



**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Engenharia Elétrica e Informática**  
Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

**Cícero Rômulo Campos de Amorim Filho**

**Modelagem de Enlace de Comunicações no Sistema  
Massivo MIMO *Cell-Free* para Avaliação de  
Desempenho por meio da PEB**

Campina Grande - Paraíba - Brasil

Dezembro de 2019.

Cícero Rômulo Campos de Amorim Filho

**Modelagem de Enlace de Comunicações no Sistema  
Massivo MIMO *Cell-Free* para Avaliação de  
Desempenho por meio da PEB**

*Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.*

Área de Concentração: Comunicações Móveis.

Prof. Wamberto José Lira de Queiroz, D.Sc.

Orientador

Campina Grande - Paraíba - Brasil

Dezembro de 2019

Cícero Rômulo Campos de Amorim Filho

**Modelagem de Enlace de Comunicações no Sistema  
Massivo MIMO *Cell-Free* para Avaliação de  
Desempenho por meio da PEB**

*Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.*

Trabalho aprovado. Campina Grande, Brasil, 9 de Dezembro de 2019

---

Wamberto José Lira de Queiroz

Orientador

---

Bruno Barbosa Albert

Convidado

Campina Grande - Paraíba - Brasil

Dezembro de 2019.

# Agradecimentos

Os agradecimentos não poderiam começar de outra forma, agradeço imensamente à minha família, a Painho (com quem compartilho muito mais do que o nome, a melhor amizade e muitos gostos nesses 21 anos), Mainha (deusa absoluta do meu universo e dona da minha admiração infinita e eterna), Renata (rainha do meu mundo, inspiração e orgulho nos dias bons e ruins) e Sofia (para sempre meu maior Moção, que me ensinou sobre atos mais amor do que todas as palavras do mundo conseguiriam). Sem vocês esse trabalho não estaria pronto, sem vocês ele nem teria sido iniciado, meus agradecimentos são muito maiores do que consigo expressar nas palavras desse parágrafo, muito obrigado por existirem e por me darem a oportunidade de compartilhar da minha vida com vocês.

Um agradecimento especial a todos aqueles que foram fundamentais para que eu começasse, continuasse e concluísse tudo isso. Tio Mosar, Tia Jó e Anderson, Vó Maria, Tia Mara, Janaína, Josina e todo o restante que eu vou citar como família (seria péssimo esquecer o nome de alguém, melhor deixar assim).

Agradeço e parabenizo meus amigos de graduação por me suportarem por 9 períodos. São muitos, espalhados em vários cursos, laboratórios e períodos, àqueles que me acompanham há bem mais tempo (9 anos), Safary e Átila. Aos do LAT (Vands, Kanxa, João, Higor, Arthur, Lenilson e Walter). Aos meus orientandos (Filipe e Targino). Ao meu 15.1 (Zé Lusca, Arthur Aang, Augusto Nosso 10, Pedro Meu Líder, Caio meu mano, Luan, Rocha, Breno, César, Jero, Johas, João, Saulo, Tavares, Digs e toda Macharada juntamente com Hugerles). A minhas amigas (Débora, Amanda, Ana, Emília, Herika, Laura, Carine, Pudim, Natalia, Larissa, Rebeca e Laís) e também àqueles que fui buscar em outros lugares e que fazem parte disso tudo (Débora, Victor, Vitor, Matheus, Naruto, Gai entre muitos, sério, são muitos outros).

E claro, um parágrafo especial para meus dois melhores amigos na graduação. Agradeço a Tadis por compartilhar AMVs de Naruto no domingo de noite enquanto deveríamos estar estudando, mesmo que não precisássemos estudar. Agradeço a Antonio por me xingar e me motivar a ser adulto mesmo me idolatrando em segredo.

A todos os professores e funcionários da UFCG que me ajudaram a chegar aqui, principalmente Sharada, George, Nondinhas e Wamberto. Sharada que me impulsionou a vir para cá. George que me ensinou sobre ser cientista. Epaminondas que me fez amar o

curso de novo. Wamberto que apresentou a minha parte preferida de Elétrica e me motiva a continuar nisso tudo.

Muito Obrigado por tudo, Eu Amo Vocês com todo o meu coração (a ponto de deixar os agradecimentos ocupando duas páginas desse trabalho).

*Be Epic*

*Com toda a sinceridade e carinho,*

*Romulo, Ciço, Romulin*

"Pra proteger quem amo,  
eu preciso ser mais forte.  
Hachimon Tonkou; abra  
Portão da Morte!"

---

Maito Gai

# Conteúdo

Lista de Figuras	viii
Lista de Siglas e Abreviaturas	x
Resumo	xi
Abstract	xii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	3
1.2 Organização do Trabalho . . . . .	4
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>5</b>
2.1 Sistema MIMO Massivo <i>Cell-Free</i> . . . . .	5
2.2 Esquema de Modulação <i>M-QAM</i> . . . . .	17
<b>3 Aproximação do Sinal Recebido</b>	<b>19</b>
3.1 Análise da Covariância de $S_1$ e $S_2$ . . . . .	19
3.2 Avaliação da Soma $S_1$ . . . . .	21
3.3 Avaliação da Envoltória de $S_1$ . . . . .	24
3.4 Avaliação da Soma $S_2$ . . . . .	26
3.5 Avaliação da Probabilidade de Erro de Bit . . . . .	31
<b>4 Resultados</b>	<b>35</b>
4.1 Simulação do Sistema MIMO Massivo <i>Cell-Free</i> . . . . .	35
4.2 Histogramas gerados para $S_1$ e $S_2$ . . . . .	38
4.2.1 Histogramas gerados para as envoltórias de $S_1$ e $S_2$ . . . . .	38

---

4.2.2	Histogramas gerados para as partes real e imaginária de $S_1$ . . . . .	42
4.2.3	Histogramas gerados para as partes real e imaginária de $S_2$ . . . . .	46
4.3	Testes estatísticos . . . . .	51
4.3.1	Avaliação da covariância amostral . . . . .	51
4.3.2	Testes de Hipótese . . . . .	51
4.3.3	Comparação de Parâmetros de $S_1$ e $S_2$ . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>54</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>55</b>



# Lista de Figuras

2.1	Tráfego de dados móveis (em Exabytes) entre 2014 e 2024 estratificado em torno das tecnologias 3G, 4G e 5G. . . . .	6
2.2	Esquemático de um Sistema MU-MIMO. . . . .	9
2.3	Diagrama Esquemático de um Sistema MU-MIMO Unicelular. . . . .	11
2.4	Esquemático de um Sistema MU-MIMO Multicelular. . . . .	12
2.5	Diagrama Esquemático de um Sistema MU-MIMO Distribuído. . . . .	13
2.6	Esquemático de um Sistema MU-MIMO Cell-Free. . . . .	14
2.7	Mapeamento de Gray para a modulação 16-QAM. . . . .	18
4.1	Histograma da envoltória de $S_1$ para $L = 50$ e $K = 10$ . . . . .	39
4.2	Histograma da envoltória de $S_1$ para $L = 100$ e $K = 20$ . . . . .	39
4.3	Histograma da envoltória de $S_1$ para $L = 200$ e $K = 40$ . . . . .	40
4.4	Histograma da envoltória de $S_2$ para $L = 40$ e $K = 10$ . . . . .	40
4.5	Histograma da envoltória de $S_2$ para $L = 100$ e $K = 20$ . . . . .	41
4.6	Histograma da envoltória de $S_2$ para $L = 200$ e $K = 40$ . . . . .	41
4.7	Histograma da parte real de $S_1$ para $L = 50$ e $K = 10$ . . . . .	42
4.8	Histograma da parte real de $S_1$ para $L = 100$ e $K = 20$ . . . . .	43
4.9	Histograma da parte real de $S_1$ para $L = 200$ e $K = 40$ . . . . .	43
4.10	Histograma da parte imaginária de $S_1$ para $L = 50$ e $K = 10$ . . . . .	44
4.11	Histograma da parte imaginária de $S_1$ para $L = 100$ e $K = 20$ . . . . .	44
4.12	Histograma da parte imaginária de $S_1$ para $L = 200$ e $K = 40$ . . . . .	45
4.13	Histograma normalizado da parte imaginária de $S_1$ . . . . .	45
4.14	Histograma normalizado da parte real de $S_1$ . . . . .	46
4.15	Histograma da parte real de $S_2$ para $L = 50$ e $K = 10$ . . . . .	47

---

4.16	Histograma da parte real de $S_2$ para $L = 100$ e $K = 20$ . . . . .	47
4.17	Histograma da parte real de $S_2$ para $L = 200$ e $K = 40$ . . . . .	48
4.18	Histograma da parte imaginária de $S_2$ para $L = 50$ e $K = 10$ . . . . .	48
4.19	Histograma da parte imaginária de $S_2$ para $L = 100$ e $K = 20$ . . . . .	49
4.20	Histograma da parte imaginária de $S_2$ para $L = 200$ e $K = 40$ . . . . .	49
4.21	Histograma normalizado da parte imaginária de $S_2$ . . . . .	50
4.22	Histograma normalizado da parte real de $S_2$ . . . . .	50

# Lista de Abreviatura e Siglas

MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
ERB	Estação Radiobase
BS	<i>Base Station</i>
FDP	Função Densidade de Probabilidade
MU	<i>Multi-User</i>
SU	<i>Single-User</i>
MU-MIMO	<i>Multi-User Multiple-Input Multiple-Output</i>
PEB	Probabilidade de Erro de Bit
M-QAM	<i>M-ary Quadrature Amplitude Modulation</i>
MISO	<i>Multiple-Input Single-Output</i>
SIMO	<i>Single-Input Multiple-Output</i>
RAU	<i>Remote Access Unity</i>
AP	<i>Access Point</i>
DEP	Densidade Espectral de Potência
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>
ADSL	<i>Assymetrical Digital Subscriber Line</i>
UE	<i>User Equipment</i>
TCLL	Teorema Central do Limite de Lyapunov

# Resumo

Na última década, houve um crescimento significativo no número de dispositivos conectados à rede móvel por meio de enlaces sem fio. A demanda por elevadas taxas de transferências de dados e o aumento no número de dispositivos conectados à rede tendem a aumentar e sistemas de comunicações mais robustos e eficientes devem ser utilizados. Nesta perspectiva, este trabalho apresenta a modelagem estatística do sinal recebido no enlace de descida de um sistema MIMO massivo sem células (*Massive Multiple-Input Multiple-Output Cell-Free*) e a redução desse modelo, por meio do Teorema Central do Limite de Lyapunov, a um modelo de sinal transmitido por um canal não seletivo em frequência, acompanhada de testes estatísticos e avaliações computacionais para atestar a aproximação. É verificado que à medida que a quantidade de pontos de acesso do sistema aumenta, maior é a aderência das amostras correspondentes ao sinal desejado e das amostras correspondentes ao sinal de interferência a duas variáveis gaussianas complexas independentes. O modelo reduzido é apropriado à determinação de expressões analíticas tanto para a Probabilidade de Erro de Bits, para qualquer esquema de modulação digital, quanto para a avaliação da máxima taxa de transmissão alcançável pelo sistema.

**Palavras-Chaves:** Enlaces de comunicação sem fio, Sistemas MIMO Massivos *Cell-Free*, Probabilidade de Erro de Bit.

# Abstract

Over the past decade, there has been a significant growth in the number of devices connected to the mobile network via wireless links. The demand for high data transfer rates and the increase in the number of devices connected to the network tend to increase and more robust and efficient communications systems should be used. In this perspective, this work presents the statistical modeling of the signal received in the downlink of a massive MIMO cell-free system and the reduction of this model, by means of the Central Limit Theorem of Lyapunov, to a signal model transmitted in a non-selective frequency channel, accompanied by statistical tests and computational evaluations to attest the realized approximations. It is found that, as the number of access points increases, greater is the adherence of the samples corresponding to the desired signal and the samples corresponding to the interference signal to two independent complex Gaussian variables. The reduced model is appropriate for the determination of analytical expressions to Bit Error Probability for any digital modulation scheme and maximum data transfer rate achievable by the system.

**Keywords:** Wireless links, Massive MIMO Systems Cell-Free, Bit Error Probability.

# Capítulo 1

## Introdução

Na última década, houve um crescimento significativo do número de dispositivos eletrônicos conectados à rede móvel por meio de enlaces sem fio em decorrência do desenvolvimento tecnológico nos sistemas de comunicações móveis. Os bilhões de dispositivos conectados e a busca por mais qualidade e intervalos de tempo mais curtos no envio e recebimento de dados tornam clara a necessidade de utilização de sistemas de comunicações capazes de atender a demanda atual e futura com qualidade e eficiência.

Altas taxas de transferência de dados são necessárias para atender a demanda de aplicativos capazes de processar sinais de vídeo e voz, seja na execução de filmes e músicas, bem como na execução de jogos em tempo real. A demanda por elevadas taxas de transferência de dados nos enlaces de comunicações sem fio e o número de dispositivos conectados vêm crescendo exponencialmente e tendem a continuar em franco crescimento, de modo que, para garantir a confiabilidade e viabilidade no seu funcionamento, a tecnologia 5G exigirá dos sistemas de comunicações a capacidade de satisfazer os três seguintes principais requerimentos:

- Possibilitar elevadas taxas de transferência de dados;
- Servir simultaneamente a muitos usuários;
- Apresentar consumo de energia reduzido.

Nesse contexto, surgem os sistemas massivos com múltiplas entradas e múltiplas saídas (*massive multiple-input multiple-output - massive-MIMO*), nos quais as estações

radiobase - ERBs (*base stations* - BS) são equipadas com um número elevado de antenas, na forma de arranjos de antenas com muitos elementos, que servem a muitos usuários simultaneamente nas mesmas bases de recursos de tempo e frequência.

Esses sistemas, denominados também na Língua Portuguesa por sistemas MIMO massivos colocados, podem atender os três requerimentos mencionados para sistemas de comunicações móveis e por isso têm sido citados como uma das principais tecnologias da quinta geração de redes de comunicações que está em fase de implantação (NGO, 2015).

Além da demanda por qualidade e velocidade, estabelecida pelos bilhões de dispositivos existentes atualmente, os sistemas de comunicações são alvos de problemas atrelados à transmissão de informação, como as dificuldades de estimação do estado dos canais de propagação, a interferência-piloto, a interferência entre usuários, capaz de afetar a transmissão dos dados, e o desvanecimento, fenômeno de natureza aleatória caracterizado por variações aleatórias de amplitude no sinal transmitido decorrentes do processo de propagação das ondas eletromagnéticas entre as antenas transmissora e receptora. O desvanecimento pode ser classificado no tempo (rápido ou lento) e no espaço (pequena escala e grande escala).

A utilização de múltiplas antenas, tanto para os enlaces de descida quanto, possivelmente, para os enlaces de subida, contribui para que os componentes de sinais espalhados pelo meio de transmissão possam ser melhor captados e combinados na antena receptora. Deste modo é possível maximizar a potência do sinal resultante e aumentar a confiabilidade do sistema. Esse conceito, no qual o sinal portador da informação é enviado por diferentes percursos de propagação para se beneficiar do percurso que lhe impõe menos perdas é conhecido como diversidade espacial e tem sido muito explorado pelos estudiosos de telecomunicações.

Os esforços para explorar os benefícios da diversidade espacial têm conduzido as pesquisas relacionadas aos sistemas MIMO em direção aos sistemas MIMO de múltiplos usuários (*multi users* MIMO - MU-MIMO), nos quais vários usuários são simultaneamente servidos por uma estação radiobase de múltiplas antenas. Quando se leva em consideração a presença de outros usuários sendo atendidos pelo sistema, surgem os problemas referentes aos sinais interferentes pertinentes a esses usuários, como a interferência entre

as sequências piloto usadas no processo de identificação dos canais de subida (MI et al., 2017).

Na análise do desempenho desses sistemas, tem sido proposta a taxa máxima de transmissão alcançável, dada pelo logaritmo na base dois de um mais a razão entre a potência média do sinal desejado e a potência média do ruído mais a interferência. Em (NGO et al., 2017), esse parâmetro foi avaliado em um bloco de coerência, correspondente a quarenta intervalos de coerência do canal. Neste trabalho, é proposta a redução do modelo de sinal recebido, captado por um usuário de um sistema MIMO massivo sem célula, a um modelo de sinal em um canal não seletivo em frequência, para que o modelo reduzido possa ser utilizado na avaliação da Probabilidade de Erro de Bit (PEB). Esse modelo reduzido também permitirá, como trabalho futuro, a avaliação dos efeitos da variação da potência média do desvanecimento de larga escala. Para o cálculo dessa PEB será então considerada a expressão 2.1 do modelo do sinal recebido apresentada em (NGO et al., 2017) e a avaliação da qualidade da redução proposta será atestada por meio do teste estatístico de gaussianidade  $\chi$ -quadrado, do teste  $\chi$ -quadrado de independência, por meio da covariância amostral e por meio de histogramas das amostras geradas por simulação realizada usando o método de Monte Carlo e implementada em Matlab<sup>®</sup>.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo o estudo de um modelo de sinal recebido por meio do enlace de descida de um sistema MIMO massivo sem célula e sua aproximação por um modelo de sinal recebido em um canal não seletivo em frequência com desvanecimento gaussiano complexo, por meio do Teorema Central do Limite de Lyapunov (TCLL) (ADAMS, 2009). Entre os objetivos específicos, tem-se

- Estudar e entender os principais conceitos relacionados ao tema de sistemas MIMO massivos sem células;
- Aplicar o TCLL para aproximar os somatórios presentes no modelo original de sinal recebido, em um enlace de descida de um sistema MIMO massivo sem células, por um sinal recebido em um modelo de canal não seletivo em frequência;



- Apresentar a análise matemática da aproximação proposta e justificá-la por meio da análise da covariância e da independência dos somatórios do modelo original;
- Implementar um modelo de sistema MIMO massivo sem células no Matlab<sup>®</sup> e usar o código gerado para avaliar estatísticas das amostras geradas na simulação que corroborem a aproximação proposta. Entre as estatísticas avaliadas estão a covariância amostral, o teste  $\chi$ -quadrado de independência e o teste  $\chi$ -quadrado de gaussianidade.
- Comentar e documentar todos os resultados obtidos na realização do trabalho.

## 1.2 Organização do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica com os principais conceitos estudados durante a revisão bibliográfica, necessários ao entendimento dos sistemas MIMO massivos sem célula. É apresentado também o modelo matemático original, proposto por pesquisadores afiliados à Universidade de Linköping, na Suécia, e à Nokia, nos EUA, para o modelo de sinal recebido no enlace de descida para um usuário do sistema, bem como a descrição da lista completa dos parâmetros envolvidos no modelo.

