UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

O TEOREMA DE PITÁGORAS ATRAVÉS DO USO DE MATERIAL CONCRETO

JOCÁSSIA EMANUELLE SILVA CASADO

Julho de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

O TEOREMA DE PITÁGORAS ATRAVÉS DO USO DE MATERIAL CONCRETO

JOCÁSSIA EMANUELLE SILVA CASADO

Julho de 2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

C334t Casado, Jocássia Emanuelle Silva.

O teorema de Pitágoras através do uso de material concreto. / Jocássia Emanuelle Silva Casado – Cuité: CES, 2010.

68 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde – UFCG, 2010.

Orientadora:. Msc Maria Gisélia Vasconcelos
Co-orientadora: Msc Márcia Cristina Silva Brito.

1. Geometria. 2. Triângulos. 3. Teorema de Pitágoras. I. Título.

CDU 514

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

O Teorema de Pitágoras Através do Uso de Material Concreto

Jocássia Emanuelle Silva Casado

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 05 de julho de 2010.

Banca Examinadora

Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)

Marcia Cristina Silva Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Co-Orientadora)

José Urânio das Neves
Prof. José Urânio das Neves

À Deus, pela minha existência e a

Minha mãe, Josefa Freire, por todo amor, carinho e dedicação.

Agradecimentos

A Deus, meu mestre, pois sem Ele, nada seria possível e não estaríamos aqui reunidos, desfrutando, juntos, destes momentos que nos são tão importantes.

A professora orientadora Maria Gisélia pela sua colaboração, competência profissional, paciência e confiança.

À minha família, pela confiança e motivação depositadas em mim, em especial aos meus irmãos Tayse Barbara e Thiago Henrique pelo incentivo, cooperação e apoio; nesta etapa, em que, com a graça de Deus, está sendo vencida.

As minhas inspirações, minha tia Cícera da Silva Souza (in memória), tia Edvan Silva e Pe. Edjamir Silva (primo), por ver em vocês pessoas com objetivo em suas vidas e que diante dos obstáculos jamais desanimaram.

Aos meus pais José Cazuza e Josefa Freire, por acreditarem no meu potencial, e pela alegria de estarem presente em todos os momentos de minha vida.

Aos professores que participaram da banca, pelas condições necessárias ao aprimoramento do trabalho.

Aos amigos e colegas, pela força e vibração em relação a esta grande jornada.

Aos professores do curso, em especial Márcia Cristina, Gisélia Vasconcelos, Glageane Sousa, Anselmo Lopes, Ângelo Roncalli, Lauro Xavier, Marcelo, Gledson, Denise, Vivian, Vladimir Catão pela contribuição em meu desenvolvimento profissional.

Aos colegas de curso, em especial Maria de Fátima e Renato Pereira, por estarem sempre ao meu lado contribuindo para essa conquista.

Ao meu namorado Fábio Gabriel pelo apoio, amor e paciência dado durante o curso até a realização deste trabalho.

À Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio José Luis Neto, em especial ao professor Múrcio, e os alunos do 1° ano A por aceitarem e apoiarem minha proposta de ensino.

À todos que de forma direta ou indireta contribuíram para realização desse sonho.

"O homem rude vê as formas geométricas, mas não as entende; o inculto entende-as, mas não as admira; o artista, enfim, enxerga a perfeição das figuras, compreende o Belo e admira a Ordem e a Harmonia! Deus é o grande geômetra. Geometrizou a Terra e o Céu."

Platão

Resumo

O presente trabalho visa focar o processo de ensino aprendizagem da matemática contribuindo na construção do conhecimento do aluno sobre o Teorema de Pitágoras de forma que tenha condições de resolver situações problema, tornando-o capaz de construir os conceitos fundamentais para o acesso ao conhecimento matemático, mais especificamente, a geometria do triângulo retângulo; analisando cada etapa da demonstração do Teorema, tendo como ferramenta de ensino um Kit, elaborado para ajudar o aluno a compreender tanto a demonstração do teorema de Pitágoras quanto às relações métricas no triângulo retângulo. Baseando-se em princípios históricos e nas discussões teóricas analisando desde a origem até a formalização do objeto matemático em questão. Dessa forma, serão descrito e elaborado uma proposta pedagógica para demonstração do teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo, partindo de uma experiência tida com a turma do 1º ano A da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio José Luiz Neto.

Palavras - Chave: Geometria, Triângulos, Teorema de Pitágoras, Processo de ensino/aprendizagem e material concreto.

Abstract

This work aims to focus the teaching of mathematics learning contributes to building the student's knowledge about the Pythagorean theorem so is able to solve problem situations, being able to build the fundamental concepts to acquire mathematical knowledge, specifically, the geometry of the triangle, analyzing each step of the demonstration of Theorem, and as a teaching tool kit, designed to help students understand both the demonstration of the Pythagorean Theorem about metrics in the relationship triangle. Based on historical principles and theoretical discussions analyzing from the origin to the formalization of the mathematical object in question. Thus, will be described and elaborated the pedagogical proposal for a demonstration of the Pythagorean Theorem and the metric relationships in the triangle, starting from an experiment taken with the class of 1st "A"The State School of Elementary and Secondary Education José Luiz Neto.

Keywords: Geometry, Triangles, Pythagorean Theorem, Process of teaching / learning material and concrete.

Sumário

Introdução

Desde 2006, como aluna do curso de licenciatura plena em matemática e atuando como professora no Município de Barra de Santa Rosa no Colégio Barra de Santa Rosa, comecei a me preocupar com a forma de ensinar matemática e mais precisamente com a inquietação dos professores e alunos para com o conteúdo de geometria. Ficava surpresa com os comentários dos alunos que sequer tinham noções básicas sobre o triângulo retângulo e por desconhecerem o assunto sentiam dificuldades na Aprendizagem.

Ao longo desses anos, esse cenário não mudou muito, constituindo um desafio para nós, professores, torná-lo diferente. Por isso, trabalhar matemática, principalmente a geometria, por meio de métodos inovadores e de técnicas diferenciadas que estimulem e enriqueçam o processo de ensino aprendizagem na educação infantil, no ensino fundamental e no ensino médio sempre foi e continua sendo tema de discussões, cursos, seminários, oficinas, congressos e encontros na área, visando à atualização e melhoria dos profissionais da educação. Com base em Lorenzato (1995) a presença da Geometria é importante em nossas escolas, por auxiliar as pessoas na compreensão e solução de questões de outras áreas do conhecimento, bem como na resolução de problemas do cotidiano.

Aprender com precisão é mais do que dar resposta certa a um determinado desafio semelhante a outros já vistos. É poder construir o maior número possível de relações entre os diferentes significados da idéia investigada e propor-se a enfrentar situações novas, estabelecendo conexões entre o novo e o conhecido. E mais ainda, é saber criar e transformar o que já se conhece. Assim podemos garantir que houve aprendizagem, se os alunos, de fato, adquiriram conhecimento.

Assim, mediante a toda essa problemática desenvolvemos esse trabalho com o intuito de chamarmos a atenção dos professores para a importância de se aplicar o Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo através do uso de material didático. E no decorrer do trabalho apresentaremos uma proposta pedagógica para que os alunos possam suprir as dificuldades que venham a ser apresentadas, e por acreditarmos que um dos objetivos básicos do uso do material concreto é o desenvolvimento do raciocínio lógico, utilizaremos o Kit Pedagógico, o qual possibilitará o estudo do Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo sempre a partir do experimental, em direções a posteriores formalizações, sendo esse um dos pontos altos da proposta de ensino.

Desse modo nosso trabalho tem como foco o aluno, de forma a trazê-lo para uma aula mais atrativa, e estando ciente de nossas responsabilidades, esperamos contribuir na formação de alunos conscientes, compromissados, seguros, criativos, com iniciativa e com capacidade em solucionar situações-problemas; tornando o aluno um membro da comunidade escolar que participa, coopera com mais desembaraço na elaboração do próprio conhecimento.

Capítulo 1

Aspectos Históricos da Geometria

De acordo com os PCN's é de fundamental importância introduzir os conteúdos partindo do contexto histórico.

> *A história da matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino-aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes meios históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoravéis diante desse conhecimento.* (BRASIL, 1998 p. 42).

1.1 A Importância do Triângulo

No decorrer de todo o contexto histórico é evidente a grande importância da matemática, a qual tem uma presença em vários pontos da natureza. Nesse contexto daremos um destaque a uma figura geométrica que acompanha a humanidade desde muito tempo: o triângulo.

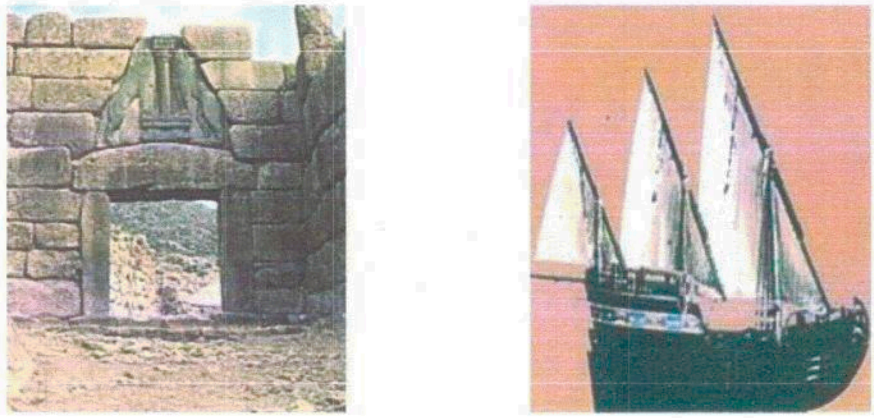


Figura 1.1: O triângulo de descarga e a vela triangular.

Nos tempos primitivos da civilização Grega, o triângulo era utilizado em construções como a do triângulo de descarga e a Vela triangular, por exemplo.

Nos dias de hoje, são várias as situações que encontramos o triângulo.

Figura 1.2: A torre da Igreja e a torre elétrica

1.2 História da Geometria na Grécia

> *A matemática, como ciência, nasceu quando alguém, provavelmente um grego, começou a demonstrar proposições a respeito de qualquer coisa ou de algumas coisas, sem especificação de casos particulares definidos.*(A. N. Whitehead, 1861 - 1947)

Na Grécia a matemática era considerada pelos filósofos gregos como ciência. Mas, antes dos gregos tomarem ciência sobre a matemática, a Mesopotâmia o Egito e até mesmo a China tinham conhecimento sobre a mesma. Foram os gregos os responsáveis pelas demonstrações e deduções matemáticas. Estudiosos gregos como Tales, Pitágoras, Euclides, Arquimedes, dentre outros fizeram da Matemática essa ciência de tão grande ápice a qual nos dedicamos hoje.

Nesse período a Grécia tinha uma política independente, onde os sábios tinham liberdade em criar e defender suas idéias científicas.

No decorrer do século VI a.C., na cidade de Mileto havia muitos filósofos dentre os quais destacamos Tales, matemático e astrônomo, onde em uma de suas viagens ao Egito se apresentou ao Rei Amasis, oferecendo-se para calcular a altura de uma pirâmide sem precisar subir nela.

A pirâmide de Quéops, no Egito, construída a cerca de 2500 a. C. é considerada uma das sete maravilhas do mundo antigo, ela tem aproximadamente 150m de altura. Sua base é um quadrado, cujos lados medem cerca de 230m.

Figura 1.3: Pirâmide de Quéops.

Assim, Tales destinou-se até o deserto onde se encontra as pirâmides, fincou uma vara e concluiu que no momento em que o comprimento da sombra da estaca fosse igual ao comprimento da própria vara, a altura da pirâmide seria igual ao comprimento da sombra mais metade da base. Isso só foi possível devido à relação de semelhança de triângulos.

Tales de Mileto é considerado um dos gênios da antiguidade, com o seu método de comparar sombras o que hoje conhecemos pelo teorema de Tales, uma de sua mais importante demonstração.

Na antiguidade, os matemáticos utilizavam de uma idéia fascinante que era a semelhança de triângulo para medirem grandes distâncias. Eles observavam que os lados de um triângulo eram proporcionais aos lados do outro e os ângulos correspondentes congruentes.

Nessa época, os matemáticos começaram a fazer relações utilizando o triângulo reto, como era chamado por eles, o qual tem dois lados perpendiculares entre si.

Pitágoras, importante matemático grego, nascido por volta de 580 anos a. C. na ilha de Samos, passou parte de sua vida no sul da Itália. Ele fundou a escola Pitagórica, a qual durou cerca de 150 anos, onde junto com seus alunos fizeram grandes descobertas matemáticas, filosóficas e astronômicas, eles foram os responsáveis pelo nome Matemática, que significa tudo que se aprende.

