *chama-se* ***solução*** *da equação*

$$y' = f(t, y) \tag{2.1}$$

no intervalo I se:

i) o gráfico de φ em I, isto é, $\{(t, \varphi)); \ t \in I\}$ está contido em Ω e

ii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

Sob hipóteses bem gerais sobre f - por exemplo se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em Ω - existe uma e só uma solução φ de 2.1 num intervalo que contém t_0 e tal que $\varphi(t_0) = y_0$.

Uma tal φ será chamada de **solução do problema com dados iniciais** (t_0, y_0) para a equação 2.1. Este problema é também conhecido como **problema de Cauchy** e será denotado abreviadamente por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Observação. A equação 2.2 é equivalente à **equação integral**

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Lema 2.1.0.1 *Seja a equação*

$$y' = f(t,y) \tag{2.3}$$

onde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é contínua no aberto* Ω. *Seja* $(t_0, y_0) \in \Omega$. *Nestas condições,* $y = y(t)$, $t \in I$, *será solução satisfazendo a condição inicial* $y(t_0) = y_0$, *com* y_0 *no intervalo* I, *se, e somente se,*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

para todo $t \in I$.

Prova

Se $y = y(t)$, $t \in I$, é solução de 2.3, então

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

para todo t em I.

Integrando ambos os lados da igualdade temos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} y'(s)ds &= \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \\ y(t) - y(t_0) &= \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Como estamos supondo $y(t_0) = y_0$, temos que

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

para todo t em I.

Reciprocamente, se

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \; t \in I,$$

então teremos

$$y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, y(s))ds \Rightarrow y(t_0) = y_0;$$

satisfazendo, assim, a condição inicial.

Além disso

$$y'(t) = (y_0)' + \left(\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right)',$$

que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$y'(t) = f(t, y(t)), \; t \in I.$$

■

O Método das Aproximações Sucessivas

O método das aproximações sucessivas de Picard sugere a idéia de encontrar funções o mais próximo possível da solução do problema de valor inicial.

Definição 2.1.2 ***(Sequência de Picard)*** *Considere a equação diferencial*

$$y' = f(t, y)$$

com a condição inicial $y(t_0) = y_0$. Seja φ_0 uma função constante definida no intervalo I, com $t_0 \in I$, e dada por $\varphi_0(t) = y_0$. Considere a sequência definida de funções

$$\varphi_0, \; \varphi_1, \; \varphi_2, \cdots \varphi_n, \cdots$$

definidas em I. Suponhamos que tais funções sejam obtidas pelo o seguinte processo de recorrência:

$$\varphi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))ds, \ n \geq 0.$$

Uma tal sequência denomina-se, então, ***sequência de Picard*** *para o problema*

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Exemplo 2.1.0.24 *Determine a sequência de Picard para o problema $y' = y$, $y(0) = 1$. Verifique que tal sequência converge para a solução $y = e^t$.*

Solução

Seja

$$\varphi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))ds, \ n \geq 0$$

Tendo em vista a condição inicial $y(0) = 1$, temos

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t \varphi(s)ds.$$

Se a aproximação inicial é $\varphi_0(t) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= 1 + \int_0^t 1ds = 1 + t, \\ \varphi_2(t) &= 1 + \int_0^t 1 + sds = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \\ \varphi_3(t) &= 1 + \int_0^t 1 + s + \frac{s^2}{2}ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

As equações anteriores sugerem o termo geral

$$\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + ... + \frac{t^n}{n!}, \ \forall n \geq 1.$$

Assim, $\varphi_n(t)$ pode ser dado pela n-ésima soma parcial da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Por ser uma série de Taylor temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

Logo

$$n \to \infty \Rightarrow \varphi_n(t) \to e^t.$$

Lema 2.1.0.2 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω aberto, uma função contínua e $(t_0, y_0) \in \Omega$. Sendo Ω aberto, existem $a > 0$ e $b > 0$ tais que o retângulo*

$$Q = \{(t, y) \mid t_0 - a \leq t \leq t_0 + a,\ y_0 \leq y \leq y_0 + b\}$$

está contido em Ω. Se $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em Ω existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

quaisquer que sejam (t, y_1) e (t, y_2) no retângulo Q.

Prova:

Se $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em Ω também é contínua no retângulo Q. Daí, pelo teorema de Weierstrass, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq K$$

para todo (t, y) em Q. Sejam (t, y_1) e (t, y_2) dois pontos quaisquer de Q. Temos, pelo Teorema do Valor Médio que existe um s entre y_1 e y_2 tal que

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, s)(y_1 - y_2).$$

Assim,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

■

Exemplo 2.1.0.25 *A função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é limitada (com $K = 2$) no quadrado $|x| < 1$, $|y| > 1$.*

Exemplo 2.1.0.26 *A função* $f(x,y) = \tan(x+y)$ *não é limitada para* $|x+y| < \pi/2$.

Existem todos os elementos da sequência $\{\varphi_n\}$?

Os elementos da sequência de Picard não podem, normalmente, ser calculados explicitamente. O "perigo" é que, em alguma etapa, por exemplo, $n = k$, o gráfico de $y = \varphi_k(t)$ contenha pontos fora do retângulo Q. Portanto, no próximo passo - o cálculo de φ_{k+1} - seria necessário calcular a função $f(t,y)$ em pontos onde não sabemos se ela é contínua, ou mesmo existe. Assim, o cálculo de φ_{k+1} poderia ser impossível. Para evitar esse "perigo", pode ser necessário restringir t a um intervalo menor do que $|t| \leq a$.

Exemplo 2.1.0.27 *Suponha que* f *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sejam contínuas apenas no retângulo* $R : |t| \leq a,\ |y| \leq b$ *e* $\varphi_n(0) = 0,\ \forall n$. *Encontre o menor intervalo onde todos os elementos da sequência* $\{\varphi_n(t)\}$ *existem.*

Solução

Sabemos que uma função contínua em uma região fechada e limitada é limitada. Portanto f é limitada em Q; logo existe um número positivo M tal que $|f(t,y)| \leq M$, $(t,y) \in Q$.

Como $f(t, \varphi_k(t))$ é igual a $\varphi'_{k+1}(t)$, o coeficiente angular máximo para as retas tangentes ao gráfico da função $y = \varphi'_{k+1}(t)$ é M.

Como esse gráfico contém $(0,0)$, ele tem que está contido nas regiões triangulares sombreadas nas figuras 2.1 e 2.2.

Portanto, o ponto $(t, \varphi_{k+1}(t))$ permanece em Q, pelo menos enquanto Q contiver as regiões triangulares, o que ocorre se $|t| \leq b/M$.