O Capítulo 3 apresenta o desenvolvimento matemático necessário para a aproximação do modelo original de sinal recebido pelo modelo de sinal recebido em um enlace de descida de um canal não seletivo em frequência. No Capítulo 4 é apresentado o procedimento necessário à realização da simulação do sistema analisado, a base para a avaliação da Probabilidade de Erro de Bits para o esquema de modulação  $M$ -QAM (*M-ary Quadrature Amplitude Modulation*) e alguns resultados obtidos com a metodologia abordada nos Capítulos 3 e 4. No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e considerações finais sobre o trabalho e em seguida são apresentadas as Referências Bibliográficas.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

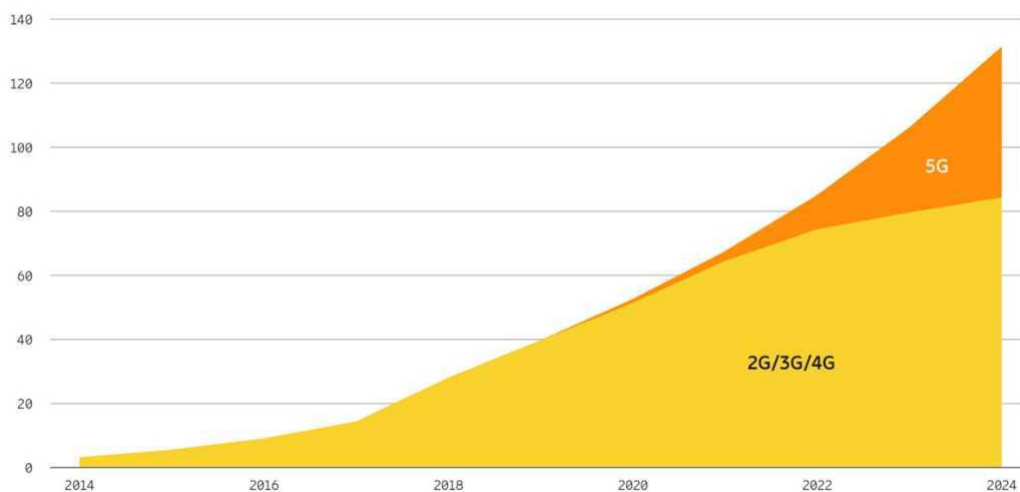
Neste capítulo são apresentados alguns dos conceitos necessários à realização deste trabalho. São tratados os aspectos mais relevantes dos sistemas MIMO massivos, dos sistemas MIMO massivos sem células e do esquema de modulação  $M$ -QAM.

### 2.1 Sistema MIMO Massivo *Cell-Free*

O crescimento da quantidade de dispositivos conectados à rede móvel observado nos últimos anos e o aumento na demanda por taxas de transferência elevadas são fenômenos decorrentes do avanço da tecnologia na área de telecomunicações. Com a chegada da quinta geração de comunicações móveis, os parâmetros e os requerimentos dos sistemas de comunicação vão mudar, o volume de dados transferidos vai aumentar em 1000 vezes, com taxas de dados de 10 a 100 vezes maior, a latência da rede deverá ser reduzida em 5 vezes e o tempo de duração das baterias em sistemas de baixa potência será dez vezes maior. A Figura 2.1 apresenta os números do tráfego de dados móveis de 2014 até os dias atuais, bem como projeções para os próximos anos, com estratificação entre as tecnologias 3G, 4G e 5G.

Neste contexto, pode-se afirmar que para atender às demandas por altas taxas de transferência de dados de dispositivos conectados às redes de comunicações sem fio, no compartilhamento de informações em grande quantidade e velocidade, nessa geração 5G e nas próximas gerações, é necessário que os três requerimentos a seguir sejam devidamente satisfeitos.

**Figura 2.1** – Tráfego de dados móveis (em Exabytes) entre 2014 e 2024 estratificado em torno das tecnologias 3G, 4G e 5G.



Fonte: (ERICSSON, 2019)

- Possibilitar elevadas taxas de transferência de dados;
- Servir simultaneamente a muitos usuários;
- Apresentar consumo de energia reduzido.

Com a intensificação dos estudos voltados para a iminente 5G, as pesquisas relacionadas aos sistemas MIMO progrediram para o conceito de sistemas MIMO massivos, que são nada mais que sistemas MU-MIMO nos quais o número de estações radiobase e o número de usuários são elevados (ZHENG; OU; YIN, 2014). Nesses sistemas, centenas ou milhares de antenas nas estações radiobase atendem simultaneamente centenas de usuários na mesma faixa de recurso espectral (NGO, 2015). Alguns dos benefícios dos sistemas MIMO massivos são

- Elevada eficiência espectral, devido ao elevado ganho de multiplexação espacial e ao ganho dado aos sinais pelos arranjos de antenas (LARSSON et al., 2014);
- Elevada eficiência de consumo de energia, porque como os sinais podem ser melhor direcionados, sofrem menos espalhamento pelos aparelhos urbanos, sofrem menos atenuação e assim demandam menos energia dos transmissores;
- Elevada confiabilidade, permitida pelo elevado ganho de diversidade do sistema;

- Menor interferência entre os sinais dos usuários do sistema devido à ortogonalidade espacial entre os canais dos usuários e aos feixes irradiados pelos arranjos de antenas serem muito estreitos;
- Esquema de agendamento de sinalização de dados eficiente, propiciado pelo fenômeno do endurecimento do canal, no qual, em média, a potência do desvanecimento de larga escala se sobressai em relação à potência média do desvanecimento de pequena escala (CHEN; BJÖRNSON, 2018). Assim, em um bloco de coerência, o valor da potência média constante do desvanecimento de larga escala é utilizado como indicador de qualidade do canal pelos algoritmos de agendamento de transmissão de sinais (HOCHWALD; MARZETTA; TAROKH, 2004);
- Robustez a falhas de elementos individuais, propiciada pelo número elevado de elementos nos arranjos de antenas.

Em relação às desvantagens do MIMO massivo pode-se citar, por exemplo

- Contaminação piloto, ou interferência entre sinais piloto: Os sinais piloto são sequências de símbolos enviadas nos enlaces de subida que são usadas pelos pontos de acesso para estimar o ganho de canal. Quanto maior for a duração de tais sequências, maior é a quantidade de sequências ortogonais que podem ser projetadas para serem usadas pelo sistema. Entretanto, a duração total das sequências deve ser menor que o tempo de coerência do canal (maior intervalo entre dois instantes de tempo no qual um sinal transmitido pelo canal pode ser considerado correlacionado) e como esse tempo de coerência é limitado, a duração e conseqüentemente a quantidade de sequências piloto é reduzida, havendo a possibilidade de canais distintos usarem as mesmas sequências;
- Elevada complexidade de processamento de sinal ocasionada pela elevada quantidade de antenas;
- Sensibilidade ao direcionamento dos feixes irradiados nos enlaces de descida, causada pelo movimento dos usuários móveis e pelo estreitamento dos feixes irradiados pelos arranjos de antenas, tornando difícil para os transmissores da estação radiobase direcioná-los com precisão para os usuários.

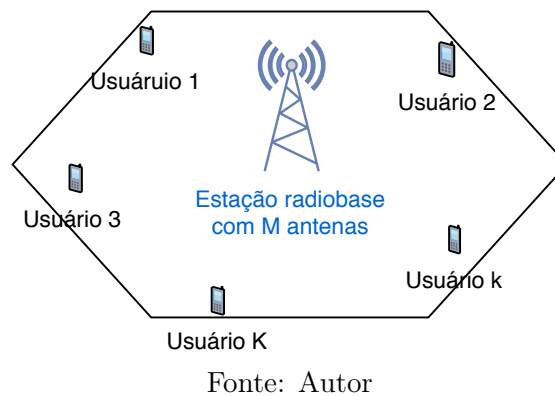
Os arranjos massivos de antenas que formam os sistemas MIMO podem ser desenvolvidos colocados nas estações radiobase ou distribuídos. Nas estruturas colocadas, todas as antenas das estações de rádio que servem o sistema são localizadas em uma área geográfica compacta e por isso demandam uma estrutura reduzida de rede de retorno de sinalização (*backhaul network*). Por outro lado, nos sistemas MIMO massivos sem células, as antenas que servem aos aparelhos dos usuários são distribuídas em amplas áreas geográficas. A vantagem dessa configuração distribuída é que os sistemas assim projetados processam de forma mais eficiente os sinais que se espalham pelo ambiente e a diversidade ofertada pelo meio de propagação pode ser melhor explorada para que o desvanecimento de grande escala (causado por sombreamento) possa ser melhor compensado (QUOC et al., 2015), (NGO et al., 2017). A probabilidade de cobertura dos sistemas distribuídos é maior que nos sistemas colocados, ao custo de um aumento nos requerimentos da estrutura de rede de retorno (CHOI; ANDREWS, 2007).

Nesse contexto, os sistemas MIMO massivos surgem como candidatos a sistemas de comunicações responsáveis por atender as demandas das novas gerações de dispositivos conectados às redes móveis. Nessa configuração de sistema, as ERBs são equipadas com um número elevado de antenas, na ordem de centenas, responsáveis por servir dezenas de usuários simultaneamente nas mesmas bases de recursos de tempo e frequência. Esses sistemas, denominados também na língua portuguesa de sistemas MIMO massivos colocados, podem atender os três requerimentos mencionados para sistemas de comunicações móveis e por isso têm sido citados como uma das principais tecnologias da quinta geração de redes de comunicações que está em fase de implantação (NGO, 2015). De maneira geral, os sistemas MIMO podem ser classificados de várias formas com base em diferentes critérios, algumas dessas principais classificações são apresentadas nos parágrafos a seguir.

Em relação ao modo como os canais de comunicação são utilizados para atender aos usuários, os sistemas MIMO podem ser classificados em ponto-a-ponto ou (*single-user-SU*) e em multiusuários ou (*multi-user-MU*). Nos sistemas MIMO ponto-a-ponto o transmissor conta com  $n_t$  antenas e o receptor com  $n_r$  antenas. A configuração na qual apenas um terminal com uma antena se comunica com uma estação radiobase com arranjo composto por múltiplas antenas conta com diversas vantagens, como a baixa interferência e o aumento nas taxas de transmissão. Entretanto, com o aumento da demanda por

serviços de comunicações móveis, torna-se necessária a utilização do canal por vários usuários de forma simultânea, o que consiste no segundo tipo de sistemas MIMO, os sistemas MIMO multiusuários ou MU-MIMO, nos quais múltiplos dispositivos utilizam o mesmo canal para realizar a transmissão e recepção, ou seja, uma estação radiobase com um arranjo composto por múltiplas antenas serve simultaneamente vários usuários. O compartilhamento de recursos do canal por diversos usuários é o que caracteriza um sistema MIMO multiusuário. Esse tipo de configuração aumenta a confiança, possibilitando ao sistema de comunicações vencer as dificuldades na transmissão de dados. A Figura 2.2 apresenta um diagrama esquemático simples para um sistema MU-MIMO colocalizado no qual  $K$  usuários são atendidos por uma estação radiobase com um arranjo de antenas.

**Figura 2.2** – Esquemático de um Sistema MU-MIMO.



Nos sistemas de comunicações móveis, os sinais transmitidos sofrem constantemente de variações aleatórias de amplitude denominadas de desvanecimento. Fenômeno de caráter degradativo imposto pelo canal de comunicações, esse efeito é decorrente do processo de propagação das ondas eletromagnéticas entre as antenas transmissora e receptora. O desvanecimento tem natureza aleatória e é usualmente classificado em relação ao tempo como rápido ou lento e quanto ao espaço em desvanecimento de pequena e larga escala.

No desvanecimento lento (*slow fading*), a variação de potência do sinal recebido é usualmente causada pelo sombreamento da antena receptora. Na área de sombreamento, o enlace em direção à antena receptora é parcialmente ou totalmente obstruído por prédios ou elevações de relevo. Fenômenos da natureza como chuvas e nevascas também são causadores do sombreamento. A variação de potência decorrente desse processo de obstrução

de enlace é usualmente caracterizada pela distribuição de probabilidade log-normal.

No desvanecimento rápido (*fast fading*), as variações de intensidade do sinal são causadas pela sobreposição, no receptor, dos componentes de sinais que se propagam por múltiplos percursos estabelecidos por reflexões e difrações das ondas transmitidas nos aparelhos urbanos ou pelo efeito Doppler. Esses componente de ondas espalhadas alcançam a antena receptora com diferentes amplitudes e fases, decorrentes respectivamente das absorções de energia e dos diferentes atrasos de propagação. O resultado é um sinal recebido cuja amplitude varia de forma aleatória e é usualmente caracterizado por distribuições de probabilidade como as de Rayleigh, Rice ou Nakagami- $m$  (GOLDSMITH, 2009), bem como por modelos mais generalizados, como o  $\kappa - \mu$  e  $\eta - \mu$  (YACOUB, 2007). Tais modelos incluem modelos clássicos como casos particulares. O desvanecimento de grande escala (*large-scale*) se dá pelo sombreamento relacionado a obstruções ao longo do percurso, atreladas a características dos percursos de propagação.

A utilização de múltiplas antenas tanto no transceptor dos terminais de acesso quanto, possivelmente, no transceptor dos equipamentos dos usuários, contribui para que os componentes de sinais espalhados pelo meio de transmissão possam ser melhor captados e combinados na antena receptora para maximizar a potência do sinal resultante e aumentar a confiabilidade do sistema. Esse conceito, no qual o sinal portador da informação é enviado por diferentes percursos para se beneficiar do percurso que lhe impõe menos perdas é conhecido como diversidade espacial e tem sido explorado por muitos estudiosos de telecomunicações.

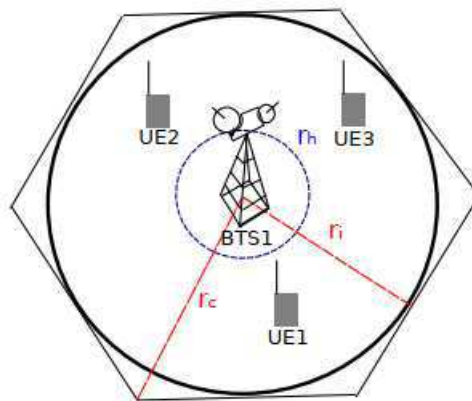
Os esforços para explorar os benefícios da diversidade espacial têm conduzido as pesquisas relacionadas aos sistemas MIMO em direção aos sistemas MU-MIMO, nos quais vários usuários são simultaneamente servidos por uma estação radiobase de múltiplas antenas. Quando se leva em consideração a presença de outros usuários sendo atendidos pelo sistema, surgem os problemas referentes aos sinais interferentes pertinentes a esses usuários, como a utilização de sequências piloto para auxiliar na identificação dos canais de subida e descida e a decorrente interferência entre essas sequências (MI et al., 2017). Os sistemas MIMO possuem diversidade espacial na transmissão e na recepção de sinais, diferentemente de outros sistemas de comunicações como MISO (*Multiple-Input Single-Output* - MISO) e SIMO (*Single-Input Multiple-Output* - SIMO) que possuem diversidade

apenas na recepção ou apenas na transmissão, respectivamente.

Nas configurações do MU-MIMO, o ganho de multiplexação espacial pode ser alcançado mesmo que cada usuário tenha uma única antena. Por multiplexação espacial entende-se a transmissão do sinal por meio de diferentes canais espaciais. Isso é importante, pois os usuários não podem suportar arranjos de antenas devido ao pequeno tamanho físico e aos requisitos de baixo custo dos seus terminais móveis, enquanto as BSs podem suportar arranjos de muitas antenas. Especificamente, usando esquemas de agendamento de transmissão de sinalização, pode-se evitar os canais mais severos. A propagação em linha de visada, por exemplo, que causa uma redução significativa de desempenho dos sistemas MIMO, não é mais um problema nos sistemas MU-MIMO.

De acordo com sua estrutura, os sistemas MU-MIMO podem ser classificados como unicelulares, multicelulares, distribuídos ou *cell-free*. Os sistemas MU-MIMO unicelulares são formados por uma única célula, com uma estação radiobase com  $L$  antenas e  $K$  terminais móveis dotados de uma antena cada. No enlace de subida (*uplink*), os terminais móveis que correspondem aos equipamentos dos usuários fazem o envio de dados para a estação radiobase e no enlace de descida (*downlink*) a estação radiobase envia dados para os equipamentos dos usuários. A Figura 2.3 apresenta um diagrama esquemático de um sistema MU-MIMO unicelular.

**Figura 2.3** – Diagrama Esquemático de um Sistema MU-MIMO Unicelular.



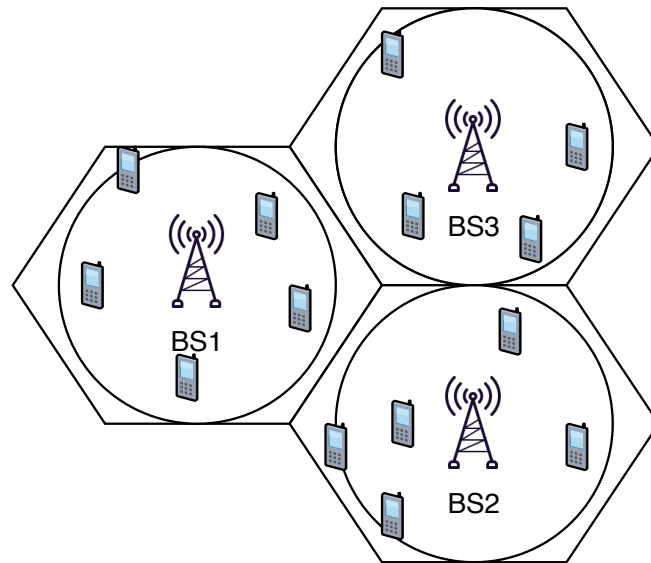
Fonte: (DUARTE, 2019)

Os sistemas MU-MIMO Multicelulares são compostos por  $N$  células adjacentes, cada uma com uma ERB com  $M$  antenas e com  $K$  terminais móveis dotados de uma antena cada. O funcionamento desses sistemas nos enlaces de subida e descida se dá



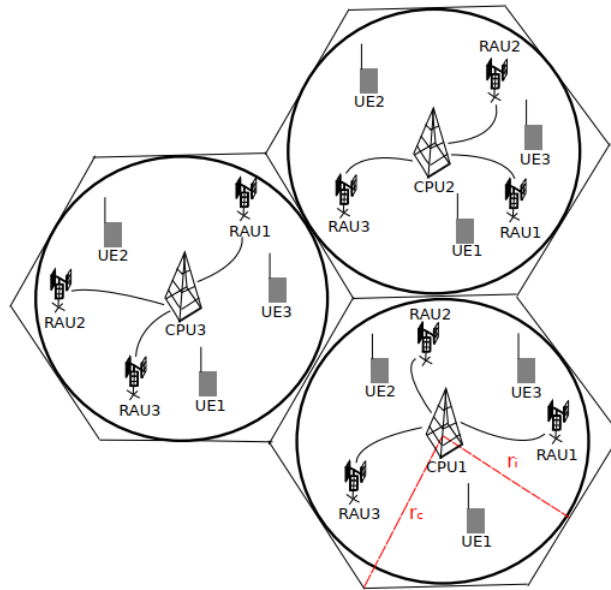
da seguinte forma. No *uplink* os terminais móveis de todas as células transmitem dados para sua respectiva estação radiobase de modo que os sinais de células vizinhas se somam na recepção, enquanto no *downlink* as estações radiobase de todas as células transmitem para os respectivos terminais móveis. A Figura 2.4 apresenta o esquemático de um sistema MU-MIMO Multicelular.

**Figura 2.4** – Esquemático de um Sistema MU-MIMO Multicelular.



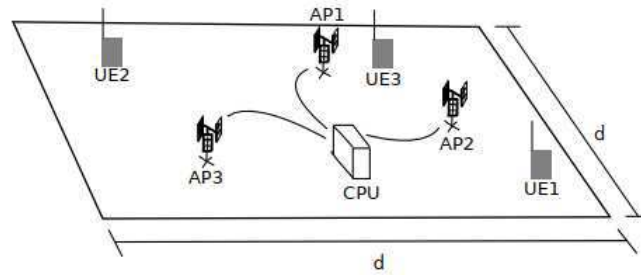
Fonte: Autor

Os sistemas MU-MIMO distribuídos possuem  $L$  células, cada uma dotada de  $K$  terminais móveis e  $N$  unidades de antenas remotas ou (*Remote Antenna Unity* - RAU) com  $M$  antenas cada, sendo todas as RAUs conectadas a uma unidade de processamento central, responsável pela administração dos dados em trânsito e pela coordenação da transmissão dessas informações. No *uplink* os terminais móveis transmitem para suas ERB e no modo de *downlink* as  $M$  antenas das  $N$  RAUs transmitem para os  $K$  terminais móveis das  $L$  células. A Figura 2.5 apresenta o esquemático de um sistema MU-MIMO distribuído.