Em uma de suas descobertas astronômica, pôde afirmar que a terra era redonda e estava suspensa no espaço e os planetas giravam em torno de uma chama central.

Pitágoras amava os números a ponto de deixar uma frase onde assegurou que: *todas as coisas são números*. Desenvolveu o estudo das notas musicais, onde percebeu que as cordas em vibração emitem sons que dependem de seus comprimentos. O universo era considerado como uma escala musical e ao número 1(um), relacionou a existência de um deus que é onipotente, onisciente e onipresente e tudo isso se resume a um só Deus todo poderoso.

O pentagrama era o emblema de sua escola, a qual só era permitida a entrada de homens, os quais dedicavam seus estudos à busca de relações matemáticas, descobertas estas que não poderiam em hipótese alguma ser revelado a uma pessoa estranha.

Por volta mais ou menos 501 a.C., houve na cidade de Milos, uma revolução, onde muitos pitagóricos foram mortos e Pitágoras necessitou fugir para Tarento, onde perdeu sua vida.

Os pitagóricos foram os responsáveis por várias contribuições no decorrer da história da matemática, tais como: a afirmação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, e o fato de que da raiz quadrada de dois não ser um número racional.

Neste contexto histórico Pitágoras menciona as palavras *catetos, hipotenusa* e *triângulo retângulo*. A palavra *triângulo* do latim *triangulu*, caracterizado como polígono de três lados ou figura geométrica que possui três ângulos; catetos do grego *katetus* que significa vertical ou perpendicular; para o triângulo retângulo são os lados adjacentes ao ângulo reto; *hipotenusa* vem do grego *hipoteinousa*, e denomina o lado oposto do ângulo reto de um triângulo retângulo, o triângulo retângulo por sua vez, é aquele que possui um ângulo reto.

A idéia de ângulo reto baseia-se na gravidade que é perpendicular a terra, e a linha do horizonte, que é ortogonal à primeira. O cruzamento imaginário de ambas que fixa em nosso campo visual um ângulo de 90°.

Pitágoras observou que num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois catetos. Por ter demonstrado esse teorema e como sinal de agradecimento aos deuses, Pitágoras sacrificou cem bois, talvez isso possa ser somente lenda, pois não há registros sobre suas descobertas.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica Pedagógica

A reflexão do aluno sobre cada fórmula ou conceito de geometria é obtida quando ele é estimulado a construir, comparar, analisar, argumentar e generalizar. Tendo em vista essas questões mostraremos a construção de alguns conceitos geométricos através do desenvolvimento de um Kit Pedagógico, apresentado através de formas geométricas, onde os alunos serão instigados a descobrir os conceitos de forma atraente e motivadora na tentativa de alcançar os objetivos propostos.

Os exercícios sugeridos nos textos didáticos exigem sempre mais trabalho do que criatividade e descoberta dos alunos.

O uso do Kit Pedagógico será de fundamental importância para desenvolver um trabalho sobre os conceitos e técnicas geométricas desenvolvidos no estudo do triângulo retângulo, através do qual é possível demonstrar o teorema de Pitágoras, assim como também, as relações métricas, possibilitando dessa forma, uma melhor aprendizagem dos alunos.

Esse material, preparado cuidadosamente, baseia-se nos critérios da matemática, razão pela qual suas aplicações apresentam diferentes graus de aprendizagem para os conceitos trabalhados, onde pouco a pouco o próprio aluno os formará.

Em nossas escolas, é possível observar que muitos alunos apresentam pouco conhecimento em atividades de geometria. Isso ocorre porque a geometria continua sendo pouco trabalhada em sala de aula, acarretando um déficit na aprendizagem dos alunos.

Em razão desta problemática faz-se necessário encontrar novas metodologias para o ensino de geometria.

Segundo Nasser (2004, pág.69) a aquisição de conceitos geométricos possui características próprias. Ainda de acordo com Nasser, Jean Piaget e Inhelder afirmaram que os conceitos geométricos são adquiridos numa ordem definida: inicialmente são construídas as transformações topológicas, progredindo para as projetivas, e só então são atingidas as propriedades euclidianas ou métricas e por outro lado, Van Hiele estabeleceu que o progresso na aprendizagem da geometria se dá ao longo de níveis hierárquicos de conhecimento, que devem ser vivenciados pelo aluno, sem pular etapas.

> *De acordo com Van Hiele, os alunos progridem segundo níveis hierárquicos de conhecimento quando aprendem geometria. Estes níveis podem ser descritos como: Reconhecimento (visualização) análise, abstração (síntese) dedução e rigor. Van Hiele estabelece que o progresso de nível depende da experiência de atividades especialmente preparadas pelo professor, com essa finalidade, e passa por cinco fases de aprendizagem. Portanto o modelo de Van Hiele incorpora ao cognitivo um aspecto didático.* (NASSER, Anais VI. 1998)

Van Hiele caracteriza cada nível mediante as relações entre os objetos de estudo e linguagem próprias.

Lorenzato (1995) afirma que: "o Modelo de Van Hiele, concebe diversos níveis de aprendizagem geométrica (ou níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico) com as seguintes características: no nível inicial (visualização), as figuras são avaliadas apenas pela sua aparência, a ele pertencem os alunos que só conseguem reconhecer ou reproduzir figuras (através das formas e não pelas propriedades); no nível seguinte (análise) os alunos conseguem perceber características das figuras e descrever algumas propriedades delas; no outro nível (ordenação), as propriedades das figuras são ordenadas logicamente (inclusão) e a construção das definições se baseia na percepção do necessário e do suficiente. As demonstrações podem ser acompanhadas, memorizadas, mas dificilmente elaboradas. Nos dois níveis seguintes estão aqueles que constroem demonstrações e que comparam sistemas axiomáticos".

Com base na pedagogia do construtivismo, o aluno é um sujeito ativo de seu próprio aprendizado, o qual é incentivado à experimentação, a pesquisa em grupo, o questionamento, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio, entre outros meios. Nessa pedagogia não é recomendada a exposição de conhecimentos prontos ao aluno, utiliza-se de modo inovador técnicas tradicionais. Assim, o aluno tem maior compreensão do conteúdo quando faz parte, de forma direta, da construção do conhecimento que adquire, cabendo ao professor escolher momentos oportunos para criar situações pedagogicamente desafiadoras.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) enfatizam a importância da geometria no quarto ciclo (7ª e 8ª série) e da importância da construção de situações-problema que favoreçam o raciocínio dedutivo e a introdução da demonstração, apresentando verificações empíricas:

> *Os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria. Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. A busca da construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos.* (p. 86)

Fazendo um paralelo entre o estudo dos PCN's, trazemos uma combinação existente entre os aspectos lúdicos da matemática e o seu potencial de aplicações, a modelagem matemática, a qual pode ser entendida como uma oportunidade para os alunos investigarem os problemas matemáticos criando condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolverem determinadas atividades.

Nesse contexto, podemos compreender a *Modelagem num ambiente de aprendizagem*, onde os alunos são convidados a participarem de forma ativa na construção do seu próprio conhecimento. Mas, para participarem desse ambiente precisam sentir-se interessados para se engajarem de forma participativa.

Para Paulo Freire, a investigação é o próprio caminho da educação e afirma que:

> *O que o professor deveria ensinar - porque ele próprio deveria sabê-lo - seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o início do conhecimento, repito, é perguntar. E somente a partir de perguntar é que se deve sair em busca de respostas e não o contrário.* (Freire & Faundez, 1998, p. 46).

Devemos entender que a matemática não pode mais ser vista como algo de difícil compreensão, cabendo a nós professores, inovar e fazer com que essas concepções sejam mudadas trazendo para a nossa metodologia, atividades contextualizadas, fazendo uso de materiais concreto, pois assim, iremos fazer com que os alunos observem a importância da matemática no seu cotidiano.

Capítulo 3

Elementos de Geometria Euclidiana

3.1 Introdução à Geometria

Cerca de 300 anos $a.C$, um sábio grego, o matemático Euclides, escreveu uma obra notável, dividida em treze livros, conhecida como *Os Elementos de Euclides.* A partir das noções primitivas de ponto, reta, plano e espaço, Euclides, de modo claro, preciso e lógico, estabeleceu os fundamentos da geometria.

Usualmente, os pontos são representados por letras maiúsculas: $A, B, C, D, \ldots$, as retas por letras minúsculas: r, s, t, $\ldots$, e os planos pelas letras minúsculas do alfabeto grego: α, β, π, $\ldots$.

3.1.1 Segmento de Reta

Definição 3.1.1 *Sejam A e B dois pontos distintos. O **segmento de reta** $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os pontos da reta r situados entre A e B, incluindo-se os pontos A e B.*

Diremos que dois segmentos de retas são ***congruentes*** se eles têm a mesma medida.

Usaremos a notação $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ para indicar que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes.

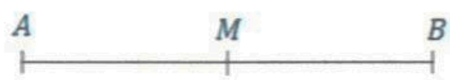
A congruência entre dois segmentos satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Reflexiva: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$, isto é, todos segmento é congruente a si mesmo.

(ii) Simétrica: Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$

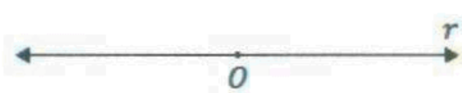
(iii) Transitiva: Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$

Chama-se ***ponto médio*** de um segmento $\overline{AB}$ o ponto M pertencente ao segmento $\overline{AB}$ situado a uma igual distância dos extremos A e B.

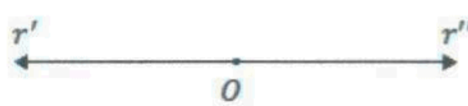


Semi-reta

Seja r uma reta e um ponto $O \in r$.



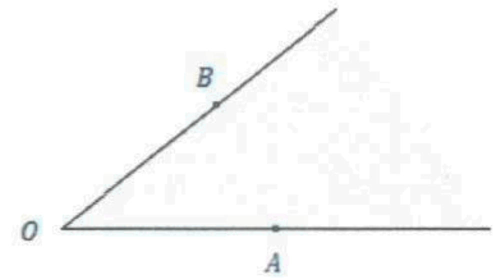
O ponto O divide a reta r em duas partes: Or' e Or''.



Cada uma das partes, Or' e Or'', é chamada *semi-reta*. O ponto O é chamado *origem* das semi-retas opostas Or' e Or''.

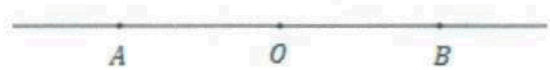
3.1.2 Ângulo

Definição 3.1.2 *Chama-se **ângulo** a abertura que duas semi-retas de mesma origem fazem no plano.*



Representamos o ângulo por $A\hat{O}B$ ou simplesmente por $\hat{O}$.
As semirreta $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamados *lados* e O de *vértice* do ângulo $A\hat{O}B$.

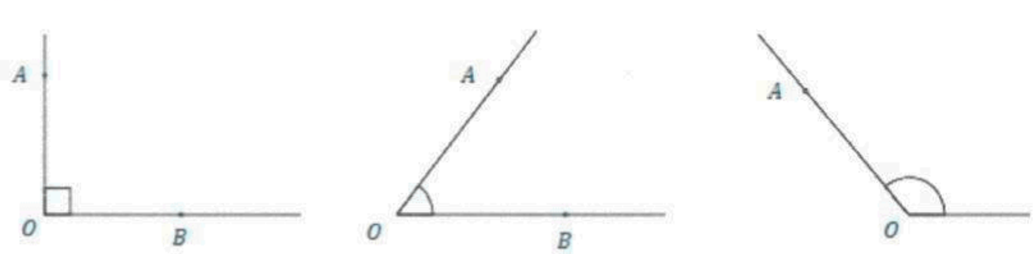
Um ângulo $A\hat{O}B$ chama-se **raso** se seus lados são semi-retas opostas.



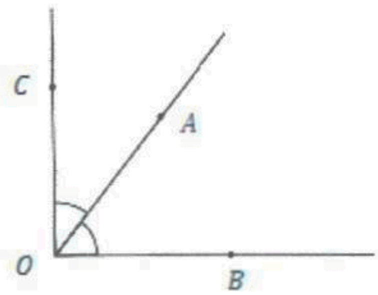
Um ângulo $A\hat{O}B$ chama-se **nulo** se seus lados são semi-retas coincidentes.

Diremos que dois ângulos $A\hat{O}B$ e $A_1\widehat{O_1}B_1$ são ***congruentes*** se eles têm a mesma medida. Adotaremos a notação $A\hat{O}B \equiv A_1\widehat{O_1}B_1$ são congruentes.