Vamos considerar o retângulo $Q : |t| \leq r,\ |x| \leq b$, onde r é igual ao menor dos elementos a ou b/M. Com esta restrição, todos os elementos da sequência $\{\varphi_n(t)\}$ existem.

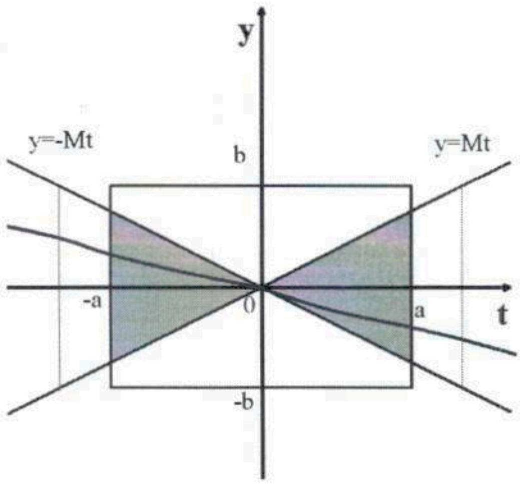

Figura 2.1: $b/M > a$

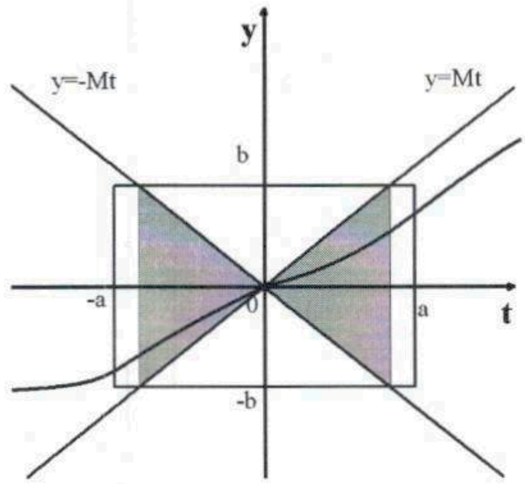

Figura 2.2: $b/M < a$

Exemplo 2.1.0.28 *Considere o problema de valor inicial*

$$y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0$$

e considere o retângulo $R : |t| < 5,\ |y| < 3$. *Então* $a = 5$, $b = 3$, *e* $|f(t,y)| = |1 + y^2| \leq M = 10$ *e* $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2|y| \leq K = 6$, $\alpha = \frac{b}{M} = 0,3 < a$.

Obs:

A solução deste problema é $y = \tan x$. Esta solução é descontínua em $\pm\pi/2$, e não existe solução contínua válida no intervalo inteiro $|t| < 5$.

Lema 2.1.0.3 *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω *aberto e seja* $(t_0, y_0) \in \Omega$. *Sejam* $a > 0$ *e* $b > 0$ *tais que o retângulo*

$$Q = \{(t,y) \mid t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, y_0 \leq y \leq y_0 + b\}$$

esteja contido Ω. *Seja* $M > 0$ *tal que*

$$|f(t,y)| \leq M, \text{ em } Q.$$

Seja $r > 0$, *tal que*

$$r \leq a \text{ e } Mr \leq b.$$

Seja $y_{n-1} = y_{n-1}(t)$, $t_0 - r \leq t \leq t_0 + r$, *contínua cujo gráfico esteja contido em* Q; *seja*

$$y_n = y_n(t),\ t_0 - r \leq t \leq t_0 + r,$$

dada por

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds.$$

Nestas condições, o gráfico de $y_n = y_n(t)$ também está contido em Q.

Prova:

Para provar que o gráfico de y_n está contido em Q, é suficiente provar que

$$|y_n - y_0| \leq b$$

para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$. Temos, para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$,

$$y_n(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds,$$

daí

$$|y_n(t) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(s))| \, ds \right|.$$

Como, para todo $s \in [t_0 - r, t_0 + r]$,

$$(s, y_{n-1}(s)) \in Q,$$

resulta,

$$|f(s, y_{n-1}(s))| \leq M,\ \forall s \in [t_0 - r, t_0 + r].$$

Logo, temos

$$|y_n(t) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M ds \right|$$

para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$. Assim, para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$

$$|y_n(t) - y_0| \leq M|t - t_0|$$

e, portanto,

$$|y_n(t) - y_0| \leq Mr \leq b.$$

■

Definição 2.1.3 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aberto e seja $(t_0, y_0) \in \Omega$. Considere a função constante*

$$y_0(t) = y_0, t \in [t_0 - r, t_0 + r].$$

A função $y_0(t) = y_0$ é contínua e seu gráfico está contido em Q. Consideremos, a sequência de funções $(y_n(t))_{n \geq 0}$ definidas em $[t_0 - r, t_0 + r]$ e dadas por

$$y_0(t) = y_0$$

e

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds, \ n \geq 1.$$

(Observe que, para todo $n \geq 1$, o gráfico de y_n está contido em Q). Tal sequência de funções denomina-se sequência de Picard para o problema

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

2.2 Teorema de Existência

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aberto e seja $(t_0, y_0) \in \Omega$. Suponhamos que f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ sejam contínuas em Ω. Sejam r e Q como no lema 2.1.0.3. Seja K como no lema 2.1.0.2. Devemos provar que a sequência de Picard

$$\begin{cases} y_0(t) &= y_0 \\ y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds \end{cases} \tag{2.4}$$

converge uniformemente em $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Consideremos a série

$$\begin{aligned} y_n(t) &= y_0(t) + [y_1(t) - y_0(t)] + ... + [y_n(t) - y_{n-1}(t)] \\ &= y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [y_n(t) - y_{n-1}(t)]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Observe que, para todo $n \geq 1$,

$$y_n(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{n} [y_k(t) - y_{k-1}(t)].$$

Prove que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [y_n(t) - y_{n-1}(t)] \tag{2.6}$$

é uniformemente convergente em $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Deste modo, a sequência 2.4 será uniformemente convergente em $[t_0 - r, t_0 + r]$ se a série 2.5 o for.

Prova:

Como y_1 e y_2 são contínuas no intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$ teremos que $|y_1(t) - y_0(t)|$ admite ponto de máximo. Daí, existe um $M > 0$ onde

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq M,$$

em $[t_0 - r, t_0 + r]$. Segue do lema 2.1.0.2 que

$$|f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))| \leq K|y_n(s) - y_{n-1}(s)| \tag{2.7}$$

para todo $s \in [t_0 - r, t_0 + r]$.

Temos

$$y_2(t) - y_1(t) = \int_{t_0}^{t} [f(t, y_1(s)) - f(s, y_0(s))]ds.$$

Daí, para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$,

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(t, y_1(s)) - f(s, y_0(s))]ds \right|, \\ |y_2(t) - y_1(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(t, y_1(s)) - f(s, y_0(s))|\, ds \right|; \end{aligned}$$

tendo em vista 2.7,

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq K \left| \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0(s)|\, ds \right|$$

e, portanto,

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq MK|t - t_0| \tag{2.8}$$

para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$.