**Figura 2.5** – Diagrama Esquemático de um Sistema MU-MIMO Distribuído.

Fonte: (DUARTE, 2019)

Os sistemas MU-MIMO *cell-free* não contam com fronteiras entre as células. Nestes sistemas,  $K$  terminais móveis e  $L$  pontos de acesso são distribuídos em uma região quadrada de área  $d^2$ . Cada um desses pontos de acesso conta com uma antena e estão ligados pela *backhaul* a uma mesma unidade central de processamento (CPU). No enlace de subida, todos os terminais móveis transmitem para todos os pontos de acesso, enquanto no enlace de descida os  $L$  pontos de acesso transmitem para os  $K$  terminais móveis do sistema. O principal aspecto dos sistemas MIMO massivos sem células é que suas muitas estações de rádio (usualmente com uma única antena denominadas de pontos de acesso) servem a muitos equipamentos de usuários simultaneamente com processamento computacional relativamente reduzido (em relação aos sistemas MIMO massivo colocados). Esse aspecto facilita a exploração dos percursos de propagação favoráveis e o endurecimento do canal, permitindo também o uso de algoritmos eficientes de controle de potência e esquemas simples de atribuição de sequências piloto (usadas pelos processadores dos pontos de acesso para estimar o ganho dos canais dos enlaces de subida) (BASHAR et al., 2018). A Figura 2.6 apresenta o diagrama esquemático de um sistema MU-MIMO *cell-free*.

**Figura 2.6** – Esquemático de um Sistema MU-MIMO Cell-Free.

Fonte: (DUARTE, 2019)

O aumento do número de antenas eleva o limite inferior da capacidade total, o que propicia a redução dos efeitos do ruído e também do desvanecimento de pequena escala (NAYEBI et al., 2015). Em (NAYEBI et al., 2015), o desempenho de algoritmos de otimização dos coeficientes de potência para o *downlink*, usando as pré-codificações por forçamento a zero e por *beamforming* (formação de feixes direcionados), é avaliado por meio da máxima taxa de transmissão alcançável. Os resultados obtidos com o método de otimização max-min é comparado àquele obtido com o uso de coeficientes uniformes. O desempenho do sistema *cell-free* também é comparado com o desempenho de um sistema composto por células de raios pequenos. Os resultados revelam que os sistemas sem célula, com ou sem otimização dos coeficientes de potência, apresentam desempenho superior ao observado com o uso de células pequenas.

Apesar de serem compostos por muitos pontos de acesso, os sistemas sem célula não conservam a propriedade denominada endurecimento do canal, o que pode provocar um fenômeno de auto-interferência. Em um sistema com pontos de acesso compostos por uma única antena, essa interferência pode ter potência equivalente  $1/3$  do sinal de interesse, e quase  $2/3$  da interferência total. A fim de torná-la desprezível, algumas dezenas de antenas devem ser consideradas para os pontos de acesso.

Em um sistema MIMO massivo *cell-free* com  $L$  pontos de acesso (dispostos aleatoriamente na área de serviço) e  $K$  usuários servidos simultaneamente por meio dos mesmos recursos de tempo e frequência, Hien et al. (NGO et al., 2017) apresenta a Expressão Equação 2.1 para o sinal recebido pelo  $k$ -ésimo usuário do sistema, na saída do filtro casado do receptor.

O intervalo de coerência do canal é dividido em três partes: A identificação dos ganhos de canal nos enlaces de subida, a transmissão de dados nos enlaces de subida e a transmissão de dados nos enlaces de descida. Na identificação do estado do canal no enlace de subida, os usuários enviam sequências-piloto para todos os pontos de acesso e cada um desses estima o canal para todos os usuários. Os ganhos de canais estimados são usados para pré-codificar os sinais transmitidos nos enlaces de descida (NGO et al., 2017).

Assume-se o canal como recíproco, no qual os ganhos nos enlaces de descida e subida são iguais. Os desvanecimentos em grande e pequena escala são considerados, sendo o primeiro bastante lento (durando cerca de 40 intervalos de coerência) e o segundo constante durante um intervalo de coerência e independente entre intervalos de coerência. Assim, o sinal recebido  $r_{d,k}$  pode ser escrito como

$$r_{d,k} = \sqrt{\rho_d} \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} g_{lk} \hat{g}_{lk}^* q_k + \sqrt{\rho_d} \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'}^{\frac{1}{2}} g_{lk'} \hat{g}_{lk'}^* q_{k'} + w_{dk}. \quad (2.1)$$

Nesta expressão

1.  $L$  representa o número de pontos de acesso do sistema;
2.  $K$  representa o número de usuários móveis;
3.  $\eta_{lk}$  é o coeficiente de controle de potência do enlace entre o  $k$ -ésimo usuário e o  $l$ -ésimo ponto de acesso;
4.  $g_{lk}$  é uma variável aleatória gaussiana complexa de média nula e variância  $\beta_{lk}$  que representa o desvanecimento imposto pelo canal do enlace entre o  $l$ -ésimo ponto de acesso e o  $k$ -ésimo usuário. As variáveis  $g_{lk}$  também podem ser referidas como ganho de canal ou coeficiente de canal;
5.  $\hat{g}_{lk}$  é uma variável aleatória gaussiana complexa de média nula e variância  $\gamma_{lk}$  que representa a estimativa do ganho de canal  $g_{lk}$ , realizada no enlace de subida a partir das sequências piloto;
6.  $q_k$  representa os símbolos de informação, de energia média unitária. Neste trabalho esses símbolos são considerados aleatórios e equiprováveis, sorteados de uma

constelação  $M$ -QAM normalizada de energia média total igual a  $M$ ;

7.  $w_{dk}$  representa o ruído gaussiano branco aditivo caracterizado por uma variável aleatória gaussiana complexa de média nula e variância unitária;
8.  $\sqrt{\rho_d}q_k$  representa então um símbolo de energia média  $\rho_d$ .

O primeiro termo de  $r_{d,k}$  representa o sinal desejado afetado pelos ganhos dos canais de descida e pelas estimativas dos ganhos dos canais de subida. O segundo termo representa a interferência dos sinais dos múltiplos usuários do sistema e o terceiro termo representa o ruído aditivo gaussiano branco. Em relação ao ruído gaussiano branco de variância unitária, o termo  $\rho_d$  também pode ser visto como a relação sinal-ruído (*Signal-Noise Ratio* - SNR) do sistema. Em relação ao indexador  $l$ , todas as variáveis de  $r_{d,k}$  são independentes e identicamente distribuídas. O termo  $g_{lk}$  ainda pode ser reescrito como

$$g_{lk} = \beta_{lk}^{\frac{1}{2}} h_{lk}, \quad (2.2)$$

em que  $\beta_{lk}^{\frac{1}{2}}$  representa o desvanecimento de grande escala e  $h_{lk}$  é uma variável gaussiana complexa de média nula e variância unitária que representa o desvanecimento de pequena escala. Os pontos de acesso são conectados entre si por meio de uma rede de retorno (*backhaul network*).

Dado então que o modelo de sinal recebido  $r_{dk}$  esteja devidamente caracterizado, o objetivo seguinte é o processo de aproximação do sinal  $r_{dk}$ , por meio do TCLL, por um modelo de sinal recebido em um canal não seletivo em frequência. Esse sinal pode então ser escrito como

$$r_{d,k} = \sqrt{\rho_d} S_1 q_k + \sqrt{\rho_d} S_2 + w_{dk}, \quad (2.3)$$

em que  $S_1$  e  $S_2$  são, respectivamente

$$S_1 = \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} g_{lk} \hat{g}_{lk}^* \quad (2.4)$$

$$S_2 = \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'}^{\frac{1}{2}} g_{lk'} \hat{g}_{lk'}^* q_{k'}. \quad (2.5)$$

Nota-se, nesse modelo reduzido, que  $S_1$  passa a representar o efeito multiplicativo de

desvanecimento, enquanto  $S_2 + w_{dk}$  passa a representar o ruído branco. No Capítulo 3 é apresentada a formulação matemática que valida essa aproximação.

A principal vantagem do modelo de sinal recebido simplificado pelo TCLL é que ele permite o cálculo de uma expressão para a avaliação da Probabilidade de Erro por Bits para o sistema. Essa probabilidade pode ser avaliada calculando-se inicialmente a PEB sob o ruído branco e em seguida tomando-se média da expressão obtida pela Função Densidade de Probabilidade (FDP) da SNR instantânea no canal. A FDP da SNR instantânea pode ser calculada a partir da FDP da envoltória do desvanecimento.

## 2.2 Esquema de Modulação $M$ -QAM

Neste estudo, os símbolos  $q_k$  são considerados a partir de um esquema de modulação  $M$ -QAM, estes são símbolos equiprováveis com energia unitária, de modo que a energia total da constelação seja igual a sua ordem  $M$ . É por meio da modulação que os dados a serem transmitidos são protegidos da influência do meio de propagação e por meio de um processo inverso, conhecido como demodulação, que os dados transmitidos são recuperados pelo receptor. No esquema de modulação  $M$ -QAM, o sinal transmitido pode ser representado por

$$s_{M\text{-QAM}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k p(t - kT_s) \cos(2\pi f_c t + \Theta) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k p(t - kT_s) \sin(2\pi f_c t + \Theta), \quad (2.6)$$

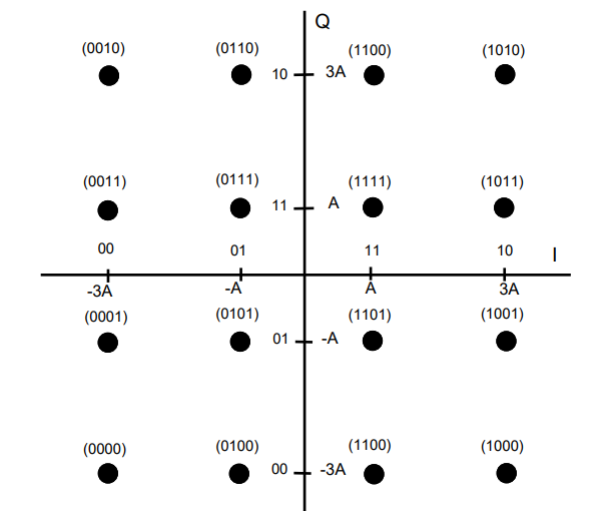
em que  $T_s$  é o intervalo de sinalização,  $f_c$  é a frequência da portadora,  $\Theta$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída em um intervalo de comprimento  $2\pi$ ,  $b_k$  e  $d_k$  são amplitudes que tomam valores no conjunto  $\{\pm A, \pm 3A, \dots, \pm(\sqrt{M} - 1)A\}$  e  $p(t)$  é um pulso que atende aos critérios de Nyquist de formatação de pulsos.

Alguns exemplos de emprego para a  $M$ -QAM são os enlaces de rádio digital e micro-ondas, transmissões em altas taxas de transferência de dados, televisão digital de alta definição, em modems, cable modems e ADSL. A modulação  $M$ -QAM pode ser 4-QAM, 16-QAM, 32-QAM, 64-QAM, 128-QAM, 256-QAM, 512-QAM, 1024-QAM, 2048-QAM,

4096-QAM ou mais densas. No Brasil é utilizada a modulação 256-QAM pela NET, nas transmissões de sinal digital para TV, internet 4G e conexões de rádio por satélite.

Nesta forma de modulação, palavras binárias de  $m$  bits são mapeadas em  $M = 2^m$  pares de portadoras ortogonais de mesma frequência em fase, mas com amplitudes distintas. Esse mapeamento de palavras binárias nas amplitudes das portadoras ortogonais seno e cosseno é feito com auxílio do código de Gray, de forma que haja a variação de apenas um bit entre símbolos vizinhos. A Figura 2.7 apresenta o mapeamento de Gray para um esquema de modulação 16-QAM.

**Figura 2.7** – Mapeamento de Gray para a modulação 16-QAM.



Fonte: (ALTAMIRANO; ALMEIDA, 2011)

# Capítulo 3

## Aproximação do Sinal Recebido

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento matemático necessário ao cálculo de uma aproximação para o sinal recebido  $r_{dk}$  na saída de um filtro casado no receptor de um enlace de descida de um sistema MIMO massivo sem célula. A expressão original de  $r_{dk}$ , representada pela Equação 2.1 deste texto, e apresentada em (NGO et al., 2017), é expressa em termos de símbolos  $q_k$  caracterizados por variáveis aleatórias gaussianas complexas de média nula e variância unitária. Neste texto são considerados símbolos equiprováveis da constelação  $M$ -QAM. O resultado do desenvolvimento é a expressão de  $r_{dk}$  como um sinal captado em um canal não seletivo em frequência afetado por desvanecimento plano e ruído gaussiano branco aditivo (NGO et al., 2017).

A aproximação é realizada aplicando-se o TCLL à primeira soma, denotada neste texto por  $S_1$ , e à segunda soma dupla, denotada por  $S_2$ . É verificado então que  $S_1$  pode ser aproximada por uma variável aleatória gaussiana complexa com componentes independentes, de médias e variâncias distintas e o módulo de  $S_1$  pode ser caracterizado pela distribuição de Beckman. A variável  $S_2$  pode ser aproximada por uma variável gaussiana complexa com componentes independentes e com média nula.

### 3.1 Análise da Covariância de $S_1$ e $S_2$

Antes de apresentar a análise da aproximação de  $S_1$  e  $S_2$ , é importante avaliar a correlação dessas variáveis. Será então empregado o seguinte raciocínio, se  $S_1$  e  $S_2$  forem variáveis descorrelacionadas e no limite, de acordo com o TCLL, tenderem para variáveis aleatórias gaussianas, então  $S_1$  e  $S_2$  também serão, no limite, à medida que o número de



variáveis envolvidas nas somas  $S_1$  e  $S_2$  aumenta, independentes.

Da teoria de Probabilidade e Estatística, a covariância entre duas variáveis complexas  $S_1$  e  $S_2$  é escrita como

$$\text{COV}(S_1, S_2) = E[S_1 S_2^*] - E[S_1]E[S_2^*]. \quad (3.1)$$

Levando em consideração que os símbolos  $q_k$  sejam simétricos, então  $E[S_2] = 0$ , o que torna o segundo termo da covariância nulo, reduzindo assim a expressão da covariância a

$$\text{COV}(S_1, S_2) = E[S_1 S_2^*]. \quad (3.2)$$

Deste modo, para que as variáveis  $S_1$  e  $S_2$  sejam descorrelacionadas, é necessário que  $E[S_1 S_2^*] = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} E[S_1 S_2^*] &= \sqrt{\rho_d} E \left[ \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{mk}^{\frac{1}{2}} \eta_{nk'}^{\frac{1}{2}} g_{mk} \hat{g}_{mk}^* g_{nk} \hat{g}_{nk'}^* q_{k'}^* \right] \\ &= \sqrt{\rho_d} \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{mk}^{\frac{1}{2}} \eta_{nk'}^{\frac{1}{2}} E [g_{mk} \hat{g}_{mk}^* g_{nk} \hat{g}_{nk'}^*] E [q_{k'}^*] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

pois  $E[q_{k'}^*] = 0$ , pela razão relativa à simetria dos símbolos  $q_k$ . Assim  $E[S_1 S_2^*] = 0$  e pode-se afirmar que  $S_1$  e  $S_2$  são descorrelacionados. Portanto, se  $S_1$  e  $S_2$  forem variáveis gaussianas, então  $S_1$  e  $S_2$  também serão independentes.

As gaussianidades de  $S_1$  e  $S_2$  são estabelecidas a partir da aplicação do TCLL. Dada então a convergência de  $S_1$  e  $S_2$  para variáveis gaussianas independentes, o canal de comunicação no enlace de descida pode ser aproximado por um canal não-seletivo em frequência com desvanecimento gaussiano complexo  $S_1$ , interferência  $S_2$  e ruído gaussiano complexo  $w_{dk}$ .

O propósito desse estudo é então o cálculo da PEB associada aos símbolos  $M$ -QAM  $q_k$  a partir do modelo de sinal aproximado apresentado na Equação 2.3.

## 3.2 Avaliação da Soma $S_1$

Dado que  $S_1$  possa ser escrito como

$$S_1 = \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} g_{lk} \hat{g}_{lk}^*, \quad (3.4)$$

em que  $\hat{g}_{lk}$  representa a estimativa de ganho do canal  $g_{lk}$  e que  $\epsilon_{lk}$  representa o erro de estimação, pode-se escrever

$$g_{lk} = \epsilon_{lk} + \hat{g}_{lk}, \quad (3.5)$$

de modo que  $S_1$  pode ser escrito como

$$S_1 = \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} \hat{g}_{lk}^* (\epsilon_{lk} + \hat{g}_{lk}). \quad (3.6)$$

Escrevendo  $\hat{g}_{lk}$ ,  $\epsilon_{lk}$  em termos de suas partes real e imaginária, pode-se escrever  $S_1$  como

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} (\text{Re}\{\hat{g}_{lk}\} + j\text{Im}\{\hat{g}_{lk}\})^* (\text{Re}\{\epsilon_{lk}\} + j\text{Im}\{\epsilon_{lk}\}) + \text{Re}\{\hat{g}_{lk}\} + j\text{Im}\{\hat{g}_{lk}\} \\ &= \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} (\text{Re}\{\hat{g}_{lk}\} - j\text{Im}\{\hat{g}_{lk}\}) (\text{Re}\{\epsilon_{lk}\} + j\text{Im}\{\epsilon_{lk}\}) + \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} |\hat{g}_{lk}|^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

de modo que as partes real e imaginária de  $S_1$  podem ser escritas como

$$\text{Re}\{S_1\} = \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} (|\hat{g}_{lk}|^2 + \text{Re}\{\hat{g}_{lk}\}\text{Re}\{\epsilon_{lk}\} + \text{Im}\{\hat{g}_{lk}\}\text{Im}\{\epsilon_{lk}\}) \quad (3.8)$$

e

$$\text{Im}\{S_1\} = \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} (\text{Re}\{\hat{g}_{lk}\}\text{Im}\{\epsilon_{lk}\} - \text{Im}\{\hat{g}_{lk}\}\text{Re}\{\epsilon_{lk}\}). \quad (3.9)$$

Assumindo então que

- $\epsilon_{lk} \sim \mathcal{CN}(0, \beta_{lk} - \gamma_{lk})$ ,
- $\hat{g}_{lk} \sim \mathcal{CN}(0, \gamma_{lk})$ ,
- As componentes real e imaginária de  $\epsilon_{lk}$  e  $\hat{g}_{lk}$  são independentes,

- $\epsilon_{lk}$  e  $\hat{g}_{lk}$  são independentes,

pode-se escrever que os valores esperados das partes real e imaginária de  $S_1$  são

$$\begin{aligned} E[\operatorname{Re}\{S_1\}] &= \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} E[|\hat{g}_{lk}|^2] = \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} \gamma_{lk} \\ E[\operatorname{Im}\{S_1\}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Em seguida é necessário que sejam calculados os valores de  $E[\operatorname{Re}\{S_1\}]^2$  e  $E[\operatorname{Re}\{S_1\}^2]$  para que se possa obter a variância de  $S_1$ . Para  $E[\operatorname{Re}\{S_1\}]^2$  tem-se que

$$\begin{aligned} E[\operatorname{Re}\{S_1\}]^2 &= \sum_{l=1}^L \sum_{h=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} \eta_{hk}^{\frac{1}{2}} \gamma_{lk} \gamma_{hk} \\ &= \sum_{l=1}^L \eta_{lk} \gamma_{lk}^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq l}}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} \eta_{hk}^{\frac{1}{2}} \gamma_{lk} \gamma_{hk}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