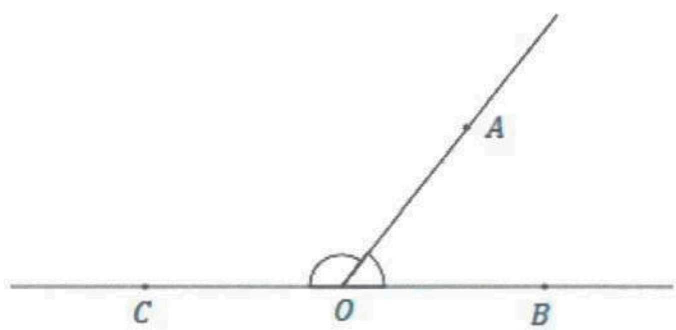
Chamaremos de ângulo **reto**, **agudo** ou **obtuso** todo ângulo conforme sua medida seja igual, menos ou maior que 90°.



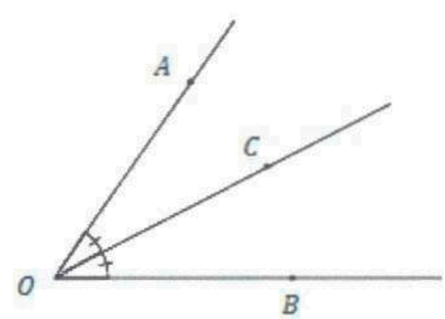
Diremos que dois ângulos são **complementares** se a soma de suas medidas é igual a 90°.



Diremos que dois ângulos são **suplementares** se a soma de suas medidas é igual a 180°.



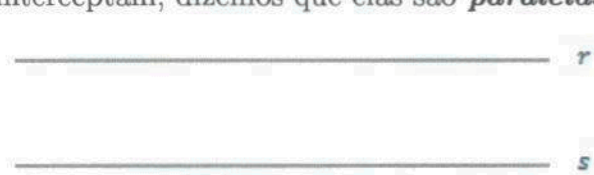
Definição 3.1.3 *Chama-se* ***bissetriz de um ângulo*** $A\widehat{O}B$ *a semirreta* $\overrightarrow{OC}$*, situada entre* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$*, que divide o ângulo em dois ângulos congruentes.*



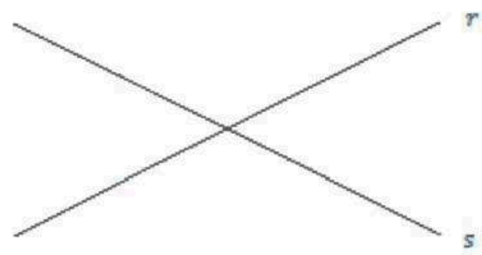
3.1.3 Retas Coplanares

Considere duas retas r e s no plano.

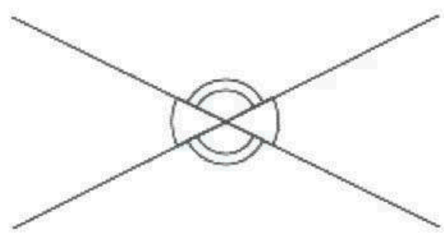
- Se elas não se interceptam, dizemos que elas são ***paralelas*** (e distintas).



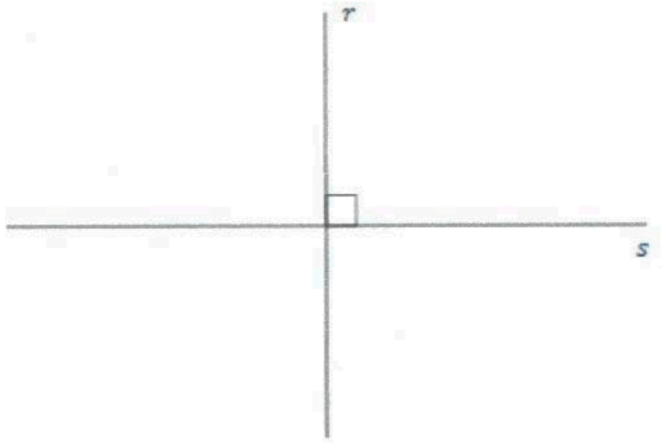
- Se a interseção delas se constituir em apenas um ponto, dizemos que elas são ***concorrentes***.



Observe que retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice, sendo que dois ângulos não opostos pelo vértices são suplementares.

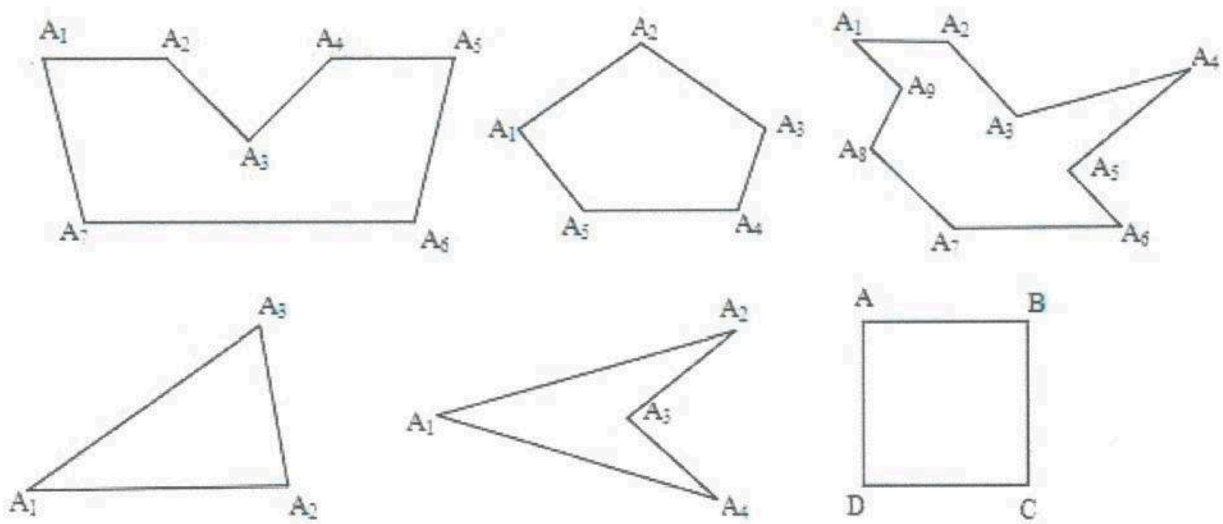


Definimos o ângulo entre duas retas concorrentes r e s como sendo o menor ângulo que elas formam e diremos que elas são **perpendiculares** se este ângulo é reto.



3.2 Polígonos

Chamamos de polígono a região do plano limitada por n segmentos de reta $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}, \ldots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$, em que dois segmentos consecutivos nunca são colineares e dois segmentos não consecutivos jamais se interceptam.



Adotaremos a notação $A_1A_2A_3\ldots A_n$ para representar o polígono determinado pelos segmentos de reta $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}, \ldots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$,.

Chama-se ***lado*** de um polígono qualquer um dos segmentos que o limitam e chama-se ***vértice*** de um polígono qualquer extremidade de um lado do polígono.

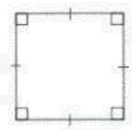
Definição 3.2.1 *Chama-se* ***polígono convexo*** *todo polígono que tem a seguinte propriedade: o segmento de reta que une dois pontos distintos quaisquer pertencentes ao polígono está contido totalmente nele. Se o polígono não possui esta propriedade é chamado de* ***polígono côncavo****.*

Alguns polígonos recebem nomes especiais, de acordo com o número de lados os de vértices que apresentam.

- Triângulo é um polígono que possui três lados.
- Quadrilátero é um polígono que possui quatros lados.

Definição 3.2.2 *Chama-se* ***retângulo*** *o quadrilátero cujos quatro ângulos são retos.*

Definição 3.2.3 ***Quadrado*** *e um quadrilátero cujos os quatro lados são congruêntes e os ângulos são retos.*



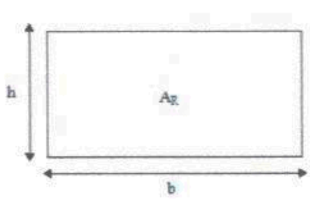
3.2.1 Áreas de alguns polígonos

Área

Medir áreas das figuras geométricas planas consiste, precisamente, em determinar quantas vezes uma figura contém um quadrado de lado unitário. Essa quantidade de vezes é o que definimos por *área* de um figura geométrica plana.

Área do Retângulo

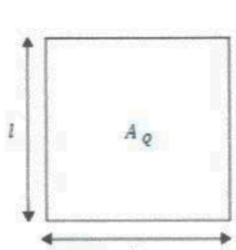
A área de um retângulo é o produto da medida do lado pela medida da altura.



$A_R = bh$

Área do Quadrado

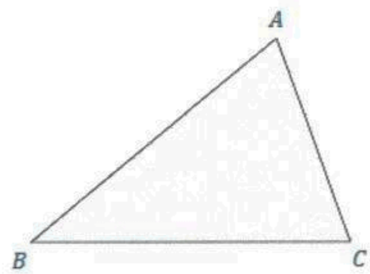
A área de um quadrado é igual ao produto da medida do lado por ela mesma.



$A_Q = l^2$

3.3 Triângulos

Definição 3.3.1 *Chamaremos de **triângulo** a região do plano limitada por três segmentos de retas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, em que os pontos A, B e C não são colineares.*

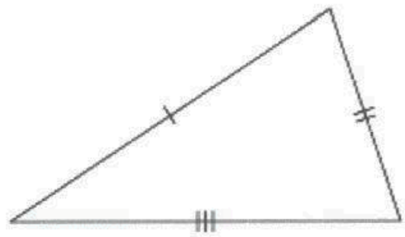


Adotaremos a notação ABC para representar o triângulo determinado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.

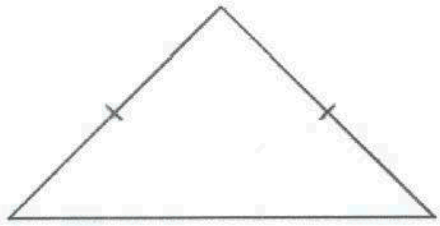
Chama-se ***lado*** de um triângulo ABC qualquer um dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ou $\overline{CA}$; ***ângulo interno*** ou simplesmente ***ângulo*** do triângulo ABC qualquer dos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ e ***vértice*** qualquer um dos pontos A, B ou C.

Classificação dos triângulos quanto aos lados

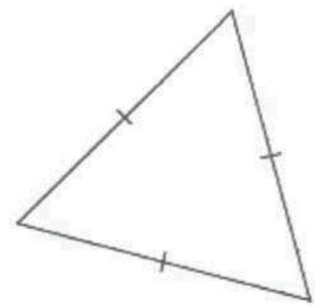
- Um triângulo chama-se ***escaleno*** se as medidas de seus lados são desiguais.



- Se o triângulo tiver pelo menos dois lados congruentes, diremos que ele é ***isósceles***.



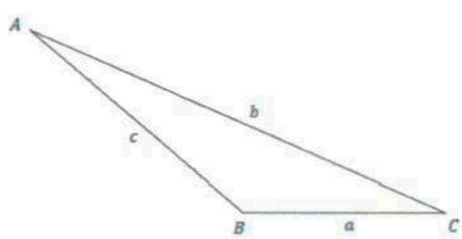
- Caso os três lados tenham a mesma medida, diremos que é ***equilátero***.



3.3.1 Desigualdade Triangular

Num triângulo, a medida de um lado qualquer é sempre menor do que a soma dos outros dois.

Assim, dado o triângulo ABC, sendo a a medida do lado $\overline{BC}$, b a medida do lado $\overline{AC}$ e c a medida do lado $\overline{AB}$, podemos escrever as seguintes relações:

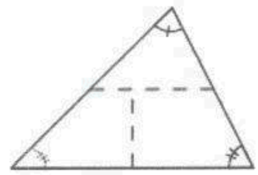


$$\begin{aligned} a &< b+c \\ b &< a+c \\ c &< a+b \end{aligned}$$

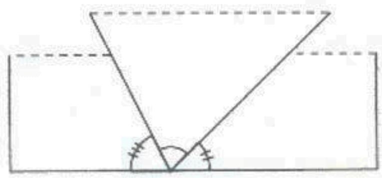
Portanto, comparando o maior lado com a soma dos outros dois, podemos saber se existe ou não triângulo.

3.3.2 Soma dos ângulos de um triângulo

Considere o triângulo a seguir.



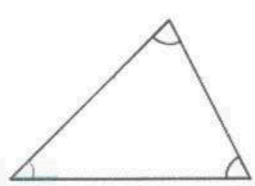
Recorte o triângulo seguindo as linhas pontilhadas. Junte os ângulos do triângulo, fazendo coincidir seus vértices, como na figura.