Sabemos que M é o valor máximo de $|y_1(s) - y_0(s)|$ em $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$ e portanto, neste intervalo,

$$|y_1(s) - y_0(s)| \leq M.$$

Temos

$$y_3(t) - y_2(t) = \int_{t_0}^{t} [f(t, y_2(s)) - f(s, y_1(s))] ds.$$

Segue que, para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$,

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} K \, |y_2(s) - y_1(s)| \, ds \right|$$

e, tendo em vista 2.8,

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq MK^2 \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0| \, ds \right|.$$

Resolvendo a integral

$$\int_{t_0}^{t} |s - t_0| \, ds$$

considerando $u = s - t_0$, temos

$$\begin{cases} u = 0 & \text{se} \quad s = t_0 \\ u = t - t_0 & \text{se} \quad s = t. \end{cases}$$

além disso $du = ds$. Substituindo teremos

$$\int_{0}^{t-t_0} |u| du = \int_{0}^{t-t_0} u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_{0}^{t-t_0}, \ t > t_0.$$

Portanto, para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$,

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq MK^2 \frac{|t - t_0|^2}{2}. \tag{2.9}$$

Da mesma forma, temos

$$|y_4(t) - y_3(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} K \, |y_3(s) - y_2(s)| \, ds \right|,$$

de 2.9

$$|y_4(t) - y_3(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} K \left| MK^2 \frac{|s - t_0|^2}{2} \right| ds \right|,$$

de modo análogo teremos

$$|y_4(t) - y_3(t)| \leq MK^3 \frac{|t - t_0|^3}{6}. \tag{2.10}$$

Calculando $|y_5(t) - y_4(t)|$ teremos

$$|y_5(t) - y_4(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} K \, |y_4(s) - y_3(s)| \, ds \right|,$$

de 2.10, temos que

$$|y_5(t) - y_4(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} K \left| MK^3 \frac{|s - t_0|^3}{6} \right| ds \right|,$$

consequentemente

$$|y_5(t) - y_4(t)| \leq MK^4 \frac{|t - t_0|^4}{24}.$$

Esses resultados sugerem o termo geral

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq MK^{n-1} \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$. Como, neste intervalo, $|t - t_0| \leq r$, segue que

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq M \frac{(Kr)^{n-1}}{(n-1)!}$$

para todo natural $n \geq 1$ e para todo t no intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$. Temos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(Kr)^{n-1}}{(n-1)!}$$

é convergente. Logo, pelo teste de Weierstrass, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [y_n(t) - y_{n-1}(t)]$$

é uniformemente convergente em $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Segue que a sequência de Picard

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds \tag{2.11}$$

converge uniformemente em $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Exemplo 2.2.0.29 *Seja $y = y(t)$, $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, dada por*

$$y(t) = \lim_{n \to +\infty} y_n(t) \tag{2.12}$$

Prove que, para todo t no intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds.$$

Prova:

De 2.11, para todo t no intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$,

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n \to +\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

devido a convergência uniforme da sequência, temos

$$y(t) = \lim_{n \to +\infty} y_n(t)$$

daí

$$y(t) = y_0 + \lim_{n \to +\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds. \tag{2.13}$$

Para permutar-mos os símbolos $\lim\limits_{n \to +\infty}$ e $\int_{t_0}^{t}$ precisaremos provar a convergência uniforme, em $[t_0 - r, t_0 + r]$, da sequência

$$f(s, y_{n-1}(s)),\ n \geq 1.$$

Podemos notar que o gráfico da função $y = y(t)$, $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, dada em 2.12, está contido no retângulo Q.

De 2.7, temos que

$$|f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y(s))| \leq K|y_{n-1}(s) - y(s)|$$

para todo $n \geq 1$ e para todo s no intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$. Da convergência uniforme de $y_{n-1}(s)$ a $y(s)$, temos a convergência uniforme de $f(s, y_{n-1}(s))$ a $f(s, y(s))$. Tendo em vista 2.13, segue que

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\lim_{n \to +\infty} f(s, y_{n-1}(s)) \right] ds$$

como $\lim\limits_{n \to +\infty} f(s, y_{n-1}(s)) = f(s, y(s))$,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,\ \forall t \in [t_0 - r, t_0 + r].$$

Segue do lema 2.1.0.1 anterior que $y = y(t)$, $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, é solução da equação diferencial

$$y' = f(t, y)$$

e satisfaz a condição inicial $y(t_0) = y_0$. Demonstramos, assim, o Teorema seguinte.

Teorema 2.2.0.1 *(de existência) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aberto e seja $(t_0, y_0) \in \Omega$. Suponhamos que f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ sejam contínuas em Ω. Nestas condições, a equação*

$$y' = f(t, y)$$

admite uma solução $y = y(t)$ definida em um intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$ e satisfazendo a condição inicial $y(t_0) = y_0$.

2.3 Teorema de Unicidade

Os problemas de valor inicial que possuem mais de uma solução são claramente indesejáveis nas aplicações. Portanto, é importante encontrar qual é exatamente a razão para qual o problema de valor inicial tem mais de uma solução.

Exemplo 2.3.0.30 *O problema de valor inicial*

$$y' = 3y^{2/3}, \ y(0) = 0$$

tem no mínimo duas soluções: $\varphi_1(t) = 0$ e $\varphi_2(t) = t^3$.

De fato, temos

$$\varphi_1(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(0) = 0 = 3(0)^{2/3},$$

além disso, $\varphi_1(0) = 0$.

Por outro lado,

$$\varphi_2(t) = y = t^3,$$

daí

$$t = y^{1/3},$$

substituindo teremos

$$\frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2 = 3y^{2/3};$$

a condição inicial também é satisfeita, já que

$$y(0) = 3(0)^{1/3} \Rightarrow y(0) = 0.$$

Concluímos, assim, que a equação dada apresenta, pelo menos, as duas soluções citadas.