O cálculo de  $E[\operatorname{Re}\{S_1\}^2]$  é realizado como segue

$$\begin{aligned} E[\operatorname{Re}\{S_1\}^2] &= \sum_{l=1}^L \sum_{h=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} \eta_{hk}^{\frac{1}{2}} E \left[ (|\hat{g}_{lk}|^2 + \operatorname{Re}\{\hat{g}_{lk}\} \operatorname{Re}\{\epsilon_{lk}\} + \operatorname{Im}\{\hat{g}_{lk}\} \operatorname{Im}\{\epsilon_{lk}\}) \right. \\ &\quad \left. (|\hat{g}_{hk}|^2 + \operatorname{Re}\{\hat{g}_{hk}\} \operatorname{Re}\{\epsilon_{hk}\} + \operatorname{Im}\{\hat{g}_{hk}\} \operatorname{Im}\{\epsilon_{hk}\}) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Após desenvolver o produto e aplicar o valor esperado, pode-se verificar que o segundo, terceiro, quarto, sexto, sétimo e oitavo termos têm média nula, bem como o quinto termo quando  $l \neq h$ . Levando então em consideração os termos diferentes de zero e agrupando-os,  $E[\operatorname{Re}\{S_1\}^2]$  pode ser escrito como

$$E[\operatorname{Re}\{S_1\}^2] = \sum_{l=1}^L 2\eta_{lk} \gamma_{lk}^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq l}}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} \eta_{hk}^{\frac{1}{2}} \gamma_{lk} \gamma_{hk} + \sum_{l=1}^L \eta_{lk} \frac{\gamma_{lk}(\beta_{lk} - \gamma_{lk})}{2}. \quad (3.13)$$

De posse dos valores de  $E[\operatorname{Re}\{S_1\}]^2$  e  $E[\operatorname{Re}\{S_1\}^2]$ , é possível então obter uma expressão para a variância de  $\operatorname{Re}\{S_1\}$ ,

$$\operatorname{Var}[\operatorname{Re}\{S_1\}] = E[\operatorname{Re}\{S_1\}^2] - E[\operatorname{Re}\{S_1\}]^2, \quad (3.14)$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\text{Re}\{S_1\}] &= 2 \sum_{l=1}^L \eta_{lk} \gamma_{lk}^2 + \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{h=1 \\ l \neq h}}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} \eta_{hk}^{\frac{1}{2}} \gamma_{lk} \gamma_{hk} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \eta_{lk} \gamma_{lk} (\beta_{lk} - \gamma_{lk}) - \sum_{l=1}^L \eta_{lk} \gamma_{lk}^2 \\
&- \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{h=1 \\ l \neq h}}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} \eta_{hk}^{\frac{1}{2}} \gamma_{lk} \gamma_{hk}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

e pode ser simplificado como

$$\text{Var}[\text{Re}\{S_1\}] = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \eta_{lk} \gamma_{lk} (\beta_{lk} + \gamma_{lk}). \tag{3.16}$$

De maneira análoga ao desenvolvimento para a parte real de  $S_1$ , procede-se com a parte imaginária, que tem valor esperado nulo e para  $E[\text{Im}\{S_1\}^2]$ , o segundo e terceiro termos do produto são nulos para quaisquer  $l$  e  $h$ , enquanto o primeiro e quarto termos do produto só são nulos para  $l \neq h$ , de forma que somando e agrupando,  $E[\text{Im}\{S_1\}^2]$  pode ser escrito como

$$E[\text{Im}\{S_1\}^2] = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \eta_{lk} \gamma_{lk} (\beta_{lk} - \gamma_{lk}). \tag{3.17}$$

Como o valor esperado da parte imaginária de  $S_1$  é nulo, pode-se verificar que a variância da parte imaginária de  $S_1$  é igual a  $E[\text{Im}\{S_1\}^2]$ , de modo que

$$\text{Var}[\text{Im}\{S_1\}] = E[\text{Im}\{S_1\}^2] = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \eta_{lk} \gamma_{lk} (\beta_{lk} - \gamma_{lk}). \tag{3.18}$$

A partir dos resultados obtidos pode-se então escrever que

$$\begin{aligned}
 \mu_{R_1} &= \text{E}[\text{Re}\{S_1\}] = \sum_{l=1}^L \eta_{lk}^{\frac{1}{2}} \gamma_{lk} \\
 \sigma_{R_1}^2 &= \text{Var}[\text{Re}\{S_1\}] = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M \eta_{lk} \gamma_{lk} (\gamma_{lk} + \beta_{lk}) \\
 \mu_{I_1} &= \text{E}[\text{Im}\{S_1\}] = 0 \\
 \sigma_{I_1}^2 &= \text{Var}[\text{Im}\{S_1\}] = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M \eta_{lk} \gamma_{lk} (\beta_{lk} - \gamma_{lk})
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Com os resultados de valor esperado e variância das partes real e imaginária de  $S_1$  e utilizando o TCLL para  $L \rightarrow \infty$ , pode-se estabelecer que

$$\begin{aligned}
 \text{Re}\{S_1\} &\sim \mathcal{N}(\mu_{R_1}, \sigma_{R_1}^2) \\
 \text{Im}\{S_1\} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{I_1}^2).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

### 3.3 Avaliação da Envoltória de $S_1$

Dado que a soma  $S_1$  possa ser aproximada, por meio do TCLL, por uma variável gaussiana complexa de componentes independentes e parâmetros distintos, então sua envoltória tem distribuição caracterizada pela FDP de Beckman. Para analisar a independência dos componentes de  $S_1$ , pode-se usar o mesmo raciocínio empregado na Seção 3.1, ou seja, avaliar a covariância dos componentes de  $S_1$  e concluir que, dado que esses componentes sejam descorrelacionados, então, por serem aproximadamente gaussianos, serão aproximadamente independentes no limite. É importante reforçar que só é possível concluir que descorrelação implica em independência, de acordo com o conhecimento do autor, para variáveis aleatórias gaussianas.

A covariância dos componentes de  $S_1$ ,  $\text{Re}\{S_1\}$  e  $\text{Im}\{S_1\}$ , pode ser escrita como

$$\text{COV}(\text{Re}\{S_1\}, \text{Im}\{S_1\}) = \text{E}[(\text{Re}\{S_1\} - \text{E}[\text{Re}\{S_1\}])(\text{Im}\{S_1\} - \text{E}[\text{Im}\{S_1\}])], \tag{3.21}$$

que ainda pode ser escrita como

$$\text{COV}(\text{Re}\{S_1\}, \text{Im}\{S_1\}) = \text{E}[\text{Re}\{S_1\}\text{Im}\{S_1\}], \quad (3.22)$$

pelo fato da média de  $\text{Im}\{S_1\}$  ser nula.

Substituindo os resultados obtidos nas Equações 3.8 e 3.9 para as partes real e imaginária de  $S_1$ , respectivamente, na Equação 3.22, tem-se

$$\begin{aligned} \text{COV}(\text{Re}\{S_1\}, \text{Im}\{S_1\}) &= \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \eta_{mk}^{\frac{1}{2}} \eta_{nk}^{\frac{1}{2}} \text{E} [ (|g_{mk}|^2 + \text{Re}\{\hat{g}_{mk}\}\text{Re}\{\epsilon_{mk}\} \\ &\quad + \text{Im}\{\hat{g}_{mk}\}\text{Im}\{\epsilon_{mk}\}) (\text{Re}\{\hat{g}_{nk}\}\text{Im}\{\epsilon_{nk}\} - \text{Re}\{\epsilon_{nk}\}\text{Im}\{\hat{g}_{nk}\}) ]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Realizando o produto e considerando o fato que todos os termos são variáveis gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média nula, tem-se

$$\text{COV}(\text{Re}\{S_1\}, \text{Im}\{S_1\}) = 0. \quad (3.24)$$

Portanto, como no limite,  $\text{Re}\{S_1\}$  e  $\text{Im}\{S_1\}$  são variáveis gaussianas, então elas podem também ser consideradas independentes.

Este resultado também permite concluir que, no limite, para  $L$  elevado, o valor absoluto de  $S_1$  tem FDP de Beckman (AALO; EFTHYMOGLOU; CHAYAWAN, 2007), que é a FDP do valor absoluto de uma variável aleatória gaussiana complexa de médias e variâncias distintas. Assim

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \frac{r}{2\pi\sigma_{R_1}\sigma_{I_1}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{R_1}^2}{\sigma_{R_1}^2} + \frac{\mu_{I_1}^2}{\sigma_{I_1}^2}\right)\right] \exp\left[-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_{R_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{I_1}^2}\right)\right] \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_{R_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{I_1}^2}\right) \cos 2\phi + \frac{\mu_{R_1}}{\sigma_{R_1}^2} r \cos \phi + \frac{\mu_{I_1}}{\sigma_{I_1}^2} r \text{sen} \phi\right] d\phi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

que, pelo fato de  $\mu_{I_1} = 0$ , pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \frac{r}{2\pi\sigma_{R_1}\sigma_{I_1}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{R_1}^2}{\sigma_{R_1}^2}\right)\right] \exp\left[-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_{R_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{I_1}^2}\right)\right] \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_{R_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{I_1}^2}\right) \cos 2\phi + \frac{\mu_{R_1}}{\sigma_{R_1}^2} r \cos \phi\right] d\phi. \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.4 Avaliação da Soma $S_2$

De maneira análoga ao que foi realizado para a soma  $S_1$  nas seções anteriores, pode-se proceder para a soma  $S_2$ , com o cálculo do valor esperado, da variância e a aplicação do TCLL.

Se  $S_2$  é dado por

$$S_2 = \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'}^{\frac{1}{2}} g_{lk} \hat{g}_{lk'}^* q_{k'}, \quad (3.27)$$

então, como as variáveis  $g_{lk}$ ,  $\hat{g}_{lk}^*$  e  $q_{k'}$  são independentes e complexas com média nula,  $E[S_2] = 0$ , pois

$$E[S_2] = \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'}^{\frac{1}{2}} E[g_{lk}] E[\hat{g}_{lk'}^*] E[q_{k'}] \quad (3.28)$$

e

$$E[g_{lk}] = E[\hat{g}_{lk'}^*] = E[q_{k'}] = 0. \quad (3.29)$$

Lembrando que o coeficiente de ganho do canal pode ser reescrito em termos do erro de estimação e da estimativa do ganho do canal, a expressão para  $S_2$  pode ser reescrita como

$$S_2 = \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'}^{\frac{1}{2}} (\epsilon_{lk} + \hat{g}_{lk}) \hat{g}_{lk'}^* q_{k'}. \quad (3.30)$$

Esta expressão também tem valor esperado nulo pois todas as variáveis da soma são independentes e identicamente distribuídas com média nula. Como a variância da soma é igual à soma das variâncias, tem-se então que

$$\text{Var}[S_2] = \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \text{Var}[\hat{g}_{lk'}^* (\epsilon_{lk} + \hat{g}_{lk}) q_{k'}] \quad (3.31)$$

$$= \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} E[|\hat{g}_{lk'}^* (\epsilon_{lk} + \hat{g}_{lk})|^2 |q_{k'}|^2] \quad (3.32)$$

$$= \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} E[|\hat{g}_{lk'}^* (\epsilon_{lk} + \hat{g}_{lk})|^2] E[|q_{k'}|^2], \quad (3.33)$$

em que

$$E [|\hat{g}_{lk'}^*(\epsilon_{lk} + \hat{g}_{lk})|^2] = E [(\hat{g}_{lk'}^* \epsilon_{lk} + \hat{g}_{lk'}^* \hat{g}_{lk})(\hat{g}_{lk'} \epsilon_{lk}^* + \hat{g}_{lk'} \hat{g}_{lk}^*)] \quad (3.34)$$

$$= \gamma_{lk'}(\beta_{lk} - \gamma_{lk}) + \gamma_{lk'}\gamma_{lk} = \gamma_{lk'}\beta_{lk}. \quad (3.35)$$

Deste modo, a variância da soma  $S_2$  pode ser escrita como

$$\text{Var}[S_2] = \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \gamma_{lk'} \beta_{lk} E[q_{k'}]. \quad (3.36)$$

A parte real da soma  $S_2$  é dada por

$$\begin{aligned} \text{Re}\{S_2\} &= \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'}^{\frac{1}{2}} [(\text{Re}\{\epsilon_{lk}\} + \text{Re}\{\hat{g}_{lk}\})(\text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Re}\{q_{k'}\} + \text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Im}\{q_{k'}\}) \\ &\quad - (\text{Im}\{\epsilon_{lk}\} + \text{Im}\{\hat{g}_{lk}\})(\text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Im}\{q_{k'}\} - \text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Re}\{q_{k'}\})] \\ &= \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'}^{\frac{1}{2}} [\text{Re}\{\epsilon_{lk}\}\text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Re}\{q_{k'}\} + \text{Re}\{\hat{g}_{lk}\}\text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Re}\{q_{k'}\} \\ &\quad + \text{Re}\{\epsilon_{lk}\}\text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Im}\{q_{k'}\} + \text{Re}\{\hat{g}_{lk}\}\text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Im}\{q_{k'}\} \\ &\quad - \text{Im}\{\epsilon_{lk}\}\text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Im}\{q_{k'}\} + \text{Im}\{\epsilon_{lk}\}\text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Im}\{q_{k'}\} \\ &\quad - \text{Im}\{\hat{g}_{lk}\}\text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Im}\{q_{k'}\} + \text{Im}\{\hat{g}_{lk}\}\text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\}\text{Re}\{q_{k'}\}]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Como todos os termos desta soma são independentes, então a variância de  $\text{Re}\{S_2\}$  é igual à soma das variâncias dos termos da soma. Todos os termos desta soma têm média nula e assim a variância destes termos é igual a seu segundo momento. No cálculo desse segundo momento, o valor esperado de todos os produtos cruzados, indexados por índices distintos, é nulo, restando apenas o valor esperado dos valores quadrados.

Assim, obtém-se uma expressão para  $\text{Var}[\text{Re}\{S_2\}]$ , escrita como

$$\begin{aligned} \text{Var}[\text{Re}\{S_2\}] &= \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \left( \frac{\gamma_{lk'}(\beta_{lk} - \gamma_{lk})}{2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk} \gamma_{lk'}}{2} \frac{\sigma^2}{2} \right. \\ &\quad + \frac{\gamma_{lk'}(\beta_{lk} - \gamma_{lk})}{2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk} \gamma_{lk'}}{2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk'}(\beta_{lk} - \gamma_{lk})}{2} \frac{\sigma^2}{2} \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_{lk'}(\beta_{lk} - \gamma_{lk})}{2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk} \gamma_{lk'}}{2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk} \gamma_{lk'}}{2} \frac{\sigma^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$



que pode ser simplificada como

$$\text{Var}[\text{Re}\{S_2\}] = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \gamma_{lk'} \beta_{lk}, \quad (3.39)$$

em que  $\sigma^2 = \text{E}[|q_{k'}|^2]$ .

De maneira análoga ao que foi realizado para a parte real de  $S_2$ , para a parte imaginária, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Im}\{S_2\} &= \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'}^{\frac{1}{2}} [\text{Im}\{\epsilon_{lk}\} \text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\} \text{Re}\{q_{k'}\} + \text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\} \text{Im}\{\epsilon_{lk}\} \text{Im}\{q_{k'}\} \\ &\quad + \text{Im}\{\hat{g}_{lk}\} \text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\} \text{Re}\{q_{k'}\} + \text{Im}\{\hat{g}_{lk}\} \text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\} \text{Im}\{q_{k'}\} \\ &\quad + \text{Re}\{\epsilon_{lk}\} \text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\} \text{Im}\{q_{k'}\} + \text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\} \text{Re}\{\epsilon_{lk}\} \text{Re}\{q_{k'}\} \\ &\quad + \text{Re}\{\hat{g}_{lk}\} \text{Re}\{\hat{g}_{lk'}\} \text{Im}\{q_{k'}\} + \text{Re}\{\hat{g}_{lk}\} \text{Im}\{\hat{g}_{lk'}\} \text{Re}\{q_{k'}\}]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Valendo-se mais uma vez das semelhanças com a parte real da soma  $S_2$ , para  $\text{Im}\{S_2\}$  utiliza-se o fato que como todos os termos desta soma são independentes, então a variância de  $\text{Im}\{S_2\}$  é igual à soma das variâncias dos termos da soma. Todos os termos desta soma têm média nula e assim a variância destes termos é igual a seu segundo momento. No cálculo desses segundos momentos, o valor esperado de todos os produtos cruzados, indexados por índices distintos, é nulo, restando apenas o valor esperado dos valores quadrados, o que leva à seguinte expressão

$$\begin{aligned} \text{Var}[\text{Im}\{S_2\}] &= \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \left( \frac{\gamma_{lk'} (\beta_{lk} - \gamma_{lk}) \sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk'} (\beta_{lk} - \gamma_{lk}) \sigma^2}{2} \right. \\ &\quad + \frac{\gamma_{lk} \gamma_{lk'} \sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk} \gamma_{lk'} \sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk} \gamma_{lk'} \sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk} \gamma_{lk'} \sigma^2}{2} \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_{lk'} (\beta_{lk} - \gamma_{lk}) \sigma^2}{2} + \frac{\gamma_{lk'} (\beta_{lk} - \gamma_{lk}) \sigma^2}{2} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \gamma_{lk'} \beta_{lk}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

A partir dos resultados obtidos pode-se então escrever que

$$\begin{aligned}
 \mu_{R_2} &= \text{E}[\text{Re}\{S_2\}] = 0 \\
 \sigma_{R_2}^2 &= \text{Var}[\text{Re}\{S_2\}] = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \gamma_{lk'} \beta_{lk} \\
 \mu_{I_2} &= \text{E}[\text{Im}\{S_2\}] = 0 \\
 \sigma_{I_2}^2 &= \text{Var}[\text{Im}\{S_2\}] = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \gamma_{lk'} \beta_{lk}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Com os resultados de valor esperado e variância das partes real e imaginária de  $S_2$  e utilizando o TCLL para  $L \rightarrow \infty$ , pode-se estabelecer que

$$\begin{aligned}
 \text{Re}\{S_2\} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{R_2}^2) \\
 \text{Im}\{S_2\} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{I_2}^2).
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

A partir da similaridade entre os valores das variâncias das partes real e imaginária da soma  $S_2$ , pode-se fazer as seguintes considerações.

$$\begin{aligned}
 S_2 &\sim \mathcal{CN}(0, \sigma_{S_2}^2), \\
 \sigma_{S_2}^2 &= \sigma_{R_2}^2 + \sigma_{I_2}^2.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Com a utilização do TCLL, pode-se realizar a aproximação da soma  $S_2$  por uma variável gaussiana complexa de média nula e variância  $\sigma_{S_2}$ . Para analisar a independência dos componentes de  $S_2$ , pode-se empregar um raciocínio análogo ao da Seção 3.3 e concluir que como as componentes de  $S_2$  são descorrelacionadas, então por serem variáveis aleatórias gaussianas no limite, suas componentes são independentes.

A covariância dos componentes de  $S_2$ ,  $\text{Re}\{S_2\}$  e  $\text{Im}\{S_2\}$ , pode ser escrita como

$$\text{COV}(\text{Re}\{S_2\}, \text{Im}\{S_2\}) = \text{E}[(\text{Re}\{S_2\} - \text{E}[\text{Re}\{S_2\}])(\text{Im}\{S_2\} - \text{E}[\text{Im}\{S_2\}])], \tag{3.45}$$

que pode ser reescrita a partir do fato que os valores esperados de ambas as componentes é nulo. A partir do desenvolvimento da expressão da covariância, e assim como realizado para  $S_1$ , do fato que todos os termos de  $S_2$  são variáveis aleatórias gaussianas

independentes e identicamente distribuídas com valor esperado igual a zero, tem-se que

$$\text{COV}(\text{Re}\{S_2\}, \text{Im}\{S_2\}) = \text{E}[\text{Re}\{S_2\}\text{Im}\{S_2\}] = 0. \quad (3.46)$$

Deste modo, sendo  $\text{Re}\{S_2\}$  e  $\text{Im}\{S_2\}$  variáveis gaussianas no limite, então elas podem também ser consideradas independentes entre si.