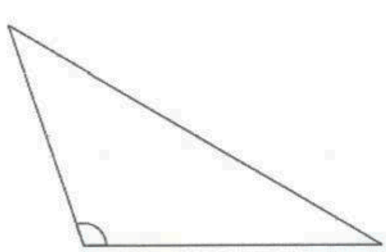
Observe que: *Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a* $180°$.

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

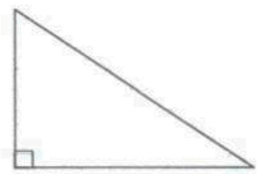
- Um triângulo chama-se ***acutângulo*** se todos os seus ângulos internos são agudos.



- Um triângulo chama-se ***obtusângulo*** se algum de seus ângulos internos é obtuso.



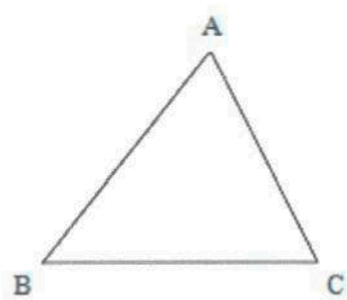
- Um triângulo chama-se ***retângulo*** se um de seus ângulos internos é reto.



Num triângulo retângulo os lados que formam o ângulo reto são chamados de ***catetos*** e o terceiro de ***hipotenusa***.

Num triângulo, um vértice e um lado são ditos opostos se o vértice não é extremidade do lado.

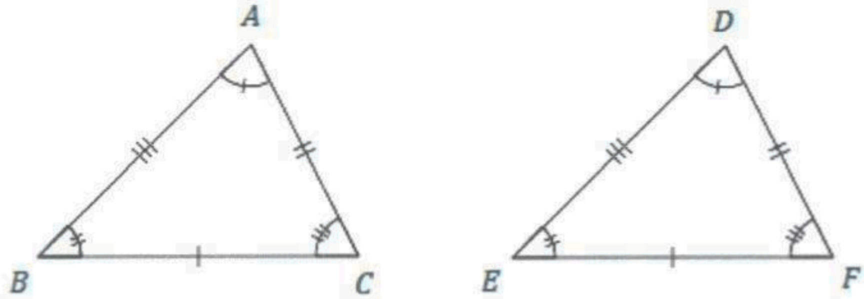
Num triângulo, um ângulo e um lado são ditos opostos se o vértice do ângulo e o lado forem opostos.



No triângulo ABC, são opostos: $\widehat{A}$ e $\overline{BC}$, $\widehat{B}$ e $\overline{AC}$, e, $\widehat{C}$ e $\overline{AB}$. Caso contrário, isto é, se o vértice do ângulo for extremidade do lado, eles são chamados de adjacentes. Por exemplo, $\widehat{A}$ e $\overline{AB}$ são adjacentes, assim como $\widehat{C}$ e $\overline{AC}$.

3.3.3 Congruência de Triângulos

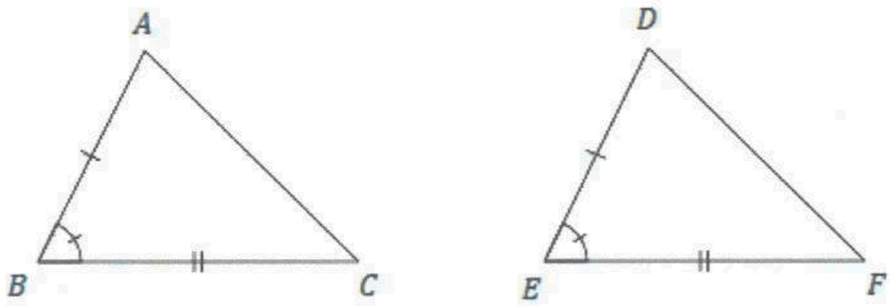
Definição 3.3.2 *Dois triângulos ABC e DEF são ditos **congruentes** e escrevemos $ABC \equiv DEF$ se $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{F}$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$.*



Casos de Congruência

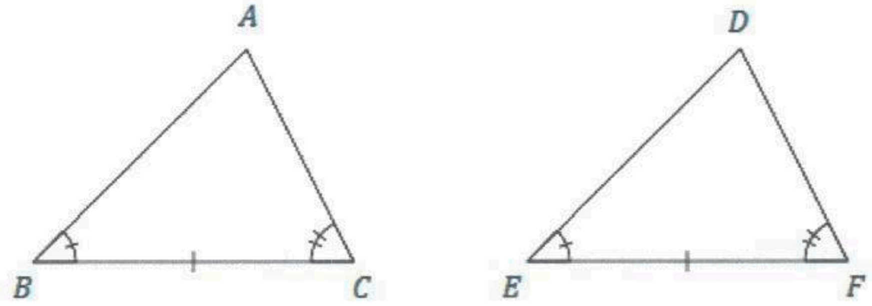
Caso LAL (Lado - Ângulo - Lado)

Se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



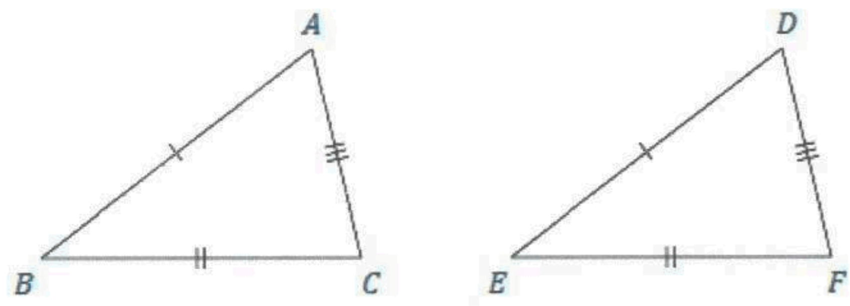
Caso ALA (Ângulo - Lado - Ângulo)

Se dois triângulos possuem um lado e os dois ângulos agudos a ele adjacentes respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



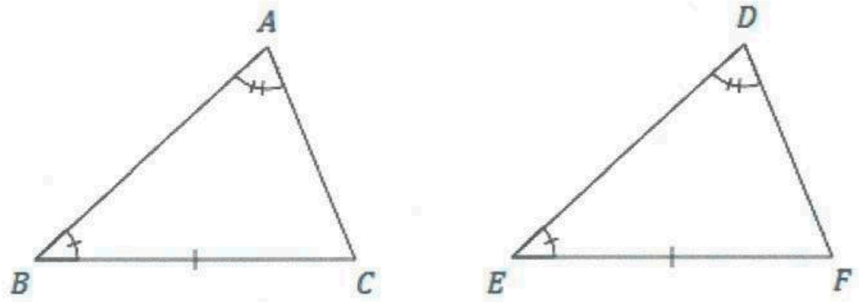
Caso LLL (Lado - Lado - Lado)

Se dois triângulos possuem os três lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



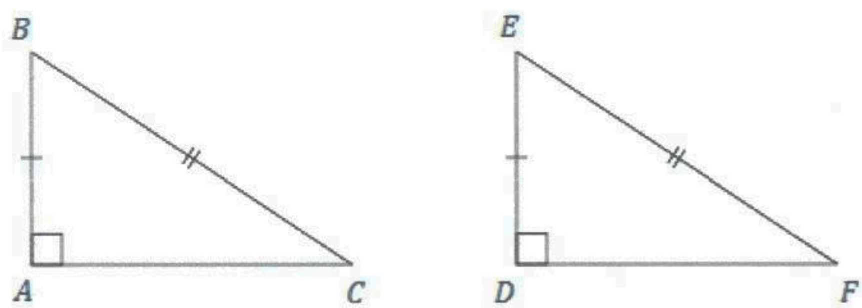
Caso ALA_o (Ângulo - Lado - Ângulo Oposto)

Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



Caso A_rLL (Ângulo Reto - Lado - Lado)

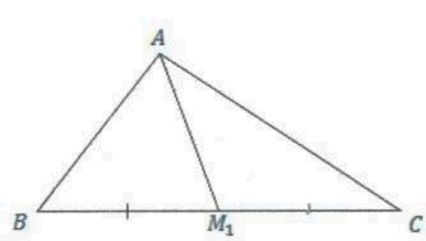
Para que dois triângulos retângulos sejam congruentes basta que um cateto e a hipotenusa de um sejam, respectivamente congruentes, um cateto e a hipotenusa do outro.



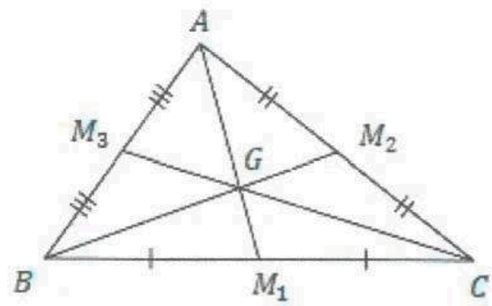
3.3.4 Pontos notáveis de um triângulo

Medianas e Baricentro

Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.

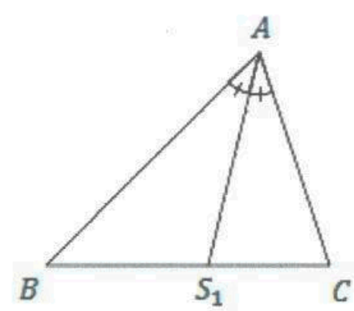


As três mediana de um triângulo encontram-se num ponto, que é o ***baricentro*** do triângulo.

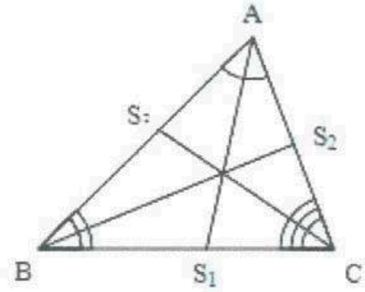


Bissetrizes e Incentro

Bissetriz de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no lado oposto e que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruêntes.

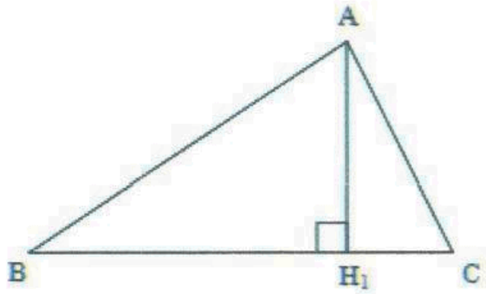


As três bissetrizes de um triângulo encontram-se num ponto, que é o ***incentro*** do triângulo.

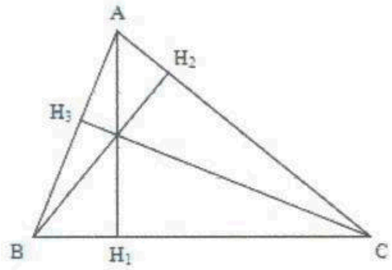


Alturas e Ortocentro

Altura de um triângulo é um segmento perpendicular à reta suporte de um lado, com extremidade nesta reta e no vértice oposto a esse lado.

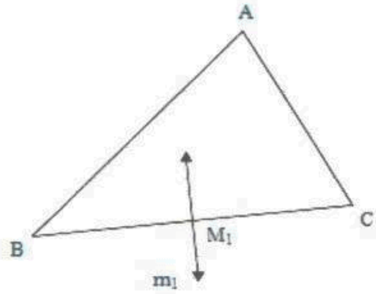


As três alturas, ou os seus prolongamentos, encontram-se num ponto, que é o ***ortocentro*** do triângulo.

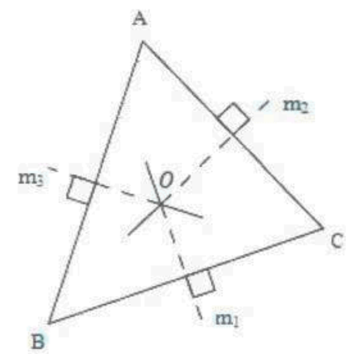


Mediatrizes e Circuncentro

Chama-se ***Mediatriz*** de um segmento $\overline{AB}$ a reta perpendicular a reta r que passa no ponto médio de $\overline{AB}$.

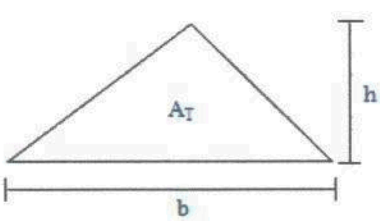


As três mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se num ponto, que é o ***circuncentro*** do triângulo.



Área do Triângulo

A área do triângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base dividido por dois.



$$A_T = \frac{b.h}{2}$$

3.4 Teorema de Tales

Razão de segmentos

A ***razão entre dois segmentos*** é a razão de suas medidas, tomadas na mesma unidade.