Note que,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-1/3}$$

é descontínua no ponto $(t, 0)$*, com* $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.3.0.2 *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω *aberto e seja* $(t_0, y_0) \in \Omega$. *Suponhamos que* f *e* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *sejam contínuas em* Ω. *Sejam*

$$y_1 = y_1(t), t \in I,$$

e

$$y_2 = y_2(t), t \in J,$$

onde I *e* J *são intervalos abertos contendo* t_0*, duas soluções da equação*

$$y' = f(t, y)$$

e tais que

$$y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0.$$

Nestas condições, existe $d > 0$ *tal que*

$$y_1(t) = y_2(t), em \ [t_0 - d, t_0 + d].$$

Prova:

Seja Q o retângulo

$$t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, \ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

Da continuidade de y_1 e y_2 segue que existe $d_1 > 0$, com $d_1 \leq a$, tal que

$$(t, y_1(t)) \text{ e } (t, y_2(t))$$

pertencem ao retângulo Q, para todo t no intervalo $[t_0 - d, t_0 + d]$. Pelo lema 2.1.0.2

$$|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \leq K|y_1(s) - y_2(s)|$$

para todo $s \in [t_0 - d, t_0 + d]$. Tomemos $d > 0$ tal que

$$d \leq d_1 \text{ e } Kd < 1.$$

Como $y_1 = y_1(t)$ e $y_2 = y_2(t)$ são soluções da equação tais que $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$, resultam

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))ds$$

e

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s))ds$$

para $t \in [t_0 - d, t_0 + d]$. Segue que

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \, ds \right|$$

para todo $t \in [t_0 - d, t_0 + d]$. Daí

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq K \left| \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_2(s)| \, ds \right|. \tag{2.14}$$

Seja,

$$M_1 = \max \{|y_1(t) - y_2(t)| \mid t \in [t_0 - d, t_0 + d]\}.$$

Assim,

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq M_1 \tag{2.15}$$

para todo $s \in [t_0 - d, t_0 + d]$. Considerando 2.14 e 2.15 teremos

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq KM_1|t - t_0|$$

e, portanto,

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq KM_1 d$$

para todo $t \in [t_0 - d, t_0 + d]$. Logo,

$$M_1 \leq KM_1 d,$$

pois M_1 é o máximo de $|y_1(t) - y_2(t)|$ em $[t_0 - d, t_0 + d]$.

Se $M_1 \neq 0$, resulta

$$1 \leq Kd,$$

que contraria a escolha de d. Daí $M_1 = 0$. Daí,

$$|y_1(t) - y_2(t)| = 0 \text{ em } [t_0 - d, t_0 + d],$$

portanto,

$$y_1(t) = y_2(t), \ \forall t \in [t_0 - d, t_0 + d].$$

■

Corolário 2.3.0.1 *Nas condições do teorema anterior, se*

$$y_1 = y_1(t), t \in I$$

e

$$y_2 = y_2(t), t \in J,$$

onde I e J são intervalos abertos contendo t_0, são duas soluções da equação

$$y' = f(t, y)$$

e tais que

$$y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0,$$

então

$$y_1(t) = y_2(t)$$

para todo $y \in I \cap J$.

Prova:

Suponhamos que exista $x \in I \cap J$ tal que

$$y_1(x) \neq y_2(x).$$

Supondo $x < t_0$. Seja

$$A = \{s \in]x, t_0] \mid y_1(t) \neq y_2(t) \text{ para } t \in [x, s]\},$$

provaremos, a seguir, que A não é vazio.

De fato, sendo $y_1(x) \neq y_2(x)$, da continuidade de y_1 e y_2 segue que existe $r > 0$ tal que

$$y_1(t) \neq y_2(t) \text{ em } [x-r, x+r].$$

Assim, $x+r \in A$. Logo, A é não-vazio. Por outro lado A é limitado superiormente por t_0, segue que A admite supremo. Seja c o supremo de A, então $c \leq t_0$ e, portanto, $c \in I \cap J$.

Devemos ter

$$y_1(c) = y_2(c)$$

ou

$$y_1(c) \neq y_2(c).$$

Se $y_1(c) = y_2(c)$, pelo teorema anterior, existe um $d > 0$ tal que

$$y_1(t) = y_2(t)$$

em $[c-d, c+d]$. Como $d > 0$, c não é a menor das cotas superiores, logo não é supremo de A. Se $y_1(c) \neq y_2(c)$ existe $r_1 > 0$ tal que $y_1(t) \neq y_2(t)$ em $t \in [c - r_1, c + r_1]$ que contraria, também, o fato de c ser supremo de A. Logo,

$$y_1(t) = y_2(t) \text{ em } I \cap J.$$

■

Exemplo 2.3.0.31 *Encontre a solução do problema de valor inicial*

$$y' = y, \ y(1) = e$$

e garante que não há outra solução.

Solução

Seja $y' = y$, temos que

$$\frac{dy}{dt} = y.$$

Pelo método prático de separação de variáveis teremos

$$\frac{1}{y} dy = dt.$$

Integrando obtemos

$$\int \frac{1}{y}dy = \int dt \Rightarrow \ln|y| = t + C,$$

ou

$$y(t) = C_1 e^t, \text{ com } C_1 = e^C.$$

Temos como condição inicial que $y(1) = e$, ou seja

$$e = C_1 e^1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Logo a solução do PVI é dada por

$$y(t) = e^t.$$

Como $f(t,y) = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ são contínuas, pelo Teorema de Picard concluímos que não existe outra solução para esse problema de valor inicial.

A continuidade da função $f(t,y)$ em Ω por si própria é suficiente para garantir a existência de pelo menos uma solução de $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ definida em algum intervalo I.

Considera-se geralmente como intervalo I de definição para esse problema de valor inicial o maior intervalo contendo t_0, sobre o qual a solução $y(t)$ está definida e pode ser diferenciada. O intervalo I depende de $f(t,y)$ e da condição inicial $y(t_0) = y_0$.

A condição extra da continuidade da primeira derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ em Ω possibilita-nos afirmar que a solução não somente existe em algum intervalo J contendo x_0, mas também é a única solução que satisfaz $y(t_0) = y_0$.

O teorema não dá nenhuma indicação do tamanho dos intervalos I e J; o intervalo I de definição não necessita ser tão grande quanto a região Q, e o intervalo J de existência e unicidade pode não ser tão grande quanto I. O número $r > 0$, que define o intervalo $J : t_0 - r < t < t_0 + r$, pode ser bem pequeno; assim, é melhor pensar que a solução $y(t)$ é única em um sentido local - isto é, uma solução definida nas proximidades do ponto (t_0, y_0).

Exemplo 2.3.0.32 *Seja $y' = y^2$. Temos que*

$$f(t, y) = y^2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Cada uma dessas funções é contínua no plano todo, e em particular no retângulo $Q : -2 < t < 2,\ 0 < y < 2$.

Como o ponto $(0, 1)$ está no interior deste retângulo, o teorema de existência e unicidade garante uma solução única - necessariamente uma função contínua - para o problema de valor inicial

$$y' = y^2,\ y(0) = 1$$

em algum intervalo aberto contendo $y_0 = 0$.