Em relação ao valor esperado  $\text{E}[|q_{k'}|^2]$ , se for assumido que os símbolos  $q_{k'}$  são de uma constelação  $M$ -QAM quadrada normalizada de energia total  $M$ , então a energia média por símbolo é unitária. Deste modo, a energia média por símbolo  $\sqrt{\rho_d} \cdot q_{k'}$  é igual a

$$E_s = \text{E}[|\sqrt{\rho_d} \cdot q_{k'}|^2] = \rho_d. \quad (3.47)$$

Assim, se um símbolo da constelação  $M$ -QAM representa  $\log_2 M$  bits e  $E_b$  corresponde à energia de um bit, então  $\rho_d$  pode ser escrita como

$$\rho_d = E_b \log_2 M, \quad (3.48)$$

o que permite aproximar  $S_2$  por

$$\begin{aligned} S_2 &\sim \mathcal{CN}(0, \sigma_{S_2}^2), \\ \sigma_{S_2}^2 &= E_b \log_2 M \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \gamma_{lk'} \beta_{lk}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Deste modo, conclui-se que como as somas  $S_1$  e  $S_2$  podem ser aproximadas por variáveis gaussianas descorrelacionadas e independentes, o sinal recebido  $r_{dk}$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} r_{dk} &= S_1 q_k + S_2 + w_{dk} \\ r_{dk} &= S_1 q_k + N_{dk}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

em que

$$N_{dk} = S_2 + w_{dk}. \quad (3.51)$$

Portanto o sinal recebido pelo  $k$ -ésimo usuário pode ser aproximado pelo sinal recebido em um canal não seletivo em frequência com desvanecimento de Beckman (AALO;

EFTHYMOGLOU; CHAYAWAN, 2007) e ruído gaussiano branco aditivo. A sequência de variáveis gaussianas  $N_{dk}$ , composta por  $S_2$  e por  $w_{dk}$ , forma um processo ruído branco com média nula e variância total igual à soma das variâncias de  $S_2$  e de  $w_{dk}$ , o que resulta em

$$\sigma_{dk}^2 = 1 + \sigma_{S_2}^2. \quad (3.52)$$

Assim,  $N_{dk}$  tem autocorrelação  $R_{N_{dk}}(\tau)$  e Densidade Espectral de Potência (DEP)  $S_{N_{dk}}(\tau)$ , dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} R_{N_{dk}}(\tau) &= \frac{N_{\text{Tot}}}{2} \delta(\tau), \\ S_{N_{dk}}(\tau) &= \frac{N_{\text{Tot}}}{2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Tem-se assim que a DEP total do ruído branco  $N_{dk}$  deve ser igual a  $\sigma_{dk}^2$ , o que resulta nas expressões

$$\sigma_{dk}^2 = \frac{N_{\text{Tot}}}{2} \quad (3.54)$$

e

$$\frac{N_{\text{Tot}}}{2} = 1 + E_b \log_2 M \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \gamma_{lk'} \beta_{lk}. \quad (3.55)$$

### 3.5 Avaliação da Probabilidade de Erro de Bit

Para avaliar a probabilidade de erro de detecção de bits a partir do sinal recebido  $r_{dk} = S_{1k}q_k + N_{dk}$ , para  $q_k$  sendo símbolo de uma constelação  $M$ -QAM quadrada com mapeamento de bits por código de Gray, é necessário avaliar a média da PEB sob ruído gaussiano branco pela FDP da SNR instantânea do sinal sob desvanecimento, de modo que

$$P_e = \int_0^{\infty} P(e|\gamma_k) f_{\Gamma_k}(\gamma_k) d\gamma_k, \quad (3.56)$$

em que  $\Gamma_k$  é uma variável aleatória que caracteriza a SNR instantânea no tempo de símbolo e é dada por

$$\Gamma_k = \frac{E_b}{N_0} R_k^2, \quad (3.57)$$

em que  $\frac{N_0}{2}$  é a DEP do ruído aditivo branco  $w_{dk}$ . De acordo com (YOON; CHO, 2002) a PEB da constelação  $M$ -QAM é dada por

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{m=1}^{\log_2 \sqrt{M} (1-2^{-m})\sqrt{M}-1} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}-1} w(i, m, M) \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{2(M-1)N_{\text{Tot}}}} \right), \quad (3.58)$$

que pode ser reescrita como

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{m=1}^{\log_2 \sqrt{M} (1-2^{-m})\sqrt{M}-1} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}-1} w(i, m, M) \times \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{4(M-1)(1 + E_b \log_2 M S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}))}} \right), \quad (3.59)$$

em que  $S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$  pode ser escrito como

$$S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{l=1}^L \sum_{k' \neq k}^K \eta_{lk'} \gamma_{lk'} \beta_{lk} \quad (3.60)$$

e  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  representa a função erro complementar.

Esta última expressão de  $P_e$  pode ainda ser escrita em termos da relação entre a energia de bit  $E_b$  e a DEP do ruído branco aditivo  $w_{dk}$  de variância unitária, de modo que

$$\begin{aligned} \sigma_{dk}^2 &= \frac{N_0}{2} \\ N_0 &= 2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dividindo então o numerador e o denominador da raiz da função  $\operatorname{erfc}$  por 2, tem-se

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{m=1}^{\log_2 \sqrt{M} (1-2^{-m})\sqrt{M}-1} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}-1} w(i, m, M) \times \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \frac{E_b}{2}}{4(M-1)(\frac{1}{2} + \frac{E_b}{2} \log_2 M \cdot S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}))}} \right). \quad (3.62)$$

Deste modo, o terceiro termo do denominador da raiz de  $\operatorname{erfc}$  corresponde a  $\frac{N_{\text{Tot}}}{2}$ .

Assim, como

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_b}{2} = \gamma, \quad (3.63)$$

pode-se reescrever  $P_e$  como

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{m=1}^{\log_2 \sqrt{M} (1-2^{-m})\sqrt{M}-1} \sum_{i=1}^{\log_2 \sqrt{M} (1-2^{-m})\sqrt{M}-1} w(i, m, M) \times \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \gamma}{2(M-1)(1+2\gamma \log_2 MS(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}))}} \right), \quad (3.64)$$

ou ainda

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{m=1}^{\log_2 \sqrt{M} (1-2^{-m})\sqrt{M}-1} \sum_{i=1}^{\log_2 \sqrt{M} (1-2^{-m})\sqrt{M}-1} w(i, m, M) \times \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{a(i, M) \gamma}{(1+2\gamma \log_2 MS(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}))}} \right), \quad (3.65)$$

em que

$$a(i, M) = \frac{3(2i+1)^2 \log_2 M}{2(M-1)}. \quad (3.66)$$

Assim, tem-se para o  $k$ -ésimo usuário

$$P(e|\gamma_k) = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{m=1}^{\log_2 \sqrt{M} (1-2^{-m})\sqrt{M}-1} \sum_{i=1}^{\log_2 \sqrt{M} (1-2^{-m})\sqrt{M}-1} w(i, m, M) \times \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{a(i, M) \gamma_k}{(1+2\gamma_k \log_2 MS(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}))}} \right). \quad (3.67)$$

Para que se possa avaliar a expressão 3.56 é necessário calcular  $f_{\Gamma_k}(\gamma_k)$  para a FDP de Beckman, da envoltória de  $S_1$ . O subíndice  $k$  denota então a SNR do  $k$ -ésimo usuário do sistema no enlace de descida. Considerando a Expressão 3.57, com  $R_k$  variável positiva, pode-se verificar que

$$f_{\Gamma_k}(\gamma_k) = \frac{\gamma_k^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}} f_{R_k} \left( \sqrt{\frac{\gamma_k}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}} \right), \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}
f_{\Gamma_k}(\gamma_k) &= \frac{\gamma_k^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}} \frac{1}{2\pi\sigma_{R_1}\sigma_{I_1}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\mu_{R_1^2}}{\sigma_{R_1^2}}\right] \frac{\gamma_k^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}} \\
&\times \exp\left[-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\sigma_{R_1^2}} + \frac{1}{\sigma_{I_1^2}}\right) \frac{\gamma_k}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right] \\
&\times \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{4\left(\frac{E_b}{N_0}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sigma_{R_1^2}} - \frac{1}{\sigma_{I_1^2}}\right) \cos 2\phi + \frac{\mu_{R_1}}{\sigma_{R_1^2}} \sqrt{\frac{\gamma_k}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}} \cos \phi\right] d\phi,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
f_{\Gamma_k}(\gamma_k) &= \frac{1}{4\pi\sigma_{R_1}\sigma_{I_1}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_{R_1^2}}{\sigma_{R_1^2}}\right] \\
&\times \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{4\left(\frac{E_b}{N_0}\right)} \cdot \left(\left(\frac{1}{\sigma_{R_1^2}} + \frac{1}{\sigma_{I_1^2}}\right) + \left(\frac{1}{\sigma_{R_1^2}} - \frac{1}{\sigma_{I_1^2}}\right) \cos 2\phi\right)\right] \\
&\times \exp\left[\frac{\mu_{R_1}}{\sigma_{R_1^2}} \sqrt{\frac{\gamma_k}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}} \cos \phi\right] d\phi.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Dessa forma, a probabilidade  $P_e$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \frac{1}{4\pi\sigma_{R_1}\sigma_{I_1}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_{R_1^2}}{\sigma_{R_1^2}}\right] \\
&\times \sum_{m=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{i=1}^{(1-2^{-m})\sqrt{M}-1} w(i, m, M) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{\mu_{R_1}}{\sigma_{R_1^2}} \sqrt{\frac{\gamma_k}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}} \cos \phi\right] \\
&\times \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{a(i, M)\gamma_k}{(1 + 2\gamma_k \log_2 MS(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}))}}\right) \\
&\times \exp\left[-\frac{\gamma_k}{4\left(\frac{E_b}{N_0}\right)} \cdot \left(\left(\frac{1}{\sigma_{R_1^2}} + \frac{1}{\sigma_{I_1^2}}\right) + \left(\frac{1}{\sigma_{R_1^2}} - \frac{1}{\sigma_{I_1^2}}\right) \cos 2\phi\right)\right] d\gamma_k d\phi.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

A integral imprópria pode então ser resolvida ou numericamente ou por meio de uma quadratura de Gauss-Laguerre. A resolução dessa integral é deixada como trabalho futuro.

# Capítulo 4

## Resultados

Neste capítulo são analisados alguns resultados obtidos a partir de simulações computacionais para validar uma aproximação de sinal recebido em um enlace de descida de um sistema MIMO massivo *cell-free*, utilizando o ambiente computacional Matlab®. Por meio das simulações, é possível obter histogramas das amostras geradas por meio do método de Monte Carlo e assim atestar as considerações matemáticas feitas no Capítulo 3 para a aproximação do sinal recebido afetado por desvanecimento caracterizado por uma variável aleatória gaussiana complexa, somado a um ruído gaussiano branco aditivo.

### 4.1 Simulação do Sistema MIMO Massivo *Cell-Free*

Para a validação estatística do sinal recebido pelo  $k$ -ésimo usuário ser possível, é necessário simular um enlace de descida de um sistema MIMO massivo *cell-free*. Para isso são inicializados inicialmente valores para os parâmetros que caracterizam o sistema. Entre os parâmetros inseridos na simulação, alguns são utilizados no cálculo das perdas de propagação no enlace entre o  $m$ -ésimo ponto de acesso e o  $k$ -ésimo usuário, por meio do modelo de predição de perdas COST Hata-231 apresentado na Equação 4.1,

$$PL_{mk} = \begin{cases} -L - 35 \log_{10}(d_{mk}), & d_{mk} > d_1 \\ -L - 15 \log_{10}(d_1) - 20 \log_{10}(d_{mk}), & d_0 < d_{mk} \leq d_1 \\ -L - 15 \log_{10}(d_1) - 20 \log_{10}(d_0), & d_{mk} \leq d_0 \end{cases}, \quad (4.1)$$



em que

$$L = 46,3 + 33,9 \log_{10}(f) - 13,82 \log_{10}(h_{ap}) \\ - (1,1 \log_{10}(f) - 0,7)h_u + (1,56 \log_{10}(f) - 0,8). \quad (4.2)$$

O parâmetro  $\beta_{mk}$ , que caracteriza o desvanecimento de grande escala no enlace entre o  $m$ -ésimo ponto de acesso e o  $k$ -ésimo usuário, é dado por

$$\beta_{mk} = 10^{\frac{1}{10}(P_{L_{mk}} + \sigma_{sh}z_{mk})}, \quad (4.3)$$

o parâmetro  $\gamma_k$  que representa a variância do ganho de canal estimado no enlace entre o  $m$ -ésimo ponto de acesso e o  $k$ -ésimo usuário pode ser dado por

$$\gamma_k = \frac{\tau \rho_p \beta_{mk}^2}{\tau \rho_p \sum_{k'=1}^K \beta_{mk'} |\phi_k^H \phi_{k'}|^2 + 1}, \quad (4.4)$$

em que

$$\rho_p = \frac{\hat{\rho}_p}{B_N K_B T_0 F_N}, \quad (4.5)$$

e os demais parâmetros têm o significado listado a seguir

$\phi_k^H$  Transposição hermitiana da sequência piloto do  $k$ -ésimo usuário.

$d_{mk}$  Distância entre o  $m$ -ésimo ponto de acesso e o  $k$ -ésimo usuário do sistema.

$z_{mk}$  Variável aleatória gaussiana de média nula e variância unitária.

$f$  Frequência do sinal portador da informação, no valor de 1900 MHz.

$h_u$  Altura da antena do usuário em metros, a altura utilizada foi de 1,65 m.

$h_{ap}$  Altura da antena dos pontos de acesso, a altura inserida foi de 15 m.

$\sigma_{sh}$  Desvio padrão do sombreamento, de magnitude 9 dB.

$D$  Dimensão da área atendida pelo sistema estudado, correspondente a 1000  $m^2$ .

$K$  Número de usuários atendidos, com valores considerados entre 20 e 40 usuários.

$L$  Número de pontos de acesso disponibilizados, com valores considerados entre 100 e 200 APs.

$\tau$  Quantidade de símbolos por sequência piloto, com 20 símbolos para cada uma das  $K$  sequências piloto estabelecidas.

$\hat{\rho}_p$  Potência dos símbolos piloto, com o valor de 100 mW.

$K_B$  Constante de Boltzmann igual a  $1,381 \times 10^{-23}$ .

$F_N$  Fator de ruído, de magnitude 9 dB.

$T_o$  Temperatura do ruído, com valor utilizado igual a 290 K.

$B_N$  Largura de faixa do ruído, equivalente a 20 MHz.

$N_{amos}$  Número de amostras utilizadas no *loop* principal da simulação, os valores utilizados variaram de 50000 a 100000 amostras.

Utilizando valores típicos da área atendida pelo sistema em estudo, número de usuários e número de pontos de acesso, foram estabelecidos vetores representativos para as coordenadas dos usuários dispostos na área atendida pelo sistema em estudo, assim como um vetor de coordenadas dos pontos de acesso dispostos na área atendida pelo sistema. De posse das coordenadas tanto dos usuários quanto dos pontos de acesso, foi possível estabelecer uma matriz cujos elementos representam as distâncias entre os usuários e os pontos de acesso.

O estabelecimento da disposição física dos usuários e pontos de acesso na área atendida pelo sistema MIMO massivo *cell-free* possibilitou a aplicação da Equação 4.1 para cada um dos  $K$  usuários em relação a todos os  $L$  pontos de acesso do sistema. Uma matriz foi gerada com  $K$  sequências pilotos destinadas aos  $K$  usuários, de modo a não haver reuso de sequências, evitando assim a contaminação entre usuários por meio da utilização de sequências piloto entre múltiplos usuários.

A partir de parâmetros como a quantidade de símbolos por sequência piloto, potência dos símbolos piloto, fator e temperatura de ruído, largura de faixa do ruído e fator de potência dos símbolos piloto é possível estabelecer matrizes com os valores dos

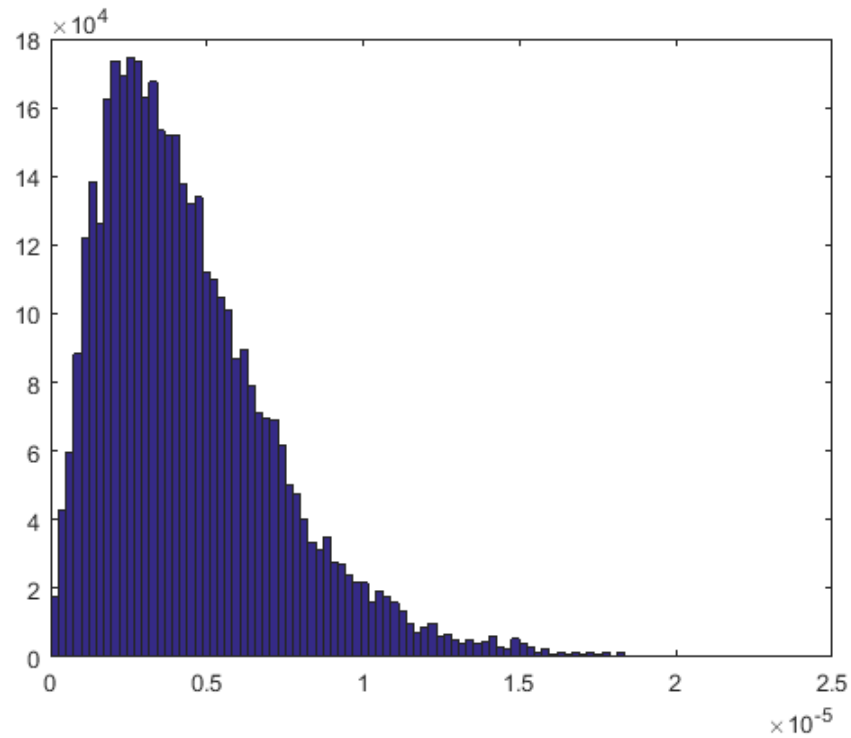
coeficientes  $\gamma_{lk}$  e também dos coeficientes de controle de potência  $\eta_{lk}$ , utilizados para estabelecer variáveis correspondentes às variâncias e valores esperados das somas  $S_1$  e  $S_2$ . De posse de variáveis atreladas às somas utilizadas na aproximação do sinal recebido, assim como de suas partes reais e imaginárias, foram gerados números elevados de amostras para  $S_1$  e  $S_2$ .

## 4.2 Histogramas gerados para $S_1$ e $S_2$

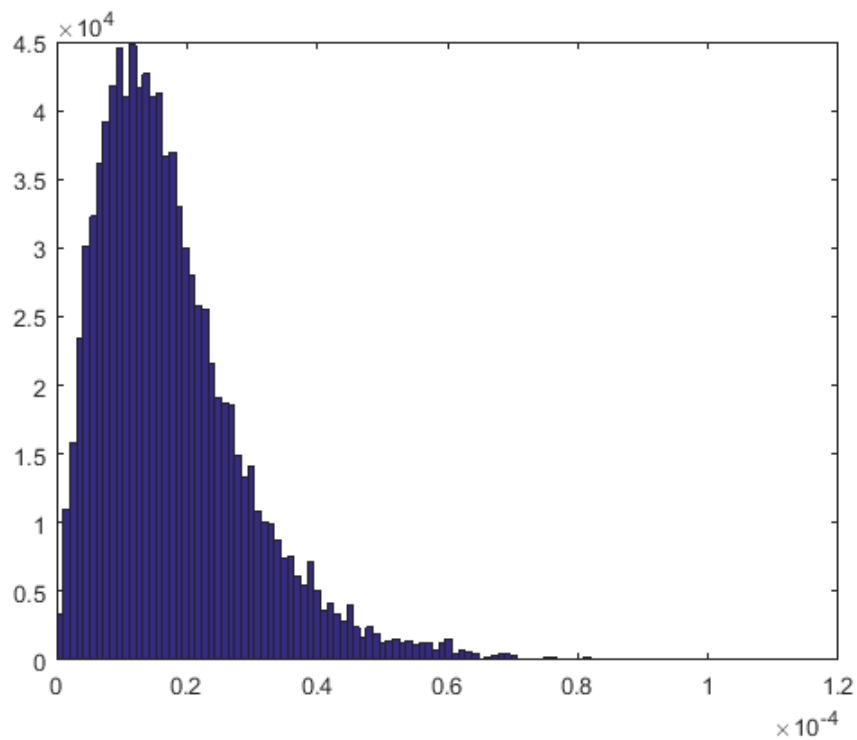
Como descrito na Seção 4.1, foram obtidas variáveis que representam as somas  $S_1$  e  $S_2$  e, por meio da variação no número  $K$  de usuários e  $L$  de pontos de acesso, é possível observar o comportamento dos histogramas gerados por meio do método de Monte Carlo para obter resultados numéricos correspondentes às envoltórias de  $S_1$  e  $S_2$ , bem como para suas partes real e imaginária, atestando assim a aproximação desses histogramas da curva característica da FDP de uma variável aleatória gaussiana.