Dados dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ a razão entre eles é indicada por $\frac{AB}{CD}$.

Segmentos proporcionais

Se quatros segmentos, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$, formam a proporção

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$$

dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são proporcionais a $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$.

Feixe de retas paralelas

Um conjunto de retas de um plano todas paralelas é chamado um ***feixe de retas paralelas***.

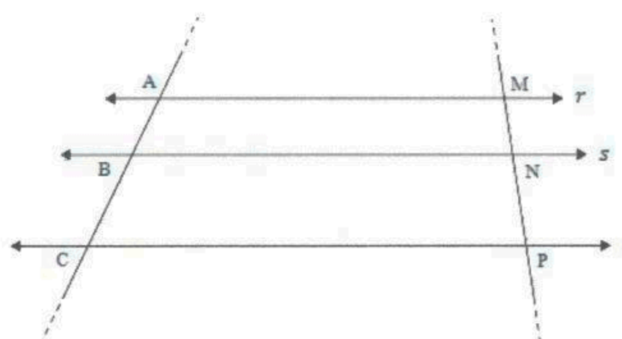
Transversal do Feixe

Uma reta que concorre com todas as retas do feixe é chamada ***transversal desse feixe***.

Teorema 3.4.1 *(Teorema de Tales)*

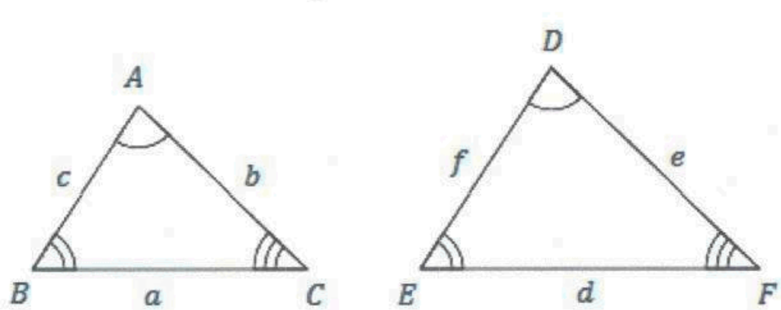
Um feixe de paralelas determina em duas transversais segmentos proporcionais.

$$r//s//t \Longrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$



3.5 Semelhança

Definição 3.5.1 *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são* ***semelhantes*** *quando tem os ângulos internos correspondentes respectivamentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais. Usamos a notação $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} & \equiv & \widehat{D} \\ \widehat{B} & \equiv & \widehat{E} \\ \widehat{C} & \equiv & \widehat{F} \end{cases} \quad e \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Em dois triângulos semelhantes:

- Os ângulos congruentres são chamados ***ângulos correspondentes***.
- Os lados opostos aos ângulos correspondentes são chamados ***lados homólogos***.

Propriedades da Semelhança

(i) Reflexiva: Todo triângulo é semelhante a si mesmo

$$\triangle ABC \sim \triangle ABC$$

(ii) Simétrica: Se um triângulo é semelhante a outro, então este outro é semelhante ao primeiro.

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

(iii) Transitiva: Se um triângulo é semelhante a outro, e esse outro é semelhante a um terceiro triângulo, então o primeiro é semelhante ao terceiro.

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \quad \text{e} \quad \triangle DEF \sim \triangle XYZ \quad \text{então} \quad \triangle ABC \sim \triangle XYZ$$

Teorema 3.5.1 *(Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos)*

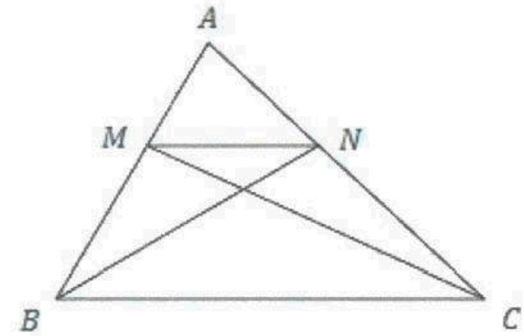
Sejam ABC um triângulo e M e N pontos, respectivamente, entre A e B, e, A e C. Se o segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao segmento $\overline{BC}$, então

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Prova:

Desde que os triângulos AMN e MBN possuem mesma altura h em relação, respectivamente, às bases $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$, vem que;

$$\frac{A_{\triangle AMN}}{A_{\triangle MBN}} = \frac{1/2 \cdot h \cdot AM}{1/2 \cdot h \cdot MB} = \frac{AM}{MB}$$



Pela mesma razão, segue-se que

$$\frac{A_{\triangle AMN}}{A_{\triangle MCN}} = \frac{AN}{NC}$$

Entretanto, a $A_{\triangle MBN} = A_{\triangle MCN}$, pois eles possuem a mesma base $\overline{MN}$ e mesma altura em relação a esta base, dado que o segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao segmento $\overline{BC}$. Desse modo,

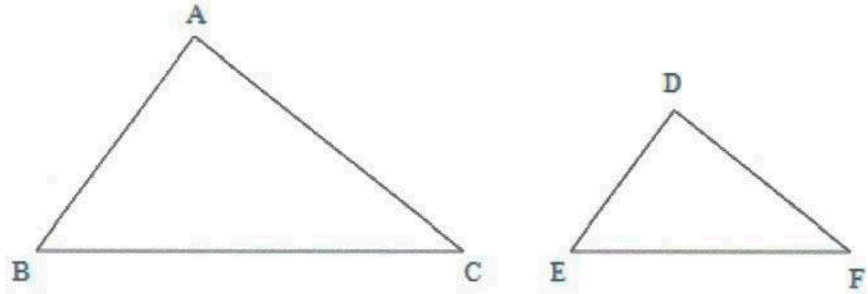
$$\frac{A_{\triangle AMN}}{A_{\triangle MBN}} = \frac{A_{\triangle AMN}}{A_{\triangle MCN}}, \quad \text{donde,} \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

□

Casos de Semelhança

Teorema 3.5.2 *(Casos Semelhança de Triângulos)*

Sejam ABC e DEF triângulos. Para que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ é suficiente que qualquer um dos casos abaixo ocorra:



(i) ***(L.A.L** - Lado-ângulo-lado) :* $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ *e* $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$;

(ii) ***(L.L.L** - Lado-lado-lado) :* $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$;

(iii) ***(A.A** - Ângulo-ângulo) :* $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ *e* $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$;

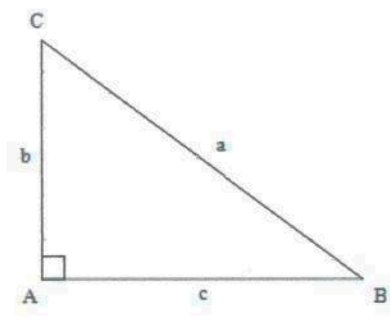
(iv) ***(L.P** - Lados Paralelos):* $\overline{AB}//\overline{DE}$, $\overline{BC}//\overline{EF}$ *e* $\overline{CA}//\overline{FD}$.

3.6 Teorema de Pitágoras

Um dos grandes méritos dos pitagóricos foi mostrar que a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, que já era conhecida muitos séculos antes de Pitágoras, é válida para qualquer triângulo retângulo e não apenas para casos particulares, como antes se acreditava.

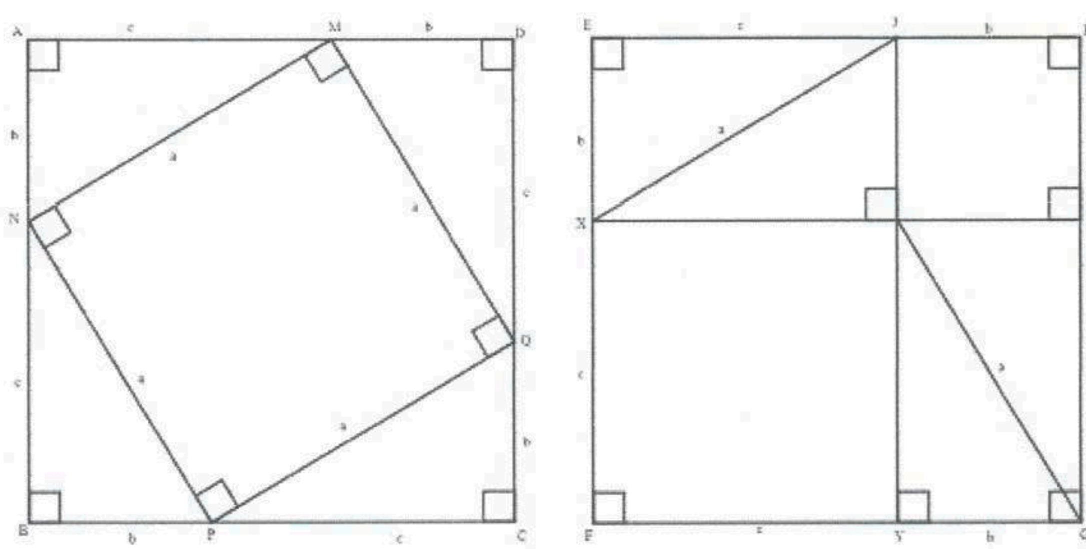
Teorema 3.6.1 *(Teorema de Pitágoras)*

Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.



Dem:

Considere dois quadrados com lados de medidas $b + c$.



Na figura $MNPQ$ é um quadrado com lados de medida a e as demais medidas são triângulos retângulos congruentes com lados de medidas a, b, c.

$$\begin{aligned}
\text{área}ABCD &= \text{área}MNPQ + 4 \cdot \text{área}ANM \\
(b+c)^2 &= a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} \\
(b+c)^2 &= a^2 + 2bc
\end{aligned}$$

Na figura , $XFYL$ e $HJLZ$ são quadrados com lados de medidas c e b, respectivamente; já $EXLJ$ e $LYGZ$ são retângulos congruentes com lados de medias b e c.

$$\begin{aligned}
\text{área } EFGH &= \text{área } HJLZ + \text{área } XFYL + 2 \cdot \text{área } EXLJ \\
(b+c)^2 &= b^2 + c^2 + 2bc
\end{aligned}$$

Como os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ têm lados de medidas iguais, eles têm áreas iguais, ou seja:

$$a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$\square$

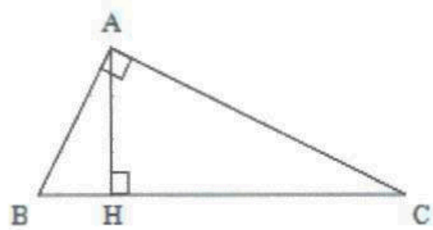
3.6.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

No antigo Egito, com o desenvolvimento da geometria, um triângulo retângulo particular foi muito utilizado para construir "cantos" retos, ou ângulos retos. Dispondo uma corda com treze nós (doze espaços iguais entre os nós) em forma de um triângulo, de tal modo que os lados medissem três, quatro e cinco unidades, os egípcios obtinham um ângulo reto. É o chamado "esquadro egípcios".

Importantes relações entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo e entre outros de seus elementos resultam da aplicação dos conhecimentos adquiridos sobre a semelhança entre triângulos.

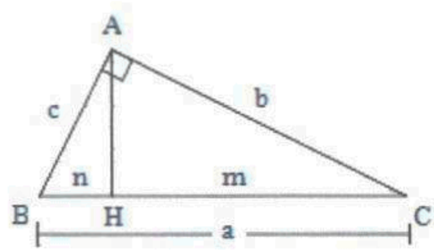
Tais relações são conhecidas como **relações métricas nos triângulos retângulos.**

Observe a figura

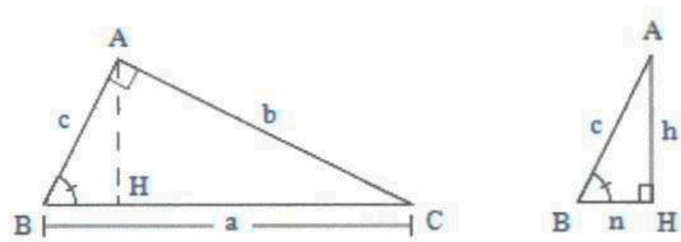


Nessa figura, a altura relativa a $\overline{BC}$ é o segmento de reta da perpendicular a $\overline{BC}$ traçada pelo ponto A. Como A é a extremidade de $\overline{AB}$, $\overline{BH}$ é chamada de ***projeção ortogonal*** de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$. Da mesma forma, $\overline{CH}$ é a ***projeção ortogonal*** de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.

O estudo das relações métricas baseiam-se na semelhança entre os triângulos retângulos $\triangle ABC$, $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$ da figura abaixo.