Seja

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

separando as variáveis, temos que

$$\frac{1}{y^2} dy = dt,$$

integrando obtemos

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dt \Rightarrow y^{-1} = -t - c \tag{2.16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = -t - c. \tag{2.17}$$

Se $y(0) = 1$, segue que $c = -1$, daí

$$y(t) = \frac{1}{1 - t}$$

é uma solução explícita para o problema de valor inicial dado.

Porém, $1/(1 - t)$ é descontínua em $t = 1$, de modo que não temos a existência de uma solução no intervalo todo $-2 < t < 2$.

Isto significa que o intervalo I do teorema pode não ser tão largo quanto o retângulo; embora as hipóteses do teorema sejam válidas para todo t em Q, a solução pode existir apenas em um intervalo menor I. Analogamente, o intervalo J para a unicidade pode ser menor ainda que I.

As condições do teorema de existência e unicidade são suficientes, mas não necessárias.

Quando $f(t, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em uma região retangular Q, deve-se sempre concluir que há uma única solução para o problema de valor inicial quando (t_0, y_0) for um ponto interior de Q.

Porém, se as condições dadas nas hipóteses do teorema não forem satisfeitas, qualquer coisa pode ocorrer:

1. o problema de valor inicial pode ainda ter solução, e essa solução ser única;
2. pode ter várias soluções ;
3. não ter solução alguma.

Exemplo 2.3.0.33 *O problema de valor inicial*

$$y' = |x|, \ y(0) = 0$$

não é diferenciável em $x = 0$, mas o problema de valor inicial possui a função zero como uma única solução [1] *.*

Exemplo 2.3.0.34 *A equação diferencial $\frac{dy}{dt} = 2y^{1/2}$ tem pelo menos duas soluções cujos os gráficos passam por $(0, 0)$.*

De fato, temos o seguinte PVI

$$\frac{dy}{dt} = 2y^{1/2}, \ y(0) = 0.$$

Note que uma solução para essa equação é dada por $\varphi_1(t) = 0$, já que, satisfaz a equação diferencial e a condição inicial.

Por outro lado temos

$$\frac{dy}{dt} = 2y^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{2y^{1/2}}dy = dt,$$

[1]A prova da unicidade pode ser obtida usando o teorema de Cauchy-Lipschitz, publicado em 1876 pelo matemático alemão Rudolph Lipschitz(1832-1904).

daí

$$\int \frac{1}{2y^{1/2}}dy = \int 1dt \Rightarrow y^{1/2} = t + c.$$

Da condição inicial $y(0) = 0$ obtemos $c = 0$, daí

$$\varphi_2(t) = t^2$$

é outra solução para a equação diferencial dada.

Notemos que o fato do PVI ter duas ou até mais soluções não contradiz o teorema de existência e unicidade, já que, não satisfaz sua hipótese. Isso se deve ao fato de $\frac{\partial f}{\partial y}$ ser descontínua em $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $y \leq 0$.

Exemplo 2.3.0.35 *Um caso importante no qual a existência e unicidade **globais** são garantidas é a equação diferencial **linear** de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t),$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas no intervalo aberto I contendo o ponto t_0.

Capítulo 3

Modelos Matemáticos e Equações Diferenciais

Muitos problemas práticos, podem ser modelados pela Matemática, de acordo com as quatro etapas abaixo (não muito bem definidas):

1. Construção de um modelo para descrever algum fenômeno físico;
2. Estabelecimento de um procedimento matemático adequado ao modelo físico;
3. Realização de cálculos numéricos aproximados com o uso do Modelo Matemático pré-estabelecido;
4. Comparação das quantidades numéricas obtidas através do Modelo Matemático com aquelas que se esperava obter a partir da formulação do modelo criado para resolver o problema.

Após estas etapas, costuma-se analisar os resultados e na verificação da adequação dos mesmos, aceitar-se o modelo e na inadequação dos resultados, reformula-se o modelo, geralmente introduzindo maiores controles sobre as variáveis importantes, retirando-se os controles sobre as variáveis que não mostraram importância.

3.1 Datação do Carbono 14

A proporção de carbono 14 (radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante. Quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando em carbono 12 a uma taxa que é proporcional a quantidade presente. Podemos descrever o problema de encontrar a quantidade de carbono 14 em função do tempo, $y(t)$, como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} & = & ky \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}$$

Exemplo 3.1.0.36 *A enorme mesa redonda presa às paredes do Castelo de Winchester, e que é mostrada aos crédulos turistas como sendo a famosa "Távola Redonda" do Rei Arthur, apresentou em 2010 uma atividade de $6,08dpm/g$. Sabendo que a atividade da madeira viva da região é $6,68dpm/g$, verifique se esta mesa serviu de fato para os cotovelos do Rei e de seus lendários cavaleiros: Lancelot, Galahad, Gwain, Percival, etc. Do pouco que sabemos dessa fabulosa confraria, uma coisa é certa: viveram no século V.*

Solução

Primeiramente devemos calcular a solução do PVI. Seja

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

então

$$\frac{1}{y}dy = kdt$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{kt}c$$

a atividade inicial é de 6.68 dpm/g, daí, como $y(0) = 6.68$ temos que $c = 6,68$ que nos leva à solução particular

$$y(t) = 6.68e^{kt}.$$

Para encontrarmos o valor da constante k utilizamos o fato da meia vida do carbono 14 ser de 5730 anos. Ou seja

$$\frac{6,68}{2} = 6,68e^{k5730}$$

$$\Rightarrow 5730k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

daí

$$k = -\frac{\ln 2}{5730} = -0,00012097$$

sendo assim, temos

$$y(t) = 6,68e^{-0,00012097t}$$

Por fim, queremos encontrar o valor de t, tal que $y(t) = 6,08$ no ano de 2010. Ou seja

$$\begin{aligned} 6,08 &= 6,68e^{-0,00012097t} \\ \Rightarrow \quad e^{-0,00012097t} &= \frac{6,08}{6,68}, \end{aligned}$$

aplicando ln em ambos os lados da igualdade teremos

$$\begin{aligned} \ln e^{-0,00012097t} &= \ln\frac{6,08}{6,68} \\ \Rightarrow t &= \frac{\ln\frac{6,08}{6,68}}{-0,00012097} = \left(\frac{-0,0941132915}{-0,00012097}\right) \approx 777,99. \end{aligned}$$

Logo $t \approx 778$ anos. Como os dados da atividade foram obtidos em 2010 temos

$$2010 - 778 = 1232.$$

Concluímos que a madeira utilizada na suposta "Távola Redonda" apresentou vida por volta do ano de 1232, século XIII.