### 4.2.1 Histogramas gerados para as envoltórias de $S_1$ e $S_2$

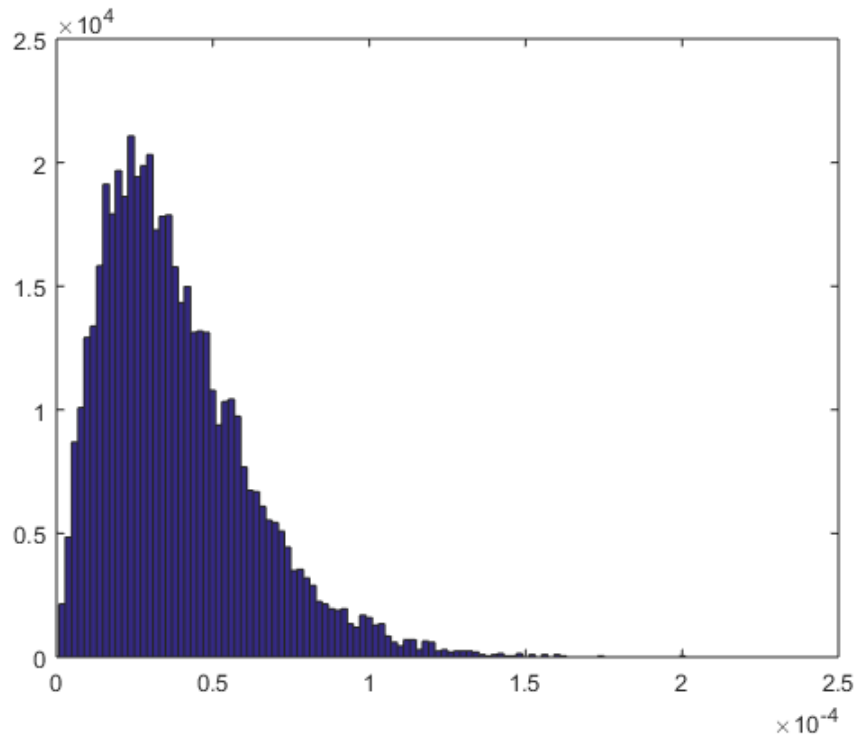
Os primeiros histogramas gerados são relacionadas às envoltórias das somas  $S_1$ , apresentados nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, bem como de  $S_2$ , nas Figuras 4.4, 4.5, 4.6. É possível constatar que conforme o número de usuários e pontos de acesso são incrementados e  $N_{amos} = 10000$ , os histogramas para as envoltórias das duas somas analisadas se aproximam da curva característica da FDP da envoltória de uma variável gaussiana.

**Figura 4.1** – Histograma da envoltória de  $S_1$  para  $L = 50$  e  $K = 10$ .

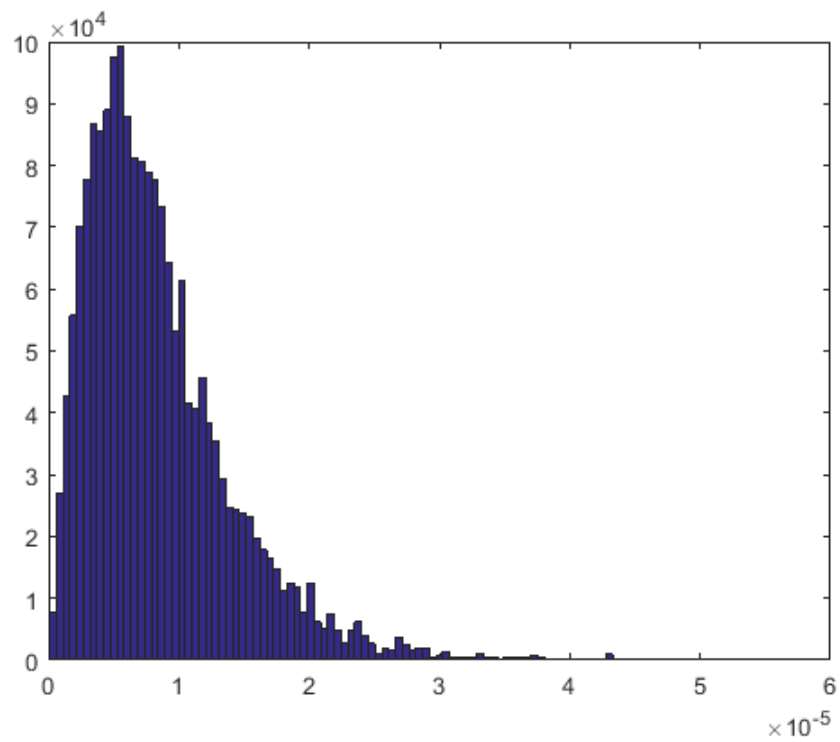
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.2** – Histograma da envoltória de  $S_1$  para  $L = 100$  e  $K = 20$ .

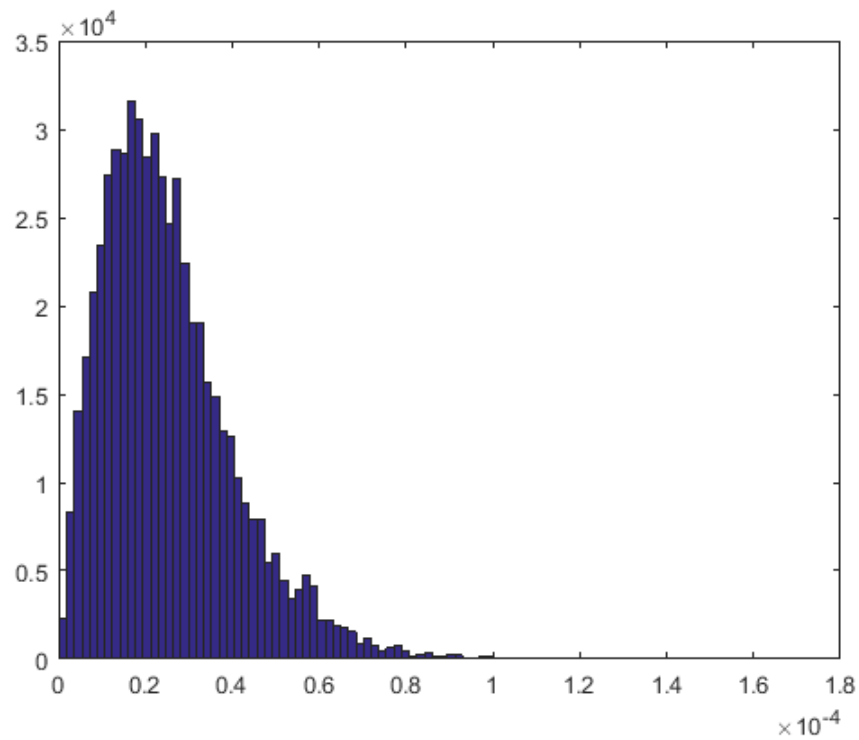
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.3** – Histograma da envoltória de  $S_1$  para  $L = 200$  e  $K = 40$ .

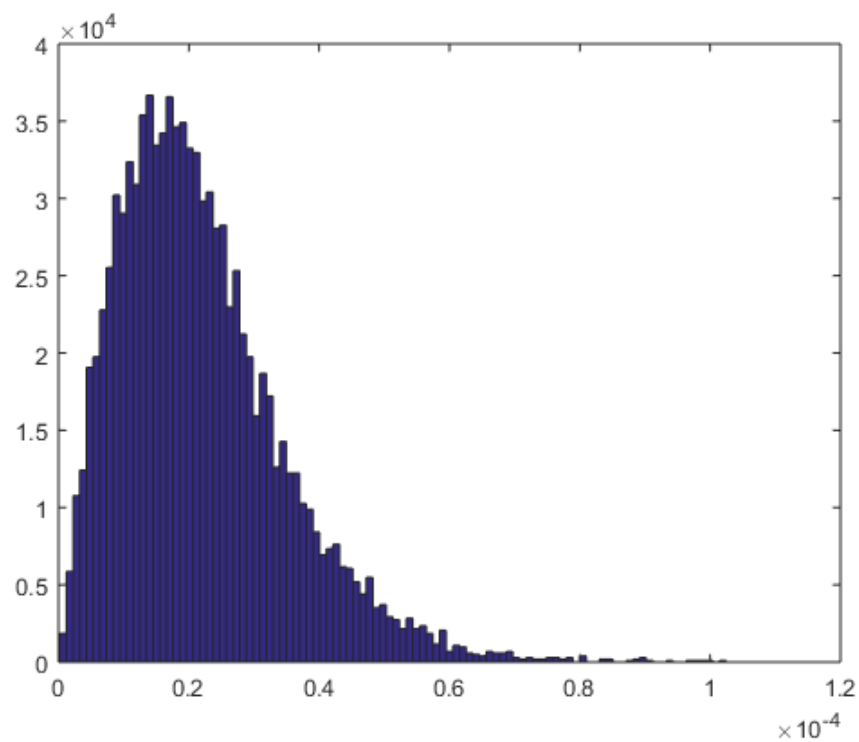
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.4** – Histograma da envoltória de  $S_2$  para  $L = 40$  e  $K = 10$ .

Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.5** – Histograma da envoltória de  $S_2$  para  $L = 100$  e  $K = 20$ .

Fonte: Próprio Autor.

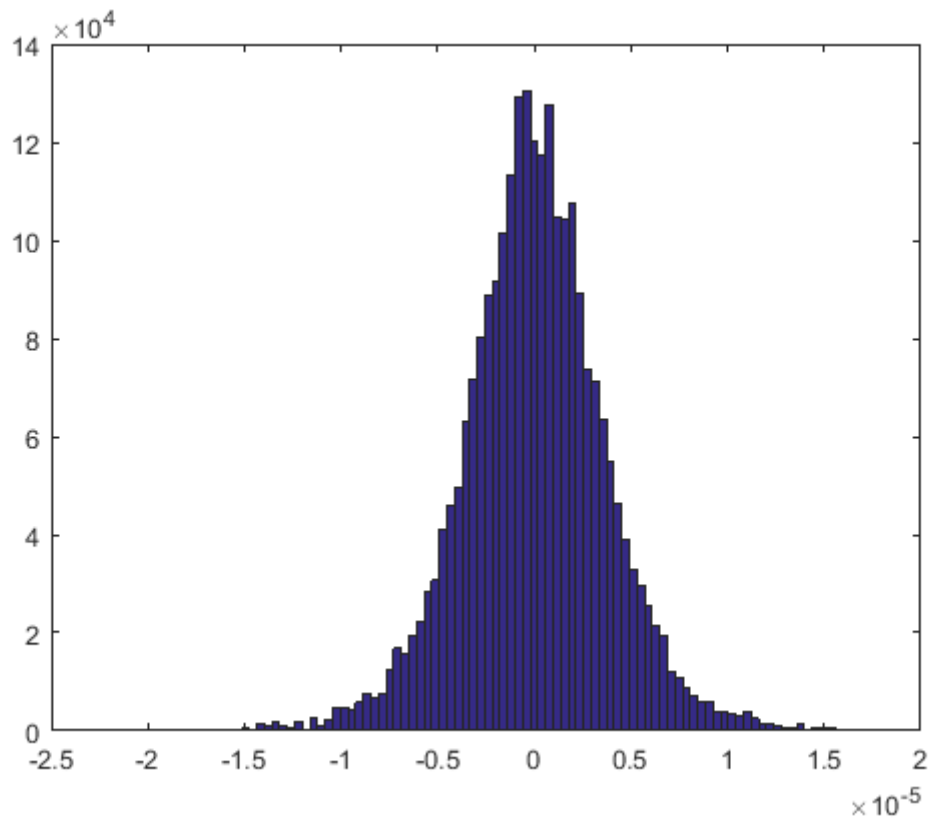
**Figura 4.6** – Histograma da envoltória de  $S_2$  para  $L = 200$  e  $K = 40$ .

Fonte: Próprio Autor.

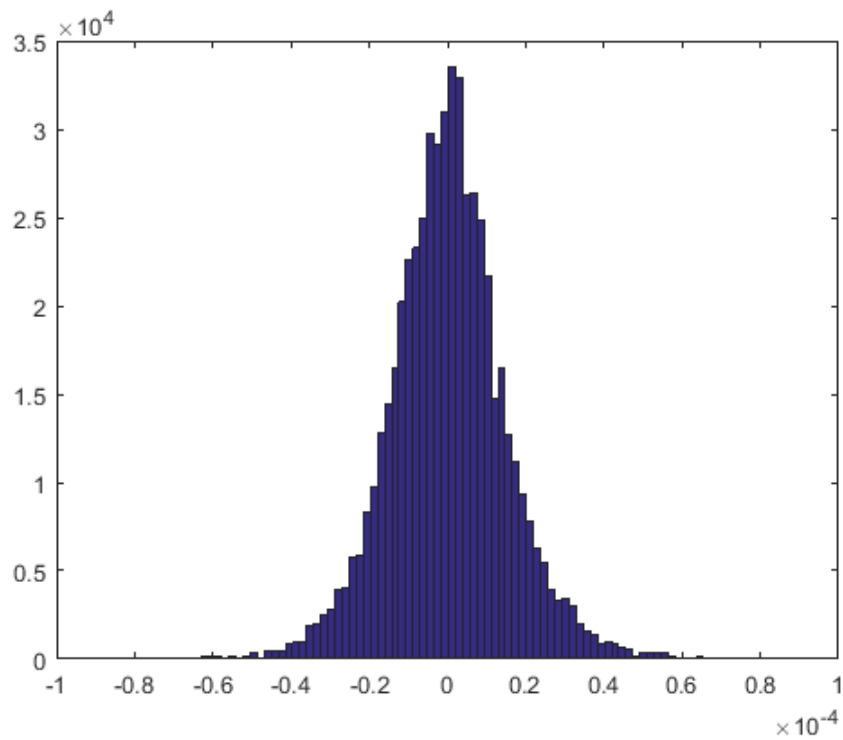
### 4.2.2 Histogramas gerados para as partes real e imaginária de $S_1$

Empregando o procedimento de geração dos histogramas da Seção 4.2.1, para  $N_{amos} = 10000$ , e incrementando o número de usuários atendidos pelo sistema e de pontos de acesso disponibilizados, observa-se uma mudança no formato dos histogramas tanto da parte imaginária quanto da parte real de  $S_1$ , de modo que com o aumento de  $L$  e  $K$ , as curvas passam a se assemelhar com a curva característica de uma variável aleatória gaussiana, como pode ser observado nas Figuras 4.7, 4.8, 4.9 ( $N_{amos} = 100000$ ) para a parte real de  $S_1$  e nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12 ( $N_{amos} = 100000$ ) para a parte imaginária da soma  $S_1$ .

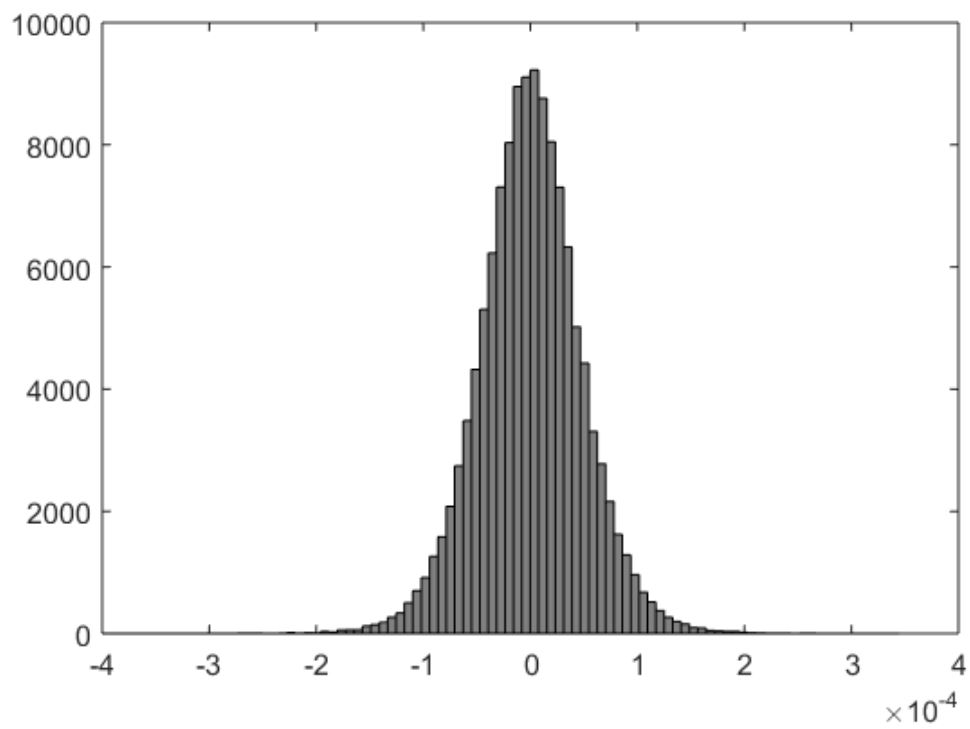
**Figura 4.7** – Histograma da parte real de  $S_1$  para  $L = 50$  e  $K = 10$ .



Fonte: Próprio Autor.

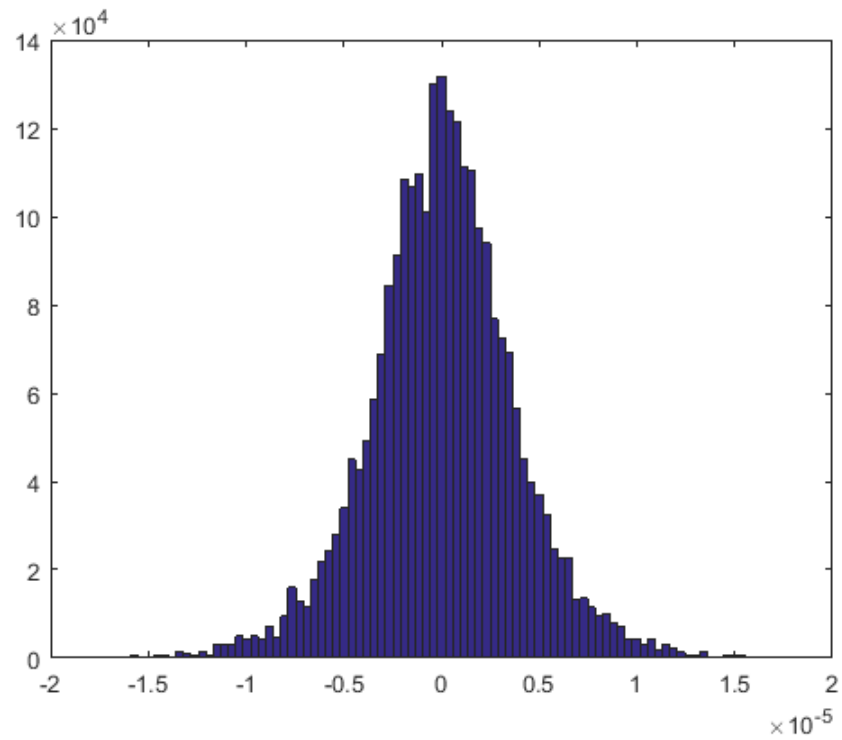
**Figura 4.8** – Histograma da parte real de  $S_1$  para  $L = 100$  e  $K = 20$ .