Primeiro vamos demonstrar que $\triangle ABC \sim \triangle HBA$



$$\left.\begin{array}{lcl} \widehat{B} & \equiv & \widehat{B} \text{ ângulo comun} \\ \widehat{A} & \equiv & \widehat{H} \text{ ângulos retos} \end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HBA$$

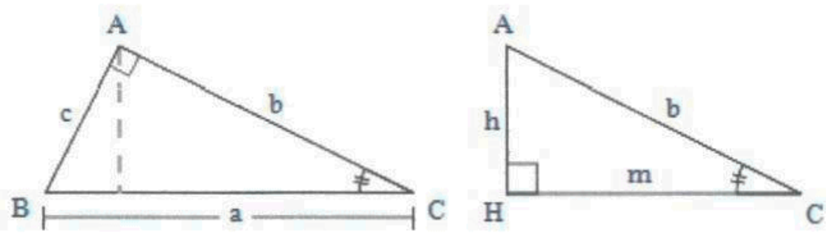
Os $\triangle ABC$ e $\triangle HBA$ têm lados correspondentes proporcionais

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{a}{c} & = & \dfrac{b}{h} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h \\ \dfrac{a}{c} & = & \dfrac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \end{array} \right.$$

Observe que n é a medida da ***projeção ortogonal*** do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$.

Da mesma forma, m é a medida da ***projeção ortogonal*** do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$.

Para demonstrar que o $\triangle ABC \equiv \triangle HAC$ podemos, decompor e separa o triângulo da figura inicial.



$$\left.\begin{array}{rcl} \widehat{C} & \equiv & \widehat{C} \text{ ângulo comun} \\ \widehat{A} & \equiv & \widehat{H} \text{ ângulos retos} \end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HAC$$

Portanto, os $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$ têm lados correspondentes proporcionais

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{a}{b} & = & \dfrac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \\ \dfrac{a}{b} & = & \dfrac{c}{h} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h \end{array} \right.$$

Mostremos que: $h^2 = n \cdot m$

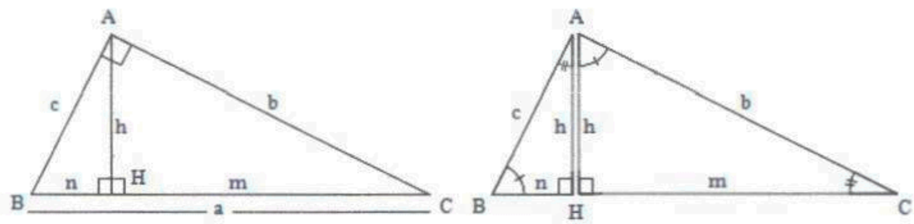
Sabemos que, se dois triângulos são semelhantes a um terceiro, então eles são semelhantes entre si. Desta constatação podemos estabelecer que $\triangle HBA \sim \triangle HAC$, pois ambos são semelhantes ao $\triangle ABC$.

Como os triângulos são semelhantes os lados homólogos são proporcionais

$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m} = \frac{c}{b}$$

Dessa proporções, tiramos a relação $\frac{n}{h} = \frac{h}{m}$ e portanto,

$$h^2 = mn$$



Em resumo:

$$\begin{array}{l} c^2 = an \\ b^2 = am \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{O quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida} \\ \text{de sua projeção sobre a hipotenusa pela medida da hipotenusa.} \end{array} \right.$$

$$h^2 = mn \left\{ \begin{array}{l} \text{O quadrado da medida da altura relativa a hipotenusa é igual ao} \\ \text{produto da medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.} \end{array} \right.$$

$$bc = ah \left\{ \begin{array}{c} \text{O produto das medidas dos catetos é igual o produto das medidas} \\ \text{da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.} \end{array} \right.$$

$$a = m + n \left\{ \begin{array}{c} \text{A medida da hipotenusa é igual à soma das medidas} \\ \text{das projeções dos catetos sobre ela.} \end{array} \right.$$

Na história da Matemática, muitas foram as demonstrações do **teorema de Pitágoras.**

- Vejamos uma delas baseada na semelhança de triângulos.

Para os catetos temos:

$$\left. \begin{array}{l} c^2 = an \\ b^2 = am \end{array} \right\} b^2 + c^2 = am + an \rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n)$$

Como $a = n + m$ temos que: $b^2 + c^2 = a \cdot a \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

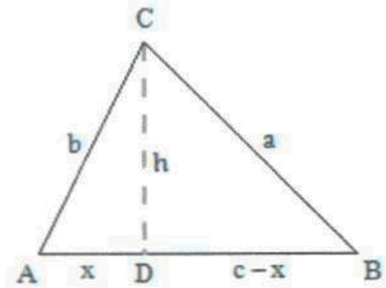
3.6.2 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

Se a, b e c reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo de lados a, b e c é retângulo.

Consideremos um triângulo $\triangle ABC$ com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$

Para $A < 90°$.

Suponhamos que $b \leq c$. Assim, o ponto D, projeção de C sobre AB cai no interior do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$.



Como o $\triangle ADC$ é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$.

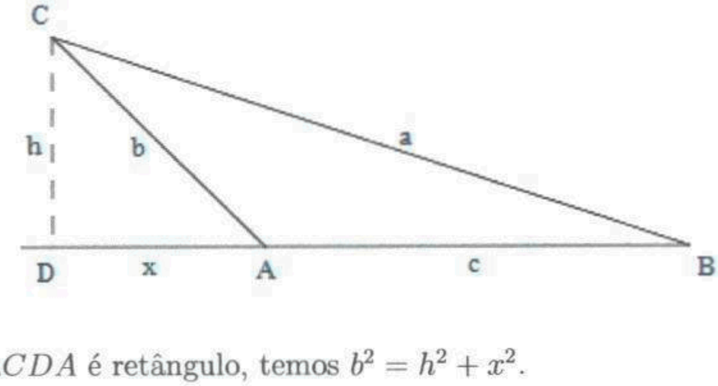
Como o $\triangle BDC$ é retângulo, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c-x)^2 \\ a^2 &= b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

Ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$.

Para $A > 90°$.

Observe que, o ponto D, projeção de C sobre AB cai fora do lado AB. Sejam $AB = c$ e $DA = x$.



Como o $\triangle CDA$ é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$.

Como o $\triangle BDC$ é retângulo, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c+x)^2 \\ a^2 &= b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 + 2cx \end{aligned}$$

Ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$.

Demonstramos então que em um triângulo $\triangle ABC$, de lados a, b e c,

$$\begin{aligned} A = 90^\circ &\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \\ A < 90^\circ &\Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \\ A > 90^\circ &\Rightarrow a^2 > b^2 + c^2 \end{aligned}$$

3.6.3 As ternas pitagóricas

Definição 3.6.1 *Sejam a, b e c inteiros positivos com $a > b$ e $a > c$ dizemos que (b, c, a) é uma terna* ***pitagórica*** *se $a^2 = b^2 + c^2$.*

Uma fórmula que gera ternos pitagóricos

Sendo m e n inteiros positivos com $m > n$ considere:

$$b = m^2 - n^2, \qquad c = 2mn, \qquad a = m^2 + n^2$$

Veja que (b, c, a) é uma terna pitágorica pois:

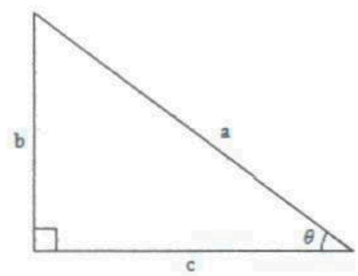
$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2) + (2mn)^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2) = a^2.$$

Assim, para qualquer escolha de números inteiros m e n, o terno (b, c, a) é pitagórico.

3.6.4 Lei dos cossenos

O Teorema de Pitágoras, é um caso particular de um teorema mais geral, a lei dos cossenos.

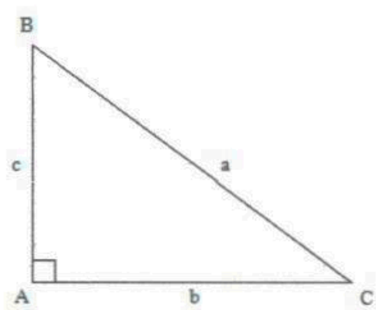
Definição 3.6.2 *Chama-se* **cosseno** *de um ângulo agudo a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.*



$$\cos\theta \;=\; \frac{c}{a}$$

A lei dos cossenos objetiva calcular a medida de um lado a do triângulo quando são conhecidas as medidas dos outros dois lados b e c e a medida do ângulo $\widehat{A}$ que os lados conhecidos formam entre si.

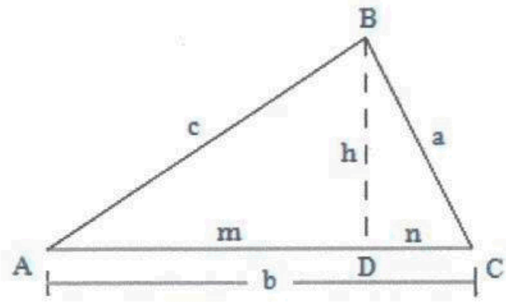
Caso 1. $\widehat{A}$ é reto



O $\triangle ABC$ é retângulo e vale a relação de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Caso 2. $\widehat{A}$ é agudo



ABC é um triângulo com $\widehat{A}$ agudo.

No $\triangle BCD$, que é retângulo:

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (I)$$

No $\triangle BAD$, que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2 \quad (II)$$

Temos também:

$$n = b - m \quad (III)$$

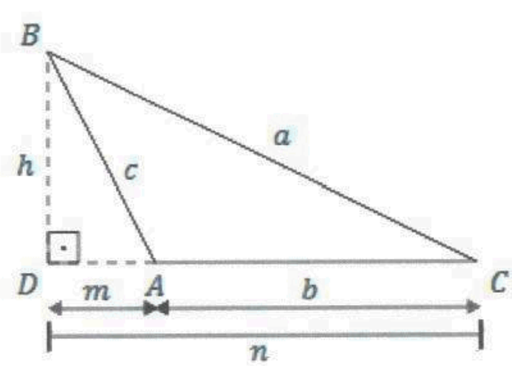
Levando (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Mas, no triângulo BAD: $\cos\widehat{A} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos\widehat{A}$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}.$$

Caso 3. $\widehat{A}$ é obtuso



ABC é um triângulo com $\widehat{A}$ obtuso.

No $\triangle BCD$, que é retângulo:

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (I)$$

No $\triangle BAD$, que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2 \quad (II)$$

Temos também:

$$n = b + m \quad (III)$$

Levando (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b+m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

Mas, no triângulo BAD: $\cos(180° - \widehat{A}) = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos(180° - \widehat{A})$.

Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180° - \widehat{A}).$$

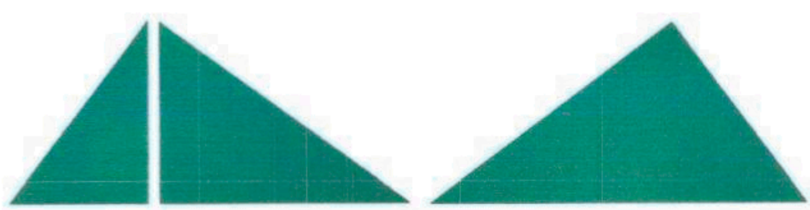
Capítulo 4

Encaminhamentos Metodológicos

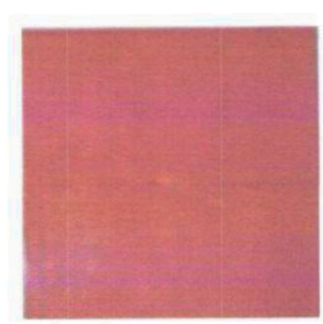
4.1 Construção do Kit

Objetivo: Estimular professores a inovação através do uso de material concreto. Proporcionando aos alunos uma melhor compreensão dos assuntos matemáticos.