3.2 Lei de Resfriamento de Newton

A **lei de resfriamento de Newton** diz que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo $T(t)$ e a temperatura constante do meio ambiente T_m, ou seja, a temperatura do corpo, $T(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Exemplo 3.2.0.37 *Um corpo é encontrado morto, com temperatura superficial de 30°C, dentro de uma sala com um aparelho de ar condicionado mantendo o ambiente a uma temperatura constante de 20°C. Sabe-se que a temperatura superficial no corpo de um humano vivo é de 36,5°C e que pela lei do resfriamento a temperatura $T = T(t)$ varia satisfazendo a equação diferencial $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$, onde k é uma constante de proporcionalidade inerente do ser humano e $T_m = 20°C$ é a temperatura do ambiente. Determine o tempo que passou depois da morte até o defunto ser encontrado. (Você ainda precisa calcular a constante k, para isto segue uma informação: O corpo de um cadáver num ambiente de temperatura constante igual a 20°C demora uma hora para descer de 35°C para 34,2°C).*

Solução

De acórdo com a Lei de Resfriamento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

sabemos que a temperatura ambiente é dada por $T_m = 20°C$, então

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20),$$

calculando a solução geral pelo método prático de separação de variáveis obtemos

$$\frac{1}{T-20}dT = -kdt,$$

que nos leva a

$$T = 20 + Ce^{-kt},$$

onde C é uma constante arbitrária.

Encontraremos, agora, o valor da constante de proporcionalidade k. Para isso devemos considerar $T(0) = 35°C$ e $T(1) = 34,2°C$. Para $T(0) = 35°C$

$$T(0) = 20 + Ce^{0} \Longrightarrow 35 = 20 + C \Longrightarrow C = 15,$$

então

$$T = 20 + 15e^{-kt}.$$

Para $T(1) = 34,2^oC$

$$T(1) = 20 + 15e^{-1k} \Longrightarrow 34,2 = 20 + 15e^{-k} \Longrightarrow e^{-k} = \frac{14,2}{15}$$

logo

$$-k = \ln\frac{14,2}{15} \Longrightarrow k \approx 0,0548$$

Após obtermos k consideremos agora $T(0) = 36,5^oC$ e $T(t_1) = 30^oC$, onde t_1 corresponde ao tempo que se passou depois da morte. Temos então

$$T(t) = 20 + Ce^{-kt} \Longrightarrow T(0) = 20 + Ce^0 \Longrightarrow C = 16,5$$

se $T(t_1) = 30^oC$

$$T(t_1) = 20 + 16,5e^{0,0548t_1} \Longrightarrow 30 = 20 + 16,5e^{0,0548t_1}$$

sendo assim

$$e^{0,0548t_1} = \frac{10}{16,5} \Longleftrightarrow 0,0548t_1 = \ln\frac{10}{16,5},$$

por fim

$$t_1 \approx \frac{-0,0548}{0,0548} \approx -9,14.$$

1 hora corresponde a 60 minutos, daí

$$\frac{1h}{0,14h} = \frac{60min}{xmin} \Rightarrow x = 8,4min.$$

Da mesma forma 1 minuto corresponde a 60 segundos, daí

$$\frac{1min}{0,4min} = \frac{60seg}{yseg} \Rightarrow y = 24seg.$$

Concluímos, então, que o corpo foi encontrado, aproximadamente, $09h08min$ e $24seg$ após a morte ter ocorrido.

Apêndice A

Conceitos de Análise

A.1 Números Reais

Definição A.1.1 *Dizemos que um subconjunto* $I \subset \mathbb{R}$ *é um* ***intervalo*** *se, dados quaisquer* $x < z < y$ *tais que* x, $y \in I$, *necessariamente vale* $z \in I$.

Definição A.1.2 *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *um subconjunto qualquer. Um número real* $x \in \mathbb{R}$ *diz-se uma* ***conta superior*** *de* A *(resp.* ***conta inferior*** *de* A*) se* $x \geq y$ *(resp.* $x \leq y$ *para qualquer* $y \in A$.

Definição A.1.3 *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *um subconjunto qualquer. Um número real* $x \in \mathbb{R}$ *diz-se* ***supremo*** *de* A *(resp.* ***ínfimo*** *de* A *se satisfaz as seguintes duas condições:*

(i) x *é cota superior de* A, *i.e.* $x \geq y$ *para qualquer* $y \in A$ *(resp.* x *é cota inferior, i.e.* $x \leq y$ *para qualquer* $y \in A$;

(ii) se z *for cota superior de* A, *então* $x \leq z$ *(resp. se* z *for cota inferior de* A, *então* $x \geq z$.

Definição A.1.4 *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *um subconjunto qualquer. Quando existe supremo de* A *e este pertence ao conjunto* A, *i.e.* $\sup A \in A$, *diremos que* A *tem* ***máximo*** *e que* $\max A = \sup A$. *De forma análoga, quando existe ínfimo de* A *e este pertence ao conjunto* A, *i.e.* $\inf A \in A$, *diremos que* A *tem* ***mínimo*** *e que* $\min A = \inf A$.

Exemplo A.1.0.38 *Seja A o subconjunto de $\mathbb{R}$ dado por*

$$A = \{-1\} \cup [0,1] = \{x \in \mathbb{R} : x = -1 \cup 0 < x < 1\}.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned}
\textit{cotas superior de } A &= \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\} = [1, +\infty[\,, \\
\textit{cotas inferior de } A &= \{x \in \mathbb{R}, x \leq 1\} =]-\infty, -1]\,, \\
\sup A = 1 \notin A &\Rightarrow A \textit{ não tem máximo}, \\
\inf A = -1 \in A &\Rightarrow A \textit{ tem mínimo e } \min A = -1.
\end{aligned}$$

A.2 Sequência

Definição A.2.1 *Uma* ***sequência*** *de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência.*

Definição A.2.2 *Dizemos que um número a é o limite de uma sequência (x_n) se, para cada $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n > n_0$ e escrevemos*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Uma sequência que possui limite diz-se **convergente**. Caso contrário, ela se chama **divergente**.

Exemplo A.2.0.39 *Considere a sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. Onde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.*

De fato, observe que

$$|a_n - 1| = \left| -\frac{1}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$$

e pela desigualdade de Bernoulli temos

$$2^n = (1+1)^n \leq 1 + n > n, \; \forall n \in \mathbb{N},$$

logo

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}\ , \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$|a_n - 1| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ *considere* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. *Logo, para qualquer* $n \geq n_0$

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Definição A.2.3 *Dada uma sequência* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *uma* ***subsequência*** *de* x *é a restrição da função* x *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ *de* $\mathbb{N}$.

Dizemos que uma sequência é **limitada** quando existe $k > 0$ tal que $|a_n| \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema A.2.0.3 *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Prova. Ver [6]

Definição A.2.4 *Diz-se que* (x_n) *é uma* ***sequência de Cauchy*** *quando, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$.

Obs.

1. Toda sequência convergente é de Cauchy.
2. Toda sequência de Cauchy é limitada.
3. Toda sequência de Cauchy de $\mathbb{R}$ é convergente.