Fonte: Próprio Autor.

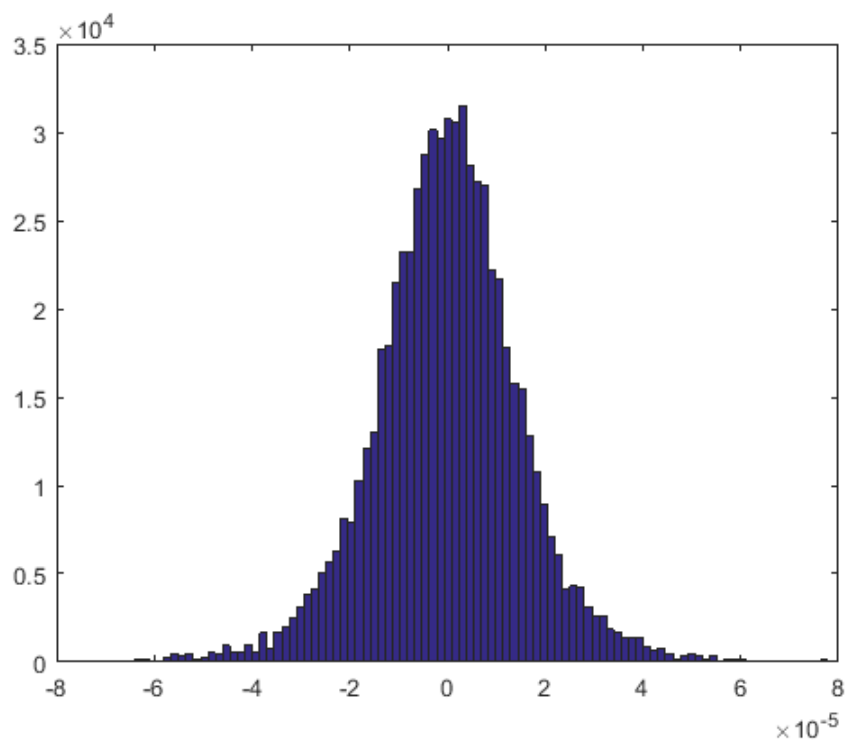
**Figura 4.9** – Histograma da parte real de  $S_1$  para  $L = 200$  e  $K = 40$ .

Fonte: Próprio Autor.

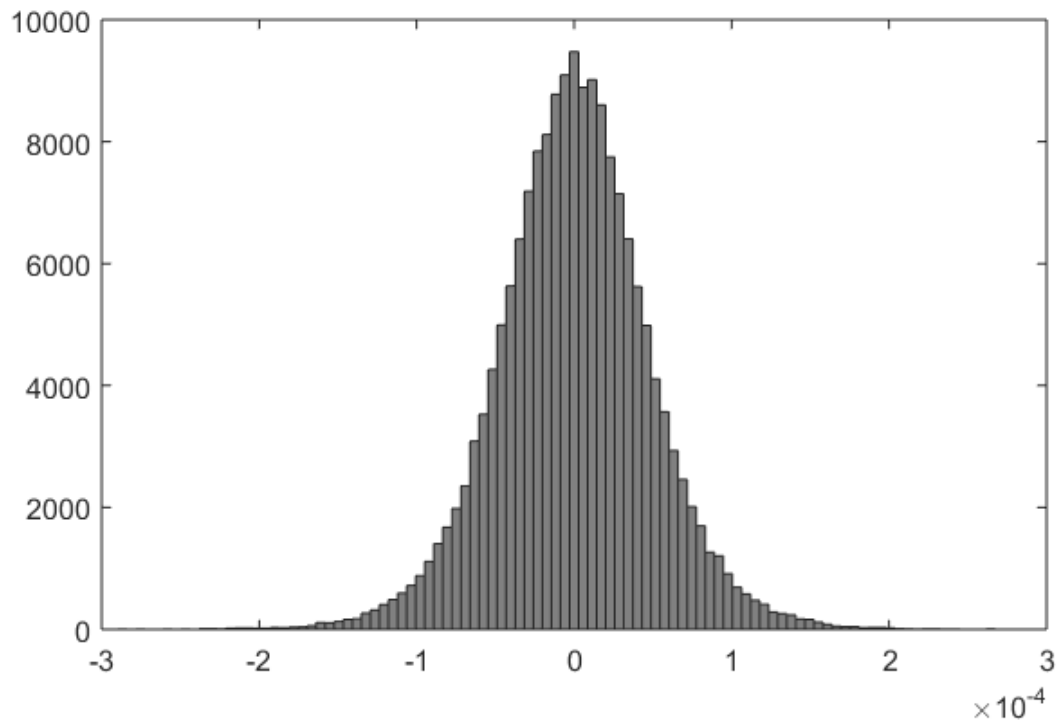


**Figura 4.10** – Histograma da parte imaginária de  $S_1$  para  $L = 50$  e  $K = 10$ .

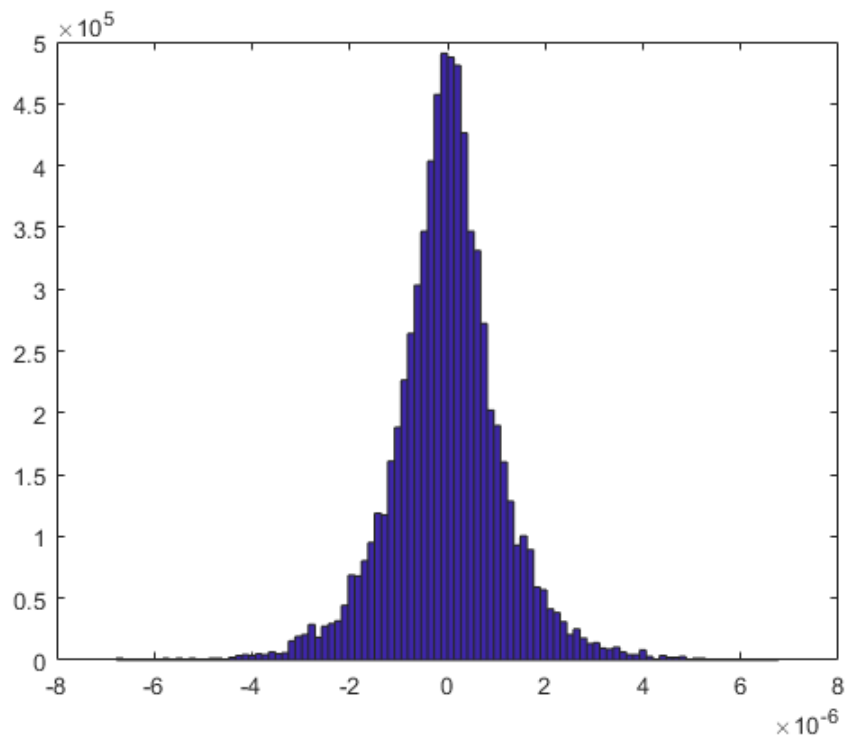
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.11** – Histograma da parte imaginária de  $S_1$  para  $L = 100$  e  $K = 20$ .

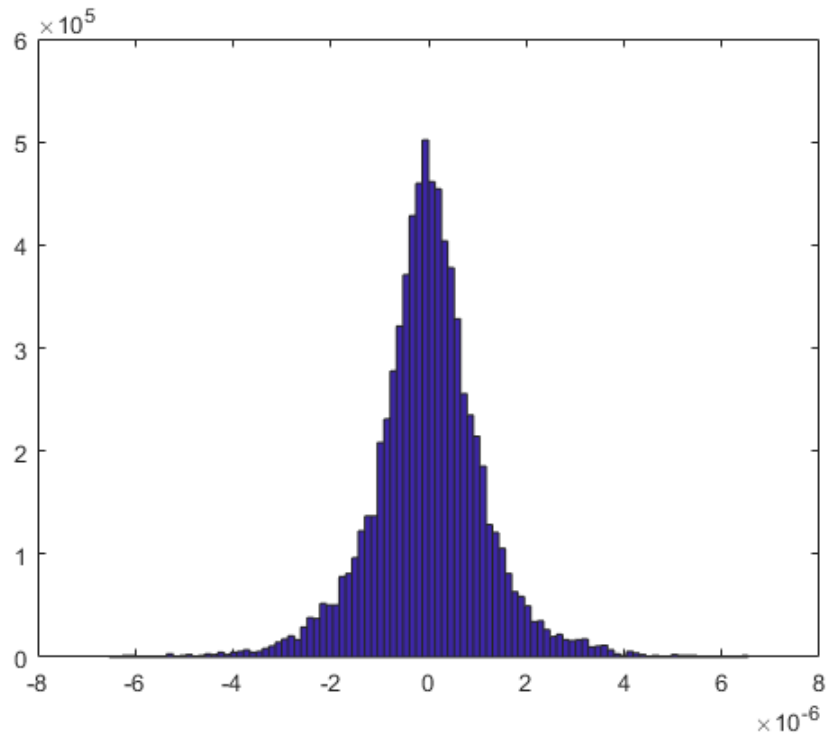
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.12** – Histograma da parte imaginária de  $S_1$  para  $L = 200$  e  $K = 40$ .

Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.13** – Histograma normalizado da parte imaginária de  $S_1$ .

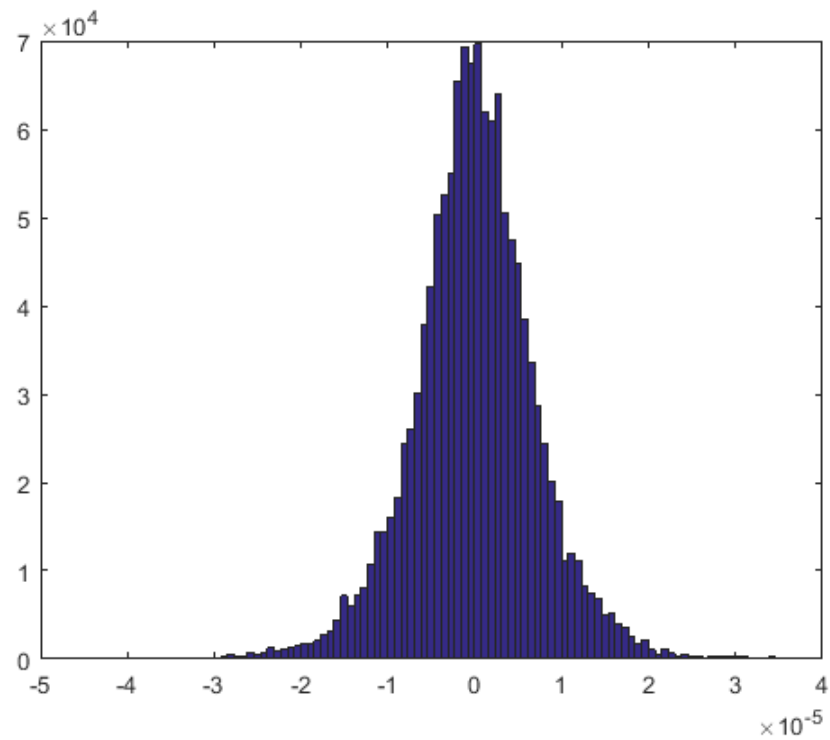
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.14** – Histograma normalizado da parte real de  $S_1$ .

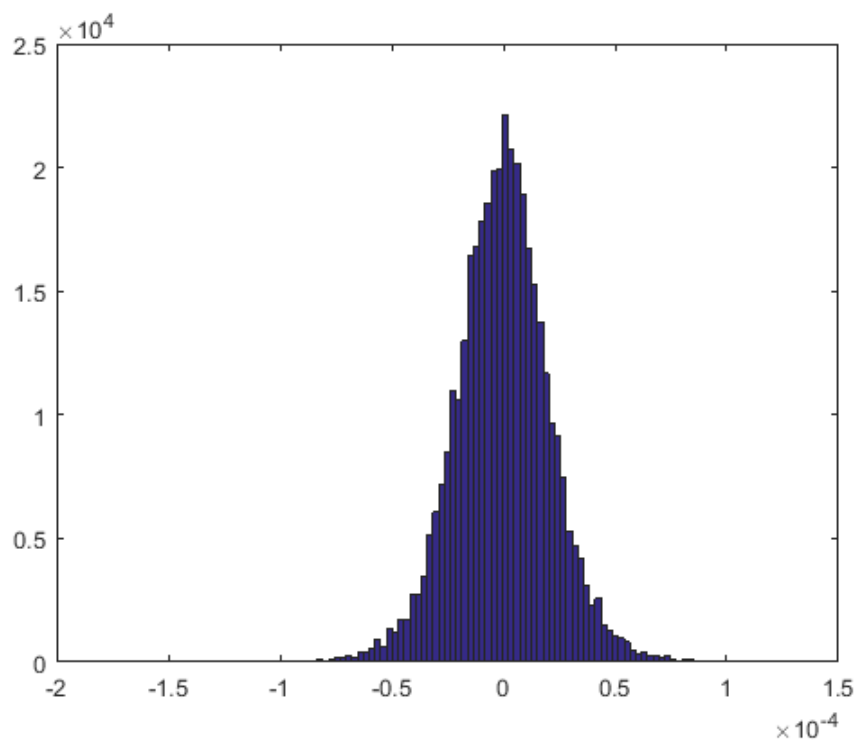
Fonte: Próprio Autor.

### 4.2.3 Histogramas gerados para as partes real e imaginária de $S_2$

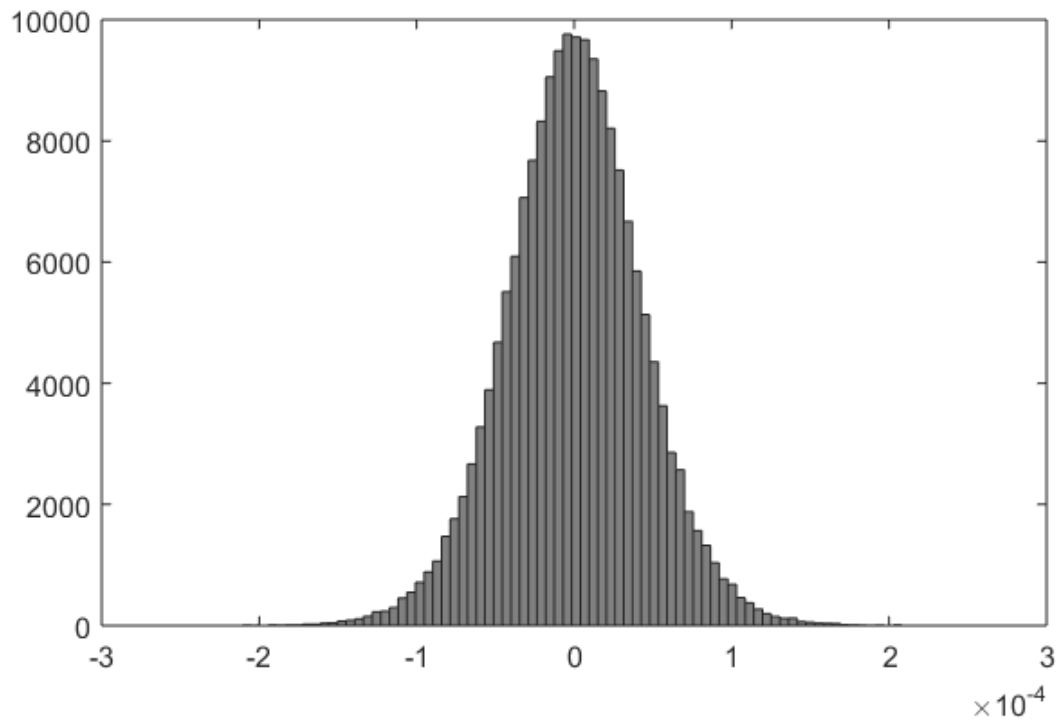
Assim como realizado para a soma  $S_1$ , diferentes histogramas foram obtidos para  $S_2$  com  $N_{amos} = 10000$ , diferentes valores do número de usuários atendidos pelo sistema e de pontos de acesso disponibilizados. É possível constatar uma mudança no formato das curvas tanto da parte imaginária qual da parte real de  $S_2$ . Com o aumento de  $L$  e  $K$ , os histogramas passam a se assemelhar com a curva típica da FDP de uma variável aleatória gaussiana, como pode ser observado nas Figuras 4.15, 4.16, 4.17 (com histogramas na cor cinza e  $N_{amos} = 100000$ ) para a parte real de  $S_2$  e nas Figuras 4.18, 4.19, 4.20 (com histogramas na cor cinza e  $N_{amos} = 100000$ ) para a parte imaginária da soma  $S_2$ .

**Figura 4.15** – Histograma da parte real de  $S_2$  para  $L = 50$  e  $K = 10$ .

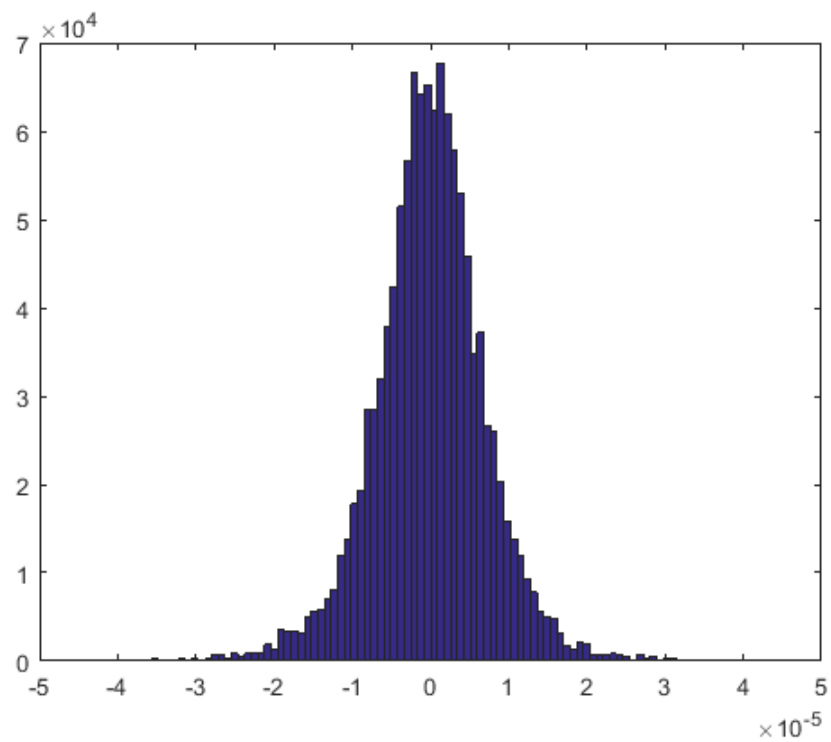
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.16** – Histograma da parte real de  $S_2$  para  $L = 100$  e  $K = 20$ .