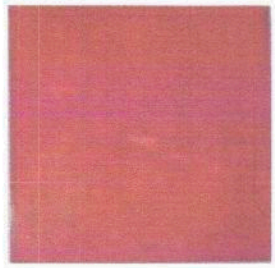
- Dez triângulos retângulos de catetos medindo b e c; sendo que dois, desses triângulos, são cortados pela altura relativa à hipotenusa;



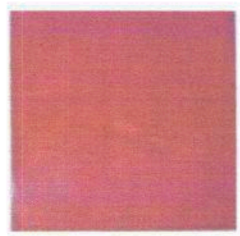
- Um quadrado de lado de medida a;



- Um quadrado de lado de medida b;

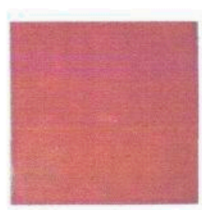


- Um quadrado de lado de medida c;

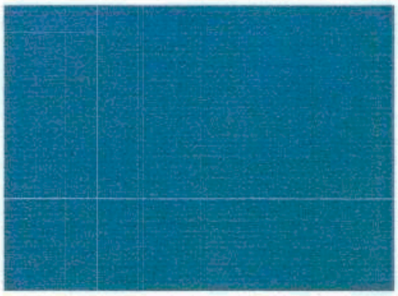


- Um quadrado de lado de medida m;

- Um quadrado de lado de medida h;



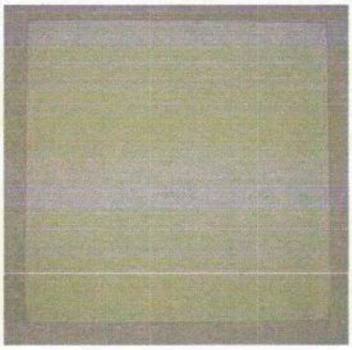
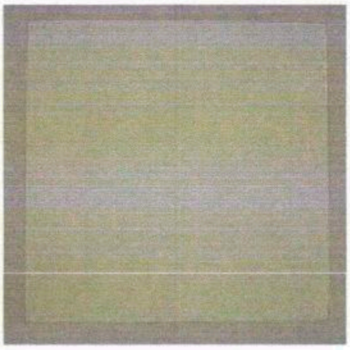
- Um retângulo de lados de medidas a e m;



- Um retângulo de lados de medidas a e n;

- Um retângulo de lados de medidas m e n;

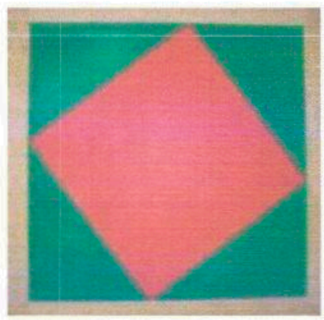
- Duas bases quadricular de lado de medida $b + c$ cada;

4.2 Proposta de Desenvolvimento das Atividades

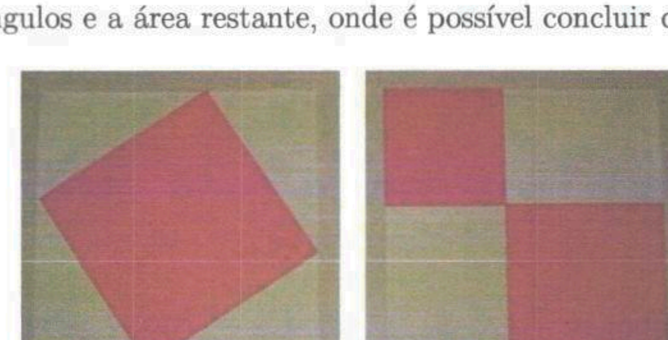
Demonstrar o Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$ *(O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos).*

1. Com o quadrado de lado a e quatro triângulos retângulos, foi montada a primeira base de lado $(b + c)$



2. Com o quadrado de lado b e c e mais quatro triângulos retângulos foi montada a segunda base de lado $(b + c)$

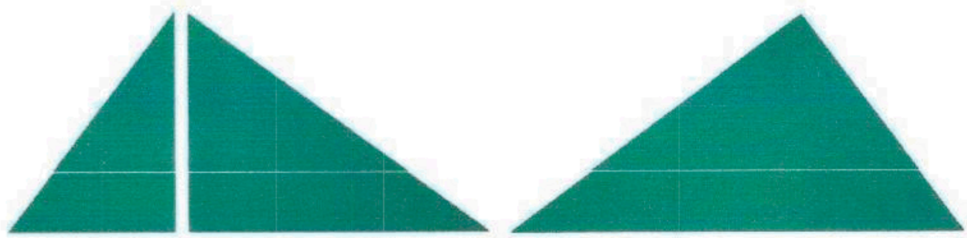
3. Retirar de ambas as bases os triângulos colocados fazendo uma comparação entre os lados dos triângulos e a área restante, onde é possível concluir que $a^2 = b^2 + c^2$.



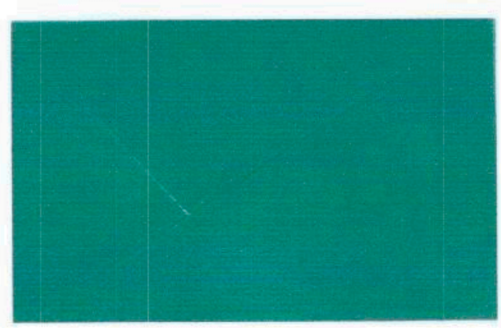
4.2.1 Demonstração das Relações Métricas

Verificar que em um triângulo retângulo o produto da hipotenusa pela altura relativa a esta é igual ao produto dos catetos, ou seja, $a \cdot h = b \cdot c$.

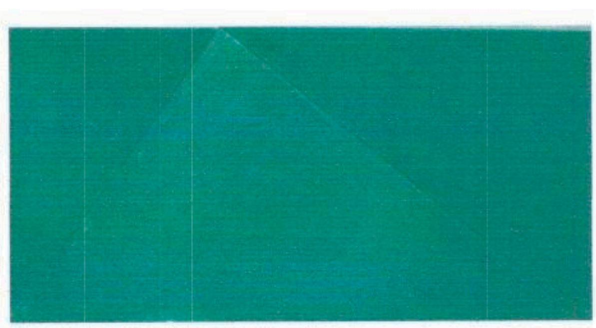
1° passo: Utilizando dois triângulos congruentes, onde um deles o que é dividido em outros dois na altura relativa a hipotenusa.



2° passo: Unindo as hipotenusas dos triângulos, obtemos um retângulo de área dada pelos catetos b e c.



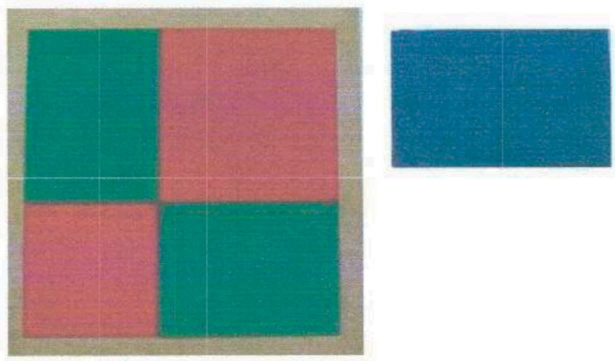
3° passo: Para formar um novo retângulo, posicionamos os catetos b e c de forma que os lados coincidam.



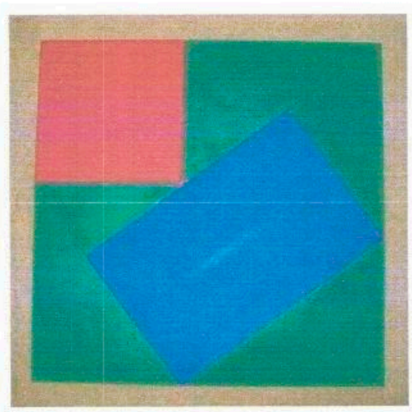
Dessa forma, concluímos que as áreas das figuras diferentes por triângulos congruentes são iguais. Assim, $a \cdot h = b \cdot c$.

Mostrar que no Triângulo Retângulo, $b^2 = a \times m$.

1º passo: Sobre a base medida $b + c$, dispomos os quadrados de medidas b e c, 2 triângulos de catetos b e c e dos de catetos h e n.



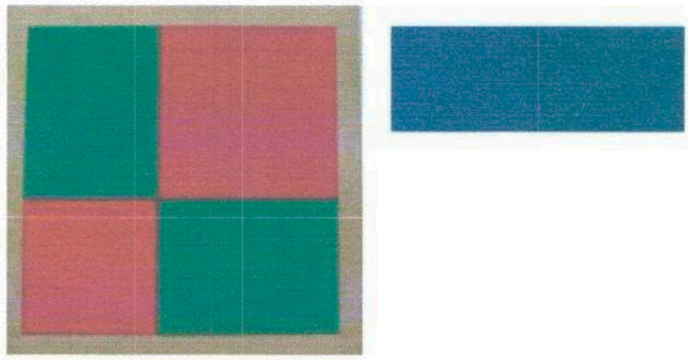
2º passo: Substituir o quadrado de lado b pelo retângulo de lado a e m; as demais peças posicionam-se de forma a permanecer na base.



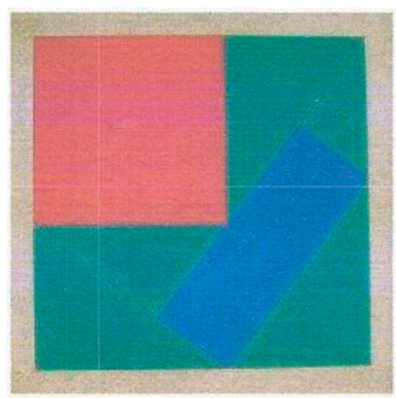
Daí, concluímos que o quadrado de lado b tem a mesma área que o retângulo de medida a e m. Assim, $b^2 = a \times m$.

Queremos Mostrar que no Triangulo Retângulo, $c^2 = a \times n$.

1º passo: Sobre a base medida $b + c$, dispomos os quadrados de medidas b e c, 2 triângulos de catetos b e c e dois de catetos h e n.



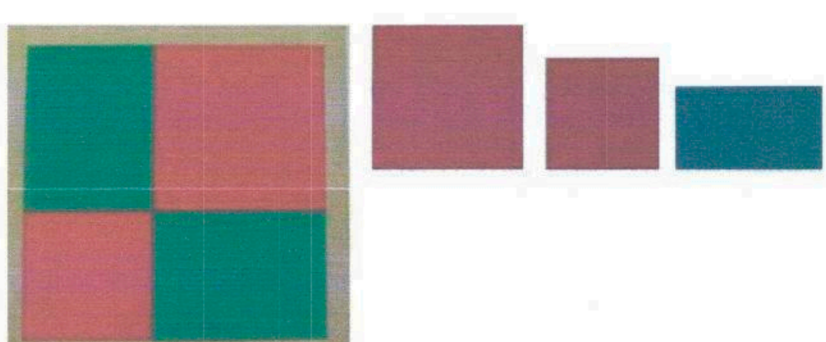
2° passo: Substituir o quadrado de lado c da base, pelo retângulo de lado a e n e dispor as demais peças de forma que estejam contidas na base.



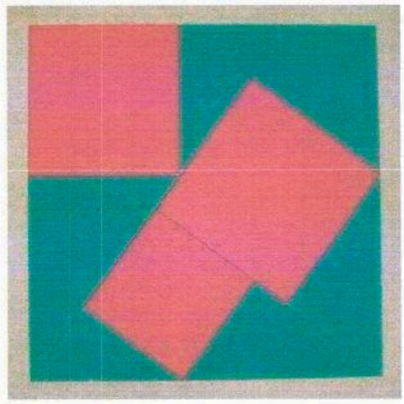
Daí, concluímos que o quadrado de lado c tem a mesma área que o retângulo de medida a e n. Assim, $c^2 = a \times n$.

Mostrar que no Triângulo Retângulo, $h^2 = m \times n$.

1° passo: Sobre a base medida $b + c$, dispomos os quadrados de medidas b e c, 2 triângulos de catetos b e c e dois de catetos h e n.

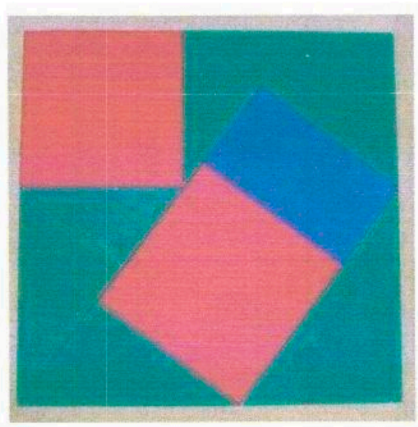


2º passo: Substituir inicialmente, o quadrado de lado de medida b pelos quadrados de lados de medidas h e m.



3º passo: Substituir o quadrado de lado h, pelo retângulo de lados m e n, e dispor as demais peças de forma que estejam contidas na base.

Daí, concluímos que o quadrado de lado h tem a mesma área que o retângulo de lados de medidas m e n.



Logo, $h^2 = m \times n$.

Capítulo 5

Proposta Pedagógica

Tema: O Teorema de Pitágoras

Autor: Jocássia Emanuelle Silva Casado

Introdução: O estudo do Teorema de Pitágoras estabelece que em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos dois catetos. Esse estudo tem várias aplicações, como por exemplo, para calcular altura e distâncias inacessíveis. Utilizaremos como recursos didáticos modelos geométricos dos conceitos através da construção de um Kit pedagógico, bem como a motivação a fatos históricos para levar a compreensão dos conceitos.