A.3 Séries

Dada uma sequência de números reais (a_n), podemos formar uma nova sequência (s_n) da seguinte forma:

$$s_1 = a_1,$$

$$
\begin{aligned}
s_2 &= a_1 + a_2, \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

O termo geral da sequência (s_n) é chamado de n-ésima **soma parcial**, ou de **reduzida** de ordem n de (a_n).

A sequência (s_n) assim obtida é chamada de **série infinita**, ou simplesmente de **série** e é denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Quando (s_n) converge para um limite s dizemos que a série $\sum a_n$ é **convergente**, e escrevemos $\sum a_n = s$. Quando uma série não é convergente dizemos que é **divergente**.

Assim, a série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots| < \epsilon$, para cada $n > n_0$.

Dizemos que uma série $\sum a_n$ diz-se **absolutamente convergente** quando $\sum |a_n|$ converge.

Exemplo A.3.0.40 *(Série geométrica) Para* $0 < |a| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

De fato,

$$s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}.$$

Como $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$, *daí*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Logo, a série dada é convergente e tem por soma $\frac{1}{1-a}$.

Um **sequência de funções** é uma sequência $n \mapsto f_n$, onde cada f_n é uma função.

Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ converge simplesmente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $x \in X$, a sequência de números $f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ converge para $f(x)$.

Assim, $f_n \to f$ simplesmente em X quando, dados $\epsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de ϵ e de x) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ϵ) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ seja qual for $x \in X$.

Teorema A.3.0.4 *Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$* ***converge uniformemente*** *para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Prova. Ver [6].

Uma **série de funções** é uma série $\sum f_n$, onde cada f_n é uma função. Dizemos que a série $\sum f_n$ converge em X, à função $s : X \to \mathbb{R}$ se, para cada $x \in X$

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

o que significa que para cada $x \in X$, $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. A função $s = s(x)$, denomina-se **soma** da série.

Teorema A.3.0.5 *(Teste de Weierstrass) Dada a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, seja $\sum a_n$ uma série convergente de números reais $a_n \geq 0$ tais que $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{R}$ e todo $x \in X$. Nestas condições, as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.*

Prova. Ver [6]

Definição A.3.1 *Seja a_n, $n \geq 0$, uma sequência numérica dada e seja x_0 um real dado. A série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$$

denomina-se ***série de potência****, com coeficientes a_n, em volta de x_0 (ou centrada em x_0). Se $x_0 = 0$, temos a série de potências em volta de zero:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Quando a série de potência $\sum a_n(x-x_0)^n$ tem raio de convergência $r>0$, diz-se que ela é a **série de Taylor**, em torno do ponto x_0, da função $f:(x_0-r,x_0+r)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sum a_n(x-x_0)^n$.

Exemplo A.3.0.41 *A série* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ *converge para todo* $x\in\mathbb{R}$, *logo a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *definida por* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, *é de classe* C^{∞}. *Derivando termo a termo, vemos que* $f'(x)=f(x)$. *Como* $f(0)=1$, *segue-se, que* $f(x)=e^x$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$. *Portanto*

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

é a série de Taylor da função exponencial em torno do ponto $x=0$.

Exemplo A.3.0.42 *Temos que a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(Kr)^{n-1}}{(n-1)!}$$

é uma série de Taylor que converge.

Definição A.3.2 *Um norma* $\|.\|$ *em* $\mathbb{R}$ *é uma aplicação*

$$\begin{aligned}\|.\| \ &: \ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto\|x\|\end{aligned}$$

que satisfaz:

i. $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

ii. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, *a desigualdade triangular, e*

iii. $\|x\|=0$ *se, e somente se,* $x=0$,

valendo para quaisquer x, $y\in\mathbb{R}^n$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exemplo A.3.0.43 .

1. *Em* $\mathbb{R}^n$ *a norma euclidiana é dada por*

$$\|(x_1,\cdots,x_n)\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

2. Consideremos o espaço das funções reais contínuas definidas em $[a,b]$:

$$C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}.$$

A norma usual deste espaço é

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Proposição A.1 *Dada uma norma $\|.\|$ qualquer em $\mathbb{R}^n$, existem constantes positivas a, b tais que $a|x| \le \|x\| \le b|x|$ vale para cada $x \in \mathbb{R}^n$.*

Prova. Ver [3]

Duas normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ em $\mathbb{R}^n$ são **equivalentes** se existem constantes positivas $a,\ b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1$$

vale para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Observe que qualquer norma em $\mathbb{R}^n$ é equivalente à norma euclidiana.

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ dá origem à noção de **distância (métrica)** entre dois pontos $x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

Definição A.3.3 *Para $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$, pomos*

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

As três condições que definem uma norma implicam que $d(x,y)$ tem as propriedades:

i. $d(x,x) \ge 0$ *e* $d(x,y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$,

ii. $d(x,y) = d(y,x)$,

iii. $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$,

para quaisquer pontos x, y e $z \in X$.

Definição A.3.4 *O par $(\mathbb{R}^n, d)$ é chamado de* ***espaço métrico****, se d for uma métrica em $\mathbb{R}^n$.*

Definição A.3.5 *Um espaço métrico no qual toda sequência de Cauchy converge é dito* **completo***.*

Exemplo A.3.0.44 *O $\mathbb{R}^n$ é completo com a métrica euclidiana.*

Definição A.3.6 *Seja $(\mathbb{R}^n, d)$ um espaço métrico.*

a) A bola aberta centrada em $a \in \mathbb{R}^n$ com raio r é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}$$

que será denotado por $B(a; r)$.

b) A **bola fechada** *centrada em $a \in \mathbb{R}^n$ com raio r é o conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) \leq r\}$$

que será denotado por $B[a; b]$.

c) $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ é um **ponto interior** *de X se existir $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$.*

d) Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é dito **aberto** *se todos os pontos de U forem interiores.*

e) Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é dito **fechado** *se seu complementar for aberto.*

f) Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é dito **limitado** *se existir uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer x, $y \in X$.*

g) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se **compacto** *quando é limitado e fechado.*

Definição A.3.7 *Uma* **cisão** *do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$, de X como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B.*

A cisão $X = A \cup B$ diz-se trivial quando um dos abertos, A ou B, é vazio (e portanto o outro é igual a X). Assim, a cisão trivial é $X = X \cup \emptyset$.