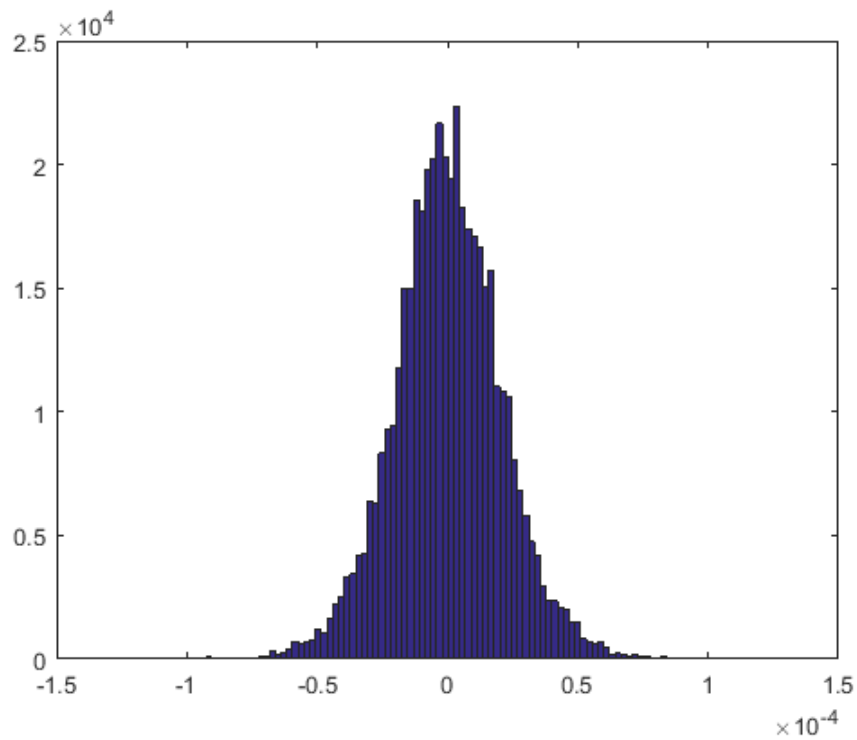
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.17** – Histograma da parte real de  $S_2$  para  $L = 200$  e  $K = 40$ .

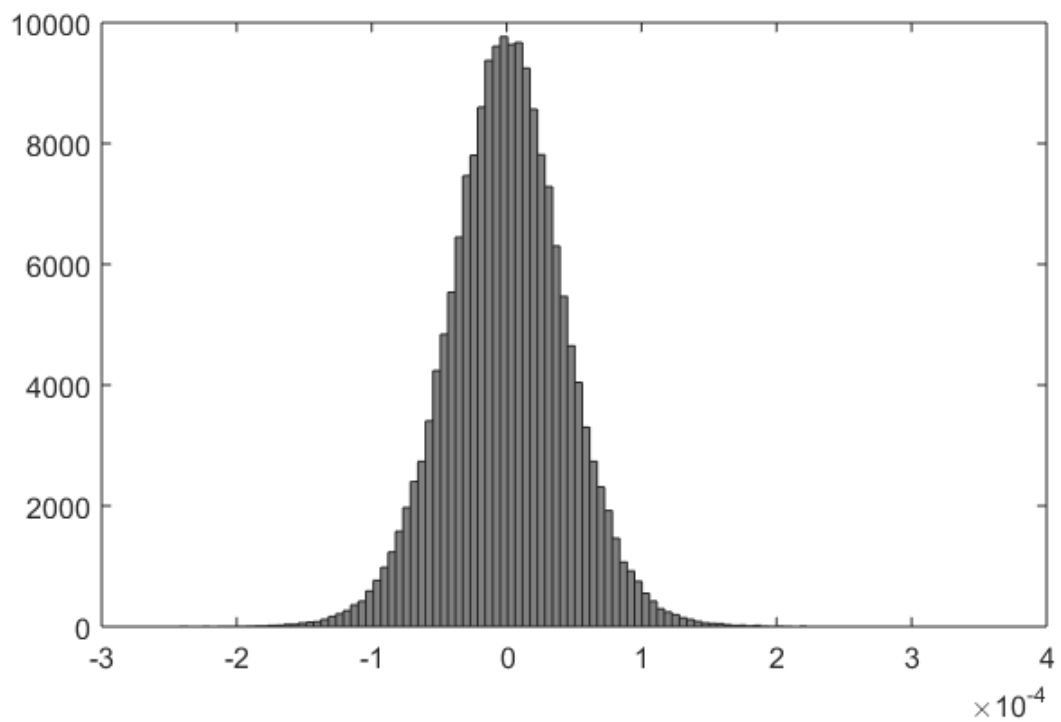
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.18** – Histograma da parte imaginária de  $S_2$  para  $L = 50$  e  $K = 10$ .

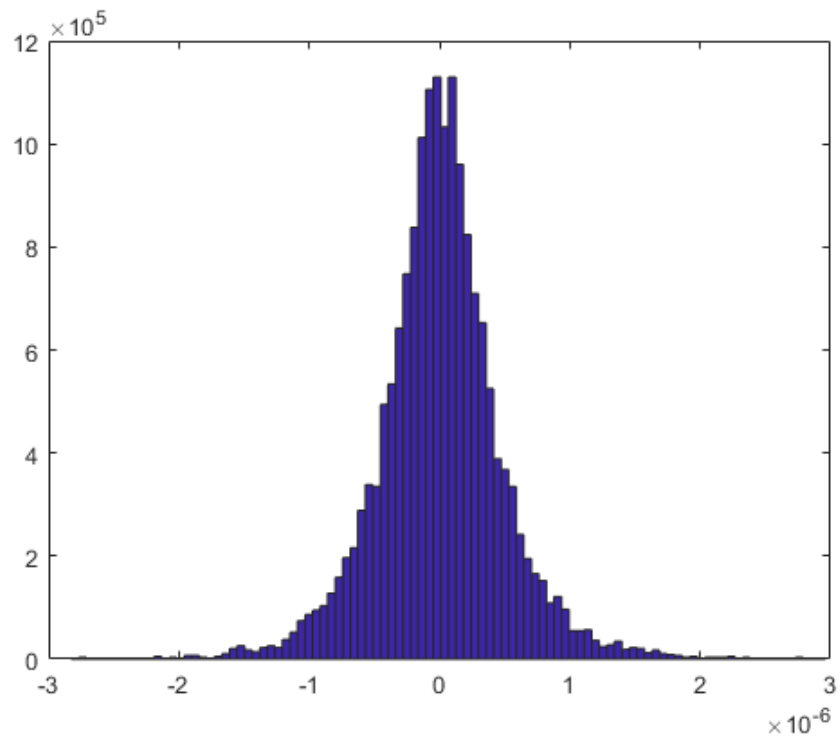
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.19** – Histograma da parte imaginária de  $S_2$  para  $L = 100$  e  $K = 20$ .

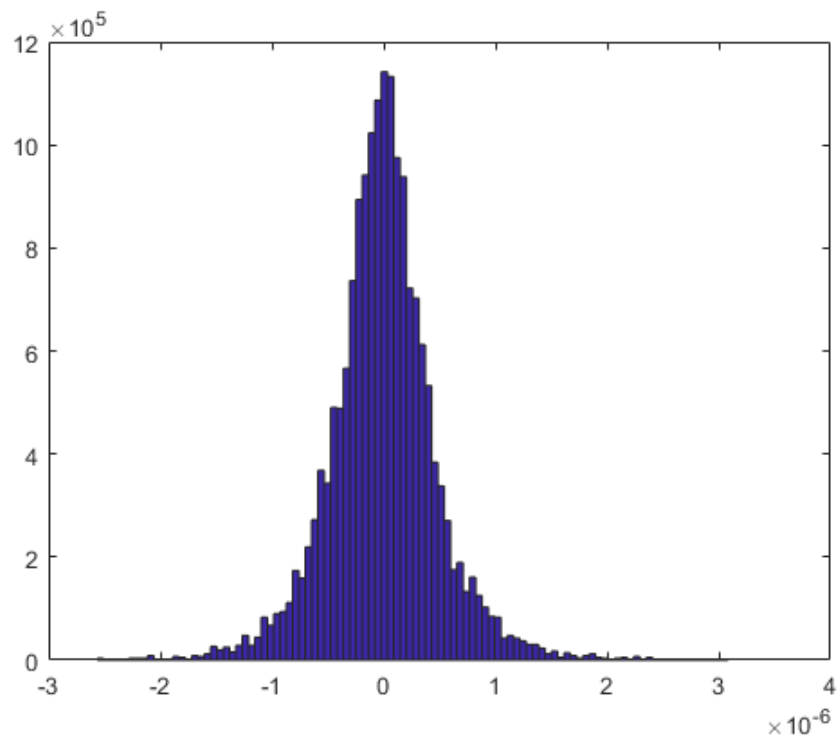
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.20** – Histograma da parte imaginária de  $S_2$  para  $L = 200$  e  $K = 40$ .

Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.21** – Histograma normalizado da parte imaginária de  $S_2$ .

Fonte: Próprio Autor.

**Figura 4.22** – Histograma normalizado da parte real de  $S_2$ .

Fonte: Próprio Autor.

## 4.3 Testes estatísticos

Como forma de comprovar as considerações realizadas no Capítulo 3 durante o desenvolvimento matemático da aproximação do sinal recebido, foram realizados alguns testes estatísticos, como a avaliação da covariância amostral, o teste  $\chi$ -quadrado de hipótese de gaussianidade (ou teste de normalidade) e o teste  $\chi$ -quadrado de hipótese de independência. O propósito dos testes de hipótese é confirmar a informação fornecida pelos histogramas de que as amostras das componentes real e imaginária das variáveis  $S_1$  e  $S_2$  têm distribuição gaussiana.

### 4.3.1 Avaliação da covariância amostral

Por meio do cálculo da covariância  $\text{COV}(S_1, S_2)$  entre as somas  $S_1$  e  $S_2$ , é possível afirmar que, no caso dessa covariância ser nula, as variáveis aleatórias  $S_1$  e  $S_2$  analisadas são descorrelacionadas e, para o caso em que essas variáveis são gaussianas, elas podem também ser consideradas independentes. Logo, sendo a covariância amostral entre  $S_1$  e  $S_2$  fornecida no Matlab 2015 pela função

$$C = \text{cov}(S_1, S_2), \quad (4.6)$$

os valores obtidos de covariância cruzada foram aproximadamente nulos e as variâncias se mantiveram na faixa de grandeza compreendida entre  $10^{-11}$  e  $10^{-14}$  para a modulação 16-QAM com símbolos de energia média unitária e as diferentes combinações possíveis entre os parâmetros  $N_{\text{amos}}$  amostras,  $K$  usuários e  $L$  pontos de acesso disponíveis. Com isso, pode-se atestar que, mediante a gaussianidade apresentada pelas somas  $S_1$  e  $S_2$  quando o número de usuários e pontos de acesso cresce, as somas são descorrelacionadas e aproximadamente independentes.

### 4.3.2 Testes de Hipótese

Os testes de hipótese constituem uma forma confiável de assertar sobre a estatística de uma variável. As hipóteses são levantadas e testadas a partir da observação de amostras da variável avaliada e o teste  $\chi$ -quadrado de Pearson se configura como um teste de



hipóteses que pode ser usado para corroborar ou não uma hipótese nula de gaussianidade.

O teste foi implementado a partir da função  $\mathbf{h}=\text{chi2gof}(\mathbf{x})$  do Matlab, que retorna um parâmetro para tomada de decisão de um teste para a hipótese nula  $H_0$  de que os dados no vetor  $\mathbf{x}$  provêm de uma distribuição normal com média e variância estimada a partir de  $\mathbf{x}$ . A hipótese alternativa  $H_1$  é que os dados não provêm dessa distribuição. O resultado  $\mathbf{h}$  é 1 se o teste rejeitar a hipótese nula com nível de significância de 5% e 0 em caso contrário.

Os testes realizados para os quatro vetores de amostras geradas na simulação (para as partes real e imaginária de  $S_1$  e  $S_2$ ), em todas as diferentes combinações dos parâmetros  $N_{\text{amos}}$  amostras,  $K$  usuários e  $L$  pontos de acesso disponíveis, retornaram  $\mathbf{h}=0$ . O resultado zero indica que a hipótese de gaussianidade não deve ser rejeitada e, dessa forma, as partes real e imaginária de  $S_1$  e  $S_2$  podem ser realmente aproximadas por variáveis aleatórias gaussianas.

Por meio do teste de hipótese de independência  $\chi$ -quadrado, pode-se testar também a dependência entre as partes real e imaginária das duas somas  $S_1$  e  $S_2$ , para todas as combinações entre os parâmetros  $N_{\text{amos}}$  amostras,  $K$  usuários e  $L$  pontos de acesso disponíveis. O resultado obtido foi de  $p = 0,2397$  e como esse valor é maior que o nível de significância  $0,05$ , a hipótese de que as partes testadas são dependentes deve ser rejeitada, o que permite considerar que as variáveis  $S_1$  e  $S_2$  independentes.

### 4.3.3 Comparação de Parâmetros de $S_1$ e $S_2$

As Tabelas 4.1 e 4.3.3 a seguir apresentam uma comparação entre os valores calculados para as médias e variâncias das partes real e imaginária das variáveis do modelo de sinal recebido reduzido,  $S_1$  e  $S_2$ . O valor esperado e a variância foram calculados a partir dos resultados obtidos por meio do TCLL, enquanto que a média e a variância amostral foram calculadas por meio das funções `mean()` e `var()` do Matlab, que fornece a estimativa de máxima verossimilhança dessas estatísticas. Nas duas tabelas, a quantidade de amostras geradas para as variáveis complexas  $S_1$  e  $S_2$  é igual a 20000, por propósitos de celeridade de simulação. Em relação ao número de pontos de acesso  $M$ , que impacta a gaussianidade da soma  $S_1$ , foram considerados os valores  $M = 200$  e  $M = 250$  para o número de usuários

fixo em  $K = 40$ . Verifica-se que a precisão da estimativa da variância e da média aumenta com o aumento de  $M$ .

**Tabela 4.1** – Comparação entre valores calculados a partir do Teorema Central do Limite de Lyapunov e valores estimados a partir das estimativas de Máxima Verossimilhança da média e da variância para Namos=20000, M=200 e K=40.

$Z$	$E[Z]$	$\hat{\mu}_Z$	$\text{Var}[Z]$	$\hat{\sigma}_Z^2$
$\text{Re}\{S_1\}$	2.878474E-06	2.938987E-06	5.441584E-12	5.503394E-12
$\text{Im}\{S_1\}$	0.000000E+00	3.031696E-10	1.417304E-14	1.446554E-14
$\text{Re}\{S_2\}$	0.000000E+00	2.673444E-09	4.785300E-11	4.902891E-11
$\text{Im}\{S_2\}$	0.000000E+00	4.549470E-08	4.785300E-11	4.984672E-11

**Tabela 4.2** – Comparação entre valores calculados a partir do Teorema Central do Limite de Lyapunov e valores estimados a partir das estimativas de Máxima Verossimilhança da média e da variância para Namos=20000, M=250 e K=40.

$Z$	$E[Z]$	$\hat{\mu}_Z$	$\text{Var}[Z]$	$\hat{\sigma}_Z^2$
$\text{Re}\{S_1\}$	1.875140E-04	1.905521E-04	3.727909E-09	3.764031E-09
$\text{Im}\{S_1\}$	0.000000E+00	-8.064003E-09	1.281195E-12	1.318209E-12
$\text{Re}\{S_2\}$	0.000000E+00	-4.045061E-07	9.107344E-10	9.609991E-10
$\text{Im}\{S_2\}$	0.000000E+00	9.835825E-08	9.107344E-10	9.433652E-10

# Capítulo 5

## Conclusão

Por meio do Teorema Central do Limite de Lyapunov, considerado no Capítulo 3, foi realizada uma aproximação do sinal recebido no enlace de descida do  $k$ -ésimo usuário em um sistema MIMO massivo *cell-free*, de modo que é possível representar o sinal original formado pelo sinal desejado, sinal resultante da interferência entre os múltiplos usuários e o ruído gaussiano branco aditivo, por meio de um sinal desejado multiplicado por uma variável que caracteriza desvanecimento e afetado por ruído aditivo branco gaussiano. A partir dessa aproximação é possível desenvolver, por meio da aplicação de conceitos de Probabilidade e Processos Estocásticos, uma expressão para a probabilidade de erro de bit em um sistema MIMO massivo *cell-free* com modulação  $M$ -QAM de modo que seja possível, em trabalhos futuros, realizar uma análise do desempenho desse sistema na transmissão de dados no enlace de descida.

No Capítulo 4, por meio dos resultados obtidos por simulações computacionais e utilização de *scripts* no *software* Matlab<sup>®</sup>, foi possível corroborar as considerações realizadas no Capítulo 3, que se referem à independência entre as partes real e imaginária das somas  $S_1$  e  $S_2$ , bem como a possibilidade de aproximar essas somas por variáveis aleatórias gaussianas, quando o número de usuários atendidos e o número de pontos de acesso disponibilizados cresce. Assim, este trabalho permite que, mediante aproximações realizadas no modelo de sinal recebido por um usuário, se possa avaliar o desempenho de um sistema candidato a suprir a demanda das gerações presente e futuras das rede móveis de telecomunicações.

# Bibliografia

AALO, V. A.; EFTHYMOGLOU, G. P.; CHAYAWAN, C. On the envelope and phase distributions for correlated gaussian quadratures. *IEEE Communications letters*, IEEE, v. 11, n. 12, p. 985–987, 2007.

ADAMS, W. J. *The life and times of the central limit theorem*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2009. v. 35.

ALTAMIRANO, D.; ALMEIDA, C. de. *Avaliação de desempenho de esquemas de modulação e codificação na presença de interferência de co-canal*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, Campinas, Brasil, 2011.

BASHAR, M. et al. Mixed quality of service in cell-free massive MIMO. *IEEE Communications Letters*, IEEE, v. 22, n. 7, p. 1494–1497, 2018.

CHEN, Z.; BJÖRNSON, E. Channel hardening and favorable propagation in cell-free massive MIMO with stochastic geometry. *IEEE Transactions on Communications*, IEEE, v. 66, n. 11, p. 5205–5219, 2018.

CHOI, W.; ANDREWS, J. G. Downlink performance and capacity of distributed antenna systems in a multicell environment. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Citeseer, v. 6, n. 1, p. 69–73, 2007.

DUARTE, R. *Controle de Potência em Sistemas MIMO Multiusuário sem Células*. Tese (Exame de Qualificação Doutorado) — Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Elétrica, Campina Grande, Fevereiro 2019.

ERICSSON. *Mobile data traffic outlook*. 2019. Last accessed 16 September 2017. Disponível em: <<https://www.ericsson.com/en/mobility-report/reports/june-2019/mobile-data-traffic-outlook>>.

GOLDSMITH, A. *Wireless communications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.

HOCHWALD, B. M.; MARZETTA, T. L.; TAROKH, V. Multiple-antenna channel hardening and its implications for rate feedback and scheduling. *IEEE transactions on Information Theory*, IEEE, v. 50, n. 9, p. 1893–1909, 2004.

LARSSON, E. G. et al. Massive MIMO for next generation wireless systems. *IEEE communications magazine*, IEEE, v. 52, n. 2, p. 186–195, 2014.

MI, D. et al. Massive MIMO performance with imperfect channel reciprocity and channel estimation error. *IEEE Transactions on Communications*, IEEE, v. 65, n. 9, p. 3734–3749, 2017.

- NAYEBI, E. et al. Cell-free massive MIMO systems. In: IEEE. *49th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*. [S.l.], 2015. p. 695–699.
- NGO, H. Q. *Massive MIMO: Fundamentals and system designs*. [S.l.]: Linköping University Electronic Press, 2015. v. 1642.
- NGO, H. Q. et al. Cell-free massive MIMO versus small cells. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, IEEE, v. 16, n. 3, p. 1834–1850, 2017.
- QUOC, N. H. et al. Cell-free massive MIMO: Uniformly great service for everyone. In: IEEE. *IEEE 16th International workshop on signal processing advances in wireless communications (SPAWC)*. [S.l.], 2015. p. 201–205.
- YACOUB, M. D. The  $\kappa - \mu$  Distribution and the  $\eta - \mu$  Distribution. In: . : IEEE, 2007. v. 49, n. 1, p. 68–81.
- YOON, D.; CHO, K. General bit error probability of rectangular quadrature amplitude modulation. *Electronics Letters*, v. 38, p. 131–133, 03 2002.
- ZHENG, K.; OU, S.; YIN, X. Massive MIMO channel models: A survey. *International Journal of Antennas and Propagation*, Hindawi, v. 2014, 2014.