Série a que se destina: 9° ano do Ensino Fundamental

Objetivos a serem atingidos: Possibilitar ao aluno o desenvolvimento e aplicação de conceitos matemáticos baseando-se nas relações entre lados e ângulo no triângulo retângulo e compreender o Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo sendo capazes de resolver problemas que envolvam esses conteúdos de modo que possa construir o maior número possível de relações entre os diferentes significados da idéia investigada, estabelecendo conexões entre o novo e o conhecido.

Conhecimento Prévio dos alunos: O aluno necessita de algum conhecimento sobre equações, ângulos e semelhança de triângulos.

Metodologia: Aulas expositivas e dialogadas, reforçando os conceitos através da utilização de material concreto de forma que auxiliem os alunos no desenvolvimento das atividades propostas.

Recursos necessários: régua, tesoura, compasso, canudos, barbante e o Kit pedagógico.

Número de aulas: 12 aulas de 45 minutos.

1ª aula: Semelhança de Triângulos Teorema de Pitágoras

2ª aula: Semelhança de Triângulos Teorema de Pitágoras

3ª aula: Desigualdade Triangular

4ª aula: Desigualdade Triangular

5ª aula: Triângulo Retângulo

6ª aula: Triângulo Retângulo

7ª aula: Teorema de Pitágoras

8ª aula: Teorema de Pitágoras

9ª aula: Teorema de Pitágoras

10ª aula: Relações Métricas no Triângulo Retângulo

11ª aula: Relações Métricas no Triângulo Retângulo

12ª aula: Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Avaliação: Avaliações contínuas, observando a aprendizagem dos alunos no decorrer das aulas, além de partição e frequência no decorrer do desenvolvimento das atividades.

5.1 Desenvolvimento da Proposta Pedagógica

1ª e 2ª Aula: Semelhança de triângulo, área e Teorema de Pitágoras

Objetivo: Fazer uma análise preliminar do conhecimento dos alunos

Material Utilizado: Folha de papel A4

Procedimento: Distribuir para os alunos uma lista de exercícios que aborde todos os assuntos apresentados.

Duração da Aula: 90 minutos

Avaliação da Aula: Nesta aula o professor terá a possibilidade de conhecer o nível de compreensão da turma, identificando as dificuldades apresentadas para com o desenvolvimento de determinados assuntos.

3ª e 4ª Aula: Desigualdade Triangular

Objetivo: Fazer com que os alunos percebam as condições de existência de um triângulo.

Material Utilizado: canudos

Procedimento: Distribuir para a turma um Kit contendo canudos de medidas distintas e pedir para que a partir das medidas dadas tentem construir triângulos. Em seguida, fazer com que os alunos respondam: Com três pedaços quaisquer é possível formar um triângulo, dentre outros questionamentos que envolvam as condições de existência de triângulo.

Duração da Aula: 90 minutos

Avaliação da Aula: O professor irá observar com maior precisão quais alunos compreenderam significativamente as condições de existência para formar um triângulo, além de despertar o interesse dos alunos para o uso do material concreto.

5ª e 6ª Aula: O triângulo retângulo

Objetivo: Fazer com que o aluno entenda um pouco da parte histórica do triângulo e compreender a relação existente entre os lados de um triângulo.

Material Utilizado: barbante, régua, compasso e folha de papel A4

Procedimento: Inicialmente dividir a turma em grupos e distribuir para cada grupo um pedaço de barbante contendo aproximadamente 1,5m pedir que dêem nós a cada 10 cm até obter 13 nós, em seguida pedir que façam como os agrimensores unam o 1º ao 13º nó formando assim um triângulo retângulo (aproveitar esse momento para falar um pouco da parte histórica que envolve esse conteúdo). Logo após, distribuir uma atividade fazendo uso de régua e compasso observar as condições para formação de triângulos e a partir de medidas dadas, identificarem os triângulos formados e por fim, observar para qual tipo de triângulo é válida a condição do Teorema de Pitágoras.

Duração da Aula: 90 minutos

Avaliação da Aula: O professor avaliará a compreensão dos alunos para com a construção do triângulo retângulo, além de fazer com que percebam que a relação do Teorema de Pitágoras só é valida nesse tipo de triângulo.

7ª 8ª e 9ª Aula: O Teorema de Pitágoras

Objetivo: Fazer com que o aluno compreenda a demonstração do teorema de Pitágoras.

Material Utilizado: Kit pedagógico

Procedimento: O professor apresentará cada peça que compõe o kit, mostrando as relações existentes entre os lados de cada figura, reforçando os conceitos de semelhança e congruência de triângulos. Depois de reforçar esses conceitos, demonstrar o Teorema de Pitágoras. Com o quadrado de lado de medida a e quatro triângulo retângulos montar a primeira base de lado de medida (b+c). Em seguida, com os quadrados de lado de medida b e c montar o segunda base de lado de medida (b+c). Retirar de ambas as bases os triângulos colocados, concluindo assim a demonstração do teorema de Pitágoras, onde $a^2 = b^2 + c^2$. Aplicar um exercício para concretizar a aprendizagem dos alunos.

Duração da Aula: 1h e 30min

Avaliação da Aula: O professor ajudará na aprendizagem dos alunos para com o conteúdo do Teorema de Pitágoras, onde ficou clara essa relação através da utilização

10ª 11ª e 12ª Aula: Relações Métricas no Triângulo retângulo

Objetivo: Fazer com que o aluno compreenda cada passo da demonstração através da utilização do Kit pedagógico.

Material Utilizado: Kit pedagógico

Procedimento: Ver item 4.2.2 (demonstração das relações métricas)

Duração da Aula: 1h e 30min

Capítulo 6

Estudo Exploratório

Objetivo: Fazer com que os alunos apresentem suas dúvidas com relação ao conteúdo proposto, assim, poderá ser feita uma revisão de conceitos básicos envolvidos e em seguida à aplicação do Teorema de Pitágoras através do material didático para que só assim possa suprir as dificuldades apresentadas. Todas as atividades foram realizadas em duplas.

1ªAula

A aplicação foi feita após as aulas dadas pelo professor em exercício sobre Semelhança de Triângulos, área e o Teorema de Pitágoras, mesmo assunto que tratamos. Por tal motivo, inicialmente, distribuímos uma atividade contendo cinco questões sobre os assuntos estudados anteriormente, para que pudéssemos fazer uma análise do conhecimento dos alunos, em relação aos conteúdos.

2ª Aula

Material Utilizado: Canudos

O objetivo dessa aula é fazer com que os alunos percebam que nem sempre com três medidas é possível formar um triângulo.

Inicialmente foi distribuído para cada dupla um kit contendo quatro canudos de medidas: $4cm, 5cm, 9cm$ e $12cm$. Foi mostrado aos alunos que com as medidas $5, 9$ e $12cm$ é possível formar um triângulo. Em seguida foi entregue uma atividade (anexo), para que os alunos pudessem verificar se era possível formar triângulos a partir das medidas solicitadas, fazendo uma análise por escrito do que compreenderam. Nessa aula os alunos perceberam que nem sempre com três medidas é possível formar um triângulo e das medidas solicitadas só foi possível construir um triângulo com as medidas $4, 9$ e $12cm$.

A maioria dos alunos conseguiram justificar sua resposta com precisão, compreenderam significativamente que para formar um triângulo é necessário que a soma de quaisquer duas medidas seja maior que a terceira. A aula foi satisfatória, deixando claro o interesse dos alunos com atividades complementares que envolvam material lúdico.

3ª Aula

Material utilizado: barbante, régua e compasso.

Nesse terceiro momento, trabalhamos com a parte histórica. Mostramos que antigamente no Egito, os agrimensores utilizavam cordas com nós para medirem as terras. Para que eles compreendessem melhor o assunto, mostramos com um barbante medindo cerca de $1,5m$ que dando-se um nó a cada $10cm$ até obter 13 nós, de forma a coincidir o 13º nó com o 1º é possível formar um triângulo retângulo como era feito pelos agrimensores.

A turma foi divida em cinco grupos para que a observação fosse feita com mais eficácia. Em seguida as duplas voltaram a se reunir para resolver a atividade que foi distribuída. Nessa atividade os alunos teriam que verificar, com ajuda de régua e compasso, se sempre é possível construir um triângulo retângulo a partir de três números consecutivos. Algumas medidas foram propostas para que a verificação fosse feita e analisada. Os alunos conseguiram observar que nem sempre é possível formar um triângulo retângulo com três números consecutivos. Assim, a introdução da relação de Pitágoras foi feita sem nenhum problema, fazendo com que os alunos compreendessem que ela só é válida no triângulo retângulo.

A experiência foi bastante satisfatória, estimulando os alunos a trabalharem com régua e compasso, material pouco utilizado nas aulas, levando-o a compreender temas que são repassados, muitas vezes, sem uma lógica matemática.

4ª Aula

Material utilizado: folha A4, régua, tesoura e o Kit Pedagógico

Nessa aula formalizamos o Teorema de Pitágoras através das dobraduras. A cada dupla foi distribuído uma atividade contendo: os passos para desenvolvimento da demonstração do Teorema e questionamentos sobre o porquê da relação existente entre as áreas dos "quadradões" e os lados dos triângulos, podendo-se assim chegar a concretização do Teorema.


5ª Aula

Para finalizar, distribuímos uma lista de exercícios contendo cinco questões, para comparar com os que foram feitos no início do trabalho, lembrando que o nível desse segundo lista é bem mais elevado, comparado à primeira.


Considerações Finais

Enfatizamos nessa proposta que a experiência com o uso de material concreto em sala de aula, desperta nos alunos ações que contribuem para a socialização do conhecimento por meio de técnicas inovadoras de ensino da matemática.

Com o desenvolvimento dessas atividades os alunos tornam-se capazes de construir o seu próprio conhecimento, de forma a relacionarem os conteúdos matemáticos com fatos reais do cotidiano, entendendo a importância desse ciência no seu dia-a-dia.

Assim, no decorrer de todo trabalho percebe-se a necessidade de ter o aluno como foco principal de seu aprendizado, contribuindo na sua formação sendo um ser que pensa e colabora para o seu próprio conhecimento.

Desse modo, há uma grande influência por parte dos professores em buscar inserir em sua metodologia de ensino ferramentas que auxiliem e facilitem o processo de ensino aprendizagem da matemática, motivando,instigando, desafiando o aluno e convidando-o a conhecer a beleza existente no mundo matemático.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL.*Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[2] BOYER, Carl B. Historia da Matemática: 2ª edição, São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[3] CAJORI, Florian. Uma Historia da Matemática. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna LTDA, 2007.

[4] D'AMBROSIO, Ubiratan, 1932. *Educação Matemática: da teoria a prática.* Campinas, SP: Papirus, 1996.

[5] DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática: Ensino Fundamental.* ilustradores Alcy Linhares, Grafos. São Paulo: Ática, 2005.

[6] DOLCE, Osvaldo. *Fundamentos de Matemática elementar 9: geometria plana.* Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. - 8ed. - São Paulo: Atual, 2005.

[7] FREIRE, P., FAUNDEZ, A. *Por uma pedagogia da pergunta.* 4 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

[8] GUELLI, Oscar. *Contando a História da Matemática/Dando corda a Trigonometria.* São Paulo: Editora Ática, vol. 6, 2009.

[9] IEZZI, Gelson. *Matemática e realidade: 9º* Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Marchado. 6 ed. São Paulo: Atual 2009.

[10] LORENZATO, S. *Por que não ensinar geometria?* A Educação Matemática em Revista - Geometria. Blumenau, n. 4, p. 03-13, set. 1995.

[11] MOYSÉS, Lucia. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.* Campinas, SP: Papirus, 1997.

[12] NASSER, Lílian. *A Construção do Pensamento Geométrico.* Palestra apresentada. Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática IV São Leopoldo, Rio Grande Sul. 1998.

[13] NASSER, Lilian e Lucia Tinoco. Curso Básico de geometria. - 3ªed.- Rio de Janeiro, UFRJ/ IM. Projeto Fundão

[14] NASSER, Lilian e SANT'ANNA, Neide F.P. *FuGeometria segundo a Teoria de van Hiele.* Rio de Janeiro, Editora UFRJ. 1997.

[15] RODNEY, Carlos Bassanazi. . *Ensino - aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* 3 ed. - São Paulo: Contexto, 2006.

[16] Disponível em: http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2004/artigos/eixo10/oteoremadepitagoras/linebreak.pdf, acessado em 15/05/2010.