Um conjunto $X \cup \mathbb{R}^n$ chama-se **conexo** *quando só admite a cisão trivial. Caso contrário, diz-se que X é* **desconexo***.*

Definição A.3.8 *Seja $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ um* **caminho***, isto é, uma aplicação continua cujo o domínio é um intervalo da reta. Os componentes de φ são funções reais $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ tais que $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$ para cada $t \in I$.*

Exemplo A.3.0.45 *O espaço $F = C(I, \mathbb{R}^n)$ dos caminhos contínuos de I em $\mathbb{R}^n$ é completo na métrica uniforme*

$$d(\mu, \nu) = \sup_{t \in I} |\mu(t) - \nu(t)|$$

sempre que I for um intervalo compacto.

Dizemos que o caminho $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tem **derivada** no ponto $t \in I$ se cada componente tem derivada em t; nesse caso, dizemos que

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = x'(t) = (x_1'(t), \cdots, x_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

é a derivada em t.

Se $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tem derivada em cada ponto de I, dizemos que φ é **diferenciável** no intervalo I; nesse caso φ é um caminho contínuo e podemos definir um novo caminho

$$\varphi' : I \to \mathbb{R}^n$$

das derivadas de φ.

Dizemos que φ é de classe C^0 em I se x é contínuo em I, e que φ é de classe C^r em I se φ' é de classe C^{r-1} em I, para cada $1 \leq r$. Finalmente, φ é de classe C^∞ se φ é de classe C^r para cada $r \in \mathbb{N}$.

Se $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é um caminho contínuo, definimos a integral de Riemann de φ de a até b por

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \left(\int_a^b \varphi_1(t)dt, \cdots, \int_a^b \varphi_2(t)dt\right) \in \mathbb{R}^n$$

O Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos é simplesmente

$$\frac{d}{dt}\int_u^t \varphi(s)ds = \varphi(t),$$

que decorre do Teorema Fundamental do Cálculo para funções reais tomando coordenadas. Assim, todo caminho φ de classe C^1 satisfaz

$$\varphi(t) = \varphi(u) + \int_u^t \varphi'(s)ds.$$

De fato, basta observar que ambos os lados definem caminhos de mesma derivada $\varphi'(t)$, e que, portanto diferem por uma constante, que no caso é zero.

A.4 Aplicações Contínuas

Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, associa a cada ponto $x \in X$ sua imagem $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$. As funções reais $f_1, \cdots, f_n : X \to \mathbb{R}$, assim definidas, chamam-se as **funções-coordenadas** de f.

Diz-se que f é **contínua no ponto** $a \in X$ quando, para cada $\epsilon > 0$ arbitrariamente dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Noutros termo: para cada bola $B(f(a); \epsilon)$ dada, existe uma bola $B(a; \delta)$ tal que $f(B(a; \delta) \cap X) \subset B(f(a); \epsilon)$.

Teorema A.4.0.6 *A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$ com $\lim x_k = a$, tem-se $\lim f(x_k) = f(a)$.*

Prova. Ver [8].

Teorema A.4.0.7 *(Weierstrass) Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Se $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua, então existem x_0, $x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in K$.*

Prova. Ver [8].

Noutras palavras, toda função real contínua num conjunto compacto K atinge seus valores mínimo e máximo em pontos de K.

Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ diz-se uniformemente contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\epsilon > 0$, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$, sejam quais forem x, $y \in X$.

Teorema A.4.0.8 *A fim de que $f : X \to \mathbb{R}^n$ seja uniformemente contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é necessário e suficiente que, todo par de sequências de pontos x_k, $y_k \in X$ com $\lim |x_k - y_k| = 0$, se tenha $\lim |f(x_k) - f(y_k)| = 0$.*

Prova. Ver [8].

Exemplo A.4.0.46 *Uma aplicação* $f : X \to \mathbb{R}^n$, *definida no conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *chama-se* ***lipschitziana*** *quando existe* $c > 0$ *tal que* $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ *para quaisquer* $x, y \in X$. *O número c é chamado uma* ***constante de Lipschitz*** *de* f. *Toda aplicação lipschitziana é uniformemente contínua: dado* $\epsilon > 0$, *basta tomar* $\delta = \epsilon/c$.

Definição A.4.1 *A aplicação lipschitziana* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *chama-se uma* ***contração*** *se* $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ *com* $0 \leq c < 1$; *neste caso, dizemos que a constante de Lipschitz é um fator de contração de* f.

Teorema A.4.0.9 *Sejam* M *um espaço métrico completo e* $f : M \to M$ *uma aplicação. Se* f *é uma contração então* f *possui um único ponto fixo.*

Prova:

Provemos inicialmente a unicidade. Suponhamos que existam $x \neq y \in M$ pontos fixos de f. Então $|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$, ou seja, $(1 - c)|x - y| \leq 0$. Como $(1 - c) > 0$, concluímos que $x = y$, logo o ponto fixo $x \in X$ é único.

Para a existência consideramos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e a sequência definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$. Como f é uma contração então existe $0 \leq c < 1$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < c|x - y|, \forall x, y \in M.$$

Assim

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_n - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leq \\ &\leq c^n(1 + c + \cdots + c^{p-1})|x_1 - x_0| \leq \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0| \to 0. \end{aligned}$$

Portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy e então converge. Seja $x \in M$ o limite da sequência. Temos $(x_n \to x) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x))$ e $(x_{n+1} \to x)$ e como $x_{n+1} = f(x_n)$ segue que $f(x) = x$.

$\blacksquare$

Seja $f : U \to \mathbb{R}$ definida num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Fixado $x \in U$ e dado $1 \leq j \leq n$, dizemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

é a **derivada parcial** de f em relação a x_j no ponto x. Note que $e_1, \cdots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Dizemos que $f : U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x \in U$ se existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(x+h) = f(x) + Th + r(h)$ onde

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

O **gradiente** de uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$ no ponto $a \in U$ é o vetor

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Se v é qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$, a **derivada direcional** de f no ponto a, na direção de v é, por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Teorema A.4.0.10 *(Desigualdade do valor médio) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável. Se o segmento de reta fechado $[a, a+h]$ está contido em U então*

$$|f(a+h) - f(a)| \leq |h| \sup_{0<t<1} |f'(a + th)|.$$

Prova. Ver [8].

Referências Bibliográficas

[1] BOYCE, William E. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* William E. Boyce; Richard C. DiPrima. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 434p. Traducao de Valeria de Magalhaes Iorio.

[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Trad. Elza F. Gomide. 2ªed. São Paulo, Edgard blucher, 1996.

[3] DOERING, Claus Ivo. Equações Diferenciais Ordinárias. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[4] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Análise I.* 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* Vol.4, 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[6] LIMA, Elon Lages. *Análise Real.* Vol.1. 2ª ed. Rio de Janeiro: CNPq, 1993.

[7] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise.* Vol.1. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[8] LIMA, Elon Lages. *Análise Real.* Vol.2. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[9] SANTOS, Reginaldo J. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.* Belo Horizonte, Imprensa Universitária da UFMG, 2010.